

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. А. Баженів

МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВИТКУ ЕНЕРГОСИСТЕМ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, які навчаються за спеціальністю
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензенти *Чумак Вадим Володимирович, канд. техн. наук*

Відповідальний
редактор *Кацадзе Т. Л., канд. техн. наук, доц.*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 5 від 26.05.2022р.)
за поданням Вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики
(протокол № 8 від 29 березня .2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Баженов Володимир Андрійович, канд. техн. наук, доц.

МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВИТКУ ЕНЕРГОСИСТЕМ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Моделі оптимального розвитку енергосистем: Навчальний посібник. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», освітньо-професійної та освітньо-наукової програм магістерської, освітньо-наукової програми бакалаврської підготовки «Електричні системи та мережі» / В. А. Баженов; КПІ ім. Ігоря Сікорського.– Електронні текстові дані (1 файл: 993 кбайт).– Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 70 с.

Навчальний посібник з дисципліни «Моделі оптимального розвитку енергосистем» складається з шести розділів. Розглянуто моделі і методи оптимізації структури генеруючих потужностей енергосистем, оптимізації розвитку електричних систем. Даний електронний ресурс призначений для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

© В. А. Баженов, 2022

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗВИТКУ ЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ.....	6
1.1. Електроенергетичні системи. Загальні положення	6
1.2. Критерій оптимальності розвитку електроенергетичних систем	9
1.3. Математичні моделі для оптимізації й розвитку електроенергетичних систем	12
2. ПОБУДОВА ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ СТРУКТУРИ ГЕНЕРУВАЛЬНИХ ПОТУЖНОСТЕЙ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНОЇ СИСТЕМИ.....	15
2.1. Загальні положення.....	15
2.2. Лінійна модель оптимізації структури генерувальних потужностей.....	16
2.3. Основні поняття й визначення лінійного програмування	21
3. ОПТИМІЗАЦІЯ СТРУКТУРИ ГЕНЕРУВАЛЬНИХ ПОТУЖНОСТЕЙ ЕНЕРГОСИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ СІМПЛЕКС-МЕТОДУ.....	25
3.1. Загальні положення.....	25
3.2. Приклади оптимізації структури генерувальних потужностей.....	29
4. ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗВИТКУ ГЕНЕРУВАЛЬНИХ ПОТУЖНОСТЕЙ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ	35
4.1. Рішення задачі оптимізації розвитку електростанцій енергосистеми за допомогою методу динамічного програмування.....	35
4.2. Приклади розв'язку задач оптимізації розвитку електростанцій енергосистеми.....	38
5. ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗВИТКУ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАДІЄНТНИХ МЕТОДІВ.....	42
5.1. Градієнтні методи.....	42
5.2. Методи сполучених градієнтів.....	46
5.3. Врахування обмежень. Методи зовнішніх та внутрішніх штрафних функцій.....	48
5.4. Комбінований метод штрафних функцій	51
5.5. Розрахунок складових вектору градієнта	53
6. ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗВИТКУ ЕЛЕКТРИЧНИХ МЕРЕЖ ЕНЕРГОСИСТЕМ	56
6.1. Постановка задачі оптимізації розвитку електричних мереж.....	56
6.2. Функції оптимальних витрат для ліній електропередачі та трансформаторів.....	57
6.3. Метод впорядкованого виключення гілок	61
6.4. Метод поконтурної оптимізації	65
Список рекомендованої літератури.....	70

ВСТУП

Підвищення ефективності виробництва і якості продукції здійснюється на основі удосконалювання структури паливно-енергетичного балансу, впровадження нових генеруючих потужностей, комплексного рішення питань енергопостачання споживачів, зниження питомої витрати палива, зменшення втрат електричної енергії й ефективного регулювання режимів роботи електричних систем.

Для рішення цих задач важливе значення набувають питання оптимізації проектних і експлуатаційних рішень в енергетиці на основі застосування персональних обчислювальних машин. Дисципліна "Моделі оптимального розвитку енергосистем" відноситься до циклу дисциплін професійної та практичної підготовки.

Вивчення дисципліни базується на знаннях, отриманих студентами при вивченні таких дисциплін, як "Математичний аналіз", "Теоретичні основи електротехніки", "Математичні задачі енергетики", "Електричні системи і мережі" та ін.

Метою дисципліни "Моделі оптимального розвитку енергосистем" є придбання знань в області теорії великих систем, системного аналізу, економіко-математичних моделей і ознайомлення з основами застосування математичних методів для рішення задач оптимізації розвитку електроенергетичних систем. Основна увага присвячена питанням оптимізації структури генеруючих потужностей, оптимізації розвитку електростанцій і оптимізації розвитку електричних мереж енергосистем.

У задачі дисципліни входить вивчення і придбання навичок практичного використання методів техніко-економічних розрахунків в енергетиці, системного підходу до рішення задач розвитку енергосистем, методів оптимізації.

Після вивчення дисципліни студент повинний уміти:

Сформулювати задачу, поняття і визначення оптимального планування розвитку енергосистем. Записати загальний критерій оптимальності розвитку економіки держави. На основі даних про розвиток енергетики, прогнозу умов розвитку визначити основні критерії оптимізації, сформулювати задачу і методи многокритеріальної оптимізації розвитку енергосистем.

На основі статистичних даних виділити етапи рішення і вирішити задачу прогнозування навантажень і електроспоживання в цілому по мережі, а також по окремим вузлам системи.

На основі статистичних даних виділити етапи рішення і вирішити задачу прогнозування навантажень і електроспоживання в цілому по мережі, а також по окремим вузлам системи.

На основі даних про економічні і технічні характеристики можливих типів електростанцій, що споруджуються, існуючої схеми енергосистеми, інформації про характеристики ліній електропередачі, характеристики, можливих до використання, енергоресурсів виконати оптимізацію структури генеруючих потужностей Єдиної енергосистеми: сформулювати цільову функцію й обмеження лінійної моделі оптимізації, вирішити задачу за допомогою симплекс-методу.

На основі даних про економічні і технічні характеристики можливих типів електростанцій, що споруджуються, існуючої схеми енергосистеми, інформації про характеристики ліній електропередачі, характеристиках можливих до використання енергоресурсів вирішити задачу оптимізації розміщення і вибору потужності теплових електростанцій. При цьому задача вирішується в статичній і динамічній постановці, для рішення використовуються методи лінійного і динамічного програмування.

На основі даних про рівні навантажень електричної мережі на різних етапах її розвитку; розрахунковій схемі електричної мережі, технічних і економічних характеристиках вирішити задачу оптимізації розвитку електричної мережі. Визначити економічні інтервали, побудувати й апроксимувати функції оптимальних витрат для ліній електропередачі і трансформаторів. Записати цільову функцію й обмеження моделі мережі. Для рішення застосувати математичні методи лінійного, нелінійного і математичного програмування.

Розділ 1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗВИТКУ ЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ

1.1. Електроенергетичні системи. Загальні положення.

Електроенергетичною системою (ЕЕС) називається сукупність обладнання, призначеного для виробництва, перетворення, передачі, розподілу й споживання електричної енергії. У складі ЕЕС можуть бути виділені електричні станції, електрична мережа й вузли навантаження.

Одна з основних особливостей електроенергетичних систем - одночасність і нерозривність процесів виробництва, розподілу й споживання енергії, що приводить до твердого взаємозв'язку між кількостями споживаної й виробленої електроенергії. Кількість енергії, що генерується, завжди дорівнює сумі споживаної енергії й втрат в елементах системи.

В основу розвитку енергетичної системи України був покладений принцип концентрації виробництва електроенергії й централізації енергопостачання від загальної мережі електропередачі високої напруги. Відповідно до такого підходу на різних етапах розвитку енергетики країни створювалися районні енергосистеми, великі об'єднані енергосистеми, Єдина енергосистема Європейської частини країни.

Перший етап розвитку енергетики в минулому почався із з'єднання окремих, порівняно невеликих, електростанцій в енергосистеми. На цьому етапі були організовані в 20-х роках енергосистеми великих міст і найбільш розвинених промислових центрів - Москви, Ленінграда, Донбасу, Уралу й ін. При цьому основною напругою внутрісистемних зв'язків була напруга 110 кВ.

На наступному етапі розвитку енергетики були створені великі енергооб'єднання. Так, в 1940 році після спорудження електропередачі 220 кВ Дніпро - Донбас почалося формування об'єднаної енергосистеми (ОЭС) Півдня. В 1942 році у зв'язку з особливою важливістю Уральського промислового центру була створена ОЭС Уралу, до складу якої входила Свердловська, Челябінська й Пермська енергосистеми. В 1945 році у зв'язку зі швидкою відбудовою народного господарства в центральних районах країни була організована ОЭС Центру, яка поєднувала Московську й три Верхньоволзькі енергосистеми. ДО 1955 року електростанції ОЭС Центру, Уралу й Півдня виробляли вже близько половини виробленої в країні електроенергії. Основні зв'язки між енергосистемами здійснювалися на напрузі 110 і 220 кВ.

Характерною рисою третього етапу розвитку енергетики було створення ЄЕС Європейської частини в минулому СРСР і великих енергооб'єднань у східній часта країни.

Формування енергосистем найбільше часто здійснювалося на основі системи напруги 110-220-500 кВ. Крім того, у західній зоні країни застосовувалася система 110 (154) -330-750 кВ.

Наприкінці 70-х років почалася паралельна робота ЄЕС СРСР і ОЭС країн - членів СЭВ, що дозволило суттєво підвищити надійність роботи енергосистем соціалістичних країн, зіграло значну роль у розвитку національних енергосистем.

Із включенням у Єдину енергосистему ОЭС Сибіру, який має електричні зв'язки з енергосистемою МНР, утворювалося енергетичне об'єднання, що охоплює величезну територію СРСР і братніх країн.

Створення великих енергооб'єднань сприяло збільшенню потужності окремих агрегатів і електростанцій без зниження надійності енергопостачання й збільшення резерву. Це у свою чергу дозволило підвищити продуктивність праці при будівництві й експлуатації, знизити чисельність обслуговуючого персоналу, зменшити питома витрата палива, собівартість електроенергії й теплоти.

Спорудження електропередач надвисокої напруги забезпечило можливість передавати електроенергію з районів з дешевими енергетичними ресурсами в розвинені промислові райони з відносно дорогими енергетичними ресурсами.

Сполучення графіків навантаження енергосистем і енергооб'єднань, максимуми яких зміщені в часі, дозволяє суттєво знизити сполучений максимум навантаження, зменшити необхідний резерв потужності під час ремонтного сезону.

Об'єднання енергосистем знизило витрати на виробництво електроенергії за рахунок оптимального використання електростанцій різного типу в покритті різних зон сполученого графіка навантаження. Тільки в цьому випадку найбільше вірно вирішуються питання використання каскадів гідравлічних електростанцій у піковому й напівпіковому режимах при комплексній регулюванні водоймищ.

Тісні й різноманітні зв'язки з іншими галузями економіки визначають необхідність своєчасного розвитку електроенергетичних систем, яке повинне завжди випереджати ріст споживання енергії в інших галузях народного господарства. Темпи росту електроенергетичних систем безпосередньо залежать від тих матеріальних і трудових ресурсів, які вкладаються в розвиток енергетики, але в той же час розвиток енергосистем впливає на розміщення й розвиток промислових центрів, на розвиток інших галузей народного господарства.

Електроенергетична система - невід'ємна частина паливно-енергетичного комплексу (ПЕК), у який входять системи нафто-, газо-, вугілля-, теплопостачання і ядерної енергетики.

Для розвитку економіки характерна об'єктивна тенденція постійного збільшення частки електроенергії у витраті кінцевої (корисної) енергії [18]. Зв'язок енергосистем із системами ПЕК і галузями здійснюється через паливопостачання електростанцій, поставки машин і встаткування для електростанцій, електричних і теплових мереж і ін.

У сучасній науковій уяві електроенергетична система являє собою цілеспрямовану велику штучну систему, що постійно розвивається, найважливіші властивості якої - цілісність, ієрархічність і взаємозв'язок із зовнішнім середовищем, організованість і керованість, динамізм і стійкість розвитку, неоднозначність вхідної інформації.

При дослідженні великих систем енергетики, до яких ставляться й електроенергетичні системи, доцільне застосування системного підходу [18]. Основні положення системного підходу стосовно до розв'язку завдань розвитку енергетичних систем можуть бути сформульовані в такий спосіб [2].

1. В основі оптимізації повинні лежати цілком певні цілі розв'язку, які конкретно виражають загальний критерій оптимальності економіки стосовно до розв'язуваного завдання розвитку розглянутої системи.

2. В оптимізаційній моделі повинні бути враховані всі властивості, внутрішні й зовнішні зв'язки системи, які повною мірою представляють її поведінку в цікавому для нас сенсі..

3. Отриманий розв'язок у процесі його реалізації із часом повинен коректуватися й доповнюватися з обліком нової або не врахованої раніше інформації про зміну умов розвитку системи.

Специфіка електроенергетичної системи проявляється в особливій важливості перспективного проектування системи як єдиного цілого через неправомочність ізольованого вибору параметрів окремих об'єктів і зв'язків поза їхнім передбачуваним використанням в енергосистемі .

Паливно-енергетичний комплекс є базовою галуззю економіки. Рівень його розвитку поряд з раціональністю використання енергоресурсів і електроенергії на криза, що тривала в Україні з початку 90-х років привела до спаду виробництва, розбалансування фінансово-кредитних відносин, поглибленню диспропорцій в економіці, - привела к більшому загостренню ситуації в ПЕК. Розглядаючи стан ПЕК необхідно відзначити найбільш важливі обставини.

Єдина енергетична система України проектувала й будувалася як складова частина енергосистеми колишнього СРСР. Це дозволяло шляхом організації відповідних перетікань електроенергії демпфірувати добові й сезонні коливання електроспоживання в різних регіонах України. Цим і пояснюється практична відсутність, крім ГЕС, на яких виробляється 5-7 % від загальної кількості електроенергії високоманеврових генеруючих потужностей у складі енергосистеми України.

У цей час електроенергетика України включає наступні підрозділи: Національна енергетична компанія Укренерго (НЭК Укренерго), що створена в 1998 р. на базі національного диспетчерського центру й Укренергопередачі; Національна атомна енергогенеруюча компанія Енергоатом; Електрогенеруючі акціонерні компанії (Днепроенерго, Донбасенерго, Західенерго, Центренерго, Днепрогідроенерго, Днестрогідроенерго та Дністровська ГАЕС); Державне підприємство ТЕЦ (13 ТЕЦ);. Вітрові електростанції та 27 енергопостачальних акціонерних компаній.

Встановлені потужності ЕС у млн. кВт:

	1993	1995	2000	2011
ТЕС	36,7	36,6	36,4	36,4
	67,7%	66,4%	68,8%	66%
ГЕС	4,7	4,7	4,7	4,7
	8,7%	8,5%	9%	8,5%
АЕС	12,8	13,8	11,8	13,8
	23,6%	25,1%	22,3%	25%
Усього	54,2	55,1	52,9	54,9

Навантаження електростанцій України в зимовий максимум

	1995	1996	1997
ТЕС	14,3	15,1	14,6
	52,2%	52,2%	53,7%
ГЕС	2,3	2,5	2,7
	8,4%	8,7%	9,9%
АЕС	10,8	11,3	9,9
	39,5%	39,1%	36,4%
	27,4	28,2	27,2

Виробіток електроенергії, млрд кВт·год

	1995	1997	2011
ТЕС	113,2	88,6	84,8
	58,4%	49,8%	43,7%
ГЕС	10,1	10	12,1
	5,2%	5,6%	5,5%
АЕС	70,5	79,4	90,7%
	36,4%	44,6%	46,5%
	193,8	178	185,8

Основа електроенергетики України становлять теплові електростанції. У складі міністерства енергетики 44 ТЕС, у тому числі 16 КЕС і 28 ТЕЦ. Останні роки робота ТЕС ускладнилася у зв'язку зі старінням основного встаткування, яке було введено в експлуатацію в 60-70 рр. і вимагає реконструкції.

Другим за значенням генеруючим джерелом є АЕС. У цей час працюють чотири атомні електростанції: Запорізька, Південноукраїнська, Рівненська та Хмельницька.

1.2. Критерій оптимальності розвитку електроенергетичних систем.

Критерій оптимальності розвитку енергосистем вибирається відповідно до методики визначення економічної ефективності капітальних вкладень в енергетику. Згідно із цією методикою зіставлення варіантів розвитку проводиться шляхом порівняння економічної ефективності капітальних вкладень, показником якої є мінімум функції сумарних дисконтованих витрат. Будівництво об'єктів, що споруджуються в енергосистемах, як правило здійснюється або поетапно, або за декілька років. Тому необхідно вирішувати динамічне завдання визначення ефективності капітальних вкладень. У цьому випадку функція сумарних дисконтованих витрат має вигляд:

$$Z = \sum_{t=1}^T (K_t + I_t - L_t)(1 + E_{..})^t \quad (1.1)$$

де Z - функція сумарних дисконтованих витрат; K_t - капіталовкладення в об'єкт в t -ому році; I_t - сумарні щорічні витрати (сума експлуатаційних витрат без обліку амортизаційних відрахувань); L_t - ліквідаційна вартість устаткування, що демонтується у рік розрахункового періоду; E - норма дисконту (0,1); T - розрахунковий період, протягом якого визначають ефективність інвестицій (25 років).

Якщо спорудження об'єкта відбувається в за 1 рік, то слід вирішувати статичне завдання визначення ефективності капітальних вкладень, для яких

$$Z = \frac{I}{E} + K - L, \quad (1.2)$$

I - сумарні витрати на рік, тис. грн./рік, які знаходяться наступним чином

$$I = I_e + I_{\text{пот}},$$

де I_e - витрати на експлуатаційне встаткування й ремонти, тис. грн./рік, які розраховують в процентах від капітальних вкладень на спорудження мережі; $I_{\text{пот}}$ - витрати на компенсацію втрат електроенергії, тис. грн./рік.

Раніше в якості основного критерію порівняльної економічної ефективності капітальних вкладень при обґрунтуванні розв'язків по розвитку електроенергетичних систем використовувалися наведені витрати, що порівнюють одноразове капітальне вкладення й щорічні витрати виробництва.

Якщо капітальні вкладення здійснюються протягом одного року, а наступні щорічні витрати, що включають у себе витрати на експлуатацію, ремонт й амортизаційні відрахування, залишаються незмінними протягом усього періоду нормальної експлуатації, наведені витрати можуть бути визначені по формулі

$$Z = E_H K + I \quad (1.3)$$

де E_H - нормативний коефіцієнт порівняльної ефективності капітальних вкладень; K - одноразові капіталовкладення в розглянутий варіант розвитку системи; I - щорічні поточні витрати. Нормативний коефіцієнт порівняльної ефективності капіталовкладень для електроенергетики ухвалюють рівним 0,12.

У дійсності енергетичні об'єкти характеризуються, як правило, тривалими строками будівництва. При цьому капітальні вкладення здійснюються протягом декількох років, щорічні витрати також змінюються в часі. У цьому випадку в якості критерію оптимальності рекомендується використовувати динамічні наведені витрати, які можуть бути визначені по формулі

$$Z_T = \sum_{t=1}^T (E_H K_t + \delta I_t) (1 + E_{H.п.})^{\tau-t} \quad (1.4)$$

де t - рік фактичного здійснення витрат; δI_t - приріст щорічних витрат; $\delta I_t = I_{t+1} - I_t$; K_t , I_t - капіталовкладення й щорічні витрати в рік розрахункового періоду; $E_{H.п.}$ - нормативний коефіцієнт приведення різночасних витрат, який характеризує економічний збиток, викликуваний "заморожуванням" засобів у незавершеному будівництві; τ - рік приведення різночасних витрат; T -

тривалість періоду будівництва й експлуатації з мінливими витратами, за межами якого капіталовкладення не проводяться, а витрати не змінюються але рокам. Приведення витрат до року τ здійснюється введенням коефіцієнта $K_{\Pi} = (1 + E_{H.\Pi.})^{\tau-t}$. В електроенергетиці коефіцієнт $E_{H.\Pi.}$ ухвалюють рівним 0,08.

У практиці техніко-економічних розрахунків приведення витрат звичайно здійснюється до першого року розрахункового періоду. У цьому випадку динамічні наведені витрати

$$Z_T = \sum_{t=1}^T \frac{E_H K_t \delta I_t}{(1 + E_{H.\Pi.})^{t-1}} \quad (1.5)$$

У деяких випадках більш зручно застосовувати для розрахунків динамічного критерію оптимальності вирази, у яких витрати по роках розрахункового періоду Z_t^c визначають за допомогою формул

$$Z_t^c = E_H \sum_{\kappa=1}^{t-1} K_{\kappa} + I_t \quad (1.6)$$

При цьому щорічне збільшення витрат Z_t^c становить

$$Z_{t+1}^c - Z_t^c = E_H \left(\sum_{\kappa=1}^t K_{\kappa} - \sum_{\kappa=1}^{t-1} K_{\kappa} \right) + I_{t+1} - I_t = E_H K_t + \delta I_t \quad (1.7)$$

Після підстановки (1.7) в (1.4) одержуємо

$$Z_T = \sum_{t=1}^T (Z_{t+1}^c - Z_t^c) (1 + E_{H.\Pi.})^{\tau-t} \quad (1.8)$$

Після алгебраїчних перетворень з (1.8) знаходимо вираз для розрахунків динамічного критерію ефективності

$$Z_T = E_{H.\Pi.} \sum_{t=2}^T Z_t^c (1 + E_{H.\Pi.})^{\tau-t} + Z_{T+1}^c (1 + E_{H.\Pi.})^{\tau-T}$$

де Z_{T+1}^c - витрати на етапі нормальної експлуатації.

Іноді більш зручно порівнювати різні варіанти розвитку електроенергетичних систем по питомих витратах на одиницю потужності, що вводиться, або виробленої енергії. Якщо будівництво об'єкта ведеться кілька років, у якості динамічних питомих витрат ухвалюють витрати, множення яких на річне введення потужності або приріст виробленої енергії з наступним підсумовуванням наведених в одному році різночасних витрат дає той же результат, що й розрахунки по формулі (1.4). Таким чином,

$$\sum_{t=1}^T Z_{y\partial} \delta \Pi_t (1 + E_{H.\Pi.})^{\tau-t} = \sum_{t=1}^T (E_H K_t + \delta I_t) (1 + E_{H.\Pi.})^{\tau-t}$$

Звідси одержуємо вираження для розрахунків динамічних питомих витрат

$$Z_{y\partial} = \frac{\sum_{t=1}^T (E_H K_t + \delta I_t) (1 + E_{H.\Pi.})^{\tau-t}}{\sum_{t=1}^T \delta \Pi_t (1 + E_{H.\Pi.})^{\tau-t}}$$

де $\delta \Pi_t$ - приріст потужності /виробленої енергії/ у рік t розрахункового періоду.

Усі отримані вираження припускають відсутність капіталовкладень і, що найголовніше, сталість щорічних витрат за межами розрахункового періоду T . Однак електроенергетичні системи являють собою сукупність об'єктів, що безупинно розвиваються, період нормальної експлуатації якої з постійними витратами, як правило, відсутній. Це пояснюється тим, що практично в кожному варіанті розвитку системи присутні об'єкти, введення яких в експлуатацію або вихід на повну потужність планується за межами розрахункового періоду. Тому що в різних варіантах ці об'єкти за межами розрахункового періоду розвиваються неоднаково, їхня наявність може привести до істотних помилок, при обґрунтування проектних розв'язків. Для того щоб уможливити використання розглянутих виразів для порівняння варіантів розвитку енергосистем, розрахунковий період T ухвалюють рівним сумі оптимізаційного періоду T_{opt} , для якого розглядають розвиток системи й обґрунтовують проектні розв'язки, і деякого періоду післядії $T_{нісл}$, протягом якого всі об'єкти з початком спорудження в оптимізаційному періоді досягають проектних показників:

$$T = T_{opt} + T_{нісл}$$

Уведення нових об'єктів у період післядії не враховують.

Оптимальні варіанти розвитку енергосистем вибирають за допомогою критеріїв ефективності в межах припустимої області, обумовленої зовнішніми обмеженнями, які визначають при оптимізації розвитку суміжних галузей народного господарства. Іноді ці обмеження виявляються настільки твердими, що практично визначають вибір варіанта розвитку системи.

Оптимальний варіант розвитку енергосистеми вибирають при зіставленні економічних критеріїв ефективності, отриманих по одному з наведених виразів. При цьому всі конкуруючі варіанти повинні забезпечувати однаковий промисловий результат /наприклад, однакова відпустка електроенергії споживачам при заданому режимі споживання/. Якщо варіанти суттєво різняться по надійності енергопостачання, при порівнянні необхідно враховувати збиток від очікуваного недовідпустка енергії. Розвиток системи у всіх варіантах повинне здійснюватися за той самий період часу.

Внаслідок стійкості економічних розв'язків, яка обумовлена пологою зміною функції наведених витрат поблизу екстремума, варіанти, що незначно відрізняються від оптимального критерію, можуть суттєво відрізнитися по своїх енергетичних характеристиках. Тому вибір оптимального варіанта зіставленням наведених витрат повинен здійснюватися на основі глибокого інженерного аналізу порівнюваних варіантів.

1.3. Математичні моделі для оптимізації й розвитку електроенергетичних систем.

Математичні модель системи – сукупність математичних виразів, що приблизно описують характеристики системи, що моделюється, та взаємозв'язки між ними.

Вид математичної моделі залежить від типу системи, яка моделюється та виду задачі, що вирішується. Тому для розв'язку різних завдань може бути складено кілька різних моделей однієї й тієї ж системи, що характеризують різні її властивості. Крім того, тому що облік властивостей системи оригіналу може бути виконаний з різним наближенням, то для одного і того самого завдання може бути сконструйоване декілька математичних моделей, призначених для розв'язку різними математичними методами. При цьому вибір моделі обумовлює вибір методу розв'язку. Розмірність завдань оптимізації розвитку енергетичних систем настільки велика, що вони не можуть бути вирішені без застосування математичних моделей і методів.

Математичні моделі для оптимізації розвитку енергосистем складаються, як правило, із критеріального функціонала, який являє собою математичне вираз критерію оптимальності, обмежень у вигляді рівностей /рівнянь зв'язку/

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.9)$$

і обмежень у вигляді нерівностей

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \geq 0 \quad , \quad i = m + 1, m + 2, \dots, P \quad (1.10)$$

Обмеження типу рівностей обумовлені функціональними зв'язками, які доводиться враховувати виходячи зі структури й властивостей проекрованої системи. Обмеження типу нерівностей звичайно пов'язані з умовами зміни параметрів

$$x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} \quad , \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

і їхніх залежних характеристик

$$\Phi_k^{\min} \leq \Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \leq \Phi_k^{\max} \quad , \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Моделі для оптимізації розвитку енергосистем повинні досить повно й точно описувати властивості систем, бути доступними для розв'язку математичними методами й використання комп'ютерів [3,7].

Моделі для оптимізації й розвитку енергетичних систем повинні повно й точно описувати властивості систем, бути доступними для розв'язку математичними методами й для реалізації у вигляді пакетів програм.

У складі параметрів виділяють залежні параметри, число яких дорівнює кількості незалежних рівнянь зв'язку m . Інші параметри, число яких $n-m$ є незалежними.

У теперішні час, для оптимізації розвитку електроенергетичних систем найбільше розповсюдження одержали моделі двох типів: оптимізаційні й оцінні.

Оптимізаційні моделі, дозволяють із припустимою безліччю розв'язків, які обумовлені системою обмежень виду рівностей і нерівностей, знаходити найбільш вигідний план розвитку. Розробка оптимізаційних моделей проводиться із застосуванням методів лінійного, нелінійного й динамічного програмування. Складність розв'язуваного завдання, обумовлена великою кількістю варійованих змінних, більшість із яких, має дискретний характер, багатокритеріальної задачі, необхідності обліку значної кількості лінійних і нелінійних обмежень динаміки розвитку системи. По цьому, моделі даного типу виконуються в основному як

моделі, що використовують наближені способи опису властивостей енергосистеми. У теперішній час, оптимізаційні моделі використовуються для оптимізації структури генеруючих потужностей енергосистем, у якості “порадника”, при виборі конфігурації електричної мережі, для оцінки витрат на розвиток мережі, коли обґрунтування конкретних варіантів конфігурації є передчасним, а оцінка витрат необхідна для розв'язку інших завдань розвитку.

Оціночні моделі, дозволяють проаналізувати й дати попередню оцінку варіантам розвитку енергосистем які попередньо підготовляються проектувальником.

Оціночні моделі ґрунтуються, як правило, на використанні складних алгоритмів нелінійного й динамічного програмування, при їхньому використанні, можливий більш точний опис технічних і економічних характеристик проектованої енергосистеми для кожного розглянутого варіанта розвитку мережі. Моделі даного типу, використовуються для аналізу й порівняння, порівняно не більшої кількості варіантів розвитку енергосистеми.

Основним недоліком моделей такого типу є те, що оптимальний варіант розвитку енергосистеми при оцінці може бути пропущений, за недостатньої кваліфікації проектувальника.

Крім того, при оптимізації розвитку електроенергетичних систем, можуть бути використані змішані, так звані оціночно- оптимізаційні моделі.

При використанні моделей даного типу, значення основних параметрів задаються у вигляді попередньо підготовлених варіантів, а інші параметри, значення яких у процесі оцінки оптимізується, задаються за допомогою системи обмежень.

Використання моделей даного типу дозволяє виконати техніко-економічний аналіз підготовлених варіантів при оптимальних значеннях інших параметрів.

Розділ 2. ПОБУДОВА ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ СТРУКТУРИ ГЕНЕРУВАЛЬНИХ ПОТУЖНОСТЕЙ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНОЇ СИСТЕМИ

2.1. Загальні положення

При оптимізації розвитку електроенергетичних систем розв'язуються задачі оптимізації структури генеруючих потужностей за видами енергоресурсів і типами електростанцій, оптимізації розвитку електростанцій в енергосистемах.

При оптимізації структури генеруючих потужностей енергосистем визначаються найбільш вигідні пропорції розвитку груп електростанцій різноманітного типу, що відрізняються видом енергоресурсів, які використовуються, різницею у способах виробництва електроенергії і типом основного устаткування. При вирішенні задачі, як правило, виділяються такі типи електростанцій: конденсаційні паротурбінні електростанції (КЕС), атомні електростанції (АЕС), гідравлічні електростанції (ГЕС), теплоелектроцентралі (ТЕЦ), гідроакумуючі (ГАЕС) і газотурбінні електростанції (ГТС).

Задача оптимізації структури генеруючих потужностей вирішується для енергосистеми України на перспективу 15-20 років. Отримані рішення уточнюються при розробці схем розвитку енергосистем на перспективу 10-15 років.

Вихідною інформацією для вирішення задач оптимізації розвитку генеруючих потужностей енергосистем є дані про економічні і технічні характеристики можливих типів нових електростанцій, існуюча схема енергосистеми, інформація про характеристики нових ліній електропередачі, якісні і кількісні характеристики придатних для використання енергоресурсів, дані про динаміку зростання навантаження окремих енерговузлів та ін. Найбільші труднощі при оптимізації викликає велика кількість змінних, на зміну яких накладені численні лінійні і нелінійні обмеження, необхідність урахування динаміки розвитку системи, багатокритеріальність задачі.

Велика кількість змінних, необхідність урахування динаміки розвитку системи, великої кількості режимних і ресурсних обмежень: баланс потужності та енергії в енерговузлах і в цілому в енергосистемі, пропускна здатність існуючих і нових ліній електропередачі, можливість використання різноманітних енергоресурсів, можливість будівництва призводять до істотних ускладнень при розробці ефективних методів і алгоритмів оптимізації і до неможливості вирішення задачі в повному обсязі навіть на найсучасніших ПЕОМ [9]. Тому загальну задачу оптимізації розвитку генеруючих потужностей енергосистем спрощують і приводять до задачі лінійного програмування [1,4]:

Визначити мінімум функції

$$\Phi = \sum_{j=1}^J q_j x_j, \quad (2.1)$$

при наявності обмежень у вигляді рівностей і нерівностей

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i=1,2,\dots,I, \quad (2.2)$$

де

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,J \quad (2.3)$$

У виразах (2.1)–(2.3) x_j - змінні, що оптимізуються; a_{ij} - коефіцієнти для змінних, які використовуються для запису основних обмежень задачі; q_j - коефіцієнти функціоналу, які, як правило, відповідають питомим приведеним динамічним витратам на одиницю зміни j -ї змінної.

Для вирішення задачі (2.1)–(2.3) використовується симплекс-метод, застосування якого розглянуте в розділі 3.1.

Після завершення процесу оптимізації необхідно визначити оптимальні потужності груп електростанцій першого і другого енерговузлів, річні витрати різноманітних видів палива в енергосистемі, необхідний обсяг капіталовкладень на впровадження нових генеруючих потужностей і зведені витрати на спорудження та експлуатацію електростанцій і ліній електропередачі. Крім того, повинні бути побудовані графіки зміни потужностей груп електростанцій енерговузлів, пропускної спроможності нових ліній електропередачі і зведених витрат у процесі оптимізаційного розрахунку. Результати оптимізації повинні бути нанесені на розрахункову схему енергосистеми.

2.2. Лінійна модель оптимізації структури генеруючих потужностей

При обґрунтуванні рішень щодо оптимізації структури генеруючих потужностей України на 12-15-річну перспективу широко використовуються лінійні математичні моделі [7,9]. При їхньому застосуванні задача оптимізації структури генеруючих потужностей спрощується і зводиться до задачі лінійного програмування (1.1)–(1.3). Характерною рисою лінійної моделі є лінійна залежність між цільовою функцією і змінними, зміна яких, у свою чергу, описується лінійною системою рівнянь зв'язку й обмежень.

Розглянемо основні принципи побудови лінійної моделі оптимізації структури генеруючих потужностей енергосистеми при статичній постановці задачі.

Енергосистема розглядається у вигляді узагальнених вузлів навантаження $j=1,2,\dots,J$.

Для кожного з вузлів задаються навантаження P_j , необхідні резерви потужності $P_j^{рез}$ і потреба в електроенергії E_i , типи електростанцій, заплановані до спорудження

$$r=1,2,\dots,R$$

і можливі види палива, яке використовується

$$i=1,2,\dots,I.$$

Зображення узагальнених вузлів навантаження, можливих електричних і паливних зв'язків у лінійній моделі енергосистеми показані на рис. 2.1. Суцільною лінією показані електричні зв'язки, а пунктиром - паливні.

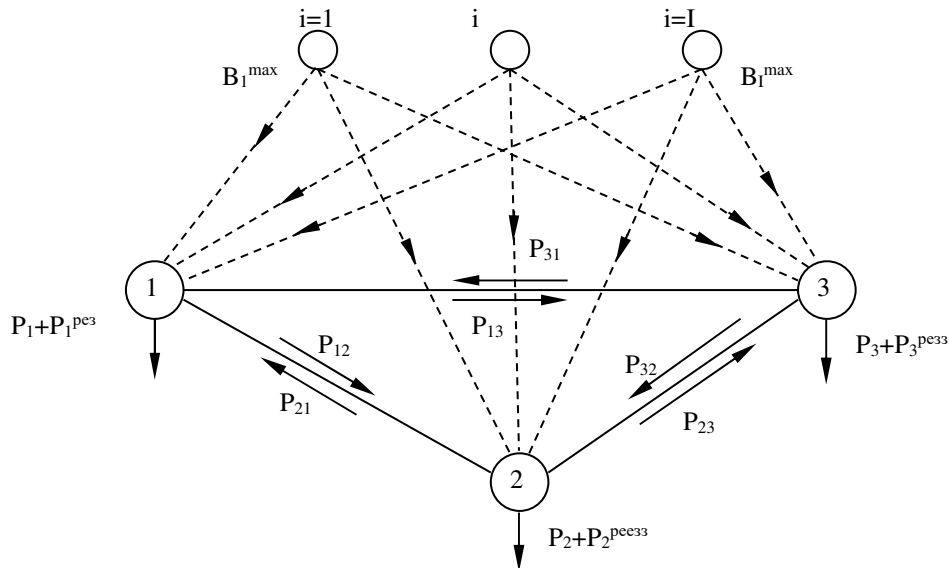


Рисунок 2.1 – Електричні і паливні зв'язки узагальнених вузлів навантаження в лінійній моделі енергосистеми

Методи лінійного програмування потребують змінних, які не набувають від'ємних значень. Тому перетоки потужності й енергії по міжсистемних зв'язках рекомендується представляти у вигляді суми двох протилежних потоків P_{12} і P_{21} , E_{12} і E_{21} .

Для кожного місця спорудження електростанцій необхідно знати максимально можливі встановлену потужність P_{rij}^{max} і відпуск енергії E_{rij}^{max} , розмір питомої витрати палива b_{rij} і число годин використання встановленої потужності T_{rij} , а також гранично припустимі рівні споживання B_i^{max} кожного виду палива.

При вирішенні задачі оптимізації структури генеруючих потужностей змінними, які оптимізуються, є потужності і відпуск енергії електростанціями вузлів навантаження, потоки потужності та енергії по міжсистемних зв'язках.

Цільовою функцією при оптимізації є зведені витрати на спорудження й експлуатацію електростанцій і ліній енергосистеми [7;9]

$$\Phi = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^R 3_{rij} P_{rij} + \sum_{je} 3_{je} P_{je}^{нов}, \quad (2.4)$$

де 3_{rij} - питомі зведені витрати для електростанції типу r , що працює на паливі та розташованій у вузлі j ; P_{rij} - потужності електростанцій; 3_{je} - питомі зведені витрати в лінії електропередачі; $P_{je}^{нов}$ - пропускна здатність нових ліній.

Питомі витрати для електростанцій, що споруджуються, визначаються за виразом:

$$3_{rij} = \frac{\varphi_{rij}^{pez} E_n K_{rij} + I_{rij}^{nocm} + \varphi_{rij}^3 I_{rij}^m}{P_{rij}}, \quad (2.5)$$

де K_{rij} - капіталовкладення в електростанцію, що споруджується; P_{rij} - проектна потужність електростанції; I_{rij}^{nocm} , I_{rij}^T - постійна і паливна складова щорічних витрат; φ_{rij}^{nocm} , φ_{rij}^3 - коефіцієнти, що враховують потребу електростанцій даного типу в резерві і витратах на власні потреби.

Капіталовкладення K_{rij} записуються у вигляді

$$K_{rij} = K_{rij}^{num} \cdot P_{rij}, \quad (2.6)$$

де $K_{rij}^{y\partial}$ - питомі капіталовкладення в спорудження електростанції, яка розглядається. З урахуванням (1.6), щорічні витрати дорівнюють:

$$I_{rij} = I_{rij}^{пост} + \varphi_{rij}^3 I_{rij}^T = \varphi_{rij}^{pez} K_{rij}^{y\partial} P_{rij} p_{rij}^{nocm} + \varphi_{rij}^3 3_{ij}^m b_{rij} T_{rij}, \quad (2.7)$$

де P_{rij}^{nocm} - питомий показник постійних витрат; 3_{ij}^T - кінцеві витрати на паливо і i -го виду в j -му вузлі. Після підстановки (2.6) і (2.7) у (2.5) остаточно отримуємо:

$$3_{rij} = \varphi_{rij}^{pez} K_{rij}^{num} (E_n + p_{rij}^{nocm}) + \varphi_{rij}^3 3_{ij}^m b_{rij} T_{rij} \quad (2.8)$$

Для існуючих електростанцій 3_{rij} приймаються рівними паливній складовій.

Значення величин K_{rij}^{num} , P_{rij}^{nocm} , b_{rij} , T_{rij} , φ_{rij}^{nocm} , φ_{rij}^3 , 3_{ij}^T визначаються з таблиць довідників.

Питомі витрати для ліній електропередачі розраховуються за допомогою виразу:

$$3_{ie} = K_{ie}^{num} (E_n + p_a), \quad (2.9)$$

де K_{ie}^{num} - питомі капіталовкладення на 1 кВт пропускної здатності лінії; p_a - сумарні відрахування на амортизацію, ремонт і обслуговування. Для існуючої лінії електропередачі K_{ie}^{num} приймаються рівними нулю.

Значення величин K_{ie}^{num} і p_a наведені в табл. 1.2.

Задача вирішується з урахуванням таких обмежень [7,9]:

1. Умови балансу потужності у вузлах мережі:

$$\sum_{i \in j} \sum_{r \in j} P_{rij} + \sum_e P_{ej} (1 + \alpha_{ej}^\pi) - \sum_e P_{ej} = P_j + P_j^{pez}, \quad (2.10)$$

де $\sum_e$ означає, що підсумовування здійснюється за вузлами, які безпосередньо пов'язані із вузлом j ; α_{ej}^π - коефіцієнт урахування втрат потужності в лінії при передачі з вузла e у вузол j ($\alpha_{ej}^\pi = 0,05$).

1. Умови балансу енергії у вузлах:

$$\sum_{i \in j} \sum_{r \in j} P_{rij} T_{rij} + \sum_e E_{ej} (1 + \alpha_{ej}^3) - \sum_e E_{ej} = E_j, \quad (2.11)$$

де α_{ej}^3 - коефіцієнт урахування втрат енергії в лінії при передачі з вузла e у вузол j ($\alpha_{ej}^E = -0,05$).

3. Максимально допустимі значення потужності та відпуск енергії електростанцій:

$$P_{rij} \leq P_{rij}^{\max} \quad (2.12)$$

$$P_{rij} T_{rij} \leq E_{rij}^{\max} \quad (2.13)$$

4. Наявність паливно-енергетичних ресурсів

$$\sum_{j=1}^J \sum_{r=1}^R P_{rij} T_{rij} b_{rij} \leq B_i^{\max} \quad (2.14)$$

5. Пропускна здатність існуючих і нових ліній електропередачі

$$P_{ej} + P_{je} - P_{ej}^{\text{нов}} \leq P_{ej}^{\text{суц}} \quad (2.15)$$

$$E_{ej} + E_{je} - P_{ej}^{\text{нов}} T_{ej} \leq P_{ej}^{\text{існ}} T_{ej}, \quad (2.16)$$

де $P_{ej}^{\text{існ}}$ - пропускна здатність існуючих ліній електропередачі, що з'єднують вузли e і j ; T_{ej} - річна кількість годин використання пропускну здатності.

6. Обсяг капіталовкладень, виділених на впровадження генеруючих потужностей в енергосистемі

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^R K_{rij}^{y0} P_{rij} \leq K^{\max}, \quad (2.17)$$

де $K^{\max}$ - граничний обсяг капіталовкладень.

При розв'язанні задачі необхідно оптимізувати відпуск енергії однієї з електростанцій, тобто визначити для цієї станції найбільш вигідну кількість годин використання встановленої потужності T_{rij} . Але при цьому порушується лінійність цільової функції й обмежень, які передбачають річний відпуск енергії $P_{rij} T_{rij}$. Цього можна уникнути за рахунок збільшення розмірності задачі [2,7].

Нехай число годин T_{rij} змінюється в межах

$$T_{rij}^{\min} \leq T_{rij} \leq T_{rij}^{\max}.$$

Встановлену потужність електростанції представляємо у вигляді суми двох складових – базисної P_{rij}' і пікової P_{rij}'' :

$$P_{rij} = P_{rij}' + P_{rij}'' \quad (2.18)$$

Будемо вважати, що потужність P'_{rij} має кількість годин використання $T_{rij}^{\max}$, а P''_{rij} - кількість годин використання $T_{rij}^{\min}$. При цьому річний відпуск енергії електростанції записується у виді

$$P_{rij}T_{rij} = P'_{rij}T_{rij}^{\max} + P''_{rij}T_{rij}^{\min} \quad (2.19)$$

Не лінійність, яка виникає при оптимізації значення T_{rij} усувається в результаті підстановки (2.17) і (2.18) у цільову функцію (2.4) і обмеження (2.10)–(2.16). Викладене ілюструє рис.2.2. Площа заштрихованих фігур відповідає відпуску енергії електростанцією.

Для урахування динаміки розвитку генеруючих потужностей, увесь розрахунковий період розбивається на етапи $h=1,2,...,H$. Причому $T = \sum_{h=1}^H t_h$, де t_h - тривалість h -го етапу розвитку системи. Для кожного етапу задаються всі необхідні економічні і технічні характеристики: навантаження вузлів P_{jh} , необхідні резерви потужності P_{jh}^{pez} , потреби в енергії E_{jh} , гранично припустимі рівні споживання палива B_{jh}^{pez} та ін.. Далі складаються статичні підмоделі розвитку системи, кожна з яких описують виразами виду (1.4)–(1.16). При цьому має забезпечуватись узгодження рішень, прийнятих на сусідніх етапах, тобто для кожного об'єкта сума вихідної потужності і приросту потужності на етапі повинна дорівнювати вихідній потужності цього етапу. Питомі зведені витрати об'єктів розраховуються відповідно до динамічного критерію оптимальності. Задача оптимізації вирішується сумісно для всіх підмоделей. Рішення може бути знайдене або при однократній оптимізації всієї сукупності статичних підмоделей, або при послідовному розгляді підмоделей кожного етапу з наступним узгодженням отриманих розв'язків.

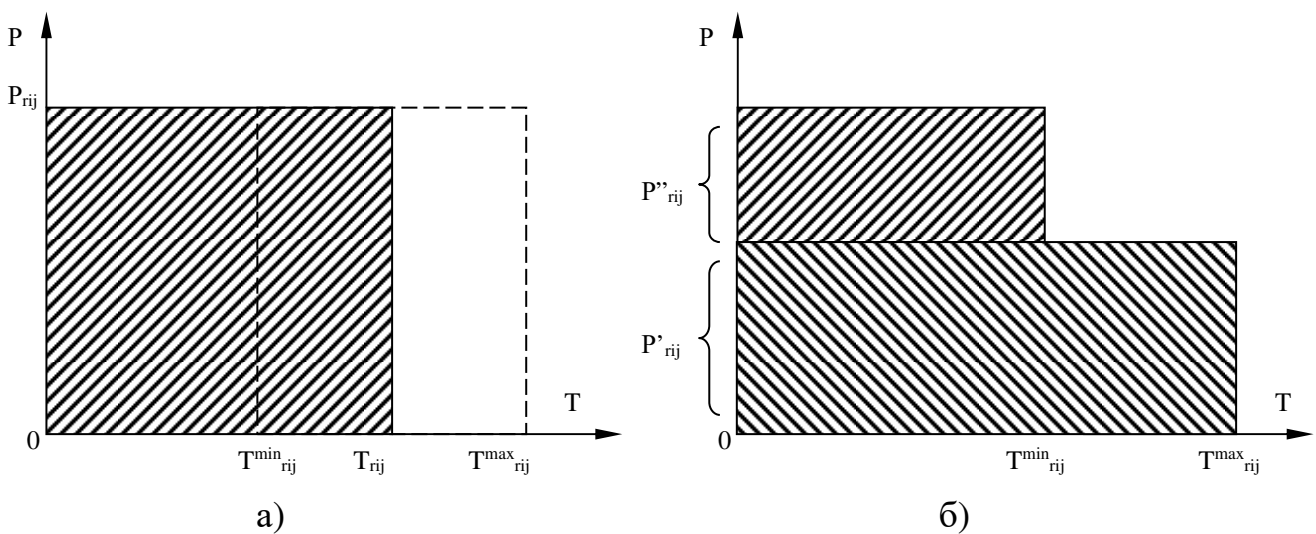


Рисунок 2.2 - Оптимізація річного відпуску електроенергії електростанції в лінійній моделі: а - річний відпуск енергії електростанції; б - річний відпуск енергії електростанції при розбивці її потужності на складові.

$$y_{ia} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_j = 0 \quad (2.23)$$

відповідає гіперплощина в n -мірному просторі. Кожній нерівності

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_j \geq 0 \quad (2.24)$$

відповідає геометричне місце крапок, розташованих по одну сторону від гіперплощини виду (41). У результаті перетинання координатних гіперплощин і гіперплощин, рівняння яких одержують із лінійних нерівностей заміною знаків нерівностей знаками точної рівності, утворюється опуклий багатогранник в n -мірному просторі, що визначає область розв'язку задачі.

План, що відповідає кожній з вершин багатогранника припустимих значень, називається опорним планом.

Наявність у системі обмежень виду (39) одного рівняння зв'язку знижує розмірність (ранг) опуклого багатогранника в n -мірному просторі параметрів $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на одиницю, тому що за допомогою цього рівняння один з параметрів можна лінійно виразити через інші. Уведення r -рівностей никне розмірність простору розв'язку на r одиниць.

Змінні $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ утворюють базис n -мірного векторного простору. Інші змінні $y_{10}, y_{20}, \dots, y_i, \dots, y_m$ лінійно виражаються через змінні базису.

У вершині багатогранника перетинаються n - z гіперплощин. Тому що кожна гіперплощина відповідає або рівнянню зв'язку, або рівнянню, отриманому в результаті заміни знака нерівності в обмеженні виду (2.21) або знаком точної рівності, у вершині багатогранника n - z змінних обертаються в нуль. Якщо ці змінні розглядати як базис перетвореного простору, то у вершині багатогранника всі змінні базису дорівнюють нулю.

Безліч усіх крапок n -мірного простору, у яких лінійна форма приймає деяке значення

$$F = q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n = C \quad (2.25)$$

також являє собою гіперплощина. Гіперплощини, відповідні до різних значень цільової функції, паралельні один одному. Звідси випливає, що ніякій крапці, що лежить усередині багатогранника, не може відповідати оптимальний план, тому що завжди найдуться крапки, які лежать на гіперплощинах, відповідних до більших значень цільової функції. Таким чином, якщо значення цільової функції для оптимального розв'язку є кінцевим, оптимальне рішення повинне перебувати у вершині опуклого багатогранника, що визначає область допустимих рішень. Може виявитися, що задача лінійного програмування має нескінченна безліч поранень, що заповнюють ціле ребро, або цілу грань багатогранника.

Розглянемо найпростіший приклад. Нехай необхідно визначити максимум функції

$$F = -4x_1 - 8x_2 - 2x_3$$

при наявності обмежень

$$y_{10} = -4x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 24 = 0$$

$$y_2 = -5x_1 - 7x_2 + 35 \geq 0$$

$$y_3 = -x_3 + 5 \geq 0$$

Опуклий багатокутник, обумовлений заданої системою обмежень, показаний на рис.2.3. Штрих пунктирною лінією зображені площини

$$F = -4x_1 - 8x_2 - 2x_3 = -16;$$

$$F = -4x_1 - 8x_2 - 2x_3 = -8,$$

які відповідають різним значенням цільової функції. Заштрихована область визначення завдання. Очевидно, що серед усіх площин лінійної форми оптимальному плану відповідає площина, яка перетинає багатокутник області розв'язку й перебуває ближче всього до початку координат. В прикладі це площина $F = -8$. У цьому випадку оптимальний план $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4$.

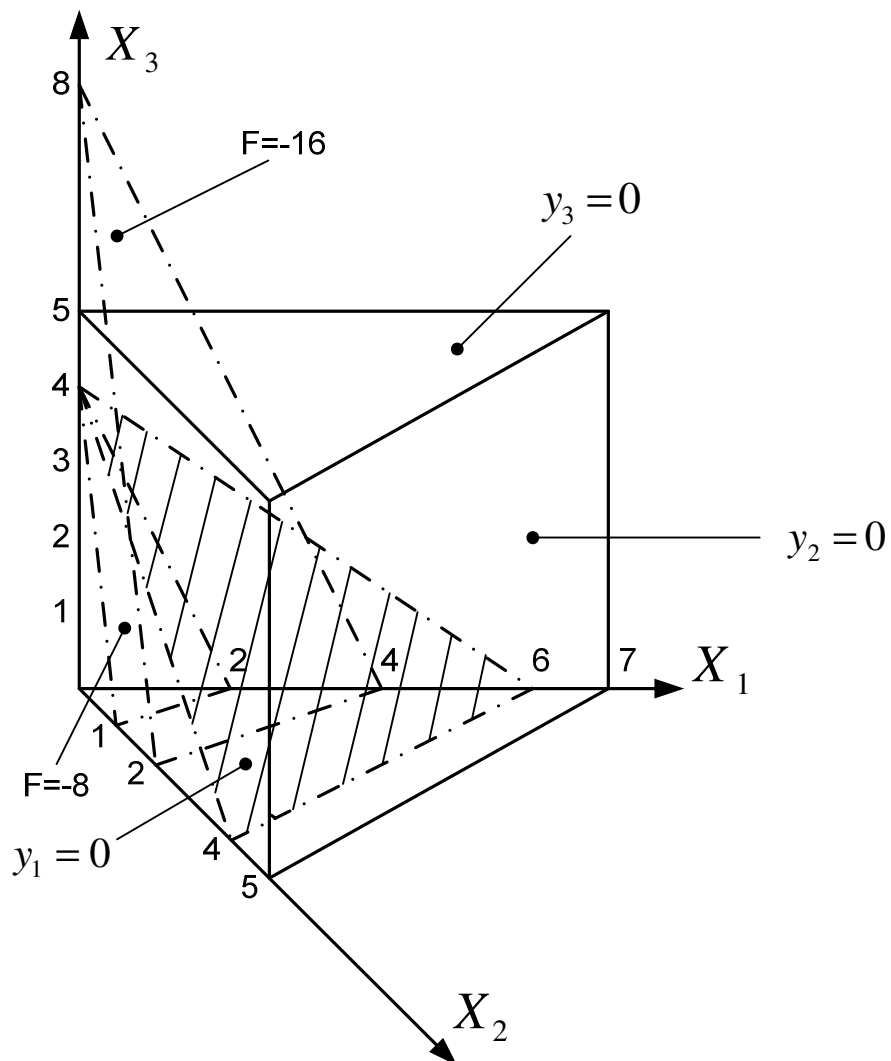


Рисунок 2.3. Геометрична ілюстрація задачі лінійного програмування

Геометрична інтерпретація дозволяє сформулювати дві основні властивості задачі лінійного програмування [8]:

1/ оптимальний план, якщо він існує, лежить не усередині, а на границі області допустимих рішень, в одній з вершин багатогранника;

2/ для того щоб знайти оптимальний рішення, потрібно переходити від однієї вершини до іншої, рухаючись у напрямку збільшення цільової функції.

На цих принципах і побудований основний метод рішення задачі лінійного програмування - симплекс-метод.

Розділ 3. ОПТИМІЗАЦІЯ СТРУКТУРИ ГЕНЕРУВАЛЬНИХ ПОТУЖНОСТЕЙ ЕНЕРГОСИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ СІМПЛЕКС-МЕТОДУ

3.1. Загальні положення

Для розв'язання задач оптимізації розвитку генеруючих потужностей енергосистем, лінійна модель яких містить, як правило, невелику кількість обмежень рівностей, а більшу частину складають обмеження нерівності, доцільно застосовувати модифікацію симплекс-методу, запропоновану в [2]. Використання даної модифікації для вирішення задачі розміщення і вибору потужності електростанцій розглянуте в [3]. При застосуванні модифікованого симплекс-методу задачу лінійного програмування (2.20)–(2.22) зручно записати у вигляді таблиці, показаної на рис.3.1. При цьому обмеження типу рівностей записуються таким чином, щоб вільні члени рівностей були додатні.

	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-x_j$	$\dots$	$-x_n$	1
y_{01}	$-a_{11}$	$-a_{12}$	$\dots$	$-a_{1j}$	$\dots$	$-a_{1n}$	b_1
y_{02}	$-a_{21}$	$-a_{22}$	$\dots$	$-a_{2j}$	$\dots$	$-a_{2n}$	b_2
$\dots\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_i	$-a_{i1}$	$-a_{i2}$	$\dots$	$-a_{ij}$	$\dots$	$-a_{in}$	b_i
$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$
y_m	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	$\dots$	$-a_{mj}$	$\dots$	$-a_{mn}$	b_m
F	$-q_1$	$-q_2$	$\dots$	$-q_j$	$\dots$	$-q_n$	C

Рисунок 3.1 – Симплекс-таблиця

Алгоритм симплекса-методу розбивається на два етапи:

1. Знаходження опорного плану, тобто плану, що належить однієї з вершин багатогранника обмежень.
2. Знаходження оптимального плану.

Для пошуку як опорного, так і оптимального плану організується багатокроковий обчислювальний процес, на кожному кроці якого здійснюється заміна однієї з змінних базису вигляду x_j позабазисною змінною виглядом y_i . Опорний і оптимальний плани належать вершинам багатогранника обмежень, у кожній із яких перетворюються в нуль $n - r$ змінних. Якщо ці змінні розглядати як базис перетвореного простору, то це значить, що і в опорному, і в оптимальному планах усі змінні базису дорівнюють нулю. Тому процес пошуку починається з точки початку координат, у якій всі змінні базису дорівнюють нулю. Введення змінної в базис означає, що на наступному кроці їй буде

присвоєне нульове значення. При цьому змінна, яка вилучається з базису, набуває, як правило, ненульового значення.

Введення в базис однієї змінної і виведення іншої потребує перерахунку коефіцієнтів системи обмежень і лінійної форми. Такий перерахунок називається кроком жорданового виключення.

Введемо такі визначення. Стовпець, що містить змінну виду x_j , яка виводиться з базису, називається розв'язувальним стовпцем. Розв'язувальним рядком називається рядок, що відповідає змінній вигляду y_i , яка вводиться у базис. Елемент, який знаходиться на перетині розв'язувальних рядка і стовпця називається розв'язувальним елементом.

Сформулюємо правила виконання кроку жорданового виключення [2,5].

1. Коефіцієнти системи обмежень і лінійної форми, що не належать розв'язувальним рядку і стовпцю, розраховуються по виразу:

$$a'_{rs} = a_{rs} - \frac{a_{rj}a_{is}}{a_{ij}}, \quad (3.1)$$

де a_{rs} - старе значення коефіцієнта; a_{ij} - розв'язувальний елемент.

2. Розв'язувальний елемент замінюють одиницею.
3. Елементи розв'язувального рядка залишаються без зміни.
4. Елементи розв'язувального стовпця, крім самого розв'язувального елемента, змінюють знаки.
5. Елементи розв'язувального рядка і стовпця діляться на старе значення розв'язувального елемента - a_{ij} .

Розглянемо етап знаходження опорного плану, що, як було зазначено, відповідає одній з вершин багатогранника обмежень. Початковим планом, тобто точкою початку пошуку, будемо вважати початок координат:

$$x_1 = x_2 = \dots x_j = \dots = x_n = 0$$

На кожному кроку процесу пошуку будемо вводити в базис змінну y_i і виводити з базису змінну x_j . Це значить, що змінній y_i на наступному кроці присвоюється нульове значення. При цьому x_j , як правило, зростає. Обмеження типу рівностей повинні обов'язково виконуватися як в опорному, так і в оптимальному планах. Тому в першу чергу в базис доцільно ввести змінні, що відповідають даному виду обмежень. З цією метою розв'язувальним вибирається стовпець j , що містить додатній коефіцієнт в обмеженні рівності. Розв'язувальний рядок визначається з умови

$$\frac{b_i}{-a_{ij}} = \min \left\{ \frac{b_s}{-a_{sj}} \mid b_s \geq 0, -a_{sj} > 0, s = 1, 2, \dots, m \right\}, \quad (3.2)$$

де вираз у правій частині потребує визначення мінімуму за умов $b_s \geq 0, -a_{sj} > 0, s = 1, 2, \dots, m$. Вибір обмежень з позитивними вільними членами обумовлений бажанням, у першу чергу, вивести зі складу позабазисних змінних змінні, що відповідають обмеженням типу рівностей, тому, що в цьому випадку y_{0i} фіксується на нульовому значенні та у базис не включається. При цьому

розмірність області розв'язання зменшується на одиницю.

Однакові знаки вільних членів b_s і коефіцієнтів $-a_{ij}$ і мінімальність відношення $\frac{b_s}{-a_{sj}}$ забезпечують рух в допустимій області. Дійсно, із виразу

$$x_1 = x_2 = \dots x_j = \dots = x_n = 0$$

випливає, що

$$y_i = (-a_{ij})(-x_j) + b_i.$$

Оскільки на наступному кроці y_i дорівнюється нулю, то з останнього виразу випливає, що виконання умови $x_j \geq 0$ забезпечується однаковими знаками b_i і $-a_{ij}$. Якби розв'язувальним був обраний не рядок i , а будь-який інший рядок ξ , для якого b_ξ і $a_{\xi j}$ також більше нуля, то це призвело б до порушення умови $y_i \geq 0$.

Дійсно, x_j на такому кроці дорівнювало б $\frac{b_\xi}{-a_{\xi j}}$, а $y_i = (-a_{ij})\frac{b_\xi}{-a_{\xi j}} + b_i$.

Оскільки $\frac{b_i}{-a_{ij}} \leq \frac{b_\xi}{-a_{\xi j}}$, то $y_i \leq 0$.

Приймаємо розв'язувальними j -й стовпець та i -й рядок і виконуємо крок жорданового виключення. Далі необхідно знову вибрати розв'язувальні стовпчик і рядок, виконати крок жорданового виключення і т.д. Дані операції виконуються доти, поки в базис не будуть введені всі змінні вигляду $y_i \geq 0$.

Якщо зі складу позабазисних змінних виключені змінні, що відповідають обмеженням типу рівностей, але в r -му обмеженні є від'ємний вільний член, то це означає, що в отриманому плані порушене r -е обмеження-нерівність. У цьому випадку розв'язувальним стовпцем вибирається стовпець j , що включає від'ємний коефіцієнт r -го рядка. При цьому розв'язувальний рядок, вибирається з умови

$$\frac{b_i}{-a_{ij}} = \max \left\{ \frac{b_s}{-a_{sj}} \mid b_s < 0, -a_{sj} < 0, s = 1, 2, \dots, m \right\} \quad (3.3)$$

Якщо $b_s \leq 0$, то рух у бік допустимої області забезпечується вибором максимуму відношення $\frac{b_s}{-a_{sj}}$.

Послідовна заміна змінних базису продовжується доти, поки не буде знайдений опорний план. У опорному плані зі складу позабазисних змінних мають бути виключені всі змінні вигляду $y_i \geq 0$, а вільні члени всіх нерівностей повинні бути додатні.

На другому етапі симплекс-методу організується пошук оптимального плану. Якщо всі коефіцієнти останнього рядка симплекс-таблиці (див. рис.2. І) додатні, то оптимальний план знайдений. Дійсно, якщо всі коефіцієнти $-q_j > 0$, то це значить, що при збільшенні будь-якої змінної x_j , цільова функція буде зменшуватися. Якщо є хоча б один від'ємний коефіцієнт, то пошук оптимального рішення здійснюється в результаті послідовного виконання кроків жорданового

виключення. При цьому розв'язувальним стовпцем вибирається стовпець j , який включає від'ємний коефіцієнт g -го рядка. Розв'язувальний рядок вибирається з умови (2.2).

Запишемо алгоритм вирішення задачі лінійного програмування (1.1)–(1.3) за допомогою сімплекс-методу [2;5].

1. Записуємо задачу лінійного програмування у вигляді таблиці. Початок координат приймається за початковий план.

2. Переглядаємо рядок таблиці, що відповідає будь-якому обмеженню-рівності (нуль-рядок) і вибираємо довільний додатний коефіцієнт. Якщо в нуль-рядках такий коефіцієнт не знаходиться, то вибираємо його в будь-якому іншому рядку. Стовпець j назвемо розв'язувальним. З умови:

$$\frac{b_i}{-a_{ij}} = \min \left\{ \frac{b_s}{-a_{sj}} \mid b_s \geq 0, -a_{sj} > 0, s = 1, 2, \dots, m \right\}$$

визначаємо розв'язувальний рядок.

3. Вважаючи розв'язувальним елементом коефіцієнт $-a_{sj}$, виконуємо крок жорданового виключення. Сімплекс-таблиця після перетворення показана на рис.2.2. У правому верхньому куті таблиці показаний номер кроку оптимізації, змінні базису

$$x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, x_n$$

дорівнюють нулю, позабазисні змінні

$$y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m$$

дорівнюють вільним членам, а елемент у правому нижньому куті показує значення лінійної форми.

4. Якщо виключені усі змінні вигляду y_{i0} , то переходимо до п.5 алгоритму. Якщо ні, то переходимо до п.2.

5. Якщо усі вільні члени додатні, то опорний план знайдений і переходимо до п. 9 алгоритму. Якщо є хоча б один від'ємний вільний член, то переходимо до п. 6.

6. Переглядаємо рядок r , що відповідає від'ємному вільному члену b_r . Якщо в r -му рядку є хоча б один від'ємний коефіцієнт вигляду $-a_{rj}$, то переходимо до п. 7 алгоритму. Якщо немає, то це значить, що система обмежень є несумісною, тобто немає жодного опорного плану.

7. Вибираємо розв'язувальним стовпець j від'ємного коефіцієнта. Розв'язувальний рядок визначаємо з умови

$$\frac{b_i}{-a_{ij}} = \max \left\{ \frac{b_s}{-a_{sj}} \mid b_s < 0, -a_{sj} < 0, s = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

8. Приймаючи розв'язувальним елементом коефіцієнт $-a_{ij}$, виконуємо крок жорданового виключення. Переходимо до п. 5 алгоритму.

9. Переглядаємо рядок цільової функції. Якщо всі коефіцієнти рядка $-q_j$ додатні, то оптимальний план знайдений і переходимо до п. 12 алгоритму. Якщо є від'ємний коефіцієнт, то переходимо до п. 10.

10. Приймаємо за розв'язувальний стовпець j від'ємного коефіцієнта $-q_j$.
Розв'язувальний рядок вибираємо з умови

$$\frac{b_i}{-a_{ij}} = \min \left\{ \frac{b_s}{-a_{sj}} \mid b_s \geq 0, -a_{sj} > 0, s = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

11. Приймаємо за розв'язувальний елемент коефіцієнт $-a_{ij}$ виконуємо крок жорданового виключення. Переходимо до п.9 алгоритму.

12. Кінець.

	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-y_i$	$\dots$	$-x_n$	1
$-y_{10}$	$-a_{11}$	$-a_{12}$	$\dots$	$-a_{1j}$	$\dots$	$-a_{1n}$	b_1
$-y_{20}$	$-a_{21}$	$-a_{22}$	$\dots$	$-a_{2j}$	$\dots$	$-a_{2n}$	b_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$-x_j$	$-a_{i1}$	$-a_{i2}$	$\dots$	$-a_{ij}$	$\dots$	$-a_{in}$	b_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$-y_m$	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	$\dots$	$-a_{mj}$	$\dots$	$-a_{mn}$	b_m
F	$-q_1$	$-q_2$	$\dots$	$-q_j$	$\dots$	$-q_n$	C^I

Рисунок 3.2 – Симплекс-таблиця після перетворення

3.2 Приклади оптимізації структури генерувальних потужностей

В цьому розділі розглядаються приклади розв'язання задачі лінійного програмування із застосуванням симплекс-методу та приклади оптимізації структури генерувальних потужностей.

ЗАДАЧА 3.1. Знайти максимум функції $F = x_1 + 0,5x_2$ за наявності обмежень:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - 2x_2 + 6 = 0 \\ y_2 = x_1 + x_2 - 2 \geq 0 \\ y_3 = -x_1 - x_2 + 4 \geq 0 \end{cases}.$$

Запишемо задачу лінійного програмування в симплекс-таблицю 2.1:

Таблиця 3.1 – Перший крок.

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	1	2	6
y_2	-1	-1	-2
y_3	1	1	4
F	-1	-0,5	0

Вибираємо розв'язувальним стовпцем стовпець 2, що містить додатний коефіцієнт $-a_{12}$ з першого нуль-рядка. Розв'язувальний рядок вибираємо з умови:

$$\frac{b_i}{-a_{ij}} = \min \left\{ \frac{b_1}{-a_{12}}, \frac{b_3}{-a_{32}} \right\} = \min \left\{ \frac{6}{2}, \frac{4}{1} \right\} = 3 = \frac{b_1}{-a_{12}}.$$

Таким чином розв'язувальний рядок – рядок 1. Це означає, що в базис вводимо елемент y_1 , а виводимо елемент x_2 . Виконуємо крок жорданового виключення. Елементи, що не належать розв'язувальному рядку та стовпцю, розраховуємо за формулою (2.1):

$$\begin{aligned} a'_{21} &= a_{21} - \frac{a_{11} \cdot a_{22}}{a_{12}} = 1 - \frac{1 \cdot (-1)}{(-2)} = 0,5; & b'_2 &= b_2 - \frac{b_1 \cdot a_{22}}{a_{12}} = -2 - \frac{6 \cdot 1}{(-2)} = 1; \\ a'_{31} &= a_{31} - \frac{a_{31} \cdot a_{32}}{a_{12}} = -1 - \frac{1 \cdot 1}{(-2)} = -0,5; & C' &= C - \frac{b_1 \cdot q_2}{a_{12}} = 0 - \frac{6 \cdot 0,5}{(-2)} = 1,5. \\ q'_1 &= q_1 - \frac{a_{11} \cdot q_2}{a_{12}} = 1 - \frac{0,5 \cdot (-1)}{(-2)} = 0,75; \end{aligned}$$

Змінна y_1 , що відповідає обмеженню рівності, після введення в базис, завжди дорівнює нулю; її значення фіксується, а подальше виведення змінної з базису не має сенсу. Тому елементи стовпця 2, що включає цю змінну після виконання кроку жорданового виключення, не розраховуємо. Елементи рядка 1 знаки не міняють, і діляться на значення розв'язувального елементу $-a_{12}$.

Результати виконання кроку жорданового виключення записуємо в табл.2.2.

Таблиця 3.2 – Другий крок.

	$-x_1$	$-y_1$	2
x_2	0,5	–	3
y_2	-0,5	–	1
y_3	0,5	–	1
F	-0,75	–	0,5

Як бачимо з табл.3.2 , опорний план знайдено тому, що вилучена змінна, яка відповідає обмеженню рівності та всі елементи b_i в симплекс-таблиці додатні і тому переходимо до пошуку оптимального плану.

Оптимальний план не знайдено тому, що в рядку коефіцієнтів функції F є від'ємний коефіцієнт $-q_1$.

Стовпець 1 від'ємного коефіцієнту $-q_1 = -0,75$ приймаємо за розв'язувальний.

Розв'язувальний рядок вибираємо з умови:

$$\frac{b_i}{-a_{ij}} = \min \left\{ \frac{b_1}{-a_{11}}, \frac{b_3}{-a_{31}} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{0,5}, \frac{1}{0,5} \right\} = 2 = \frac{b_3}{-a_{31}}.$$

Таким чином розв'язувальний рядок – рядок 3. Це означає, що в базис вводим елемент y_3 , а виводимо елемент x_1 . Виконуємо крок жорданового виключення. Елементи, що не належать розв'язувальному рядку та стовпцю, розраховуємо за формулою:

$$b'_1 = b_1 - \frac{b_3 \cdot a_{11}}{a_{31}} = 3 - \frac{(-0,5) \cdot 1}{(-0,5)} = 2; \quad C' = C - \frac{b_3 \cdot q_1}{a_{31}} = 1,5 - \frac{0,75 \cdot 1}{(-0,5)} = 3;$$

$$b'_2 = b_2 - \frac{b_3 \cdot a_{21}}{a_{31}} = 1 - \frac{0,5 \cdot 1}{(-0,5)} = 2;$$

Розв'язувальний елемент замінюємо одиницею, елементи рядка 3 залишаємо без зміни, а елементи стовпця 1 змінюють свої знаки, і всі елементи ділимо на значення розв'язувального елемента $-a_{12} = 0,5$.

Результати напишемо в табл.3.3.

Таблиця 3.3 – Третій крок.

	$-y_3$	$-y_1$	3
x_2	-1	-	2
y_2	1	-	2
x_1	2	-	2
F	1,5	-	3

Результати розрахунку свідчать про те, що оптимальний план знайдено. Всі елементи $-q_j$ додатні. В оптимальному плані: $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; $y_2 = 2$; $y_1 = y_3 = 0$. Максимум функції $F = 3$.

ЗАДАЧА 3.2. Знайти максимум функції $F = 6x_1 + 3x_2$ за наявності обмежень:

$$\begin{cases} y_1 = -3x_1 - 2x_2 + 8 = 0 \\ y_2 = -4x_1 - x_2 + 10 \geq 0 \\ y_3 = -x_1 - 3x_2 + 7 \geq 0 \end{cases}.$$

Запишемо задачу лінійного програмування в сімплекс-таблицю 2.4:

Таблиця 3.4 – Перший крок

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	3	2	8
y_2	4	1	10
y_3	1	3	7
F	-6	-3	0

Вибираємо розв'язувальним стовпцем стовпець 1, що містить додатній коефіцієнт $-a_{11}$ з першого нуль-рядка. Розв'язувальний рядок вибираємо з умови:

$$\frac{b_i}{-a_{ij}} = \min \left\{ \frac{b_1}{-a_{11}}, \frac{b_2}{-a_{21}}, \frac{b_3}{-a_{31}} \right\} = \min \left\{ \frac{8}{3}, \frac{10}{4}, \frac{7}{1} \right\} = 2 = \frac{b_2}{-a_{21}}.$$

Таким чином розв'язувальний рядок – рядок 2. Це означає, що в базис вводимо елемент y_2 , а виводимо елемент x_1 . Виконуємо крок жорданового виключення. Елементи, що не належать розв'язувальному рядку та стовпцю, розраховуємо за формулою:

$$a'_{rs} = a_{rs} - \frac{a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{ij}},$$

$$a'_{12} = a_{12} - \frac{a_{11} \cdot a_{22}}{a_{21}} = -2 - \frac{-3 \cdot (-1)}{(-4)} = -1,25; \quad b'_1 = b_1 - \frac{b_2 \cdot a_{11}}{a_{21}} = 8 - \frac{10 \cdot (-3)}{(-4)} = 0,5;$$

$$a'_{32} = a_{32} - \frac{a_{31} \cdot a_{22}}{a_{21}} = -3 - \frac{(-1) \cdot (-1)}{(-4)} = -2,75; \quad b'_3 = b_3 - \frac{a_{31} \cdot b_2}{a_{21}} = 7 - \frac{10 \cdot (-1)}{(-4)} = 4,5;$$

$$q'_2 = q_2 - \frac{a_{22} \cdot q_1}{a_{21}} = 3 - \frac{(-1) \cdot 6}{(-4)} = 1,5; \quad C' = C - \frac{b_2 \cdot q_1}{a_{21}} = 0 - \frac{10 \cdot 6}{(-4)} = 15.$$

Розв'язувальний елемент замінюємо одиницею, елементи стовпця 1 змінюють свої знаки, елементи розв'язувального рядка знаки не змінюють і всі

елементи розв'язувального рядка та розв'язувального стовпця ділимо на значення розв'язувального елемента $-a_{12} = 0,5$.

Результати виконання кроку жорданового виключення записуємо в табл.3.5.

Таблиця 3.5 – Другий крок

	$-y_2$	$-x_2$	2
y_1	-0,75	1,25	0,5
x_1	0,25	0,25	2,5
y_3	-0,25	-2,75	4,5
F	1,5	-1,5	15

Вибираємо розв'язувальним стовпцем стовпець 2, що містить додатній коефіцієнт $-a_{12}$ з першого нуль-рядка. Розв'язувальний рядок вибираємо з умови:

$$\frac{b_i}{-a_{ij}} = \min \left\{ \frac{b_1}{-a_{11}}, \frac{b_2}{-a_{21}} \right\} = \min \left\{ \frac{0,5}{1,25}, \frac{2,5}{0,25} \right\} = 1 = \frac{b_1}{-a_{11}}.$$

Таким чином розв'язувальний рядок – рядок 1. Це означає, що в базис вводим елемент y_1 , а виводимо елемент x_2 . Виконуємо крок жорданового виключення. Елементи, що не належать розв'язувальному рядку та стовпцю, розраховуємо за формулою (2.1):

$$\begin{aligned} a'_{21} &= a_{21} - \frac{a_{11} \cdot a_{22}}{a_{12}} = -0,25 - \frac{0,75 \cdot (-0,25)}{(-1,25)} = -0,4; & b'_2 &= b_2 - \frac{b_1 \cdot a_{22}}{a_{12}} = 2,5 - \frac{0,5 \cdot (-0,25)}{(-1,25)} = 2,4; \\ a'_{31} &= a_{31} - \frac{a_{11} \cdot a_{32}}{a_{12}} = 0,25 - \frac{0,75 \cdot 2,75}{(-1,25)} = 1,4; & b'_3 &= b_3 - \frac{b_1 \cdot a_{32}}{a_{12}} = 4,5 - \frac{0,5 \cdot 2,75}{(-1,25)} = 3,4; \\ q'_1 &= q_1 - \frac{a_{11} \cdot q_2}{a_{12}} = -1,5 - \frac{0,75 \cdot 1,5}{(-1,25)} = -0,6; & C' &= C - \frac{b_1 \cdot q_2}{a_{12}} = 15 - \frac{0,5 \cdot 1,5}{(-1,25)} = 15,6. \end{aligned}$$

Результати виконання кроку жорданового виключення записуємо в табл.2.6.

Таблиця 3.6 – Третій крок.

	$-y_2$	$-y_1$	3
x_2	-0,6	–	0,4
y_2	0,4	–	2,4
x_1	-1,9	–	5,6
F	0,6	–	15,6

Як бачимо з табл.2.6, опорний план знайдено, тому що вилучена змінна, яка відповідає обмеженню-рівнянню і всі елементи b_i в симплекс-таблиці додатні.

Оптимальний план теж знайдено, тому що в рядку коефіцієнтів функції F всі елементи $-q_j$ додатні.

В оптимальному плані: $x_1 = 5,6$; $x_2 = 0,4$; $y_3 = 5,6$; $y_1 = y_2 = 0$. Максимум функції $F = 15,6$.

Розділ 4. ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗВИТКУ ГЕНЕРУВАЛЬНИХ ПОТУЖНОСТЕЙ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ

4.1. Рішення задачі оптимізації розвитку електростанцій енергосистеми за допомогою методу динамічного програмування

Результати, отримані при оптимізації структури генерувальних потужностей є основою для рішення наступної задачі оптимізації розвитку електричних систем – оптимізації розвитку електростанцій. У рамках даної задачі обґрунтовуються рішення вибору виду енергоресурсів, місць спорудження, потужності, параметрів і термінів спорудження конкретних електростанцій.

У загальному випадку задача оптимізації розвитку електростанцій формулюється як задача нелінійного програмування, для вирішення якої застосовується метод динамічного програмування.

Динамічне програмування є спеціальним обчислювальним методом рішення задач нелінійного програмування, які дозволяють представити процес у вигляді послідовності окремих етапів. При використанні методу цільова функція повинна являти собою суму функцій окремих змінних.

Застосування динамічного програмування дозволяє замість однократної оптимізації функції багатьох змінних виконувати багатократну оптимізацію функцій однієї змінної. При його використанні організовується багатокроковий процес оптимізації, на кожному кроці якого оптимізується функція однієї змінної. Результати оптимізації, отримані на кроці процесу, запам'ятовуються і використовуються на наступних кроках.

В основі методу лежить принцип оптимальності Беллмана, який може бути сформульований наступними чином. Яким би не був спосіб досягнення деякого стану системи, наступні рішення повинні належати оптимальній програмі для частини шляху, що залишилася, починаючи з цього стану [4;5].

Як і методи лінійного програмування, метод динамічного програмування достатньо просто реалізується на комп'ютерах.

Метод динамічного програмування успішно застосовується для вирішення задач оптимізації розвитку генерувальних потужностей енергосистем [1,4]. При його використанні може бути отримана модель, позбавлена недоліків лінійної моделі, найбільш істотними з яких є неможливість урахування нелінійності економічних характеристик і дискретності зміни потужностей електростанцій.

Вирішується спрощена задача визначення місць розміщення й оптимальних потужностей електростанцій. Роз'яснимо питання застосування методу динамічного програмування для вирішення цієї задачі [3,5]. Нехай необхідно визначити найбільш вигідну потужність $J(1,2,...,j,...J)$ електростанцій однієї з груп узагальненого енерговузла та встановити сумарну потужність

$$P_n = \sum_{j=1}^J P_j$$

Потужність кожної електростанції обмежена зверху:

$$P_j \leq P_j^{\max}, j = 1, 2, \dots, J$$

Критерієм оптимальності обираємо приведені витрати на спорудження й експлуатацію електростанцій

$$Z = \sum_{j=1}^J q_j(P_j), \quad (4.1)$$

де $q_j(P_j)$ – відомі функції витрат для кожної електростанції. При цьому на вигляд функції не накладаються ніякі обмеження.

Функції витрат, а також граничні потужності кожної електростанції визначаються за допомогою табл. 3.1.

Потужності електростанцій змінюються дискретно з кроком 1 в.о.

При вирішенні будемо послідовно розглядати кожний пункт спорудження електростанцій.

Нехай система складається тільки з однієї електростанції $j = 1$.

Підрахуємо сумарні приведені витрати на спорудження електростанції змінюючи P_1 в можливому діапазоні. Відповідні витрати позначимо

$$f_1(P_\Sigma) = q_1(P_1), \quad (4.2)$$

де P_Σ - сумарна потужність електростанцій системи. На першому кроці $P_\Sigma = P_1$, а потужність першої станції змінюється в граничних межах $0 \leq P_1 \leq P_1^{\max}$. Отримані результати зведемо в табл. 3.1.

Таблиця 4.1 – Перший крок динамічного програмування

P_Σ	0	1		$P_1^{\max}$
$f_1(P_\Sigma)$	0	$g_1(1)$		$g_1(P_1^{\max})$
P_1^{yo}	0	1		$P_1^{\max}$

Власне оптимізації на першому кроку ще немає. Функцію $f_1(P_\Sigma)$ назвемо умовно-оптимальними витратами на спорудження й експлуатацію першої станції, а P_1^{num} – умовно-оптимальною потужністю першої станції.

На другому кроці будемо розглядати систему, що складається вже з двох електростанцій $j = 1, 2$. При цьому будемо мінімізувати функцію витрат на спорудження й експлуатацію перших двох електростанцій, змінюючи P_Σ в усім припустимому діапазоні.

$$0 \leq P_\Sigma = P_1 + P_2 \leq P_\Sigma^{\max}.$$

На цьому кроку оптимізується функція вже двох змінних

$$f_2(P_\Sigma) = \min_{P_1, P_2} [q_1(P_1) + q_2(P_2)].$$

Використовуючи результати оптимізації першого кроку, дану функцію можна звести до функції однієї перемінної

$$f_2(P_\Sigma) = \min_{P_2} [q_2(P_2) + f_2(P_\Sigma - P_2)], \quad (3.3)$$

де P_2 змінюється в діапазоні $0 \leq P_2 \leq P_2^{\max}$. Функція $f_2(P_\Sigma)$ називається умовно-оптимальними приведеними витратами для перших двох електростанцій. При оптимізації для кожного значення P_Σ розраховується умовно-оптимальне значення потужності P_2^{num} . Отримані результати запишемо в табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Другий крок динамічного програмування

P_Σ	0	1		$P_\Sigma^{\max}$
$f_2(P_\Sigma)$	0	$f_2(1)$		$f_2(P_\Sigma^{\max})$
P_2^{yo}	0	$P_2^{yo}(1)$		$P_2^{yo}(P_\Sigma^{\max})$

Аналогічно отримується співвідношення оптимізації для довільної кількості електростанцій. Нехай потрібно визначити умовно-оптимальні витрати на спорудження й експлуатацію електростанцій, що споруджуються в пунктах $1, 2, \dots, j-1, j$, і умовно-оптимальні потужності j -ї електростанції при зміні P_Σ в усьому допустимому діапазоні. Результати оптимізації для попередніх $j-1$ кроків відомі.

У цьому випадку, замість того, щоб оптимізувати на кроці функцію j змінних

$$f_j(P_\Sigma) = \min_{P_1, P_2, \dots, P_j} [q_1(P_1) + q_2(P_2) + \dots + q_j(P_j)],$$

можна скористатися результатами попереднього кроку і мінімізувати функцію вже однієї змінної

$$f_j(P_\Sigma) = \min_{P_j} [q_j(P_j) + f_{j-1}(P_\Sigma - P_j)], \quad 0 \leq P_j \leq P_j^{\max}. \quad (3.4)$$

При цьому сумарна встановлена потужність

$$P_\Sigma = P_1 + P_2 + \dots + P_j,$$

змінюється в діапазоні

$$0 \leq P_\Sigma \leq P_\Sigma^{\max},$$

де $P_\Sigma^{\max}$ - визначається з умови

$$P_\Sigma^{\max} = \min[P_1^{\max} + P_2^{\max} + \dots + P_j^{\max}, P_n]$$

Вираз вигляду (3.4) називається рекуррентним співвідношенням. Результати оптимізації заносяться в таблицю 4.3.

Таблиця 4.3 – Крок j оптимізації методом динамічного програмування

P_{Σ}	0	1		$P_{\Sigma}^{\max}$
$f_j(P_{\Sigma})$	0	$f_j(1)$		$f_j(P_{\Sigma}^{\max})$
P_j^{num}	0	$P_j^{num}(1)$		$P_2^{yo}(P_{\Sigma}^{\max})$

На останньому J -му кроці, цільова функція записується у вигляді

$$f_J(P_n) = \min_{P_J} [q_J(P_J) + f_{J-1}(P_n - P_J)], \quad 0 \leq P_J \leq P_J^{\max}. \quad (4.5)$$

У результаті оптимізації знаходимо оптимальне значення потужності j -ї електростанції P_J^o . Оптимальні потужності інших електростанцій можна отримати в результаті «зворотньої ходу». Сумарна оптимальна потужність станцій $1, 2, \dots, J-1$ дорівнює

$$P_{1,2,\dots,J-1}^o = P_n - P_J^o.$$

Знаючи встановлену потужність в цих пунктах, за отриманими раніше для кожного з можливих значень P_{Σ} величинами P_{J-1}^{yo} (табл. 3.4) знаходимо P_{J-1}^o . Визначаємо

$$P_{1,2,\dots,J-2}^o = P_{1,2,\dots,J-1}^o - P_{J-1}^o.$$

Далі знаходимо P_{J-2}^o і т.д.

Таким чином, використовуючи результати оптимізації попередніх кроків, одержуємо послідовність оптимальних потужностей всіх електростанцій

$$P_J^o, P_{J-1}^o, \dots, P_j^o, \dots, P_2^o, P_1^o.$$

Після завершення розрахунку визначаються натуральні потужності електростанцій.

4.2. Приклади розв'язку задачі оптимізації розвитку електростанцій енергосистеми

В даному розділі розглянуто приклади розв'язання задач оптимізації розвитку електростанцій енергосистеми за допомогою методу динамічного програмування.

ЗАДАЧА 4.1. Нехай для першого вузла енергосистеми, що розглядалася в попередніх прикладах, необхідно визначити місця розташування та оптимальні потужності електростанцій першої групи. При цьому задано ймовірні місця розміщення електростанцій – пункти 1, 2, 3 і 4. Сумарна потужність електростанцій цієї групи була визначена при оптимізації структури генерувальних потужностей і дорівнює

$$P_{11} = P_n = \sum_{j=1}^4 P_j = 600 \text{ МВт.}$$

Будемо вважати, що у відносних одиницях сумарна потужність дорівнює 5 в.о. Потужності електростанцій змінюються дискретно з кроком 1 в.о.

Критерієм оптимальності вибираємо зведені витрати на спорудження і експлуатацію електростанцій вигляду (3.1). Функції витрат $g_j(P_j)$, а також граничні значення потужностей кожної електростанції наведені в табл.4.4.

Таблиця 4.4. Витрати на спорудження та експлуатацію електростанцій,

Номер пункту спорудження електростанції	P_j , в.о.						$P_j^{\max}$
	0	1	2	3	4	5	
1	0	9	22	27	-	-	3
2	0	10	21	29	35	42	5
3	0	7	17	22	-	-	3
4	0	8	15	23	31	-	4

Організуємо багатокроковий процес пошуку оптимальних потужностей електростанцій.

Перший крок

Нехай система складається тільки з однієї електростанції $j=1$. Змінюючи потужність станції в усьому допустимому діапазоні $0 \leq P_1 \leq P_1^{\max}$, визначимо зведені витрати на її спорудження і експлуатацію. Як вже було викладено вище, власне оптимізації на першому кроку ще немає. Проте, із метою упорядкування результатів, запишемо отримані характеристики в табл. 4.5.

Таблиця 45. Результати першого кроку оптимізації

P_{Σ}	0	1	2	3
$f_1(P_{\Sigma})$	0	9	22	27
$P_1^{y.o.}$	0	1	2	3

Другий крок

Розглядаємо систему, що складається з двох електростанцій. Змінюючи P_{Σ} в усьому допустимому діапазоні

$$0 \leq P_{\Sigma} = P_1 + P_2 \leq 5,$$

мінімізуємо функцію вигляду (4.3). При цьому для кожного значення P_{Σ} знаходимо умовно-оптимальне значення потужності другої станції P_2^{yo} . Отримані результати записуємо в табл. 4.6.

Таблиця 4.6. Результати другого кроку оптимізації

P_{Σ}	0	1	2	3	4	5
$f_2(P_{\Sigma})$	0	9	19	27	35	47
$P_2^{y.o.}$	0	0	1	0	4	5

Третій крок

Розглядаємо систему, що складається з трьох електростанцій. Змінюючи P_{Σ} усьому допустимому діапазоні

$$0 \leq P_{\Sigma} = P_1 + P_2 + P_3 \leq 5,$$

мінімізуємо функцію

$$f_3(P_{\Sigma}) = \min_{P_3} [q_3(P_3) + f_2(P_{\Sigma} - P_3)].$$

При цьому використовуємо результати, отримані на другому кроці (див. табл. 4.6). Так само як і раніше, для кожного P_{Σ} визначаємо P_2^{yo} . Результати оптимізації зведемо в табл. 4.7.

Таблиця 4.7. Результати третього кроку оптимізації

P_{Σ}	0	1	2	3	4	5
$f_3(P_{\Sigma})$	0	9	19	27	35	47
$P_3^{y.o.}$	0	0	1	0	4	5

Четвертий крок

Розглядаємо систему, що складається з чотирьох електростанцій $j=1,2,3,4$. Використовуючи результати третього кроку, мінімізуємо функцію

$$f_4(P_{\Sigma}) = \min_{P_4} [q_4(P_4) + f_3(P_{\Sigma} - P_4)], \quad 0 \leq P_4 \leq 4.$$

Одержуємо $P_4(5)=35$, $P_4^o=1$.

Виконуємо «зворотний хід». Оптимальна потужність перших трьох електростанцій дорівнює

$$P_{1,2,3}^o = 5 - 1 = 4.$$

Тоді, використовуючи дані табл. 4.7, одержуємо $P_3^o = 3$. Сумарна потужність перших двох електростанцій

$$P_{1,2}^O = 4 - 3 = 1.$$

Використовуючи $P_{1,2}^O = 1$, із табл. 3.7 знаходимо $P_2^O = 0$. Звідси $P_1^O = 1$.

У такий спосіб оптимальна потужність першої електростанції дорівнює:

$$P_1^O = 1 \text{ в.о.} = 600/5 = 120 \text{ МВт};$$

третьої електростанції :

$$P_3^O = 3 \text{ в.о.} = 3 \cdot 600/5 = 360 \text{ МВт};$$

і четвертої електростанції:

$$P_4^O = 1 \text{ в.о.} = 600/5 = 120 \text{ МВт};$$

В другому пункті спорудження електростанції є нерациональним.

Розділ 5. ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗВИТКУ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАДІЄНТНИХ МЕТОДІВ

5.1. Градієнтні методи

Комплексна оптимізація встановлених режимів електричних систем передбачає визначення найвигіднішого розподілу активних та реактивних потужностей між електростанціями та регульованими джерелами реактивної потужності, розрахунок напруг окремих пунктів електричної мережі та оптимальних значень комплексних коефіцієнтів трансформації силових та вольтододаткових трансформаторів, а також вибір заходів щодо оптимізації конфігурації електричної мережі. При цьому розглядається електрична система сучасного рівня складності, яка складається з джерел енергії, електричної мережі та навантажень, що володіє засобами регулювання активними та реактивними потужностями, коефіцієнтами трансформації та яка нараховує в своїй схемі заміщення до декількох сотень пунктів та ділянок.

В загальному випадку задача комплексної оптимізації режимів складних електричних систем можна сформулювати наступним чином [63,65,94].

Мінімізувати функцію

$$f(X), X \in E^n$$

при наявності S нелінійних обмежень у вигляді рівностей

$$h_s(X) = W_s(X) - W_s, \quad s=1, 2, \dots, S \quad (5.1)$$

та I нелінійних та нелінійних обмежень у вигляді нерівностей

$$g_i(X) \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, S \quad (5.2)$$

Функція $f(X)$ – залежні від режиму експлуатаційні витрати на виробництво і розподіл електричної енергії. Окрім того, тут може враховуватися збиток споживачів, обумовлений відхиленням параметрів режиму від допустимих значень та порушеннями електропостачання.

Обмеження типу нерівностей (5.2) пов'язані з умовами регулювання незалежних змінних

$$x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad j=1, 2, \dots, J$$

і залежних характеристик режиму

$$\varphi_p^{\min} \leq \varphi_p \leq \varphi_p^{\max}, \quad p=1, 2, \dots, P$$

Для спрощення подальших міркувань тимчасово допустимо, що задача оптимізації встановлених режимів електричних систем, яка розглядається, має лише обмеження у вигляді рівностей (5.2). За цих умов загальна задача нелінійного програмування зводиться до мінімізації

$$f(X), X \in E^n$$

при наявності обмежень у вигляді рівностей

$$h_s(X) = W_s(X) - W_s, \quad s=1, 2, \dots, S.$$

Обмеження (5.2) будемо враховувати при розрахунку встановленого режиму на кожному кроці оптимізації для фіксованих значень вектору незалежних змінних оптимізації X^k .

Якщо функція $f(X)$ неперервна та диференційована, то напрямок її максимального збільшення при русі з точки багатомірного простору $X^{(k)}$ співпадає з напрямком вектора градієнта $\nabla f(X^{(k)})$, який визначається як вектор-стовпець часткових похідних функції $f(X)$ за параметрам X , який варіюється.

Вектор градієнта в точці $X^{(k)}$ має вигляд

$$\nabla f(X)^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_1} \\ \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_2} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_I} \end{bmatrix}$$

Для мінімізації цільової функції необхідно здійснювати рух в напрямку, протилежному напрямку градієнта, тобто у напрямку антиградієнта. На рис. 5.1 показані градієнт та напрямок швидшого спуску в різних точках простору.

Перехід із точки простору $X^{(k)}$ в точку $X^{(k+1)}$ в алгоритмі швидшого спуску описується співвідношенням

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda^{(k)} \nabla f(X)^{(k)}, \quad (5.3)$$

де $\lambda^{(k)}$ – коефіцієнт довжини k -го кроку процесу оптимізації.

Оскільки мінімум цільової функції $f(X)$ не досягається за один крок спуску, перехід (5.3) повинен повторюватись необхідну кількість разів.

Оптимальний коефіцієнт довжини кроку $\lambda^{(k)}$ може визначатися в кожній із точок траєкторії руху чисельними або аналітичним рішенням рівняння

$$\frac{\partial f(X^{(k)} - \lambda^{(k)} \nabla f(X^{(k)}))}{\partial \lambda} = 0. \quad (5.4)$$

Для розв'язку (5.4) аналітичним методом розкладемо цільову функцію в ряд Тейлора, обмежившись першими трьома членами розкладу

$$f(X)^{(k+1)} = f(X^{(k)}) - \nabla f^T(X)(X^{(k+1)} - X^{(k)}) + \frac{1}{2}(X^{(k+1)} - X^{(k)}); \\ H(X^{(k)})(X^{(k+1)} - X^{(k)}). \quad (5.5)$$

Підставивши (5.3) у (5.5), отримаємо

$$f(X)^{(k+1)} = f(X^{(k)}) - \lambda^{(k)} f^T(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)}) + \frac{1}{2}(\lambda^{(k)})^2; \\ H(X)^{(k)} \nabla f(X)^{(k)}. \quad (5.6)$$

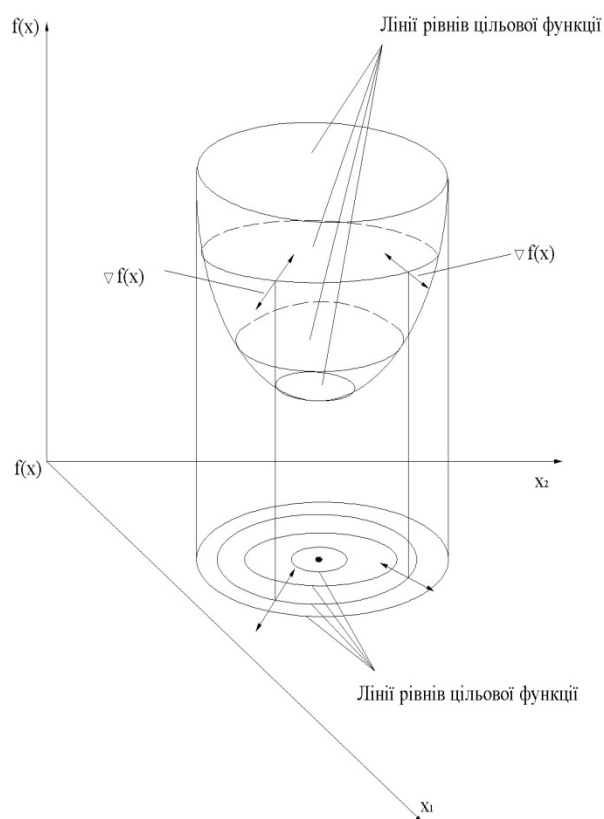


Рис.5.1. Напрямки вектору градієнта в різних точках простору

Якщо продиференціювати (5.6) по $\lambda^{(k)}$, прирівняти похідну до нуля та розв'язати отримане рівняння відносно $\lambda^{(k)}$, виникає відома формула для визначення оптимального коефіцієнту кроку

$$\lambda_{opt}^{(k)} = \frac{\nabla^T f(X)^{(k)} \nabla f(X)^{(k)}}{\nabla^T f(X)^{(k)} H(X^{(k)}) \nabla f(X)^{(k)}}, \quad (5.7)$$

де $H(X^{(k)})$ – матриця Гессе, яка представляє собою квадратну матрицю других часткових похідних $f(X^{(k)})$ в точці $X^{(k)}$:

$$H(X^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_I} \\ \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial x_2 \partial x_I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial x_I \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial x_I \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial x_I^2} \end{bmatrix}$$

Проте такий спосіб визначення $\lambda_{opt}^{(k)}$ не отримав достатнього розповсюдження при розв'язку оптимізаційних електроенергетичних задач,

оскільки потребує визначення на кожному кроці оптимізації матриці Гессе, що значно збільшує витрати пам'яті обчислювальної техніки та час розрахунку.

Ширше використовуються чисельні методи розв'язку (5.7) засновані на квадратичній апроксимації цільової функції. В цьому випадку для визначення $\lambda_{onm}^{(k)}$ необхідно виконати з k -ї точки два пробних кроки у напрямку антиградієнта с коефіцієнтами $\lambda_2^{(k)}$ та $\lambda_3^{(k)}$. У початковій k -й точці пошуку, тобто при $\lambda_1^{(k)} = 0$ цільова функція рівна $f(X)^{(k)}$, а після виконання пробних кроків – відповідно $f(\lambda_2)^{(k)}$ та $f(\lambda_3)^{(k)}$. Допустивши, що цільова функція квадратична відносно $\lambda^{(k)}$, знайдемо оптимальний коефіцієнт довжини кроку

$$\lambda_{onm}^{(k)} = \frac{1}{2} \frac{\left[(\lambda_2^{(k)})^2 - (\lambda_3^{(k)})^2 \right] f(X)^{(k)} + (\lambda_3^{(k)})^2 f(\lambda_2^{(k)}) - (\lambda_2^{(k)})^2 f(\lambda_3^{(k)})}{(\lambda_2^{(k)} - \lambda_3^{(k)}) f(X)^{(k)} + (\lambda_3^{(k)}) f(\lambda_2^{(k)}) - \lambda_2^{(k)} f(\lambda_3^{(k)})}.$$

Процедура швидшого спуску закінчується в точці, в якій складові градієнта рівні нулю. Інколи необхідно перевірити, чи є дана точка локальним мінімумом, в протилежному випадку – «сідловою» точкою. З цією метою виконується дослідження матриці Гессе. Якщо вона додатньо визначена, то дана точка є локальним мінімумом, у протилежному випадку – «сідловою» точкою. Для виходу з «сідлової» точки можна використовувати будь-який неградієнтний метод. Наприклад, метод покоординатного пошуку. Далі оптимізація продовжується в такий самий спосіб. Траєкторія оптимізації функції $f(X)$ при використанні методу швидшого спуску показана на рис. 4.1

Використання методу швидкого спуску ускладнене у випадку витягнутого гіперпростору, коли лінії рівнів цільової функції утворюють витягнутий «яр». В цьому випадку напрямок антиградієнта майже ортогональний напрямку досягнення мінімуму $f(X)$ і розв'язок задачі або потребує значних витрат часу розрахунку, або взагалі не може бути отриманий. В цьому випадку процедура швидшого спуску покращується масштабуванням складових градієнта. При цьому перехід від точки $X^{(k)}$ до точки $X^{(k+1)}$ описується виразом:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \xi^{(k)} a_{jd} \nabla f(X^{(k)}), \quad (5.8)$$

де $\xi^{(k)}$ – коефіцієнт довжини кроку; a_{jd} – діагональна матриця масштабуючих множників.

Окрім того, для ефективного розв'язку задачі у випадку «ярової» цільової функції можна використовувати методи, які засновані на визначенні других часткових похідних. Наприклад, метод Ньютона. Проте методи цієї групи потребують на кожному кроці розрахунку других часткових похідних та обернення матриці Гессе, розмір якої достатньо великий. Це обумовлює збільшення часу розв'язку задачі оптимізації.

5.2.Методи сполучених градієнтів.

Для мінімізації диференційованої функції $f(X)$ доцільно використати методи, збіжність яких у ряді випадків майже така сама, як і в квазіньютонівських методах [102, 135].

Введемо визначення. Пара лінійно незалежних напрямків пошуку $s^{(i)}$ та $s^{(j)}$ називається спряженою відносно деякої квадратичної додатньо визначеної матриці Q , якщо виконується умова $(s^{(i)})^T Q s^{(j)} = 0$. Квадратична цільова функція

$$f(X) = (d, X) + \frac{(X, AX)}{2}, \quad X \in E^n; d \in E^n. \quad (5.9)$$

може бути мінімізована за кінцеву кількість кроків, які не перебільшують число незалежних змінних оптимізації, якщо кроки виконуються в спряжених напрямках.

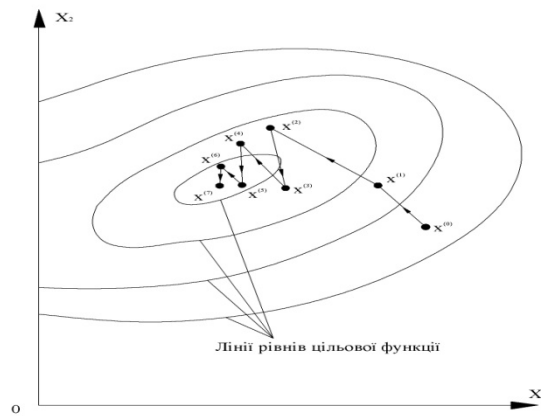


Рис.5.2. Спряжені напрямки в різних точках простору

При цьому порядок використання цих напрямків не має значення [135]. В (5.9) d, X – скалярний добуток векторів d та X ; A – симетрична додатково визначена матриця.

Існує ряд модифікацій методів спряжених напрямків. Деякі з них визначають напрямок пошуку екстремуму тільки по значенням самої функції, другі потребують розрахунку складових градієнта. Алгоритми, в яких для побудови спряжених напрямків використовуються часткові похідні, отримали назву методів спряжених градієнтів. Методи цієї групи використовуються навіть тоді, коли цільова функція $f(X)$, яка має мінімізуватися, не є опуклою.

Серед методів спряжених градієнтів найбільш розповсюджені алгоритми Флетчера – Рівса [9] та Полака – Ріб'єра [9,10]. Обидва алгоритми будують послідовність напрямків пошуку s^{ck} , які є лінійними комбінаціями вектора градієнта - $\nabla f(X)^{(k)}$ та передуючих напрямків пошуку $s^{(0)}, s^{(1)}, \dots, s^{(k-1)}$. Коефіцієнти напрямку $\omega_{(k)}$ обираються таким чином, щоб зробити напрямок спряженим. Для розрахунку $\omega_{(k)}$ використовуються вектори $\nabla f(X)^{(k)}$ та $\nabla f^{(k-1)}$.

У вищезгаданих алгоритмах для знаходження напрямку пошуку використовується вираз $s^{(k)} = -\nabla f(X)^{(k)} + s^{(k-1)}\omega_k$. Для алгоритму Флетчера-Рівса коефіцієнт напрямку розраховується по формулі

$$\omega_k = \frac{(\nabla f(X^{(k)}), \nabla f(X^{(k)}))}{(\nabla f(X^{(k-1)}), \nabla f(X^{(k-1)}))}, \quad (5.10)$$

а для алгоритму Полака-Рібьєра

$$\omega_k = \frac{(\nabla f(X^{(k)}) - \nabla f(X^{(k-1)}), \nabla f(X^{(k)}))}{(\nabla f(X^{(k-1)}), \nabla f(X^{(k-1)}))}. \quad (5.11)$$

У випадку мінімізації квадратичної цільової функції формули (5.10) та (5.11) співпадають. Питання щодо ефективності використання того чи іншого алгоритму стосовно функцій інших типів вимагає відповідних спеціальних досліджень.

Розглянемо питання щодо використання алгоритмів спряжених градієнтів для розв'язку задач оптимізації встановлених режимів електричних систем. При цьому у якості критерія оптимальності використовується функція $f(X)$, яка представляє собою експлуатаційні витрати на виробництво та розподіл електричної енергії. Якщо структура функції задовольняє вимогам унімодалності, неперервності та однократної диференційованості, то алгоритм Флетчера – Рівса можна записати таким чином.

1. Задаємо початкове наближення вектора незалежних змінних оптимізації $X^{(k)}$,
2. У якості напрямку пошуку обираємо напрямок антиградієнта в k -й точці простору: $s^{(k)} = -\nabla f(X)^{(k)}$,
3. Визначаємо оптимальний коефіцієнт довжини кроку, при якому

$$f(X^{(k)} + \xi_{i\bar{i}\bar{o}}^{(k)} a_{j\bar{j}\bar{a}} s^{(k)}) = \min \{ f(X^{(k)} + \xi^{(k)} a_{j\bar{j}\bar{a}} s^{(k)}) / \xi > 0 \},$$

де вираз у правій частині означає – мінімізувати функцію

$$f(X^{(k)} + \xi^{(k)} a_{j\bar{j}\bar{a}} s^{(k)}) \text{ при умові } \xi^{(k)} > 0.$$

4. Виконуємо крок в напрямку пошуку $S^{(k)}$ з оптимальним коефіцієнтом довжини кроку

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \xi_{i\bar{i}\bar{o}}^{(k)} a_{j\bar{j}\bar{a}} s^{(k)}.$$

5. Перевіряємо закінчення процесу оптимізації $\|\nabla f(X)^{(k+1)}\| \leq \varepsilon$, де $\|\nabla f(X)^{(k+1)}\|$ – норма вектору $f(X)^{(k+1)}$,

$$\|\nabla f(X)^{(k+1)}\| = \sqrt{(\nabla f(X)^{(k+1)}, \nabla f(X)^{(k+1)})}.$$

Якщо нерівність виконується, то ПУ 8, якщо НІ, то ПУ 6.

6. Визначаємо напрямок пошуку, спряжений попередньому,

$$s^{(k+1)} = -\nabla f(X)^{(k+1)} + s^{(k)} \frac{(\nabla f(X)^{(k+1)}, \nabla f(X)^{(k+1)})}{(\nabla f(X)^{(k)}, \nabla f(X)^{(k)})}.$$

7. Змінюємо номер кроку оптимізації $k=k+1$ та ПУ 3.
8. Кінець.

У пункті 3 алгоритму для визначення оптимального коефіцієнту довжини кроку може використовуватись будь-який з методів одномірного простору. Якщо

обраний метод заснований на проведенні квадратичної апроксимації цільової функції після виконання двох пробних кроків в напрямку пошуку, то вираз для розрахунку $\xi_{i\bar{i}\bar{o}}^{(k)}$ буде аналогічно (П.12).

$$\xi_{i\bar{i}\bar{o}}^{(k)} = \frac{1}{2} \frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2) f(X^{(k)}) + \xi_2^2 f_1(X^{(k)}) - \xi_1^2 f_2(X^{(k)})}{(\xi_1 - \xi_2) f(X^{(k)}) + \xi_2 f_1(X^{(k)}) - \xi_1 f_2(X^{(k)})},$$

де ξ_1 та ξ_2 – коефіцієнти довжини першого та другого пробних кроків; $f(X^{(k)})$ та $f_1(X^{(k)})$, $f_2(X^{(k)})$ – цільова функція відповідно в точці $X^{(k)}$ та після виконання пробних кроків.

Для зменшення погрішності квадратичної апроксимації коефіцієнти пробних кроків можуть обиратися у відповідності з алгоритмом, що був розглянутий вище. Так як оптимальний коефіцієнт $\xi_{i\bar{i}\bar{o}}^{(k)}$ знаходиться наближено, порушуючи умови, які гарантують збіжність принципової форми алгоритму. Тому для того, щоб уникнути відмови метода рекомендується через деяку кількість кроків P приймати в якості напрямку пошуку не напрямок, який спряжений з попереднім, а сам напрямок антиградієнта. Цю процедуру називають «відновленням» або «оновленням» алгоритму. При цьому $P=J+1$, де J – число незалежних змінних оптимізації.

Алгоритм Полака – Ріб'єра відрізняється від вище згаданого способом визначення спряжених напрямків. Пункт 6 алгоритму в цьому випадку використовує вираз

$$s^{(k+1)} = -\nabla f(X)^{(k+1)} + s^k \frac{(\nabla f(X^{(k+1)}) - \nabla f(X^{(k)}), \nabla f(X^{(k+1)}))}{(\nabla f(X^{(k)}), \nabla f(-X^{(k)}))}. \quad (5.12)$$

При використанні (5.12) напрямок пошуку s^k лежить усередині фіксованого конуса навколо $\nabla f(X^{(k)})$, в той час як алгоритмі Флетчера – Рівса кут конуса зростає разом з номером кроку оптимізації. Тому алгоритм Полака – Ріб'єра більш стійкий до накопичення помилок. Це особливо важливо при використанні методів одночасного пошуку оптимального коефіцієнта кроку.

5.3. Врахування обмежень. Методи зовнішніх та внутрішніх штрафних функцій.

При оптимізації встановлених режимів електричних систем задача мінімізації функції витрат на виробництво та розподіл електричної енергії $f(X)$ розв'язується за наявності обмежень у вигляді у вигляді рівностей (5.1) та нерівностей (5.2). При цьому нерівності, в свою чергу, можуть бути розділені на обмеження, пов'язані з умовами регулювання незалежних змінних та функціональні обмеження. При розв'язанні задачі оптимізації обмеження рівності враховуються в процесі розрахунку встановленого режиму на кожному кроці розрахункового процесу з отриманими компонентами вектора $X^{(k)}$. Для врахування обмежень за незалежними змінними, як правило, використовується метод утримуючих обмежень, який походить від загального методу Лагранжа [3,9], а для задоволення функціональних обмежень найбільш часто використовується метод штрафних функцій [9].

Суть методу утримуючих обмежень полягає в наступному. Починаємо від точки простору, яка задовольняє всі обмеження, виконуємо крок спуску та перевіряємо дотримання обмежень в новій точці. Обмеження, яку не виконуються у цій точці, називаються утримуючими. Щоб задовольнити їх, фіксуємо відповідні змінні на порушених межах та виконуємо новий крок спуску. Далі необхідно уточнити склад утримуючих обмежень. У залежності від значень часткових похідних обмеження, які раніше були включені в склад утримуючих, можна виключити з розгляду. Одночасно можуть виникати нові утримуючі обмеження і т.д.

Для врахування утримуючих обмежень при $x_j < x_j^{\min}$ змінна x_j приймається рівною порушеній межі $x_j^{\min}$, а при $x_j > x_j^{\max}$ – рівній $x_j^{\max}$. Якщо змінна раніше була зафіксована на межі $x_j^{\min}$, то обмеження виключається зі складу утримуючих при виконанні умови $\partial f(X)/\partial x_j < 0$. Якщо змінна зафіксована на межі $x_j^{\max}$, то умова виключення даного обмеження зі складу утримуючих має вигляд $\partial f(X)/\partial x_j > 0$.

Суть методу зовнішніх штрафних функцій полягає в перетворенні задачі нелінійного програмування в послідовність задач, кожна з яких не має обмежень. Для цього в цільову функцію вводиться функція штрафу $P(X)$, яка рівна нулю, якщо виконуються задані обмеження, і різко зростає при виході з допустимої області. Таким чином, функція, що мінімізується

$$\bar{\Phi} = f(X) + P'(X). \quad (5.13)$$

При цьому штрафна функція апроксимується послідовності функцій вигляду

$$P^{(k)}(X) = \frac{1}{\beta^{(k)}} \sum_{i=1}^l (\min[g_i(X), 0])^2 \quad (5.14)$$

де $g_i(X)$ – лінійне або нелінійне обмеження у вигляді нерівності; вираз у квадратних дужках рівний нулю при дотриманні i -го обмеження або відрізняється від нуля в протилежному випадку.

При початковому значенні $\beta^{(1)}$ визначають точку мінімуму функції (5.13) $X^{(1)}$. Потім знову знаходять $\beta^{(2)}$ і визначають точку мінімуму функції (5.13) $X^{(2)}$ і т.д. Межа послідовності $X^{(k)}$ – розв'язок задачі нелінійного програмування. Якщо всі $\beta^{(k)}$ додатні, то кожний наступний коефіцієнт менший попереднього $\beta^{(k)} > \beta^{(k+1)}$ і при прямуванні номера коефіцієнта до нескінченності межа послідовності коефіцієнтів рівна нулю. На рис. показані зовнішні штрафні функції.

Таким чином, при використанні методу зовнішніх штрафних функцій в цільову функцію вводиться функція штрафу $P'(X)$, яка накладає штраф за вихід із допустимої області. Метод відрізняє простота алгоритму, можливість отримати розв'язок при несумісних обмеженнях. Недоліком є те, що в процесі оптимізації будуються точки, які лежать за межами допустимої області. Окрім того, якщо в будь-якій точці пошуку не порушені ніякі обмеження, то штрафні функції та їх похідні рівні нулю до тих пір, поки не будуть порушені межі допустимої області. Це робить процес оптимізації некерованим всередині області розв'язку.

Рідше для врахування обмежень у вигляді нерівностей використовується метод внутрішніх штрафних функцій, який інколи називають методом бар'єрів

[9]. При його використанні функція штрафу апроксимується послідовністю функцій

$$P^{(k)}(X) = \beta^{(k)} \sum_{i=1}^I \frac{1}{g_i(X)}, g_i(X) > 0 \text{ при } i=1,2,\dots,I \quad (5.15)$$

При врахуванні обмежень методом внутрішніх штрафних функцій початкова точка пошуку повинна знаходитись всередині допустимої області. Внаслідок того, що функція вигляду (5.15) зростає при наближенні до границь допустимої області, усі випрацьовані точки пошуку $X^{(k)}$ також будуть знаходитись всередині області розв'язку. Таким чином, забезпечується управління процесом оптимізації всередині допустимої множини. Внутрішні штрафні функції показані на рис. 5.3.

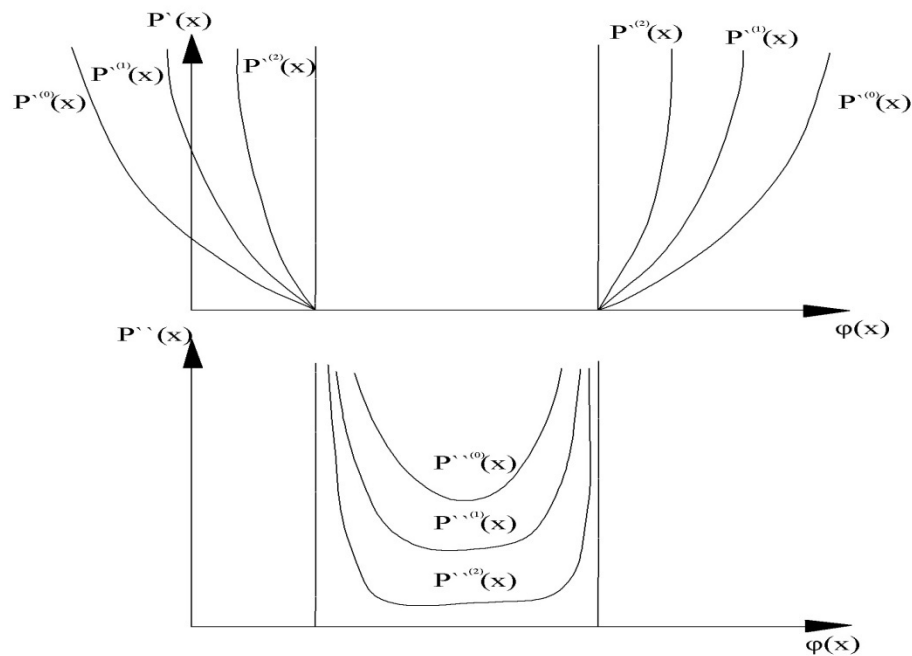


Рис.5.3. Зовнішні та внутрішні штрафні функції

Суттєвим недоліком методу є те, що в початковій точці пошуку $X^{(0)}$ повинні виконуватись всі обмеження вигляду нерівностей, а при розв'язку оптимізованих електроенергетичних задач ця умова практично не виконується. Окрім того, всі внутрішні штрафні функції не рівні нулю, а це значно ускладнює розрахунок градієнта штрафної функції в порівнянні з методом зовнішніх штрафних функцій.

5.4. Комбінований метод штрафних функцій.

Для врахування функціональних обмежень при оптимізації режимів електричних систем доцільно використовувати комбінований метод штрафних функцій, який дозволяє призначати як зовнішні штрафи при порушенні обмежень так і внутрішні при наближенні до границь допустимої області [3,9]. При цьому обмеження по незалежним змінним враховуються з допомогою методу утримуючих обмежень. При використанні комбінованого методу штрафних функцій задача оптимізації режиму перетворюється в послідовність задач, кожна із яких не має обмежень. З цією метою множина індексів усіх функціональних обмежень розбивається на дві підмножини. Перша з них включає в себе індекси обмежень, яку були порушені

$$A = \{p \in \{1, 2, \dots, P\} \mid \varphi_p(X) \geq \varphi_p^{\max} \text{ або } \varphi_p(X) \leq \varphi_p^{\min}\}, \quad (5.16)$$

а друга – індекси обмежень, які виконані в початковій точці пошуку

$$B = \{p \in \{1, 2, \dots, P\} \mid \varphi_p^{\min} < \varphi_p < \varphi_p^{\max}\}, \quad (5.17)$$

Цільова функція, що мінімізується, записується у вигляді

$$\bar{\Phi}(X) = f(X) + \frac{1}{\varepsilon'} P'(X) + \varepsilon'' P''(X), \quad (5.18)$$

де ε' та ε'' – коефіцієнти штрафу.

Зовнішні штрафні функції назначають штрафи при порушенні обмежень, індекси яких входять у підмножину A :

$$P'(X) = \sum_{p \in A} (\varphi_p(X) - \varphi_p^{np})^2, \quad (5.19)$$

де $\varphi_p(X)$ – залежні характеристики режиму в точці пошуку, що розглядається; $\varphi_p^{i\delta}$ – порушена межа зміни p -ї характеристики.

Внутрішні штрафні функції назначають штрафи при наближенні залежних характеристик до меж допустимої області та визначаються для обмежень, індекси яких входять у підмножину B ,

$$P''(X) = \sum_{p \in B} \left(\frac{1}{\varphi_p(X) - \varphi_p^{\min}} + \frac{1}{\varphi_p^{\max} - \varphi_p(X)} \right). \quad (5.20)$$

Початкові значення коефіцієнтів штрафу ε' та ε'' розглядаються на першому циклі оптимізації як відношення довжин векторів $\nabla f(X)$, $\nabla P'(X)$ до $\nabla P''(X)$ та розраховуються по формулам

$$\varepsilon'^{(1)} = \frac{\|\nabla P'(X)\|}{\|\nabla f(X)\|}; \quad \varepsilon''^{(1)} = \frac{\|\nabla f(X)\|}{\|\nabla P''(X)\|}.$$

При визначенні кожної точки відносно мінімуму функції $\bar{\Phi}(X)$ розраховуються нові значення коефіцієнтів. При цьому всі вони повинні бути додатні, значення кожного наступного коефіцієнту має бути менше значення попереднього та межа послідовності коефіцієнтів при прямування номеру коефіцієнта до нескінченності має бути рівною нулю.

В цілому процес оптимізації будується наступним чином. При початкових значеннях $\varepsilon'^{(1)}$ та $\varepsilon''^{(1)}$ визначаємо точку мінімуму функції (5.18) $X^{(1)}$. В отриманій

точці перевіряється виконання обмежень по незалежним змінним. Обмеження, які не задовольняються в цій точці, називаються утримуючими. Для того щоб задовольнити їх, фіксуємо відповідні компоненти вектора X на порушених межах. Потім знаходимо нові коефіцієнти $\varepsilon^{(2)}$ та $\varepsilon''^{(2)}$ і знову визначаємо точку відносно мінімуму цільової функції $X^{(2)}$. Далі необхідно уточнити склад утримуючих обмежень. В залежності від значень часткових похідних $\frac{\partial \bar{\Phi}(X^{(k)})}{\partial x_j}$ деякі

обмеження, які раніше були включені у склад утримуючих, можна виключити з розгляду. Якщо їх склад залишився незмінним та функціональні обмеження враховані, то на цьому оптимізаційний процес завершується. Якщо ні, то необхідно знову розрахувати коефіцієнти штрафу, визначити положення точки відносного мінімуму функції (5.18), уточнити склад уточнюючих обмежень і т.д. Таким чином, для врахування обмежень при оптимізації встановлених режимів електричних систем може використовуватись комбінований алгоритм, в якому обмеження по незалежним змінним оптимізації враховуються за допомогою метода утримуючих обмежень, а обмеження по залежним змінним – за допомогою комбінації методів внутрішніх та зовнішніх штрафних функцій. Роблячи висновок, записуємо алгоритм оптимізації функції експлуатаційних витрат на виробництво та розподіл електричної енергії $f(X)$ при наявності обмежень у вигляді рівностей (5.1) та нерівностей (5.2).

1. Задаємо початкові значення регульованих параметрів $X^{(k)}$, враховуючи $k=1$, $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon^{(0)}$. Початкове значення $x_j^{(k)}$ обираємо таким чином, щоб для всіх $j=1,2,\dots,I$ виконувались обмеження нерівності.

2. За допомогою виразів (5.16) та (5.17) визначаємо множини індексів A та B .

3. Зовнішні та внутрішні штрафні функції $P'(X)$ та $P''(X)$ знаходимо за (5.19) та (5.20).

4. Якщо $k=1$, то знаходимо складові градієнта $\nabla f(X)$, $\nabla P'(X)$ та $\nabla P''(X)$, розраховуємо коефіцієнти штрафу зовнішніх та внутрішніх штрафних функцій ε' та ε'' .

5. Визначаємо цільову функцію

$$\bar{\Phi}(X^{(k)}) = f(X^{(k)}) + \frac{1}{\varepsilon'} P'(X^{(k)}) + \varepsilon'' P''(X^{(k)}).$$

6. Виконуємо мінімізацію функції $\bar{\Phi}(X)^{(k)}$. Оптимізація функції закінчується, якщо виконується нерівність $\|\nabla \bar{\Phi}(X)^{(k)}\| \leq \varepsilon^{(k)}$. Для оптимізації доцільно використовувати будь-який градієнтний метод. В цьому випадку складові вектора градієнта визначаються по формулі

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial P'(X^{(k)})}{\partial x_j} + \varepsilon'' \frac{\partial P''(X^{(k)})}{\partial x_j}.$$

7. Уточнюємо склад утримуючих обмежень. При цьому, якщо в точці відносного мінімуму порушено j -е обмеження вигляду (П.3), то данна змінна фіксується на порушеній межі $x_j^{\min}$ або $x_j^{\max}$. Якщо на будь-якому з попередніх циклів оптимізації j -а змінна зафіксована на межі $x_j^{\min}$, то вона знову включається

у склад варійованих при виникненні співвідношення $\partial\bar{\Phi}(X)^{(k)}/\partial X_j < 0$, а якщо змінна зафіксована на межі $+x_j^{\max}$, то вона переводиться в склад варійованих при $\partial\bar{\Phi}(X)^{(k)}/\partial X_j > 0$.

8. Якщо склад утримуючих обмежень не змінився, то ПУ 9, якщо ні, то ПУ 10.

9. Перевіряємо закінчення процесу оптимізації $\frac{1}{\varepsilon'} P'(X) \leq \varepsilon'_0$; $\varepsilon'' P''(X) < \varepsilon''_0$.

Якщо нерівності виконуються, то ПУ 11, якщо ні, то ПУ 10.

10. Розраховуємо нові значення точності оптимізації та коефіцієнтів штрафних функцій

$$\varepsilon^{(k+1)} = \max \{ \alpha \varepsilon^{(k)}, \varepsilon_{\min} \}; \quad \varepsilon' = \alpha' \varepsilon'; \quad \varepsilon'' = \alpha'' \varepsilon'', \quad (5.21)$$

змінюється номер циклу оптимізації $k=k+1$ та ПУ 2. Коефіцієнти α , α' та α'' в (5.21) обираюся в загальному випадку у межах 0 – 0,5.

Точність оптимізації функції $\Phi(X)^{(k)}$ в пункті 6 даного алгоритму $\varepsilon^{(k)}$ змінюється в процесі розрахунку у відповідності з виразом (5.21). При цьому вона не повинна виявитися менше заданої точності розв'язку задачі оптимізації $\varepsilon_{\min}$, обумовленої при реалізації алгоритму. Окрім того, для забезпечення закінчення розрахунку при несумісності обмежень (5.1) та (5.2) має бути обмежено число циклів оптимізації.

Розглянутий алгоритм, який базується на використанні комбінованого методу штрафних функцій, забезпечує врахування обмежень при оптимізації режимів електричних систем, має достатню швидкість збіжності та потребує незначних витрат пам'яті ЕОМ.

5.5. Розрахунок складових вектора градієнта

При використанні для оптимізації встановлених режимів електричних мереж найбільш перспективних градієнтних методів основна складність полягає у визначенні компонент вектора градієнта $\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X}$, де X – вектор регульованих параметрів режиму, у склад якого входять активні та реактивні потужності пунктів.

Часткові похідні можна розраховувати за допомогою методу чисельного диференціювання. В цьому випадку необхідно визначити приріст цільової функції $\Delta\Phi$, який відповідає зміні регульованого параметру Δx_j . Шукана часткова похідна $\partial\Phi/\partial x_j$ приймається рівною відношенню $\Delta\Phi/\Delta x_j$.

Даний метод потребує витрат машинного часу, так як необхідно розраховувати встановлений режим електричної системи при визначенні кожної складової градієнту. Окрім того, при знаходженні часткових похідних повинна забезпечуватися висока точність розрахунку режиму – небаланси потужності у вузлах повинні бути значно менше отриманого приросту втрат. Тому на

сьогоднішній день для розрахунку складових градієнту метод чисельного диференціювання практично не використовується.

Зважаючи на складність точного визначення часткових похідних на перших етапах використання комп'ютерів широке розповсюдження отримали різні наближені методи, в яких використовуються спрощенні формули, матрицю z -опорів, матриці чуттєвості та ін. [8,10].

Точні алгоритми розрахунку часткових похідних, які потрібні для отримання точних результатів оптимізації та оцінки справедливості спрощуючих допущень, що приймаються в наближених методах, засновані на правилах диференціювання складних та неявних функцій. Розглянемо два види розрахункових виразів для визначення похідних цільової функції по вектору регульованих параметрів.

Для розрахунку градієнта цільової функції Φ по вектору потужностей пунктів X використовується вираз

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial X}, \quad (5.22)$$

де вектор $\frac{\partial \Phi}{\partial Y}$ визначається диференціюванням функції Φ з явної залежності $\Phi(Y)$; Y – вектор залежних параметрів режиму, в склад якого входять модулі та кути напруг пунктів мережі; $\frac{\partial Y}{\partial X}$ – матриця часткових похідних від залежних параметрів режиму по незалежним.

Нехай нелінійні рівняння встановленого режиму записані у вигляді

$$\varepsilon X = X(Y) - X = 0, \quad (5.23)$$

де εX – вектор небалансів потужності у вузлах мережі; $X(Y)$ – явні функції незалежних параметрів режиму від складових вектора Y .

Шукана матриця $\partial Y / \partial X$ визначається з рівняння

$$\frac{\partial \varepsilon X}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial X} = - \frac{\partial \varepsilon X}{\partial X} = \frac{\partial X}{\partial X},$$

де $\frac{\partial X}{\partial X}$ – одинична матриця, так як її коефіцієнти представляють собою часткові похідні вигляду $\frac{\partial x_s}{\partial x_j}$, які при $s=j$ рівні 1, а при $s \neq j$ – нулю.

Позначивши одиничну матрицю I , отримаємо

$$\frac{\partial X(Y)}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial X} = I, \quad (5.24)$$

Перший метод визначення часткових похідних від втрат потужності в мережі базується на використанні рівняння (5.24) у сукупності з виразом (5.22).

Розглянемо основні положення другого методу. Визначимо з (5.24) матрицю похідних від залежних параметрів по незалежним

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \left(\frac{\partial X(Y)}{\partial Y} \right)^{-1}, \quad (5.25)$$

де $(\partial X(Y) / \partial Y)$ – обернена матриця.

Підставивши (5.25) у (5.22), знаходимо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \left(\frac{\partial X(Y)}{\partial Y} \right)^{-1}.$$

Транспонуючи матрицю $(\partial X(Y)^{-1} / \partial Y)$, вектори $\partial \Phi / \partial X$ та $\partial \Phi / \partial Y$, отримаємо

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)^T = \left[\left(\frac{\partial X(Y)}{\partial Y} \right)^{-1} \right]^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)^T.$$

Перетворюючи останній вираз до вигляду...

$$\left(\frac{\partial \hat{O}}{\partial Y} \right)^T = \left[\left[\left(\frac{\partial \hat{O}(Y)}{\partial Y} \right)^{-1} \right]^T \right]^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \hat{O}}{\partial X} \right)^T,$$

знаходимо рівняння для розрахунку шуканих частинних похідних

$$\left(\frac{\partial \hat{O}(Y)}{\partial Y} \right)^{\hat{O}} \cdot \left(\frac{\partial \hat{O}}{\partial X} \right)^T = \left(\frac{\partial \hat{O}}{\partial Y} \right)^T. \quad (5.26)$$

Другий метод визначення частинних похідних від Φ по потужностям пунктів ґрунтується на розв'язку рівняння (5.26).

Застосування перших виразів потребує великої кількості обчислювальних операцій для розрахунку складової градієнта. Крім того, необхідно зберігати в повнозаповнену матрицю частинних похідних від залежних параметрів режиму незалежних $\frac{\partial Y}{\partial X}$. Однак необхідно відмітити, що дана матриця дозволяє прискорити процес оптимізації в цілому.

Розділ 6. ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗВИТКУ ЕЛЕКТРИЧНИХ МЕРЕЖ ЕНЕРГОСИСТЕМ

6.1. Постановка задачі оптимізації розвитку електричних мереж

При оптимізації розвитку електричних мереж енергосистем вибираються напруга й конфігурація мереж, встановлюється черговість спорудження об'єктів електромереж.

Критерій оптимальності при оптимізації - це сума динамічних зведених витрат по всіх елементах мереж. При рішенні повинні бути враховані динаміка розвитку мереж енергосистем, вимоги до надійності і якості енергопостачання, обмеження по пропускній здатності ліній електропередачі й трансформаторних підстанцій.

Розглянута задача вирішується при заданому плані вводу генеруючих потужностей. Основні дані при оптимізації - рівні навантажень електричної мережі на різних етапах її розвитку; розрахункова схема електричної мережі, що включає в себе існуючі й намічувані до спорудження лінії електропередачі й підстанції; технічні характеристики й вартісні показники елементів мережі.

Рішення такої складної задачі як оптимізація розвитку електричних мереж енергосистем можливе тільки на основі розчленування загальної задачі на окремі частини, які вирішують незалежно з наступним узгодженням одержаних результатів. Прикладом такої розбивки може бути поділ задач проектування енергосистем по територіальній ознаці, що засновано на розподілі єдиної енергетичної системи на об'єднані й районні енергосистеми.

Розглянуті методи оптимізації конфігурації й напруги електричної мережі можуть бути розділені на дві групи.

До першої групи належать методи, у яких оптимальну електричну мережу визначають на основі розрахунку поточкорозподілу, що забезпечує мінімум зведених витрат. Сутність методів цієї групи полягає в наступному. Складається вихідна розрахункова схема мережі, до складу якої входять як існуючі, так і намічувані до спорудження елементи. Якщо на основі попереднього інженерного аналізу вибір щабля напруги якого-небудь зв'язку між вузлами мережі ускладнений, то у вихідну розрахункову схему включаються до спорудження лінії різних щаблів напруги. Далі вирішується задача визначення мінімуму зведених витрат на спорудження й експлуатацію мережі при наявності рівнянь зв'язку й обмежень. Оптимальну мережу визначають у результаті аналізу поточкорозподілу, що забезпечує мінімум зведених витрат. При аналізі зі схеми виключають гілки, потужність яких або дорівнює нулю, або досить мала. Елементи, що залишилися, утворюють оптимальну мережу [3].

До другої групи належать методи, при використанні яких оптимальну електричну мережу визначають у результаті послідовного порівняння зведених витрат обмеженої кількості варіантів розвитку мережі.

Електричні мережі енергосистем належать до класу динамічних систем, тому що є під впливом навантажень, що змінюються в часі й просторі. Тому при проектуванні необхідно враховувати динаміку розвитку електричних мереж. Точний облік динаміки, що полягає в оптимальному розподілі заходів щодо розвитку мережі по роках розрахункового періоду, можливий тільки при використанні методу динамічного програмування. При застосуванні інших оптимізаційних методів динаміка розвитку системи враховується приблизно. Тоді весь період оптимізації розбивається, як правило, на три етапи. Для першого етапу (перші 3-5 років) обґрунтовуються конкретні рішення по розвитку мережі, параметри й строки спорудження об'єктів електромережі. На більш віддалену перспективу (7-12 років) розробляється сукупність варіантів розвитку мереж, які можуть виявитися оптимальними при різних сполученнях вихідних умов. Для третього етапу розвитку (15-20 років) визначаються тільки структура й основні принципи побудови єдиної енергосистеми.

У методах і алгоритмах оптимізації розвитку електричних мереж надійність енергопостачання вузлів навантаження враховують, як правило, у результаті введення додаткових вимог до конфігурації мережі. Для обліку надійності енергопостачання певних вузлів оптимальну мережу будують так, щоб кількість ліній, що живлять кожен із розглянутих вузлів, було не менше заданого. Крім того, надійність може бути врахована в результаті включення до складу цільової функції збитку від недостатньої надійності енергопостачання або в результаті розрахунку й порівняння показників надійності з нормованими величинами. Однак, тому що в цей час немає досить простих способів визначення збитку в складних енергосистемах і відсутні затверджені нормативи надійності, такі підходи до обліку надійності не одержали достатнього поширення.

6.2. Функції оптимальних витрат для ліній електропередачі й трансформаторів

Як критерій оптимальності при рішенні задачі оптимізації розвитку електричної мережі використовують суму динамічних зведених витрат по всіх елементах (гілках) мережі:

$$Z^c = \sum_{i \in M} Z_i$$

де i - поточний індекс гілок мережі; M - множина допустимих гілок.

У складі елементів мережі розрізняють лінії електропередачі й трансформатори. Кожний елемент характеризується рядом параметрів, серед яких можуть бути, наприклад, напруга, перетин і число ланцюгів лінії, потужність трансформатора й т.п. Зазначені параметри дискретні, що викликає істотні ускладнення при вирішенні задачі оптимізації. Так як ці параметри можна представити функціями потоку потужності по лінії електропередачі або трансформатору, при оптимізації, для скорочення розмірності розв'язуваної задачі, доцільно виключити їх із числа незалежних змінних. Для цього можна

застосувати метод економічних інтервалів, при використанні якого наведені витрати i -ої галузі електричної мережі при будь-якому значенні потоку потужності по елементу P_i - повинні задовольняти умові

$$Z_i(P_i) = \min\{ Z_{i1}(P_i), Z_{i2}(P_i), \dots, Z_{iv}(P_i) \}, \quad (6.1)$$

де V - загальна кількість варіантів технічного виконання i -ої гілки [3].

Витрати в лінію електропередачі можна представити у вигляді

$$Z_v = Z_{vo} \cdot l, \quad (6.2)$$

де Z_{vo} - витрати на спорудження й експлуатацію одиниці довжини лінії заданого типу й напруги з перетином S_v ; l - довжина лінії.

Витрати для ліній, що споруджуються знову

$$Z_{vo} = (E_n + P_a) \cdot K_{ov} + \frac{P^2}{U_{cp}^2 \cdot \cos^2 \phi} \cdot r_{ov} \cdot Z_{\phi} \cdot \tau, \quad (6.3)$$

де K_{ov} - капіталовкладення на одиницю довжини лінії перетином S_v ; U_{cp} - середня експлуатаційна напруга; $\cos \phi$ - середнє значення коефіцієнта потужності для даного класу напруги; r_{ov} - погонний опір лінії перетином S_v ; Z_{ϕ} - питома вартість втрат електроенергії; τ - кількість годин максимальних втрат. Якщо $P = 0$, то витрати в лінію також приймаються рівними нулю.

Функція (4) може бути представлена у вигляді

$$Z_{vo} = a_{ov} + b_{ov} \cdot P^2, \quad (6.4)$$

де a_{ov} , b_{ov} - коефіцієнти параболі.

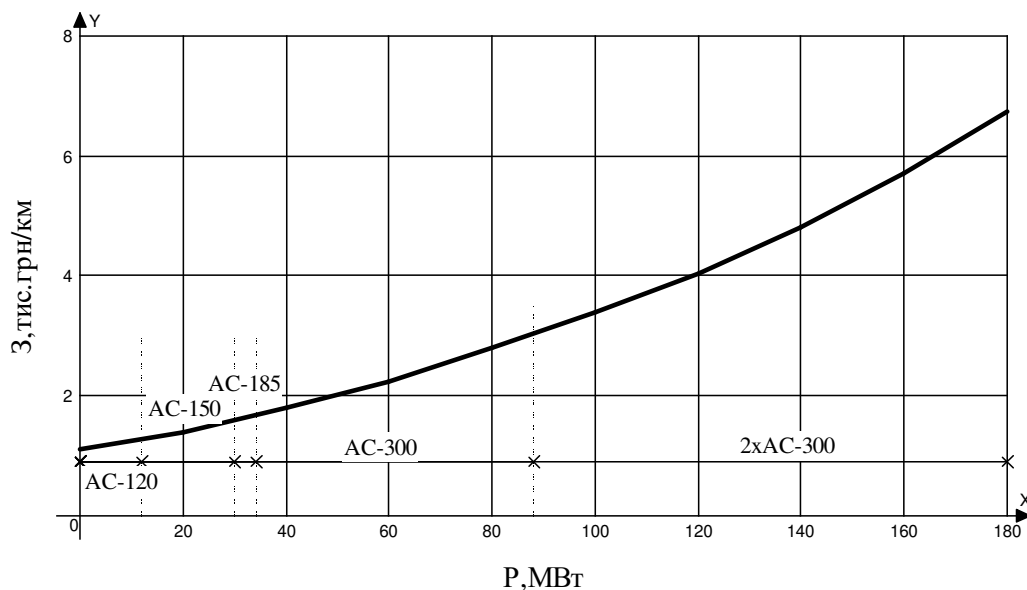


Рис. 6.1. Функції питомих витрат на спорудження й експлуатацію лінії напругою 110кВ

Аналогічні функції можуть бути записані для всіх $\nu = 1, 2, \dots, V$ допустимих перетинів ліній заданого типу й напруги. Тоді, відповідно до (2), функція оптимальних витрат у лінію від потужності є нижньою згинаючою сімейства парабол, кожна з яких побудована для одного із допустимих перетинів. На рис.6.1 показана функція оптимальних витрат для лінії, що споруджується знову, напругою 110 кВ. Пунктиром відзначені границі економічних інтервалів доцільного застосування відповідних перетинів. При побудові функції оптимальних витрат відпали ті з допустимих перетинів, які не задовольняли умові (2).

Для існуючих ліній електропередачі постійна частина витрат у процесі оптимізації не змінюється й тому може бути виключена з цільової функції. В цьому випадку функція витрат у лінію проходить через початок координат.

Потужність лінії - аргумент функції оптимальних наведених витрат. Тому використання даної функції при оптимізації розвитку мережі дозволяє виключити перетин лінії з числа незалежних змінних. Тоді перетин можна знайти по заданій потужності за допомогою економічних інтервалів. Аналогічно виключається зі сполуки незалежних змінних число паралельних ланцюгів лінії електропередачі [3]. Безпосереднє використання функції оптимальних зведених витрат виду $Z_i = f(P_i)$ ускладнено, тому що на границях економічних інтервалів має місце розрив перших похідних. Тому кусково-параболічну функцію зведених витрат заміняють більш простими апроксимуючими функціями. Залежно від умов завдання використовують різні види апроксимації. Найбільше часто застосовують функцію

$$Z(P) = \begin{cases} a + b|P|, & \text{якщо } P \neq 0 \\ 0, & \text{якщо } P = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

і використовують апроксимацію виду

$$Z(P) = c \cdot \sqrt{P^2 + \epsilon}. \quad (6.6)$$

Крім того, апроксимація може бути виконана за допомогою кусково-лінійних функцій.

При рішенні задачі оптимізації розвитку електричної мережі вирішуються питання доцільності спорудження трансформаторних підстанцій, вибору типу, числа, і потужності трансформаторів. Наведені витрати на спорудження й експлуатацію підстанцій дорівнюють сумі наведених капіталовкладень, відрахувань від них і щорічних витрат, обумовлених втратами електроенергії у трансформаторах. Капіталовкладення включають вартість розподільних пристроїв, силових трансформаторів, компенсуючих пристроїв, реакторів і постійну частину витрат. Зі зміною потужності підстанції змінюється тільки та частина капіталовкладень, що пов'язана з номінальною потужністю й числом трансформаторів.

Розглянемо підстанцію з одним двообмотковим трансформатором. У цьому випадку зведені витрати на її спорудження й експлуатацію можна визначити з виразу виду

$$Z_v = a_v + b_v \cdot P^2. \quad (6.7)$$

Так само як і для ліній, аналогічні формули можуть бути записані для всіх $v = 1, 2, \dots, V$ номінальних потужностей трансформаторів розглянутого типу й напруги. Тому що втрати енергії в трансформаторах порівняно невеликі, зведені витрати в основному визначаються капіталовкладеннями. Найбільш типова залежність витрат від потужності підстанції показана на рис. 2.

Якщо розглядається питання про доцільність спорудження підстанції з трьохобмотковими трансформаторами або автотрансформаторами, то необхідно зробити еквівалентну заміну трьохобмоткового трансформатора одним або двома двообмотковими. При цьому припускають, що проєктована мережа перебуває з боку двох обмоток трансформатора, а потужність третьої обмотки задана й незмінна. При заміні розрізняють два випадки.

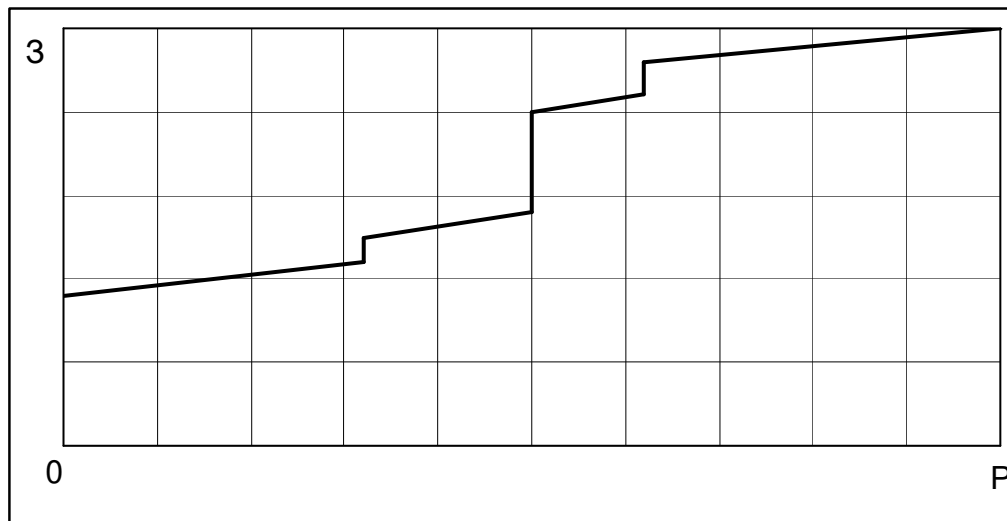


Рис. 6.2. Залежність витрат на спорудження й експлуатацію підстанції від потужності

У першому випадку вважається, що потужності, що протікають по обмотках, підключеним до проєктованої мережі, різні по напрямку. Одна обмотка живильна, друга - навантажувальна. При цьому втрати потужності в трьохобмотковому трансформаторі можна записати у вигляді

$$\Delta P_v = a_v^P + b_v^P \cdot P_n + c_v^P \cdot P_n^2, \quad (6.8)$$

де P_n - потужність живильної обмотки. Тоді розглянутий трьохобмотковий трансформатор може бути замінений одним двообмотковим, вартість якого визначають у відповідності з вартістю трьохобмоткового трансформатора, а втрати електроенергії - по формулі (6.8). Схема заміщення еквівалентного трансформатора показана на рис. 6.3, де P_n - потужність навантажувальної обмотки; P_c - фіксована потужність обмотки, підключеної до існуючої частини мережі.

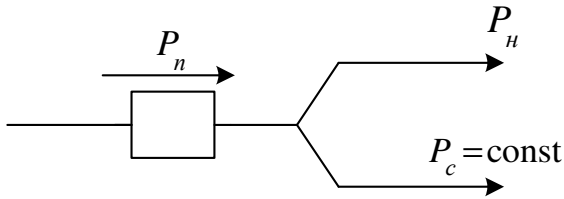


Рис. 6.3. Схема заміщення еквівалентного двообмоткового трансформатора

У другому випадку припускають, що потужності, що протікають по обмотках, підключеним до проекрованої мережі, однакові за напрямком. У цьому випадку трьохобмотковий

трансформатор заміняють двома двообмотковими, які з'єднують проектовані й існуючі частини мережі.

У загальному випадку, з огляду на еквівалентну заміну трьохобмоткових трансформаторів, зведені витрати на спорудження й експлуатацію трансформаторної підстанції можна записати у вигляді

$$\Delta P_v = a_v + b_v \cdot P + c_v \cdot P^2, \quad (6.9)$$

де $v = 1, 2, \dots, V$.

Оскільки вираз (6.9) аналогічний виразу (6.4), для виключення потужності й числа трансформаторів із складу незалежних змінних також можна використовувати метод економічних інтервалів. Зовсім аналогічно будують функцію оптимальних витрат, для апроксимації якої також можна використовувати залежності виду (6.5) і (6.6).

Таким чином, при рішенні завдання оптимізації розвитку електричної мережі можна використовувати функції оптимальних витрат однакового виду для ліній і трансформаторів, що дозволяє не враховувати при оптимізації відмінність даних елементів.

6.3. Метод впорядкованого виключення гілок

При використанні даного методу в результаті попереднього інженерного аналізу визначається вихідна розрахункова схема електричної мережі, що містить надлишкові лінії. Для вихідної мережі розраховують зведені витрати Z_o ; потім шляхом послідовного відключення всіх припустимих ліній мережі визначають гілку, відключення якої не порушує зв'язність схеми й приводить до найбільшого зменшення зведених витрат на спорудження й експлуатацію електричної мережі. Отриману гілку виключають із схеми мережі. Далі знову вибирають лінію, відключення якої приводить до найбільшого зменшення зведених витрат, знову виключають отриману лінію й т.д. Процес триває доти, доки не залишиться електрична мережа, відключення кожної з ліній якої приводить або до збільшення зведених витрат, або до втрати зв'язності схеми.

Алгоритм методу впорядкованого виключення гілок можна записати наступним чином.

1. Визначаємо вихідну надлишкову схему електричної мережі, розраховуємо зведені витрати на спорудження й експлуатацію даної мережі Z_o . В якості множини D приймаємо порожню множину $D = \emptyset$.

2. Переглядаючи всі гілки електричної мережі, з умови

$$Z_o - Z(\bar{i}) = \max \{ Z_o - Z(\bar{m}) \mid m \notin D \}, \quad (6.10)$$

знаходимо лінію i , відключення якої приводить до найбільшого зменшення зведених витрат. В умові (11) $m \in M$ показує, що лінія m належить множині гілок електричної мережі M , а $m \notin D$ - що лінія m не належить множині D ; $Z(\bar{m})$ - витрати на спорудження й експлуатацію мережі, яка виходить із вихідної в результаті відключення лінії m .

3. Якщо виконується умова

$$Z_o - Z(\bar{i}) > 0,$$

то переходимо до п.4 алгоритму, якщо ні, - то до п.7.

4. Чи порушує зв'язність схеми відключення лінії i ? Якщо так, то включаємо лінію i у множину D :

$$D = D + i,$$

виключаємо з множини M :

$$M = M - i$$

і переходимо до п.6 алгоритму. Якщо ні, то переходимо до п.5.

5. Виключаємо лінію i зі схеми мережі, виключаємо з множини M і приймаємо витрати $Z(\bar{i})$ в якості Z_o .

6. Множина M - порожня множина:

$$M = \emptyset$$

Якщо так, то переходимо до п.7 алгоритму, якщо ні, - то до п.2.

7. Кінець.

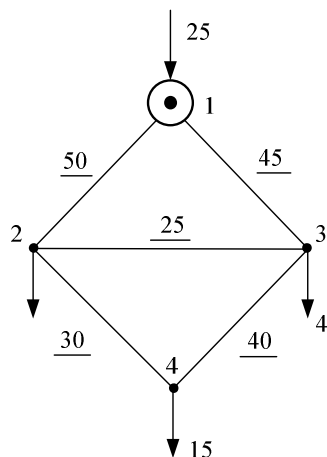
Процедура розрахунку витрат на спорудження й експлуатацію електричної мережі містить у собі визначення поточкорозподілу, що розраховується по заданих довжинах ділянок, розрахунок і підсумовування зведених витрат на спорудження й експлуатацію кожної гілки розглянутої мережі.

Перевагою методу є те, що при визначенні витрат може бути безпосередньо використана крива економічних потенціалів. До недоліків необхідно віднести великий об'єм обчислень на кожному кроці оптимізації. Крім того, використання даного методу не завжди забезпечує одержання найкращого рішення.

Для оптимізації розвитку електричних мереж можна застосувати ще одну модифікацію методу впорядкованого виключення гілок, відповідно до якої на кожному кроці оптимізації здійснюється перехід не до схеми мережі, що забезпечує найменші витрати, а до першої ж схеми, що характеризується меншими зведеними витратами. При використанні цієї модифікації зміна порядку розгляду гілок приводить до одержання нового рішення. Зіставляючи ці рішення між собою, можна одержати глобальний мінімум функції зведених витрат. Однак,

тому що кількість гілок мереж сучасних енергосистем досить велика, ймовірність визначення глобального мінімуму вкрай низька.

Приклад. Нехай необхідно визначити оптимальну конфігурацію електричної мережі, надлишкова розрахункова схема якої показана на рис.1.4, де навантаження вузлів наведені у мегаватах, а довжини ділянок у кілометрах.



Наведені розрахункові витрати на спорудження та експлуатацію електричної мережі визначаються за допомогою виразу

$$Z_c = \sum_{i \in M} (a_i + b_i \cdot |P_i|)$$

Далі наведені значення коефіцієнтів a_i і b_i .

Гілка	1–2	1–3	2–3	2–4	3–4
a_i	6	5	4	5	4
b_i	1	0,8	0,5	0,6	0,6

Рис. 6.4. Розрахункова схема електричної мережі

Розрахунок починають із визначення приведених витрат для вихідної схеми мережі, для чого розраховують потокорозподіл (по довжинах), результати розрахунку наносять на схему мережі (рис. 1.5, а). Знаючи потокорозподіл, визначають витрати на спорудження та експлуатацію електричної мережі $C_n = C_{12} + C_{13} + C_{23} + C_{24} + C_{34} = 6 + 1 \cdot 12,29 + 5 + 0,8 \cdot 12,71 + 4 + 0,5 \cdot 1,68 + 5 + 0,6 \cdot 7,97 + 4 + 0,6 \cdot 7,03 = 56,71$ Мвт.

Далі виконують послідовні кроки оптимізації.

Перший крок. Послідовно відключають кожну з ліній вихідної мережі. Для кожного варіанта схеми розраховують потокорозподіл, знаходять наведені витрати на спорудження та експлуатацію мережі. Отримані результати наведені далі; крім того, результати розрахунку потокорозподілу наносять на розрахункові схеми варіантів розвитку мережі

Гілка, що відключається	1–2	1–3	2–3	2–4	3–4
$Z(\bar{i})$	54,21	54,22	51,60	52,42	55,39
$Z_0 - Z(\bar{i})$	2,50	2,49	5,11	4,29	1,32

Так як найбільше зменшення приведених витрат викликає відключення лінії 2–3 (рис. 6.5, г), на наступному кроці оптимізації у якості вихідної розглядають схему, у якій відсутня дана лінія.

Другий крок. Приймають в якості C_0 витрати варіанта схеми, отриманого на першому кроці: $Z_0 = Z(\bar{2}-\bar{3}) = 51,60$. Знову послідовно відключають кожну з ліній мережі, розраховують поточкорозподіл та знаходять наведені витрати кожного варіанта. Результати розрахунку наведені далі.

Гілка, що відключається	1-2	1-3	2-4	3-4
$Z(\bar{i})$	50,2	51,64	45,2	49,2
$Z_0 - Z(\bar{i})$	1,4	-0,04	6,4	2,4

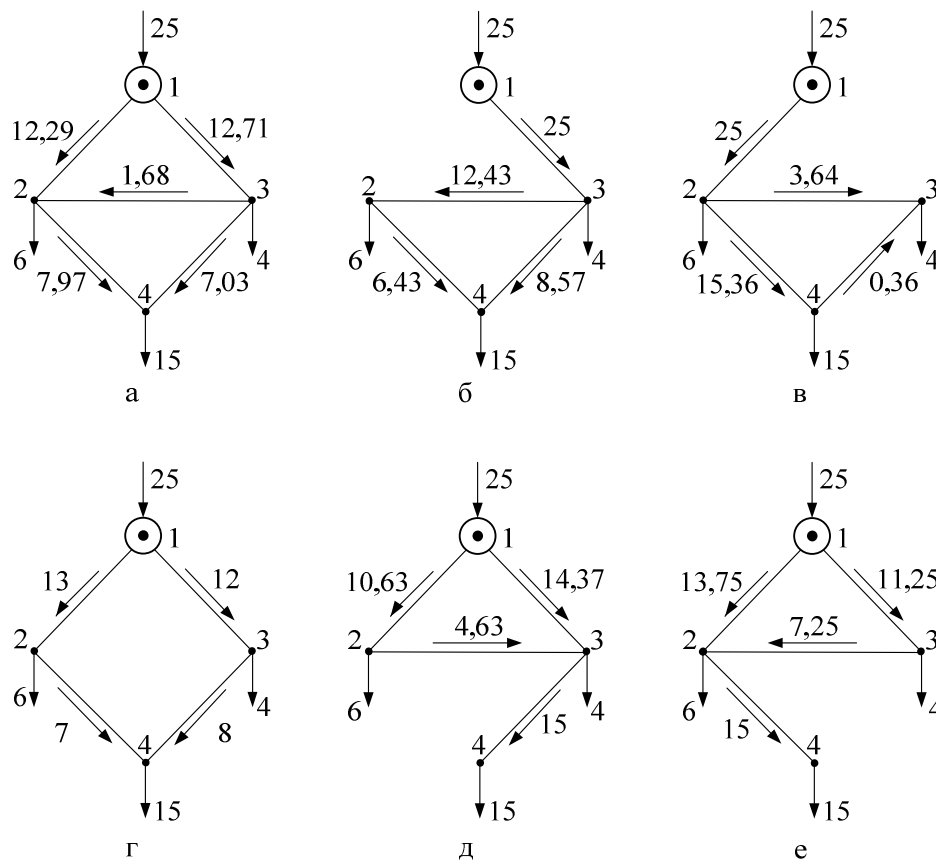


Рис.6.5. Варіанти розрахункових схем, розглянутих на першому кроці оптимізації методу упорядкованого відключення гілок: а - вихідна схема; схема, отримана при відключенні лінії: б - 1-2; в - 1-3; г - 2-3; д - 2-4; е - 3-4

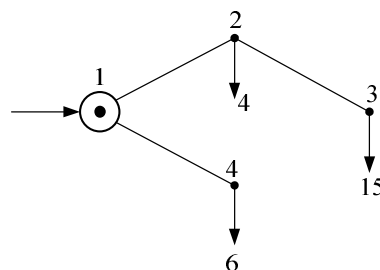


Рис.6.6. Оптимальна схема електричної мережі

Найбільше зменшення витрат викликає відключення лінії 2–4. Так як подальше відключення гілок призводить до втрати зв'язності схеми, результатом оптимізації буде схема, показана на рис. 6.6.

6.4. Метод поконтурної оптимізації

Метод поконтурної оптимізації можна використовувати для розв'язання задачі визначення оптимальної конфігурації проєктованої мережі як у статичній, так і в динамічній постановці [3,7]. Модифікацію методу, призначену для розв'язання динамічної задачі оптимізації розвитку електричної мережі, реалізовано в пакеті прикладних програм, розробленому в Інституті фізико-технічних проблем енергетики АН колишньої Литовської РСР.

Розглянутий метод належить до групи методів покоординатної оптимізації, сутність яких полягає в такому. Нехай визначено n одиничних векторів напрямів координат $e_1, e_2, \dots, e_n$. Метод циклічного покоординатного спуску працює по черзі в кожному координатному напрямі. Якщо дано точку $X^{(0)}$, то точка $X^{(1)}$ утворюється з $X^{(0)}$ мінімізацією цільової функції в напрямку e_1 , точка $X^{(2)}$ з $X^{(1)}$ мінімізацією в напрямку e_2 і т. д. Нарешті точку $X^{(n)}$ знаходять мінімізацією в напрямку e_n . Потім усі операції повторюють, починаючи з точки $X^{(n)}$ і т. д. Якщо після циклу оптимізації по усіх координатах виконується умова

$$|\Phi(X^{(n)}) - \Phi(X^{(0)})| < \varepsilon, \quad (6.11)$$

то процес пошуку вважають закінченим. В умові 6.11) $\Phi(X^{(0)})$ і $\Phi(X^{(n)})$ – значення цільової функції в початковій $X^{(0)}$ і кінцевій $X^{(n)}$ точках циклу оптимізації; ε – точність розрахунку.

Мінімізацію в напрямі по одній координатній осі зазвичай виконують або методом прямого пошуку, у якому варіюється координата точки X , яка послідовно набуває можливих дискретних значень, або одним з методів одновимірного пошуку.

Якщо змінювання змінних обмежене системою рівнянь, то частина змінних, кількість яких дорівнює кількості рівнянь зв'язку, виявляються залежними. Інші змінні є незалежними. У цьому випадку покоординатний спуск виконують тільки за незалежними змінними. У процесі пошуку оптимального розв'язку деякі з незалежних змінних можна зводити до залежних, а таку саму кількість залежних – до незалежних.

При використанні метода поконтурної оптимізації, задачу вибору оптимальної конфігурації електричної мережі в статичній постановці формують як задачу визначення мінімуму функції витрат вигляду

$$V^* = \sum_{i \in M} V_i(P_i) \quad (6.12)$$

за умови, що

$$\sum_{i \in M_j} P_i - P_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \quad (6.13)$$

де i – поточний індекс гілок електричної мережі; M – множина допустимих гілок мережі; $V_i(P_i)$ – відома кусково-лінійна функція витрат на i -у лінію, яку можна одержати в результаті апроксимації кривої економічних інтервалів; M_j – множина гілок, з'єднаних з вузлом j ; P_i – потужність, що перетікає по лінії i ; P_j – навантаження j -го вузла; J – кількість вузлів у мережі [19]. При цьому потужність балансувального вузла визначають із виразу

$$P_j = - \sum_{i \in M_j} P_i.$$

Для спрощення обчислень на кожному кроці оптимізації доцільно апроксимувати функцію витрат на кожен гілку мережі прямою лінією [2, 19]. Тоді функцію $V_i(P_i)$ записують у вигляді

$$V_i(P_i) = \begin{cases} a_i + b_i |P_i|, & \text{якщо } P_i \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } P_i = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

для кожної нової гілки;

$$V_i(P_i) = b_i |P_i| \quad (6.15)$$

для кожної існуючої гілки мережі.

Використовуючи метод поконтурної оптимізації, в розрахунковій схемі виділяють зв'язну розімкнуту мережу, яку називають деревом мережі. Усі гілки мережі називають дугами. Дуги, що утворюють дерево, позначають індексами $l = 1, 2, \dots, L$. Дуги, що не входять у дерево, і вмикання яких забезпечує перехід до вихідної замкнутої мережі, називають хордами. Хорди позначають індексами $k = 1, 2, \dots, K$. У результаті додавання будь-якої з хорд до дерева мережі утвориться контур. Як незалежні змінні використовують навантаження хорд мережі, а як залежні – навантаження дуг, що утворюють дерево мережі. Кількість незалежних змінних, що дорівнює кількості незалежних контурів, можна визначити за допомогою виразу $K = I - J + 1$, де I – кількість гілок мережі. Кількість залежних змінних дорівнює кількості рівнянь зв'язку $j - 1$.

Нехай навантаження всіх хорд дорівнюють нулю, тоді, змінюючи потужність, наприклад k -ї хорди, можна визначити мінімум функції витрат на спорудження й експлуатацію гілок даного контуру:

$$V_k^*(P_k) = V_k(P_k) + \sum_{l \in M_k} V_l(P_l), \quad (6.16)$$

де P_k і $V_k(P_k)$ – відповідно навантаження і витрати k -ї хорди; M_k – множина дуг контуру, що виникає у разі замикання k -ї хорди; P_l – навантаження l -ї дуги, яке, у свою чергу, залежить від потужності хорди $P_l = f_l(P_k)$.

Відомо, що для оптимізації у загальному випадку кусково-лінійної функції достатньо розглянути її критичні точки, тобто точки, в околі яких функція не спадає. Оскільки в цьому випадку функції витрат у лінії, подані у вигляді (6.14) і (6.15), критичні точки відповідають нульовому навантаженню хорди або дуги контуру. У цьому разі для оптимізації контуру достатньо порівняти зведені

витрати для тих його режимів, у яких навантаження хорди або однієї з дуг дорівнює нулю [2, 19].

Якби контури мережі не були взаємозалежні, оптимізація була б закінчена за k кроків. Проте існують дуги, що одночасно входять у декілька контурів. Тому в результаті оптимізації одного контуру змінюються умови оптимізації інших контурів, що потребує їхнього повторного розгляду. Взаємовплив контурів потребує організації ітераційного процесу пошуку екстремуму. У процесі виділяють цикли оптимізації, послідовне виконання яких забезпечує розв'язання задачі. На кожному циклі здійснюють оптимізацію всіх контурів мережі.

Якщо результат оптимізації k -го контуру – нульове навантаження не хорди, а l -ї дуги, доцільно змінити систему незалежних змінних. При цьому k -у хорду потрібно включити в дерево мережі, а l -у дугу – до складу хорд. У протилежному випадку цю дугу при оптимізації одного контуру можна вважати замкнутою, а при оптимізації іншого – розімкнутою.

Алгоритм методу поконтурної оптимізації можна записати таким чином.

1. Виділяють дерево мережі. При цьому дуги, що утворюють дерево, позначають індексами $l = 1, 2, \dots, L$, а хорди – індексами $k = 1, 2, \dots, K$. Навантаження всіх хорд дорівнюють до нуля: $P_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, K$. Задають $k = 1$.

2. Виконують оптимізацію k -го контуру. При цьому знаходять

$$V_k^*(P_{l'} = 0) = \min \{ V_k^*(P_l = 0) \mid l \in M_k \}.$$

Якщо $V_k^*(P_{l'} = 0) < V_k^*(P_k = 0)$, то для наступного кроку оптимізації дугу l' беруть як хорду, а k -у хорду включають у дерево мережі. У протилежному випадку система незалежних змінних залишається без зміни. Задають $P_k = 0$.

3. Якщо всі контури мережі $k = K$, то переходять до п. 4 алгоритму, якщо ні, то змінюють поточний індекс контуру $k = k + 1$ і переходять до п. 2.

4. Якщо в циклі процесу змінювали дерева і хорди мережі, то беруть $k = 1$ і переходять до п. 2 алгоритму, якщо ні – до п. 5.

5. Кінець.

У цьому алгоритмі критерій закінчення процесу оптимізації – сталість хорд і дерева мережі після виконання циклу оптимізації. Крім того, в загальному випадку ітераційний процес можна закінчувати, якщо виконується умова

$$|V^{*(V-1)} - V^{*(V)}| \leq \varepsilon,$$

де V – номер циклу оптимізації.

Приклад: Нехай необхідно визначити оптимальну конфігурацію електричної мережі, надлишкову розрахункову схему якої зображено на рис. 6.1. На рисунку показано навантаження вузлів (у мегаватах) і довжини ліній (у кілометрах) мережі.

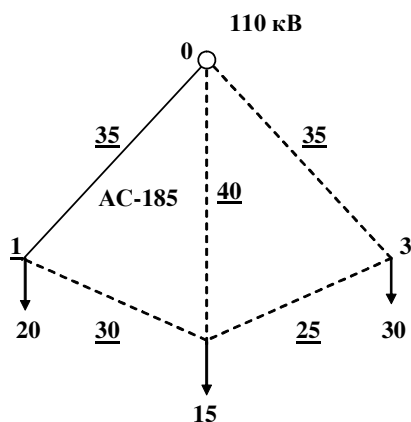


Рис. 6.7. Розрахункова схема електричної мережі

Існуючу електропередачу 0–1 позначено суцільною лінією, а можливі траси нових електропередач – пунктиром. Питомі зведені витрати на 1 км нових ліній визначають за виразом

$$Z_0 = 1,53 + 0,05P ,$$

який отримано в результаті апроксимації функції витрат. Для існуючих ліній у розрахунку враховують тільки вартість втрат електроенергії. У цьому випадку питомі витрати

$$Z_0 = 0,064P .$$

Організуємо багатокроковий процес оптимізації.

Перший крок. Як хорди вихідної схеми візьмемо лінії 0–2 і 0–3. Тоді перший контур утворять дуги 0–1, 1–2 і хорда 0–2, а другий – дуги 0–1, 1–2, 2–3 і хорда 0–3. Припускаємо навантаження хорд такими, що дорівнюють нулю.

Виконуємо оптимізацію першого контуру. З цією метою послідовно дорівнюємо до нуля навантаження кожної лінії. Для кожного з варіантів схеми знаходимо розподіл потужностей і зведені витрати на спорудження мережі. Нехай, наприклад, навантаження лінії $P_{0-1} = 0$. Тоді $P_{1-2} = 20$, $P_{0-2} = 35$.

Витрати

$$Z_1(0-1) = (1,53 + 0,05 \cdot 20)30 + (1,53 + 0,05 \cdot 35)40 = 207,1 \text{ тис. грн/км.}$$

Результати оптимізації першого контуру наведено в табл. 1.1.

Таблица 6.1. Результаты оптимизации первого контура

Лінії	Потужність ліній, МВт		
	Режим 1	Режим 2	Режим 3
0–1	0	20	35
1–2	20	0	15
0–2	35	15	0
Витрати тис. грн	207,1	136,0	158,4

Оскільки найменші витрати забезпечує відключення лінії 1–2, дану лінію зараховуємо до хорд, а хорду 0–2 – до дуг. Тоді перший контур утворять дуги 0–1, 0–2 і хорда 1–2, а другий – 0–2, 2–3 і хорда 0–3.

Виконуємо оптимізацію другого контуру. Знову по черзі відключаємо кожну лінію і для кожного варіанта схеми розраховуємо зведені витрати. Результати оптимізації наведено в табл. 6.2.

Таблиця 6.2. Результати оптимізації другого контуру

Лінії	Потужність ліній, МВт		
	Режим 1	Режим 2	Режим 3
0–2	0	15	45
2–3	15	0	30
0–3	45	30	0
Витрати тис. грн	189,3	197,25	242,1

Найменші витрати забезпечує відключення лінії 0–2. Тому лінію 0–2 включаємо в кількість хорд, а хорду 0–3 відносимо до дуг. Тоді перший контур утворюють дуги 0–1, 0–3, 2–3 і хорда 1–2, а другий – дуги 0–3, 2–3 і хорда 0–2.

Оскільки на кроці оптимізації положення хорд контурів змінилося, переходимо до другого кроку оптимізації.

Другий крок. Виконуємо оптимізацію першого контуру. Отримані результати записуємо в табл. 6.3.

Вилучення хорди 1–2 забезпечує найменші витрати, і тому система контурів не змінюється.

Умови оптимізації другого контуру не змінилися. Отже, результатом його оптимізації так само, як і на першому кроці, буде відключення лінії 0–2.

Таблиця 6.3. Результати оптимізації

Лінії	Потужність ліній, МВт			
	Режим 1	Режим 2	Режим 3	Режим 4
0–1	0	20	35	65
1–2	20	0	15	45
2–3	35	15	0	30
0–3	65	45	30	0
Витрати тис. грн	325,2	234,1	252,8	334,75

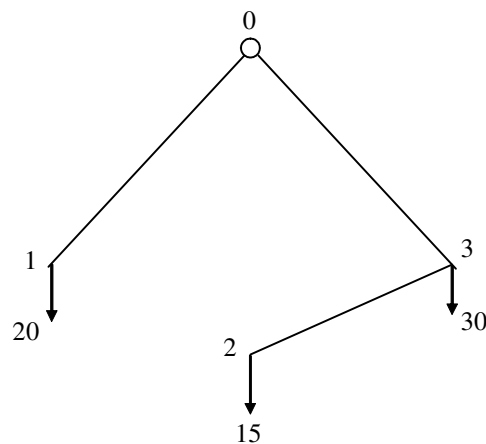


Рис. 6.8. Оптимальна конфігурація електричної мережі

Оскільки на другому кроці оптимізації хорди незалежних контурів не змінили свого положення, отримано розв’язок задачі оптимізації розвитку мережі. Оптимальну конфігурацію мережі показано на рис. 6.8.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Моделі оптимального розвитку енергосистем. Методичні вказівки до вивчення дисципліни / В.А. Баженов. – К.: НТУУ «КПІ». – 2008. 40 с.
2. Методи оптимізації режимів енергосистем. Методичні вказівки до виконання курсової роботи./ В.А.Баженов. - К: НТУУ «КПІ», 2013, – 28 с.
3. Баженов В.А., Кузнецов В.Г., Тугай Ю.И. Оптимизация режимов электрических сетей. – Киев: Наукова думка, 1992. – 216 с.
4. Модели оптимального развития энергосистем /В.А.Баженов. Учеб. Пособие. – Киев: КПИ, 1984. – 100 с.

Додаткова література

5. Модели оптимизации развития энергосистем: Учебн. для электроэнергет. спец. вузов/ Д.А.Арзамасцев, А.В.Липес, А.Л.Мизин /Под ред. Д. А. Арзамасцева. – М.: Высш. школа, 1987. –272 с.
6. Веников В.А., Идельчик В.И. Электрические станции, сети и системы.
7. Методы оптимизации управления планированием больших систем энергетики (оптимизация развития функционирования). Итоги науки и техники. – М.: ВИНТИ, 1974. – 250 с.
7. Дале В.А., Кришан З.П., Паэгла О.Г. Динамическое программирование в расчетах развития сетей энергосистем. – Рига: Зинатне, 1979. – 260 с.
8. Применение цифровых вычислительных машин в электроэнергетике: Учебн. пособие для вузов / Щербачев О.В., Зейлигер А.Н., Кадомская К.П. и др. – Л.: Энергия, 1980. – 240 с.
9. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
10. Холмский В.Г. Расчет и оптимизация режимов электрических сетей /специальные вопросы/. – М.: Высш. школа, 1975. –280 с.