

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА І АНАЛІТИЧНА
ГЕОМЕТРІЯ
ЗБІРНИК ЗАДАЧ**

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальністю 131 Прикладна механіка

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Укладачі: *Копась Інна Миколаївна*, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Кулик Ганна Миколаївна, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Самойленко Тетяна Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук
Степаненко Наталія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензенти: *Боднарук, С. Б.*, канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри алгебри та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
Кушлик-Дивульська, О. І., канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»

Відповідальний редактор *Журавська, Г. В.*, канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»

*Гриф надано Методичною радою КПІ імені Ігоря Сікорського
(протокол № 2 від 26.10.2023 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 10 від 25.10.2023 р.)*

Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Збірник задач [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спец. 131 Прикладна механіка / І. М. Копась, Г. М. Кулик, Т. А. Самойленко, Н. В. Степаненко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,6 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 130 с. – Назва з екрана.

Навчальний посібник містить задачі з навчальної дисципліни «Лінійна алгебра і аналітична геометрія» необхідні для успішного опанування студентами основних понять та навичок розв’язання задач з лінійної і векторної алгебри, аналітичної геометрії на площині та у просторі. Наприкінці навчального посібника запропоновано 30 індивідуальних варіантів завдань для розрахункових робіт та додаток з основними формулами.

Для студентів, які навчаються за спеціальністю 131 «Прикладна механіка». Збірник також буде корисний для студентів технічних спеціальностей закладів вищої освіти, де викладається дана дисципліна.

Реєстр. № НП 23/24-140. Обсяг 8 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© І. М. Копась, Г. М. Кулик, Т. А. Самойленко, Н. В. Степаненко, 2023

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

ЗМІСТ

| | |
|---|-----------|
| Передмова..... | 5 |
| Розділ 1. Елементи лінійної алгебри | 6 |
| Тема 1.1. Визначники та їх властивості. Обчислення визначників довільного порядку. Розв’язування систем методом Крамера | 6 |
| Тема 1.2. Матриці. Дії над матрицями. Обернена матриця. Матричні рівняння. Матричний метод розв’язання СЛАР | 12 |
| Тема 1.3. Метод Гаусса розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Ранг. Критерій сумісності СЛАР | 19 |
| Тема 1.4. Полярна система координат. Комплексні числа. Алгебраїчна, тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Дії над комплексними числами..... | 23 |
| Тема 1.5. Елементи теорії многочленів. Розклад довільних правильних раціональних дробів на суму елементарних | 28 |
| Розділ 2. Елементи векторної алгебри..... | 29 |
| Тема 2.1. Вектори та дії над ними. Лінійна залежність та незалежність векторів. Базисні вектори | 29 |
| Тема 2.2. Скалярний добуток векторів, його обчислення, основні властивості та застосування | 33 |
| Тема 2.3. Векторний та мішаний добуток векторів. Їх основні властивості та застосування | 37 |
| Розділ 3. Елементи аналітичної геометрії..... | 41 |
| Тема 3.1. Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої на площині. Умови паралельності, перпендикулярності та кут між двома прямими. В’язка прямих | 41 |
| Тема 3.2. Площина в просторі. Різні види рівнянь площини в просторі. Умови паралельності, перпендикулярності та кут між двома площинами | 48 |

| | |
|--|------------|
| Тема 3.3. Пряма в просторі. Різні види рівнянь прямої в просторі. В'язка площин. Взаємне розташування прямої і площини в просторі | 53 |
| Тема 3.4. Криві другого порядку. Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола .. | 59 |
| Тема 3.5. Поверхні другого порядку. Сфера. Еліпсоїд. Гіперболоїди. Параболоїди | 67 |
| <i>Завдання до розрахункової роботи.....</i> | <i>71</i> |
| <i>Список використаної та рекомендованої літератури</i> | <i>120</i> |
| <i>Додаток</i> | <i>121</i> |

Передмова

Курс «Лінійна алгебра і аналітична геометрія» є базовим для математичної та інженерної освіти спеціалістів, основою багатьох загальноосвітніх та інженерних дисциплін.

Збірник задач складено за програмою курсу «Лінійна алгебра і аналітична геометрія» і призначено для студентів першого курсу спеціальності «Прикладна механіка» НН ММІ. Посібник може бути використаний для студентів очної та заочної форм навчання ММІ, а також і для інших інженерних спеціальностей.

Запропонований збірник містить задачі відповідно до розділів: «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри» та «Елементи аналітичної геометрії» за темами робочої програми навчальної дисципліни «Лінійна алгебра і аналітична геометрія». Необхідний для засвоєння теоретичний матеріал і його практичне використання можна знайти в навчальних посібниках [1], [3], [5] та комплексі [4]. При підготовці задач даного збірника використано в основному навчальні посібники [2], [6] та [7]. Більшість прикладів та задач апробовано зі студентами на практичних заняттях. До всіх завдань на обчислення надаються відповіді наприкінці кожної теми.

В електронний збірник включено тридцять варіантів індивідуальних завдань для розрахункових робіт.

Для зручності користування в кінці навчального видання надано короткий довідник основних формул.

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри

Тема 1.1. Визначники та їх властивості. Обчислення визначників довільного порядку. Розв'язування систем методом Крамера

1. Обчислити визначники за означенням:

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$2) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 20 \end{vmatrix};$$

$$3) \Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$4) \Delta = \begin{vmatrix} -10 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix};$$

$$5) \Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix};$$

$$6) \Delta = \begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix};$$

$$7) \Delta = \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 3-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix};$$

$$8) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix};$$

$$9) \Delta = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix};$$

$$10) \Delta = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix};$$

$$11) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$12) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix};$$

$$13) \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$14) \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix};$$

$$15) \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$$16) \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix};$$

$$17) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$18) \Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix};$$

$$19) \Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix};$$

$$20) \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix};$$

$$21) \Delta = \begin{vmatrix} 0 & \cos \alpha & \operatorname{tg} \alpha \\ \cos \alpha & 0 & \cos \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha & \cos \alpha & 0 \end{vmatrix};$$

$$22) \Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & x^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати рівняння та нерівності:

$$1) \begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2) \begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$3) \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2};$$

$$4) \begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} = 0;$$

$$5) \begin{vmatrix} \cos 4x & \sin x \\ \sin 4x & \cos x \end{vmatrix} = 0;$$

$$6) \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$7) \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$8) \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0;$$

$$9) \begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0;$$

$$10) \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14;$$

$$11) \begin{vmatrix} x & 3x \\ 1 & x \end{vmatrix} < -2;$$

$$12) \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & \frac{1}{x+2} \end{vmatrix} \geq 1;$$

$$13) \begin{vmatrix} 1 & x+3 \\ 4 & x \end{vmatrix} < 0;$$

$$14) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1;$$

$$15) \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0;$$

$$16) \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3x^2 & 5 & x \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

3. Довести рівності, користуючись властивостями визначників:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + a_1x + b_1y \\ a_2 & b_2 & c_2 + a_2x + b_2y \\ a_3 & b_3 & c_3 + a_3x + b_3y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0;$$

$$5) \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2+x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} = 4x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$6) \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. У визначниках знайти доповнюючі мінори та алгебраїчні доповнення:

$$1) \text{ всіх елементів другого рядка } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix};$$

$$2) \text{ всіх елементів другого стовпчика } \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix};$$

$$3) \text{ всіх елементів третього стовпчика } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Обчислити визначники розкладом за довільним рядком чи стовпцем:

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad 2) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}; \quad 3) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix};$$

$$4) \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \quad 5) \Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}; \quad 6) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix};$$

$$7) \Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 8 \end{vmatrix}; \quad 8) \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}; \quad 9) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};$$

$$10) \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad 11) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}; \quad 12) \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Звести визначники до найбільш зручного вигляду та обчислити їх:

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad 2) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}; \quad 3) \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$4) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad 5) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad 6) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & -4 \\ 3 & -8 & -1 & 7 \\ 2 & -6 & -6 & 2 \end{vmatrix};$$

$$7) \Delta = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}; \quad 8) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}; \quad 9) \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix};$$

$$10) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}; \quad 11) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad 12) \Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}.$$

7. Розв'язати системи методом Крамера:

$$1) \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0; \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5x + 2y - 4z = 4 \\ x + 3y + 4z = 3; \\ 2x + 4y + z = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + 3y + 2z = -3; \\ 3x + 10y + 8z = -8 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4; \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + 6y - 5z = 3; \\ 3x - 7y + z = -3 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + z - y = -1; \\ y + z - x = 3 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 3z = 10; \\ 5y - z = 7 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + y + z = a \\ x - y + z = b; \\ x + y - z = c \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11; \\ 3x + 2y + x = 5 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}; \quad 12) \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

8. Знайти значення параметра a , при якому система має єдиний розв'язок

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ -x + y = 2 \\ x + ay - z = -2 \end{cases}.$$

9. Розв'язати рівняння, не обчислюючи визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x & 4 \\ 4 & 9 & x^2 & 16 \\ 8 & -27 & x^3 & 64 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Довести рівність, користуючись властивостями визначників

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

11. Обчислити визначники:

$$1) \Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}; \quad 2) \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

12. Як зміниться визначник, якщо перший його рядок записати на місці n -того рядка, а інші зсунути вгору, не змінюючи порядку їх слідування?

13. Використовуючи властивості визначників довести, що визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 3 & 5 & 0 \\ 21 & -6 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 27 & -2 & -3 & 18 \end{vmatrix} \quad \text{ділиться на } 30.$$

14. Числа 185, 518, 851 діляться на 37. Довести, що

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & 8 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ділиться на } 37.$$

Відповіді до теми 1.1.

1. 1) 10; 2) 0; 3) -18 ; 4) -60 ; 5) 0; 6) 0; 7) -5 ; 8) $x_2 - x_1$; 9) $4ab$; 10) 1; 11) -60 ; 12) 0; 13) 5; 14) -12 ; 15) 4; 16) -34 ; 17) -8 ; 18) $2a^3$; 19) $2a^2b$; 20) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$; 21) $\sin 2\alpha$; 22) $xyz(x - y)(y - z)(z - x)$. 2. 1) $x_1 = -1, x_2 = -4$; 2) $x_1 = 1, x_2 = 5$; 3) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{1}{6}$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 5) $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$; 6) $x = -3$; 7) $x_1 = -10, x_2 = 2$; 8) $x \in \mathbb{R}$; 9) $x \in (3; +\infty)$; 10) $x \in (-1; 7)$; 11) $x \in (1; 2)$; 12) $x \in [-2.5; -2)$; 13) $x \in (-4; +\infty)$; 14) $x \in (7/2; +\infty)$ 15) $x \in (-6; -4)$; 16) $x \in \mathbb{R}$. 4. 1) $M_{21} = 10; A_{21} = -10; M_{22} = 8; A_{22} = 8; M_{23} = 1; A_{23} = -1$; 2) $M_{12} = -54; A_{12} = 54; M_{22} = -2; A_{22} = -2; M_{32} = 24; A_{32} = -24$; 3) $M_{13} = -9; A_{13} = -9; M_{23} = 8; A_{23} = -8; M_{33} = -5; A_{33} = -5$. 5. 1) -4 ; 2) -20 ; 3) -8 ; 4) -50 ; 5) 0; 6) $(x - y)(y - z)(z - x)$; 7) -48 ; 8) -60 ; 9) 48; 10) -215 ; 11) -110 ; 12) 20. 6. 1) -101 ; 2) 4; 3) 114; 4) 0; 5) 633; 6) -104 ; 7) 100; 8) 840; 9) -144 ; 10) 394; 11) 1; 12) $xyz(y - x)(z - x)(z - y)$. 7. 1) $x = 1, y = 1, z = 1$; 2) $x = 0, y = 0, z = 0$; 3) $x = 2, y = -1, z = 1$; 4) $x = \frac{14}{3}, y = -\frac{13}{3}, z = \frac{8}{3}$; 5) $\Delta = 0$; 6) $x = 1, y = 1, z = 1$; 7) $x = 2, y = 4, z = 1$; 8) $x = 1, y = 2, z = 3$; 9) $x = \frac{b+c}{2}, y = \frac{a-b}{2}, z = \frac{a-c}{2}$; 10) $x = 2, y = -2, z = 3$; 11) $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1$; 12) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = -1$. 8. $a \neq -6$. 11. 1) $2n + 1$; 2) $n!$.

Тема 1.2. Матриці. Дії над матрицями. Обернена матриця. Матричні рівняння. Матричний метод розв'язання СЛАР

1. Обчислити суму і різницю матриць A та B , якщо:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти лінійні комбінації:

$$1) 2A + 5B, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \end{pmatrix};$$

$$2) 2A - 3B, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$3) A - 3B + 4E, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4) -2A - 5B + C, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти $A - \lambda E$, якщо:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Записати матрицю, транспоновану до заданої:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4) A = (3 \quad -8 \quad 0 \quad 1 \quad 7).$$

5. Показати, що матриця $C = 3A - 2B$ не зміниться при транспонуванні,

$$\text{якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Знайти добутки матриць AB та BA , якщо це можливо, і вказати їх розміри:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, B = (2 \quad 7);$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix};$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$9) A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, B = (2 \quad 3 \quad 4 \quad 1);$$

$$10) A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 10 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$11) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$12) A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

7. Обчислити добутки AA^T і $A^T A$. Якщо різниця $AA^T - A^T A$ визначена, знайдіть її. Якщо ні, поясніть чому

$$1) A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Знайдіть значення матричного виразу $(AB)^T - B^T A^T$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Знайти A^3 , якщо:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти значення многочлену f від матриці A , якщо:

$$1) f(x) = x^2 - 5x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2) f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3) f(x) = x^2 - x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Знайти обернену матрицю і зробити перевірку:

$$1) A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad 5) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 6) A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix};$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 8) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 9) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} & 2) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases} \\
 3) \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + 5y + 6z = 9 \\ 7x + 8y = -6 \end{cases} & 4) \begin{cases} 2x - y + 5z = 19 \\ x + y - 3z = -3 \\ 2x + 4y + z = 6 \end{cases} \\
 5) \begin{cases} 3x + 2y - z = -6 \\ -x + 5z = 12 \\ 5x - y + 3z = -5 \end{cases} & 6) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ -2x - y + 5z = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases} \\
 7) \begin{cases} 3x + y - 2z = -3 \\ 2x - 3y + z = -8 \\ 5x + 2y - z = -7 \end{cases} & 8) \begin{cases} 2x - 3y + 3z = -1 \\ 7x + 3y - 2z = 7 \\ 4x + y + 3z = -7 \end{cases}
 \end{array}$$

13. Розв'язати матричні рівняння:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; & 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}; \\
 3) X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}; & 4) X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}; \\
 5) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}; & 6) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \\
 7) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \\
 8) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}; & 9) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}; \\
 10) X \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; & 11) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}; \\
 12) X \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

14. Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти визначник матриці $A^2 B^3$.

15. Знайти A^{50} , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Знайти A^m , $m \in \mathbb{N}$, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють нульовій матриці.

18. Знайти множину всіх квадратних матриць, які комутують з матрицею:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

19. Знайти матрицю, обернену до матриці A розміру $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповіді до теми 1.2.

1. 1) $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 4 & -2 & 12 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $A + B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & -1 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 2 & -11 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 2. 1) $\begin{pmatrix} 7 & 19 & 8 \\ -9 & 28 & -25 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ 0 & -14 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$;
3) $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. 3. 1) $\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3 - \lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ -2 & -6-\lambda & 1 \\ 1 & -4 & -3-\lambda \end{pmatrix}$. 4. 1) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & -1 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $A^T = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ -9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A^T = (5 \ -4 \ 1)$; 4) $A^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. 5. $C = C^T = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -4 \\ 3 & 11 & 10 \\ -4 & 10 & 2 \end{pmatrix}$. 6. 1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{pmatrix}$; 2) $AB = \begin{pmatrix} 14 & 9 & -4 \\ 16 & 5 & -3 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & 17 \end{pmatrix}$; 3) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 12 \\ 8 & 12 & 16 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$; 5) $AB = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$, $BA = (-1)$; 6) AB, BA – нульові матриці; 7) $AB = \begin{pmatrix} -18 & 6 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, BA неможливо; 8) $AB = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 8 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, BA неможливо; 9) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = (21)$; 10) $AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, BA неможливо; 11) $AB = \begin{pmatrix} -5 & -15 & 10 \\ 3 & 10 & -14 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 7 & -7 & -9 \\ -10 & 14 & 12 \end{pmatrix}$; 12) $AB = BA = \begin{pmatrix} a\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d\delta \end{pmatrix}$. 7. 1) різниця невизначена, $AA^T = \begin{pmatrix} 30 & 9 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}$, $A^T A = \begin{pmatrix} 34 & 2 & 11 \\ 2 & 20 & 6 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; 2) різниця невизначена, $AA^T = \begin{pmatrix} 13 & -14 & -4 \\ -14 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T A = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix}$. 8. Нульова матриця. 9. 1) $A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$; 2) $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & -17 \end{pmatrix}$. 10. 1) нульова матриця;

2) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 10 \\ 6 & 5 & 11 \\ 9 & 7 & 10 \end{pmatrix}$. **11.** 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; 5) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
 7) $\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\frac{1}{34} \begin{pmatrix} 8 & -3 & 7 \\ 4 & 7 & -5 \\ -10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$; 9) $\frac{1}{93} \begin{pmatrix} -57 & 12 & 6 \\ 22 & -3 & -17 \\ 18 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.
12. 1) $x = 1, y = 1, z = 1$; 2) $x = 1, y = 2, z = -1$; 3) $x = -2, y = 1, z = 2$;
 4) $x = 4, y = -1, z = 2$; 5) $x = -2, y = 1, z = 2$; 6) $x = 1, y = 1, z = 1$;
 7) $x = -2, y = 1, z = -1$; 8) $x = 1, y = -2, z = -3$. **13.** 1) $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;
 2) $X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; 4) $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; 5) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;
 6) $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 7) $X = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$; 8) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; 9) $X = \begin{pmatrix} 0.5 & -1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
 10) $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; 11) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 12) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **14.** -2700 .
15. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 50 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 1.3. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Ранг. Критерій сумісності СЛАР

1. Знайти ранг матриці, користуючись елементарними перетвореннями:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix};$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$9) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & -7 \end{pmatrix};$$

$$10) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$11) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 12 & 10 \end{pmatrix};$$

$$12) A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & -10 & -5 & 14 \end{pmatrix};$$

$$13) A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & -2 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$14) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$15) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$16) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y - z = 1 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 4x - y + z = 11 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x - 2y + z = 4 \end{cases}.$$

$$3) \begin{cases} x - \frac{1}{3}y + 2z = 1 \\ 3x - y + 6z = 3; \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y + z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x - \frac{1}{2}y - 3z = 2 \\ 2x - y - 6z = 4; \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{2}z = 5 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ -x + 2y - 3z = 3; \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - 2y + 2z = -5; \\ 7x + y - z = 10 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 2y - 3z = 14; \\ -x - y + 5z = -18 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x - y + z = -2; \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x - 2y + z + u = 1 \\ x - 2y + z - u = -1; \\ x - 2y + z + 3u = 3 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x - y + z - 5u = 4 \\ 2x + y + 2z - u = 1; \\ 6x - y + 4z - 11u = 6 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1; \\ x + y + 3z = 2; \\ x + 3z = 1 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 24x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7; \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3; \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -3; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

3. Дослідити системи на сумісність. У випадку сумісності знайти загальний розв'язок, вказати базисні та вільні змінні:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 1; \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4; \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -10 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 9 \\ 7x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 16; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -x_1 - x_3 = 8 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3; \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3; \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -9 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ -x_1 + x_2 + 9x_4 = -13 \\ -9x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 11x_4 = 3 \\ -15x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 9x_4 = 21 \end{cases}$$

4. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків для однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0; \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

5. При яких значеннях параметрів a, b, c система сумісна

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 4x + 5y + 6z = b. \\ 7x + 8y + 9z = c \end{cases}$$

6. Визначити, при яких значеннях a і b система рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b \\ 5x - 8y + 9z = 3 \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$$

- 1) має єдиний розв'язок;
- 2) не має розв'язків;
- 3) має безліч розв'язків.

7. Визначити, при якому значенні a система однорідних рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ ax - 14y + 15z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок.

8. Дослідити систему і знайти загальний розв'язок залежно від значення параметра k :

$$1) \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = k \end{cases}$$

Відповіді до теми 1.3.

1. 1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 2; 5) 3; 6) 1; 7) 2; 8) 2; 9) 2; 10) 2; 11) 3; 12) 2; 13) 3; 14) 4; 15) 3; 16) 3. 2. 1) $x = 1, y = -3/2, z = 3/2$; 2) $x = \frac{18}{7} - \frac{c}{7}, y = -\frac{5}{7} + \frac{3c}{7}, z = c, \forall c \in \mathbb{R}$; 3) $x = 1 + \frac{c_1}{3} - 2c_2, y = c_1, z = c_2 \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; 4) немає розв'язку; 5) немає розв'язку; 6) $x = 1, y = 3 + c, z = c \forall c \in \mathbb{R}$; 7) $x = 1, y = 2, z = -3$; 8) немає розв'язку; 9) $x = 2c_1 - c_2, y = c_1, z = c_2, u = 1 \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; 10) немає розв'язку; 11) $x = -1/2, y = 1; z = 1/2$; 12) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$; 13) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = -2$; 14) $x_1 = -1 + c_1 + 2c_2, x_2 = -3 + c_1 + 2c_2, x_3 = c_1, x_4 = c_2 \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; 15) $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 3, x_4 = 1, x_5 = 2$; 16) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$; 17) $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_3 = 5 - 8c_1 + 4c_2, x_4 = -3, x_5 = 1 + 2c_1 - c_2 \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; 18) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = -2$. 3. 1) сумісна, $x_1 = 2 - 2c_1 - c_3, x_2 = c_1, x_3 = -1 + c_2 - c_3, x_4 = c_2, x_5 = c_3 \forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$; 2) несумісна; 3) сумісна, $x_1 = -\frac{43}{7} + \frac{17}{7}c_1 + \frac{11}{7}c_2, x_2 = -\frac{27}{7} + \frac{11}{7}c_1 + \frac{10}{7}c_2, x_3 = c_1, x_4 = c_2 \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; 4) несумісна; 5) сумісна, $x_1 = -8 - c, x_2 = 4 + 2c, x_3 = c \forall c \in \mathbb{R}$; 6) несумісна; 7) сумісна; 8) сумісна, $x_1 = -11 - c_1 - 5c_2, x_2 = -24 - c_1 - 14c_2, x_3 = c_1, x_4 = c_2 \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. 4.

1) З.Р: $\begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}$, ФСР: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) З.Р: $\begin{pmatrix} -2c_2 - 3c_1 \\ -c_2 - 2c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, ФСР: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 5.

$a - 2b + c = 0$. 6. 1) $a \neq -3$; 2) $a = -3, b \neq 1/3$; 3) $a = -3, b = 1/3$. 7. $a = 5$.

**Тема 1.4. Полярна система координат. Комплексні числа.
Алгебраїчна, тригонометрична та показникова форми
комплексного числа. Дії над комплексними числами**

1. Побудувати графіки функцій, заданих в полярній системі координат (вважати $a > 0$):

1) $\rho = \text{const}$; 2) $\varphi = \text{const}$; 3) $\rho = 2 \cos \varphi$; 4) $\rho = 4 \sin \varphi$;
 5) $\rho = a\varphi$; 6) $\rho = a \sin 2\varphi$; 7) $\rho = \cos 2\varphi$; 8) $\rho = \sin 3\varphi$;
 9) $\rho = a \cos 3\varphi$; 10) $\rho = a(1 + \cos \varphi)$; 11) $\rho = 1 - \cos \varphi$;
 12) $\rho = 4(1 + \sin \varphi)$; 13) $\rho = a(1 - \sin \varphi)$; 14) $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$.

2. Обчислити значення виразу, результат записати в алгебраїчній формі, вказати дійсну і уявну частини комплексного числа:

1) $(1 - i)^2 \cdot (-3 + 2i)$; 2) $(2 + i)^2 \cdot (1 - 2i) + 5i$; 3) $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}$;
 4) $(1 - i)^3 - (1 + i)^3$; 5) $\frac{2+3i}{4-2i} + \frac{1-3i}{2i}$; 6) $\frac{1+2i}{3-i} + (1 - i)^2$;
 7) $\frac{(3-i)^2}{i} + \frac{1+3i}{2+i}$; 8) $\left(\frac{1+i^5}{3+i^{17}}\right)^2$; 9) $\left(\frac{3-2i^7}{1+i^{21}}\right)^2$;
 10) $\frac{5i+20}{1-i} - (3 - i)^2 + 5i^{19}$.

3. Знайти дійсні розв'язки рівнянь:

1) $(1 + i)x + (-2 + 5i)y = -4 + 17i$;
 2) $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 13i$.

4. Розв'язати рівняння:

1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $x^2 + 9 = 0$; 3) $x^2 - 4x + 8 = 0$;
 4) $x^2 + 4x + 5 = 0$; 5) $x^3 - 9x^2 + 33x - 25 = 0$; 6) $x^3 + 2x^2 + 2x = 0$;
 7) $x^3 - x^2 + x = 0$; 8) $|z| - 3z = -12i$; 9) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$;
 10) $3x^2 - x + 2 = 0$; 11) $z^2 + \bar{z} = 0$; 12) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.

5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (3-i)z_1 + (4+2i)z_2 = 1+3i \\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 7 \end{cases}.$$

6. Зобразити комплексні числа на комплексній площині. Знайти модуль і головне значення аргументу:

- 1) $z = 2$; 2) $z = -1$; 3) $z = i$; 4) $z = -i$;
5) $z = 3i$; 6) $z = -2i$; 7) $z = -1 + i$; 8) $z = 1,5i$;
9) $z = \sqrt{3}i$; 10) $z = -\sqrt{3} - 3i$; 11) $z = 1 + i$; 12) $z = 1 - i$;
13) $z = -2,5i$; 14) $z = -4 + 4i$; 15) $z = -4 - 4i$.

7. Зобразити на комплексній площині множини точок:

- 1) $|z| = 2$; 2) $\arg z = \frac{\pi}{4}$; 3) $|z| < 3$;
4) $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1,5$; 5) $\operatorname{Im} z^2 > 2$; 6) $\begin{cases} |z| = 1 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$;
7) $\begin{cases} |z| = 2 \\ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$; 8) $\begin{cases} |z| = 0,2 \\ \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z \end{cases}$; 9) $|z - i| \leq 1$.

8. Представити комплексні числа у тригонометричній і показниковій формах. Зобразити комплексні числа на комплексній площині:

- 1) $z = 1$; 2) $z = i$; 3) $z = -i$; 4) $z = 1 - i$;
5) $z = 1 - \sqrt{3}i$; 6) $z = -\sqrt{3}i$; 7) $z = 2 + 2i$; 8) $z = -2$;
9) $z = \sqrt{3} - i$; 10) $z = 1 + i$; 11) $z = \frac{1-i}{1+i}$;
12) $z = -\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$; 13) $z = 2 \cos \frac{\pi}{3} - 2i \sin \frac{\pi}{3}$.

9. Обчислити:

- 1) $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, якщо $z_1 = 1 + 5i$, $z_2 = 3 - 2i$;
2) $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, якщо $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$;
3) $z_1 \bar{z}_2$, $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$, якщо $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$;

4) $z_1^2 \bar{z}_2, \frac{\bar{z}_2}{z_1}$, якщо $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, z_2 = \sqrt{8} - \sqrt{8}i$.

10. Використовуючи формулу Муавра, обчислити наступні вирази:

1) $(1+i)^{10}$; 2) $(\sqrt{3}+i)^{16}$; 3) $(-2+2i)^{23}$;
 4) $(-1-i)^{32}$; 5) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; 6) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$;
 7) $\frac{(1+i)^8}{(1-\sqrt{3}i)^6}$; 8) $(6-2\sqrt{3}i)^{25}$; 9) $(5-5i)^{24}$;
 10) $(2\sqrt{3}+6i)^{30}$; 11) $(-3-\sqrt{3}i)^{12}$; 12) $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

11. Використовуючи формулу Муавра, вивести формули для наступних тригонометричних функцій:

1) $\sin 2\varphi$; 2) $\cos 2\varphi$; 3) $\sin 3\varphi$; 4) $\cos 3\varphi$.

12. Знайти всі значення коренів та зобразити їх на комплексній площині:

1) $\sqrt{-15+8i}$; 2) $\sqrt{2i}$; 3) $\sqrt{-8i}$; 4) $\sqrt{3-4i}$;
 5) $\sqrt[3]{-i}$; 6) $\sqrt[3]{1+i}$; 7) $\sqrt[4]{-16}$; 8) $\sqrt[5]{-32}$.
 9) $\sqrt[5]{1+i}$; 10) $\sqrt[4]{i}$; 11) $\sqrt[4]{1}$; 12) $\sqrt[5]{-1-i}$;
 13) $\sqrt[4]{8-8\sqrt{3}i}$; 14) $\sqrt[5]{2+2i}$; 15) $\sqrt[4]{-3+\sqrt{3}i}$;
 16) $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$; 17) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}}$; 18) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$.

Відповіді до теми 1.4.

2. 1) $4+6i$; 2) $11+3i$; 3) $\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$; 4) $-4i$; 5) $\frac{1}{20}(-14+3i)$; 6) $\frac{1}{10} - \frac{13}{10}i$; 7) $5+7i$; 8) $-\frac{200}{41} + \frac{192}{41}i$; 9) $\frac{17}{2} + \frac{7}{2}i$; 10) $-\frac{1}{2} + \frac{27}{2}i$. 3. 1) $x=2, y=3$; 2) $x=2, y=-5$. 4. 1) $x_1=2i, x_2=-2i$; 2) $x_1=3i, x_2=-3i$; 3) $x_1=2+2i, x_2=2-2i$; 4) $x_1=-2+i, x_2=-2-i$; 5) $x_1=1, x_2=4+3i, x_3=4-3i$; 6) $x_1=0, x_2=-1+i, x_3=-1-i$; 7) $x_1=0, x_2=\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, x_3=\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 8) $z_1=\sqrt{2}+4i, z_2=$

$-\sqrt{2} + 4i$; 9) $z_1 = \sqrt{2}i, z_2 = -\sqrt{2}i, z_3 = i, z_4 = -i$; 10) $x_1 = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{23}}{6}i, x_2 = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{23}}{6}i$; 11) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -1, z_4 = 0$; 12) $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 2i, z_4 = -2i$. **5.** $z_1 = 1, z_2 = i$. **6.** 1) $|z| = 2, \arg z = 0$; 2) $|z| = 1, \arg z = \pi$; 3) $|z| = 1, \arg z = \frac{\pi}{2}$; 4) $|z| = 1, \arg z = -\frac{\pi}{2}$; 5) $|z| = 3, \arg z = \frac{\pi}{2}$; 6) $|z| = 2, \arg z = -\frac{\pi}{2}$; 7) $|z| = \sqrt{2}, \arg z = \frac{3\pi}{4}$; 8) $|z| = 1,5, \arg z = \frac{\pi}{2}$; 9) $|z| = \sqrt{3}, \arg z = \frac{\pi}{2}$; 10) $|z| = 2\sqrt{3}, \arg z = -\frac{2\pi}{3}$; 11) $|z| = \sqrt{2}, \arg z = \frac{\pi}{4}$; 12) $|z| = \sqrt{2}, \arg z = -\frac{\pi}{4}$; 13) $|z| = 2,5, \arg z = -\frac{\pi}{2}$; 14) $|z| = 4\sqrt{2}, \arg z = \frac{3\pi}{4}$; 15) $|z| = 4\sqrt{2}, \arg z = \frac{5\pi}{4}$.

8. 1) $\cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = e^{i(2\pi n)}$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}$; 3) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}$; 4) $\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \right] = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)}$; 5) $2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \right] = 2 e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)}$; 6) $\sqrt{3} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \right] = \sqrt{3} e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}$; 7) $2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \right] = 2\sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)}$; 8) $2 \left[\cos(\pi + 2\pi n) + i \sin(\pi + 2\pi n) \right] = 2 e^{i(\pi + 2\pi n)}$; 9) $2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \right] = 2 e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)}$; 10) $\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \right] = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)}$; 11) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}$; 12) $\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{8} + 2\pi n\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{8} + 2\pi n\right) \right] = e^{i\left(-\frac{5\pi}{8} + 2\pi n\right)}$.

13) $2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \right] = 2 e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)}$. **9.** 1) $z_1 + z_2 = 4 + 3i, z_1 - z_2 = -2 + 7i, z_1 z_2 = 13 + 13i, \frac{z_1}{z_2} = -\frac{7}{13} + \frac{17}{13}i$; 2) $z_1 + z_2 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i, z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} + 1)i, z_1 z_2 = 2\sqrt{3} - 2i, \frac{z_1}{z_2} = -i$; 3) $z_1 \bar{z}_2 = -4i, \left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $z_1^2 \bar{z}_2 = 8\sqrt{2}(1 - i), \frac{\bar{z}_2}{z_1} = -2i$. **10.** 1) $32i$; 2) $2^{15}(-1 + i\sqrt{3})$; 3) $-2^{34}(1 + i)$; 4) 2^{16} ; 5) $2^9(1 - i\sqrt{3})$; 6) 2 ; 7) $\frac{1}{4}$; 8) $2^{49}3^{12}(3 - i\sqrt{3})$; 9) $5^{24}2^{11}\sqrt{2}(1 - i)$; 10) $4^{30}3^{15}$; 11) $2^{12}3^6$; 12) -2^5 . **12.** 1) $z_1 = 1 + 4i, z_2 = -1 - 4i$; 2) $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 - i$; 3) $z_1 = 2 - 2i, z_2 = -2 + 2i$; 4) $z_1 = 2 - i, z_2 = -2 + i$; 5) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, z_2 = i, z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; 6) $\sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi + 8\pi k}{12} + i \sin \frac{\pi + 8\pi k}{12} \right), k = 0, 1, 2$; 7) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$,

$$\begin{aligned}
& z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, z_4 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i; \text{ 8) } 2 \left(\cos \frac{\pi+2\pi k}{5} + i \sin \frac{\pi+2\pi k}{5} \right), k = 0,1,2,3,4 ; \\
& \text{9) } \sqrt[10]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \right) \right], k = 0,1,2,3,4 ; \text{ 10) } \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \right) + \\
& i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \right), k = 0,1,2,3 ; \text{ 11) } z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i ; \text{ 12) } \\
& 2^{\frac{1}{10}} \left[\cos \left(-\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \right) \right], k = 0,1,2,3,4 ; \text{ 13) } 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\pi k}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \right) \right], k = 0,1,2,3 ; \text{ 14) } 2^{\frac{3}{10}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{20} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{2\pi k}{5} \right) \right], k = 0,1,2,3,4 ; \text{ 15) } \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{3} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} \right) \right], k = 0,1,2,3; \\
& \text{16) } 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi+2\pi k}{5} + i \sin \frac{-\pi+2\pi k}{5} \right), k = 0,1,2,3,4 ; \text{ 17) } 2^{-\frac{1}{12}} \left[\cos \left(-\frac{7\pi}{72} + \frac{\pi k}{3} \right) + \right. \\
& \left. i \sin \left(-\frac{7\pi}{72} + \frac{\pi k}{3} \right) \right], k = 0,1,2,3,4,5; \text{ 18) } 2^{-\frac{1}{16}} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{96} + \frac{\pi k}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{96} + \frac{\pi k}{4} \right) \right], \\
& k = 0,1,2,3,4,5,6,7.
\end{aligned}$$

Тема 1.5. Елементи теорії многочленів. Розклад довільних правильних раціональних дробів на суму елементарних

1. Розкласти наступні дроби на суму елементарних, в неправильних дробах попередньо виділити цілу частину:

- | | | |
|---|--|--------------------------------------|
| 1) $\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}$; | 2) $\frac{2x^3+5}{x^2-x-2}$; | 3) $\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}$; |
| 4) $\frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}$; | 5) $\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$; | 6) $\frac{1}{1+x^3}$; |
| 7) $\frac{x^2}{1-x^4}$; | 8) $\frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}$; | 9) $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; |
| 10) $\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}$; | 11) $\frac{x^2-6}{x^4-6x^2+8}$; | 12) $\frac{x^3-1}{4x^3-x}$; |
| 13) $\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$; | 14) $\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}$; | 15) $\frac{2}{x^3-8}$; |
| 16) $\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}$; | 17) $\frac{x^2+7x+8}{x^3+x-10}$; | 18) $\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}$; |
| 19) $\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}$; | 20) $\frac{1}{1+x^4}$; | 21) $\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}$; |

Відповіді до теми 1.5.

1. 1) $\frac{5}{x-3} + \frac{2}{x+2}$; 2) $2x + 2 + \frac{7}{x-2} - \frac{1}{x+1}$; 3) $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x+1)^2}$; 4) $x - \frac{1}{x} + \frac{25}{12(x-2)} + \frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)}$; 5) $\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}$; 6) $\frac{1}{3(1+x)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{x^2-x+1}$; 7) $\frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{2(1+x^2)}$; 8) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^4}$; 9) $\frac{-1}{2(x+1)} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x^2+1}$; 10) $\frac{-2}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x+4} + \frac{4}{(x+4)^2}$; 11) $-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x-\sqrt{2}} - \frac{1}{x+\sqrt{2}} \right)$; 12) $\frac{1}{4} - \frac{7}{16(2x-1)} + \frac{9}{16(2x+1)}$; 13) $x + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}$; 14) $x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2}$; 15) $\frac{1}{6(x-2)} - \frac{1}{6} \cdot \frac{x+4}{x^2+2x+4}$; 16) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x-\sqrt{2}} + \frac{1}{x+\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x-\sqrt{3}} + \frac{1}{x+\sqrt{3}} \right)$; 17) $\frac{2}{x-2} - \frac{x-1}{x^2+2x+5}$; 18) $\frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}$; 19) $\frac{5}{x^2-6x+13} + \frac{30x-77}{(x^2-6x+13)^2}$; 20) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-x}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}+x}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right)$; 21) $\frac{x}{x^2+2} - \frac{x+1}{(x^2+2)^2}$.

Розділ 2. Елементи векторної алгебри

Тема 2.1. Вектори та дії над ними. Лінійна залежність та незалежність векторів. Базисні вектори

1. Обчислити $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a} = \{2; -6; 3\}$.
2. Знайдіть координати векторів \vec{AB} та \vec{BA} , якщо $A(5; -1; 3)$, $B(-2; 1; 1)$.
3. Визначити точку N , з якою співпадає кінець вектора $\vec{a} = \{3; -4; 1\}$, якщо його початок співпадає з точкою $M(1; 2; -3)$.
4. Відомо $|\vec{a}| = 2$ і кути, які цей вектор утворює з координатними осями: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Обчислити проєкції вектора \vec{a} на координатні осі.
5. Відомі дві координати вектора \vec{a} : $a_x = 3$; $a_y = -12$. Знайдіть a_z , якщо $|\vec{a}| = 13$.
6. Обчислити напрямні косинуси вектора:
1) $\vec{a} = \{12; -4; -3\}$; 2) $\vec{a} = \{-16; 15; -12\}$.
7. Чи може вектор утворювати такі кути з координатними осями?
1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$;
2) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.
8. Вектор \vec{a} утворює з координатними осями OX та OY кути $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Обчислити його координати за умови $|\vec{a}| = 2$.
9. За заданими векторами \vec{a} та \vec{b} побудувати кожний з наступних векторів:
1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$; 5) $3\vec{a}$; 6) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 7) $2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.
10. Дано: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.
11. Вектори \vec{a} і \vec{b} взаємно перпендикулярні. Відомо, що $|\vec{a}| = 12$ та $|\vec{b}| = 5$. Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

12. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, причому $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$.
Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.
13. Якій умові повинні задовольняти вектори \vec{a} та \vec{b} , щоб мали місце наступні співвідношення:
- 1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$; 3) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$.
14. Якій умові повинні задовольняти вектори \vec{a} і \vec{b} , щоб вектор $\vec{a} + \vec{b}$ ділив навпіл кут між векторами \vec{a} і \vec{b} .
15. Точка O є центром мас трикутника ABC . Довести, що $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$.
16. Дано два вектори $\vec{a} = \{3; -5; 6\}$ і $\vec{b} = \{-1; 1; 0\}$. Визначити проєкції на координатні осі наступних векторів:
- 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; 3) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.
17. Дано два вектори $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$ та $\vec{b} = \{-6; 3; -9\}$. Чи є вони колінеарні? Який з них довший?
18. Задані точки $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$, $C(2; 2; -7)$ і $D(5; -4; 2)$.
Перевірити колінеарність векторів \vec{AB} і \vec{CD} ; встановити, який з них довший і в скільки разів; чи будуть вони співнапрямлені чи протилежно напрямлені.
19. У точці A прикладено сили $\vec{F}_1 = \vec{AB}$, $\vec{F}_2 = \vec{AC}$, $\vec{F}_3 = \vec{AD}$. Знайти рівнодійну цих сил і її довжину, якщо $A(2; -1; 3)$, $B(1; 3; -1)$, $C(-2; 1; 3)$, $D(3; -5; 4)$.
20. Визначити, при яких значеннях параметрів α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$, $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ колінеарні.
21. Перевірити, що чотири точки є вершинами трапеції $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$.

22. Знайти орт вектора:
 1) $\vec{a} = \{-2; 6; -3\}$; 2) $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$; 3) $\vec{a} = \{3; 4; -12\}$.
23. Знайти одиничний вектор, колінеарний вектору $\vec{a} = \{3; 4; -12\}$, який має однаковий (протилежний) з ним напрямок.
24. Має місце розклад вектора \vec{c} за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} : \vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$. Знайти розклад за цим же базисом вектора \vec{d} , колінеарного вектору \vec{c} , протилежного з ним напрямку і такого що $|\vec{d}| = 75$.
25. Вершини трикутника ABC мають координати $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(3; 6; 7)$. Знайдіть довжину медіани, проведеної до сторони AC .
26. Два вектори $\vec{a} = \{2; -3; 6\}$ і $\vec{b} = \{-1; 2; -2\}$ прикладені до однієї точки. Визначити координати вектора \vec{c} , напрямленого по бісектрисі кута між векторами \vec{a} і \vec{b} за умови, що $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.
27. На площині задано два вектори $\vec{p} = \{2, -3\}$, $\vec{q} = \{1; 2\}$. Знайти розклад вектора $\vec{a} = \{9; 4\}$ за базисом \vec{p}, \vec{q} .
28. Дано три вектори $\vec{p} = \{3, -2; 1\}$, $\vec{q} = \{-1; 1; -2\}$, $\vec{r} = \{2; 1; -3\}$. Знайти розклад вектора $\vec{c} = \{11; -6; 5\}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.
29. Дано чотири вектори $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{2; 2; -1\}$, $\vec{d} = \{3; 7; -7\}$. Знайти розклад:
 1) вектора \vec{a} за базисом $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$;
 2) вектора \vec{c} за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$.

Відповіді до теми 2.1.

1. $|\vec{a}| = 7$. 2. $\overrightarrow{AB} = \{-7; 2; -2\}$, $\overrightarrow{BA} = \{7; -2; 2\}$. 3. $N(4; -2; -2)$. 4. $a_x = \sqrt{2}$, $a_y = 1$, $a_z = -1$. 5. $a_z = 4$ або $a_z = -4$. 6. 1) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \beta = -\frac{4}{13}$, $\cos \gamma = -\frac{3}{13}$; 2) $\cos \alpha = -\frac{16}{25}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$, $\cos \gamma = -\frac{12}{25}$. 7. 1) не може, 2) може.

8. $\vec{a} = \{1; -1; \sqrt{2}\}$ або $\vec{a} = \{1; -1; -\sqrt{2}\}$. **10.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$. **11.** $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$. **12.** $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11,4$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$. **13.** 1) \vec{a} і \vec{b} мають бути взаємно перпендикулярні; 2) кут між \vec{a} і \vec{b} має бути гострий; 3) кут між \vec{a} і \vec{b} має бути тупий. **14.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. **16.** 1) $\{2; -4; 6\}$; 2) $\{3; -7; 12\}$; 3) $\{2; -8/3; 2\}$. **17.** Колінеарні, \vec{b} довший \vec{a} в три рази. **18.** $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{CD}|$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. **19.** $\vec{R} = \{-4; 2; -3\}$, $|\vec{R}| = \sqrt{29}$. **20.** $\alpha = 4, \beta = -1$. **22.** 1) $\vec{a}^0 = \{-\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; -\frac{3}{7}\}$, 2) $\vec{a}^0 = \{\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}\}$, 3) $\vec{a}^0 = \{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\}$. **23.** $\uparrow\uparrow \vec{a}^0 = \{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\}$, $\uparrow\downarrow \vec{a}^0 = \{-\frac{3}{13}; -\frac{4}{13}; \frac{12}{13}\}$. **24.** $\vec{d} = -48\vec{i} + 45\vec{j} - 36\vec{k}$. **25.** $\sqrt{26}$. **26.** $\vec{c} = \{-3; 15; 12\}$. **27.** $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$. **28.** $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$. **29.** 1) $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$; 2) $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{d}$.

**Тема 2.2. Скалярний добуток векторів, його обчислення,
основні властивості та застосування**

(Позначення: (\vec{a}, \vec{b}) або $\vec{a} \cdot \vec{b}$ – скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b})

1. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$.
Обчислити:
1) (\vec{a}, \vec{b}) ; 2) \vec{a}^2 ; 3) \vec{b}^2 ; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$;
5) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 6) $(\vec{a} - 3\vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b})$; 7) $(2\vec{a} + 3\vec{b})^2$.
2. Вектори \vec{a} та \vec{b} взаємно перпендикулярні, а вектор \vec{c} утворює з ними кут $\frac{\pi}{3}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$. Обчислити:
1) $(2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{b} + 2\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + 3\vec{c}, 2\vec{a} - \vec{b})$;
3) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 4) $(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c})^2$.
3. Дано одиничні вектори, що задовольняють умові $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.
Обчислити $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.
4. Якій умові повинні задовольняти вектори \vec{a} та \vec{b} , щоб вектор $\vec{a} + \vec{b}$ був перпендикулярний вектору $\vec{a} - \vec{b}$.
5. Вектори утворюють \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} попарно утворюють кути, кожен з яких дорівнює 60° . Знаючи, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 3$, знайти модуль вектора $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
6. Дано довжини векторів: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Визначити, при якому α вектори $\alpha\vec{a} + \vec{b}$ і $\alpha\vec{a} - \vec{b}$ взаємно перпендикулярні.
7. Дано вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ і $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, що співпадають зі сторонами трикутника ABC . Знайти розклад за базисом \vec{b}, \vec{c} вектора, що прикладений до вершини B цього трикутника і співпадає з його висотою BD .

8. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$.
Обчислити кут між векторами $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$.
9. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Обчислити:
- 1) (\vec{a}, \vec{b}) ; 2) $|\vec{a}|$; 3) $\sqrt{\vec{b}^2}$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$;
 - 5) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 6) $(2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$; 7) $(\vec{a} + 2\vec{b}, 4\vec{a} - \vec{b})$.
10. Відомо точки $A(-1; 2; -3)$, $B(2; -1; 4)$, $C(3; -1; 1)$. Обчислити:
- 1) $(2\vec{AB} - \vec{CB}, 2\vec{BC} + \vec{AB})$; 2) $\sqrt{BA^2}$; 3) $\sqrt{AC^2}$;
 - 4) $(\vec{AB}, \vec{CB})\vec{CA}$; 5) $\vec{AB}(\vec{CB}, \vec{CA})$.
11. Дано вершини чотирикутника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.
12. Визначити, при якому α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.
13. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = \{6; -3; 2\}$ і $\vec{b} = \{2; 1; -2\}$.
14. Дано вершини трикутника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$.
Визначити його внутрішній кут при вершині B .
15. Дано вершини трикутника $A(3; 1; 4)$, $B(0; 5; 2)$, $C(4; 3; 6)$. Визначити його зовнішній кут при вершині C .
16. Який кут утворюють одиничні вектори \vec{p} і \vec{q} , якщо вектори $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ взаємно перпендикулярні?
17. Знайти довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, а кут між \vec{p} і \vec{q} дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

18. Вектор \vec{x} колінеарний вектору $\vec{a} = \{6; -8; -7,5\}$ і утворює гострий кут з віссю OZ . Знаючи, що $|\vec{x}| = 50$, знайти його координати.
19. Знайти вектор \vec{x} , який колінеарний вектору $\vec{a} = \{2; 1; -2\}$ і задовольняє умову $(\vec{x}, \vec{a}) = 18$.
20. Вектор \vec{x} перпендикулярний до векторів $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ і утворює тупий кут з віссю OY . Знайти його координати, якщо відомо, що $|\vec{x}| = 14$.
21. Знайти вектор \vec{x} , знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = \{3; -1; 2\}$ і $\vec{b} = \{-2; 1; 1\}$ і задовольняє умову $(\vec{x}, \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}) = 24$.
22. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Знайти вектор \vec{x} , якщо відомо, що він перпендикулярний до осі OZ і задовольняє умовам $(\vec{x}, \vec{a}) = 9$, $(\vec{x}, \vec{b}) = -4$.
23. Дано вектори $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$. Знайти вектор \vec{x} , що задовольняє умовам $(\vec{x}, \vec{a}) = -1$, $(\vec{x}, \vec{b}) = -4$, $(\vec{x}, \vec{c}) = -2$.
24. Обчислити проєкцію вектора $\vec{a} = 6\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ на вісь вектора $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.
25. Дано точки $A(1; -2; 2)$, $B(2; 5; 0)$, $C(7; 1; 2)$, $D(5; -3; 6)$. Обчислити проєкцію $\text{Pr}_{\overline{CD}} \overline{AB}$.
26. Дано вектори $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 8\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Обчислити проєкцію $\text{Pr}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.
27. Дано вектори $\vec{a} = \{2; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{3; -12; -1\}$, $\vec{c} = \{0; 8; 13\}$. Обчислити проєкцію $\text{Pr}_{\vec{b} + \vec{c}} \vec{a}$.
28. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Обчислити проєкцію $\text{Pr}_{\vec{c}}(3\vec{a} - 4\vec{b})$.

29. Обчислити проекцію вектора $3\vec{a} - 2\vec{b}$ на вектор \vec{a} , якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, а кут між \vec{a} і \vec{b} дорівнює $\frac{2\pi}{3}$.
30. Знайти проекцію вектора $\vec{s} = \{\sqrt{2}; -3; -5\}$ на вісь, що складає з координатними осями OX , OZ кути $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, а з віссю OY гострий кут β .
31. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{f} = \{-4; 3; 5\}$, коли її точка прикладання переміщується з початку в кінець вектора $\vec{s} = \{2; -1; 6\}$.
32. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{f} = \{3; -1; -4\}$, коли її точка прикладання рухаючись прямолінійно переміщується з положення $A(-2; 5; 6)$ в положення $B(-1; 7; -3)$.
33. У точці прикладено сили $\vec{M} = \{3; -4; 2\}$, $\vec{N} = \{2; -3; -4\}$, $\vec{P} = \{1; 5; -4\}$. Обчислити, яку роботу виконує рівнодійна цих сил, коли точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення $A(2; 3; -7)$ в положення $B(7; 2; -3)$.

Відповіді теми 2.2.

1. 1) -3; 2) 4; 3) 9; 4) 7; 5) 19; 6) -4; 7) 61. 2. 1) 3; 2) 33; 3) 22; 4) 55. 3. $-\frac{3}{2}$.
4. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. 5. 5. 6. $\alpha = \pm \frac{3}{2}$. 7. $\vec{h} = \frac{(\vec{b}, \vec{c})}{c^2} \vec{c} - \vec{b}$. 8. $\arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$. 9. 1) -8; 2) 3; 3) 7; 4) 42; 5) 74; 6) -121; 7) -118. 10. 1) 64; 2) $\sqrt{67}$; 3) $\sqrt{41}$; 4) $\{-72; 54; -72\}$; 5) $\{-24; 24; -56\}$. 12. $\alpha = 2$. 13. $\arccos \frac{5}{21}$. 14. 45° .
15. $\arccos(-\frac{4}{9})$. 16. 60° . 17. $|\vec{a} + \vec{b}| = 15$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{593}$. 18. $\vec{x} = \{-24; 32; 30\}$. 19. $\vec{x} = \{4; 2; -4\}$. 20. $\vec{x} = \{-4; -6; 12\}$. 21. $\vec{x} = \{-9; -21; 3\}$. 22. $\vec{x} = \{2; -3; 0\}$. 23. $\vec{x} = \{1; 2; -2\}$. 24. $-\frac{20}{3}$. 25. $-\frac{19}{3}$. 26. 2. 27. 2. 28. $\frac{7}{3}$. 29. 6.
30. -3. 31. 19. 32. 37. 33. 8.

Тема 2.3. Векторний та мішаний добуток векторів. Їх основні властивості та застосування

(Позначення: $[\vec{a}, \vec{b}]$ або $\vec{a} \times \vec{b}$ – векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ – мішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c})

- Знайти модуль векторного добутку векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:
 - $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, кут між \vec{a} , \vec{b} дорівнює $\frac{\pi}{6}$;
 - $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 6$.
- Дано $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = 32$. Обчислити (\vec{a}, \vec{b}) .
- Вектори \vec{a} та \vec{b} взаємно перпендикулярні і $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Обчислити:
 - $||[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]||$;
 - $||[2\vec{a} - \vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}]||$.
- Вектори утворюють \vec{a} та \vec{b} утворюють кут $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ і відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Обчислити:
 - $[\vec{a}, \vec{b}]^2$;
 - $[2\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}]^2$;
 - $[\vec{a} - 3\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}]^2$.
- Якій умові повинні задовольняти вектори \vec{a} та \vec{b} , щоб вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ були колінеарні?
- Вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} задовольняють умові $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Довести, що $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$.
- Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Знайти координати векторних добутків:
 - $[\vec{a}, \vec{b}]$;
 - $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$;
 - $[\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]$.
- Відомо точки $A(-1; 2; -3)$, $B(-2; 4; -1)$, $C(3; -1; 1)$. Знайти координати векторних добутків:
 - $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}]$;
 - $[2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$;
 - $[\overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}]$.

9. Дано точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$. Обчислити площу трикутника ABC та довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC .
10. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} , \vec{b} , де $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, а кут між \vec{p} , \vec{q} дорівнює $\frac{\pi}{4}$.
11. Дано вершини трикутника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC .
12. Обчислити висоту паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.
13. Перевірити, чи можуть вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{k}$, $\vec{b} = -6\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$ бути ребрами куба. Якщо можуть, то знайдіть третє ребро.
14. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.
15. Вектор \vec{x} перпендикулярний до вектора $\vec{a} = \{4; -2; -3\}$ і вектора $\vec{b} = \{0; 1; 3\}$ та утворює тупий кут з віссю OY . Знайти його координати, якщо відомо, що $|\vec{x}| = 26$.
16. Знайти вектор \vec{x} , якщо він перпендикулярний до вісі OZ та до вектора $\vec{a} = \{8; -15; 3\}$ і $|\vec{x}| = 51$. Кут між вектором \vec{x} і віссю OX гострий.
17. Знайти вектор \vec{x} , який перпендикулярний до вектора $\vec{a} = \{2, -3, 1\}$ та до вектора $\vec{b} = \{1, -2, 3\}$ і задовольняє умову $(\vec{x}, \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.
18. Сила $\vec{F} = \{-2; 4; 5\}$ прикладена до точки $A(-1; 3; 2)$. Визначити момент цієї сили відносно початку координат.
19. Сила $\vec{F} = \{-1; 3; 5\}$ прикладена до точки $M(3; 4; -2)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $A(-2; 3; 1)$.

20. Сила $\vec{F} = \{2; 2; 9\}$ прикладена до точки $A(4; 2; -3)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $C(2; 4; 0)$.
21. У точці $C(-1; 3; -2)$ прикладено сили $\vec{M} = \{2; -3; -1\}$, $\vec{N} = \{1; 2; -5\}$, $\vec{P} = \{-6; 3; 4\}$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки $A(-4; 4; 1)$.
22. Визначити величину моменту сили \vec{F} , прикладеної до точки A відносно точки O , якщо $\vec{OA} = \vec{r}$, $\vec{F} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{r} = -2\vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, а кут між \vec{p} , \vec{q} дорівнює $\frac{\pi}{6}$.
23. Визначити, якою є трійка векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} (права чи ліва), якщо:
- 1) $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{j}$;
 - 2) $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j}$;
 - 3) $\vec{a} = \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{k}$;
 - 4) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i}$;
 - 5) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$.
24. Вектор \vec{c} перпендикулярний до векторів \vec{a} та \vec{b} . Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$. Знайти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
25. Вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} утворюють праву трійку і взаємно перпендикулярні. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$. Знайти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
26. Довести, що $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \leq |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$. В якому випадку тут знак рівності?
27. Довести, що вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , які задовольняють умові $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = 0$, компланарні.
28. Дано вектори $\vec{a} = \{-3; 1; 4\}$, $\vec{b} = \{2; -10; -3\}$, $\vec{c} = \{1; 1; -2\}$. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
29. Перевірити, чи компланарні вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , якщо:
- 1) $\vec{a} = \{4; -1; 1\}$, $\vec{b} = \{2; 3; -1\}$, $\vec{c} = \{1; -2; 1\}$;

- 2) $\vec{a} = \{-1; 3; -1\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$, $\vec{c} = \{3; -1; 2\}$;
 3) $\vec{a} = \{3; 2; 2\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 3\}$, $\vec{c} = \{8; 3; 7\}$;
 4) $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{3; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{2; 3; 1\}$.
- 30.** Перевірити, що точки $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$ лежать в одній площині.
- 31.** Знайти об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2; -1; -2)$, $B(-1; 3; -2)$, $C(1; -1; 4)$, $D(2; 0; 1)$.
- 32.** Дано вершини тетраедра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D .
- 33.** Знайти об'єм тетраедра і довжину його висоти, опущеної з вершини A , якщо $A(2; 3; -1)$, $B(3; 0; 2)$, $C(2; -2; 1)$, $D(1; -3; 0)$.

Відповіді до теми 2.3.

1. 1) 3; 2) 8. 2. ± 24 . 3. 1) 30; 2) 75. 4. 1) 27; 2) 27; 3) 2700. 5. $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
 7. 1) $\{10; -1; -7\}$; 2) $\{20; -2; -14\}$; 3) $\{40; -4; -28\}$. 8. 1) $\{14; 12; -5\}$;
 2) $\{-14; -12; 5\}$; 3) $\{42; 36; -15\}$. 9. $S = 14$, $h = \frac{28}{\sqrt{52}}$. 10. $39\sqrt{2}$. 11. $S = 25$,
 $h = 5$. 12. $\sqrt{\frac{62}{13}}$, $\sqrt{\frac{31}{3}}$. 13. $\vec{c} = 9\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ або $\vec{c} = -9\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$. 14. $\frac{5\sqrt{17}}{21}$.
 15. $\vec{x} = \{-6; -24; 8\}$. 16. $\vec{x} = \{45; 24; 0\}$. 17. $\vec{x} = \{7; 5; 1\}$. 18. $\vec{M} = \{7; 1; 2\}$.
 19. $\vec{M} = \{14; -22; 16\}$. 20. $|\vec{M}| = 28$, $\cos \alpha = -\frac{12}{28}$, $\cos \beta = -\frac{6}{7}$, $\cos \gamma = \frac{2}{7}$. 21.
 $|\vec{M}| = \sqrt{298}$, $\cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{298}}$, $\cos \beta = \frac{15}{\sqrt{298}}$, $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{298}}$. 22. 34. 23. 1) права; 2)
 ліва; 3) ліва; 4) компланарні; 5) ліва. 24. ± 9 . 25. 24. 26. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ взаємно
 перпендикулярні. 28. -20. 29. 1) так; 2) ні; 3) так; 4) ні. 31. 5. 32. 11. 33. $V = \frac{1}{3}$,
 $h = \sqrt{2}$.

Розділ 3. Елементи аналітичної геометрії

Тема 3.1. Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої на площині. Умови паралельності, перпендикулярності та кут між двома прямими. В'язка прямих

1. Визначити, які з точок $M_1(3; 1)$, $M_2(2; 3)$, $M_3(6; 3)$, $M_4(-3; -3)$, $M_5(3; -1)$, $M_6(-2; 1)$ належать прямій $2x - 3y - 3 = 0$ і які їй не належать.
2. Знайти точку перетину двох прямих $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$.
3. Сторони трикутника лежать на прямих
$$x + 5y - 7 = 0, 3x - 2y - 4 = 0, 7x + y + 19 = 0.$$
Знайдіть площу цього трикутника.
4. Точки $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$, $M_3(3; -4)$ є серединами сторін трикутника. Скласти рівняння його сторін.
5. Запишіть рівняння сторін та медіан трикутника з вершинами в точках $A(3; 2)$, $B(5; -2)$, $C(1; 0)$.
6. Дано пряму $5x + 2y - 4 = 0$. Визначити кутовий коефіцієнт k прямої:
 - 1) паралельної заданій прямій;
 - 2) перпендикулярної заданій прямій.
7. Дано пряму $2x + 3y + 1 = 0$. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3; 1)$ і
 - 1) паралельна заданій прямій;
 - 2) перпендикулярна заданій прямій.
8. Обчислити кутовий коефіцієнт k прямої, що проходить через дві точки:
 - 1) $M_1(2; -7)$ і $M_2(3; 1)$;
 - 2) $M_1(3; -5)$ і $M_2(6; -4)$.

9. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ і одна з його вершин $A(2; -3)$. Запишіть рівняння двох інших сторін цього прямокутника.
10. Дано рівняння двох сторін прямокутника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей $7x + y - 15 = 0$. Знайти вершини прямокутника.
11. Знайти проєкцію точки $P(-6; 4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.
12. Знайдіть точку Q , симетричну точці $P(-5; 13)$ відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.
13. Знайдіть точку M_1 , симетричну точці $M_2(8; -9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3; -4)$ та $B(-1; -2)$.
14. Задано вершини трикутника $A(2; 1)$, $B(-1; -1)$, $C(3; 2)$. Запишіть рівняння його висот.
15. Дано вершини трикутника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$, $C(3; 5)$. Запишіть рівняння перпендикуляра, проведеного з вершини A на медіану, проведену з вершини B .
16. Дано вершини трикутника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$, $C(5; 7)$. Запишіть рівняння перпендикуляра, проведеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині A .
17. Дано рівняння двох сторін прямокутника $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ і рівняння його діагоналі $3x + 7y - 10 = 0$. Запишіть рівняння решти сторін цього прямокутника і його другої діагоналі.
18. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо задано одна з його вершин $B(-4; -5)$ і рівняння двох висот трикутника $5x + 3y - 4 = 0$, $3x + 8y + 13 = 0$.

19. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $P(3; 5)$ на однаковій відстані від точок $A(-7; 3)$ та $B(11; -15)$.
20. Знайдіть проєкцію точки $P(-8; 12)$ на пряму, що проходить через точки $M_1(2; -3)$ та $M_2(-5; 1)$.
21. На осі абсцис знайдіть таку точку P , щоб сума відстаней від неї до точок $M(1; 2)$ та $N(3; 4)$ була найменшою.
22. Знайдіть кут між прямими:
- 1) $-x + 5y + 1 = 0, 2x + 3y + 7 = 0;$
 - 2) $3x - y + 5 = 0, x + 3y - 1 = 0;$
 - 3) $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y - 3 = 0, (3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{3})y + 4 = 0;$
 - 4) $3x - y + 5 = 0, 2x + y - 7 = 0;$
 - 5) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 1 = 0, \sqrt{6}x - 3y + 2 = 0.$
23. Визначте, які з наступних пар прямих перпендикулярні:
- 1) $5x - y + 3 = 0, x + 5y - 4 = 0;$
 - 2) $2x - 4y + 1 = 0, 4x - 2y + 5 = 0;$
 - 3) $5x - 2y + 1 = 0, 4x + 6y + 17 = 0.$
24. Визначте, для яких значень параметру a пряма
- $$(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$
- 1) паралельна осі OX ;
 - 2) паралельна осі OY ;
 - 3) проходить через початок координат.
25. Визначте, для яких значень параметрів a і b прямі
- $$ax - 2y - 1 = 0; \quad 6x - 4y - b = 0$$
- 1) мають одну спільну точку;
 - 2) паралельні;
 - 3) співпадають.

- 26.** Визначте, чи перетинаються наступні прямі в одній точці:
- 1) $2x + 3y - 1 = 0$, $4x - 5y + 5 = 0$, $3x - y + 2 = 0$;
 - 2) $3x - y + 3 = 0$, $5x + 3y - 7 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$.
- 27.** Запишіть рівняння у відрізках для наступних прямих та побудуйте їх:
- 1) $3x + 4y - 12 = 0$;
 - 2) $4x - 5y - 1 = 0$.
- 28.** Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $C(8; 6)$ і відтинає від координатного кута трикутник з площею 12 кв.од.
- 29.** Визначити, які з наступних рівнянь прямих є нормального (нормованого) вигляду:
- 1) $2x + y - 1 = 0$;
 - 2) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$;
 - 3) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y - 1 = 0$;
 - 4) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 4 = 0$;
 - 5) $-y - 8 = 0$;
 - 6) $x + 3 = 0$.
- 30.** Приведіть загальні рівняння прямих до нормального (нормованого) вигляду в кожному з наступних випадків і побудуйте їх:
- 1) $3x - 4y + 12 = 0$;
 - 2) $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 10 = 0$;
 - 3) $x + 2 = 0$;
 - 4) $2x - y - \sqrt{5} = 0$.
- 31.** Обчисліть величину відхилення і відстань від точки до прямої в кожному з наступних випадків:
- 1) $A(2; -1)$, $4x + 3y + 10 = 0$;

- 2) $B(0; -3), 5x - 12y - 23 = 0;$
- 3) $P(-2; 3), 3x - 4y - 2 = 0.$
- 32.** Встановити, чи лежить точка $M(1; -3)$ і початок координат по одну чи по різні боки від кожної з наступних прямих:
- 1) $2x - y + 5 = 0;$
- 2) $3x + 2y - 2 = 0;$
- 3) $5x - y - 4 = 0;$
- 4) $x - 2y - 6 = 0;$
- 5) $15x + 20y + 10 = 0.$
- 33.** Точка $A(-5; 2)$ є вершиною квадрата, одна з сторін якого лежить на прямій $2x - y - 8 = 0$. Обчисліть площу цього квадрата.
- 34.** Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x - 2y - 5 = 0, 2x + 3y + 7 = 0$ і одна з його вершин $A(-2; 1)$. Знайти площу цього прямокутника.
- 35.** Доведіть, що пряма $2x + y + 3 = 0$ перетинає відрізок, який з'єднує точки $A(-5; 1)$ і $B(3; 7)$.
- 36.** Доведіть, що пряма $2x - 3y + 6 = 0$ не перетинає відрізок, обмежений точками $C(-2; -3)$ і $D(1; -2)$.
- 37.** Точки $A(-3; 5), B(-1; -4), C(7; -1)$ і $D(2; 9)$ – послідовні вершини чотирикутника. Встановити, чи буде даний чотирикутник опуклим.
- 38.** Точки $A(-1; 6), B(1; -3), C(4; 10)$ і $D(9; 0)$ – послідовні вершини чотирикутника. Встановити, чи буде даний чотирикутник опуклим.
- 39.** Точки $A(-10; -13), B(-2; 3)$ і $C(2; 1)$ є вершинами трикутника. Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини C .

40. Дві сторони квадрата лежать на прямих $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 65 = 0$. Знайти його площу.
41. Запишіть рівняння прямих, які паралельні прямій $4x - 3y - 8 = 0$ і знаходяться від неї на відстані $d = 3$.
42. Запишіть рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими:
- 1) $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y - 2 = 0$;
 - 2) $3x + 4y - 1 = 0$, $5x + 12y - 2 = 0$.
43. Знайдіть відстань між паралельними прямими:
- 1) $6x - 8y + 11 = 0$, $3x - 4y + 18 = 0$;
 - 2) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;
 - 3) $4x - 3y + 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$.
44. Запишіть рівняння прямої, що належить в'язці прямих $\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0$, а також
- 1) проходить через точку $A(3; -1)$;
 - 2) проходить через початок координат;
 - 3) паралельна осі OX ;
 - 4) паралельна осі OY ;
 - 5) паралельна прямій $4x + 3y + 5 = 0$;
 - 6) перпендикулярна прямій $2x + 3y + 7 = 0$.
45. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $2x + y - 2 = 0$, $x - 5y - 23 = 0$ і ділить навпіл відрізок, обмежений точками $M_1(5; -6)$ та $M_2(-1; -4)$. Розв'язати задачу, не обчислюючи координат точки перетину прямих.
46. Задані рівняння сторін трикутника $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$. Не визначаючи координат його вершин, запишіть рівняння висот трикутника.

Відповіді до теми 3.1.

1. Точки M_1, M_3, M_4 належать даній прямій; M_2, M_5, M_6 не належать даній прямій. 2. $(3; -5)$. 3. 17. 4. $7x - 2y + 12 = 0, 5x + y - 28 = 0, 2x - 3y - 18 = 0$. 5. Рівняння сторони $AB : 2x + y - 8 = 0, BC : x + 2y - 1 = 0, CA : x - y - 1 = 0$; рівняння медіани, проведеної з вершини $A : x - 3 = 0, B : x + y - 3 = 0, C : y = 0$. 6. 1) $-\frac{5}{2}$; 2) $\frac{2}{5}$. 7. 1) $2x + 3y - 9 = 0$; 2) $3x - 2y - 7 = 0$. 8. 1) $k = 8$; 2) $k = \frac{1}{3}$. 9. $2x - 3y - 13 = 0, 3x + 2y = 0$. 10. $(2; 1), (4; 2), (-1; 7), (1; 8)$. 11. $(-2; -1)$. 12. $Q(11; -11)$. 13. $M_1(10; -5)$. 14. $x + y + 2 = 0, 4x + 3y - 11 = 0, 3x + 2y - 13 = 0$. 15. $4x + y - 3 = 0$. 16. $x - 5 = 0$. 17. Рівняння сторін: $2x - 5y + 3 = 0, 2x - 5y - 26 = 0$, рівняння діагоналі $7x - 3y - 33 = 0$. 18. $3x - 5y - 13 = 0, 8x - 3y + 17 = 0, 5x + 3y - 1 = 0$. 19. $x + y - 8 = 0, 11x - y - 28 = 0$. 20. $(-12; 5)$. 21. $P\left(\frac{5}{3}; 0\right)$. 22. 1) 45° ; 2) 90° ; 3) 60° 4) 45° ; 5) 90° . 23. 1) так; 2) ні; 3) ні. 24. 1) $a = -2$; 2) $a = \pm 3$; 3) $a = 1, a = \frac{5}{3}$. 25. 1) $a \neq 3$; 2) $a = 3, b \neq 2$; 3) $a = 3, b = 2$. 26. 1) перетинаються; 2) не перетинаються. 27. 1) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$, 2) $\frac{x}{1/4} + \frac{y}{(-1/5)} = 1$. 28. $3x - 8y + 24 = 0$ або $3x - 2y - 12 = 0$. 29. Прямі 2), 4) і 5) задані нормальними рівняннями. 30. 1) $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5} = 0$; 2) $-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 10 = 0$; 3) $-x - 2 = 0$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - 1 = 0$. 31. 1) $\delta = -3, d = 3$; 2) $\delta = 1, d = 1$; 3) $\delta = -4, d = 4$. 32. 1), 4) – по один бік; 2), 3), 5) – по різні боки. 33. 80. 34. 6. 37. Так. 38. Ні. 39. 4. 40. 49. 41. $4x - 3y - 23 = 0, 4x - 3y + 7 = 0$. 42. 1) $4x - 4y + 3 = 0, 2x + 2y - 7 = 0$; 2) $14x - 8y - 3 = 0, 64x + 112y - 23 = 0$. 43. 1) $d = 5/2$; 2) $d = 3$; 3) $d = 0,5$. 44. 1) $3x + 2y - 7 = 0$; 2) $2x - y = 0$; 3) $y - 2 = 0$; 4) $x - 1 = 0$; 5) $4x + 3y - 10 = 0$; 6) $3x - 2y + 1 = 0$. 45. $x - y - 7 = 0$. 46. $4x - 5y + 22 = 0, 4x + y - 18 = 0, 2x - y + 1 = 0$.

Тема 3.2. Площина в просторі. Різні види рівнянь площини в просторі. Умови паралельності, перпендикулярності та кут між двома площинами

1. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(5; 2; 4)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$.
2. Точка $P(3; -1; 2)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.
3. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $M(3; 4; -5)$ паралельно двом векторам $\vec{a} = \{3; 1; -1\}$ та $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$.
4. Запишіть рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2; -1; 3)$ і $M_2(3; 1; 2)$ паралельно вектору $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$.
5. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; 3; 4)$, $B(4; 9; 16)$, $C(8; 27; 64)$.
6. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; 3; 4)$, $B(4; 9; 16)$ перпендикулярно площині $5x - 7y + 9z - 15 = 0$.
7. Запишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат паралельно площині $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.
8. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(5; -4; 3)$ паралельно площині $2x - 7z - 9 = 0$.
9. Запишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин $5x + 2y + 6z - 3 = 0$ та $3x + 4y + 5z - 7 = 0$.
10. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; -1; 1)$ перпендикулярно до площин $2x - z + 1 = 0$ та $y = 0$.

11. Визначте, які з наведених пар площин є паралельними, а які – перпендикулярними:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $-4x + 6y - 10z + 3 = 0$;

2) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

3) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$;

4) $3x + 6z - 2 = 0$, $x + 2z + 3 = 0$;

5) $2x + 3y - z - 5 = 0$, $x - y - z + 8 = 0$.

12. При яких значеннях l і m наступні пари рівнянь будуть визначати паралельні площини:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$;

2) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$.

13. При якому значенні l наступні пари рівнянь будуть визначати перпендикулярні площини:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;

2) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$.

14. Знайдіть точку перетину трьох площин:

$$4x + 5y - 2z - 20 = 0, \quad 5x - 8y + z = 0, \quad 4x + y - 9z - 5 = 0.$$

15. Знайдіть гострий кут між площинами:

1) $4x + 2y + 4z - 9 = 0$, $6x - 9y + 18z - 5 = 0$;

2) $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$, $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$;

3) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$.

16. Доведіть, що три площини

$$x - 2y + z - 7 = 0, \quad 2x + y - z + 2 = 0, \quad x - 3y + 2z - 11 = 0.$$

мають одну спільну точку і обчисліть її координати.

17. Доведіть, що три площини $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$ проходять через одну пряму.

18. Доведіть що три площини

$$2x - y + 3z - 5 = 0, \quad 3x + y + 2z - 1 = 0, \quad 4x + 3y + z + 2 = 0.$$

перетинаються по трьом різним паралельним прямим.

19. Запишіть рівняння площини, яка проходить через

1) точку $M_1(2; -3; 3)$ паралельно площині OXY ;

2) точку $M_2(1; -2; 4)$ паралельно площині OXZ ;

3) вісь OX і точку $M_3(4; -1; 2)$;

4) вісь OZ і точку $M_4(3; -4; 7)$;

5) точки $A_1(7; 2; -3)$ та $A_2(5; 6; -4)$ паралельно осі OX ;

6) точки $M_1(2; -1; 1)$ та $M_2(3; 1; 2)$ паралельно осі OY .

20. Запишіть рівняння наступних площин у вигляді рівняння площини у відрізках; побудуйте їх та знайдіть точки, в яких вони перетинають осі координат:

1) $3x + 6y + 5z - 90 = 0$;

2) $2x + 3y - 5z - 6 = 0$.

21. Обчисліть об'єм піраміди, яка утворена координатними площинами та площиною $2x - 3y + 6z - 12 = 0$.

22. Запишіть рівняння наступних площин у нормальному (нормованому) вигляді:

1) $2x - 2y + z - 18 = 0$;

2) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$;

3) $5y - 12z + 26 = 0$;

4) $-x + 5 = 0$.

23. Знайти величину відхилення δ та відстань d від точки до площини:

1) $M_1(-2; -4; 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$;

2) $M_2(2; -1; -1)$, $16x - 12y + 15z - 4 = 0$;

- 3) $M_3(1; 2; -3), 5x - 3y + z + 4 = 0;$
- 4) $M_4(3; -6; 7), 4x - 3z - 1 = 0.$
24. Знайдіть відстань від точки $A(3; -4; 6)$ до площини $3x - 2y + 6z - 11 = 0.$
25. Знайти відстань d від точки $P(-1; 1; -2)$ до площини, що проходить через точки
- $$M_1(1; -1; 1), M_2(-2; 1; 3) \text{ і } M_3(4; -5; -2).$$
26. Знайдіть відстань між двома паралельними площинами
- $$9x - 72y + 8z - 81 = 0 \text{ та } 9x - 72y + 8z + 65 = 0.$$
27. З'ясувати, чи лежить точка $Q(2; -1; 1)$ і початок координат по один бік чи по різні боки відносно кожної з наступних площин:
- 1) $5x - 3y + z - 18 = 0;$
 - 2) $x + 5y + 12z - 1 = 0;$
 - 3) $2x + 3y - 6z + 2 = 0;$
 - 4) $2x - y + z + 11 = 0.$
28. Доведіть, що площина $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ перетинає відрізок, обмежений точками $A(3; -2; 1)$ та $B(-2; 5; 2).$
29. Доведіть, що площина $5x - 2y + z - 1 = 0$ не перетинає відрізок, обмежений точками $A(1; 4; -3), B(2; 5; 0).$
30. Дві грані куба лежать на площинах $2x - 2y + z - 1 = 0, 2x - 2y + 2z + 5 = 0.$ Обчисліть об'єм цього куба.
31. Виведіть рівняння геометричного місця точок, відхилення яких від площини $6x + 3y + 2z - 10 = 0$ дорівнює $(-3).$
32. В кожному з наступних випадків скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранні кути, утворені двома площинами:
- 1) $x - 3y + 2z - 5 = 0, 3x - 2y - z + 3 = 0;$

2) $2x - y + 5z + 3 = 0, 2x - 10y + 4z - 2 = 0.$

33. В кожному з наступних випадків скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох паралельних площин:

1) $4x - y - 2z - 3 = 0, 4x - y - 2z - 5 = 0;$

2) $5x - 3y + z + 3 = 0, 10x - 6y + 2z + 7 = 0.$

Відповіді до теми 3.2.

1. $2x - 3y - 6z + 20 = 0.$ **2.** $3x - y + 2z - 14 = 0.$ **3.** $x + 4y + 7z + 16 = 0.$
4. $x - y - z = 0.$ **5.** $6x - 4y + z - 4 = 0.$ **6.** $69x + 21y - 22z - 113 = 0.$
7. $5x - 3y + 2z = 0.$ **8.** $2x - 7z + 11 = 0.$ **9.** $2x + y - 2z = 0.$ **10.** $x + 2z - 4 = 0.$ **11.** 1) паралельні; 2) перпендикулярні; 3) ні паралельні, ні перпендикулярні; 4) паралельні; 5) перпендикулярні. **12.** 1) $m = -4, l = 3;$ 2) $m = -\frac{2}{3}, l = 3.$
13. 1) $l = 6;$ 2) $l = -19.$ **14.** $(3; 2; 1).$ **15.** 1) $\arccos \frac{13}{21};$ 2) $\frac{\pi}{3};$ 3) $\frac{\pi}{4}.$ **16.** $(1; -2; 2).$
19. 1) $z - 3 = 0;$ 2) $y + 2 = 0;$ 3) $2y + z = 0;$ 4) $4x + 3y = 0;$ 5) $y + 4z + 10 = 0;$ 6) $x - z - 1 = 0.$ **20.** 1) $\frac{x}{30} + \frac{y}{15} + \frac{z}{18} = 1;$ 2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-1,2} = 1.$ **21.** 8. **22.** 1) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0,$ 2) $\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{11}{4} = 0,$ 3) $-\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z - 2 = 0,$ 4) $x - 5 = 0.$ **23.** 1) $\delta = -3, d = 3;$ 2) $\delta = 1, d = 1;$ 3) $\delta = 0, d = 0;$ – точка M_3 лежить на площині; 4) $\delta = -2, d = 2.$ **24.** 6. **25.** $d = 4.$ **26.** 2. **27.** 1), 4) – по один бік; 2), 3) – по різні боки. **30.** 8. **31.** $6x + 3y + 2z + 11 = 0.$ **32.** 1) $4x - 5y - z - 2 = 0,$ $2x + y - 3z + 8 = 0;$ 2) $3x - 6y + 7z + 2 = 0,$ $x + 4y + 3z + 4 = 0.$ **33.** 1) $4x - y - 2z - 4 = 0;$ 2) $20x - 12y + 4z + 13 = 0.$

Тема 3.3. Пряма в просторі. Різні види рівнянь прямої в просторі. В'язка площин. Взаємне розташування прямої і площини в просторі

1. Знайдіть точки перетину прямої

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

з координатними площинами.

2. Визначте, при якому значенні D пряма

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

перетинає 1) вісь OX ; 2) вісь OY ; 3) вісь OZ .

3. Запишіть рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин

$$\begin{cases} 3x - y + 2z + 9 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

- 1) і через точку $M_1(4; -2; -3)$;
 - 2) паралельно осі OX ;
 - 3) паралельно осі OY ;
 - 4) паралельно осі OZ .
4. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

паралельно вектору $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

5. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин

$$\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

перпендикулярно до площини $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

6. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

паралельно відрізку, обмеженому точками $A(2; 5; -3)$ і $B(3; -2; 2)$.

7. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3; 1; 4)$

1) паралельно прямій $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{7} = \frac{z+3}{5}$;

2) паралельно осі OX ;

3) паралельно осі OY ;

4) паралельно осі OZ .

8. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точки $A(16; 9; 4)$ та $B(4; 3; -1)$.

9. Запишіть параметричне рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3; -1; 2)$ та $M_2(2; 1; 1)$.

10. Через точки $A(-6; 6; -5)$ та $B(12; -6; 1)$ проведена пряма. Знайдіть точки перетину цієї прямої з координатними площинами.

11. Запишіть в загальній формі (у вигляді перетину двох площин) рівняння прямої $\frac{x-8}{4} = \frac{y-7}{3} = \frac{z+9}{2}$.

12. Запишіть параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $A(8; -3; 4)$ паралельно вектору $\vec{s} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$.

13. Запишіть канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $B(2; 3; -5)$ паралельно прямій

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

14. Запишіть канонічні рівняння прямих, заданих загальними рівняннями:

1) $\begin{cases} 2x + 4y - 3z + 6 = 0 \\ 4x + y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$;

$$2) \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$$

15. Довести паралельність прямих:

$$1) \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$2) \quad x = 2t + 5, \quad y = -t + 2, \quad z = t - 7 \quad \text{і} \quad \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

16. Довести перпендикулярність прямих:

$$1) \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

17. Доведіть, що прямі задані параметрично $x = 2t - 3$, $y = 3t - 2$, $z = -4t + 6$ та $x = t + 5$, $y = -4t - 1$, $z = t - 4$ перетинаються.

18. Дослідіть взаємне розташування прямих

$$\begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = 7t + 2 \\ z = 4t + 5 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = 8t + 9 \\ y = 6t + 3 \\ z = 3t + 7 \end{cases}$$

19. Знайдіть кут між прямими:

$$1) \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y-9}{2} = \frac{z+8}{12} \quad \text{та} \quad \frac{x-3}{6} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+7}{-2};$$

$$2) \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}} \quad \text{та} \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}};$$

$$3) \quad \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 0 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 0 \\ z = t - 3 \end{cases}.$$

20. Знайдіть точку перетину прямої та площини:

$$1) \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}; \quad 2x + 3y + z - 1 = 0;$$

$$2) \quad \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}; \quad x - 2y + z - 15 = 0;$$

$$3) \quad \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}; \quad x + 2y - 2z + 6 = 0.$$

21. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; -3; 1)$ перпендикулярно до площини $3x - 2y - 5z + 2 = 0$.
22. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1; -1; -1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.
23. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3; -1; 4)$ перпендикулярно до прямої $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$.
24. При якому значенні a пряма $\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$ паралельна площині $2x - y + az - 2 = 0$.
25. При яких значеннях m пряма $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ паралельна площині $x - 3y + 6z + 7 = 0$.
26. Знайдіть проєкцію точки $P(2; -1; 3)$ на пряму $\begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = 7t + 10 \\ z = 4t + 5 \end{cases}$.
27. Знайдіть проєкцію точки $M(5; 2; -1)$ на площину $2x - y + 3z + 23 = 0$.
28. Знайдіть координати точки Q , яка симетрична точці $P(4; 1; 6)$ відносно прямої $\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.
29. Знайдіть точку Q , симетричну точці $P(2; -5; 7)$ відносно прямої, що проходить через точки $M_1(5; 4; 6)$ і $M_2(-2; -17; -8)$.
30. Знайдіть точку Q , симетричну точці $P(1; 3; -4)$ відносно площини $3x + y - 2z = 0$.
31. Обчисліть відстань від точки $P(1; -1; -2)$ до прямої $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.
32. Обчисліть відстань від точки $P(2; 3; -1)$ до прямої $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases}$.

33. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1; 2; -3)$ паралельно прямим $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$ та $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$.

34. Довести, що прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$, $\begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = 2t + 2 \\ z = -3t + 1 \end{cases}$ лежать в одній площині

і скласти рівняння цієї площини.

35. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2} \quad \text{та} \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

36. Знайти проєкцію точки $Q(3; -4; -2)$ на площину, що проходить через паралельні прямі

$$\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4} \quad \text{та} \quad \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}.$$

37. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3; -2; -4)$ паралельно площині $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ і перетинає пряму $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

38. Обчислити найкоротшу відстань між двома прямими в кожному з наступних випадків:

1) $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ і $\frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$;

2) $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$ і $\begin{cases} x = 6t + 9 \\ y = -2 \\ z = -t + 2 \end{cases}$.

Відповіді до теми 3.3.

1. $(2; -1; 0)$, $(\frac{4}{3}; 0; -\frac{1}{3})$, $(0; 2; -1)$. 2. 1) $D = -4$; 2) $D = 9$; 3) $D = 3$. 3. 1) $23x - 2y + 21z - 33 = 0$; 2) $y + z - 18 = 0$; 3) $x + z - 3 = 0$; 4) $x - y + 15 = 0$. 4. $5x + 5z - 8 = 0$. 5. $(5 + 3\lambda)x - (1 + 2\lambda)y - (2 + 5\lambda)z - 3 + 2\lambda = 0$, де $\lambda \in \mathbb{R}$. *Вказівка.* Пряма перетину площин $5x - y - 2z - 3 = 0$, $3x - 2y - 5z + 2 = 0$ перпендикулярна до площини $x + 19y - 7z - 11 = 0$; тому, умові

задачі будуть задовольняти всі площини, що належать в'язці площин, які проходять через цю пряму. **6.** $9x + 7y + 8z + 7 = 0$. **7.** 1) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-4}{5}$; 2) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{0}$; 3) $\frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{0}$; 4) $\frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{1}$. **8.** $\frac{x-16}{20} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-4}{5}$. **9.** $x = 3 - t$, $y = -1 + 2t$, $z = 2 - t$. **10.** $(9; -4; 0)$, $(3; 0; -2)$, $(0; 2; -3)$. **11.** Напр., $3x - 4y + 4 = 0$, $2y - 3z - 41 = 0$. **12.** $x = 8 + 5t$, $y = -3 + 6t$, $z = 4 + 7t$. **13.** $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{5}$. **14.** 1) $\frac{x-1}{15} = \frac{y+2}{-18} = \frac{z}{-14}$; 2) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$. **18.** Мимобіжні. **19.** 1) 90° ; 2) 60° ; 3) 135° . **20.** 1) $(2; -3; 6)$; 2) пряма паралельна площині; 3) пряма належить площині. **21.** $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{-5}$. **22.** $2x - 3y + 4z - 1 = 0$. **23.** $x + 2y + 3z - 13 = 0$. **24.** $a = -2$. **25.** $m = -3$. **26.** $(-2; 3; 1)$. **27.** $(1; 4; -7)$. **28.** $Q(2; -3; 2)$. **29.** $Q(4; 1; -3)$. **30.** $Q(-5; 1; 0)$. **31.** 7. **32.** 15. **33.** $9x + 11y + 5z - 16 = 0$. **34.** $2x - 16y - 13z + 31 = 0$. **35.** $6x - 20y - 11z + 1 = 0$. **36.** $(2; -3; -5)$. **37.** $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$. **38.** 1) 13; 2) 7.

Тема 3.4. Криві другого порядку. Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола

1. Скласти рівняння кола, якщо:

- 1) центр кола співпадає з початком координат і його радіус $R = 2$;
- 2) центр кола співпадає з точкою $C(-3; 2)$ і його радіус $R = 4$;
- 3) коло проходить через початок координат і його центр співпадає з точкою $C(6; -8)$;
- 4) коло проходить через точку $A(2; 6)$ і його центр співпадає з точкою $C(-1; 2)$;
- 5) точки $A(2; 3)$ і $B(6; -1)$ є кінцями одного з діаметрів кола;
- 6) центр кола співпадає з початком координат і пряма $4x - 3y - 15 = 0$ є дотичною до кола;
- 7) центр кола співпадає з точкою $C(1; -1)$ і пряма $5x - 12y + 9 = 0$ є дотичною до кола.

2. Визначити, які з наступних рівнянь визначають коло. Знайти центр C та радіус R кожного з них:

- 1) $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 9$;
- 2) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$;
- 3) $(x - 3)^2 + y^2 = 16$;
- 4) $x^2 + (y + 5)^2 = 25$;
- 5) $x^2 + y^2 + x = 0$;
- 6) $x^2 + y^2 - y = 0$;
- 7) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;
- 8) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$.

3. Для поданих рівнянь еліпсів визначити півосі:
- 1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;
 - 2) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;
 - 3) $25x^2 + 9y^2 = 1$;
 - 4) $x^2 + 4y^2 = 1$;
 - 5) $16x^2 + y^2 = 16$.
4. Для поданих рівнянь еліпсів визначити півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис:
- 1) $9x^2 + 25y^2 = 225$;
 - 2) $9x^2 + 5y^2 = 45$.
5. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо:
- 1) його велика та мала півосі дорівнюють 2 і 3 відповідно;
 - 2) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;
 - 3) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;
 - 4) відстань між його фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
 - 5) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
 - 6) його мала вісь дорівнює 5, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;
 - 7) відстань між його директрисами дорівнює 5 і відстань між фокусами $2c = 4$;
 - 8) його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 16;
 - 9) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами дорівнює 13;

10) відстань між його директрисами дорівнює 32, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

6. Для поданих рівнянь гіпербол визначити півосі:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$;

2) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$;

3) $x^2 - y^2 = 1$;

4) $25x^2 - 16y^2 = 1$;

5) $4x^2 - 9y^2 = 25$.

7. Для поданих рівнянь гіпербол визначити півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот, рівняння директрис:

1) $16x^2 - 9y^2 = 144$;

2) $16x^2 - 9y^2 = -144$.

8. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо:

1) її осі $2a = 10$ і $2b = 8$ відповідно;

2) відстань між її фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;

3) відстань між її фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

4) осі $2a = 16$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

5) рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$;

6) відстань між її директрисами дорівнює $\frac{288}{13}$ і відстань між фокусами $2c = 26$;

7) відстань між її директрисами дорівнює $\frac{32}{5}$ і вісь $2b = 6$;

8) відстань між її директрисами дорівнює $\frac{32}{5}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

- 9) рівняння асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами дорівнює $\frac{64}{5}$.
9. Для поданих рівнянь парабол визначити величину параметра p та побудувати:
- 1) $y^2 = 8x$;
 - 2) $x^2 = 7y$;
 - 3) $y^2 = -6x$;
 - 4) $x^2 = -2y$.
10. Для поданих рівнянь парабол знайти координати вершини, величину параметра p і рівняння директриси:
- 1) $y^2 = 4 - 6x$;
 - 2) $x^2 = 2 - y$.
11. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, знаючи, що:
- 1) парабола розташована симетрично відносно осі Ox і проходить через точку $A(9; 6)$;
 - 2) парабола розташована симетрично відносно осі Ox і проходить через точку $B(-1; 3)$;
 - 3) парабола розташована симетрично відносно осі Oy і проходить через точку $C(1; 1)$;
 - 4) парабола розташована симетрично відносно осі Oy і проходить через точку $D(4; -8)$.
12. Скласти рівняння параболи, яка має фокус $F(0; -3)$, проходить через початок координат і має своєю віссю симетрії вісь Oy .
13. Скласти рівняння параболи, яка має фокус $F(-5; 0)$ і рівняння директриси $x - 5 = 0$.

14. Записати рівняння наступних кривих в канонічній формі, визначити їх основні характеристики та побудувати:

- 1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$;
- 2) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$;
- 3) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$;
- 4) $x^2 + y^2 = 5y$;
- 5) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;
- 6) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$;
- 7) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
- 8) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$;
- 9) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;
- 10) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;
- 11) $y = 4x^2 - 8x + 7$;
- 12) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$;
- 13) $2y^2 - 12y + 14 = x$;
- 14) $x = -y^2 + 2y - 1$;
- 15) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$.

15. Визначити, які лінії визначаються наступними рівняннями:

- 1) $y = +\sqrt{9 - x^2}$;
- 2) $y = -\sqrt{4 - x^2}$;
- 3) $x = +\sqrt{4 - y^2}$;
- 4) $x = -\sqrt{16 - y^2}$;
- 5) $y = 15 + \sqrt{64 - x^2}$;
- 6) $y = 15 - \sqrt{64 - x^2}$;
- 7) $x = -2 - \sqrt{9 - y^2}$;

- 8) $x = -2 + \sqrt{9 - y^2}$;
9) $y = -5 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$;
10) $x = -3 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$;
11) $y = +\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$;
12) $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$;
13) $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$;
14) $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$;
15) $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$;
16) $x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}$;
17) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$;
18) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$;
19) $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$;
20) $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$;
21) $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$;
22) $x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$;
23) $y = -3\sqrt{-2x}$;
24) $x = -5\sqrt{-y}$;
25) $y = +2\sqrt{x}$;
26) $x = -\sqrt{3y}$;
27) $x = -4 + 3\sqrt{y + 5}$;
28) $y = -5 + \sqrt{-3x - 21}$;
29) $x = 2 - 3\sqrt{6 - 2y}$.

Відповіді до теми 3.4.

1. 1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$; 3) $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$; 4) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 5) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 8$; 6) $x^2 + y^2 = 9$; 7) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$. 2. 1) Коло з $C(-2; 7)$ і $R = 3$; 2) точка $(1; -1)$; 3) коло з $C(3; 0)$ і $R = 4$; 4) коло з $C(0; -5)$ і $R = 5$; 5) коло з $C\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ і $R = \frac{1}{2}$; 6) коло з $C\left(0; \frac{1}{2}\right)$ і $R = \frac{1}{2}$; 7) коло з $C(2; -3)$ і $R = 4$; 8) рівняння не визначає жодного геометричного об'єкту на площині. 3. 1) $a = 4, b = 3$; 2) $a = 2, b = 1$; 3) $a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{3}$; 4) $a = 1, b = \frac{1}{2}$; 5) $a = 1, b = 4$; 4. 1) $a = 5, b = 3$; $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$; $\varepsilon = \frac{4}{5}$; $x = \pm \frac{25}{4}$; 2) $a = \sqrt{5}, b = 3$; $F_1(0; -2), F_2(0; 2)$; $\varepsilon = \frac{2}{3}$; $x = \pm \frac{9}{2}$. 5. 1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; 4) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 5) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$; 6) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; 7) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$; 8) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$; 9) $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$ або $\frac{x^2}{117/4} + \frac{y^2}{9} = 1$; 10) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. 6. 1) $a = 3, b = 2$; 2) $a = 4, b = 1$; 3) $a = 1, b = 1$; 4) $a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{4}$; 5) $a = \frac{5}{2}, b = \frac{5}{3}$. 7. 1) $a = 3, b = 4$; $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$; $\varepsilon = \frac{5}{3}$; $y = \pm \frac{4}{3}x$; $x = \pm \frac{9}{5}$; 2) $a = 3, b = 4$; $F_1(0; -5), F_2(0; 5)$; $\varepsilon = \frac{5}{4}$; $y = \pm \frac{4}{3}x$; $x = \pm \frac{16}{5}$. 8. 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 4) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 5) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; 6) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$; 7) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 8) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 9) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. 9. 1) $p = 4$; 2) $p = \frac{7}{2}$; 3) $p = 3$; 4) $p = 1$. 10. 1) $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; $p = 3$; $6x - 13 = 0$; 2) $A(0; 2)$; $p = \frac{1}{2}$; $4y - 9 = 0$. 11. 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -9x$; 3) $x^2 = y$; 4) $x^2 = -2y$. 12. $x^2 = -12y$. 13. $y^2 = -20x$. 14. 1) коло, $C(1; -2), R = 5$; 2) точка $(-2; 1)$; 3) рівняння не визначає ніякого геометричного образу на площині; 4) коло, $C\left(0; \frac{5}{2}\right), R = \frac{5}{2}$; 5) еліпс, $C(3; -1), a = 3, b = \sqrt{5}$; $\varepsilon = \frac{2}{3}$; директриси $2x - 15 = 0; 2x + 3 = 0$; 6) еліпс, $C(1; -2), a = 2\sqrt{3}, b = 4$; $\varepsilon = \frac{1}{2}$; директриси $y - 6 = 0; y + 10 = 0$; 7) еліпс, $C(-1; 2), a = 5, b = 4$; $\varepsilon = \frac{3}{5}$; директриси $3x - 22 = 0; 3x + 28 = 0$; 8) гіпербола, $C(2; -1), a = 3, b = 4$; $\varepsilon = 1.25$; директриси $y = -4.5; y = 2.2$; асимптоти $4x + 3y - 5 = 0, 4x - 3y - 11 = 0$; 9) гіпербола, $C(2; -3), a = 3, b = 4$; $\varepsilon = \frac{5}{3}$; директриси $5x - 1 = 0; 5x - 19 = 0$; асимптоти $4x - 3y - 17 = 0, 4x + 3y + 1 = 0$; 10) гіпербола, $C(-5; 1), a = 8, b = 6$; $\varepsilon = 1.25$; директриси $x = -11.4; x = 1.4$; асимптоти $3x + 4y + 11 = 0, 3x - 4y + 19 = 0$; 11) парабола, $A(1; 3), p = \frac{1}{8}$;

12) парабола, $A(6; -1)$, $p = 3$; 13) парабола, $A(-4; 3)$, $p = \frac{1}{4}$; 14) парабола, $A(0; 1)$, $p = \frac{1}{2}$; 15) парабола, $A(1; 2)$, $p = 2$. 15. 1) півколо радіуса $R = 3$ з центром в початку координат, розміщене у верхній півплощині; 2) півколо радіуса $R = 2$ з центром в початку координат, розміщене у нижній півплощині; 3) півколо радіуса $R = 2$ з центром в початку координат, розміщене у правій півплощині; 4) півколо радіуса $R = 4$ з центром в початку координат, розміщене у лівій півплощині; 5) півколо радіуса $R = 8$ з центром $C(0; 15)$, розміщене над прямою $y - 15 = 0$; 6) півколо радіуса $R = 8$ з центром $C(0; 15)$, розміщене під прямою $y - 15 = 0$; 7) півколо радіуса $R = 3$ з центром $C(-2; 0)$, розміщене вліво від прямої $x + 2 = 0$; 8) півколо радіуса $R = 3$ з центром $C(-2; 0)$, розміщене вправо від прямої $x + 2 = 0$; 9) півколо радіуса $R = 5$ з центром $C(-2; -3)$, розміщене під прямою $y + 3 = 0$; 10) півколо радіуса $R = 7$ з центром $C(-5; -3)$, розміщене вправо від прямої $x + 5 = 0$. 11) половина еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, розміщена у верхній півплощині; 6) половина еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, розміщена у лівій півплощині; 7) половина еліпса $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+7)^2}{4} = 1$, розміщена над прямою $y + 7 = 0$; 8) половина еліпса $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$, розміщена під прямою $y - 1 = 0$; 9) половина еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$, розміщена в лівій півплощині; 10) половина еліпса $\frac{(x+5)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$, розміщена вправо від прямої $x + 5 = 0$; 11) вітка гіперболи $x^2 - \frac{y^2}{9} = -1$, розміщена у нижній півплощині; 12) вітка гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, розміщена у лівій півплощині; 13) частина гіперболи $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, розміщена над прямою $y + 1 = 0$; 14) вітка гіперболи $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-7)^2}{9} = -1$, розміщена під прямою $y - 7 = 0$; 15) вітка гіперболи $\frac{(x-9)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$, розміщена вліво від прямої $x - 9 = 0$; 16) частина гіперболи $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = -1$, розміщена вліво від прямої $x - 5 = 0$; 17) частина параболи $y^2 = -18x$, розміщена в третій чверті; 18) частина параболи $x^2 = -25y$, розміщена в третій чверті; 19) частина параболи $y^2 = -x$, розміщена в другій чверті; 20) частина параболи $x^2 = 3y$, розміщена в другій чверті; 21) частина параболи $(x + 4)^2 = 9(y + 5)$, розміщена вправо від прямої $x + 4 = 0$; 22) частина параболи $(y + 5)^2 = -3(x + 7)$, розміщена під прямою $y + 5 = 0$; 23) частина параболи $(x - 2)^2 = -2(y - 3)$, розміщена вліво від прямої $x - 2 = 0$.

Тема 3.5. Поверхні другого порядку. Сфера. Еліпсоїд. Гіперболоїди. Параболоїди

1. Скласти рівняння сфери, якщо:

- 1) центр сфери співпадає з початком координат і має радіус $R = 5$;
- 2) центр сфери співпадає з точкою $C(-2; 4; -5)$ і має радіус $R = 4$;
- 3) сфера проходить через початок координат і його центр співпадає з точкою $C(4; -2; -4)$;
- 4) сфера проходить через точку $A(3; -2; 1)$ і її центр співпадає з точкою $C(2; -1; -3)$;
- 5) точки $A(2; -3; 5)$ і $B(4; 1; -3)$ є кінцями одного з діаметрів сфери;
- 6) центр сфери співпадає з початком координат і площина $16x - 15y - 12z + 75 = 0$ є дотичною до сфери;
- 7) центр сфери співпадає з точкою $C(3; -5; -2)$ і площина $2x - y - 3z + 11 = 0$ є дотичною до сфери.

2. Визначити координати центру C та радіус R сфери, заданої одним з наступних рівнянь:

- 1) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 6)^2 = 25$;
- 2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$;
- 3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 19 = 0$;
- 4) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 2 = 0$;
- 5) $x^2 + y^2 + z^2 - 6y = 0$;
- 6) $x^2 + y^2 + z^2 + 20z = 0$.

3. Визначити тип заданих поверхонь та побудувати їх:

- 1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} = 1$;
- 2) $x^2 + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$;

- 3) $x^2 + y^2 - 4z^2 = -1$;
- 4) $3x^2 + y^2 = 2a(z - 2)$;
- 5) $2y = x^2 - \frac{z^2}{4}$;
- 6) $y^2 = 15z$;
- 7) $z = 5 - x^2 - y^2$;
- 8) $x^2 - 9y^2 = 4z^2$;
- 9) $x^2 = 5y - 1$;
- 10) $2x^2 - 4x + y^2 - 6y - z^2 = 0$;
- 11) $2x^2 - 7y^2 + 11z^2 = 0$;
- 12) $x + 2 = y^2 - 3y + 3z^2 + 6z$.

4. Знайти центр і півосі еліпсоїда, заданого рівнянням

$$3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 49 = 0.$$

5. Встановити, що лінією перетину еліпсоїда $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ з площиною $x - 2 = 0$ є еліпс; знайти його півосі та вершини.

6. Встановити, що лінією перетину однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ з площиною $z + 1 = 0$ є гіпербола; знайти її півосі та вершини.

7. Встановити, що лінією перетину гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ з площиною $y + 6 = 0$ є парабола; знайти її параметр та вершину.

8. Знайти лінію перетину однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ з наступними площинами:

- 1) Oxz ;
- 2) Oxy ;
- 3) $x = 4$.

9. Знайти точки перетину еліптичного параболоїда $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ з прямою $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-10}{4}$.

10. Знайти точки перетину поверхні з прямою:

$$1) \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4};$$

$$2) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1, \quad \frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4};$$

$$3) \quad \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z, \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2};$$

$$4) \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z, \quad \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}.$$

11. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$

навколо осі Oy та визначити вигляд поверхні.

12. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$

навколо осі Ox та визначити вигляд поверхні.

13. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи $\begin{cases} y^2 = 2pz, \\ x = 0 \end{cases}$

навколо осі Oz та визначити вигляд поверхні.

14. Скласти рівняння конуса з вершиною у початку координат, напрямна якого задається рівняннями:

$$1) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c; \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = b; \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a. \end{cases}$$

15. Скласти рівняння конуса з вершиною в точці $(0; 0; 1)$, напрямна якого

задається рівняннями $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ z = 3. \end{cases}$

Відповіді до теми 3.5.

1. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; 2) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z + 5)^2 = 16$; 3) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z + 4)^2 = 36$; 4) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = 18$; 5) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 21$; 6) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; 7) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = 56$.
2. 1) $C(2; -3; 6)$, $R = 5$; 2) $C(-1; 2; 0)$, $R = 3$; 3) $C(1; 2; -1)$, $R = 5$; 4) $C(-1; 3; -\frac{1}{2})$, $R = \frac{7}{2}$; 5) $C(0; 3; 0)$, $R = 3$; 6) $C(0; 0; -10)$, $R = 10$.
3. 1) Еліпсоїд з півосями $a = 2$, $b = 4$, $c = 9$; 2) однопорожнинний гіперболоїд з віссю Oz і півосями $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$; 3) двопорожнинний гіперболоїд з віссю Oz і півосями $a = 1$, $b = 1$, $c = 4$; 4) еліптичний параболоїд з вершиною в точці $(0; 0; 2)$, направлений «вгору», коли $a > 0$, «вниз», коли $a < 0$; вісь Oz , якщо $a = 2$; 5) гіперболічний параболоїд з віссю Oy ; 6) параболічний циліндр з твірною, паралельною осі Ox ; 7) круговий параболоїд з вершиною в точці $(0; 0; 5)$, направлений «вниз»; 8) еліптичний конус з віссю Ox ; 9) параболічний циліндр з твірною, паралельною осі Oz ; 10) однопорожнинний гіперболоїд $\frac{(x-1)^2}{11/2} + \frac{(y-3)^2}{11} - \frac{z^2}{11} = 1$; 11) еліптичний конус з віссю Oy ; 12) еліптичний параболоїд $x + \frac{29}{4} = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 3(z + 1)^2$, направлений в додатному напрямку осі Ox .
4. Центр еліпсоїда - $C(1; -2; 3)$, півосі - $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$, $c = 2$.
5. Еліпс з півосями $a = 3$, $b = \sqrt{3}$ і вершинами в точках $(2; 3; 0)$, $(2; -3; 0)$, $(2; 0; \sqrt{3})$, $(2; 0; -\sqrt{3})$.
6. Еліпс з півосями $a = 4$, $b = 3$ і вершинами в точках $(4; 0; -1)$, $(-4; 0; -1)$.
7. Парабола з параметром $p = 15$ і вершиною $(0; -6; -\frac{3}{2})$.
8. 1) Гіпербола $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$; 2) еліпс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; 3) гіпербола $\frac{z^2}{48} - \frac{y^2}{27} = 1$.
9. $M_1(-2; 1; 2)$, $M_2(6; -3; 18)$.
10. 1) $(3; 4; -2)$, $(6; -2; 2)$; 2) пряма дотикається поверхні в точці $(4; -3; 2)$; 3) пряма та поверхня не перетинаються; 4) пряма лежить на поверхні.
11. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5} = 1$ - еліпсоїд.
12. $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{4} = -1$ - двопорожнинний гіперболоїд.
13. $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z$ - круговий параболоїд.
14. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2}$; 3) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2}$.
15. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = \frac{(z-1)^2}{4}$.

Завдання до розрахункової роботи

Варіант 1

1. Розв'язати систему методом Крамера
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \end{cases}.$$

2. Знайти матрицю, обернену до $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Зробити перевірку.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$$

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{1; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{2; 2; 3\}$, $\vec{c} = \{3; 1; 1\}$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{d} = \{3; 5; 2\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(8; 6; 4), A_2(10; 5; 5), A_3(5; 6; 8), A_4(8; 10; 7).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(0; -1; 1)$, $M_1(1; 0; 1)$, $M_2(4; 1; 6)$, $M_3(6; -1; 0)$.

Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму α і точку A

$$\alpha: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3}, \quad A(4; 5; 1).$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію $x = 2 + \sqrt{4 - y^2 - 6y}$.

10. Розкласти дріб $\frac{2x+3}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 2

1. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему матричним методом $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 16 & -13 & 11 & 5 \\ 1 & -12 & 11 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

5. Знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , якщо $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(4; 4; 10), A_2(7; 10; 2), A_3(2; 8; 4), A_4(9; 6; 9).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 - 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(0; 1; 1)$, $M_1(-13; 0; 6)$, $M_2(10; 1; -3)$, $M_3(-2; 1; 3)$. Записати:
- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
 - д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
 - е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(2; -1; 1)$ відносно прямої

$$\frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 9 = 0.$$

10. Розкласти дріб $\frac{5x^2+1}{(x^2+x+1)(x^2-1)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 3

1. Розв'язати систему матричним методом $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$.

2. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти добуток матриць AB , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Дослідити систему на сумісність і у випадку сумісності знайти її розв'язок

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -9 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}.$$

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{1; 3; 5\}$, $\vec{b} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{c} = \{1; 1; 3\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{2; 7; 14\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(4; 6; 5), A_2(6; 9; 4), A_3(2; 10; 10), A_4(7; 5; 9).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 - 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(0; -4; -1)$, $M_1(6; -8; -2)$, $M_2(-4; 10; -1)$, $M_3(0; -2; -3)$. Записати:
- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
 - д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
 - е) рівняння площини, що ділить навпіл двограний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(1; 1; 1)$ відносно прямої

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$x = -2 - \sqrt{4 - y^2 - 6y}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{4x+1}{(x^2-x+1)(x^2+2)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 4

1. Знайти матрицю, обернену до $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Зробити перевірку.

2. Обчислити $f(A)$, якщо $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}$$

5. Знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , якщо $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(3; 5; 4), A_2(8; 7; 4), A_3(5; 10; 4), A_4(4; 7; 8).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 - 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(0; 1; 2)$, $M_1(2; 0; 2)$, $M_2(8; -1; 7)$, $M_3(12; 1; 1)$. Записати:
- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Записати канонічне рівняння прямої $\begin{cases} 2x + 2y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$x = 1 + \frac{7}{3}\sqrt{13 + y^2 + 4y}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{3x^2}{(x^2-x+1)(x^2+2)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 5

1. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 10 & 10 \\ 12 & 36 & 40 & 41 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 = -12 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{2; 1; 4\}$, $\vec{b} = \{2; -2; 5\}$, $\vec{c} = \{1; -1; 3\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{1; 5; 1\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(10; 6; 6), A_2(-2; 8; 2), A_3(6; 8; 9), A_4(7; 10; 3).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 - 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(0; 1; -2)$, $M_1(1; -12; 8)$, $M_2(0; 11; -10)$, $M_3(0; -1; 2)$. Записати:
- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
 - д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;

- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.
8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(1, 0, 1)$ відносно площини $4x + 6y + 4z - 25 = 0$.
9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію $x = 3 - \frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$.
10. Розкласти дріб $\frac{2x+1}{(x^2-4x+3)(x^2+3)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 6

1. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему матричним методом $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

3. Дослідити систему з даною розширеною матрицею на сумісність і у випадку

сумісності знайти розв'язок цієї системи $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right)$.

4. Обчислити, використовуючи формулу Муавра. Відповідь записати в алгебраїчній формі: $(1 + i)^{10}$.

5. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , якщо $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(1; 8; 2), A_2(5; 2; 6), A_3(5; 7; 4), A_4(4; 10; 9).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(1; -1; 0)$, $M_1(7; -5; -1)$, $M_2(-3; 13; 0)$, $M_3(1; 1; -2)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ,
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$,
- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$,
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$,
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$,
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двограний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}, \quad x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$y = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{15 - x^2 - 2x}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{3x^2}{(x^2-4x+3)(x^2-9)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 7

1. Розв'язати систему методом Крамера
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

2. Знайти добуток матриць AB , якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Побудувати графік функції, що задана в полярній системі координат

$$\rho = \sin 5\varphi.$$

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{2; 1; 1\}$, $\vec{b} = \{1; 3; 1\}$, $\vec{c} = \{1; 1; 5\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{1; 4; -12\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(6; 6; 5), A_2(4; 9; 5), A_3(4; 6; 11), A_4(6; 9; 3).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(1; -3; -1)$, $M_1(0; -2; -1)$,

$M_2(-3; -1; -6)$, $M_3(-5; -3; 0)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(-2; -3; 0)$ відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z-0,5}{1}.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію $y = 2 - \frac{5}{3}\sqrt{8 - x^2 + 2x}$.

10. Розкласти дріб $\frac{4x}{(x^2-6x+5)(x^2+1)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 8

1. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Обчислити $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 + 5x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати систему матричним методом $\begin{cases} 9x_1 - 9x_2 - x_3 = 37 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

5. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , якщо $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{3\pi}{4}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(7; 2; 2), A_2(5; 7; 7), A_3(5; 3; 1), A_4(2; 3; 7).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 - 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(1; 2; 3)$, $M_1(14; 3; -2)$, $M_2(-9; 2; 7)$, $M_3(3; 2; 1)$. Записати:
- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
 - д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
 - е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Записати канонічне рівняння прямої
$$\begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ x + 3y + z + 14 = 0 \end{cases}.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$y = 2 + \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 63}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{5x^3}{(x^2-6x+5)(x^2-1)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 9

1. Розв'язати систему методом Крамера $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6. \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

2. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Зробити перевірку.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{2; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{1; -2; -3\}$, $\vec{c} = \{-1; 2; 1\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{-4; 1; -6\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(8; 6; 4), A_2(10; 5; 5), A_3(5; 6; 8), A_4(8; 10; 7).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 4) об'єм цієї піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(-3; 1; -1)$, $M_1(-7; 0; 5)$, $M_2(11; 1; -5)$, $M_3(-1; -1; -1)$. Записати:
- канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
 - рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
 - рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(0; -2; 3)$ відносно прямої

$$\frac{x}{1} = \frac{y+0,5}{-2} = \frac{z}{1}.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$x = -2 + \frac{1}{7}\sqrt{48 - y^2 - 2y}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{3x+2}{(x^2-6x+5)(x^2+1)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 10

1. Розв'язати систему
$$\begin{cases} 6x_1 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -1. \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

2. Знайти добуток матриць AB , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Знайти всі корені з комплексного числа. Відповідь записати в алгебраїчній формі і зобразити точками на комплексній площині: $\sqrt[3]{-64i}$.

5. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , якщо $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(7; 7; 3), A_2(6; 5; 8), A_3(3; 5; 8), A_4(8; 4; 1).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 - 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(2; -4; -2)$, $M_1(4; -2; -2)$, $M_2(10; 0; 8)$, $M_3(14; -4; -4)$. Записати:
- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;

- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.
8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(-1; 0; -1)$ відносно площини $2x + 6y - 2z + 11 = 0$.
9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію $x = 3 + \frac{3}{5}\sqrt{20 - 5y^2 + 10y}$.
10. Розкласти дріб $\frac{x^2+2}{(x^2+3x+3)(x^2+4)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 11

1. Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Зробити перевірку.
2. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -9 & -13 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 17 & 12 & 11 \end{pmatrix}$.
3. Розв'язати систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$
4. Обчислити, використовуючи формулу Муавра: $(1 - i)^{20}$.
5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{3; -2; -1\}$, $\vec{c} = \{-4; 3; 1\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{4; 5; 9\}$ за цим базисом.
6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:
 $A_1(3; 1; 4)$, $A_2(-1; 6; 1)$, $A_3(1; 7; 3)$, $A_4(8; 5; 8)$.

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(1; 0; -1)$, $M_1(-12; -1; 4)$, $M_2(11; 0; -5)$, $M_3(-1; 0; 1)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ,
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$,
- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$,
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$,
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$,
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двограний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(-3; 0; 1)$ відносно прямої

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}.$$

12. Розкласти дріб $\frac{3x}{(x^2+2x+2)(x^2-1)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 12

1. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині: $\sqrt[4]{-4}$.

2. Знайти добуток матриць AB , якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

5. Обчислити проєкцію вектора $\vec{c} - 2\vec{d}$ на вектор \vec{a} , якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{d}| = 1$,

$$|\vec{c}| = 3, (\vec{c}, \vec{a}) = \frac{3\pi}{4}, (\vec{d}, \vec{a}) = \frac{3\pi}{4}.$$

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(3; 3; 9), A_2(6; 9; 1), A_3(1; 7; 3), A_4(8; 5; 8).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(-2; -2; 3)$, $M_1(4; -6; 2)$, $M_2(-6; 12; 3)$,

$M_3(-2; 0; 1)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму α і точку A

$$\alpha: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}, A(-2; 4; 2).$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$x = -1 + \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y + 20}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{4x^3}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 13

1. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 7 \\ 5 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -7 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 9 \end{cases}$$

5. Обчислити проєкцію вектора \vec{a} на вектор $2\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{b}, \vec{a}) = \frac{\pi}{3}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(3; 5; 4), A_2(5; 8; 3), A_3(1; 9; 9), A_4(6; 4; 8).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 - 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(1; -2; -1)$, $M_1(2; -1; -1)$, $M_2(5; 0; 4)$, $M_3(7; -2; -2)$. Записати:
- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ,
 - б) рівняння площини $M_1M_2M_3$,
 - в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$,
 - г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$,
 - д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$,
 - е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(-1; 3; -2)$ відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{2} = \frac{y+0,5}{1} = \frac{z+2}{0}.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$.

10. Розкласти дріб $\frac{x+1}{(x^2+3x+3)(x^2-4)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 14

1. Розв'язати систему методом Крамера $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

2. Знайти добуток матриць AB : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Обчислити, використовуючи формулу Муавра: $(-3 - 3i)^{21}$.

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{3; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{4; -2; 3\}$, $\vec{c} = \{2; -1; 1\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{17; 5; 8\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(2; 4; 3), A_2(7; 6; 3), A_3(4; 9; 3), A_4(3; 6; 7).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;

- 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(2; 0; 0)$, $M_1(-24; 1; 5)$, $M_2(22; 0; -4)$, $M_3(-2; 0; 2)$. Записати:
- канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
 - рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
 - рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.
8. Через точку перетину прямих $4x - 5y + 9 = 0$, $x + 4y - 3 = 0$ провести пряму, перпендикулярну прямій $3x - 4y + 9 = 0$ (не знаходячи точку перетину).
9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію
- $$x = 3 - \frac{3}{5}\sqrt{20 - 5y^2 + 10y}.$$
10. Розкласти дріб $\frac{2x+3}{(x^2-3x+2)(x^2-4)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 15

1. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$$

2. Знайти $AB + 2B - 3E$, виконати можливий варіант множення матриць C і D

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати систему матричним методом:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 17 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 29. \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$$

4. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Знайти проєкцію вектора $6\vec{p} - \vec{q}$ на вектор \vec{p} , якщо $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{3\pi}{4}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(9; 5; 5), A_2(-3; 7; 1), A_3(5; 7; 8), A_4(6; 9; 2).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(3; -1; 2)$, $M_1(7; 5; 0)$, $M_2(-11; -5; 2)$, $M_3(1; -1; -2)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(-3; 5; 3)$ відносно прямої

$$\frac{x+2}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{5x^2}{(x^2+x+1)^2}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 16

1. Розв'язати систему методом Крамера $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 10 \end{cases}$.

2. Знайти добуток матриць AB , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Зробити перевірку.

4. Дослідити систему на сумісність і у випадку сумісності знайти загальний розв'язок

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}.$$

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{1; 2; -1\}$, $\vec{b} = \{-1; 1; 2\}$, $\vec{c} = \{2; -1; 1\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{0; 10; 8\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(0; 7; 1), A_2(4; 1; 5), A_3(4; 6; 3), A_4(3; 9; 8).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(2; 1; 0)$, $M_1(3; 2; 0)$, $M_2(6; 3; 5)$, $M_3(8; 1; -1)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(3; 5; 3)$ відносно площини

$$2x - 3y + z - 1 = 0.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$y = -1 - \frac{1}{3}\sqrt{-5x^2 + 30x}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{3x+1}{(x^2+4)^2(x-1)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 17

1. Розв'язати систему методом Крамера
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = -7. \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

2. Знайти добуток матриць AB , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -9 & 5 & 11 & 2 \\ 1 & -7 & 4 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -11 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 13 \end{cases}$$

5. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ на вектор $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

6. Задані координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(5; 5; 4), A_2(3; 8; 4), A_3(3; 5; 10), A_4(5; 8; 2).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проекцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(0; -2; 1)$, $M_1(13; -3; -4)$, $M_2(-10; -2; 5)$, $M_3(2; -2; -1)$. Записати:

а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(2; -1; 1)$ відносно площини

$$3x + y - z + 7 = 0.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$y = -2 - \frac{1}{3}\sqrt{96 - 12x^2 + 24x}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{4x^2+1}{(x^2+1)(x^2+4)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 18

1. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині: $\sqrt[3]{-27i}$.

2. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників:

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему матричним методом:
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

4. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Обчислити проєкцію вектора $3\vec{a} - \vec{b}$ на вектор \vec{a} , якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{b}, \vec{a}) = \frac{2\pi}{3}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(6; 1; 1), A_2(4; 6; 6), A_3(4; 2; 0), A_4(1; 2; 6).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 - 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(3; 5; 1)$, $M_1(-3; 9; 2)$, $M_2(7; -9; 1)$, $M_3(3; 3; 3)$. Записати:
- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
 - д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму α і точку A

$$\alpha: \frac{x}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{7}, A(1; 1; -2).$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$y = -2 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + 2x - 8}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{x}{(x^2+3)(x^2+2)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 19

1. Розв'язати систему методом Крамера $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$.

2. Знайти матрицю обернену до $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Зробити перевірку.

3. Розв'язати систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -13 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -5 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 17 \end{cases}$.

4. Обчислити значення виразу $(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i)^{12}$, використовуючи формулу Муавра. Відповідь записати в алгебраїчній формі.

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{1; -2; -1\}$, $\vec{b} = \{-2; 3; -1\}$, $\vec{c} = \{1; 1; 1\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{-2; 9; 3\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(7; 5; 3), A_2(9; 4; 4), A_3(4; 5; 7), A_4(7; 9; 6).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 - 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(-1; 1; 0)$, $M_1(0; 1; 1)$, $M_2(1; 6; 4)$, $M_3(-1; 0; 6)$. Записати:
- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
 - д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
 - е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.
8. Записати канонічне рівняння прямої $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x + 2y - z - 8 = 0 \end{cases}$
9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію
- $$y = -2 - \frac{3}{7}\sqrt{-x^2 + 2x + 48}.$$
10. Розкласти дріб $\frac{2x+1}{(x-2)^3(x+4)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти:

Варіант 20

1. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему матричним методом $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = -35 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 20 \end{cases}$.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 19 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -20 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$.

5. Обчислити момент сили \vec{F} , прикладеної до точки A , відносно точки O , якщо

$$\vec{OA} = \vec{r}, \vec{F} = 3\vec{p} + \vec{q}, \vec{r} = \vec{p} - 3\vec{q}, |\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}.$$

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(6; 6; 2), A_2(5; 4; 7), A_3(2; 4; 7), A_4(7; 3; 0).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(4; -2; -6)$, $M_1(-22; -4; 4)$,

$M_2(24; -2; -14)$, $M_3(0; -2; -2)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;

- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(2; -3; 0)$ відносно площини

$$3x + y - z + 8 = 0.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію $x = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{y^2 + 4y + 8}$.

10. Розкласти дріб $\frac{x+2}{(3x+1)^2(x-1)}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 21

1. Розв'язати систему методом Крамера $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$

2. Знайти $AB + 2B - 3E$, виконати можливий варіант множення матриць C і D

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, D = (3 \quad 1 \quad -2).$$

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 10 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & -28 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 12 \end{cases}$$
.

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{3; 1; 1\}$, $\vec{b} = \{-3; 2; -1\}$, $\vec{c} = \{1; -2; 2\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{8; 4; 4\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(1, 8, 0), A_2(0, -4, 5), A_3(-5, 7, 8), A_4(1, 4, 3).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 - 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(-1; -3; 1)$, $M_1(5; -7; 0)$, $M_2(-5; 11; 1)$, $M_3(-1; -1; -1)$. Записати:
- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
 - д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;

- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.
8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(-1; 0; 3)$ відносно площини $x - 2y + 5z + 1 = 0$.
9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію $x = 1 - \frac{7}{3}\sqrt{-y^2 - 4y + 5}$.
10. Розкласти дріб $\frac{3x^2-1}{(x-1)^4}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 22

1. Обчислити значення виразу, використовуючи формулу Муавра: $(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i)^{12}$. Відповідь записати в алгебраїчній формі.
2. Розв'язати систему методом Крамера $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.
3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Зробити перевірку.
4. Розв'язати систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -9 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$.
5. Обчислити величину моменту сили \vec{F} , прикладеної до точки A , відносно точки O , якщо $\vec{OA} = \vec{r}$, $\vec{F} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{r} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 5$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$.
6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:
 $A_1(4; 7; 9)$, $A_2(-1; -4; -5)$, $A_3(-3; 3; 1)$, $A_4(5; -6; 10)$.

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(-1; 0; 3)$, $M_1(0; 1; 3)$, $M_2(3; 2; 8)$, $M_3(5; 0; 2)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двограний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму α і точку A :

$$\alpha: \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{1}, A(2; -3; -1).$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію $x = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{y^2 + 4y + 8}$.

10. Розкласти дріб $\frac{x+5}{(x-2)^2(x+3)^2}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 23

1. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Знайти добуток матриць AB : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині: $\sqrt[3]{1-i}$

4. Розв'язати систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = -4 \end{cases}.$$

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{1; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{-4; 2; 1\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{-7; 8; 16\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(-1; 0; 7), A_2(5; 3; 9), A_3(3; 8; 5), A_4(1; 3; 1).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(2; -1; -3)$, $M_1(-11; -2; 2)$, $M_2(12; -1; -7)$, $M_3(0; -1; -1)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти проєкцію точки $M(1; -1; 1)$ на площину $x + 3y - 5z - 28 = 0$.

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$y = -2 + \frac{3}{7}\sqrt{-x^2 + 2x + 48}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{5x+3}{6x^4+x^2}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 24

1. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині: $\sqrt[4]{81i}$.

2. Розв'язати систему методом Крамера $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$.

3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Зробити перевірку.

4. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Обчислити величину моменту сили \vec{F} , прикладеної до точки A , відносно точки O , якщо $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$, $\vec{F} = 10\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{r} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{6}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(1; 5; 7), A_2(2; 4; 0), A_3(0; -7; 8), A_4(3; 3; 4).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(-2; 3; 2)$, $M_1(10; 7; 1)$, $M_2(-10; -11; 2)$, $M_3(-2; 1; 0)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Записати канонічне рівняння прямої $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$.

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$y = -2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 2x + 10}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{3x}{x^4-4x^2}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 25

1. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

2. Знайти $AB+2B-3E$, виконати можливий варіант множення матриць C і D

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати систему матричним методом $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$.

4. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{2; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{c} = \{3; 2; 2\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{3; -3; 11\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(3; 4; 0), A_2(3; 10; 8), A_3(0; 0; 5), A_4(-1; 0; 2).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(1; 0; 2)$, $M_1(0; 1; 2)$, $M_2(-1; 4; 12)$, $M_3(1; 6; 0)$. Записати:
- канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
 - рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
 - рівняння площини, що ділить навпіл двограний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(1; -2; 3)$ відносно площини

$$7x + y - z - 53 = 0.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 54 = 0.$$

10. Розкласти дріб $\frac{2x+1}{x^3-5x^2+4x}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 26

1. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині: $\sqrt[3]{-64i}$.

2. Розв'язати систему матричним методом:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 15. \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$$

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

5. Обчислити роботу сили \vec{F} , коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується вздовж вектора \vec{a} , якщо $\vec{F} = 7\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{a} = -\vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(0; 7; 0), A_2(-1; 8; 5), A_3(-4; 0; 3), A_4(3; 8; -1).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(3; 2; -2)$, $M_1(-10; 1; 3)$, $M_2(13; 2; -6)$, $M_3(1; 2; 0)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;

- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму α і точку A

$$\alpha: \frac{x-1}{7} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{4}, A(1; 2; 2).$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$y = -2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 2x + 10}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{x^2}{x^3 - 6x^2 + 5x}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 27

1. Розв'язати систему методом Крамера
$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 + x_2 + 11x_3 = 36 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 20 \end{cases}$$

2. Знайти $AB + 2B - 3E$, виконати можливий варіант множення матриць C і D

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -3 \end{cases} .$$

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{1; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{3; 1; 2\}$, $\vec{c} = \{1; 2; 2\}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{d} = \{3; 12; 2\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(3; -2; 0), A_2(5; 2; 4), A_3(8; 9; 3), A_4(-5; 5; -1).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(2; -5; -1)$, $M_1(-4; -9; 0)$, $M_2(6; 9; -1)$, $M_3(2; -3; 1)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(-2; 5; 0)$ відносно площини

$$2x - y + z + 3 = 0.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію $x = 3 + \sqrt{5 - y^2 - 4y}$.
10. Розкласти дріб $\frac{2x}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 28

1. Знайти всі значення кореня та зобразити їх на комплексній площині: $\sqrt[3]{i}$.
2. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Зробити перевірку.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гауса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -9 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

5. Обчислити роботу сили \vec{F} , коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується вздовж вектора \vec{a} , якщо $\vec{F} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 2$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{6}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(3; 0; 3), A_2(-1; 4; 7), A_3(-2; 3; -1), A_4(5; 6; 0).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(2; 3; 1)$, $M_1(1; 2; 1)$, $M_2(-2; 1; -4)$, $M_3(-4; 3; 2)$. Записати:

а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(-1; 5; 2)$ відносно площини

$$x + 2y - 5z - 29 = 0.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$y = -5 - \sqrt{21 - x^2 - 4x}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{x+2}{x^3-5x^2+8x-4}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 29

1. Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -8 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати матричне рівняння $XAB = C$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad -2 \quad 3).$$

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

5. Довести, що вектори $\vec{a} = \{2; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{1; -2; -3\}$, $\vec{c} = \{-1; 2; 1\}$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{d} = \{-4; 1; -6\}$ за цим базисом.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(-2; 3; 0), A_2(3; -1; 3), A_3(4; 2; 0), A_4(1; 1; 1).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
 - 4) об'єм піраміди.
7. Задано координати точок $M_0(0; -1; 1)$, $M_1(-1; 4; 12)$, $M_2(0; -5; 11)$, $M_3(0; 1; -1)$. Записати:
- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
 - б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
 - г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти проєкцію точки $M(-3; 0; 5)$ на площину $x - y + 7z + 19 = 0$.

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$9x^2 - 4y^2 + 18x - 12y + 36 = 0.$$

10. Розкласти дріб $\frac{x^2}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Варіант 30

1. Розв'язати систему методом Крамера:
$$\begin{cases} 6x_1 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

2. Знайти добуток матриць AB : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

5. Обчислити роботу сили \vec{F} , коли точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується вздовж вектора \vec{a} , якщо $\vec{F} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$.

6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(-3; 1; 5), A_2(4; -3; 1), A_3(6; 1; 5), A_4(-8; 6; 0).$$

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
- 2) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 3) проєкцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) об'єм піраміди.

7. Задано координати точок $M_0(0; -8; -2)$, $M_1(12; -16; -4)$, $M_2(-8; 20; -2)$, $M_3(0; -4; -6)$. Записати:

- а) канонічне рівняння прямої M_1M_2 ;
- б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
- г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_3}$;
- д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$;
- е) рівняння площини, що ділить навпіл двогранний кут, який утворений площинами $M_0M_1M_2$ та $M_1M_2M_3$.

8. Знайти точку M' , симетричну точці $M(1; -1; 3)$ відносно площини

$$7x - 2y + z + 15 = 0.$$

9. Звести до канонічного вигляду та побудувати лінію

$$x = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{40 + y^2 + 4y}.$$

10. Розкласти дріб $\frac{5x+1}{x^3+3x^2+3x+9}$ на суму елементарних дробів і знайти невизначені коефіцієнти.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / В.П Дубовик., І.І. Юрик. – К. : Ігнатекс-Україна., 2013. – 648 с. – Режим доступу: <http://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/10062/1/56.pdf>
2. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач: навч. посібн. / В.П Дубовик., І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2005. – 480 с.
3. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: У 3 ч.: Навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К: Книги України ЛТД, 2009. – Ч. 1. – 578 с.
4. Математика в технічному університеті. Том 1 / І.В. Алексеєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 496 с. – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/24338/1/MTU1.pdf>
5. Кушлик-Дивульська О.І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс] / О.І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Київ : НТУУ «КПІ», 2017. – 141 с. – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/19572>
6. Діскант В.І. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. / Діскант В.І., Береза Л.Р., Грижук О.П., Захаренко Л.М. – Київ. Вища школа, 2001. – 300 с.
7. Лінійна алгебра в задачах та прикладах [Електронний ресурс] / Т.В. Авдєєва, В. М. Шраменко. – Київ : НТУУ «КПІ», 2016. – 205 с. – Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/16845/1/Лінійна%20алгебра_збірник%20задач.pdf

Додаток

1. Лінійна алгебра

Визначники

Другого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\text{або } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Формули Крамера

Для системи рівнянь
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$
 за умови, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$
 існує єдиний розв'язок x_1, x_2, x_3 , який можна

знайти за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Матричний метод

Для системи рівнянь
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$
 за умови, що

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ існує єдиний розв'язок x_1, x_2, x_3 , який можна

знайти за формулою:

$$X = A^{-1}B,$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$,

а $A_{ij}, i, j = \overline{1,3}$ – алгебраїчні доповнення елементів $a_{ij}, i, j = \overline{1,3}$,

$$\text{або } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

2. Комплексні числа

Алгебраїчна форма комплексного числа:

$$z = x + iy,$$

де $x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина комплексного числа z ,

$y = \operatorname{Im} z$ – уявна частина комплексного числа z ,

i – уявна одиниця, причому $i^2 = -1$.

Тригонометрична і показникова форми комплексного числа:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$z = \rho e^{i\varphi},$$

де $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа z ;

$\varphi = \text{Arg } z$ – аргумент комплексного числа z ,

$$\text{Arg } z = \text{arg } z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$\text{arg } z \in (-\pi; \pi]$ – головне значення аргумента, яке знаходиться за формулою:

$$\text{arg } z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, \quad y \geq 0, \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, \quad y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Формула Муавра (піднесення до n – го степеня комплексного числа записаного в тригонометричній формі)

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), n \in \mathbb{N}.$$

Добування кореня n – го степеня з комплексного числа $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$:

$$\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

3. Векторна алгебра

Модуль вектора $\vec{a} = \{x_0; y_0; z_0\}$: $|\vec{a}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

Координати вектора \overrightarrow{AB} : $\overrightarrow{AB} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$,

де точка $A(x_0; y_0; z_0)$ – початок вектора, точка $B(x_1; y_1; z_1)$ – кінець вектора.

Умова колінеарності векторів $\vec{a} = \{x_0; y_0; z_0\}$, $\vec{b} = \{x_1; y_1; z_1\}$:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{y_0}{y_1} = \frac{z_0}{z_1}.$$

Скалярний добуток векторів $\vec{a} = \{x_0; y_0; z_0\}$ і $\vec{b} = \{x_1; y_1; z_1\}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \quad \text{або} \quad (\vec{a}, \vec{b}) = x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1.$$

Кут φ між векторами $\vec{a} = \{x_0; y_0; z_0\}$ і $\vec{b} = \{x_1; y_1; z_1\}$:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів: $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = 0$.

Проекція вектора \vec{a} на напрям вектора \vec{b} : $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$.

Векторний добуток векторів $\vec{a} = \{x_0; y_0; z_0\}$ і $\vec{b} = \{x_1; y_1; z_1\}$:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_0 & z_0 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= (y_0z_1 - y_1z_0)\vec{i} - (x_0z_1 - x_1z_0)\vec{j} + (x_0y_1 - x_1y_0)\vec{k}. \end{aligned}$$

Площа паралелограма, побудованого на векторах \vec{a}, \vec{b} : $S_{\text{пар.}} = |[\vec{a}, \vec{b}]|$.

Площа трикутника, побудованого на векторах \vec{a}, \vec{b} : $S_{\text{тр.}} = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]|$.

Мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Об'єм паралелепіпеда: $V_{\text{пар.}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Об'єм трикутної піраміди (тетраедра): $V_{\text{тр.пірам.}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Умова компланарності трьох векторів: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

4. Аналітична геометрія

Пряма на площині

Різні види рівнянь прямої:

1) рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A; B\}$ (\vec{n} – нормальний вектор прямої):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;$$

2) загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0;$$

3) канонічне рівняння прямої (рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = \{l; m\}$ (\vec{s} – напрямний вектор прямої)):

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m};$$

4) рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad (k = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \text{ – кутовий коефіцієнт прямої});$$

5) рівняння прямої, що має заданий кутовий коефіцієнт k ($k = \operatorname{tg} \varphi$, φ – кут нахилу прямої до додатнього напрямку осі OX) і відтинає на осі OY відрізок величини b :

$$y = kx + b;$$

6) рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k ($k = \operatorname{tg} \varphi$):

$$y - y_0 = k(x - x_0);$$

7) параметричні рівняння прямої (пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, $\vec{s} = \{l; m\}$ – напрямний вектор прямої, t – параметр):

$$x = x_0 + lt; \quad y = y_0 + mt;$$

8) рівняння прямої у відрізках на осях (a – величина відрізка, який відтинає пряма на осі OX ; b – величина відрізка, який відтинає пряма на осі OY):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

9) нормальне рівняння прямої (p – довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат на пряму, α – кут нахилу цього перпендикуляра до осі OX):

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Взаємне розташування двох прямих

Прямі задані рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}, \vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}) \text{ або}$$

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2 \quad \text{або}$$

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1}, \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} \quad (\vec{s}_1 = \{l_1; m_1\}, \vec{s}_2 = \{l_2; m_2\})$$

1) прямі перетинаються: $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0;$

2) прямі паралельні: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (\Delta = 0)$

або $k_1 = k_2$

або $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2};$

3) прямі перпендикулярні: $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

або $k_1k_2 = -1$

або $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Rightarrow (\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0 \Rightarrow l_1l_2 + m_1m_2 = 0;$

4) кут θ між прямими: $\cos \theta = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

або $\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|$

або $\cos \theta = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Площина в просторі

Різні види рівнянь площини:

1) рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A; B; C\}$ (\vec{n} – нормальний вектор площини):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

2) загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

3) рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

4) рівняння площини у відрізках на осях (a, b, c – величини відрізків, які відтинає площина на координатних осях OX, OY, OZ відповідно):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1;$$

5) нормальне рівняння площини (p – відстань від початку координат до площини, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси нормалі площини):

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Взаємне розташування двох площин

Площини задані:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0;$$

$$(\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}, \quad \vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\})$$

1) умова паралельності площин: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$

2) умова перпендикулярності площин: $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

3) кут θ між площинами: $\cos \theta = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряма в просторі

Різні види рівнянь прямої:

1) рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

2) канонічне рівняння прямої (рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = \{l; m; n\}$):

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n};$$

3) параметричні рівняння прямої (пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $\vec{s} = \{l; m; n\}$ – напрямний вектор прямої, t – параметр):

$$x = x_0 + lt; \quad y = y_0 + mt; \quad z = z_0 + nt;$$

4) загальне рівняння прямої у просторі (лінія перетину двох непаралельних площин):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

при цьому $\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ – напрямний вектор прямої.

Прямі задані рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$(\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}, \vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\})$$

1) умова паралельності двох прямих: $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$;

2) умова перпендикулярності двох прямих, що перетинаються:

$$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

3) кут θ між двома прямими, що перетинаються:

$$\cos \theta = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Взаємне розташування прямої і площини в просторі

Прямі і площина задані рівняннями:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \quad Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$(\vec{s} = \{l; m; n\}, \quad \vec{n} = \{A; B; C\})$$

1) умова паралельності прямої і площини: $(\vec{n}, \vec{s}) = 0 \Rightarrow Al + Bm + Cn = 0$;

2) умова перпендикулярності прямої і площини: $\vec{n} \parallel \vec{s} \Rightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$;

3) кут θ між прямою і площиною:

$$\sin \theta = \frac{|(\vec{n}, \vec{s})|}{|\vec{n}||\vec{s}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Криві 2-го порядку

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0; y_0)$ радіуса R :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Рівняння еліпса з центром в точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Рівняння гіперболи з центром в точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1.$$

Рівняння параболи з вершиною в точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \quad (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

Поверхні 2-го порядку

Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Еліпсоїд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Циліндри 2-го порядку:

круговий : $x^2 + y^2 = R^2$; еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; параболічний $y^2 = 2px$.

Конус: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Гіперболоїди:

однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; двопорожнинний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

Параболоїд:

еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.