НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 517.5

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
_____ О.І. Клесов
« 08 » червня 2022 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: « Умови на коефіцієнти степеневого ряду, що забезпечують належність суми ряду класу Гарді H_1»

Виконала:
студентка ІІ курсу магістратури, групи ОМ-01мн
Хацевич Наталія Іванівна _____

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Задерей Петро Васильович
_____

Рецензент:
Доктор фіз.-мат. наук, снс,
Провідний науковий співробітник відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України,
А.С. Сердюк _____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _____

Київ – 2022 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.І. Клесов

« 02 » лютого 2022 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Хацевич Наталії Іванівні

1.Тема дисертації «Умови на коефіцієнти степеневого ряду, що забезпечують належність суми ряду класу Гарді H_1», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Задерей Петро Васильович, затверджені наказом по університету від «25» травня 2022 р. № НС/372/2022.

2. Термін подання студентом дисертації 7 червня 2022 р.

3. Об'єктом дослідження є тригонометричні ряди, ряди Фур'є, степеневі ряди і ряди Тейлора.

4. Предметом дослідження є умови на коефіцієнти степеневого ряду, при виконанні яких даний степеневий ряд буде рядом Тейлора функції з класу Гарді H_1.

5. Перелік завдань, які потрібно виконати:

1) Ознайомитися з літературою та навести означення тригонометричного ряду, ряду Фур'є, степеневого ряду та ряду Тейлора;

2) Ознайомитися з уже відомими результатами теми нашої магістерської дисертації;

3) Довести теорему про умови на коефіцієнти степеневого ряду, при виконанні яких даний ряд буде рядом Тейлора функції з класу H_1;

4) Навести деякі наслідки, які випливають з нашої теореми.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного матеріалу): 16 слайдів.

7. Дата видачі завдання 2 лютого 2022 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Отримання та обговорення головної задачі магістерської дисертації	02.02.22-06.02.22	Виконано
2	Огляд літератури та вивчення основних означень та тверджень	07.02.22-13.02.22	Виконано
3	Розгляд теорем, в яких показані необхідні та достатні умови	14.02.22-13.03.22	Виконано

	інтегровності дійсних тригонометричних рядів		
4	Ознайомлення з основними властивостями класів Гарді H_1	14.03.22-27.03.22	Виконано
5	Метод Абеля-Пуассона підсумовування тригонометричних та степеневих рядів	28.03.22-10.04.22	Виконано
6	Доведення теореми, про умови на коефіцієнти степеневого ряду, при виконанні яких даний ряд буде рядом Тейлора функції з класу H_1	11.04.22-24.04.22	Виконано
7	Висновки	25.04.22-08.05.22	Виконано
8	Оформлення магістерської дисертації	09.05.22-05.06.22	Виконано

Студент Н. І. Хацевич

Науковий керівник П. В. Задерей

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 40 сторінок, 20 слайдів презентації, 17 першоджерел.

Дослідження, представлені в даній магістерській дисертації, присвячені знаходженню умов на коефіцієнти степеневих рядів, при яких ці ряди будуть рядами Тейлора функцій з класу H_1.

Актуальність роботи.

Метою даної роботи є встановлення умов на коефіцієнти степеневих рядів, при виконанні яких функції представлені даними рядами будуть належати класу H_1, а також встановлення асимптотичної формули для інтеграла від модуля функції заданої степеневим рядом на одиничному колі.

Об'єктом дослідження є функції комплексної змінної z, які є регулярними в D і належать класу H_1.

Предметом дослідження є умови на коефіцієнти степеневого ряду, при яких даний ряд буде рядом Тейлора функції $f \in H_1$.

Дисертація носить теоретичне значення, її результати можуть використовуватися, при одержані інших результатів, що стосуються рядів Тейлора з класів Гарді.

Ключові слова: тригонометричний ряд, ряди Фур'є, коефіцієнти ряду Фур'є, степеневі ряди, ряди Тейлора, класи Гарді, умови інтегровності степеневих рядів.

ABSRACT

Master's thesis: 40 pages, 20 slides of presentation, 17 primary sources.

The research presented in this master's dissertation is devoted to finding conditions for the coefficients of power series at which these series will be Taylor series of functions of class H_1.

Relevance of the work.

The aim of this work is to establish conditions for power series coefficients under which the functions represented by these series will belong to class H_1, as well as to establish an asymptotic formula for the integral of the modulus of a function given power series on a unit circle.

The object of the study are the functions of the complex variable z, which are regular in D and belong to the class H_1.

The subject of the study is the conditions for the coefficients of the power series of the series, at which this series will be the Taylor series of the function $f \in H_1$.

The thesis is of theoretical significance, its results can be used for obtaining other results concerning the Taylor series from the Garde classes.

The dissertation is of theoretical importance, its results can be used to obtain other results related to Teylor series from Hardy classes.

Keywords: trigonometric series, Fourier series, coefficients of Fourier series, Hardy classes, conditions for integrability of power series.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ 8

Вступ 9

РОЗДІЛ 1 10

1.1. Основні позначення і означення 10

1.2. Необхідні та достатні умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів 12

РОЗДІЛ 2 15

2.1. Класи функцій H_p та деякі їх властивості 15

2.2. Зв'язок степеневих рядів з рядами Фур'є 20

2.3. Метод Абеля-Пуассона підсумовування тригонометричних та степеневих рядів 23

РОЗДІЛ 3 27

3.1. Додаткові теоретичні відомості до основної задачі 27

3.2. Умови на коефіцієнти степеневого ряду, при виконанні яких даний ряд є рядом Тейлора функції з класу H_1 29

3.3. Основна теорема 30

3.4. Наслідки 36

ВИСНОВКИ 38

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 39

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{C}$ – множина комплексних функцій;

$\mathbb{R}$ - множина дійсних чисел;

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\exists$ - квантор існування, «існує»;

$\forall$ – квантор загальності, «для будь-якого»;

$\{a_k\} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ – послідовність дійсних чисел;

$\Delta a_k \coloneqq a_k - a_{k+1}, k = 0,1,2, \dots;$

$\Delta^2 a_k \coloneqq \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}, k = 0,1,2, \dots;$

$a_k \downarrow 0$ – монотонно спадна до нуля послідовність дійсних чисел $\{a_k\}$;

L_p – простір 2π-періодичних сумовних в p-тому степені функцій;

$\|f\|_p$ – норма функцій f у просторі L_p;

H_p – клас Гарді, аналітичних в одиничному крузі функцій.

Вступ

Магістерська дисертація присвячена встановленню умов на коефіцієнти степеневих комплекснозначних рядів, при виконанні яких даний ряд є рядом Тейлора функції з класу Гарді H_1.

Теорія тригонометричних рядів відіграє важливу роль в розвитку теорії функцій і є достатньо розвиненою областю математичного аналізу.

Однією з важливих задач теорії тригонометричних рядів є задача, про умови на коефіцієнти ряду, при виконанні яких функція представлена цим рядом буде належати класу сумовних функцій. Таку ж задачу можна поставити і для степеневих рядів, заданих в одиничному крузі. Ці дві задачі пов'язанні між собою.

У даній роботі розглядаються тригонометричні ряди, ряди Фур'є, степеневі ряди, ряди Тейлора та зв'язок між ними.

Дана магістерська дисертація складається із 3-х розділів.

Перший розділ присвячений огляду літератури та умовам на коефіцієнти тригонометричного ряду, при виконанні яких ряд буде рядом Фур'є сумовної функції.

В другому розділі розглядаються функції класу Гарді, надається означення класів функцій H_p та показується зв'язок між тригонометричними і степеневими рядами.

В третьому розділі сформульована та доведенна основна теорема даної магістерської дисертації, також встановлено умови на коефіцієнти ряду, при виконанні яких даний степеневий ряд буде рядом Тейлора функції з класу Гарді H_1, та наведено деякі наслідки, які випливають з нашої основної теореми.

РОЗДІЛ 1.

1.1. Основні позначення і означення

В даному розділі ми :

- наведемо основні означення та додаткові твердження, якими будемо користуватися в майбутньому,
- розглянемо літературу, де приводяться умови на коефіцієнти тригонометричного ряду, при виконанні яких ряд буде рядом Фур'є функції з класу L_p .

Розглянемо клас $L_p, 1 \leq p < \infty$, тобто, множину 2π- періодичних сумовних в p-тому степені функцій f із скінченною нормою :

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Означення 1.1.1 : *Тригонометричним рядом називається ряд виду :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \qquad (1.1.1)$$

де t - дійсна змінна, а коефіцієнти $a_0, a_1, b_1, \dots$ не залежать від t, довільні дійсні числа.

Тригонометричний ряд (1.1.1) є рядом Фур'є, якщо існує функція $f \epsilon L_1$ така, що коефіцієнти ряду (1.1.1) обчислюються за формулами Фур'є:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k = 0,1,2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1,2, \dots.$$

Згідно з прийнятою термінологією в теорії тригонометричних рядів під терміном «інтегровність тригонометричного ряду» розуміємо «інтегровність

суми тригонометричного ряду», а умови на коефіцієнти ряду, які забезпечують інтегровність суми даного ряду, називають умовами інтегровності.

Надалі замість ряду (1.1.1) будемо окремо розглядати два ряди :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt, \tag{1.1.2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt, \tag{1.1.3}$$

де $a_0, a_k, b_k, k = 1,2, \dots -$ деякі дійсні числа. Ряди (1.1.2) і (1.1.3) досліджуються окремо, оскільки умови інтегровності цих рядів різні. Крім того, відрізняються не тільки умови інтегровності рядів (1.1.2) і (1.1.3), а і методи їх досліджень.

Наведемо декілька означень, які будемо використовувати надалі.

Послідовність $\{a_k\}$ *називатимемо* :

- ***нуль-послідовністю***, *якщо*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0\,; \tag{1.1.4}$$

- ***послідовністю обмеженої варіації***, *якщо*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty\,; \tag{1.1.5}$$

$$\Delta a_k = a_k - a_{k+1}\ \forall\ k = 0,1,2 \dots;$$

- ***випуклою***, *якщо при* $k = 1, 2, \dots$

$$\Delta^2 a_k = \Delta(\Delta a_k) = a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geq 0,$$

- ***квазівипуклою***, *якщо*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)|\Delta^2 a_k| < \infty.$$

Нуль-послідовності, які монотонно прямують до 0 будемо позначати $a_k \downarrow 0$.

1.2. Необхідні та достатні умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів

Розглянемо, умови на коефіцієнти, при яких ряди (1.1.2) і (1.1.3) будуть збігатися на певній множині.

Теорема 1.2.1 [1]

Ряд (1.1.2) збігається майже скрізь, окрім можливо точок $x \equiv 0(mod\ 2\pi)$*, якщо,* $a_k \downarrow 0$*;*

Ряд (1.1.3) збігається скрізь на $\mathbb{R}$*, якщо* $b_k \downarrow 0$*;*

Ряди (1.1.2), (1.1.3) збігаються рівномірно для довільного $\delta > 0$*, при* $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$.

Однією з важливих задач в теорії тригонометричних рядів є задача про знаходження умов на коефіцієнти a_0, a_k, b_k, $k = 1,2,\ldots$ ряду (1.1.1), при виконанні яких тригонометричний ряд буде рядом Фур'є функції з класу L_p, $p \geq 1$.

Завдяки теоремі Рісса-Фішера, ця задача легко розв'язується в просторі L_2.

Теорема Рісса-Фішера [2] *Необхідною і достатньою умовою для того, щоб ряд (1.1.1) був рядом Фур'є функції з класу* L_2 *є збіжність ряду:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}({a^2}_k + {b^2}_k) < \infty.$$

При цьому має місце наступна рівність :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}({a_k}^2 + {b_k}^2).$$

Постає питання, чи можна довести таке просте та красиве твердження як теорема Рісса-Фішера, при p відмінних від 2. На жаль, при $p = 1$ ця задача розв'язується не так просто.

Розв'язок цієї задачі почав в 1913 році В. Юнг [9]. Ним було показано, що ряд (1.1.2) вигляду :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt,$$

буде рядом Фур'є, якщо послідовність $\{a_k\}$ є нуль послідовністю ($\lim_{k\to\infty} a_k = 0$) і є випуклою, тобто

$$\Delta^2 a_k \geq 0, \forall k = 0, 1, 2 \ldots,$$

де $\Delta^2 a_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$.

А для ряду з синусів (1.1.3) коефіцієнти якого $b_k \downarrow 0$, необхідною і достатньою умовою інтегровності ряду є

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} < \infty.$$

Зауважимо, що для ряду з косинусів (1.1.2), коефіцієнти якого монотонно прямують до 0, умова є достатньою, але не є необхідною для інтегровності ряду . Тобто, з того, що ряд (1.1.3) коефіцієнти якого прямують до 0 є рядом Фур'є, випливає що ряд (1.1.2) також є рядом Фур'є.

Продовжив вивчати цю задачу А.М. Колмогоров [3]. В 1923 р. ним [3] було встановлено, що якщо $a_k \to 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 a_{k-1}| < \infty$$

то ряд (1.1.2) вигляду :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

є рядом Фур'є сумовної функції.

А в 1964 р. С.О. Теляковським [4] було доведено, що при виконанні умов $b_k \to 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 b_{k-1}| < \infty$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

буде рядом Фур'є сумовної функції тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty.$$

Також, в [4] було встановлено, що умову

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty.$$

не можна замінити на умову

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} < \infty.$$

Також після роботи В. Юнга [9] з'явилися публікації і інших математиків, в яких на коефіцієнти тригонометричного ряду накладаються більш загальні умови. В одновимірному випадку відомими роботами також є роботи Р.П. Боаса [10], Л. Чезарі [11], Ч. Мура [12, 13], С. Сідона [14], С.В. Станоєвича [15], Т. Кано [16], Л. Тонеллі [17] та інші.

РОЗДІЛ 2

В даному розділі магістерської дисертації розглянемо:

- означення класів функцій H_p;
- декілька прикладів таких функцій ;
- зв'язок між тригонометричними і степеневими рядами ;
- умови на коефіцієнти степеневого ряду, при яких функція представлена даним степеневим рядом належить класу Гарді.

2.1. Класи функцій H_p та деякі їх властивості

Основною задачею даної магістерської роботи є встановлення умов на коефіцієнти степеневих рядів, при виконанні яких функції, представлені даними рядами, будуть належати класу H_1, а також встановлення асимптотичної формули для інтеграла від модуля функції заданої степеневим рядом на одиничному колі.

Позначимо через D одиничний круг

$$D = \{z: |z| = 1\}$$

Означення 2.1.1 *Функція $f(z)$ називається аналітичною в скінченній точці z, якщо вона диференційовна в самій точці z та деякому її околі.*

Означення 2.1.2 *Функція $f(z)$ однозначна та диференційовна в кожній точці області D називається аналітичною (або регулярною) в області D.*

Означення 2.1.3 *Функцію $\varphi(x, y)$ називають гармонічною в області D, якщо вона має в цій області неперервні частинні похідні до другого порядку включно і справджується в цій області рівняння Лапласа :*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Твердження 2.2.1 *Якщо функція* $f(z) = u + iv$ *аналітична в деякій області* D, *то її дійсна частина* $u(x, y)$ *та уявна частина* $v(x, y)$ *є гармонічними функціями у відповідній області площини* Oxy.

Гармонічні функції $u(x, y)$ *та* $v(x, y)$, *які задовольняють в області* D *умови Коші-Рімана називають спряженими. Отже, дійсна та уявна частини аналітичної в області* D *функції є в цій області спряженими.*

За допомогою умов Коші-Рімана аналітичну функцію можна відновити з точністю до сталої.

Теорема 2.1.1 [**8**] *Для того, щоб функція* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, *визначена в деякій області* G, *була диференційовна в точці* z *цієї області як функція комплексної перемінної, необхідно і достатньо, щоб функції* $u(x, y)$ *і* $v(x, y)$ *були диференційовними в тій же точці (як функції двох дійсних перемінних) і щоб, крім цього, в цій точці виконувалися умови :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ . \tag{2.1.1}$$

При виконанні всіх умов теореми похідна $f'(z)$ *може бути представлена в одній із наступних форм:*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Умови (2.1.1) мають основне значення в теорії аналітичних функцій. Вони називаються умовами (або рівнянням) Коші-Рімана.

Твердження 2.2.2 *Для довільної гармонічної в однозв'язній області* D *функції* $u(x, y)$ *існує єдина, з точністю до сталої, спряжена до* $u(x, y)$ *в області* D *функція* $v(x, y)$ *така, що функція*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

є аналітичною в області D.

Розглянемо клас функцій – A. Нехай $\ln^+ a$ позначає $\ln a$, якщо $a \geq 1$, і 0, якщо $a < 1$. Очевидно, що $|\ln a| = 2\ln^+ a - \ln a$, $\ln^+ ab \leq \ln^+ a + \ln^+ b$ і $e^{\ln^+ a} < 1 + a$.

Функція $f(z)$ аналітична в D, належить класу А якщо

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt = A(f) < \infty. \qquad (2.1.2)$$

Якщо

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt = H_p(f) < \infty, \qquad (2.1.3)$$

то кажемо, що функція $f(z)$ аналітична в одиничному крузі, належить класу H_p $(p > 0)$.

Границі $A(f)$ і $H_p(f)$ скінчені або нескінчені існують для кожної функції $f(z)$, аналітичної в одиничному крузі, оскільки інтеграли $\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt$ і $\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt$ неспадні функції від $r (r < 1)$.

Очевидно, що якщо функція $f(z)$ належить класу A (або H_p), то її добуток на $\forall$ обмежену аналітичну функцію також належить класу A (або H_p).

При $0 < \delta < p$ маємо :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^\delta dt < 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt\,.$$

Звідси випливає, що якщо $f(z)$ належить класу H_p , то вона також належить класу H_δ , тобто $H_p \subset H_\delta$ при $0 < \delta < p$.

Враховуючи те, що середнє геометричне

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \ln\left(1+\left|f\left(re^{it}\right)\right|\right) dt,$$

не більше середнього арифметичного

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1+\left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt\right)\right\}^{\frac{1}{p}},$$

для $\forall\ p > 0$.

Отже,

$$H_p \subset H_\delta \subset A,\ p > \delta.$$

Класи H_p були введені Ф. Ріссом, він і довів наступну теорему:

Теорема 2.2.2 [**5**] *Якщо функція $f(z)$ – функція класу H_p, то яка б не була множина M додатної міри на відрізку* $[0, 2\pi]$

$$\lim_{r\to 1}\int_M \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dp = \int_M \left|f\left(e^{it}\right)\right|^p dt \tag{2.1.4}$$

і

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right) - f\left(e^{it}\right)\right|^p dt = 0. \tag{2.1.5}$$

Доведення цієї теореми зводиться до доведення співвідношення (2.1.5) для функції класу H_2.

Доведення. [**5**] Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ – функція класу H_2. Тоді, при всіх $r < 1$ має місце рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 r^{2k}, \tag{2.1.6}$$

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt = H_p(f) < \infty. \tag{2.1.7}$$

І в силу (2.1.3) ряд :

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2 = H_p(f) \tag{2.1.8}$$

Збігається

Нехай $0 < \lambda < 1$, тоді функція $f(z) - f(\lambda z)$ очевидно, належить класу H_2 і відповідно має місце рівність Парсеваля :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{it}\right) - f\left(\lambda re^{it}\right)\right|^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2 r^{2k}(1-\lambda^k)^2 \tag{2.1.9}$$

Переходячи до границі по $r \to 1$, з рівності Фату отримуємо:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{it}\right) - f\left(\lambda e^{it}\right)\right|^2 dt \le \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2(1-\lambda^k)^2 \tag{2.1.10}$$

Оскільки сума ряду в правій частині (2.1.10) прямує до нуля при $\lambda \to 1$, то і ліва частина прямує до нуля, тобто співвідношення (2.1.3) справедливе для функції класу H_2.

Зауваження. *Як бачимо із рівності* (2.1.8) *для того, щоб функція* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *належала класу* H_2*, необхідно і достатньо, щоб збігався ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2$.

2.2. Зв'язок степеневих рядів з рядами Фур'є

Нехай $f(\cdot) \in H_1$, тобто маємо функцію $f(z)$, що належить класу H_1. Рядом Тейлора функції $f(z)$, що належить класу H_1 є степеневий ряд виду:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Відмітимо зв'язок між тригонометричними та степеневими рядами Нехай

$$c_k = a_k - ib_k\ ,$$

$$z = re^{it},$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

то

$$z^k = r^k(\cos kt + i \sin kt).$$

Отримаємо степеневий ряд, який представляється у вигляді 2-х тригонометричних рядів:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k(a_k - ib_k)(\cos kt + i \sin kt) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)r^k + i(-b_k \cos kt + a_k \sin kt)r^k. \quad (2.2.1)$$

Розглянемо наступні два ряди окремо:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (2.2.2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt). \quad (2.2.3)$$

Маємо, що дійсною частиною ряду (2.2.1) є ряд (2.2.2), а уявною частиною ряду (2.2.1) є ряд (2.2.3) який називається спряженим до ряду (2.2.2).

Оскільки, ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, z^k$ зображає регулярну функцію всередині круга D, тобто при $z = re^{it}$, де $0 \le r < 1$, $0 \le t \le 2\pi$, тому дійсна та уявна частини даного ряду мають вигляд відповідно:

$$u(r,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) r^k$$

$$v(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt) r^k$$

є спряженими гармонічними функціями.

Надалі нам будуть потрібні класичні, добре відомі, результати.

Теорема А.М. Колмогорова (див. [3]) *Якщо, для послідовності* $\{a_k\}$, *виконується умова* (1.1.4) *і послідовність є квазівипуклою тобто* $\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2\, a_{k-1}| < \infty$, *то ряд* (1.1.2) *є рядом Фур'є сумовної функції і справедливою є наступна нерівність* :

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt \right| dt \le \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2\, a_{k-1}| < \infty.$$

Теорема С.О. Теляковського (див. [4]) *Якщо, для послідовності чисел* $\{b_k\}$, $k = 0,1,2 \ldots$ $b_0 = 0$, *виконуються умови* $\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 b_{k-1}| < \infty$, $\Delta^2 b_{k-1} = b_{k-1} - 2b_k + b_{k+1}$, *і* $b_k \to 0$ *при* $k \to \infty$, *то ряд* (1.1.3) *буде рядом Фур'є в тому і тільки тому випадку, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty \tag{2.2.8}$$

При цьому, якщо ряд (2.2.8) збігається, то справедливою буде наступна нерівність:

$$\left|\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt\ \right| dt - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k}\right| \leq C\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 b_{k-1}|.$$

C- деяка абсолютна константа.

В [4] також було встановлено, що умову (2.2.8) не можна замінити на умову $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k} < \infty$.

На основі результатів А. М. Колмогорова [3] та С.О. Теляковського [4] ряд виду

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

є рядом Фур'є сумовної функції $f(t)$, бо зі збіжності ряду $\sum_{k=0}^{\infty} k|\Delta^2 C_{k-1}| < \infty$ випливає збіжність рядів

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 a_{k-1}| < \infty \qquad \text{і} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 b_{k-1}| < \infty.$$

Аналогічно, ряд

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-b_k \cos kt + a_k \sin kt)$$

є рядом Фур'є сумовної функції, спряженої до $f(t)$.

2.3. Метод Абеля-Пуассона підсумовування тригонометричних та степеневих рядів

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x)$ підсумовується за методом Абеля в точці x_0 до числа S, якщо при $\forall\, r, 0 \le r < 1$, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x_0) r^k$ збігається і

$$\sigma(f) = S(x_0, r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x_0) r^k,$$

маємо

$$\lim_{r \to 1} S(x_0, r) = S.$$

Пуассон застосовував цей метод сумування до рядів Фур'є, тому вказаний метод, коли його застосовують до тригонометричних рядів, зазвичай називають методом Пуассона або Абеля-Пуассона.

Теорема 2.3.1 [1] *Для $\forall$ сумовної функції $f(x)$ ряд $\sigma(f)$ підсумовується майже всюди методом Абеля-Пуассона до цієї функції $f(x)$; він підсумовується до $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в $\forall$ точці розриву 1-го роду і до $f(x)$ в $\forall$ точці неперервності.*

Для довільного тригонометричного ряду:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt. \tag{2.3.1}$$

Назвемо <u>*« пуасоновими сумами »*</u> вираз:

$$f(r, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) r^k, \tag{2.3.2}$$

коли ряд в правій частині (2.3.2) збігається. У випадку, коли ряд (2.3.1) є рядом Фур'є від деякої функції $f(t)$, ці функції можна виразити через $f(t)$ в

інтегральній формі, подібно тому, як це робиться для частинних сум і фейєрівських сум ряду Фур'є.

Спершу знайдемо зручний вираз для $f(r,t)$, якщо (2.3.1) є $\sigma(f)$. Маємо

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt,$$

А тому

$$f(r,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} r^k \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k(t-x)\,dt.$$

Але так, як $0 \le r < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(t-x)$, при фіксованому r збігається рівномірно відносно t, то за теоремою Лебега його можна почлено інтегрувати навіть після множення на $f(x)$; звідси

$$f(r,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(t-x)\right]dt. \qquad (2.3.3)$$

Знайдемо тепер більш простий вираз для ряду, який стоїть у квадратних дужках в (2.3.3). Нехай

$$P(r;\alpha) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\alpha.$$

Розглянемо допоміжний ряд:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} z^k$$

і покладемо $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Якщо $|z| = r < 1$, то цей ряд збігається і

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} z^k=\frac{1}{2}+\frac{z}{1-z}=\frac{1+z}{2(1-z)}=\frac{1-r^2+2ir\sin\alpha}{2[1-2r\cos\alpha+r^2]}.$$

Але з іншої сторони,

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} z^k=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} r^k(\cos k\alpha+i\sin k\alpha).$$

Тому, відділяючи дійсні й уявні частини, знайдемо

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos k\alpha=\frac{1-r^2}{2[1-2r\cos\alpha+r^2]}$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k\sin k\alpha=-\frac{r\sin\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}.$$

Отже, ми отримали, що

$$P(r;\alpha)=\frac{1-r^2}{2[1-2r\cos\alpha+r^2]}. \tag{2.3.4}$$

Вираз (2.3.4) заведено називати ядром Пуассона, а вираз:

$$Q(r;\alpha)=-\frac{r\sin\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}, \tag{2.3.5}$$

спряженим з ним ядром.

Важливим є такий факт, що ядро Пуассона при $0\le r<1$ є додатною величиною. Справді

$$1-r^2>0$$

і

$$1-2r\cos\alpha+r^2=(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\alpha}{2}>0,$$

то $P(r;\alpha)>0$ при $0\le r<1$.

Повернемося до формули (2.3.3). Маємо

$$f(r,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,P(r,t-x)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt. \qquad (2.3.6)$$

Інтеграл в правій частині (2.3.6) називається інтегралом Пуассона.

РОЗДІЛ 3

В даному розділі буде встановлена основна теорема даної магістерської дисертації. Будуть встановлені умови на коефіцієнти ряду, при виконанні яких даний степеневий ряд буде рядом Тейлора функції з класу Гарді H_1.

3.1. Додаткові теоретичні відомості до основної задачі

Приведемо деякі означення і допоміжні твердження, необхідні для доведення основної теореми.

Означення 3.1.1. *Регулярна в одиничному крузі* $D = \{z: |z| = 1\}$ *функція* $f(z)$ *належить класу* H_p, $p \geq 1$, *якщо*

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right|^p dt < \infty.$$

Теорема (Гарді-Літтлвуда) [7] *Якщо* $\Phi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \in H_1$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k+1} \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \Phi\left(e^{it}\right) \right| dt. \tag{3.1.1}$$

Доведення. Теорему достатньо доказати для функції, регулярної в крузі $|z| \leq 1$ і немаючої нулів на $|z| = 1$. Тоді, застосовуючи доказане до функції $\Phi(Rz)$, де $0 < R < 1$, і вважаючи $R \to 1$, отримуємо нерівність (3.1.1) для $\forall$ $\Phi \in H$.

Нерівність (3.1.1) отримуємо зразу, якщо всі b_k дійсні й невід'ємні. Дійсно, в такому випадку, помноживши дві частини співвідношення

$$b_0 \sin x + b_1 \sin 2x + \cdots = \mathrm{Im}\left\{e^{it} \Phi\left(e^{it}\right)\right\} \tag{3.1.2}$$

На $\frac{\pi-x}{2}$, інтегруючи по $(0, 2\pi)$ (ліва частина (3.1.2) збігається рівномірно) і бачимо, що n-й коефіцієнт при синусі ряду Фур'є функції $\frac{\pi-x}{2}$ рівний $\frac{1}{n}$, отримуємо

$$\sum \frac{b_k}{k+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\{e^{it}\Phi(e^{it})\}\frac{\pi-x}{2}dx \le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\Phi(e^{it})|dx.$$

Якщо не всі b_k від'ємні, то достатньо побудувати таку функцію $\Phi^*(z) = \sum b_n^* z^k$, що $|b_k| \le b_k^*$ і $\mu(1;\Phi^*) \le \mu(1;\Phi)$.

Нехай $B(z)$ – добуток Бляшке для $\Phi(z)$. В нашому випадку $B(z)$ – має тільки скінченне число множників, функція $\Psi = \Phi \cdot B^{-1}$ регулярна і не перетворюється в нуль при $|z| \le 1$, а $|\Psi(e^{it})| = |\Phi(e^{it})|$. Покладемо

$$\Phi_1 = B\Psi^{\frac{1}{2}} = \sum c_k' z^k,\ \ \Phi_2 = \Psi^{\frac{1}{2}} = \sum c_k'' z^k \ (\text{так, що } \Phi = \Phi_1\Phi_2),$$

$$\Phi_1^* = \sum |c_n'|\, z^n, \qquad \Phi_2^* = \sum |c_k''|\, z^k,$$

$$\Phi^* = \Phi_1^*\Phi_2^* = \sum b_k^* z^k.$$

Функції Φ_n, а також $\Phi_n^*(n = 1,2)$ регулярні при $|z| \le 1$. Очевидно, що

$$b_k^* = \sum |c_v'|\,|c_{k-v}''| \ge \left|\sum c_v' c_{k-v}''\right| = |b_k|.$$

Більше того, користуючись нерівністю Коші-Буняковського і рівністю $\mu_2(1;\Phi_n) = \mu_2(1;\Phi_n^*)$ (Наслідок із формули Парсеваля), отримуємо

$$\mu(1,\Phi^*) \le \mu_2^{\frac{1}{2}}(1;\Phi_1^*)\mu_2^{\frac{1}{2}}(1;\Phi_2^*) = \mu_2^{\frac{1}{2}}(1;\Phi_1)\mu_2^{\frac{1}{2}}(1;\Phi_2) = \mu(1;\Psi) = \mu(1;\Phi). \blacksquare$$

3.2. Умови на коефіцієнти степеневого ряду, при виконанні яких даний ряд є рядом Тейлора функції з класу H_1.

Однією з основних задач теорії аналітичних функцій є встановлення умов на коефіцієнти c_k степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, при виконанні яких даний степеневий ряд є рядом Тейлора функції $f(z)$ з класу H_p. Добре відомим є твердження ([1], стор.-156): для того, щоб функція $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ належала класу H_2 необхідно і достатньо, щоб ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$ збігався. Виникає питання: чи можна встановити подібні твердження для класів H_p, при $p \neq 2$. На жаль, на це питання приходиться давати негативну відповідь.

Нами будуть встановлені умови на коефіцієнти $c_k = a_k - ib_k$ степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, при виконанні яких даний ряд буде рядом Тейлора функції $f(z)$ з класу H_1. Покладемо

$$\Delta^2 \mathrm{C}_{k-1} = \Delta^2 a_{k-1} - i\Delta^2 b_{k-1}.$$

3.3. Основна теорема

Теорема. *Якщо для послідовності чисел* $c_k = a_k - ib_k$, $k = 1,2, \ldots$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$ *виконуються умови*

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0 \tag{3.3.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 c_{k-1}| < \infty. \tag{3.3.2}$$

То ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *буде рядом Тейлора функції* $f(\cdot) \in H_1$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty. \tag{3.3.3}$$

Доведення. Необхідність. Якщо $f(\cdot) \in H_1$, то згідно з результатом Гарді-Літтлвуда (див. [7], стор. - 454, теорема 8.7)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} \le A \int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right| dt < \infty, A \equiv const,$$

тобто ряд (3.1.3) збіжний.

Достатність. Нехай виконуються умови (3.3.1) - (3.3.3). Покажемо, що функція $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ належить класу Гарді H_1, тобто $f(z)$ є регулярною в крузі D і

$$\sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt < \infty.$$

Оскільки $c_k \to 0$, при $k \to \infty$, то функція $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ є регулярною в крузі D. Нехай

$$z = re^{it}$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

Тоді,

$$z^k = r^k(\cos kt + i \sin kt).$$

Отримаємо наступне:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k(a_k - ib_k)(\cos kt + i \sin kt) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)r^k + i(-b_k \cos kt + a_k \sin kt)r^k.$$

Тоді,

$$f\left(re^{it}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - ib_k)r^k e^{ikt} == \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)r^k +$$

$$+ i \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt)r^k = u(r,t) + iv(r,t). \qquad (3.3.4)$$

Оскільки, ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ зображає регулярну функцію всередині круга D, тобто при $z = re^{it}$, де $0 \le r < 1$, $0 \le t \le 2\pi$, тому дійсна та уявна частини даного ряду

$$u(r,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)r^k$$

$$v(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt)r^k$$

є спряженими гармонічними функціями.

З умови (3.1.2) слідує, що $\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 a_{k-1}| < \infty$ і $\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 b_{k-1}| < \infty$.

Оскільки, мають місце рівності:

$$\Delta^2 c_{k-1} = c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1} = a_{k-1} - ib_{k-1} - 2(a_k - ib_k) + (a_{k+1} - ib_{k+1})$$

$$= a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} - ib_{k-1} + 2ib_k - ib_{k+1}$$

$$= a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} - i(b_{k-1} - 2b_k + b_{k+1}) = \Delta^2 a_{k-1} - i\Delta^2 b_{k-1},$$

то справедливі наступні нерівності:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 c_{k-1}| = \sum_{k=1}^{\infty} k\sqrt{(\Delta^2 a_{k-1})^2 + (\Delta^2 b_{k-1})^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} k\sqrt{(|\Delta^2 a_{k-1}| + |\Delta^2 b_{k-1}|)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k(|\Delta^2 a_{k-1}| + |\Delta^2 b_{k-1}|) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 a_{k-1}| + \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 b_{k-1}| \qquad (3.3.5)$$

Має місце наступна нерівність:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 c_{k-1}| = \sum_{k=1}^{\infty} k\sqrt{|\Delta^2 a_{k-1}|^2 + |\Delta^2 b_{k-1}|^2} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 a_{k-1}|. \qquad (3.3.6)$$

Справедливою є також аналогічна нерівність:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 c_{k-1}| = \sum_{k=1}^{\infty} k\sqrt{|\Delta^2 a_{k-1}|^2 + |\Delta^2 b_{k-1}|^2} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 b_{k-1}| \qquad (3.3.7)$$

Додавши нерівності (3.3.6) і (3.3.7), отримаємо

$$2\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 c_{k-1}| \geq \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 a_{k-1}| + \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 b_{k-1}|.$$

Тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 c_{k-1}| \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 a_{k-1}| + \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 b_{k-1}|\right). \qquad (3.3.8)$$

Оскільки, збігається ряд (3.3.2) і за ознакою порівняння рядів випливає і збіжність наступних рядів :

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 a_{k-1}| < \infty \ \ i \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 b_{k-1}| < \infty.$$

А з (3.1.3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty$ слідує, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty \ \ \text{і} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty.$$

Оскільки, $c_k = a_k - ib_k$, то $|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ звідси випливає, що

$$|a_k| \leq |c_k|,$$

$$|b_k| \leq |c_k|,$$

Додавши нерівності, отримаємо

$$|a_k| + |b_k| \leq 2|c_k|$$

$$\frac{|a_k| + |b_k|}{2} \leq |c_k|$$

З іншої сторони

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq \sqrt{a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2} = \sqrt{(a_k + b_k)^2} = |a_k + b_k|$$

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$$

тобто

$$|c_k| \leq |a_k| + |b_k|.$$

Отримаємо подвійну нерівність:

$$\frac{|a_k| + |b_k|}{2} \leq |c_k| \leq |a_k| + |b_k|.$$

Оскільки, збігається ряд (3.1.3) то використовуючи попередню умову, маємо, що збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k} < \infty.$$

А отже, збігаються ряди

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty \text{ і } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty$$

В 1923 р. А.М. Колмогоровим [3] було встановлено, що якщо $a_k \to 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 a_{k-1}| < \infty$ то ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ є рядом Фур'є сумовної функції.

В 1964 р. С.О. Теляковським [4] доведено, що при виконанні умов $b_k \to 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 b_{k-1}| < \infty$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ буде рядом Фур'є сумовної функції тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty$$

Тому, згідно з результатами А.М. Колмогорова [3] і С.О. Теляковського [4], ряди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt)$$

є рядами Фур'є сумовних спряжених функцій, які позначимо через $\mu(t)$ і $\tilde{\mu}(t)$, відповідно.

Таким чином, враховуючи (3.1.4) і той факт, що в цьому випадку (див. [7], ст.-161) можна записати

$$u(r,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\tau) P_r(t-\tau) d\tau,$$

$$v(r,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{\mu}(\tau)P_r(t-\tau)d\tau,$$

де $P_r(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}$ - ядро Пуассона, а

$$f\left(re^{it}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\mu(\tau) + i\tilde{\mu}(\tau)\right) P_r(t-\tau)d\tau.$$

Звідси слідує, що

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|dt \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|\mu(\tau)| + |\tilde{\mu}(\tau)|)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-\tau)dt\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|\mu(\tau)| + |\tilde{\mu}(\tau)|)d\tau < \infty,$$

а значить $f(z) \in H_1$.

3.4. Наслідки

Наслідок 3.4.1. Якщо

$$\Delta^2 a_k \geq 0,$$

тоді з результату А.М. Колмогорова випливає результат В. Юнга [9].

Доведення:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2 a_k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_k - 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}ka_k + \sum_{k=0}^{\infty}a_k - 2\sum_{k=1}^{\infty}ka_k + \sum_{k=1}^{\infty}ka_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}ka_k - 2\sum_{k=1}^{\infty}ka_k + \sum_{k=0}^{\infty}a_k + \sum_{k=1}^{\infty}ka_{k+1} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}ka_k + a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{\infty}a_k + \sum_{k=1}^{\infty}ka_{k+1} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}ka_k + a_0 + a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty}ka_{k+1} =$$

$$= a_0 + a_1 - \sum_{k=1}^{\infty}ka_k + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)a_{k+1} =$$

$$= a_0 + a_1 - a_1 - 2a_2 - 3a_3 - \cdots + 2a_2 + 3a_3 + \cdots = a_0$$

В результаті отримаємо скінченну величину a_0, тобто

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2 a_k < \infty. \blacksquare$$

Наслідок 3.4.2.

Відповідно, якщо

$$\Delta^2 b_k \geq 0$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} < \infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

буде рядом Фур'є сумовної функції.

Цей наслідок слідує з результату С.О. Теляковського [4].

Наслідок 3.4.3. Якщо

$$\Delta^2 a_k \geq 0,$$

$$\Delta^2 b_k \geq 0$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k} < \infty,$$

тоді ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}, \tag{3.4.1}$$

є рядом Фур'є сумовної функції.

Доведення: Якщо представити ряд (3.4.1) у вигляді тригонометричних рядів (дійсною та уявною частинами даного ряду), то з попередніх двох наслідків випливає, що ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

є рядом Фур'є і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx)$$

також є рядом Фур'є сумовної функції. ■

ВИСНОВКИ

У даній магістерській дисертації розглядалися тригонометричні ряди, ряди Фур'є та степеневі ряди. Були дослідженні умови на коефіцієнти рядів Тейлора, при виконанні яких функція представлена даним степеневим рядом буде належати класу сумовних функцій на одиничному колі. А також, був розглянутий клас функцій Гарді H_1 та встановлено умови на коефіцієнти степеневого ряду, при виконанні яких функція представлена цим рядом належить класу Гарді H_1.

Доведено теорему та встановлено умови на коефіцієнти комплексних тригонометричних рядів, при виконанні яких даний тригонометричний ряд буде рядом Фур'є. Та наведено наслідки, які випливають з нашої теореми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936с.

[2] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 481с.

[3] Колмогоров А.Н. Sur l'ordre be grandeur des coefficients de la serie be Fourier-Lebesgue // Bull.Acad.pol.sci.(A).-1923.-P.83-86.

[4] Теляковский С. А. Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб.-1964.-63, №3.-С.426-444.

[5] И.И. Привалов Граничные свойства фналитических функций, Гостехиздат, М.-Л., 1950 – 336с.

[6] Фіхтенгольц Г.М. Курс диференціального й інтегрального числення, I, II т., М., 1966.

[7] А. Зигмунд. Тригонометрические ряды: В2-хт. М.:Мир, 1965- Т.1.– 615с.

[8] А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций, Москва 1967 Т.1.-

[9] Young W.H. On the Fourier series of bounded functions // Proc. London Math. Soc.-1913.-12, №1.-P.41-70.

[10] Boas R.P. Absolute convergence and inegrability of trigonometric series // Journal of rational mechanics and analysis.-1956.-5, №4.-P.621-632.

[11] Cesari L. Sulle condizioni sufficenti per le successioni di Fourier // Annali della Scuola Normale Sup. Di Pisa (2).-1934.-3.-P.105-134.

[12] Moore C. N. On criteria for Fourier constants of L integrable functions // Proc. National Academy of Sciences USA.-1933.-19, №9.-P.846-848.

[13] Moore C. N. On the use of Cesaro means in determing criteria for Fourier constans // Bull. Amer. Math. Soc.-1933.-39, №12.-P.907-913.

[14] Sidon S. Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen // Mathematische Zeitschrift.-1921.-10.-P.121-127.

[15] Станоєвич Ч.В. О интеграбилности неких тригонометриских редова // Зборник радова Српска Акад. наука, к. 55.-Математички институт к. 6.-1957.-

[16] Kano T. Coefficients of some trigonometric series // J. Fac. Sci. Shinshu Univ.-1968.-3, №2.-P.153-162.

[17] Tonelli L. Serie trigonometriche.-1928.