

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до практичних занять та самостійної роботи студентів  
з дисципліни «Вступ до техніки вимірювань»  
для студентів напрямів підготовки 6.050801 Мікро- та наноелектроніки  
6.070802 Електронні пристрої та системи

освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр за спеціальностями  
«Мікроелектроніка», «Фізична та біомедична електроніка»,  
«Електронні прилади та пристрої», «Електронні системи»

Укладачі: старший викладач Шовкун Ірина Денисівна  
к.т.н., старший викладач Семеновська Олена Володимирівна  
асистент Саурова Тетяна Асадівна

**Затверджено**

На засіданні кафедри фізичної та  
біомедичної електроніки

Протокол № 1 від 28.08.2012 р.

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ В.І.Тимофєєв

Шовкун І.Д. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів з дисципліни «Вступ до техніки вимірювань» для студентів напрямів підготовки 6.050801 Мікро- та наноелектроніки 6.070802 Електронні пристрої та системи, освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр за спеціальностями «Мікроелектроніка», «Фізична та біомедична електроніка», «Електронні прилади та пристрої», «Електронні системи»/ І.Д. Шовкун, О.В. Семеновська, Т.А. Саурова, – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 55 с.

Гриф затверджений Вченою радою ФЕЛ НТУУ «КПІ»  
протокол № 08/12 від 30 серпня 2012 р.

Затверджено  
на засіданні кафедри  
фізичної та біомедичної електроніки  
Протокол № 1 від 28.08.2012 р.

## **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до практичних занять та самостійної роботи студентів  
з дисципліни «Вступ до техніки вимірювань»  
для студентів напрямів підготовки 6.050801 Мікро- та наноелектроніки  
6.070802 Електронні пристрої та системи

освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр за спеціальностями  
«Мікроелектроніка», «Фізична та біомедична електроніка»,  
«Електронні прилади та пристрої», «Електронні системи»

Укладачі: Ірина Денисівна Шовкун, ст. викладач,

Олена Володимирівна Семеновська, канд. техн. наук, ст. викладач,

Тетяна Асадівна Саурова, асистент

Відповідальний редактор:

Володимир Іванович Тимофєєв, доктор техн. наук, проф.

Рецензент: Лецишин Олександр Володимирович, к.т.н., доцент

*Під редакцією авторів*

## Зміст

Вступ.....	4
1. Загальні відомості про електричні вимірювання.....	5
2. Похибки вимірювань	
2.1. Інструментальні похибки вимірювання.....	6
2.2. Методичні похибки.....	9
2.3. Похибки опосередкованих вимірювань.....	18
2.4. Випадкові похибки.....	28
3. Обробка результатів вимірювання.....	37
4. Похибки квантування за інтенсивністю і в часі.....	40
5. Вимірювальні сигнали. Електронні вольтметри.....	43
Додаток.....	51
Самостійна робота студента .....	55

## Вступ

Мета написання даних методичних вказівок – допомогти студентам електронних спеціальностей у вивченні дисципліни «Вступ до техніки вимірювань», в якій розглядаються основи теорії вимірювань, похибки вимірювань, опрацювання результатів вимірювань, засоби вимірювальної техніки.

Велике значення в якісному засвоєнні навчальної дисципліни відіграють форми та методи набуття практичних навичок у студентів із розв'язування прикладних задач. Однією з таких важливих форм є самостійна робота студента.

Посібник являє собою збірник задач і вправ з основних розділів курсу:

- системи фізичних величин і їх одиниць;
- класифікація похибок, їх нормування та класи точності;
- методичні похибки, випадкові похибки, похибки опосередкованих вимірювань;
- опрацювання результатів вимірювань;
- вимірювальні перетворення при квантуванні за інтенсивністю і в часі;
- вимірювання електронними аналоговими та цифровими приладами, електронно-променевим осцилографом.

На початку кожного розділу наводяться основні теоретичні положення, які необхідні для розв'язку задач і які можна використати для повторення лекційного матеріалу. Для типових задач наведені їх розв'язки, які можуть слугувати прикладом для самостійного розв'язку однотипових задач.

В якості додатку в посібнику наведені таблиці основних фізичних величин і деякі довідникові дані, що необхідні для розв'язку поданих задач.

При підготовці до розв'язку задач можна скористатись посібниками, назви яких наведені у рекомендованому списку літератури.

# 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЕЛЕКТРИЧНІ ВИМІРЮВАННЯ

В цьому розділі вивчається такі основні поняття та визначення:

метрологія - як наука про вимірювання. Задачі метрології. Одиниці фізичних величин. Міжнародна система одиниць СІ. Розмірності фізичних величин.

При вивченні цього розділу студенти знайомляться з такими поняттями як фізична величина (ФВ), розмір фізичної величини, значення фізичної величини (істинне, дійсне, вимірне). Між фізичними величинами існують зв'язки і залежності, що виражаються математичними співвідношеннями і формулами.

Сукупність фізичних величин, зв'язаних між собою певними залежностями, називають *системою величин*. Поняття основні і похідні величини системи. Що таке розмірність ФВ, як вона позначається? Як зміниться розмір похідної величини при зміні розмірів основних величин?

Що таке одиниця ФВ, навести приклади. Наприклад, одиниця довжини – метр, дюйм – які вони мають розміри? Які системи одиниць відомі студентам? Обов'язково знати найменування та позначення основних та додаткових одиниць ФВ у Міжнародній системі СІ.

Звернути увагу на кратні та дільні одиниці, в'яснити, коли вони використовуються; відносні та логарифмічні одиниці; найбільш уживані позасистемні одиниці.

Для вивчення цієї теми додатково рекомендується навчальний посібник: Чертов А.Г. Единицы физических величин. Учеб.пособие для вузов. М., «Высш.школа», 1977.

## Задачі для самостійного розв'язку

1. Запишіть значення фізичних величин (ФВ) використовуючи кратні і дільні приставки.

$$5,3 \cdot 10^7 \text{ Ом} = 53 \text{ МОм}$$

$$6,34 \cdot 10^7 \text{ Ф} = 0,634 \text{ мкФ} = 634 \text{ нФ}$$

$10,4 \cdot 10^{13} \text{ Гц} = \dots$	$45,6 \cdot 10^{-10} \text{ с} = \dots$
$0,067 \text{ м} = \dots$	$7,65 \cdot 10^{-3} \text{ мА} = \dots$
$0,0098 \text{ с} = \dots$	$0,008 \text{ В} = \dots$

2. Запишіть значення ФВ у вказаних одиницях:

$$1,1 \text{ ГГц} = 1,1 \cdot 10^3 \text{ МГц} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ кГц} = 1,1 \cdot 10^9 \text{ Гц}$$

10 мкА в мА, нА	15 кв в В, МВ
100 мВ в мкВ, В	$10^{-5} \text{ с}$ в мс, Мкс
10 пФ в нФ, мкФ	$1,5^4 \text{ Гц}$ в кГц, МГц
0,05 В в мВ, мкВ	1,5 см в дм, м, мм
0,02 мс в мкс, с	0,0016 А в мА, мкА

## 2. ПОХИБКИ ВИМІРЮВАНЬ

### 2.1. Інструментальні похибки вимірювань

Обов'язковими компонентами будь-якого вимірювання є: фізична величина (ФВ), значення якої треба виміряти; одиниця фізичної величини; метод вимірювання; умови; засіб вимірювання; оператор; результат вимірювання.

Абсолютна похибка вимірювання

$$\Delta = x - A,$$

де  $x$  – виміряне значення ФВ,  $A$  – істинне (дійсне) значення.

Відносна похибка вимірювання

$$\delta(\%) = \frac{\Delta}{x} \cdot 100\% \approx \frac{\Delta}{A} \cdot 100\%$$

Зведена (приведена) похибка

$$\wp(\%) = \frac{\Delta}{A_N} \cdot 100\%,$$

де  $A_N$  – деяке нормуюче значення. За нормуюче значення  $A_N$  приймають:

- кінцеве значення шкали  $A_K$ ;
- довжину шкали для ЗВТ, шкала яких є суттєво нерівномірною (зазвичай така шкала має позначки 0 і  $\infty$ ).

Вимірювальні прилади відрізняються за класом точності. Клас точності **K** чисельно дорівнює найбільшій допустимій зведеній основній похибці, вираженій у відсотках, тобто

$$K = \wp_{\max}$$

Клас точності присвоюють з ряду  $(1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5; 6) \cdot 10^n$ , де  $n=1; 0; -1; -2\dots$

Значення максимальної абсолютної похибки даного приладу можна обчислити за його класом точності:

$$\Delta_{\max} = \frac{K \cdot A_k}{100\%}$$

Похибки вимірювальних приладів, які не залежать від значення вимірювальної величини, називаються **адитивними**.

Похибки деяких вимірювальних приладів залежать від значення вимірювальної величини через відповідну зміну їх чутливості. Похибки таких приладів представляють двочленним виразом:

$$\Delta = \pm(a + bA),$$

де  $a$  – адитивна складова (постійне число),  $bA$  – мультиплікативна складова,  $b$  – постійне число, виражене у відносних одиницях.

При цьому межі допустимої відносної похибки встановлюють так:

$$\delta = \pm \frac{(a + bA)}{A} = \pm \left[ c + d \left( \frac{A_K}{A} - 1 \right) \right]$$

де  $c = b + \frac{a}{A_K}$ ,  $d = \frac{a}{A_K}$  - позитивні числа.

Значення  $c$  і  $d$  вибирають з ряду  $(1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5; 6) \cdot 10^n$ , де  $n=1; 0; -1; -2$  і т.ін.,  $d < c$ .  $A_K$  - кінцеве значення діапазону вимірювання.

## Приклади розв'язку задач

1. Визначити клас точності вольтметра, якщо показання вольтметра 5В на шкалі 10В і напруга виміряна з похибкою  $\pm 1\%$ .

*Розв'язання*

Дано:

$$U_v = 5B$$

$$U_k = 10B$$

$$\delta_v = \pm 1\%$$

$$K_v = ?$$

1. Запишемо формулу для визначення класу точності

$$\text{вольтметра: } K_v = \frac{\Delta_{\max}}{U_k} \cdot 100$$

2. Максимальну абсолютну похибку знайдемо через задану

$$\text{відносну } \Delta_{\max} = \pm \frac{\delta \cdot U_v}{100\%}$$

3. Визначаємо клас точності приладу:

$$K_v = \frac{\delta \cdot U_v}{100\%} \cdot \frac{100}{U_k} = \frac{1\% \cdot 5B}{100\%} \cdot \frac{100}{10B} = 0,5$$

Відповідь:  $K_v = 0,5$ .

2. Визначити найбільшу різницю показань двох послідовно включених амперметрів із шкалами 1мА і класами точності 0,1 і 0,5 при вимірюванні струму 0,5 мА.

*Розв'язання*

Дано:

$$I_{k1} = I_{k2} = 1mA$$

$$K_1 = 0,1$$

$$K_2 = 0,5$$

$$I = 0,5mA$$

$$(I_1 - I_2)_{\max} = ?$$

1. При послідовному включенні амперметрів струм, що протікає через них, однаковий і дорівнює  $I = 50\text{мкА}$ . А показання амперметрів будуть різними:

$$I_1 = I \pm \Delta_1$$

$$I_2 = I \pm \Delta_2$$

2. Знайдемо похибки вимірювань кожного амперметра:

$$\Delta_1 = \pm \frac{K_1 \cdot I_{k1}}{100} = \pm \frac{0,1 \cdot 1mA}{100} = \pm 1\text{мкА}$$

$$\Delta_2 = \pm \frac{K_2 \cdot I_{k2}}{100} = \pm \frac{0,5 \cdot 1mA}{100} = \pm 5\text{мкА}$$

3. Запишемо покази амперметрів

$$I_1 = 500 \pm 1[\text{мкА}]$$

$$I_2 = 500 \pm 5[\text{мкА}]$$

4. Найбільша різниця показань амперметрів буде, коли, наприклад, показання одного з них найбільші  $I_1 = I + \Delta_1$ , а другого – найменші  $I_2 = I - \Delta_2$ , тобто

$$(I_1 - I_2)_{\max} = (I + \Delta_1) - (I - \Delta_2) = \Delta_1 + \Delta_2 = 1 + 5 = 6\text{мкА}$$

Відповідь:  $(I_1 - I_2)_{\max} = 6\text{мкА}$

### Задачі для самостійного розв'язку

1. Визначте клас точності міліамперметра з кінцевим значенням шкали  $I_k = 1\text{мА}$  для виміру струму в діапазоні  $I_x = (0,1\dots 0,5)\text{мА}$  так, щоб відносна похибка вимірів не перевищувала  $0,1\%$ .
2. Визначте показання двох послідовно включених міліамперметрів із кінцевим значенням шкал  $I_k = 100\text{мА}$  і класами точності  $K_1 = 1,0$ ,  $K_2 = 0,5$ . Дійсне значення струму при вимірі  $I = 50\text{мА}$ . Визначити найбільшу різницю в показаннях двох міліамперметрів.
3. Визначити клас точності міліамперметра з кінцевим значенням шкали  $I_k = 0,5\text{мА}$ , якщо граничне значення абсолютної похибки дорівнює  $\pm 0,0015\text{мА}$ .
4. Необхідно виміряти струм  $I = 4\text{мА}$ . Для цього є два міліамперметри: один класу точності 1,0 із межею вимірювань 20 мА, другий класу точності 2,5 із межею вимірювань 5 мА. Який із приладів забезпечить більш високу точність вимірювань?
5. Два амперметри включені послідовно. Показання першого приладу з класом точності  $K_1 = 0,5$  складають 10 мА на межі вимірів 20 мА. Визначити показання другого приладу з класом точності  $K_2 = 2,5$  на межі вимірів 50 мА.
6. При перевірці після ремонту вольтметра класу точності 1,5 із кінцевим значенням шкали 5В у точках шкали 1, 2, 3, 4, 5В отримані відповідно наступні значення показання зразкового приладу: 0,95; 2,07; 3,045; 4,075; 4,95В. Визначити, чи зберігся клас точності приладу.
7. На якій шкалі приладу проведені вимірювання, якщо похибка складає  $\Delta = \pm 0,25\text{ В}$  при класі точності приладу 1,0?
8. Який клас точності має амперметр, якщо при вимірюванні струму на шкалі 100мкА виміряне значення 10мкА з відносною похибкою  $\pm 1\%$ ?
9. Запишіть результат вимірювання струму в колі, якщо показання амперметра класу точності 0,1 дорівнює 4,5А на шкалі з кінцевим значенням 10А.
10. Визначити, який клас точності повинен мати вольтметр з кінцевим значенням шкали 10В, щоб при вимірюванні напруги в діапазоні від 5 В до 10 В похибка не перевищувала  $0,01\%$ .
11. Що означає клас точності 0,5/0,2 цифрового амперметра з границею вимірювання  $I_k = 5\text{А}$ ?
12. Визначити абсолютну похибку вимірювання напруги цифровим приладом з кінцевим значенням шкали 50 В, покази вольтметра 25 В, з відносною похибкою

$$\delta_{\text{гр}} = \pm \left[ 0,5 + 0,2 \left( \frac{U_K}{U_x} - 1 \right) \right] \%$$

13. Визначити, вольтметром якого класу точності можна виміряти напругу 10 В з похибкою  $0,1\%$  і кінцевим значенням шкали 20 В.

## 2.2. Методичні похибки

Методичні похибки з'являються внаслідок недосконалості розробленого методу вимірювання даної величини: неточності формул, виведених з деякими припущеннями; впливу вимірювального приладу на об'єкт вимірювання.

В наведених нижче задачах систематичні методичні похибки обумовлені в основному впливом на результат вимірювання внутрішніх опорів вимірювальних приладів та особливостями схем вимірювання.

Для компенсації методичної похибки вводиться поправка, яка є абсолютною методичною похибкою зі зворотним знаком:  $\Pi = -\Delta_M$ .

### Приклади розв'язку задач:

1. Виміряти ЕРС джерела  $E$  з внутрішнім опором  $r$  вольтметром, вхідний опір якого  $R_V$ , покази  $U_V$

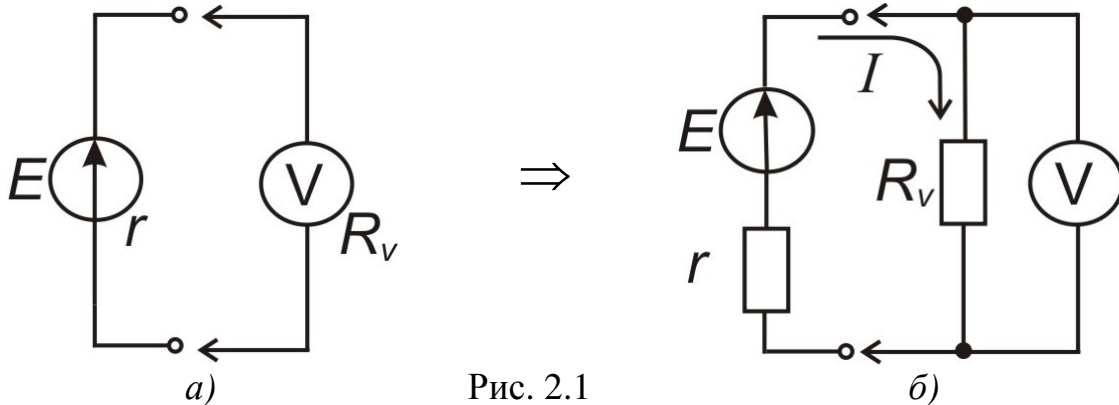


Рис. 2.1

Визначимо абсолютну методичну похибку як різницю між виміряним  $U_{\text{вим}}$  та істинним  $U_{\text{іст}}$  значенням напруги джерела  $E$ :

$$\Delta_M = U_{\text{вим}} - U_{\text{іст}}.$$

Відносна методична похибка – це відношення абсолютної похибки  $\Delta_M$  до істинного значення напруги  $U_{\text{іст}}$

$$\delta_M = \frac{\Delta_M}{U_{\text{іст}}} = \frac{U_{\text{вим}}}{U_{\text{іст}}} - 1.$$

Істинним значенням напруги джерела є величина  $U_{\text{іст}} = E$ , коли вольтметр не підключено до схеми і він своїм вхідним опором не шунтує джерело  $E$ .

Вимірне значення  $U_{\text{вим}}$  знаходимо, використовуючи схему на рис. 2.1 б).

$$U_{\text{вим}} = U_{12} = I \cdot R_V = \frac{E}{r + R_V} R_V.$$

Підставимо вирази для  $U_{\text{вим}}$  і  $U_{\text{іст}}$  в формулу для  $\delta_M$ , одержимо:

$$\delta_M = \frac{\frac{E}{r + R_V} R_V}{E} - 1 = -\frac{r}{r + R_V}.$$

Абсолютна методична похибка:

$$\Delta_M = \delta_M \cdot E \approx \delta_M \cdot U_V,$$

де  $U_V$  – покази вольтметра.

Для компенсації методичної похибки вводиться поправка

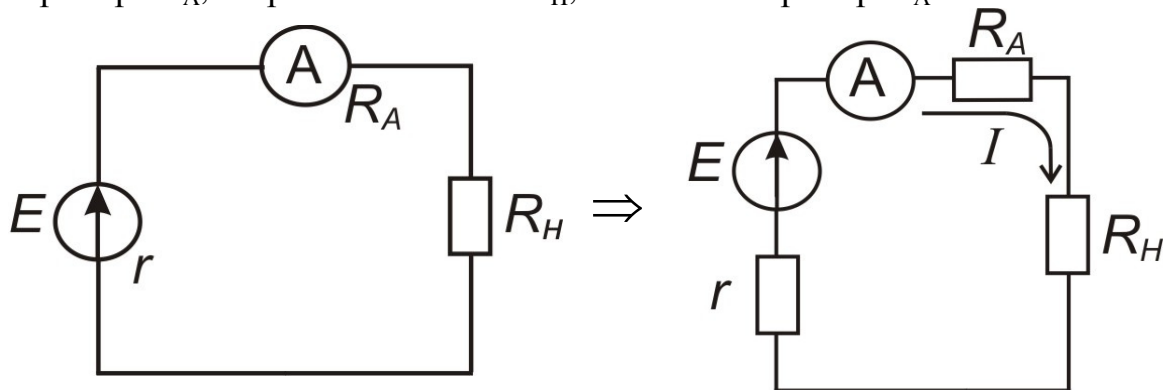
$$\Pi = -\Delta_M = -\delta_M \cdot E = -\delta_M \cdot U_V.$$

Результат вимірювання можна записати як

$$1) E = U_V + \Pi = U_V - \delta_M \cdot U_V = U_V (1 - \delta_M) \text{ або}$$

$$2) E = U_V - \delta_M \cdot E, E = \frac{U_V}{1 + \delta_M}.$$

2. Виміряти струм у колі. Внутрішній опір джерела напруги  $r$ , внутрішній опір амперметра  $R_A$ , опір навантаження  $R_H$ , покази амперметра  $I_A$ .



Абсолютна методична похибка вимірювання струму

$$\Delta_M = I_{\text{вим}} - I_{\text{іст}}.$$

де  $I_{\text{вим}}$  і  $I_{\text{іст}}$  – виміряне та істинне значення струму відповідно.

Відносна методична похибка

$$\delta_M = \frac{\Delta_M}{I_{\text{іст}}} = \frac{I_{\text{вим}}}{I_{\text{іст}}} - 1.$$

Істинне значення струму в колі буде при відсутності в ньому амперметра:

$$I_{\text{іст}} = \frac{E}{r + R_H}.$$

Виміряне значення знайдемо при наявності в колі амперметра:

$$I_{\text{іст}} = \frac{E}{r + R_A + R_H}.$$

Визначимо відносну методичну похибку:

$$\delta_M = \frac{\frac{E}{r + R_A + R_H} - \frac{E}{r + R_H}}{\frac{E}{r + R_H}} - 1 = \frac{r + R_H}{r + R_A + R_H} - 1 = -\frac{R_A}{r + R_A + R_H}.$$

Абсолютна методична похибка:

$$\Delta_M = \delta_M \cdot I_{\text{іст}} \approx \delta_M \cdot I_A,$$

де  $I_A$  – покази амперметра.

Для компенсації методичної похибки вводиться поправка

$$\Pi = -\Delta_M = -\delta_M \cdot I_{\text{іст}} \approx -\delta_M \cdot I_A.$$

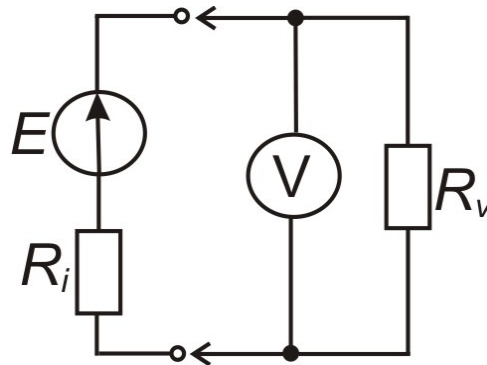
З урахуванням поправки результат вимірювання можна записати у вигляді:

$$1) I = I_A + \Pi = I_A - \delta_M \cdot I_A = I_A (1 - \delta_M) \text{ або}$$

$$2) I = I_A - \delta_M \cdot I, I = \frac{I_A}{1 + \delta_M}.$$

3. Напряга джерела з внутрішнім опором  $R_i = (60 \pm 10) \Omega$  за показами вольтметра складає  $U_v = 12,35 \text{ В}$  з допустимою похибкою  $\pm 0,5\%$  на шкалі  $U_k = 15 \text{ В}$ . Вхідний опір вольтметра  $R_v = 5 \text{ к}\Omega$ . Визначити систематичну похибку, обумовлену шунтуючою дією вольтметра. Ввести поправку. Оцінити невиключений залишок систематичної похибки.

### Розв'язання



1) Визначимо інструментальну похибку вимірювання напруги

$$\Delta_u = \frac{\delta_v U_v}{100\%} = \pm \frac{0,5\% \cdot 12,35 \text{ В}}{100\%} = \pm 0,06 \text{ В}$$

2) Розрахуємо методичну похибку вимірювання і поправку:

Абсолютна методична

$$\Delta_M = U_{\text{вим.}} - U_{\text{ист.}}$$

Відносна методична

$$\delta_M = \frac{\Delta_M}{U_{\text{ист.}}} = \frac{U_{\text{вим.}}}{U_{\text{ист.}}} - 1 = \frac{E \cdot R_v}{(R_i + R_v) \cdot E} - 1 = -\frac{R_i}{R_i + R_v}$$

$$\Delta_M \approx \delta_M \cdot U_v = -\frac{60 \Omega}{(60 + 5000) \Omega} \cdot 12,35 \text{ В} = -0,15 \text{ В}$$

Поправка:

$$\Pi = -\Delta_M = 0,15 \text{ В}$$

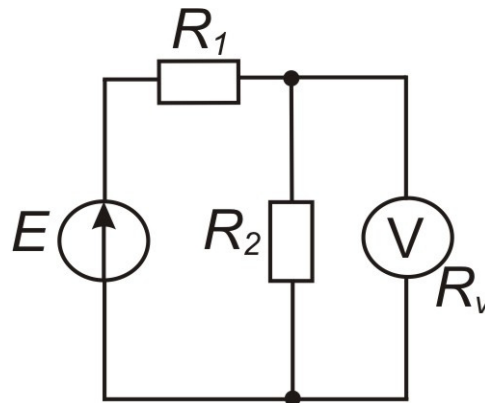
3) Знайдемо невиключений залишок систематичної похибки (похибки поправки):

$$\Delta_{\Pi} = \pm \frac{\partial \Pi}{\partial U_v} \cdot \Delta U_v = \pm \delta_M \cdot \Delta U_v = \pm 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ В}$$

Оскільки  $|\Delta_{\Pi}| \ll |\Delta_U|$ , нею можна знехтувати.

$$\text{Результат вимірювання: } E = (12,35 + 0,15) \pm 0,06 = 12,5 \pm 0,1 [\text{В}]$$

4. Визначити спад напруги на резисторі  $R_2$ , якщо показ вольтметра  $U_V = 10B$  з похибкою  $\pm 0,1\%$  і  $R_2 = \frac{R_1}{2}$ ,  $R_V = 10R_1$ .

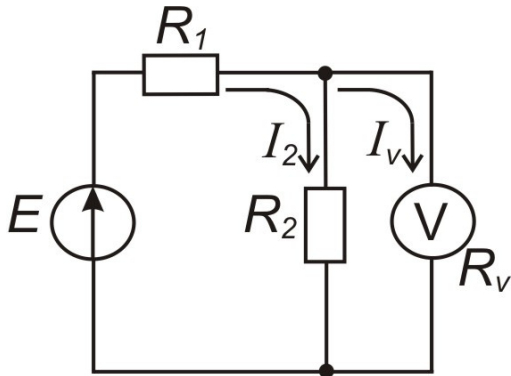


### Розв'язання

1) Визначимо інструментальну похибку вимірювання напруги

$$\Delta_u = \frac{\delta_v U_V}{100\%} = \pm \frac{0,1\% \cdot 10B}{100\%} = \pm 0,01B$$

2) Визначимо методичну похибку вимірювання напруги на опорі  $R_2$ .



$$3. \Delta_M = U_{\text{вим.}} - U_{\text{іст.}}$$

$$\delta_M = \frac{\Delta_M}{U_{\text{іст.}}} = \frac{U_{\text{вим.}}}{U_{\text{іст.}}} - 1 = \frac{\frac{E \cdot R_{\parallel}}{R_1 + \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V} - R_{\parallel}}}{\frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2}} - 1,$$

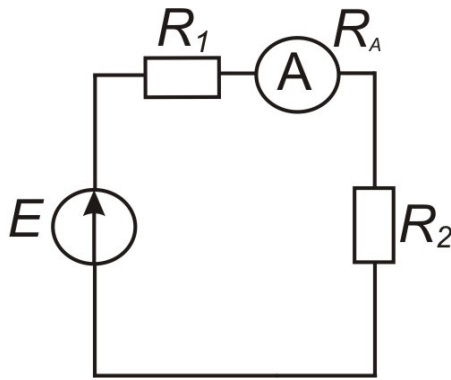
$$\text{де } R_{\parallel} = \frac{R_2 \cdot R_V}{R_2 + R_V} = \frac{R_1/2 \cdot 10R_1}{R_1/2 + 10R_1} = \frac{10}{21} R_1$$

$$\delta_M = \frac{(10/21)R_1 \cdot (R_1 + R_1/2)}{(R_1 + (10/21)R_1)R_1/2} - 1 = -\frac{1}{31}$$

$$\Delta_M \approx \delta_M U_V = -\frac{10B}{31} = -0,32B; \quad \Pi = -\Delta_M = 0,32B$$

Результат вимірювання  $U_2 = U_V + \Pi \pm \Delta_U = 10,32 \pm 0,01[B]$

5. Визначити струм у колі, якщо покази амперметра з класом точності  $K_A = 0,1$  на шкалі  $5mA$  дорівнюють  $I_A = 4mA$  і  $R_2 = 2R_1$ ,  $R_A = \frac{R_1}{2}$ .



### Розв'язання

1) Визначимо інструментальну похибку вимірювання струму за класом точності амперметра

$$\Delta_I = \pm \frac{K_A I_K}{100\%} = \pm \frac{1,0\% \cdot 5\text{mA}}{100\%} = \pm 0,05\text{mA}$$

2) Розрахуємо методичну похибку вимірювання та поправку з врахуванням опору амперметра  $R_A$ .

Відносна методична похибка:

$$\delta_M = \frac{\Delta_M}{I_{\text{ист.}}} = \frac{I_{\text{вим.}} - I_{\text{ист.}}}{I_{\text{ист.}}} = \frac{I_{\text{вим.}}}{I_{\text{ист.}}} - 1;$$

Вимірне значення  $I_{\text{вим.}}$  знайдемо за законом Ома для повного кола.

$$I_{\text{вим.}} = \frac{E}{R_1 + R_A + R_2} = \frac{2 \cdot E}{7 \cdot R_1}.$$

Істинне значення  $I_{\text{ист.}}$  знайдемо аналогічно при відсутності амперметра в колі.

$$I_{\text{ист.}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{E}{3 \cdot R_1}.$$

Тоді

$$\delta_M = \frac{\frac{E \cdot 3R_1}{7} - \frac{E}{3}}{\frac{E}{3}} - 1 = \frac{6R_1 - 7R_1}{7R_1} = -\frac{1}{7}$$

Абсолютна методична похибка:

$$\Delta_M = \delta_M \cdot I_{\text{ист.}} \approx \delta_M I_A = -\frac{1}{7} \cdot 4\text{mA} = -0,57\text{mA}$$

Поправка П:

$$P = -\Delta_M = 0,57\text{mA}$$

3) Знайдемо невиключений залишок систематичної похибки (похибки поправки):

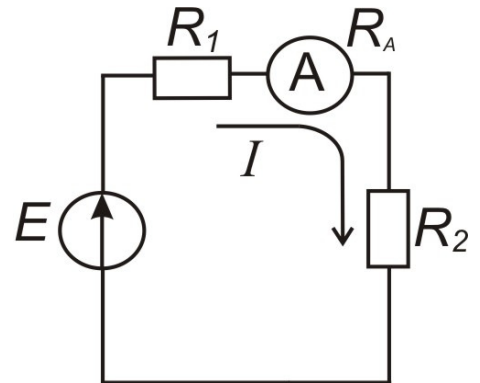
$$P = f(\delta_M, I_A), \quad \delta_M = \text{const}$$

$$\Delta_P = \pm \frac{\partial P}{\partial I} \cdot \Delta_I = \pm \delta_M \cdot \Delta_I = \pm \frac{0,05\text{mA}}{7} = \pm 0,007\text{mA}$$

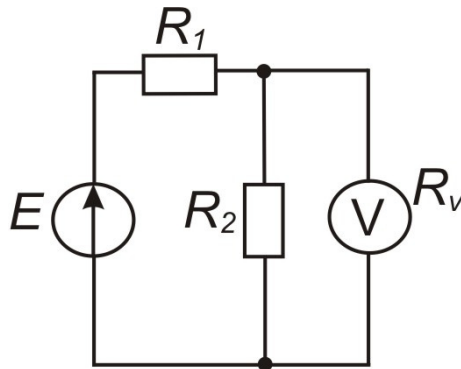
Сумарна інструментальна похибка  $\Delta_\Sigma = \pm \sqrt{\Delta_I^2 + \Delta_P^2}$ . Оскільки  $|\Delta_P| \ll |\Delta_I|$ , нею можна знехтувати.

Результат вимірювання

$$I = I_A + P \pm \Delta_I = 4,57 \pm 0,05[\text{mA}]$$



6. Визначити спад напруги на резисторі  $R_2$ , якщо покази вольтметра з класом точності 2,0 на шкалі 5В дорівнюють 4В і  $R_2 = 2R_1$ ,  $R_V = 10R_2$ .



**Розв'язання**

Дано:  $K_V=2,0$

$U_K=5В$

$U_V=4В$

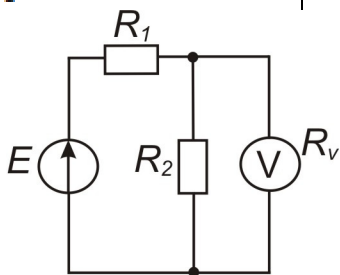
$R_2=2R_1$

$R_V=10R_2$

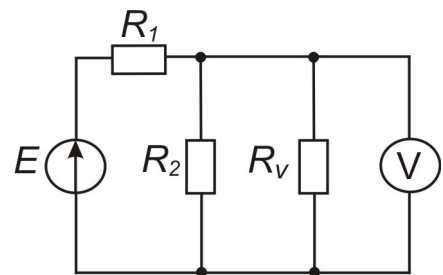
$U_{R_2}=?$

Знайдемо абсолютну похибку вимірювання вольтметром за його класом точності:

$$\Delta_V = \pm \frac{K_V * U_K}{100\%} = \pm \frac{2,0\% * 5В}{100\%} = \pm 0,1В$$



$\Rightarrow$



Визначимо методичну похибку.

$$\delta_M = \frac{U_{\text{вим}}}{U_{\text{ист}}} - 1$$

$$U_{\text{вим}} = \frac{E * R_{\parallel}}{R_1 + R_{\parallel}}$$

$$R_{\parallel} = \frac{R_2 * R_V}{R_2 + R_V} = \frac{2R_1 * 20R_1}{2R_1 + 20R_1} = \frac{2 * 20}{22} R_1 = \frac{20}{11} R_1$$

$$U_{\text{вим}} = \frac{E * \frac{20}{11} R_1}{R_1 + \frac{20}{11} R_1} = \frac{20}{31} E$$

$$U_{\text{ист}} = \frac{E * R_2}{R_1 + R_2} = \frac{E * 2R_1}{R_1 + 2R_1} = \frac{2}{3} E$$

$$\delta_M = \frac{\frac{20}{31} E}{\frac{2}{3} E} - 1 = \frac{30}{31} - 1 = -\frac{1}{31}$$

Абсолютна методична похибка та поправка:

$$\Pi = -\Delta_M = -\delta_M * U_V = \frac{1}{31} * 4B = 0,13B$$

Можна визначити похибку поправки:

$$\Delta_{\pi} = \pm \frac{\partial \Pi}{\partial U} \Delta_V = \pm \delta_M * \Delta_V = \pm \frac{1}{31} * 0,1B = \pm 0,003B$$

Оскільки величина похибки поправки значно менша за модулем, ніж інструментальна похибка  $\Delta_V$ , похибкою поправки знехтуємо.

Результат вимірювання:  $U_{R_2} = 4B + 0,13B \pm 0,1B = 4,13 \pm 0,1 [B]$ .

7. Яким повинне бути відношення внутрішнього опору вольтметра і вихідного опору кола, в якому вимірюють напругу, щоб відносна методична похибка вимірювання напруги не перевищувала 0,2%; 0,5%; 1,5%.

### Розв'язання

1. Знайдемо відносну методичну похибку:

$$\delta_m = \frac{U_{\text{вим.}}}{U_{\text{іст.}}} - 1 = \frac{IR_{\parallel}}{IR_{\text{вих.}}} - 1 = \frac{R_{\parallel}}{R_{\text{вих.}}} - 1,$$

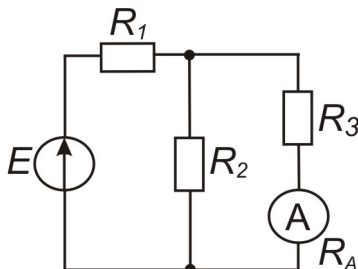
де  $R_{\parallel} = \frac{R_{\text{вих.}} \cdot R_v}{R_{\text{вих.}} + R_v}$

$$|\delta_m| = \frac{100\%}{1 + \frac{R_v}{R_{\text{вих.}}}} = 0,2\%$$

$$1 + \frac{R_v}{R_{\text{вих.}}} = \frac{100\%}{\delta_m}; \quad \frac{R_v}{R_{\text{вих.}}} = \frac{100\%}{\delta_m(\%) } - 1 = \frac{100}{0,2} - 1 \approx 500$$

Відповідь:  $\frac{R_v}{R_{\text{вих.}}} = 500; 200; 66.$

8. Знайти вираз для методичної похибки  $\delta_m$  при вимірюванні струму в колі



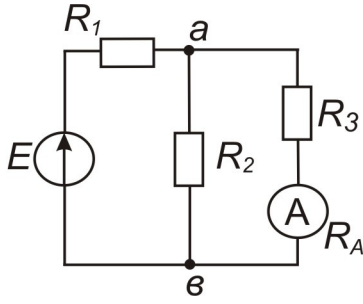
$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 = R, \\ R_3 &= 2R, \\ R_A &= R/2. \end{aligned}$$

### Розв'язання

Для розрахунку методичної похибки розрахуємо струм через опір  $R_3$  при наявності (вимірюване значення) і відсутності (істинне значення) амперметра.

Розрахуємо істинне значення струму:

$$I_{\text{іст.}} = \frac{U_{\text{ав}}}{R_3}; \quad U_{\text{ав}} = I * R_{23} = \frac{E * R_{23}}{R_1 + R_{23}}; \quad R_{23} = \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R * 2R}{3R} = \frac{2}{3}R$$



$$I_{icm} = \frac{E * \frac{2}{3}R}{(R + \frac{2}{3}R * 2R)} = \frac{E}{5R}$$

Розрахуємо вимірне значення струму.

$$U'_{ab} = I' R'_{23} = \frac{E * R'_{23}}{R_1 + R'_{23}}$$

$$R'_{23} = \frac{R_2(R_3 + R_A)}{R_2 + R_3 + R_A} = \frac{R * \left(2R + \frac{R}{2}\right)}{R + 2R + \frac{R}{2}} = \frac{5R}{7}$$

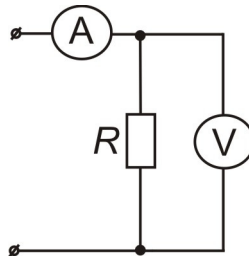
$$U'_{ab} = \frac{E * \frac{5}{7}R}{R + \frac{5}{7}R} = \frac{5E}{12}$$

$$I'_{вим} = \frac{U'_{ab}}{R_3 + R_A} = \frac{5E}{12 * \left(2R + \frac{R}{2}\right)} = \frac{5 * E * 2}{12 * 5R} = \frac{E}{6R}$$

$$\delta_M = \frac{I'_{вим}}{I_{icm}} - 1 = \frac{E * 5R}{6R * E} = \frac{1}{6}$$

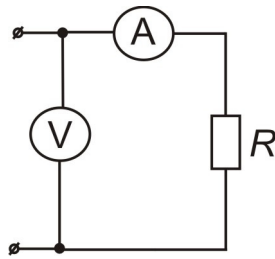
### Задачі для самостійного розв'язку

1. Визначити методичну похибку при вимірюванні струму в колі з  $R = 100 \Omega$  амперметром, що має опір  $R_A = 100 \Omega$ , якщо покази амперметра 50 мА.
2. Одержати формулу для визначення методичної похибки вимірювання опору  $R$  опосередкованим методом.



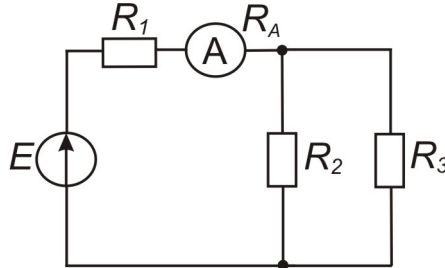
$R_v = 10R; R_A = R/10$ ; покази приладів  $I_A, U_v$

3. Одержати формулу для визначення методичної похибки вимірювання опору  $R$  опосередкованим методом.

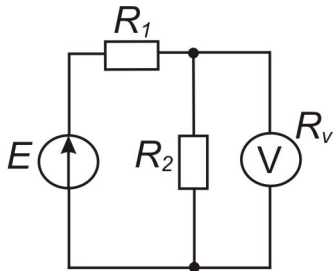


$R_v = 10R; R_A = R/10$ ; покази приладів  $I_A, U_v$

4. Знайти струм у колі, якщо покази амперметра 10мА на шкалі 20 мА з класом точності 0,5;  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ ;  $R_A = \frac{R}{2}$ .



5. Одержати формулу для визначення методичної похибки вимірювання потужності, що розсіюється на опорі  $R_2$ .

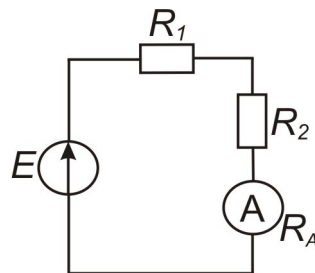


$$R_2 = 2R_1$$

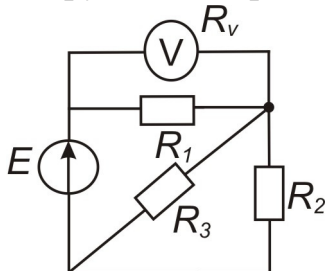
$$R_v = 10R_2$$

$$U_v = U$$

6. Одержати формулу для визначення методичної похибки вимірювання потужності, що розсіюється на опорі  $R_2$ .  $R_2 = R_1, R_A = \frac{R_1}{2}$



7. Одержати формулу для визначення методичної похибки вимірювання напруги на опорі  $R_1$ .



$$R_2 = 2R_3$$

$$R_1 = R_2$$

$$R_v = 5R_1$$

$$U_v = U$$

8. Визначити напругу на резисторі  $R = 10\text{кОм}$ , яка вимірюється вольтметром зі шкалою  $U_k 10\text{В}$ , класом точності  $K_v = 2,5$  і вхідним опором  $R_v = 100\text{кОм}$ . Показання вольтметра  $U_v = 5\text{В}$ .

### 2.3. Похибки опосередкованих вимірювань

При опосередкованих (непрямих) вимірюваннях вимірювана величина  $A$  функціонально зв'язана з іншими величинами  $x, y, \dots, t$ , які знайдені прямими вимірюваннями:  $A=f(x, y, \dots, t)$ . Абсолютну похибку результату непрямих вимірювань знаходять як суму випадкових похибок:

$$\Delta_A = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \Delta_t^2}$$

де доданки є квадратами частинних похибок прямих вимірювань.

В додатку наводиться таблиця 1 абсолютних і відносних похибок опосередкованих вимірювань функцій, які найчастіше зустрічаються.

#### Приклади розв'язку задач

1. Визначити потужність, що розсіюється резистором з опором  $R = (10 \pm 0,1) \text{ Ом}$ , якщо виміряне вольтметром класу точності 0,1 значення напруги дорівнює 5В на шкалі 10В.

#### Розв'язання

<p>Дано:  <math>R = (10 \pm 0,1) \text{ Ом}</math>  <math>U_v = 5 \text{ В}</math>  <math>U_k = 10 \text{ В}</math>  <math>K_v = 0,1</math></p>	<p>Визначимо похибку вимірювання напруги за класом точності вольтметра:</p> $\Delta_v = \pm \frac{K_v * U_k}{100\%} = \pm \frac{0,1\% * 10 \text{ В}}{100\%} = \pm 0,01 \text{ В}$
---	--

$P$ -?

Виміряне значення потужності знайдемо за формулою:

$$P = U_v / R = 5^2 \text{ В}^2 / 10 \text{ Ом} = 2,5 \text{ Вт}$$

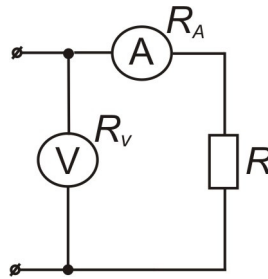
Похибку потужності знайдемо за формулою:

$$\Delta_P = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \Delta_U\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} \Delta_R\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{2U}{R} \Delta_U\right)^2 + \left(\frac{U^2}{R^2} \Delta_R\right)^2} =$$

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{2 * 5}{10} * 0,01\right)^2 \text{ Вм}^2 + \left(\frac{(5)^2}{(10)^2} * 0,1\right)^2 \text{ Вм}^2} = \pm \sqrt{10^{-4} \text{ Вм}^2 + 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ Вм}^2} = \pm 0,027 \text{ Вт}$$

Відповідь:  $P = 2,50 \pm 0,03$  [Вт]

2. Визначити потужність, що розсіюється на резисторі  $R$ , якщо покази вольтметра з класом точності 1,0 на шкалі 5В складають 2В, а покази амперметра дорівнюють  $(2 \pm 0,05) \text{ А}$  і  $R_A = R/10$ .



**Розв'язання:**

Дано:  $K_V=1,0$   
 $U_K=5B$   
 $U_V=2B$   
 $I_A=(2\pm 0,05)A$   
 $R_A=R/10$

$P=?$

Знайдемо похибку вимірювання напруги за класом точності вольтметра:

$$\Delta_U = \pm \frac{K_V * U_K}{100\%} = \pm \frac{1,0\% * 5B}{100\%} = \pm 0,05B$$

Запишемо вираз для визначення вимірної потужності і розрахуємо P:

$$P = U * I = U_V * I_A = 5B * 2A = 10Bт$$

Знайдемо інструментальну похибку вимірювання потужності:

$$\Delta_P = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \Delta_U\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I} \Delta_I\right)^2} = \pm \sqrt{(I \Delta_U)^2 + (U \Delta_I)^2} = \pm \sqrt{(2 * 0,05)^2 + (2 * 0,05)^2} =$$

$$= \pm 2\sqrt{2} * 0,05Bт = \pm 0,14Bт$$

Знайдемо методичну похибку та поправку вимірювання потужності відповідно до схеми вимірювання:

Відносна методична похибка

$$\delta_M = \frac{P_{вим}}{P_{ист}} - 1 = \frac{U_V I_A}{U_R I_R} - 1 = \frac{U_V I_A}{(U_V - U_A) I_A} - 1 = \frac{U_A}{U_V - U_A} = \frac{1}{\frac{U_V}{I_A * R_A} - 1} = \frac{1}{\frac{R}{R_A} - 1} = \frac{1}{10 - 1} = \frac{1}{9}$$

Абсолютна методична похибка:

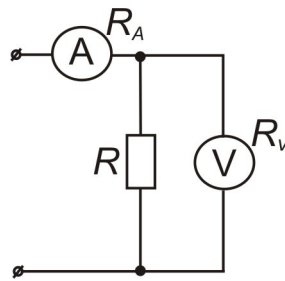
$$\Delta_M \approx \delta_M * P_M = \frac{1}{9} * 10Bт \approx 1,1Bт$$

Поправка до вимірної потужності:

$$\Pi = -\Delta_M = -1,1Bт$$

$$\text{Відповідь: } P = P_{вим} + \Pi \pm \Delta_P = [(10 - 1,1) \pm 0,14] Bт = 8,9 \pm 0,1 Bт$$

**3.** Визначити потужність, що розсіюється на резисторі R, якщо показ вольтметра з класом точності 1,0 на шкалі 5В складає 2В, а показ амперметра – 5мА з похибкою  $\pm 0,1\%$ ;  $R_V = 10R$ .



### Розв'язання

Дано:  $K_V=1,0$   
 $U_K=5B$   
 $U_V=2B$   
 $I_A=5mA$   
 $\delta_A=\pm 0,1\%$   
 $R_V=10R$

Р-?

Знайдемо абсолютну похибку вимірювання напруги за класом точності вольтметра:

$$\Delta_V = \pm \frac{K_V * U_K}{100\%} = \pm \frac{1,0\% * 5B}{100\%} = \pm 0,05B$$

Абсолютну похибку вимірювання струму знайдемо за її відносною:

$$\Delta_I = \pm \frac{\delta_I * I_A}{100\%} = \pm \frac{0,1\% * 5mA}{100\%} = \pm 0,005mA = 5 * 10^{-6}A$$

Потужність, що розсіюється на опорі R:

$$P = U_V * I_A = 2B * 5mA = 10mBt$$

Знайдемо абсолютну похибку вимірювання потужності за формулою для опосередкованого вимірювання:

$$\Delta_P = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \Delta_V\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I} \Delta_I\right)^2} = \pm \sqrt{(I \Delta_V)^2 + (U \Delta_I)^2} =$$

$$= \pm \sqrt{(5 * 10^{-3} * 5 * 10^{-2})^2 Bt + (2 * 5 * 10^{-6})^2 Bt} =$$

$$= \pm \sqrt{(25 * 10^{-5})^2 + (10^{-5})^2} = \pm 2,5 * 10^{-4} Bt = \pm 0,25mBt$$

Визначимо методичну похибку відповідно до схеми вимірювання та поправку.

$$\delta_M = \frac{P_{вим}}{P_{ист}} - 1 = \frac{U_V I_A}{U_R I_R} - 1 = \frac{U_V I_A}{U_V (I_A - I_V)} - 1 = \frac{I_V}{I_A - I_V} = \frac{I_V}{I_A} - 1 = \frac{1}{\frac{I_A * R_V}{U_V} - 1} = \frac{1}{\frac{R_V}{R} - 1} = \frac{1}{10 - 1} = \frac{1}{9}$$

$$\Delta_M \approx \delta_M * P_{вим} = \frac{1}{9} * 10mBt \approx 1,11mBt$$

$$\Pi = -\Delta_M = -1,11mBt$$

Запишемо результат вимірювання:

$$P = P_{вим} + \Pi \pm \Delta_P = [(10 - 1,11) \pm 0,25] mBt = 8,89 \pm 0,25 mBt$$

Можна визначити похибку поправки:

$$\Delta_\Pi = \pm \frac{\partial \Pi}{\partial P} \Delta_P = \pm \delta_M * \Delta_P = \pm \frac{1}{9} * 0,25mBt = \pm 0,03mBt$$

Але оскільки  $|\Delta_\Pi| \ll |\Delta_P|$ , нею знехтуємо.

**4.** Визначити клас точності амперметра при вимірюванні потужності на резисторі  $R=100$  Ом, якщо вимірювання потужності проведено з похибкою  $\pm 0,2Bt$ , а виміряне значення струму 1A на шкалі 2A.

### Розв'язання

Дано:  $R=100 \text{ Ом}$   
 $\Delta_P=\pm 0,2 \text{ Вт}$   
 $I_A=1 \text{ А}$   
 $I_K=2 \text{ А}$

$K_A=?$

Визначимо потужність, що виділяється на опорі  $R$ :

$$P=I^2 R$$

Похибка потужності

$$\Delta_P = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial I} \Delta_I\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} \Delta_R\right)^2}$$

Оскільки з умови задачі відомо, що  $\Delta R=0$ , формулу для  $\Delta_P$  можна спростити:

$$\Delta_P = \pm \frac{\partial P}{\partial I} \Delta_I = \pm \frac{\partial(I^2 R)}{\partial I} \Delta_I = 2IR \Delta_I$$

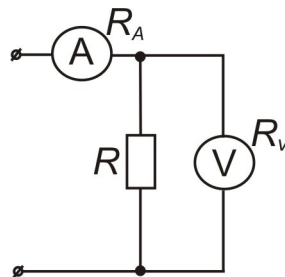
За відомою абсолютною похибкою потужності знайдемо похибку вимірювання струму:

$$\Delta_I = \pm \frac{\Delta_P}{2IR} = \pm \frac{0,2 \text{ Вт}}{2 * 1 * 100 \text{ А} * 0 \text{ Ом}} = \pm 0,001 \text{ А}$$

Клас точності амперметра:

$$K_A = \frac{\Delta_I}{I_K} * 100\% = \frac{0,001 \text{ А}}{2 \text{ А}} * 100\% = 0,05\%$$

5. Визначити опір резистора  $R$ , якщо показання вольтметра з класом точності 1,0 на шкалі 5В дорівнюють 4В, а показання амперметра з класом точності  $K_A=0,5$  дорівнюють 2мА. Вхідний опір вольтметра  $R_V = 10R$ . Зверніть увагу на позначення класу точності амперметра.



### Розв'язання

Дано:  $K_V=1,0$   
 $U_K=5 \text{ В}$   
 $U_V=4 \text{ В}$   
 $K_A=0,5$   
 $R_V=10R$

$R=?$

Знайдемо інструментальну похибку вимірювання напруги:

$$\Delta_U = \pm \frac{K_V * U_K}{100\%} = \pm \frac{1,0\% * 5 \text{ В}}{100\%} = \pm 0,05 \text{ В}$$

Знайдемо інструментальну похибку вимірювання струму:

$$\Delta_I = \pm \frac{K_A * I_A}{100\%} = \pm \frac{0,5\% * 2 \text{ мА}}{100\%} = \pm 0,01 \text{ мА}$$

Опір резистора:

$$R = \frac{U_V}{I_A} = \frac{4 \text{ В}}{2 \text{ мА}} = 2 \text{ кОм}$$

Похибка вимірювання опору опосередкованим методом:

$$\Delta_R = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \Delta_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \Delta_I\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta_U}{I}\right)^2 + \left(\frac{U \Delta_I}{I^2}\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{0,05}{2 \cdot 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 1 \cdot 10^{-5}}{(2 \cdot 10^{-3})^2}\right)^2} \text{ Ом} = \pm \sqrt{625 + 100} \\ = \pm 26,93 \text{ Ом}$$

Розрахуємо методичну похибку, обумовлену вхідним опором вольтметра  
Наведемо схему вимірювання опору резистора:

$$\delta_M = \frac{R_{\text{вим}}}{R_{\text{ист}}} - 1 = \frac{\frac{U_V}{I_A}}{\frac{U_V}{I_R}} - 1 = \frac{U_V(I_A - I_V)}{U_V I_A} - 1 = -\frac{I_V}{I_A} = -\frac{U_V}{I_A R_V} = -\frac{R}{R_V} = -\frac{1}{10}$$

$$\Delta_M \approx \delta_M \cdot R = -\frac{1}{10} \cdot 2 \text{ кОм} = -200 \text{ Ом}$$

Поправка:

$$\Pi = -\Delta_M = 200 \text{ Ом}$$

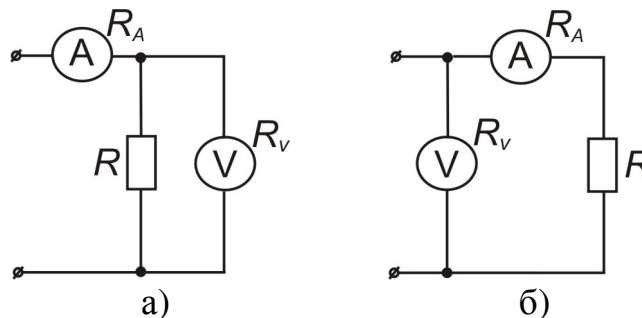
Можна визначити похибку поправки:

$$\Delta_{\Pi} = \pm \frac{\partial \Pi}{\partial R} \Delta_R = \pm \delta_M \cdot \Delta_R = \pm \frac{1}{10} \cdot 26,93 \text{ Ом} = \pm 2,69 \text{ Ом}$$

Результат вимірювання:

$$R = R_{\text{вим}} + \Pi \pm \sqrt{\Delta_R^2 + \Delta_{\Pi}^2} = 2000 + 200 \pm \sqrt{(26,93)^2 + (2,69)^2} = 2200 \pm 27 \text{ [Ом]}$$

6. Вибрати схему для вимірювання опору резистора R з найменшою похибкою, якщо покази вольтметра з класом точності 1,0 на шкалі 5В складають 2В, а покази амперметра  $I_a = (5 \pm 0,1) \text{ мА}$ . Вхідний опір вольтметра  $R_V = 10R$ , внутрішній опір амперметра  $R_A = R/10$ .



### Розв'язання

Дано:  $K_V = 1,0$

$U_K = 5 \text{ В}$

$U_V = 2 \text{ В}$

$I_A = (5 \pm 0,1) \text{ мА}$

$R_A = R/10$

$R_V = 10 R$

Знайдемо вимірне значення опору:

$$R = \frac{U_V}{I_A} = \frac{2 \text{ В}}{5 \text{ мА}} = 0,4 \text{ кОм} = 400 \text{ Ом}$$

Визначимо методичну похибку, обумовлену шунтуючою дією вольтметра (схема а):

$$\delta_M = \frac{R_{\text{вим}}}{R_{\text{ист}}} - 1 = \frac{U_V I_R}{I_A U_V} - 1 = \frac{U_V (I_A - I_V)}{I_A U_V} - 1 = -\frac{U_V}{I_A R_V} = -\frac{R}{R_V} = -\frac{1}{10}$$

Порівняти  $\delta_M$ ,  $\Pi$   
схем а) і б).

Визначимо методичну похибку, обумовлену внутрішнім опором амперметра (схема б):

$$\delta_M = \frac{R_{\text{вим}}}{R_{\text{ист}}} - 1 = \frac{U_V I_R}{I_A U_R} - 1 = \frac{U_V I_A}{I_A (U_V - U_A)} - 1 = \frac{U_A}{(U_V - U_A)} = \frac{1}{\frac{U_V}{U_A} - 1} = \frac{1}{\frac{U_V}{I_A R_A} - 1} = \frac{1}{\frac{R}{R_A} - 1} = \frac{1}{10 - 1} = \frac{1}{9}$$

Оскільки методичні похибки обох схем приблизно однакові **за модулем**, то для вимірювання даного опору можна вибрати будь-яку схему.

$$\text{а) } \Delta_M \approx \delta_M * R = -\frac{1}{10} * 400 \text{ Ом} = -40 \text{ Ом}$$

$$\text{б) } \Delta_M \approx \delta_M * R = \frac{1}{9} * 400 \text{ Ом} = 44,4 \text{ Ом}$$

Тому будемо шукати відносні похибки вимірювання опору за обома схемами і зробимо висновки.

Інструментальна похибка вимірювання напруги

$$\Delta_V = \pm \frac{K_V * U_K}{100\%} = \pm \frac{1,0\% * 5\text{В}}{100\%} = \pm 0,05\text{В}$$

Інструментальна похибка вимірювання опору

$$\Delta_R = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \Delta_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \Delta_I\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta_U}{I}\right)^2 + \left(\frac{U \Delta_I}{I^2}\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{5 * 10^{-2}}{5 * 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{2 * 10^{-4}}{25 * 10^{-8}}\right)^2} \text{ Ом} = \pm \sqrt{100 + 16} = \pm 10,8 \text{ Ом}$$

$$\text{а) } R = 400 + 40 \pm 10,8 \text{ [Ом]} = 440 \pm 10,8 \text{ [Ом]}$$

$$\text{б) } R = 400 - 44,4 \pm 10,8 \text{ [Ом]} = 355,6 \pm 10,8 \text{ [Ом]}$$

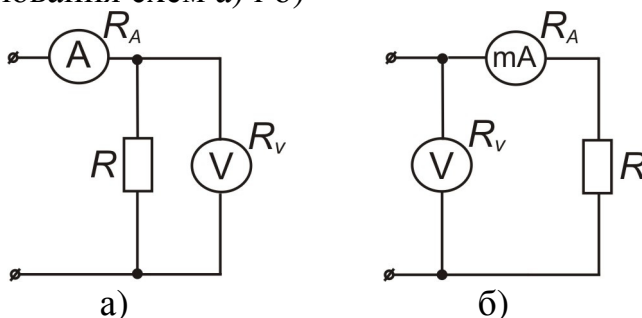
Знайдемо відносні похибки:

$$\text{а) } \sigma_R = \pm \frac{\Delta_R}{R} * 100\% = \pm \frac{10,8}{440} * 100\% = \pm 2,45\%$$

$$\text{б) } \sigma_R = \pm \frac{\Delta_R}{R} * 100\% = \pm \frac{10,8}{355,6} * 100\% = \pm 3,04\%$$

За схемою а) одержимо точніші результати.

7. Визначити похибку вимірювання опору резистора опосередкованим методом, якщо покази вольтметра 10В з похибкою  $\pm 0,1\%$ , а покази амперметра 100мА на шкалі 200мА, клас точності амперметра 2,0. Оцінити методичну похибку вимірювання схем а) і б)



$$R_V = 10R; R_A = \frac{R}{10}. \text{ Записати результати вимірювань.}$$

## Розв'язання

Дано:

$$\delta_V = \pm 0,1\%$$

$$U_V = 10\text{В}$$

$$I_A = 100\text{мА}$$

$$I_K = 200\text{мА}$$

$$K_A = 2,0$$

$$R_A = R/10$$

$$R_V = 10\text{ R}$$

---


$$\delta_M^{-1}, \Delta_R^{-1}?$$

Знайдемо абсолютні похибки вимірювання напруги та струму

$$\Delta_V = \pm \frac{\delta_V * U_V}{100\%} = \pm \frac{0,1\% * 10\text{В}}{100\%} = \pm 0,01\text{В}$$

$$\Delta_I = \pm \frac{K_A * I_K}{100\%} = \pm \frac{2,0\% * 200\text{мА}}{100\%} = \pm 4\text{мА}$$

Розрахуємо величину опору резистора R за вимірними значеннями напруги і струму:

$$R = \frac{U_V}{I_A} = \frac{10\text{В}}{100\text{мА}} = 0,1\text{кОм} = 100\text{ Ом}$$

Похибка вимірювання опору

$$\begin{aligned} \Delta_R &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \Delta_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \Delta_I\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{U \Delta_I}{I^2}\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{0,01\text{В}}{10\text{В}}\right)^2 + \left(\frac{10\text{В} * 4 * 10^{-3}\text{А}}{0,1^2\text{А}^2}\right)^2} \text{ Ом} \\ &= \pm \sqrt{0,01 + 16} \text{ Ом} = \pm 4 \text{ Ом} \end{aligned}$$

$$\delta_R = \pm \frac{\Delta_R}{R} * 100\% = \pm \frac{4 \text{ Ом}}{100 \text{ Ом}} * 100\% = \pm 4\%$$

Визначимо методичні похибки схем а) і б):

Схема а)

$$\delta_M = \frac{R_{\text{вим}}}{R_{\text{ист}}} - 1 = \frac{U_V}{\frac{U_R}{I_R}} - 1 = \frac{U_V I_R}{I_A U_V} - 1 = \frac{I_R - I_A}{I_A} = \frac{I_A - I_V - I_A}{I_A} = -\frac{U_V}{I_A R_V} = -\frac{R}{R_V} = -\frac{1}{10}$$

$$\Delta_M \approx \delta_M * R = -\frac{1}{10} * 100 \text{ Ом} = -10 \text{ Ом}$$

Схема б)

$$\begin{aligned} \delta_M &= \frac{R_{\text{вим}}}{R_{\text{ист}}} - 1 = \frac{U_V}{\frac{U_R}{I_R}} - 1 = \frac{U_V I_A}{I_A U_R} - 1 = \frac{U_V - U_R}{U_R} = \frac{U_V - U_V + U_A}{U_V - U_A} = \frac{1}{\frac{U_V}{U_A} - 1} = \frac{1}{\frac{U_V}{I_A R_A} - 1} = \frac{1}{\frac{R}{R_A} - 1} = \frac{1}{10 - 1} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\Delta_M \approx \delta_M * R = \frac{1}{9} * 100 \text{ Ом} = 11,1 \text{ Ом}$$

Результати вимірювання:

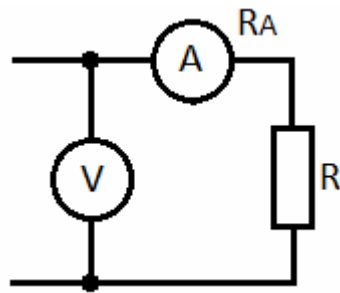
Схема а)

$$R_a = R + \Pi_a \pm \Delta_R = (100 + 10) \pm 4[\text{Ом}] = 110 \pm 4[\text{Ом}]$$

Схема б)

$$R_b = R + \Pi_b \pm \Delta_R = (100 - 11,1) \pm 4[\text{Ом}] = 89 \pm 4[\text{Ом}]$$

8. Визначити потужність, що розсіюється на резисторі  $R$ , якщо показання вольтметра з класом точності 0,5 на шкалі 5В дорівнюють 2В, а покази амперметра з класом точності 1,0 на шкалі 10А дорівнюють 2А.  $R_A = \frac{R}{10}$



### Розв'язання

$$K_V = 0,5$$

$$U_K = 5B$$

$$U_V = 2B$$

$$I_A = 2A$$

$$I_K = 10A$$

$$K_A = 1,0$$

$$R_A = R/10$$

$$P - ?$$

Визначаємо абсолютні похибки вимірювання напруги і струму.

$$\Delta_V = \frac{K_V * U_V}{100\%} = \pm \frac{0,5\% * 2B}{100\%} = \pm 0,01B$$

Клас точності в кружечку означає, що похибка вимірювання цим вольтметром мультиплікативна і  $K_V$  відносною похибкою.

$$\Delta_V = \frac{K_V * U_V}{100\%} = \pm \frac{0,5\% * 2B}{100\%} = \pm 0,01B$$

Визначимо потужність на опорі  $R$  за показами вольтметра і амперметра.

$$P = U_V * I_A = 2B * 2A = 4Bm$$

Знайдемо абсолютну похибку вимірювання потужності опосередкованим методом:

$$\Delta_P = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \Delta_U\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I} \Delta_I\right)^2} = \pm \sqrt{(I_A \Delta_U)^2 + (U_V \Delta_I)^2} = \pm \sqrt{(2 * 0,01)^2 + (2 * 0,1)^2} Bm = \pm 0,2Bm$$

Визначимо методичну похибку відповідно до схеми включення :

$$\delta_M = \frac{P_{вим}}{P_{icm}} - 1 = \frac{U_V I_A}{U_R I_R} - 1 = \frac{U_V I_A}{(U_V - U_A) I_A} - 1 = \frac{U_A}{U_V - U_A} = \frac{1}{\frac{U_V}{U_A} - 1} = \frac{1}{\frac{U_V}{I_A R_A} - 1} = \frac{1}{10 - 1} = \frac{1}{9}$$

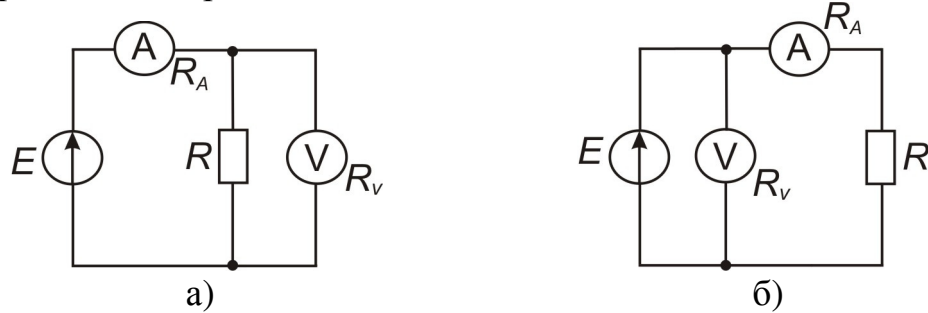
$$\Delta_M \approx \delta_M * P_{вим} = \frac{1}{9} * 4Bm = 0,44Bm$$

Поправка:  $\Pi = -\Delta_M = -0,44Bm$

Результат вимірювання:

$$P = (4 - 0,44) \pm 0,2 [Вт] = 3,56 \pm 0,2 Вт = 3,6 \pm 0,2 Вт$$

9. Виміряти опір резистора методом вольтметра-амперметра. Яка зі схем а) чи б) дозволить провести вимірювання з більшою точністю:



Покази амперметра з класом точності 1,0 дорівнюють 5мА на шкалі 10мА. Внутрішній опір амперметра  $R = 10 Ом$ .

Покази вольтметра з класом точності 2,5 дорівнюють 5В на шкалі 10В. Вхідний опір вольтметра  $R_V = 10 кОм$ .

### Розв'язання

Розрахуємо величину вимірювального опору резистора

$$R = \frac{U_V}{I_A} = \frac{5В}{5мА} = 1кОм$$

Визначимо абсолютні похибки амперметра і вольтметра:

$$\Delta_I = \pm \frac{K_A I_K}{100\%} = \pm \frac{1,0\% * 10мА}{100\%} = \pm 0,1мА$$

$$\Delta_V = \pm \frac{K_V U_K}{100\%} = \pm \frac{2,5\% * 10В}{100\%} = \pm 0,25В$$

Визначимо абсолютну похибку вимірювання опору опосередкованим методом:

$$\begin{aligned} \Delta_R &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \Delta_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \Delta_I\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta_U}{I}\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2} * \Delta_I\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{0,25}{5 \cdot 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{(5 \cdot 10^{-3})^2}\right)^2} Ом = \\ &= \pm \sqrt{(50)^2 + \left(\frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6}{25}\right)^2} = \pm \sqrt{2500 + 400} = \pm 53,85 Ом \end{aligned}$$

Розрахуємо методичні похибки вимірювання опору  $R$  схемами а) і б):

Схема а)

$$\delta_M = \frac{R_{вим}}{R_{ісм}} - 1 = \frac{U_V / I_A}{U_R / I_R} - 1 = \frac{U_V I_R}{I_A \cdot U_K} - 1 = \frac{I_R - I_A}{I_A} = \frac{I_A - I_V - I_A}{I_A} = -\frac{I_V}{I_A} = -\frac{R}{R_V} = \frac{-1кОм}{10кОм} = -0,1$$

$$\Delta_M \approx \delta_M \cdot R = -0,1 \cdot 1кОм = -100 Ом$$

Поправка  $\Pi = -\Delta_M = 100 \text{ Ом}$

Результат

$$R = (1000 + 100) \pm 53,85 \text{ [Ом]}$$

$$\delta_R = \pm \frac{53,85}{1100} * 100\% = \pm 4,9\%$$

Схема б)

$$\delta_M = \frac{R_{вим}}{R_{ісм}} - 1 = \frac{U_V / I_A}{U_R / I_R} - 1 = \frac{U_V I_A}{I_A (U_V - U_A)} - 1 = \frac{U_A}{U_V - U_A} = \frac{1}{\frac{R}{R_A} - 1} = \frac{1}{\frac{1000}{10} - 1} = 0,01$$

$$\Delta_M = \delta_M \cdot R_{ісм} = \frac{U_A}{U_V - U_A} * \frac{U_V - U_A}{I_A} = R_A = 10 \text{ Ом}$$

Результат вимірювання з врахуванням поправки:

$$R = 1 \text{ кОм} - 10 \text{ Ом} \pm 53,85 \text{ Ом} = 990 \pm 53,85 \text{ [Ом]}$$

$$\delta_R = \pm \frac{53,85}{990} * 100\% = \pm 5,44\%$$

Методична похибка схеми б) в 10 разів менша.

### ***Задачі для самостійного розв'язку***

1. Визначити похибку непрямого вимірювання потужності  $\Delta P$  і  $\delta P$  за результатами прямих вимірів:
  - показання вольтметра  $U_v = 10V$  клас точності  $K_v = 0,5$ , межа виміру  $U_k = 20V$ ;
  - показання амперметра  $I_A = 20mA$ , клас точності  $K_A = 0,1$ , межа виміру  $I_k = 50mA$ .
2. Визначити похибку непрямого вимірювання потужності  $\Delta P$  і  $\delta P$  за результатами прямих вимірів:
  - показання вольтметра  $U_v = 10V$  клас точності  $K_v = 0,2$ , межа виміру  $U_k = 20V$ ;
  - показання омметра  $R_k = 1кОм$ , клас точності  $K_R = 1$ , межа виміру  $R_k = 2кОм$ .
3. Визначити похибку непрямого вимірювання потужності  $\Delta P$  і  $\delta P$  за результатами прямих вимірів:
  - показання амперметра  $I_A = 20mA$ , клас точності  $K_A = 0,2$ , межа виміру

$$I_k = 50 \text{ mA}.$$

- показання омметра  $R_k = 1 \text{ k}\Omega$ , клас точності  $K_R = 0,5$ , межа виміру  $R_k = 2 \text{ k}\Omega$ .

4. Визначити похибку непрямого вимірювання потужності  $\Delta P$  і  $\delta P$  за результатами прямих вимірів:

- показання вольтметра  $U_v = 10 \text{ V}$  клас точності  $K_v = 0,5$ , межа виміру  $U_k = 20 \text{ V}$ ;
- показання омметра  $R_k = 5 \text{ k}\Omega$ , клас точності  $K_R = 1,0$ , межа виміру  $R_k = 20 \text{ k}\Omega$ .

## 2.4. Випадкові похибки

Випадкові похибки вимірювань виникають внаслідок одночасної дії на об'єкт вимірювань кількох незалежних величин, зміни яких носять флуктуаційний характер. Випадкова величина характеризується густиною розподілу ймовірностей

$$\rho(\Delta) = \frac{dF}{d\Delta}$$

де  $F(\Delta)$  – функція розподілу.

Значить, визначається не числове значення випадкової похибки, а лише ймовірність того, що вона знаходиться в деякому інтервалі або не перевищує деякого значення.

Ймовірність  $P$  знаходження випадкової величини в заданому інтервалі від  $\Delta_1$  до  $\Delta_2$  визначається за формулою

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \rho(\Delta) d\Delta$$

Випадкові величини найчастіше характеризуються такими законами розподілу: рівномірний, трикутний (Сімпсона), нормальний (Гауса) тощо.

Густина ймовірності **нормального закону** розподілу описується формулою

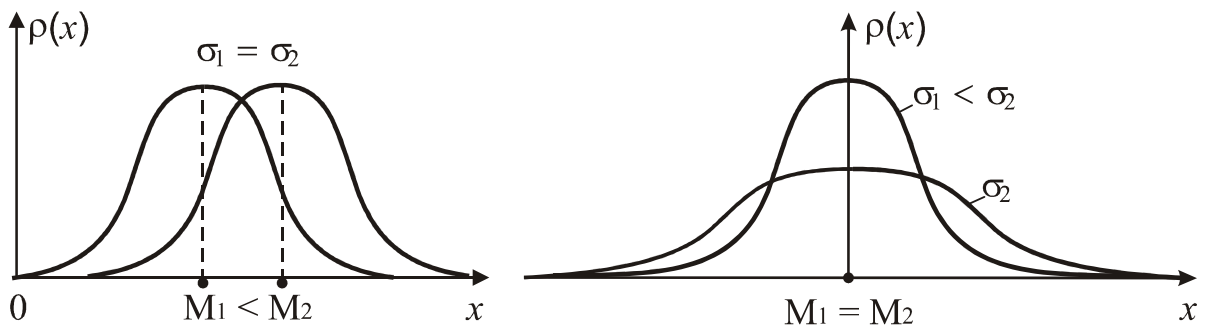
$$\rho(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\sigma^2 = D = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \rho(\Delta) d\Delta$$

- дисперсія, що характеризує розкид випадкової похибки відносно центра розподілу, а

$\sigma = +\sqrt{D} = +\sqrt{\sigma^2}$  - її середньоквадратичне відхилення.

На рисунку наведено графік густини ймовірності похибки при нормальному законі розподілу



Дисперсія і с.к.в. характеризують точність вимірювань: чим більші  $D$  і  $\sigma$ , тим менша точність.

Ймовірність появи випадкової похибки в межах від  $-\Delta_1$  до  $\Delta_1$

$$P(-\Delta_1 < \Delta < \Delta_1) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta_1} \exp \frac{-\Delta^2}{2\sigma^2} d\Delta \quad (1)$$

Введемо нормовану випадкову величину

$$z = \Delta/\sigma, \quad d\Delta = \sigma dz$$

Тоді праву частину рівняння (1) перетворимо у функцію Лапласа (інтеграл ймовірності)

$$F(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp \frac{-t^2}{2} dt$$

Ця функція табульована, її значення наведені у додатку, таблиця 3.

Якщо задана деяка ймовірність  $P_0 = F(z)$ , тоді, знайшовши з таблиці 3  $z = \Delta/\sigma$ , можна визначити  $\Delta = \sigma z$ .

За максимальну похибку при нормальному законі розподілу приймають  $\Delta_{max} = \pm 3\sigma$ . Ймовірність того, що випадкова похибка буде перебувати в межах  $\pm 3\sigma$  становить  $P(\pm 3\sigma) = 0,9973$ , а ймовірність появи похибки, яка перевищує

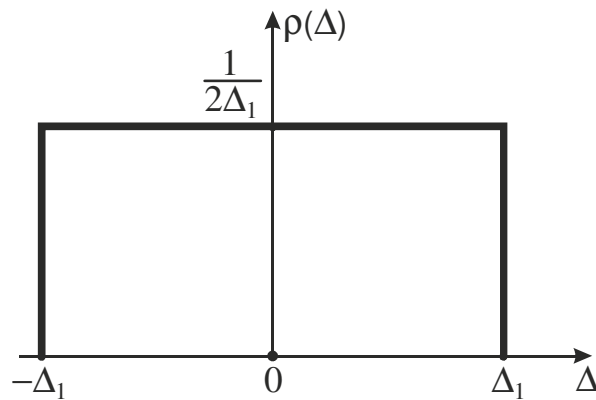
$$\Delta_{max}: 1 - P_0 = 1 - 0,9973 = 0,0027 = \frac{1}{370}$$

Умова нормування закону розподілу випадкових похибок

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\Delta) d\Delta = 1$$

**Рівномірний закон** розподілу також зустрічається при вимірюваннях. Він характерний для вимірювання неперервних величин методом дискретного обчислення. Густина ймовірності похибки в інтервалі від  $-\Delta_1$  до  $+\Delta_1$  записується у вигляді

$$\begin{cases} \rho(\Delta) = \frac{1}{2\Delta_1}, & -\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_1 \\ \rho(\Delta) = 0, & -\Delta_1 > \Delta > \Delta_1 \end{cases}$$



Дисперсія та середньоквадратичне відхилення

$$D(\Delta) = \sigma^2 = \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} \Delta^2 \rho(\Delta) d\Delta = \frac{\Delta_1^2}{3}$$

$$\sigma = \frac{\Delta_1}{\sqrt{3}}, \text{ або } \sigma = \frac{\Delta_{max}}{\sqrt{3}}$$

### Довірча ймовірність та довірчий інтервал.

На відміну від систематичної похибки випадкову виключити неможливо, оскільки невідомо, яке конкретне значення вона приймає при даному вимірюванні.

Для оцінки впливу випадкової похибки на результат вимірювання задаються похибками  $\pm\Delta_1$  і знаходять ймовірність того, що вимірювана величина  $x$  знаходиться між  $(x - \Delta_1)$  і  $(x + \Delta_1)$ . Інтервал  $|x - \Delta_1; x + \Delta_1|$  називається **довірчим**, а ймовірність того, що  $x$  знаходиться всередині цього інтервалу – **довірчою ймовірністю**  $P_{дов}$ . Найбільш достовірним значенням вимірюваної величини на основі великого ряду спостережень  $n > 20$ , що заслуговують на однакову довіру, є арифметичне середнє (**математичне очікування** випадкової величини)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Середньоквадратичне відхилення арифметичного середнього визначається за формулою

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n(n-1)}$$

При нормальному законі розподілу похибок границі довірчого інтервалу визначаються за функцією Лапласа:

$$P(-\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_1) = F(z_1)$$

де

$$F(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Значення аргумента  $z$  визначається співвідношенням

$$z = \frac{\Delta_1}{\sigma_{\bar{x}}}$$

При наявності систематичної похибки

$$P(\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2) = F\left(\frac{\Delta_2 - \Delta_c}{\sigma_{\bar{x}}}\right) + F\left(\frac{\Delta_1 + \Delta_c}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$$

Значення функції  $F(z)$  наведені в табл. 2 (додаток).

При малому числі спостережень ( $n < 20$ ) довірчий інтервал визначають за допомогою коефіцієнта Стюдента  $t$ :

$$\Delta_{\text{дов}} = \pm t\sigma$$

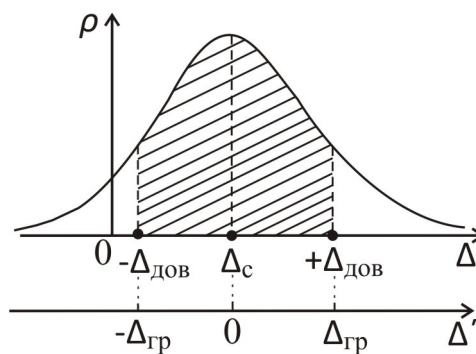
Коефіцієнт  $t$  можна визначити з табл. 2 за заданим числом спостережень  $n$  і вибраною (заданою) довірчою ймовірністю  $P_{\text{дов}}$ .

### Приклади розв'язку задач:

1. Визначити довірчий інтервал випадкової похибки, що має нормальний закон розподілу при  $\sigma = 0,2\text{мВ}$  з довірчою ймовірністю  $P_{\text{дов}} = 0,8$ ; систематична похибка складає  $\Delta_c = 0,5\text{мВ}$ . Навести рисунок.

#### Розв'язання

Наведемо рисунок нормального закону розподілу випадкової похибки.



Довірчу ймовірність інтервалу  $\pm \Delta_{\text{еп}}$  знайдемо за інтегралом імовірності

$$P_{\text{дов}} = \int_{-\Delta_{\text{еп}}}^{+\Delta_{\text{еп}}} \rho(\Delta) d\Delta = 0,8$$

Цей інтеграл можна звести до інтегралу Лапласа  $\Phi(z) = P_{\text{дов}}$  при  $z = \Delta_{\text{еп}} / \sigma$ . Параметр  $z$  знайдемо з таблиці чи графіка  $\Phi(z)$  за заданим значенням  $P_{\text{дов}} = 0,8$ . Тоді  $z = 1,29$ ;  $\Delta_{\text{гр}} = z\sigma = 0,26\text{мВ}$ . З урахуванням систематичної похибки  $\Delta_c$  одержимо довірчий інтервал похибки:

$$\Delta_{\text{max}} = \Delta_{\text{еп}} + \Delta_c = 0,76\text{мВ}$$

$$\Delta_{\min} = -\Delta_{cp} + \Delta_C = 0,24\text{мВ}$$

Відповідь:  $0,24\text{мВ} \leq \Delta_{\text{дов.}} \leq 0,76\text{мВ}$

2. Випадкова похибка має рівномірний закон розподілу в інтервалі від 1 до 6В. Визначити ймовірність того, що похибка буде знаходитись в інтервалі від 4 до 6В. Навести рисунок.

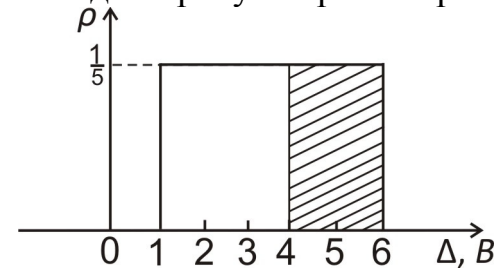
### Розв'язання

Дано:  $1 \leq \Delta \leq 6[\text{В}]$

Рівномірний закон

$P(4 \leq \Delta \leq 6[\text{В}])$  -?

Наведемо рисунок рівномірного закону:



$$\begin{cases} \rho(\Delta) = \frac{1}{b-a}, b \leq \Delta \leq a \\ \rho(\Delta) = 0, b > \Delta > a \end{cases}$$

$$a = 1; b = 6;$$

$$\rho(\Delta) = \frac{1}{6-1} = \frac{1}{5}$$

$$1 \leq \Delta \leq 6$$

Ймовірність певного інтервалу похибки визначається площею, яку можна знайти за інтегралом

$$P = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \rho(\Delta) d\Delta$$

який геометрично дорівнює площі прямокутника зі стороною від  $\Delta = 4$  до  $\Delta = 6\text{В}$ .

$$P(4 \leq \Delta \leq 6[\text{В}]) = \frac{1}{5} * (6 - 4) = \frac{2}{5} = 0,4$$

3. Похибка при вимірюванні напруги має нормальний закон розподілу з середньоквадратичним відхиленням  $\sigma = 40\text{мВ}$ . Систематична похибка складає 40мВ. Визначити ймовірність того, що результат вимірювання  $U_x$  відрізняється від істинного значення не більш ніж на 80мВ. Навести рисунок.

### Розв'язання

Дано:

Нормальний закон

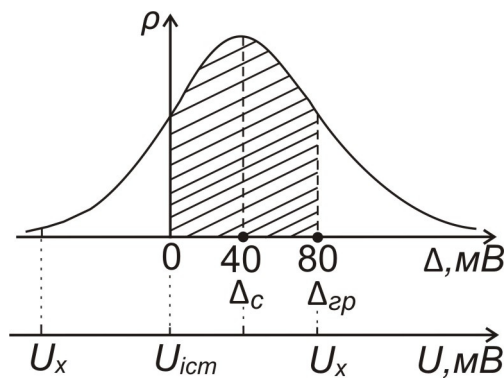
$$\sigma = 40\text{мВ.}$$

$$\Delta_C = 40\text{мВ}$$

$$\Delta_{\text{ГР}} = 80\text{мВ}$$

$P(U_x - U_{\text{ист}}) \leq 80\text{мВ}$  -?

Проведемо вісь напруги  $U$ . Істинне значення на цій осі відповідає точці  $\Delta=0$  на осі похибок  $\Delta$ .



Якщо вимірне значення  $U_x > U_{ict}$  на величину  $\Delta_{гр}$ , тоді для знаходження цієї ймовірності слід визначити заштриховану на рисунку площу під кривою  $c(\Delta)$ . Для цього використаємо інтеграл ймовірності  $2\Phi(Z)$ , де

$$Z = \frac{\Delta_{гр} - \Delta_c}{\sigma} = \frac{40\text{мВ}}{40\text{мВ}} = 1$$

$$2\Phi(Z) = 2\Phi(1) = 0,683$$

Відповідь:  $P((U_x - U_{ict}) \geq 80\text{мВ}) = 0,683$

4. Випадкова похибка вимірювання напруги характеризується рівномірним законом розподілу при  $\sigma = 0,2\text{мВ}$ . Визначити ймовірність того, що похибка за абсолютним значенням буде більшою за  $0,1\text{мВ}$ .

### Розв'язання

Дано:

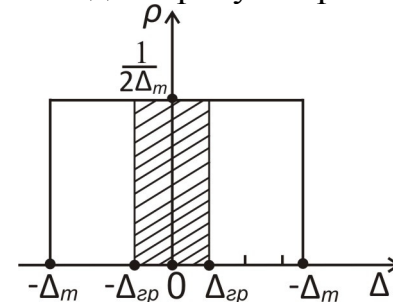
Рівномірний закон

$$\sigma = 0,2\text{мВ}$$

$$\Delta_1 = 0,1\text{мВ}$$

$P(|\Delta| \geq \Delta_1) - ?$

Наведемо рисунок рівномірного закону:



$$\sigma = \frac{\Delta_m}{\sqrt{3}}$$

Оскільки  $\sigma$  пов'язана з  $\Delta_m$  залежністю

тоді знайдемо значення

$$\Delta_m = \sqrt{3}\sigma = 0,2\sqrt{3}\text{мВ} = 0,346\text{ мВ}$$

$$\rho(\Delta) = \frac{1}{2\Delta_m} = \frac{1}{2 * 0,346} = 1,45 \frac{1}{\text{мВ}}$$

Ймовірність того, що похибка буде знаходитись в інтервалі  $\pm\Delta_m$  дорівнює одиниці, а ймовірність  $P(|\Delta| = \Delta_1)$  дорівнює графічно площі заштрихованого прямокутника:

$$P = 2\Delta_1\rho(\Delta) = 2 * 0,1\text{мВ} * 1,45 \frac{1}{\text{мВ}} = 0,29$$

Тоді шукана ймовірність  $P(|\Delta| \geq \Delta_1) = 1 - 0,29 = 0,71$

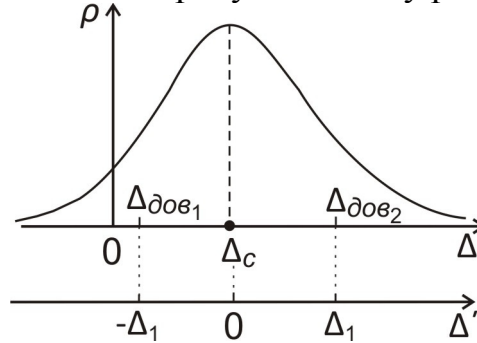
5. Визначити довірчий інтервал похибки, що має нормальний закон розподілу з  $\sigma = 20\text{мВ}$ , в якому похибка знаходиться з ймовірністю 0,95; систематична похибка  $\Delta_c = 10\text{мВ}$ . Навести рисунок.

**Розв'язання**

Дано:  
 Нормальний закон  
 $\sigma = 20\text{мВ}$ .  
 $\Delta_c = 10\text{мВ}$   
 $P_{\text{дов}} = 0,95$

$\pm\Delta_{\text{дов}} = ?$

Наведемо рисунок закону розподілу.



При нормальному законі розподілу похибок границі симетричного довірчого інтервалу визначаються функцією Лапласа:

$$P_{\text{дов}}(-\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_1) = 2\Phi(Z)$$

Значення аргумента Z визначається співвідношенням

$$Z = \frac{\Delta_1}{\sigma}$$

При  $P_{\text{дов}} = 0,95$  з таблиці інтегралу Лапласа знаходимо, що  $Z=2$ .

Тоді

$$\Delta_1 = Z\sigma = 2 * 20\text{мВ} = 40\text{мВ}$$

При наявності систематичної похибки  $\Delta_c$  довірчі границі визначаються співвідношеннями:

$$\Delta_{1\text{дов}} = -\Delta_1 + \Delta_c = -40\text{мВ} + 10\text{мВ} = -30\text{мВ}$$

$$\Delta_{2\text{дов}} = \Delta_1 + \Delta_c = 40\text{мВ} + 10\text{мВ} = 50\text{мВ}$$

Відповідь:  $-30\text{мВ} \leq \Delta \leq 50\text{мВ}$ .

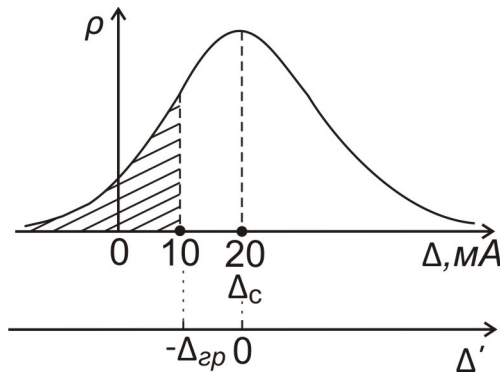
6. Випадкова похибка має нормальний закон розподілу з  $\sigma = 10\text{мА}$ , систематична похибка  $\Delta_c = 20\text{мА}$ . Визначити ймовірність того, що випадкова похибка за модулем не перевищить середньоквадратичного значення. Навести рисунок.

**Розв'язання**

Дано:  
 Норм. з-н  
 $\sigma = 10\text{мА}$   
 $\Delta_c = 20\text{мА}$   


---

 $P(\Delta \leq \sigma) = ?$



Ймовірність при нормальному законі розподілу знайдено за нормованою функцією Лапласа. Графічно шукана ймовірність відповідає заштрихованій частині під кривою  $\rho(\Delta)$ .

Відповідно до закону нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\Delta) d\Delta = 1. \quad \text{Тоді} \quad \int_0^{+\infty} \rho(\Delta) d\Delta = 0,5.$$

Знайдемо ймовірність інтервала  $\int_{-\Delta_{zp}}^0 \rho(\Delta) d\Delta$ :

$$Z = \frac{\Delta_{zp}}{\sigma} = \frac{10 \text{ mA}}{10 \text{ mA}} = 1,$$

$$\text{тоді } \Phi(Z) = \Phi(1) = \frac{0,683}{2} = 0,341$$

Ймовірність того, що  $\Delta \leq \Delta_{zp} = 10 \text{ mA}$ , знайдемо так:

$$P(\Delta \leq \sigma) = 1 - (0,5 + 0,341) = 1 - 0,841 = 0,159$$

### Задачі для самостійного розв'язку

1. Результат виміру струму містить випадкову похибку з нормальним законом розподілу  $\sigma = 4 \text{ mA}$ ,  $\Delta_c = 0$ . Визначите ймовірність того, що похибка перевищить за абсолютним значенням  $12 \text{ mA}$  (Малюнок).
2. Похибка при вимірі напруги має нормальний закон розподілу з  $\sigma = 60 \text{ мВ}$ . Визначити ймовірність того, що результат виміру  $U_x$  відрізняється від істинного значення не більш ніж на  $144 \text{ мВ}$  (Малюнок).
3. Результат виміру потужності містить випадкову складову з нормальним законом розподілу і  $\sigma = 100 \text{ мВт}$ ,  $\Delta_c = 50 \text{ мВт}$ . Визначити ймовірність того, що

- невиправлений результат перевищить істинне значення потужності (Малюнок).
4. Встановити зв'язок між параметрами  $a$  і  $b$  в односторонньому експоненціальному законі розподілу  $\rho(x) = a e^{-bx}$ ,  $x > 0$ ;  $\rho(x) = 0$  при  $x < 0$  (Малюнок).
  5. Випадкова похибка має від  $a$  до  $b$  ( $a < b$ ) рівномірний закон розподілу. Скласти вираз закону  $\rho(\Delta)$ , знайти математичне очікування і дисперсію (Малюнок).
  6. Вимірюється струм. Визначити максимальне значення систематичної і випадкової похибок, описаних нормальним законом розподілу з параметрами: с.к.о.  $\sigma = 2$  мА; математичне очікування  $M = 5$  мА (Малюнок).
  7. Визначити довірчу ймовірність інтервалу  $\pm\sigma$ ,  $\pm 2\sigma$ ,  $\pm 3\sigma$  при рівномірному законі розподілу. (Малюнок).
  8. Визначити довірчу ймовірність інтервалу  $\pm\sigma$ ,  $\pm 2\sigma$ ,  $\pm 3\sigma$  при нормальному законі розподілу. (Малюнок).
  9. Відомо, що похибка квантування по інтенсивності після введення поправки характеризується рівномірним законом розподілу з нульовим середнім значенням. Знайти середньоквадратичне значення цієї похибки і зіставити з максимальним значенням похибки (Малюнок).
  10. Визначити ймовірність одержання результату 10.1В цифровим вольтметром при вимірі напруги 10В, якщо систематична похибка  $\Delta c = 0,3$ В, а випадкова має нормальний закон розподілу  $\sigma = 0,1$ В і результат виміру округляється до десятих долей вольта (Малюнок).
  11. Визначити ймовірність одержання результату 9,8В цифровим вольтметром при вимірі напруги 10В, якщо систематична похибка  $\Delta c = 0,3$ В, а випадкова має нормальний закон розподілу з  $\sigma = 0,3$ В і в результаті виміру знаки після десятих долей вольта відкидаються (Малюнок).
  12. Визначити довірчий інтервал похибки з довірчою ймовірністю 0,8, якщо похибка має нормальний закон розподілу при  $\sigma = 0,2$ .
  13. Похибка має нормальний закон розподілу при дисперсії  $\sigma^2 = 0,04$ . Визначити довірчу ймовірність похибки для інтервалу  $\Delta = \pm 0,4$ .
  14. Похибка має рівномірний закон розподілу в інтервалі від  $a$  до  $b$  ( $a < b$ ). Визначити систематичну складову похибки і с.к.в.
  15. Визначити довірчу ймовірність похибки, що має нормальний закон розподілу в довірчому інтервалі  $\Delta = \pm 0,6$ мА при  $\sigma = 0,2$ мА.
  16. Визначити клас точності міліамперметра, якщо похибка має нормальний закон розподілу з  $\sigma = 1$ мА, а кінцеве значення шкали 30мА.

### 3. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

#### Приклади розв'язку задач

1. Проведено 10 вимірювань напруги. Результати: 1В – 2 рази; 1,2В – 5 разів; 1,3В – 3 рази. Знайти середнє значення напруги і середньоквадратичне відхилення цього значення.

#### Розв'язання

Дано:  
 $N=10$  вимірів  
 1 В – 2 рази  
 1,2 В – 5 разів  
 1,3 В – 3 рази

$U_{\text{сєр.}} - ?$

$U_{\text{сєр.кє.}} - ?$

Знайдемо середнє значення вимірюваної напруги:

$$U_{\text{сєр.}} = \frac{1}{10} (2 * 1\text{В} + 5 * 1,2\text{В} + 3 * 1,3\text{В}) = 1,19\text{В}$$

Знайдемо похибки вимірювань (різницю між виміряними та середнім значенням):

$$\Delta_1 = 1\text{В} - 1,19\text{В} = -0,19\text{В}$$

$$\Delta_2 = 1,2\text{В} - 1,19\text{В} = 0,01\text{В}$$

$$\Delta_3 = 1,3\text{В} - 1,19\text{В} = 0,11\text{В}$$

Знайдемо суму квадратів похибок

$$\sum_{i=1}^{10} \Delta_i^2 = 2 * (0,19)^2 + 5 * (0,01)^2 + 3 * (0,11)^2 = 0,0722 + 5 * 10^{-4} + 0,0363 = 0,1090$$

Середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} * \sum_{i=1}^{10} \Delta_i^2} = \sqrt{\frac{0,109}{9}} = 0,11\text{ В}$$

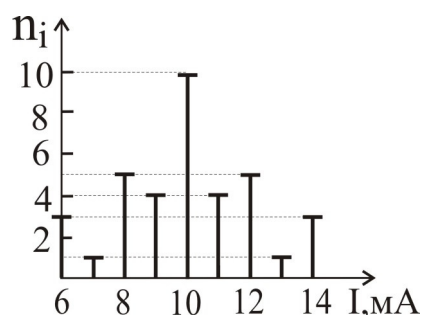
2. Вимірюється струм. Усього проведено 36 вимірювань. Вимірянні значення наведено в таблиці:

I, мА	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n, число вимірів	3	1	5	4	10	4	5	1	3

Знайти середнє значення струму, дисперсію, середньоквадратичне значення.

#### Розв'язання

Побудуємо гістограму результатів вимірювань.



Як видно з рисунку, середнє значення струму  $I_{\text{сеп}}=10\text{мА}$ .

Це значення можна знайти за формулою:

$$I_{\text{сеп}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i = \frac{1}{36} (3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 10 \cdot 10 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 12 + 1 \cdot 13 + 3 \cdot 14) = 10 \text{ мА}$$

Знайдемо похибки вимірювання струму як різниці між виміряними і середнім значеннями та квадрати похибок:

$I_i, \text{мА}$	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\Delta_i = I_i - I_{\text{сеп}}, \text{мА}$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$n_i$	3	1	5	4	10	4	5	1	3
$\Delta_i^2, \text{мА}^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Дисперсію вимірювань знайдемо за формулою:

$$D = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{36} \Delta_i^2}{36-1} = \frac{2}{35} (3 \cdot 16 + 1 \cdot 9 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 0) = 4,63 \text{ мА}^2$$

Знайдемо середньоквадратичне значення похибки

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{4,63} = 2,15 \text{ мА}$$

### *Задачі для самостійного розв'язку*

1. Проведено вимір сили струму, мА: 10,07; 10,08; 10,10; 10,12; 10,13; 10,15; 10,16; 10,17; 10,20; 10,40. Спостереження 10,40 відрізняється від інших. Чи не можна його відкинути як таке, що містить грубу похибку?
2. Проведено однократний вимір потужності 0,51Вт. Оцінити випадкову похибку цього виміру, якщо раніше проведені виміри із багатократними спостереженнями дали результати: 0,62; 0,59; 0,61; 0,58; 0,59; 0,58.
3. Похибка виміру часового інтервалу має трикутний розподіл із нульовим середнім значенням і межами  $\pm\tau$  (інтервал квантування). Скільки необхідно провести незалежних вимірів, щоб межі похибки зменшилися в 10 разів.
4. У вимірювальному приладі відстань між сусідніми мітками шкали постійна і дорівнює  $a$ . При округленні відліку до найближчого цілого похибка округлення по абсолютному значенні не перевищує половини відстані між сусідніми мітками шкали. Знайти густину розподілу імовірності, математичне очікування і дисперсію похибки округлення.
5. Визначити максимальну похибку виміру напруги, якщо зовнішні шуми мають  $\sigma = 2\text{мВ}$ , а власні шуми приладу  $\sigma = 0,1\text{мВ}$  при номарльному законі розподілу.
6. Чи правильно записані результати вимірів:
  1. 85,6342В;  $\Delta = 0,04\text{В}$ ;  $P=0,952$
  2. 85,63В;  $\Delta$  від -0,04 до +0,04В;  $P=0,95$
  3. 74,725В;  $\Delta = \pm 0,015\text{В}$ ;  $P=0,95$

4. 50,7Вт;  $\delta = \pm 0,7\%$ ;  $P=0,99$

5. Скільки необхідно провести вимірювань, щоб інтервал похибки, що має нормальний закон розподілу, зменшити в 5 разів при збереженні довірчої ймовірності?

6. Визначте максимальне значення похибки, що має нормальний закон розподілу з  $\sigma = 0,1$ , після проведення 100-кратних вимірюваннях розміру.

7. Визначити максимальне значення похибки, що має нормальний закон розподілу і  $\sigma = 0,2$ , якщо проведено 36 вимірювань і за результат прийняте середнє значення.

8. При вимірюванні напруги отримані наступні значення: 3 В – 5 разів; 3,2 В – 7 разів; 2,9 В – 7 разів. Знайдіть оцінку середньоквадратичного значення напруги.

9. Визначити ентропію похибки з рівномірним законом розподілу в діапазоні  $\pm a$ .

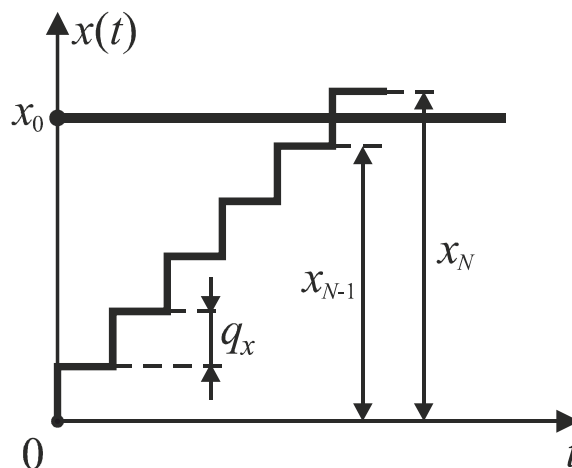
10. Визначити кількість інформації, отриманої при вимірюванні напруги, що має в діапазоні від 0В до 10 В рівномірний закон розподілу, якщо похибка вимірювань має також рівномірний закон і  $\sigma = 0,1$  В.

11. Визначити кількість інформації, яку можна одержати від амперметра зі шкалою 100мА, якщо амперметр має адитивну випадкову похибку з нормальним законом розподілу при  $\sigma = 0,01$  мА.

#### 4. ПОХИБКИ КВАНТУВАННЯ ЗА ІНТЕНСИВНІСТЮ І В ЧАСІ

**Квантуванням** називають вимірювальне перетворення, яке полягає в дискретизації сигналів за їх інтенсивністю, тобто заміні їх миттєвих значень дискретними розмірами (рівнями). Під час квантування неперервний за розміром сигнал  $x(t)$  перетворюється в квантований сигнал  $x_{\text{кв}}(t)$ , який змінюється сходинково. Різницю  $\Delta x_{\text{кв}} = x_{\text{кв}i+1} - x_{\text{кв}i}$  між двома сусідніми детермінованими значеннями квантованого сигналу називають кроком квантування  $q_x$ .

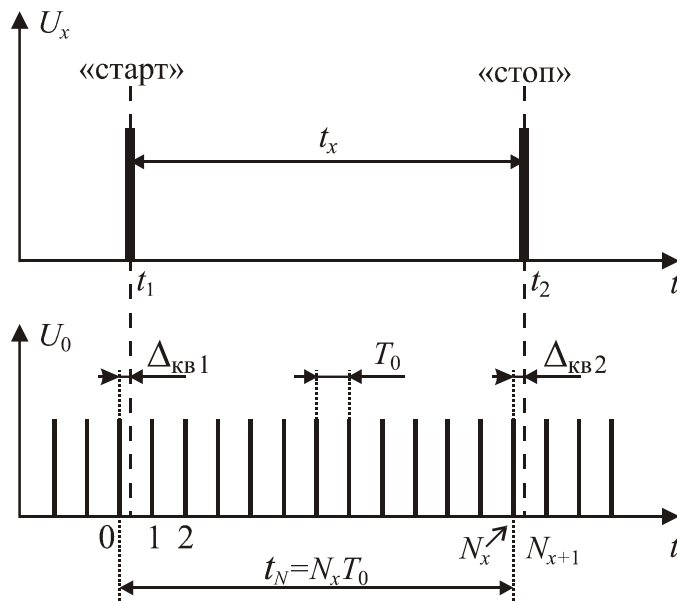
Похибка квантування є методичною похибкою відображення неперервної за розміром величини обмеженою за кількістю розрядів числом, тобто за фізичною природою являє собою похибку округлення, а тому її значення залежить від способу округлення та від розміру кроку квантування.



**Дискретизація** – вимірювальне перетворення неперервного в часі сигналу  $Y(t)$  в послідовність миттєвих значень цього сигналу  $Y_k = Y(k\Delta t)$ , які відповідають моментам часу  $k\Delta t$ , де  $k = 1, 2, \dots$ . Інтервал часу  $\Delta t$  називають **кроком дискретизації**, а зворотну йому величину  $f_d = \frac{1}{\Delta t}$  – **частотою дискретизації**.

Похибка дискретизації  $\Delta_{\text{кв}}$  є методичною похибкою відображення неперервної аналогової величини (часового інтервалу  $t_x$ ) цілою кількістю періодів  $T_0$  і виникає тоді, коли інтервал  $t_x$  не є кратним  $T_0$ .

Вимірюваний інтервал  $t_x$ , обмежений імпульсами «старт» і «стоп», квантують на  $N_x$  інтервалів довжиною  $T_0$  (крок квантування), заповнюючи його квантуючими імпульсами.



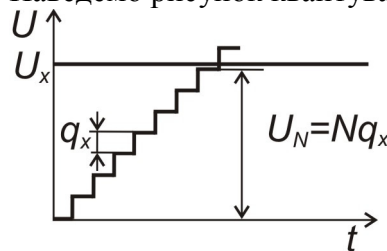
### Приклади розв'язку задач

1. Напруга 3,12В квантується способом заміни її значення меншим квантованим рівнем. Визначити число рівнів квантування і абсолютну похибку, якщо відносна похибка не перевищує 0,5%.

#### Розв'язання

Дано:  
 $U_x = 3,12В$   
 $\Delta_u \leq 0,5\%$

Наведемо рисунок квантування вимірюваної напруги.



$M$ -?;  $\Delta$ -?

Абсолютною похибкою при квантуванні є крок квантування  $q_x$ .

$$\delta_u = \frac{\Delta}{U_x} * 100\% = \frac{q_x}{Nq_x} * 100\% = \frac{100\%}{N},$$

де  $N$ - число кроків квантування.

Число рівнів квантування  $M$  на одиницю більше числа кроків  $N$ :

$$M = N + 1 = \frac{100\%}{\delta_u} + 1 = \frac{100\%}{0,5\%} + 1 = 201.$$

Абсолютна похибка:

$$\Delta = \pm \frac{\delta_u * U_x}{100\%} = \pm \frac{0,5\% * 3,12В}{100\%} = \pm 1,56 \cdot 10^{-2} В = 0,156 мВ.$$

2. Визначити частоту вимірювального генератора, щоб при вимірюванні інтервалу часу в діапазоні від 100 мкс до 200 мкс відносна похибка не перевищувала 0,1%.

### Розв'язання

Дано:

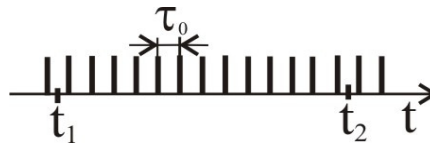
$$t_1 = 100 \text{ мкс}$$

$$t_2 = 200 \text{ мкс}$$

$$\delta_t \leq 0,1\%$$

$f_0 - ?$

Накреслимо інтервал вимірювання часу і проведемо його дискретизацію лічильними імпульсами генератора:



$$t_2 - t_1 = N\tau_0,$$

де  $\tau_0$  – період лічильних імпульсів.

Відносна похибка вимірювання інтервалу:  $(t_2 - t_1)$

$$\delta_t = \frac{\Delta}{t_2 - t_1} * 100\%;$$

Абсолютною похибкою  $\Delta$  при дискретизації є крок дискретизації  $\tau_0$ , тому

$$\Delta = \tau_0 = \frac{\delta_t * (t_2 - t_1)}{100\%} = \frac{0,1\% * (200 - 100) \text{ мкс}}{100\%} = 0,1 \text{ мкс}$$

Частота генератора

$$f_0 = \frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{0,1 \text{ мкс}} = 10 \text{ МГц}$$

### Задачі для самостійного розв'язку

1. Визначити абсолютну і відносну похибки квантування напруги 3,15В, якщо квантователь має 1024 кроки квантування для напруги 5,12В.
2. Визначити число рівнів квантування для квантователя з максимальною напругою 2,048В, при якому  $\Delta \leq 1 \text{ мВ}$ .
3. Визначити абсолютну і відносну похибки квантування часового інтервалу 0,5мс квантователем на базі вимірювального генератора  $f_r = 10 \text{ МГц}$ .
4. При вимірюванні інтервалу часу максимальне значення похибки склало  $\Delta t = \pm 0,1 \text{ мкс}$ . Визначити частоту проходження імпульсів міри часу.
5. Визначити частоту проходження імпульсів міри часу при вимірюванні інтервалу часу  $T_x = 10^{-4} \text{ с}$ , якщо похибка квантування не перевищує  $\pm 1\%$ .
6. Похибка квантування за інтенсивністю після введення поправки має рівномірний закон розподілу з нульовим середнім значенням. Знайти с.к.в. цієї похибки, якщо крок квантування  $q$ .

## 5. ВИМІРЮВАЛЬНІ СИГНАЛИ. ЕЛЕКТРОННІ ВОЛЬТМЕТРИ

Вимірювальні сигнали за характером зміни інформативного і часового параметрів діляться на **аналогові, дискретні і цифрові**.

**Аналоговий сигнал** – це сигнал, що описується неперервною або кусочно-неперервною функцією  $Y_a(t)$ , причому як сама ця функція, так і її аргумент  $t$  можуть приймати будь-які значення на заданих інтервалах  $Y \in (Y_{\min}; Y_{\max})$  і  $t \in (t_{\min}; t_{\max})$ . (Рис. 5.1. а)

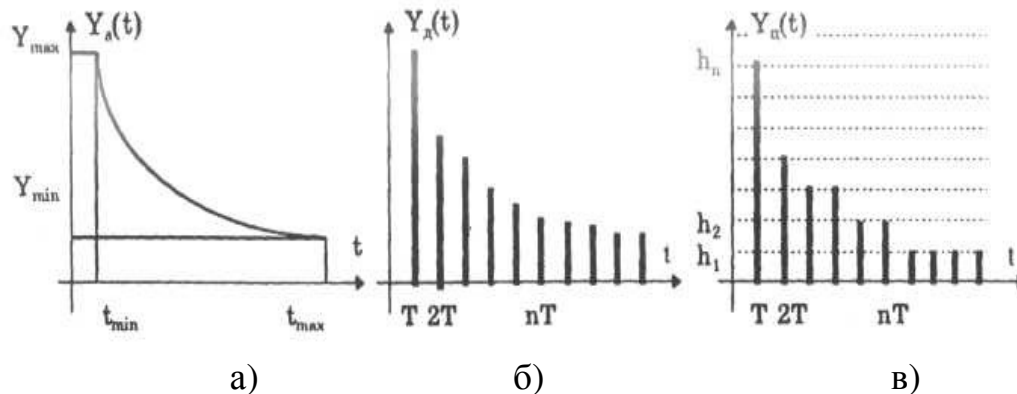


Рис. 5.1.

**Дискретний сигнал** – це сигнал, який змінюється дискретно з часом і за рівнем. Він може приймати в дискретні моменти часу  $nT$  будь-які значення  $Y_d(nT)$ , які називаються відліками. Тут  $T = \text{const}$  – інтервал (період) дискретизації,  $n = 0, 1, 2, \dots$  – цілі числа. Рис. 5.1. б).

**Цифрові сигнали** – квантовані за рівнем і дискретні в часі сигнали  $Y_u(nT)$ , які описуються квантованими послідовностями, які в дискретні моменти часу  $nT$  приймають дискретні значення – рівні квантування  $h_1, h_2, \dots, h_n$  (рис. 5.1. в).

За характером зміни в часі сигнали діляться на **сталі**, значення яких з часом не змінюється  $x(t) = x_0 = \text{const}$ ; і **змінні**  $x(t)$ , значення яких змінюється з часом.

За ступенем наявності апріорної інформації змінні вимірювальні сигнали діляться на детерміновані (відомий закон їх зміни), квазидетерміновані (з частково відомим характером зміни в часі) і випадкові.

В свою чергу детерміновані і квазидетерміновані сигнали діляться на **елементарні і складні**. До елементарних сигналів відноситься сталий, гармонічний (синусоїдний). Гармонічний сигнал описується функцією  $x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$

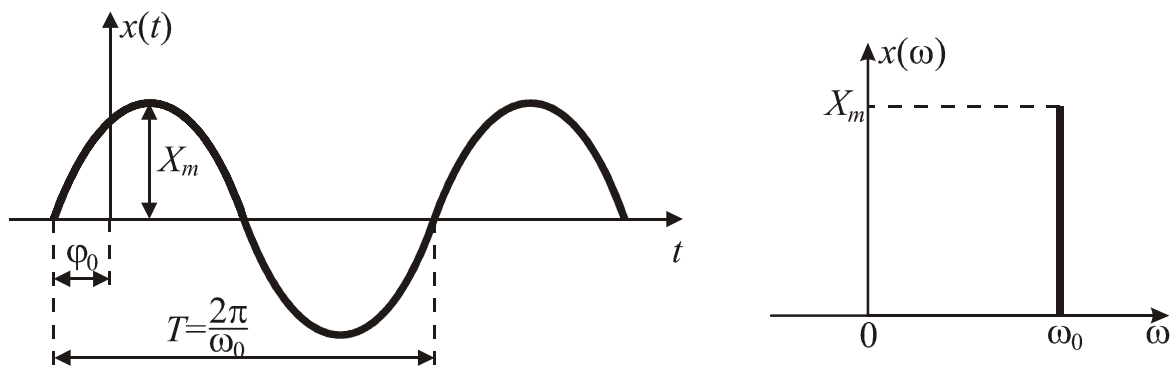


Рис. 5.2.

$x_m$  – амплітуда сигналу,  
 $\omega t + \varphi_0 = \varphi$  – фаза сигналу,  
 $\omega = 2\pi f$  – колова частота,  
 $\varphi_0$  – початкова фаза.  
 $T = \frac{2\pi}{\omega}$  – період

Прикладом складного сигналу є періодичний імпульсний сигнал. Він характеризується такими параметрами (рис. 5.3):

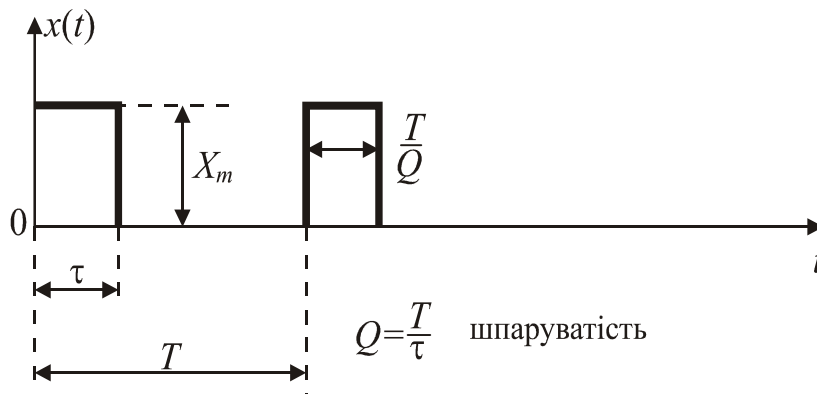


Рис. 5.3.

$x_m$  – амплітуда імпульсу,  
 $\tau$  – тривалість імпульсу,  
 $T$  – період повторення,  
 $Q = \frac{T}{\tau}$  – шпаруватість

Періодичні сигнали  $x(t)$  незалежно від їх форми характеризуються також енергетичними параметрами:

- амплітудне або максимальне значення за період  $X_m$ ;
- середнє значення за період або стала складова  $\bar{x} = x_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ ;
- середнє випрямлене значення  $\bar{x}_{\text{св}} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt$ ;

- середнє квадратичне значення  $\bar{x}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$ .

Для синусоїдного сигналу  $\bar{x}_{\text{кв}}$  називають також діючим або ефективним значенням.

Параметри  $\bar{x}$ ,  $\bar{x}_{\text{св}}$ ,  $\bar{x}_{\text{кв}}$  називають інтегральними (енергетичними) характеристиками сигналу.

Крім вказаних вище параметрів, для характеристики періодичних сигналів використовують спеціальні коефіцієнти:

- коефіцієнт амплітуди  $K_a = \frac{X_m}{\bar{x}_{\text{кв}}}$ ;
- коефіцієнт форми  $K_\phi = \frac{\bar{x}_{\text{кв}}}{\bar{x}_{\text{св}}}$ ;
- коефіцієнт усереднення  $K_y = \frac{X_m}{\bar{x}_{\text{св}}} = K_a \cdot K_\phi$ .

Середньоквадратичне значення сигналу є **єдиною істинною мірою його потужності**. Більшість вольтметрів проградуєвано в середньоквадратичних значеннях напруги.

**Електронні вольтметри** призначені для вимірювання напруг постійного і змінного струму. На рис. 5.4 наведена спрощена схема універсального електронного вольтметра.



Рис. 5.4.

При вимірюванні напруги постійного струму універсальний вольтметр працює як звичайний вольтметр постійного струму.

Структурно електронний вольтметр змінного струму відрізняється від вольтметра постійного струму наявністю перетворювача напруги змінного струму в пропорційну напругу постійного струму. Залежно від місця вмикання перетворювача (до або після підсилювача) відрізняють вольтметри типу «перетворювач-підсилювач» і типу «підсилювач-перетворювач». У першому випадку вимірювана напруга спочатку перетворюється в напругу постійного струму, а потім підсилюється підсилювачем постійного струму та вимірюється магнітоелектричним приладом. У другому випадку вимірювана напруга підсилюється підсилювачем змінного струму, а після цього перетворюється в напругу постійного струму. Вольтметр типу «перетворювач-підсилювач»

характеризується широким частотним діапазоном (20 Гц ... 1000 МГц), але обмеженою чутливістю; вольтметри типу «підсилювач-перетворювач» є найбільш чутливими і дозволяють вимірювати напругу від 3 мкВ до 300 В, але в обмеженій смузі частот (якнайкраще від 20 Гц до 100 МГц).

Перетворювач є важливим елементом вольтметра і значною мірою визначає метрологічні характеристики приладу. Вихідна напруга перетворювача може бути пропорційною максимальному, середньо-випрямленому або діючому значенню вимірюваної напруги. Згідно з цим відрізняють вольтметри максимальних, середньо-випрямлених та діючих значень.

Електронні вольтметри максимальних значень виконуються за схемою «перетворювач-підсилювач» (рис. 5.5 а). У структурі цих вольтметрів як перетворювачі напруги змінного струму в напругу постійного струму широко використовуються амплітудні (пікові) детектори з відкритим входом, закритим входом та їх комбінація.

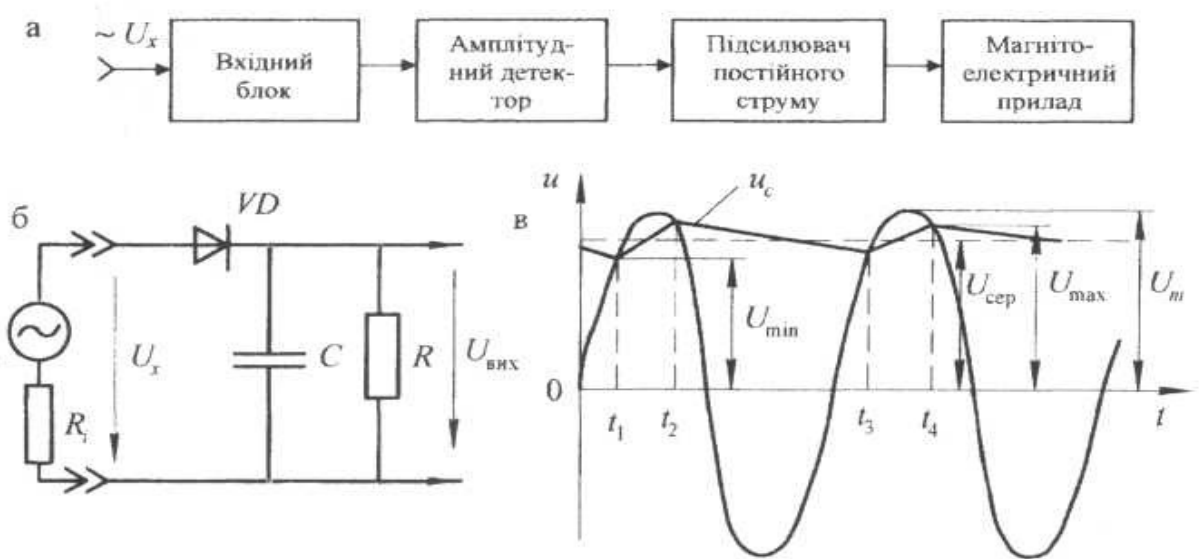


Рис. 5.5.

На рис. 5.5 (б) наведена схема детектора з відкритим входом, а на рис. 5.5 (в) – графік, який пояснює його роботу. Якщо до входу детектора прикладена напруга  $u = U_m \sin \omega t$ , то в сталому режимі на відрізках часу  $t_2-t_1$ ,  $t_4-t_3$  і т.ін. конденсатор С заряджується від напруги  $U_{min}$  до  $U_{max}$ , дуже близького до максимального значення  $U_m$  вимірюваної напруги ( $U_{max} \approx U_m$ ). На відрізках часу  $t_3-t_2$  і та ін., коли діод VD закритий, конденсатор С повільно розряджається до значення  $U_{min}$ . Ємність конденсатора С та опір резистора R вибирають такими, щоб за час відкритого стану діода на найнижчій частоті вхідного сигналу конденсатор не встигав би помітно розрядитися.

**Приклад.** При вимірюванні напруги  $U_x = U_0 + U_m \sin \omega t$  вихідна напруга детектора з відкритим входом дорівнює піковому значенню вимірюваної напруги  $U_0 + U_m$ , детектора із закритим входом -  $U_m$ .

Електронні вольтметри випускаються переважно з декількома межами вимірювань. Зміна межі вимірювань здійснюється зміною коефіцієнта передачі подільника напруги.

**Електронні вольтметри середньовипрямлених значень** будуються за схемою «підсилювач - перетворювач». Перетворювач являє собою двопівперіодну схему випрямлення, охоплену глибоким від'ємним зворотним зв'язком. У діагоналі діодного мосту включається магнітоелектричний прилад, який реагує на середньо-випрямлене значення напруги  $U_{св.}$  (рис. 5.6). Проте, шкалу приладу градуують не в середньовипрямлених значеннях, а в діючих значеннях синусоїдної форми, тобто на шкалі наносять позначки, що відповідають середньовипрямленому значенню напруги, помноженому на коефіцієнт форми синусоїди  $1,11 U_{св.}$ . Тому при вимірюванні несинусоїдної напруги показання вольтметра *не відповідають* її діючому значенню.

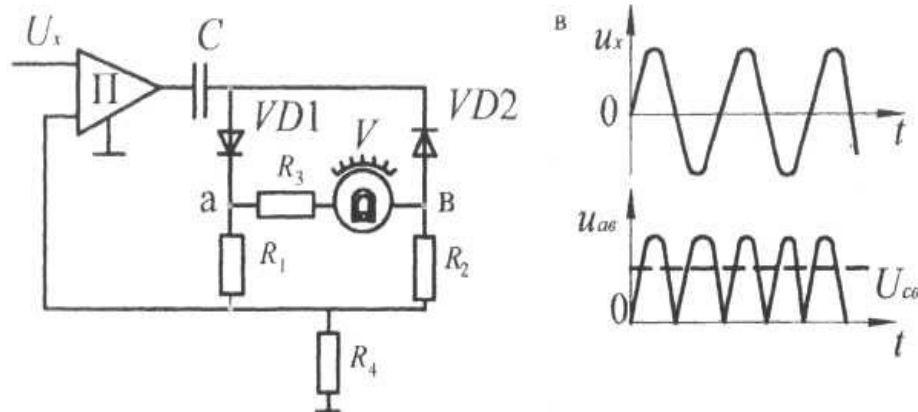


Рис. 5.6.

**Електронні вольтметри діючих значень** будуються за схемою «підсилювач - перетворювач» і призначені для вимірювання діючих значень напруги довільної форми. Перетворювачі напруги змінного струму в напругу постійного струму таких вольтметрів повинні мати квадратичну характеристику. У вимірювальній техніці використовується кілька видів таких перетворювачів: компенсаційні схеми вмикання термоперетворювачів, автокомпенсаційна мостова схема на термісторах та ін.

### Приклади розв'язку задач

**1.** Покази електронного вольтметра з закритим входом, амплітудним (піковим) детектором і середньоквадратичною шкалою  $U_V = 5B$ . Визначити амплітуду синусоїдальної напруги на вході вольтметра.

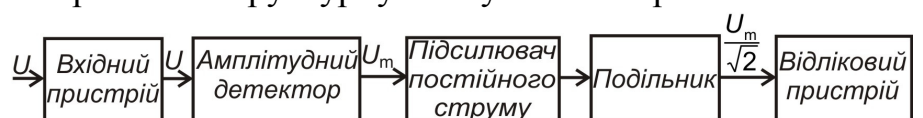
#### Розв'язання

Дано:  
 закритий вхід “~”.  
 Амплітудний детектор.  
 Середньоквадратична шкала  
 $U_V = 5B$   
 Синусоїдальний сигнал  


---

 $U_m - ?$

Накреслимо структурну схему вольтметра.



Закритий вхід не пропускає постійну складову сигналу

(середнє значення).

Для синусоїдального сигналу середнє значення

$$U_{\text{сєр}} = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin \omega t dt = 0$$

На вхід амплітудного детектора поступає сигнал

$$U(t) = U_m \sin \omega t$$

На виході амплітудного детектора одержимо максимальнє значення  $U_m$ .

Оскільки шкала відлікового пристрою проградуєвана в середньоквадратичних значеннях синусоїдального сигналу, тому вихідна напруга дорівнює:

$$U_V = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \text{ звідки } U_m = \sqrt{2}U_V = 7,07\text{В}$$

**2.** Вольтметр має відкритий вхід, амплітудний (піковий) детектор і шкалу, проградуєвану в середньоквадратичних значеннях. На вході вольтметра синусоїдальна напруга амплітудою 10В. Які показання вольтметра?

### Розв'язання

Дано:

відкритий вхід " $\sim$ ".

Амплітудний детектор.

Середньоквадратична шкала

$$U_m = 10 \text{ В}$$

Синусоїдальний сигнал

$$U_V = ?$$

Накреслимо структурну схему вольтметра.



На вхід вольтметра поступає напруга  $U(t) = U_m \sin \omega t$ . При відкритому вході ця напруга без змін поступає на амплітудний детектор, який на виході видає максимальнє значення, тобто  $U_m$ . Затим сигнал підсилюється і помножується на коефіцієнт  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , оскільки шкала проградуєвана в середньоквадратичних значеннях синусоїдальної напруги. Значить, прилад покаже  $U_V = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 7,1 \text{ В}$

**3.** Вольтметр має закритий вхід, амплітудний детектор і шкалу, проградуєвану в середньоквадратичних значеннях. На вході вольтметра синусоїдальна напруга амплітудою 10В. Які покази вольтметра?

### Розв'язання

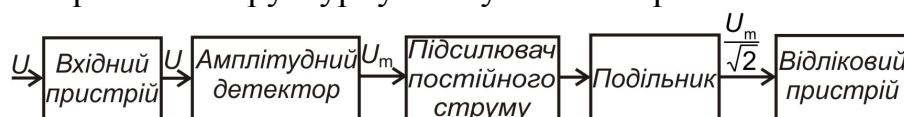
Дано:

закритий вхід " $\sim$ ".

Амплітудний детектор.

Середньоквадратична шкала

Накреслимо структурну схему вольтметра.



$$U_m = 10V$$

Синусоїдальний  
сигнал

$$U_v - ?$$

Закритий вхід не пропускає постійну складову сигналу (середнє значення).

Для синусоїдального сигналу середнє значення

$$U_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin \omega t dt = 0$$

На вхід амплітудного детектора поступає сигнал

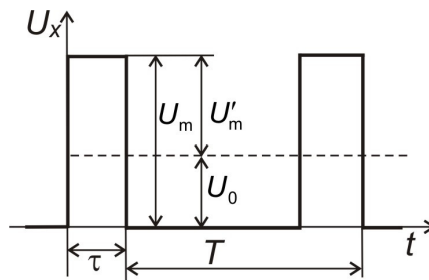
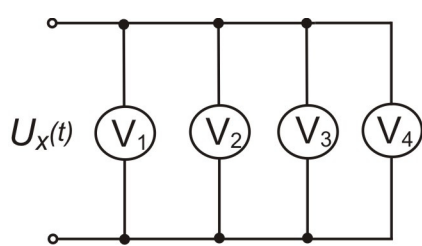
$$U(t) = U_m \sin \omega t$$

На виході амплітудного детектора одержимо максимальнє значення  $U_m$ .

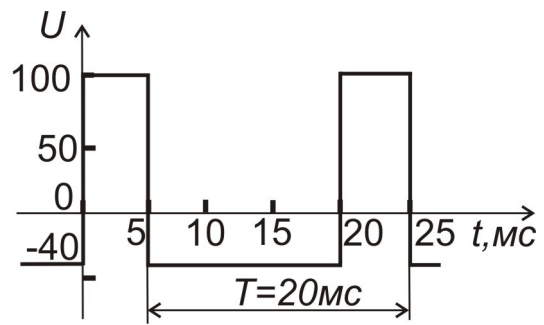
Затим сигнал підсилюється і помножується на коефіцієнт  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , оскільки шкала проградуєвана в середньоквадратичних значеннях синусоїдальної напруги. Значить, прилад покаже  $U_v = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 7,1V$

### Задачі самостійного розв'язку

1. Розрахувати амплітуднє і середньовипрямленє значення змінної напруги синусоїдальної форми, якщо діюча напруга становить  $U = 220V$ .
2. Визначити покази вольтметрів (див. рисунок), які містять різні типи перетворювачів змінного струму в постійний ( $V_1$  – ПАЗ із закритим входом;  $V_2$ ) – ПАЗ із відкритим входом;  $V_3$  – ПСВЗ із двопівперіодним випрямленням;  $V_4$  – ПСКЗ із відкритим входом) і значення похибки від впливу форми кривої, якщо на їх виходи подано сигнал  $U_x(t)$  у формі послідовності одно-полярних імпульсів з амплітудою  $U_m = 200V$  і шпаруватістю  $Q = \frac{T}{\tau} = 5$ .



3. Знайти середнє квадратичнє значення струму, миттєвє значення якого змінюється за законом  $i(t) = 3 + 5,64 \sin \omega t$ , А.
4. Знайти середнє квадратичнє значення  $U(t)$ , форма і параметри якого відображені на рисунку.



5. Знайти середнє випрямлене значення напруги  $U(t) = 31,4 \sin \omega t$ , В при однопівперіодному та двопівперіодному випрямленні.

## Похибки опосередкованих вимірювань

Функція	Похибка	
	<i>абсолютна</i>	<i>відносна</i>
$x + y + z$	$\pm [\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2]^{\frac{1}{2}}$	$\pm \frac{[\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2]^{\frac{1}{2}}}{x + y + z}$
$x - y$	$\pm [\Delta_x^2 + \Delta_y^2]^{\frac{1}{2}}$	$\pm \frac{[\Delta_x^2 + \Delta_y^2]^{\frac{1}{2}}}{x - y}$
$x \cdot y$	$\pm [x^2 \Delta_y^2 + y^2 \Delta_x^2]^{\frac{1}{2}}$	$\pm \left[ \left( \frac{\Delta_x}{x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_y}{y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$
$x^n$	$\pm n x^{n-1} \Delta_x$	$\pm n \frac{\Delta_x}{x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\pm \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \Delta_x$	$\pm \frac{1}{n} \frac{\Delta_x}{x}$
$\frac{x}{y}$	$\pm \left[ \frac{x^2 \Delta_y^2 + y^2 \Delta_x^2}{y^4} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\pm \left[ \left( \frac{\Delta_x}{x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_y}{y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$
$\ln \frac{x}{y}$	$\pm \left[ \left( \frac{\Delta_x}{x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_y}{y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$	$\pm \frac{1}{\ln(x/y)} \left[ \left( \frac{\Delta_x}{x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_y}{y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$
$\sin x$	$\pm \cos x \Delta_x$	$\pm \operatorname{ctg} x \Delta_x$
$\cos x$	$\pm \sin x \Delta_x$	$\pm \operatorname{tg} x \Delta_x$
$\operatorname{tg} x$	$\pm \frac{\Delta_x}{\cos^2 x}$	$\pm \frac{2\Delta_x}{\sin 2x}$
$\operatorname{arctg} x$	$\pm \frac{\Delta_x}{1+x^2}$	$\pm \frac{\Delta_x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$

Таблиця 2.

## Значення коефіцієнтів Стьюдента

$n$	$P$			
	0,9	0,95	0,99	
3	2,92	4,3	9,93	Якщо кількість результатів спостережень становить кілька десятків ( $n > 30$ ), то розподіл Стьюдента практично трансформується в нормальний.
5	2,13	2,78	4,6	
10	1,83	2,26	3,25	
15	1,76	2,15	2,98	
20	1,73	2,09	2,86	
$\infty$	1,65	1,96	2,58	

Таблиця 3.

## Позначення інтегралів імовірності



$$\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$











t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2954	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	1319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441

1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4860	4864	4867	4871	4874	4877	4880	4883	4886	4889
2,3	4892	4895	4898	4900	4903	4906	4908	4911	4913	4915
2,4	4918	4920	4922	4924	4926	4928	4930	4932	4934	4936
2,5	4937	4939	4941	4942	4944	4946	4947	4949	4950	4952
2,6	4953	4954	4956	4957	4958	4958	4960	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	7371	4971	7972	4973
2,8	4974	4975	4975	4976	4977	4978	4978	4979	4980	4980
2,9	4981	4981	4982	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4986
3,0	4986	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3,5	4997	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4,0	4999	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Таблиця 4.

Умовні позначення систем електровимірювальних приладів

Система приладу	Знак на шкалі	
	приладу з механічним протидіючим моментом	логометра
Магнітоелектрична з рухливою рамкою		
Магнітоелектрична з рухливим магнітом		
Електромагнітна		

Електродинамічна		
Феродинамічна		
Індукційна		
Електростатична		-
Термоелектрична		-
Випрямна, детекторна		-
Електронна		-

## САМОСТІЙНА РОБОТА

Для самостійного вивчення пропонуються наступні питання:

1. Міри електричних величин: міра ЕРС, міра електричного опору, міра індуктивності і взаємної індуктивності, електричної ємності, міра електричного струму. [1] с. 120 – 143.
2. Шунти і подільники напруги. [2] с. 120 – 143.
3. Розширення меж вимірювань амперметром і вольтметром. [1] с. 234 – 241.
4. Електромагнітний вимірювальний механізм і його метрологічна схема [3] с. 167 – 170.
5. Електростатичний вимірювальний механізм і його метрологічна схема [3] с. 178 – 181.
6. Індукційний вимірювальний механізм і його метрологічна схема [3] с. 181 – 184.
7. Мостові вимірювальні кола. [2] с. 448 – 472.
8. Компенсаційні вимірювальні кола. [2] с. 488 – 507.
9. Компаратори електричних величин. [2] с. 515 – 537.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Поліщук Є.С. та інш. Метрологія та вимірювальна техніка. – Львів: Бескид Біт, 2003. – 544 с.
2. Дорожовець М.М. та інш. Основи метрології та вимірювальної техніки. Т 2. – Львів: «Львівська політехніка», 2005. – 496 с.
3. Дорожовець М.М. та інш. Основи метрології та вимірювальної техніки. Т 1. – Львів: «Львівська політехніка», 2005. – 489 с.
4. Крюков О.М, Толстіков В.Ф. Аналогові засоби вимірювальної техніки. Навчальний посібник. – Харків: ХНАДУ, 2007, - 448 с.
5. Шпінь О. П. Прикладна метрологія. – К. НТУУ «КПІ», 2007.
6. Кушнир Ф.В. Электрорадиоизмерения. – Л.: Энергоатомиздат, 1983. – 320 с.
7. Сергеев А.Г. Метрология. – М.: Логос, 2001. – 408 с.