

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Алгебра та геометрія

Конспект лекцій

з курсу "Алгебра та геометрія"

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 124 «Системний аналіз»,
освітніми програмами «Системний аналіз і управління; Системний аналіз
фінансового ринку»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019 р.

«Конспект лекцій з курсу "аналітична геометрія та лінійна алгебра" [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «Системний аналіз», освітніх програм «Системний аналіз і управління; Системний аналіз фінансового ринку» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.:Калюжний О.О., Мальцев А.Ю., Подколзін Г.Б., Чаповський Ю.А. ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,00 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 127 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 25.04.2019 р.)
за поданням Вченої ради Інституту прикладного системного аналізу (протокол № 4 від 22.04.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Алгебра та геометрія

Конспект лекцій

з курсу "Алгебра та геометрія"

Рецензент	Ільєнко А.Б., доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, кандидат фіз.-мат. наук
Відповідальний редактор	Богданський Ю.В., професор кафедри математичних методів системного аналізу, д.ф.-м.н.

В посібнику подані основні поняття та теореми що вивчаються в курсі «Алгебра та геометрія» в першому семестрі студентам спеціальності 124 «Системний аналіз». Також розглядаються типові приклади з розв’язками, що ілюструють матеріал лекції. В кінці кожної лекції наводяться контрольні запитання, що до вивченого матеріалу та типові задачі.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

З М І С Т

Лекція 1.	Вектори на прямій, на площині і в просторі. Базиси, системи координат	3
Лекція 2.	Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів	13
Лекція 3.	Визначники другого та третього порядків	21
Лекції 4-5.	Рівняння прямої лінії на площині.	34
Лекція 6.	Полярна система координат на площині.	52
Лекції 7-8-9.	Рівняння кривих другого порядку на площині.	59
Лекція 10.	Арифметичні простори. Матриці. Лінійні простори.	81
Лекція 11.	Лінійні підпростори. Лінійні оболонки.	96
Лекція 12-13.	Лінійні відображення лінійних просторів. Еквівалентні системи. Базиси і вимірність лінійних просторів. Ранг матриці та його обчислення.	109

ЛЕКЦІЯ 1.

ВЕКТОРИ НА ПРЯМІЙ, НА ПЛОЩИНІ І В ПРОСТОРІ. БАЗИСИ, СИСТЕМИ КООРДИНАТ.

Нові терміни:

вектор	- вектор	- vector
колінеарний	- коллинеарный	- collinear
компланарні	- компланарные	- complanar
співспрямовані	- сонаправленные	- codirected
орт-вектор	- орт-вектор	- ort-vector
модуль(довжина)	- модуль(длина)	- modul(length)
добуток	- произведение	- product
додаток	- сумма	- addition
різниця	- разность	- difference
зменшуване	- уменьшаемое	- diminution
пряма	- прямая	- line
площина	- плоскость	- area
простір	- пространство	- spase
базис	- базис	- base
розклад за базисом	- разложение по базису	- decomposition from base
координата	- координата	- coordinate
ортобазис	- ортобазис	- orthonormal base
канонічний ортобазис	- канонический ортобазис	- canonical orthonormal base

Питання, що розгортатимуться в лекції:

1. Означення вектора та лінійні операції над векторами.
2. Базиси і системи координат на прямій, на площині і в просторі.
3. Ділення відрізка у заданому відношенні.

Означення 1.1. *Вектором* називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, у якого визначені початок і кінець.

Формально вектор будемо позначати або маленькою літерою латинської абетки

$\vec{a}$, або двома великими латинськими літерами $\overrightarrow{AB}$, перша з яких є початок вектора, друга — його кінець. З означення видно, що кожен вектор повністю характеризується своїм напрямом та довжиною. Довжину вектора в подальшому будемо називати модулем вектора і позначати символами $\text{mod } \vec{a}$, чи $|\vec{a}|$. Якщо вектор задано символом $\overrightarrow{AB}$, то його довжина позначається символом $|\overrightarrow{AB}|$.

Означення 1.2. Вектори, що мають однаковий напрям, називаються *співспрямованими*. Вектори, що мають протилежний напрям, називаються *протилежно спрямованими*. Співспрямовані та протилежно спрямовані вектори

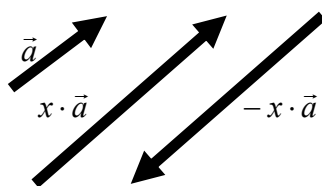
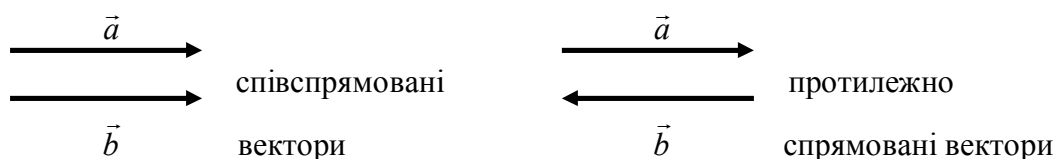


Рис. 1.1.

називаються колінеарними.



Означення 1.3. Два вектори вважаються *рівними*, якщо вони співспрямовані і мають однакову довжину.

З Означення 1.3 випливає, що вектори можуть паралельно переміщуватись на прямій, на площині і в просторі.

Означення 1.4. Три вектори, що знаходяться в одній, чи паралельних площинах, називаються компланарними.

Означення 1.5. Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називається *нульовим вектором*, або *нуль-вектором* і позначається символом $\vec{0}$.

ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ.

Визначимо дві лінійні операції над векторами: множення числа (скаляра) на

вектор та додавання векторів.

Означення 1.6. Назвемо *добутком скаляра* x і вектора $\vec{a}$ такий вектор $\vec{b}$, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$ в разі додатного скаляра x і протилежний, якщо скаляр x - від'ємний, а довжина $\vec{b}$ дорівнює добутку модуля скаляра x і довжини вектора $\vec{a}$. Формальний запис множення скаляра x на вектор $\vec{a}$ має вигляд:

$$\vec{b} = x \cdot \vec{a},$$

$$|\vec{b}| = |x| \cdot |\vec{a}|$$

(графічно цю операцію зображено на Мал. 1.1).

Означення 1.7. Додаток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, що знаходиться за правилом: обидва вектори-додатки $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відносять до одного початку; на цих векторах, як на сторонах, будується паралелограм; вектор $\vec{c}$ має спільний початок з векторами-додатками $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і співпадає з діагоналлю, паралелограму, що виходить з цього початку, і має таку ж довжину. (Графічно цю операцію зображено на Рис.1.2).

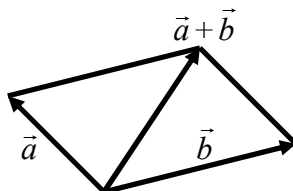


Рис. 1.2

Якщо згадати, що при множенні вектора на від'ємний скаляр напрям вектора змінюється на протилежний, то правило паралелограму дає можливість обчислення вектора-різниці двох векторів, який має початок в кінці вектора-від'ємника, а кінець - в кінці вектора-зменшуваного (графічно цю операцію зображено на Рис. 1.2).

Запропоноване правило додавання векторів має назву "Правило паралелограму". Проте очевидно, що це правило не може бути застосоване для отримання додатку двох колінеарних векторів. В цьому випадку можна застосувати інше правило, так зване "Правило трикутника", що не вступає в протиріччя з "Правилом паралелограму".

Означення 1.8. Додатком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ назвемо вектор $\vec{c}$, що знаходиться

за правилом: до закінчення вектора $\vec{a}$ віднесемо початок вектора $\vec{b}$, тоді початок вектора $\vec{c}$ співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець - з кінцем вектора $\vec{b}$.

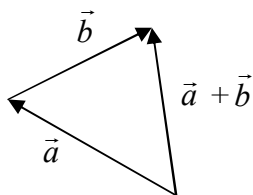


Рис. 1.3.

Для довільних векторів графічне зображення операції додавання зображено на Рис.1.3. Слід звернути увагу на те, що правило трикутника також дає можливість побудувати різницю двох векторів.

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

1. $(x \cdot y) \cdot \vec{a} = x \cdot (y \cdot \vec{a})$ (асоціативність по скалярах),
2. $(x + y) \cdot \vec{a} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{a}$ (дистрибутивність по скалярах),
3. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативність),
4. $x \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = x \cdot \vec{a} + x \cdot \vec{b}$ (дистрибутивність по векторах),
5. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (асоціативність),

де x, y - скаляри, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - вектори.

Означення 1.9. Назвемо вектор $\vec{b}$ *протилежним* вектору $\vec{a}$, якщо $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

Означення 1.10. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, назвемо *орт-вектором*. Вектор, що співспрямований з вектором $\vec{a}$, довжина якого дорівнює "одиниці", назвемо орт-вектором вектора $\vec{a}$ і будемо позначати символом $\vec{a}^0$.

Приклад 1.1. Знайти орт-вектор вектора $\vec{a}$, якщо довжина вектора $\vec{a}$ дорівнює 5.

Розв'язок. $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{5}$.

Приклад 1.2. Знайти вектор $\vec{b}$, напрям якого протилежний напрямові вектора $\vec{a}$, а довжина втричі більша за довжину вектора $\vec{a}$.

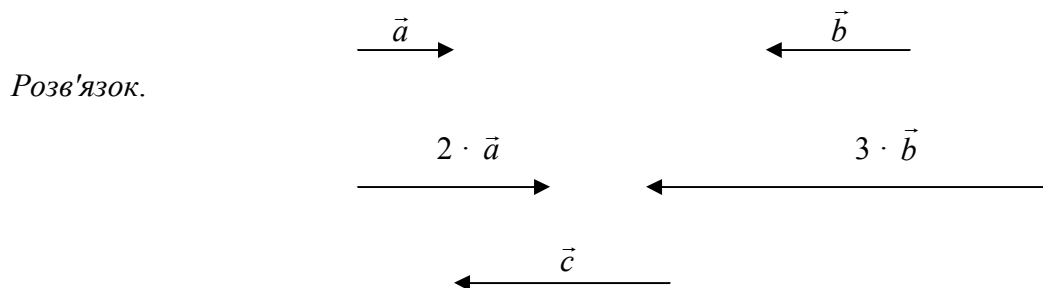
Розв'язок. $\vec{b} = -3 \cdot \vec{a}$.

Приклад 1.3. Знайти вектор $\vec{c}$, що співпадає за напрямом з бісектрисою кута між

векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$.

Розв'язок. Відомо, що діагоналі ромба ділять кути при вершинах навпіл. Тому, якщо додати орт-вектори векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то цей вектор-додаток буде лежати на бісектрисі кута поміж заданими векторами, тобто $\vec{c} = \frac{\vec{a}}{5} + \frac{\vec{b}}{3}$.

Приклад 1.4. Побудувати вектор $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$, якщо



БАЗИСИ, СИСТЕМИ КООРДИНАТ.

Означення 1.11. Назвемо *базисами* на прямій, на площині і в просторі один фіксований вектор, два фіксовані не колінеарні вектори, три фіксовані не компланарні вектори відповідно.

З Означення 1.10. витікає, що базиси на прямій, на площині і у просторі обираються неоднозначно.

Означення. 1 12. Назвемо *декартовою системою координат* на прямій, на площині і в просторі сукупність базисних векторів і фіксованої точки (початку координат). Якщо базисні вектори попарно перпендикулярні (ортогональні), то декартова система координат називається прямокутною.

Теорема 1. Якщо на прямій вибрано базисний вектор $\vec{b}$, то кожен вектор $\vec{a}$ цієї прямої можна записати у вигляді $\vec{a} = x \cdot \vec{b}$, де $x = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, якщо вектори $\vec{a}$ і

$\vec{b}$ співспрямовані, і $x = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, якщо вони протилежно спрямовані. Число x називається

координатою вектора $\vec{a}$ у базисі $\vec{b}$.

Теорема 2. Якщо на площині вибрано пару базисних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то довільний вектор $\vec{c}$ цієї площини можна записати у вигляді: $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$ і цей вигляд однозначний. Числа x та y називаються координатами вектора $\vec{c}$ у базисі $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Теорема 3. Якщо в просторі вибрано трійку базисних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, то довільний вектор $\vec{d}$ цього простору можна записати у вигляді: $\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$ і цей вигляд однозначний. Числа x, y, z називаються координатами вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Ліві частини формул, отриманих в Теоремах 1, 2, 3 називаються розкладом векторів по базису.

Примітка. В декартовій прямокутній системі координат в ролі базисних векторів звичайно виступають орт-вектори, які прийнято позначати символами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Крім того, в просторі відрізняють ліві та праві базисні трійки.

Означення 1.13. Трійка називається *правою*, якщо з кінця її останнього вектора найкоротше обертання від першого вектора до другого відбувається проти годинникової стрілки.

ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТАХ.

Формули, що будуть наведені нижче, стосуються векторів в просторі. Але вони мають сенс і для векторів на площині і прямій. Різниця полягає лише у відсутності відповідних координат.

Нехай в просторі вибрано канонічний базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ і нехай вектори

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + b_3 \cdot \vec{k}$$

Тоді

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \quad x \cdot \vec{a} = (x \cdot a_1, x \cdot a_2, x \cdot a_3). \quad (1.1)$$

З формули для координат добутку числа на вектор витікає, що умовою колінеарності двох векторів є пропорційність їхніх координат, тобто якщо вектор $\vec{a}$ колінеарний векторові $\vec{b}$, то повинні виконуватись рівності

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad (1.2)$$

Примітка. Кожну точку на прямій, на площині і в просторі будемо розуміти як вектор, початок якого лежить в початку координат, а кінець - в цій точці. Такий вектор в подальшому будемо називати радіусом-вектором цієї точки.

Якщо відомий початок вектора- точка $A(x_1, y_1, z_1)$ і кінець вектора – точка $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (1.3)$$

Примітка 1. Обчислимо координати нульового вектора. Цей вектор був визначений як вектор, довжина якого дорівнює нулю, тобто можна вважати, що у нульового вектора початок і кінець співпадають. Отже, згідно з вище записаного формулою, він має нульові координати.

Примітка 2. З операції додавання двох векторів витікає, то вектор, протилежний заданому вектору, має ті ж координати, тільки з протилежними знаками.

Приклад 1.5. Відповісти на питання: чи можуть три точки $A(-2,3,0)$, $B(1,1,1)$, $C(3,-1,5)$ знаходитись на одній прямій?

Розв'язок. Якщо точки A, B, C знаходяться на одній прямій, то вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{BC}$ повинні бути колінеарними. Перевіримо це, обчисливши координати цих векторів:

$$\overrightarrow{AB} = (1 - (-2), 1 - 3, 1 - 0) = (3, -2, 1), \quad \overrightarrow{BC} = (3 - 1, -1 - 1, 5 - 1) = (2, -2, 4).$$

Очевидно, що координати цих векторів не пропорційні, тобто точки A, B, C не знаходяться на одній прямій.

Приклад 1.6. Вектори $\vec{a} = (1,2,-5)$ і $\vec{b} = (5,0,1)$ співпадають із сторонами паралелограма. Знайти координати векторів, що співпадають із діагоналями нього паралелограму.

Розв'язок. З означення різниці та додатку двох векторів витікає, то один з розшукуваних векторів дорівнює додатку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, а другий – їхній різниці.

$$\vec{a} + \vec{b} = (1+5, 2+0, -5+1) = (6, 2, -4),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1-5, 2-0, -5-1) = (-4, 2, -6).$$

Приклад 1.7. Знайти координати вектора $\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c}$, якщо $\vec{a} = (-6, 3, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$, $\vec{c} = (5, 3, 8)$.

Розв'язок.

$$3 \cdot \vec{a} = (-18, 9, 6),$$

$$2 \cdot \vec{b} = (0, 2, -2),$$

$$\vec{d} = (-18 - 5, 9 + 2 - 3, 6 - 2 - 8) = (-23, 8, -4).$$

ДІЛЕННЯ ВІДРІЗКУ У ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ.

Нехай с відрізок АВ, початок якого точка $A(x_1, y_1, z_1)$, а кінець - точка $B(x_2, y_2, z_2)$. Нехай, крім того, точка $M(x, y, z)$ ділить відрізок АВ у відношенні r , тобто $AM = r \cdot MB$. Цей запис означає, що коли точка M лежить між точками A і B , то r - додатне число, а коли точка M ділить відрізок АВ зовнішнім чином, тобто лежить на продовженні відрізка АВ, то r — від'ємне число. Знайдено координати точки M .

Обчислимо координати векторів $\vec{AM}$ та $\vec{MB}$:

$$\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1), \quad \vec{MB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$$

$$r \cdot \vec{MB} = (r \cdot (x_2 - x), r \cdot (y_2 - y), r \cdot (z_2 - z)),$$

$$(1.4) \quad \vec{AM} = r \cdot \vec{MB} = \begin{cases} x - x_1 = r \cdot (x_2 - x) & \Rightarrow & x = \frac{x_1 + r \cdot x_2}{1 + r} \\ y - y_1 = r \cdot (y_2 - y) & \Rightarrow & y = \frac{y_1 + r \cdot y_2}{1 + r} \\ z - z_1 = r \cdot (z_2 - z) & \Rightarrow & z = \frac{z_1 + r \cdot z_2}{1 + r} \end{cases}$$

Приклад 1.8. Знайти координати середини відрізка АВ, якщо $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$

Розв'язок. Згідно з формулами ділення відрізка в заданому відношенні $r = 1$ і тому

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Приклад 1.9. Обчислити координати точок, що ділять відрізок АВ на чотири рівні частини, якщо $A(1, 4, 6)$, $B(5, 2, 8)$.

Розв'язок: Точок ділення буде три. Позначимо їх M_1, M_2, M_3 . Очевидно, що M_2 ділить відрізок АВ навпіл і тому її координати дорівнюватимуть:

$$x_2 = \frac{1}{2}(5 + 1) = 3, \quad y_2 = \frac{1}{2}(4 + 2) = 3, \quad z_2 = \frac{1}{2}(6 + 8) = 7.$$

Точка M_1 ділить відрізок AM_2 навпіл. Тому

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}(4 + 3) = 3.5, \quad z_1 = \frac{1}{2}(6 + 7) = 6.5.$$

Точка M_3 ділить відрізок M_2B навпіл. Тому

$$x_3 = \frac{1}{2}(3 + 5) = 4, \quad y_3 = \frac{1}{2}(3 + 2) = 2.5, \quad z_3 = \frac{1}{2}(7 + 8) = 7.5.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

1. Чи зміниться напрям вектора, якщо його помножити на число $\frac{3}{2}$?
2. Чи зміниться вектор, якщо до нього додати нульовий вектор?
3. Чи один нульовий вектор?
4. Чи один протилежний вектор у кожного вектора?
5. Який напрям може мати додатак двох колінеарних векторів?
6. Навести означення базисів на прямій, на площі та у просторі.
7. Навести означення декартової системи координат.
8. Навести означення координат вектора в декартовій системі координат.
9. Чи можуть в одного і того ж вектора в одному і тому ж базисі бути різні координати?
10. Які координати у нульового вектора
11. Які координати у протилежного до заданого вектора?
12. Як обчислюються координати вектора через координати його початку і кінця?
13. Як обчислюються координати середини відрізка через координати його початку і кінця?
14. Як можуть розмішуватися вектори, додатак яких дорівнює нульовому вектору?
15. Як повинні розмішуватися вектори, щоб їх додатак і різниця мали однакову довжину?

ВПРАВИ ДО ВИКОНАННЯ.

1. Знайти вектори, що співпадають з медіанами трикутника, якщо їх початки лежать у вершинах трикутника.

2. Знайти якийсь вектор, що співпадає з бісектрисою кута між векторами.
3. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, що співпадають із сторонами трикутника ABC, якщо за базис взяти вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.
4. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{AC}$, якщо точки A(-1,2,6), B(1,0,1), C(3, 7, 5) є вершини трикутника.
5. Знайти координати векторів, що співпадають з діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (3,0,5)$ та $\vec{b} = (1,1,1)$ як на сторонах.
6. Перевірити, чи можуть точки A(-1,2,3), B(0,1,-1), C(-3,-2,-13) бути вершинами трикутника.
7. Знайти координати центру ваги паралелограму, три вершини якого A(-1,3,8), B(0,1,1), C(5,0,4).
8. Знайти координати центру ваги трикутника, якщо його вершини A(7,3,1), B(2, 0, 1), C(-4, 5, 0).
9. Знайти координати точок, що ділять відрізок між точками A(1,1,1), B(3,7,-3) на три рівні частини.
10. Знайти координати вектора $\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} + \vec{c}$, якщо $\vec{a} = (1,7,8)$, $\vec{b} = (11,0,0)$, $\vec{c} = (0,-1,0)$.
11. Перевірити, чи можуть точки A(0,0,4), B(1,1,4), C(3,1,4), D(2,0,4) бути вершинами паралелограму.
12. На площині є два вектори $\vec{a} = (-1, 1)$ та $\vec{b} = (0, 1)$. Розкласти вектор $\vec{c} = (3, 2)$ по цих векторах.
13. На площині є три вектори $\vec{a} = (-1,6)$, $\vec{b} = (1,1)$, $\vec{c} = (0,3)$. Знайти розклад вектора $\vec{d} = 2 \cdot \vec{a} - \vec{b} + 4 \cdot \vec{c}$ по векторах $\vec{b}$ та $\vec{c}$.

ЛЕКЦІЯ 2.

СКАЛЯРНИЙ, ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ.

Нові терміни:

скалярний добуток	- скалярное произведение	- scalar product
векторний добуток	- векторное произведение	- vector product
мішаний добуток	- смешанное произведение	- mixed product
направляючі косинуси	- направляющие косинусы	- direction cosine
ортогональний	- ортогональный	- orthogonal
проекція	- проекция	- projection

Питання, що розглядатимуться в лекції.

1. Скалярний добуток векторів, геометричні та алгебраїчні властивості.
2. Векторний добуток векторів, геометричні та алгебраїчні властивості.
3. Мішаний добуток векторів, геометричні та алгебраїчні властивості.
4. Обчислення скалярного, векторного та мішаного добутків через координати векторів в канонічних базисах на площині та в просторі.
5. Ортогональна проекція вектора на вісь, властивості.

Означення 2.1. Назвемо *скалярним добутком* $\vec{a}$ та $\vec{b}$, який формально позначатимемо символом $(\vec{a}, \vec{b})$ чи $\vec{a} \cdot \vec{b}$ число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \quad (2.1)$$

де φ - кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Геометричні властивості скалярного добутку:

1. Скалярний добуток двох векторів дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли вектори ортогональні.
2. Квадрат довжини вектора дорівнює скалярному добутку цього вектора на себе.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку векторів:

$$1. (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) - \text{комутативність} \quad (2.2)$$

$$2. (\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}) \quad (2.3)$$

$$3. (\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{c}, \vec{b}) \quad (2.4)$$

Приклад 2.1. Довести, що вектор $\vec{p} = (\vec{a}, \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ортогональний до вектора $\vec{a}$.

Доведення. Для того, щоб довести, що вектор $\vec{p}$ ортогональний до вектора $\vec{a}$, треба довести, що їх скалярний добуток дорівнює 0. Перевіримо це.

$$(\vec{p}, \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{c}) \cdot (\vec{b}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{b}) \cdot (\vec{c}, \vec{a}) = 0.$$

ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИН ВЕКТОРІВ ТА КУТІВ МІЖ НИМИ.

З означення скалярного добутку витікає:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} \quad (2.5)$$

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (2.6)$$

Означення 2.2. Назвемо *векторним добутком* двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, який формально позначимо символом $[\vec{a}, \vec{b}]$ такий вектор $\vec{c}$, що задовольняє наступним умовам:

- а) $\vec{c}$ - ортогональний векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$.
- б) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, де φ - кут поміж векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
- в) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку.

Геометричну інтерпретацію зображено на Рис. 2.1.

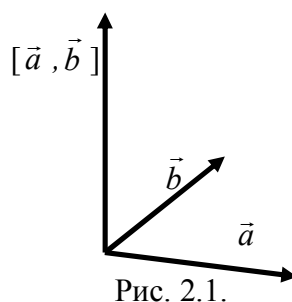


Рис. 2.1.

Геометричні властивості векторного добутку:

1. Векторний добуток дорівнює нуль-вектору тоді і тільки тоді, коли вектори-чинники (співмножники) колінеарні.
2. Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограму, побудованого на цих векторах, як на сторонах.

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

$$1. [\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}] \text{ - антикомутативність.} \quad (2.8)$$

$$2. [x \cdot \vec{a}, \vec{b}] = x \cdot [\vec{a}, \vec{b}] \quad (2.9)$$

$$3. [\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{c}, \vec{b}] \quad (2.10)$$

Означення 2.3. Назвемо *мішаним добутком* трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, який формально позначатимемо символом $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c}$, число

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]). \quad (2.11)$$

Геометричні властивості мішаного добутку:

1. Мішаний добуток дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні.
2. Модуль мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеду, побудованого на векторах-чинниках як на ребрах.
3. Мішаний добуток співпадає з об'ємом цього паралелепіпеду в разі, коли вектори-чинники в порядку їх запису утворюють праву трійку і об'єму із знаком мінус - у випадку лівої трійки.

Алгебраїчні властивості мішаного добутку:

$$1. \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b}. \quad (2.12)$$

$$2. (x \vec{a}) \vec{b} \vec{c} = \vec{a} (x \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{b} (x \vec{c}) = x \cdot \vec{a} \vec{b} \vec{c}. \quad (2.13)$$

$$3. (\vec{a} + \vec{d}) \vec{b} \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c} + \vec{d} \vec{b} \vec{c}. \quad (2.14)$$

ОБЧИСЛЕННЯ СКАЛЯРНОГО, ВЕКТОРНОГО ТА МІШАНОГО ДОБУТКІВ ЧЕРЕЗ
КООРДИНАТИ ВЕКТОРІВ – ЧИННИКІВ У КАНОНІЧНОМУ БАЗИСІ.

Нехай є три вектори, задані своїми координатами у канонічному базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

Тоді

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad (2.15)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2, a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3, a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \quad (2.16)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = c_1 \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) + c_2 \cdot (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) + c_3 \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \quad (2.17)$$

ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИН ВЕКТОРІВ ТА КУТІВ МІЖ НИМИ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТИ ВЕКТОРІВ У КАНОНІЧНОМУ БАЗИСІ.

Нехай є два вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Тоді

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} \quad (2.18)$$

$$\cos \varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (2.19)$$

Приклад 2.. Обчислити довжину вектора $\vec{a} = (3, 0, 4)$.

Розв'язок. $|\vec{a}| = \sqrt{9+16} = 5$.

Приклад 2.3. Обчислити кут φ між векторами $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -2)$.

Розв'язок. Скористаємось формулою (2.19) $\cos \varphi = \frac{1+1-2}{3} \cdot 6 = 0$, тобто вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ — ортогональні.

Приклад 2.4. Знайти спрямовуючі косинуси вектора $\vec{a} = (0, 4, -3)$, тобто косинуси кутів $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, що утворює вектор $\vec{a}$ із координатними осями.

Розв'язок. Відомо, що спрямовуючі косинуси вектора — то координати його орт-вектора. Таким чином, треба обчислити довжину вектора і поділити кожен його координату на цю довжину.

$$|\vec{a}| = \sqrt{16+9} = 5, \quad \vec{a}^0 = (0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}).$$

Отже, $\cos \varphi_1 = 0, \quad \cos \varphi_2 = \frac{4}{5}, \quad \cos \varphi_3 = -\frac{3}{5}.$

Приклад 2.5. Перевірити, що трикутник з вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 1)$ та $C(1, 2, 1)$ - рівнобічний.

Розв'язок. Обчислимо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0), \quad \overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 0).$$

Очевидно, що довжини векторів $\overrightarrow{AB}$ однакові та $\overrightarrow{AC}$ і дорівнюють 1.

Приклад 2.6. Знайти площу трикутника, заданого своїми вершинами: $A(3, 4, 1)$, $B(2, 0, 3)$, $C(1, -5, 0)$.

Розв'язок. Згідно з відповідною властивістю векторного добутку, площа трикутника може бути обчислена, як половина модуля векторного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-1, -4, 2), & \overrightarrow{AC} &= (-2, -9, -1) \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] &= (22, 3, 1); & \frac{1}{2} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| &= 494. \end{aligned}$$

Приклад 2.7. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a} = (3, 2, 0)$ та $\vec{b} = (1, 1, 1)$.

Розв'язок. $[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2, a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3, a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) = (2, -3, 1)$.

Приклад 2.8. Обчислити висоту h трикутника, що проходить через вершину A , якщо вершинами трикутника будуть точки $A(1, -1, 2)$, $B(3, 0, 1)$, $C(5, 1, 1)$.

Розв'язок. Скористаємось тим фактом, що площа трикутника може бути обчислена двома способами:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|, \quad S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot h \Rightarrow h = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|}{|\overrightarrow{BC}|},$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1, -1), \quad \overrightarrow{AC} = (4, 2, -1), \quad \overrightarrow{BC} = (2, 1, 0)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1, -2, 0) \Rightarrow |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5}, \quad h = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Приклад 2.9. Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (3, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 2, 3)$.

Розв'язок. $[\vec{b}, \vec{c}] = (-2, -9, 6)$, $\vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = -2 + 9 + 12 = 19$.

ОРТОГОНАЛЬНА ПРОЕКЦІЯ НА ВІСЬ, ВЛАСТИВОСТІ.

Означення 2.4. Назвемо *ортогональною проекцією* вектора $\vec{a}$ на вісь, що визначається вектором $\vec{b}$, або на вектор $\vec{b}$ величину, яку формально позначатимемо символом $pr_{\vec{b}} \vec{a}$ і яка задовольняє рівності

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi, \quad (2.20)$$

де φ — кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Ортогональна проекція задовольняє наступним умовам:

$$a) pr_{\vec{b}} x \cdot \vec{a} = x \cdot pr_{\vec{b}} \vec{a} \quad (2.21a)$$

$$б) pr_{\vec{b}} (\vec{a} + \vec{c}) = pr_{\vec{b}} \vec{a} + pr_{\vec{b}} \vec{c} \quad (2.21б)$$

$$\text{Крім того, має місце рівність} \quad pr_{\vec{b}} \vec{a} = (\vec{a}, \vec{b}^0) \quad (2.22)$$

де $\vec{b}^0$ — орт-вектор вектора $\vec{b}$.

Приклад 2.10. Обчислити $pr_{\vec{a}-\vec{b}} (\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a} = (3, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$.

Розв'язок.

$$\vec{a} + \vec{b} = (4, 2, 1), \quad \vec{a} - \vec{b} = (2, 0, -1), \quad (\vec{a} - \vec{b})^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, 0, -1).$$

Приклад 2.11. Обчислити проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{a}$, якщо кут між ними дорівнює $\frac{\pi}{3}$, $A(-1, 2, 1)$, $B(3, 7, 0)$.

Розв'язок. $\overrightarrow{AB} = (4, 5, -1)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 25 + 1} = \sqrt{42}$,

$$pr_{\vec{a}} \overrightarrow{AB} = \frac{\sqrt{42}}{2}.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

1. Чи має сенс рівність $[\vec{a}, \vec{b}] = 3$.
2. Коли $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$?
3. Чи може виконуватись рівність $[\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{a}, \vec{b})$?
4. Коли $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$?
5. Коли $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$?
6. Коли $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$?

7. Коли $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?
8. Формула для обчислення площі трикутника, дві сторони якого співпадають з векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.
9. За якою формулою обчислюється довжина вектора $\vec{a}$?
10. За якими формулами обчислюються спрямовуючі косинуси вектора $\vec{a}$?
11. Означення мішаного добутку трьох векторів.
12. Як виглядає формула обчислення скалярного добутку через координати векторів у ортобазису?
13. Як обчислюється об'єм паралелепіпеду, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, як на ребрах?
14. Чи можуть вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, що задовольняють рівності $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, бути базисом у просторі?

ВПРАВИ ДО ВИКОНАННЯ.

1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a} = (-1, 2, 3)$, та $\vec{b} = (0, 2, 3)$.
2. Знайти орт-вектор вектора $\vec{a} = (1, 1, 1)$.
3. Знайти направляючі косинуси вектора $\vec{b} = (3, 0, 4)$.
4. Чи будуть ортогональні вектори $\vec{a} = (7, -1, 4)$ та $\vec{b} = (1, 7, 0)$?
5. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = (1, -1, 4)$, $\vec{b} = (2, 0, 3)$.
6. Знайти площу паралелограму, три вершини якого $A(-1, 2, 7)$, $B(1, 1, 1)$, $C(0, -4, 2)$.
7. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a} = (-3, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (6, -4, -2)$.
8. Знайти $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{d})$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ і $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.
9. Довести, що вектор $\vec{s} = 2\vec{b}(\vec{a}, 3\vec{c}) - 3\vec{c}(\vec{a}, 2\vec{b})$ ортогональний до вектора $\vec{a}$.
10. Довести, що вектор $\vec{p} = \vec{b} - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$ ортогональний вектору $\vec{a}$.
11. Знайти вектор x , ортогональний векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$, довжина якого дорівнює 10.
12. Знайти кут між векторами $\vec{a} = (3, 1, 1)$ та $\vec{b} = (0, 0, 22)$.
13. Чи буде трикутник з вершинами $A(1, -1, 2)$, $B(3, 0, -1)$, $C(3, 3, 0)$ прямокутним?
14. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ортогональні, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Обчислити величину $||\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}||$.
15. Довести тотожність $||[\vec{a}, \vec{b}]||^2 + (\vec{a}, \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$.

ЛЕКЦІЯ 3.

ВИЗНАЧНИКИ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКІВ.

Нові терміни:

визначник	- определитель	- determinant
рядок	- строчка	- line
стовпчик	- столбец	- column
мінор	- минор	- minor
алгебраїчне доповнення	- алгебраическое дополнение	- algebraic adjunct

Питання, що розгортатимуться в лекції:

1. Визначники другого порядку.
2. Визначники третього порядку.
3. Властивості визначників другого та третього порядків.
4. Застосування визначників другого та третього порядків для обчислення векторного та лінійного добутків векторів.

Означення 3.1. Назвемо функцію двох аргументів $D_2(\vec{a}, \vec{b})$, визначену на площині ($\vec{a} = (a_1, a_2)$; $\vec{b} = (b_1, b_2)$), що приймає значення $D_2(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_2 - a_2b_1$, визначником другого порядку.

В подальшому цю функцію будемо позначати символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \quad (3.1)$$

Означення 3.2. Назвемо функцію трьох аргументів $D_3(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, визначену на просторі ($\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$), що приймає значення $D_3(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$, визначником третього порядку.

В подальшому цю функцію будемо позначати символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \quad (3.2)$$

Для легшого запам'ятовування формули (3.2) можна запропонувати так зване "правило зірочки". Воно полягає в наступному: якщо привести пряму лінію через числа a_1, b_2, c_3 у визначнику третього порядку - головну діагональ визначника, а потім побудувати два трикутники, основи яких паралельні цій діагоналі і проходять через числа b_1, c_2 та a_2, b_3 відповідно, а вершини лежать в числах a_3 та c_1 (див. Рис. 3.1), то добутки трьох чисел, що знаходяться на головній діагоналі і трьох чисел, що знаходяться у вершинах побудованих трикутників (всього цих добутків 3) слід брати із знаком "+".

Зробивши аналогічну побудову відносно другої діагоналі визначника, що проходить через числа a_3, b_2, c_1 і побудувавши відповідні трикутники з вершинами в числах a_1, b_3, c_2 та a_2, b_1, c_3 , (див. Рис. 3.2) отримаємо ще три добутки по три множники кожен, які треба брати із знаком "-".

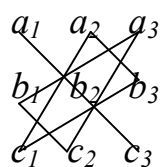
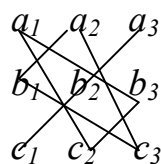


Рис. 3.1



Мал. 3.2

Є ще одне правило обчислення визначника третього порядку. Для його застосування розглянемо ще два малюнки (Рис. 3.3, Рис. 3.4). На Рис. 3.3 та Рис. 3.4 проведені по три паралельні лінії. В кожній трійці цих ліній присутня діагональ визначника. Числа, що знаходяться на цих лініях, утворюють добутки із трьох множників. Добутки, які обчислюються згідно з Рис. 3.3 : $a_3b_2c_1, a_1b_3c_2, a_2b_1c_3$ беруться із знаком "-", а згідно з Мал. 3.4: $a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1$ - із знаком "+".

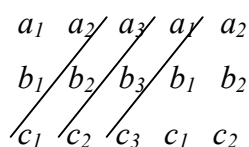


Рис. 3.3

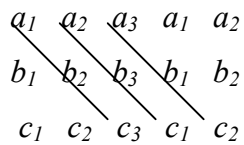


Рис. 3.4

Приклад 3.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 7 \cdot 4 = -25.$$

Приклад 3.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Приклад 3.3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24.$$

Приклад 3.4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 51 & 3 & 102 \\ 0 & 1 & 141 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} 51 & 3 & 102 \\ 0 & 1 & 141 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 51 \cdot 1 \cdot (-1) = -51.$$

Приклад 3.5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2) \cdot 1 = -69.$$

В подальшому будемо користуватись такими термінами, як рядок та стовпчик визначника, а елемент визначника будемо позначати символом a_{ij} , де перший індекс вказує рядок, в якому знаходиться елемент a_{ij} , а другий - номер стовпчика.

Отже в нових позначеннях визначники другого і третього порядків матимуть вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3.3)$$

Властивості визначників другого та третього порядків:

1. Якщо рядки і стовпчики визначників третього і другого порядків поміняти місцями (ця процедура зветься транспонуванням), то визначники не зміняться.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

2. Якщо два рядки (чи стовпчики) визначників другого та третього порядків поміняти місцями, їх знаки зміняться на протилежні.

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

3. Якщо в одному рядку чи в одному стовпчику визначника другого чи третього порядку є спільний множник, то його множина винести за знак визначника, тобто, наприклад,

$$\begin{vmatrix} xa_{11} & a_{12} & a_{13} \\ xa_{21} & a_{22} & a_{23} \\ xa_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ xa_{21} & xa_{22} & xa_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} xa_{11} & xa_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

4. Якщо один з рядків, або стовпчиків визначника другого чи третього порядків складається з нулів, то визначник дорівнює 0. Наприклад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 .$$

5. Якщо два рядки, чи два стовпчики визначника другого, чи третього порядків пропорційні, то визначник дорівнює 0. Наприклад:

$$\begin{vmatrix} xa_1 & a_1 & a_2 \\ xb_1 & b_1 & b_2 \\ xc_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} xa & a \\ xb & b \end{vmatrix} = 0 .$$

6. Якщо один з рядків, або стовпчиків є додаток двох рядків, або стовпчиків у визначника другого чи третього порядків, то такий визначник розкладається у додаток визначників відповідно порядку.

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} \\ a_{21} + b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} .$$

7. Якщо до одного з рядків, або стовпчиків визначника другого чи третього порядку додати комбінацію рядків чи стовпчиків, відповідно, то визначник не зміниться.

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + xa_{12} + ya_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + xa_{22} + ya_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + xa_{32} + ya_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + xa_{11} \\ a_{21} & a_{22} + xa_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Означення 3.3. Назвемо *мінором другого порядку* M_{ij} , що відповідає елементові a_{ij} визначника третього порядку, визначник другого порядку, який можна отримати, викресливши i -тий рядок та j -тий стовпчик у визначнику третього порядку. Якщо мінор M_{ij} домножити на $(-1)^{i+j}$, то отримаємо алгебраїчне доповнення A_{ij} , що відповідає елементові визначника a_{ij} , тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j}$.

8. Для визначників третього порядку має місце формула:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \quad \forall i,j=1,2,3. \quad (3.4)$$

Формула (3.3) - це формула розкладу визначника за рядком чи стовпчиком.

Приклад 3.6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 11 & 22 & 23 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} 11 & 22 & 23 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 23 \\ 2 & 2 & 10 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 11 & 11 & 23 \\ 2 & 2 & 10 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 3.7. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 15 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (30 - 1) = 3 \cdot 29 = 87.$$

Приклад 3.8. Розкласти визначник за другим рядком і обчислити:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-3) - 4 \cdot 4 = 15 - 16 = -1.$$

Приклад 3.9. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & yx & 1 \\ z & zx & 1 \end{vmatrix}.$

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & yx & 1 \\ z & zx & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ y & y & 1 \\ z & z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 3.10. За допомогою властивостей визначника обчислити $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x-y & y & z \\ x^2-y^2 & y^2 & z^2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y) \begin{vmatrix} 1 & y-z & z \\ x+y & y^2-z^2 & z^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ x+y & y+z & z^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (x-y)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+y & y+z \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(y+z-x-y) = (x-y)(y-z)(z-x). \end{aligned}$$

Приклад 3.11. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ шляхом приведення його до

“трикутного” вигляду
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Розв’язок.

1 крок. Від другого стовпчика відніmemo перший, помножений на 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

2 крок. До третього стовпчика додамо перший:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

3 крок. До третього стовпчика додамо другий:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Приклад 3.12. Обчислити визначник
$$\Delta = \begin{vmatrix} 101 & 100 & 1 \\ 102 & 100 & 2 \\ 99 & 100 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв’язок.

Від першого стовпчика відніmemo другий
$$\begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 2 & 100 & 2 \\ -1 & 100 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Формули для обчислення векторних та лінійних добутків в канонічному базисі із застосуванням визначників другого та третього порядків: для векторів $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

Приклад 3.13. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a}=(1,-1,2)$, $\vec{b}=(3,0,10)$.

Розв'язок.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -1 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$$

тобто $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1, 5, 3)$.

Приклад 3.14. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(-1,2,0)$, $B(3,7,1)$, $C(1,1,1)$ і висоту, опущену з вершини B .

Розв'язок. Обчислимо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3 + 1, 7 - 2, 1) = (4, 5, 1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (1 + 1, 1 - 2, 1) = (2, -1, 1).$$

Площа трикутника дорівнює половині площ паралелограму, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, як на сторонах, тобто

$$S_{\text{трик}} = \frac{1}{2} \cdot \|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\|,$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 14\vec{k} = 2(3, -2, -7),$$

$$\|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\| = 2 \cdot \sqrt{9 + 4 + 49} = 2\sqrt{62},$$

$$S_{\text{трик}} = \sqrt{62}.$$

З другого боку площа трикутника може бути обчислена за формулою

$$S_{\text{трик}} = \frac{1}{2} \cdot h_A \cdot |\overrightarrow{AC}| \Rightarrow h_A = \frac{2S_{\text{трик}}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{2\sqrt{62}}{\sqrt{4+1+1}} = 2\sqrt{\frac{31}{3}},$$

де h_A – шукана висота.

Приклад 3.15. Чи можуть три вектори $\vec{a} = (1,-1,1)$, $\vec{b} = (2,1,-1)$, $\vec{c} = (1, 0, -3)$ утворювати базис у просторі ?

Розв'язок.

В силу того, що базис утворюється лише не компланарними векторами, мішаний добуток векторів, що його утворюють повинен не дорівнювати 0. Перевіримо це.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (\text{до першого рядка додамо другий}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{розкладемо за другим стовпчиком}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Отже вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – не компланарні і можуть утворити базис у просторі.

Приклад 3.16. Обчислити висоту паралелепіпеду, що виходить з вершини A(-1,2,2) на основу, на якій лежать три інші його вершини B(0,1,0), C(1,1,3), D(0,0,1).

Розв'язок.

Обчислимо вектори $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ та $\vec{BD}$, на яких, як на ребрах, побудовано паралелепіпед:

$$\vec{BA} = (-1, 1, 2), \quad \vec{BC} = (1, 0, 3), \quad \vec{BD} = (0, -1, 1).$$

Об'єм паралелепіпеду може бути обчисленим за двома формулами:

$$V_{\text{пар}} = |\vec{BA} \cdot \vec{BC} \cdot \vec{BD}|$$

$$V_{\text{пар}} = |[\vec{BC}, \vec{BD}]| \cdot h_A \Rightarrow h_A = \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{BC} \cdot \vec{BD}|}{|[\vec{BC}, \vec{BD}]|}.$$

$$[\vec{BC}, \vec{BD}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -1, -1),$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} \cdot \vec{BD} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 3 - 1 = -6 \Rightarrow h_A = \frac{6}{\sqrt{11}}.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

1. Чому дорівнює визначник третього порядку, якщо його перший і третій рядки рівні?
2. Що станеться з визначником третього порядку, якщо його перший і другий стовпчики поміняти місцями?
3. Що станеться з визначником третього порядку, якщо його рядки і стовпчики поміняти місцями?

4. Чи виконується рівність $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - b_1 b_2$?
5. Чому дорівнює визначник третього порядку, якщо один з його стовпчиків нульовий?
6. Чи виконується рівність $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_1 c_1$?
7. Чи виконується рівність $\begin{vmatrix} xa_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & xb_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & xc_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$?
8. Чи виконується рівність $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$?
9. Формула для обчислення векторного добутку через визначник третього порядку.
10. Як виглядає умова компланарності трьох векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ в канонічному базисі?
11. Як зміниться визначник другого чи третього порядків, якщо замість першого рядка записати доданок всіх його рядків?
12. Чи виконується рівність $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3$?
13. Чи виконується рівність $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = abc$?
14. Чи виконується рівність $\begin{vmatrix} xa_1 + yb_1 & b_1 & c_1 \\ xa_2 + yb_2 & b_2 & c_2 \\ xa_3 + yb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$?
15. Чи виконується рівність $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_3 b_2 c_1$?

ВПРАВИ ДО ВИКОНАННЯ.

1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.
2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.
3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & ab & ac \\ c & b & a \end{vmatrix}$.
4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 201 & 200 & 1 \\ 203 & 200 & 3 \\ 198 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.
5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ шляхом приведення його до “трикутного” вигляду.
6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ шляхом розкладу його за другим стовпчиком.
7. Записати алгебраїчні доповнення до елементів другого рядка визначника $\begin{vmatrix} -11 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix}$.
8. Обчислити площу трикутника, вершини якого $A(-7, 2, 1)$, $B(0, 3, 5)$, $C(2, 1, 1)$.
9. Обчислити об'єм паралелепіпеду, ребрами якого є вектори $\vec{a} = (1, -7, 2)$, $\vec{b} = (3, 5, 1)$, $\vec{c} = (0, 0, 1)$.
10. Обчислити висоту трикутника, сторонами якого є вектори $\vec{a} = (-1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 1, 5)$.
11. Обчислити висоту паралелепіпеду, що виходить з вершини $A(-7, 2, 1)$ на основу, утворену вершинами $B(0, 1, 1)$, $C(2, 0, 0)$, $D(3, 5, 1)$.
12. Обчислити визначники

$$\begin{array}{lll}
1) \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & 2) \begin{vmatrix} 11 & 10 & 1 \\ 12 & 10 & 2 \\ -9 & 10 & -1 \end{vmatrix} & 3) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \\
4) \begin{vmatrix} 311 & 1 & 310 \\ 315 & 5 & 310 \\ 309 & -1 & 310 \end{vmatrix} & 5) \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} & 6) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 16 \end{vmatrix} \\
7) \begin{vmatrix} x+y & x & y \\ 2y & y & y \\ z+y & z & y \end{vmatrix} & 8) \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^2+1 & y^2+1 & z^2+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & 9) \begin{vmatrix} a & a^2 & ab \\ b & ab & b^2 \\ c & cb & cb \end{vmatrix} \\
10) \begin{vmatrix} a+b & a-b & c^2a \\ a+b & a-b & c^2b \\ a+b & a-b & c^3 \end{vmatrix} & 11) \begin{vmatrix} \cos 2\varphi & \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi \\ \cos 2\varphi & \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi \\ \cos 2\varphi & \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi \end{vmatrix} & 12) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 13) \\
\begin{vmatrix} \cos \varphi & \cos \varphi & \cos \varphi \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & 14) \begin{vmatrix} 21 & 20 & 19 \\ 31 & 30 & 29 \\ 41 & 40 & 39 \end{vmatrix} & 15) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} .
\end{array}$$

ЛЕКЦІЇ 4-5.

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ.

Нові терміни:

пряма лінія	- прямая линия	- line
загальне рівняння	- общее уравнение	- general equation
вектор-нормаль	- вектор-нормаль	- normal vector
спрямовуючий вектор	- направляющий вектор	- direction vector
кутовий коефіцієнт	- угловой коэффициент	- angular coefficient
відстань	- расстояние	- distance
відхилення	- отклонение	- deviation
нормальне рівняння	- нормальное уравнение	- normal equation
жмуток прямих	- пучок прямых	- bundle of lines

Формальна позначка слова " знак " - "sign".

Питання, що розглядатимуться в лекції.

1. Загальне рівняння прямої. Умови паралельності, ортогональності, обчислення кута між прямими.
2. Рівняння прямої у відрізках .
3. Рівняння прямої через спрямовуючий вектор. Умови паралельності, ортогональності, обчислення кута між прямими. Обчислення відстані між паралельними прямими та від точки до прямої .
4. Параметричне рівняння прямої.
5. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
6. Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт. Умови паралельності, ортогональності, обчислення кута між прямими.
7. Нормальне рівняння прямої. Обчислення відстані від точки до прямої та між паралельними прямими.
8. Жмуток прямих. Загальне рівняння прямої .

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ.

Означення 4.1. Рівняння

$$Ax + By + C = 0 \quad (4.1)$$

називається *загальним рівнянням прямої лінії* на площині в декартовій прямокутній системі координат.

Вектор $\vec{N} = (A, B)$ називається *нормальним вектором прямої*, якщо він ортогональний до прямої.

Рівняння вигляду

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (4.2)$$

є рівнянням прямої лінії, що ортогональна вектору-нормалі $\vec{N} = (A, B)$ і проходить через т. $M_0(x_0, y_0)$.

Якщо є дві прямі лінії

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (l_1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (l_2)$$

то якщо:

$$\begin{aligned} \text{а) } (l_1) \perp (l_2) &\Rightarrow \vec{N}_1 = (A_1, B_1), \vec{N}_2 = (A_2, B_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\vec{N}_1, \vec{N}_2) = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{б) } (l_1) \parallel (l_2) \Rightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (4.4)$$

$$\text{в) } \cos \varphi = \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (4.5)$$

де φ - один з кутів між прямими (l_1) та (l_2) .

Приклад 4.1. Знайти рівняння прямої лінії, що проходить через т. $M\{-2,1\}$ і ортогональна вектору $\vec{a} = (-1, 2)$.

Розв'язок. Очевидно, що вектор $\vec{a}$ можна використати в якості вектора-нормалі. Тоді, скориставшись рівнянням прямої типу (4.2), отримаємо:

$$-(x + 2) + 2(y - 1) = 0 \Rightarrow -x + 2y - 4 = 0.$$

Шукане рівняння має вигляд: $x - 2y + 4 = 0$.

Приклад 4.2. Знайти рівняння прямої, що проходить через т. $M(-7,3)$ і паралельна прямій $3x - y + 1 = 0$.

Розв'язок. Вектор-нормаль заданої прямої $\vec{N} = (3, -1)$ можна використати в якості вектора до шуканої прямої. Тому рівнянням, що нас цікавить буде:

$$3(x + 7) - (y - 3) = 0 \Rightarrow 3x - y + 24 = 0.$$

Приклад 4.3. Знайти рівняння прямої, що ортогональна прямій і проходить через точку $M(-1, 1)$.

Розв'язок. Будемо шукати рівняння типу (4.2): $A(x + 1) + B(y - 1) = 0$. Параметри A та B знайдемо з умови ортогональності двох прямих (4.4). Тоді

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{-1} \Rightarrow A = -B \Rightarrow -B(x - 1) + B(y - 1) = 0 \Rightarrow x - y = 2.$$

Приклад 4.4. Знайти кут між двома прямими $x + y + 1 = 0$ та $-x + y + 2 = 0$.

Розв'язок. Обчислимо косинус кута між заданими прямими за формулою (4.5).

$$\begin{aligned} \vec{N}_1 &= (1, 1); \quad \vec{N}_2 = (-2, 1); \\ (\vec{N}_1, \vec{N}_2) &= -2 + 1 = -1; \quad |\vec{N}_1| = \sqrt{2}; \quad |\vec{N}_2| = \sqrt{5}; \\ \cos \varphi &= \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

НЕПОВНІ ЗАГАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ.

Якщо в загальному рівнянні прямої (4.1) $C = 0$, то пряма проходить через початок координат. Якщо

$$\left. \begin{array}{l} A = 0 \\ B \neq 0, C \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{N} = (0, B) \Rightarrow \vec{N} \parallel \text{осі } OY \Rightarrow (l) \parallel \text{осі } OX$$

і рівняння прямої (l) можна записати у вигляді $y = y_0$.

Якщо $A = C = 0 \Rightarrow (l): y = 0$ - рівняння осі OX .

Якщо $B = 0, C \neq 0 \Rightarrow (l) \parallel \text{осі } OY$ і рівняння прямої (l) можна і рівняння прямої (l) можна записати у вигляді $x = x_0$.

Якщо $B = C = 0 \Rightarrow (l): x = 0$ - рівняння осі OY .

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ВІДРІЗКАХ.

Якщо в загальному рівнянні прямої (4.1) $C \neq 0$, то

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow Ax + By = -C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{C} + \frac{y}{B}}{-\frac{1}{A}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (4.6)$$

$$\text{де } a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{B}{A}.$$

Рівняння (4.6) має назву "*рівняння прямої у відрізках*". Очевидно, що точки $M_1(a,0)$ і $M_2(0,b)$ належать прямій (4.6), тобто параметри a і b — величини відрізків, що відсікає пряма (4.6) від координатних осей.

Приклад 4.5. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(3,1)$ і відсікає від першого координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 6.

Розв'язок. Будемо шукати рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Використаємо той

факт, що т. M належить прямій, тобто $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Друге рівняння для a і b ми

знайдемо з того, що площа заданого в задачі трикутника дорівнює, тобто $ab = 2 \cdot 6$.

Таким чином, ми отримаємо систему

$$\begin{cases} 3b + a = ab \\ ab = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b + a = 12 \\ ab = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 - 3b \\ (12 - 3b)b = 12 \end{cases} \Rightarrow 3b^2 - 12b + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 - 4b + 4 = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 12 - 6 = 6.$$

Рівняння шуканої прямої має вигляд $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$ або $x + 3y - 6 = 0$.

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЧЕРЕЗ СПРЯМОВУЮЧИЙ ВЕКТОР.

Нехай пряма лінія проходить через т. $M_0(x_0, y_0)$ і паралельна вектору $\vec{r} = (m, n)$.

Тоді її рівняння може мати вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (4.7)$$

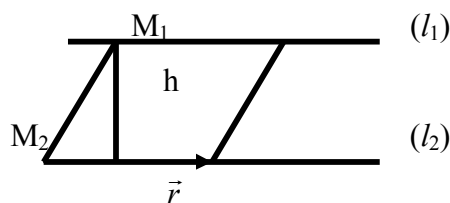


Рис. 4.1.

Вектор $\vec{r}$ називається *спрямовуючим вектором*. Якщо є дві прямі

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} \quad (l_1)$$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} \quad (l_2)$$

то якщо

$$\begin{aligned} \text{а) } (l_1) \perp (l_2) &\Rightarrow \vec{r}_1 = (m_1, n_1) \perp \vec{r}_2 = (m_2, n_2) \Rightarrow (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\text{б) } (l_1) \parallel (l_2) \Rightarrow \vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (4.9)$$

$$\text{в) } \cos \varphi = \frac{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1| |\vec{r}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \quad (4.10)$$

Приклад 4.6. Знайти рівняння прямої, що проходить через т. М(2,3) і паралельна прямій $x + 3y - 1 = 0$.

Розв'язок. Рівняння заданої прямої можна переписати у вигляді

$$\frac{x}{3} = \frac{y - \frac{1}{3}}{-1}.$$

Звідси $\vec{r} = (3, -1)$. Рівняння шуканої прямої можна записати у такому ж вигляді, враховуючи, що $\vec{r}$ може виступити і в якості її спрямовуючого вектора. Тоді це рівняння має вигляд

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow x + 3y - 11 = 0.$$

Приклад 4.7. Нехай є дві паралельні прямі $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} \quad (l_1)$ та $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} \quad (l_2)$.

Знайти відстань h між ними.

Розв'язок. Точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ лежать на прямих (l_1) та (l_2) відповідно.

Віднесемо початок вектора $\vec{r}$ в точку M_2 . Вектор $\overrightarrow{M_2 M_1} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

Побудуємо на векторах $\overrightarrow{M_2 M_1}$ та $\vec{r}$, як на сторонах паралелограм. Тоді площа S цього паралелограму може бути обчислена за двома формулами:

$$S = |[\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{r}]|; \quad S = h \cdot |\vec{r}| \quad \Rightarrow \quad h = \frac{|[\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{r}]|}{|\vec{r}|} \quad (4.11)$$

Приклад 4.8. Нехай є дві прямі: $3x + 2y - 1 = 0$ (l_1); $6x + 4y + 1 = 0$ (l_2). Знайти відстань між цими прямими.

Розв'язок. Очевидно, що прямі (l_1) та (l_2) - колінеарні. Перепишемо обидва рівняння у вигляді

$$3x + 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = -2(y - \frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{3} \quad (l_1)$$

$$6x + 4y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x = -4(y + \frac{1}{4}) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-2} = \frac{y + \frac{1}{4}}{3} \quad (l_2)$$

З отриманих формул витікає, що т. $M_1(0, \frac{1}{2})$, т. $M_2(0, -\frac{1}{4})$ належать (l_1) та (l_2) відповідно, а вектор $\vec{r} = (-2, 3)$ - спрямовуючий вектор цих паралельних прямих. Скористаємось формулою (4.11), для чого обчислимо вектор $\overrightarrow{M_2M_1}$ та $[\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{r}]$:

$$\overrightarrow{M_2M_1} = (0, \frac{3}{4}),$$

$$[\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \frac{3}{2}),$$

$$|[\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{r}]| = \frac{3}{2},$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13},$$

$$h = \frac{3}{2\sqrt{13}}.$$

Приклад 4.9. Знайти рівняння бісектриси кута при вершині В трикутника АВС, якщо координати його вершин відомі: А(-1, 2), В(3, 0), С(1,4).

Розв'язок. Скористаємось рівнянням прямої через спрямовуючий вектор (4.7). Спрямовуючим вектором бісектриси може бути вектор, що співпадає з вектором-діагоналлю ромба, сторони якого мають той же напрям, що і вектори BA° та BC° -

орт-вектори векторів $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{BC}$. Сама діагональ матиме напрям вектора $\overrightarrow{BA}^\circ + \overrightarrow{BC}^\circ$.

$$\overrightarrow{BA} = (-4, 2) \Rightarrow \overrightarrow{BA}^\circ = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow \vec{r} = \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3}{\sqrt{5}}(-1, 1).$$

$$\overrightarrow{BC} = (-2, 4) \Rightarrow \overrightarrow{BC}^\circ = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Рівняння бісектриси має вигляд: $x - 3 = -y \Rightarrow x + y - 3 = 0$.

Приклад 4.10. Знайти відстань h від точки $M(-1, 1)$ до прямої $3x + 5y - 1 = 0$.

Розв'язок. Перепишемо рівняння заданої прямої у вигляді (4.7).

$$3x + 5y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{-5} = \frac{y - \frac{1}{5}}{3},$$

т. $M_1(0, \frac{1}{5})$ належить цій прямій, і спрямовуючий вектор $\vec{r} = (-5, 3)$.

$\overrightarrow{M_1M} = (-1, \frac{4}{5})$. Побудуємо паралелограм на векторах $\overrightarrow{M_1M}$ та $\vec{r}$, як на сторонах.

Тоді має місце формула

$$h = \frac{|\overrightarrow{[M_1M, \vec{r}]}|}{|\vec{r}|},$$

$$[\overrightarrow{M_1M}, \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & \frac{4}{5} & 0 \\ -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1),$$

$$[\overrightarrow{M_1M}, \vec{r}] = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{25+9}} = \frac{1}{\sqrt{34}}.$$

ПАРАМЕТРИЧНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ.

Розглянемо рівняння прямої через спрямовуючий вектор.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t,$$

де t - параметр, $-\infty < t < \infty$.

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Рівняння (4.12) називається *параметричним рівнянням прямої*.

Приклад 4.11. Знайти точку перетину двох прямих (l_1) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}$ та (l_2) : $2x+3y-5=0$.

Розв'язок. Перепишемо рівняння прямої (l_1) в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$$

і підставимо отримані вирази для x та y через параметр t в рівняння (l_2) .

$$2(2t + 1) + 3(3t - 1) - 5 = 0 \Rightarrow 13t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{13}.$$

При такому значенні параметра точка належатиме обом прямим, тобто точка

з координатами $x = \frac{15}{13}$, $y = -\frac{10}{13}$ і буде точкою перетину двох прямих.

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ТОЧКИ.

Нехай пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ точка $M(x, y)$ - її довільна точка. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ може виступати в якості спрямовуючого вектора цієї прямої. Використовуючи рівняння прямої через спрямовуючий вектор (4.7), отримаємо рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (4.13)$$

Приклад 4.12. Знайти рівняння медіани, проведеної з вершини A трикутника ABC якщо його вершини $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $C(1, 4)$,

Розв'язок. Медіана, що проходить через вершину A , повинна проходити через середину сторони BC . Користуючись формулами ділення відрізка в заданому відношенні, знайдемо координати середини BC : $x = \frac{3+1}{2} = 2$, $y = \frac{2+4}{2} = 3$. Тоді рівняння шуканої медіани буде мати вигляд

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{3-2} \Rightarrow \frac{x+1}{3} = y-2 \Rightarrow x - 3y + 7 = 0.$$

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЧЕРЕЗ КУТОВИЙ КОЕФІЦІЄНТ.

Означення 4.2. Рівняння вигляду

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (4.14)$$

називається "рівнянням прямої через кутовий коефіцієнт", точка $M_0(x_0, y_0)$ належить цій прямій, а параметр k - тангенс кута нахилу прямої до додатнього напрямку осі OX має назву "кутовий коефіцієнт".

Якщо є рівняння двох прямих

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (l_1),$$

$$y - y_2 = k(x - x_2) \quad (l_2),$$

то якщо

$$a) \quad (l_1) \perp (l_2) \quad \Rightarrow \quad k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad (4.15)$$

$$б) \quad (l_1) \parallel (l_2) \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 \quad (4.16)$$

$$в) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

де φ – кут між прямими (l_1) та (l_2) .

Приклад 4.13. Знайти рівняння висоти трикутника, що виходить з вершини A , якщо рівняння його сторін

$$AB: y = 2x + 1, \quad BC: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad AC: y = -x - 3.$$

Розв'язок. Знайдемо координати точки A , що є точкою перетину прямих AB та AC

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = -x - 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Висота, що виходить з вершини A ортогональна до сторони BC і тому кутовий коефіцієнт рівняння цієї висоти дорівнює 3 . Таким чином, рівняння шуканої висоти має вигляд

$$y + 3 = 3\left(x + \frac{4}{5}\right) \Rightarrow y = 3x + \frac{7}{5}.$$

Приклад 4.14. Чи буде трикутник, рівняння сторін якого $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $y = 2x + 3$, прямокутним?

Розв'язок. Очевидно, що рівняння $y = x + 1$ та $y = -x + 1$ є рівняннями ортогональних сторін, тобто трикутник прямокутний.

Приклад 4.15. Знайти рівняння прямої, що проходить через початок координат і паралельна прямій $y = 5x - 1$.

Розв'язок. Очевидно, що кутовий коефіцієнт заданої прямої $k = 5$. Шукана пряма їй паралельна і тому в неї той же кутовий коефіцієнт. Використовуючи рівняння прямої через кутовий коефіцієнт (4.14) отримаємо рівняння шуканої прямої $y = 5x$.

НОРМАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ.

Якщо пряму задати за допомогою кута α , що утворює її нормальний вектор, проведений з початку координат до прямої, з додатнім напрямком осі Ox , і відстані прямої від початку координат p (Рис. 4.2), то її рівняння матиме вигляд

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (4.17)$$

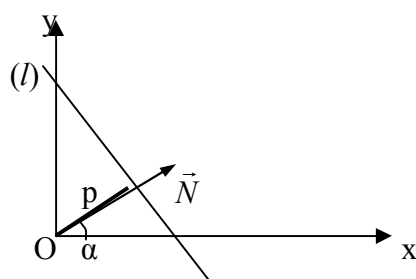


Рис. 4.2.

Цей тип рівняння прямої має назву "нормальне рівняння прямої". Якщо пряму задано в загальному вигляді $Ax + By + C = 0$, її можна привести до нормального вигляду, якщо домножити ліву і праву частини цього рівняння на множник $\pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак у множника повинен бути протилежним знакові вільного члена C .

Примітка. $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ - це координати орт-вектора нормального вектора прямої, напрямленого від початку координат до прямої. Якщо в загальному рівнянні вільний член C має від'ємний знак, то нормальний вектор $\vec{N} = (A, B)$ має саме такий напрям, в протилежному випадку такий напрям має нормальний вектор $\vec{N} = (-A, -B)$.

ОБЧИСЛЕННЯ ВІДХИЛЕННЯ ТА ВІДСТАНІ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ.

Означення 4.3. Відхиленням точки $M_0(x_0, y_0)$ від прямої $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ називається величина

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p \quad (4.18)$$

Якщо точка M_0 і початок координат знаходяться по один бік від прямої,

відхилення буде додатнім, в протилежному випадку - від'ємним. Якщо рівняння прямої - загальне, тобто $Ax + By + C = 0$, то

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{- \operatorname{sign}(C)\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (4.19)$$

Знак у знаменнику повинен бути протилежним знакові вільного члена C , Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої обчислюється за формулами:

$$d = |\delta| = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p| \quad (4.20)$$

$$d = |\delta| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (4.21)$$

Приклад 4.16. Привести рівняння прямої $3x + 4y + 1 = 0$ до нормального вигляду.

Розв'язок. Щоб привести задане рівняння до нормального вигляду, треба його домножити на множник

$$-\frac{1}{\sqrt{9+16}} = -\frac{1}{25} = -\frac{1}{5}.$$

Нормальне рівняння заданої прямої має вигляд

$$-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{5} = 0.$$

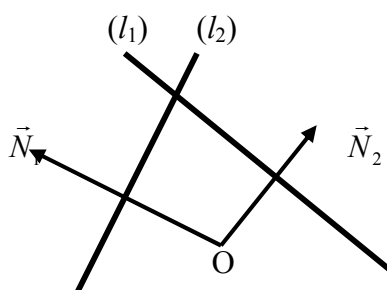


Рис. 4.3.

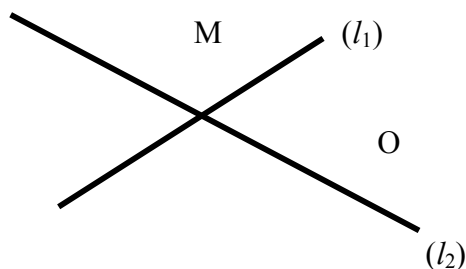


Рис. 4.4.

Приклад 4.17. Чи знаходиться початок координат в тупому куті між прямими $3x - 2y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$?

Розв'язок. Якщо початок координат лежить в тупому куті, то кут між нормальними векторами $\vec{N}_1$ та $\vec{N}_2$ цих прямих, що напрямлені до них має бути гострим (Рис.4.3).

Це значить, що косинус кута між ними повинен бути додатнім. Але знак косинусу кута між векторами визначається їх скалярним добутком. Отже, якщо скалярний добуток $(\vec{N}_1, \vec{N}_2)$ додатній, то початок координат знаходиться в тупому куті між прямими. Якщо від'ємний - в гострому куті. В нашому випадку $\vec{N}_1 = (-3, 2)$, $\vec{N}_2 = (1, 1)$, $(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = -3 + 2 = -1 < 0 \Rightarrow$ початок координат знаходиться в гострому куті.

Приклад 4.18. Чи знаходиться точка $M(-1, 1)$ в тупому куті між прямими

$$(l_1): 3x - 2y + 1 = 0, \quad (l_2): x + y - 1 = 0.$$

Розв'язок. Скористаємось результатом, отриманим в прикладі 4.17 - початок координат знаходиться в гострому куті. Обчислимо знаки відхилень точки M від прямих (l_1) та (l_2) , які визначаються чисельником правої частини формули (4.19) з відповідним знаком (протилежним вільному членові).

Перепишемо рівняння (l_1) та (l_2) в такому вигляді, щоб їх нормальні вектори були напрямлені в бік прямих.

$$(l_1): -3x + 2y - 1 = 0, \quad (l_2): x + y - 1 = 0$$

Позначимо відхилення від точки M до прямої (l_1) через δ_1 , до прямої (l_2) через δ_2 .

$$\text{sign } \delta_1 = \text{sign}((-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 - 1) = "+",$$

$$\text{sign } \delta_2 = \text{sign}(-1 + 1 - 1) = "-".$$

З отриманих результатів витікає, що точка M і початок координат знаходиться по-різні боки від прямої (l_1) і по один бік від прямої (l_2) . (Див. Рис 4.4.) Отже, точка M лежить в тупому куті, суміжному з тим в якому лежить початок координат.

Приклад 4.19. Чи лежить початок координат в трикутнику, сторони якого мають рівняння

$$AB: 3x - 2y - 1 = 0, \quad BC: x + y - 1 = 0, \quad AC: 2x + y + 3 = 0.$$

Розв'язок. Обчислимо координати точки B , яка є точкою перетину прямих AB та BC

$$\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow B(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$$

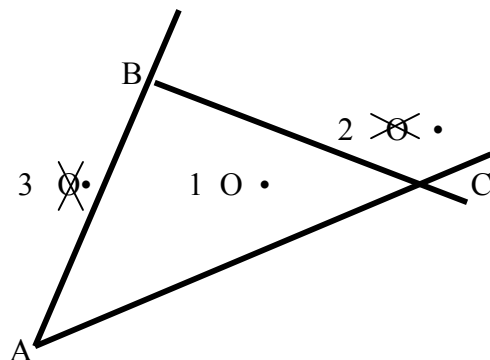


Рис. 4.5.

Знайдемо знак відхилення δ_B точки B від сторони AC, для чого перепишемо рівняння AC в потрібному вигляді: AC: $-2x - y - 3 = 0$.

$$\text{sign } \delta_B = \text{sign}(-2 \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{5} - 3) = "-".$$

Таким чином, точка B та початок координат знаходяться по один бік від прямої AC. Але з цього ще не витікає, що визначено положення початку координат відносно трикутника. На Рис. 4.5 позначені три можливі положення початку координат O(1), O(2), O(3).

Обчислимо координати точки A, що є точкою перетину прямих AB та AC.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 4x + 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = -\frac{11}{7} \end{cases} \Rightarrow A(-\frac{5}{7}, -\frac{11}{7})$$

Знайдемо знак відхилення δ_A точки A від сторони BC

$$\text{sign } \delta_B = \text{sign}(-\frac{5}{7} - \frac{11}{7} - 1) = "-".$$

Отже точка A і початок координат знаходяться по один бік від прямої AC. Це дає можливість викреслити положення початку координат O(2).

Щоб остаточно визначити положення початку координат, треба обчислити

координати точки С та знак її відхилення δ_C від прямої АВ,

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow C(-4,5)$$

$$AB: 3x - 2y - 1 = 0$$

$$\text{sign } \delta_C = \text{sign}(3 \cdot (-4) - 2 \cdot 5 - 1) = "-".$$

Отже точка С і початок координат знаходиться по один бік від прямої АВ, що дає можливість викреслити положення початку координат 0(3). Таким чином, початок координат знаходиться в трикутнику АВС.

Приклад 4.20. Чи знаходиться точка М(1,-1) в трикутнику сторони якого мають рівняння АВ: $3x - 2y - 1 = 0$, ВС: $x + y - 1 = 0$, АС: $2x + y + 3 = 0$.

Розв'язок. Знайдемо знак відхилення т. М відносно сторони АВ

$$\text{sign } \delta_M = \text{sign}(3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - 1) = "+".$$

Отже точка М і початок координат знаходяться по різні боки від прямої АВ. Це одразу дає можливість визначити, що точка М лежить поза трикутником.

Приклад 4.21. Знайти відстань між двома прямими (l_1) : $3x - y + 1 = 0$, (l_2) : $6x - 2y + 3 = 0$.

Розв'язок. Прямі (l_1) та (l_2) паралельні.

І спосіб. Приведемо рівняння прямих (l_1) та (l_2) до нормального вигляду.

$$(l_1): \frac{3x - y + 1}{-\sqrt{10}} = 0 \quad (l_2): \frac{6x - 2y + 3}{-2\sqrt{10}} = 0$$

Нормальні вектори $\vec{N}_1 = (-3, 1)$, $\vec{N}_2 = (-6, 2)$ прямих (l_1) та (l_2) напрямлені в один бік від початку координат, тому відстань d між прямими є модуль різниці відстаней p_1 та p_2 кожної прямої від початку координат:

$$d = |p_1 - p_2| = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{2\sqrt{10}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{10}}.$$

II спосіб. Відстань між прямими (l_1) та (l_2) може бути обчислена як відстань від довільної точки однієї з цих прямих до другої прямої. Знайдемо якусь точку, що належить прямій (l_1) , тобто знайдемо якесь рішення рівняння $3x - y + 1 = 0$. Хай

$x = 0$, тоді $y = 1$. Отже точка $M(0, 1)$ належить прямій (l_1) , а відстань d від неї до (l_2) обчислимо за формулою (4.21).

$$d = \frac{|6 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 3|}{2\sqrt{10}}.$$

Приклад 4.22. Знайти рівняння бісектрис кутів між прямими (l_1) : $8x+6y-15 = 0$ та (l_2) : $3x - 4y + 5 = 0$.

Розв'язок. Будемо орієнтуватись на той факт, що бісектриса кута між двома прямими - це геометричне місце точок, що знаходяться на однаковій відстані від точок обох прямих.

Якщо позначити довільну точку шуканої бісектриси через $M(x, y)$, то відстані d_1 та d_2 від неї до прямих (l_1) та (l_2) можна обчислити за формулами:

$$d_1 = \frac{|8x + 6y - 15|}{10}, \quad d_2 = \frac{|3x - 4y + 5|}{5}.$$

Порівнявши d_1 та d_2 , отримаємо рівняння двох бісектрис

$$\frac{|8x + 6y - 15|}{10} = \frac{|3x - 4y + 5|}{5}$$

$$\left[\begin{array}{l} 8x + 6y - 15 = 6x - 8y + 10 \\ 8x + 6y - 15 = -6x + 8y - 10 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 14y - 25 = 0 \\ 14x - 2y - 5 = 0 \end{array} \right]$$

ЖМУТОК ПРЯМИХ.

Означення 4.4. Назвемо *жмутком прямих* ліній множину прямих ліній, що перетинаються в одній точці. Точка перетину має назву "*вершина жмутка*",

Якщо відомі координати точки перетину $M_0(x_0, y_0)$ прямих жмутка, то рівняння жмутка має вигляд:

$$\left[\begin{array}{l} A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \\ (y - y_0) = k(x - x_0) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.22) \\ (4.23) \end{array}$$

Міняючи параметри A, B в (4.22), чи параметр k в (4.23), отримаємо всі прямі жмутка. Якщо координати вершини жмутка невідомі, але є рівняння двох прямих (l_1) : $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, (l_2) : $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, що належать цьому жмутку, то його рівняння має вигляд

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (4.24)$$

Якщо вважати, що $\alpha \neq 0$ (це виключає із жмутка пряму (l_2) , рівняння якої і так відоме), то, поділивши ліву і праву частини рівняння (4.24) на α , отримаємо

однопараметричне рівняння жмутка

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (4.25)$$

Приклад 4.23. Не обчислюючи координат трикутника ABC, визначеного рівняннями своїх сторін AB: $3x+2y - 1 = 0$, BC: $x - 5y + 3 = 0$, AC: $4x - y - 2 = 0$, знайти рівняння його висоти, що проходить через вершину A.

Розв'язок. Очевидно, що розшукувана висота належить жмутку, що утворюється прямими AC та AB. Отже її рівняння можна записати у вигляді (4.25), тобто

$$3x + 2y - 1 + \lambda(4x - y - 2) = 0 \Rightarrow (3 + 4\lambda)x + (2 - \lambda)y - 1 - 2\lambda = 0.$$

Враховуючи, що ця висота ортогональна стороні, BC і користуючись умовою ортогональності (4.3), отримаємо

$$3 + 4\lambda - 5(2 - \lambda) = 0. \Rightarrow 9\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{7}{9}.$$

Підставивши значення $\lambda = 7/9$ в рівняння жмутка, отримаємо рівняння шуканої висоти:

$$(3 + \frac{7}{9} \cdot 4)x + (2 - \frac{7}{9})y - 1 - 2 \cdot \frac{7}{9} = 0 \Rightarrow 55x + 11y - 23 = 0.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

1. Як виглядає загальне рівняння прямої на площині?
2. Як виглядає умова паралельності двох прямих, заданих загальними рівняннями на площині?
3. Як виглядає умова ортогональності двох прямих на площині, заданих загальними рівняннями?
4. Як обчислюється кут між двома прямими на площині, заданих двома загальними рівняннями?
5. Який геометричний зміст параметрів в загальному рівнянні прямої на площині?
6. Як виглядає рівняння прямої на площині "у відрізках"?
7. Який геометричний зміст параметрів в рівнянні прямої на площині "у відрізках"?
8. Як виглядає рівняння прямої на площині через спрямовуючий вектор?
9. Який геометричний зміст параметрів в рівнянні прямої на площині через спрямовуючий вектор?
10. Як виглядає умова паралельності двох прямих на площині, заданих рівняннями

через спрямовуючий вектор?

11. Як виглядає умова ортогональності двох прямих на площині, заданих рівняннями через спрямовуючий вектор?
12. Як обчислюють кути між двома прямими на площині, заданими рівняннями через спрямовуючий вектор?
13. Формула для обчислення відстані між паралельними прямими на площині, заданими рівняннями через спрямовуючий вектор?
14. Параметричне рівняння прямої на площині.
15. Рівняння прямої на площині, що проходить через дві точки.
16. Рівняння прямої на площині через кутовий коефіцієнт.
17. Геометричний зміст кутового коефіцієнту.
18. Умова паралельності двох прямих на площині, заданих рівняннями через кутовий коефіцієнт.
19. Умова ортогональності двох прямих на площині заданих рівняннями через кутовий коефіцієнт.
20. Обчислення кута між двома прямими на площині, заданими рівняннями через кутовий коефіцієнт.
21. Нормальне рівняння прямої на площині.
22. Геометричний зміст параметрів нормального рівняння прямої.
23. Означення відхилення точки від прямої на площині.
24. Формула для обчислення відстані від точки до прямої.
25. Жмуток прямих на площині. Означення та рівняння.

ВПРАВИ ДО ВИКОНАННЯ

1. Знайти рівняння висот трикутника ABC, якщо рівняння його сторін наступні: AB: $x - 2y + 5 = 0$, BC: $2x - y + 4 = 0$, AC: $2x + 2y - 1 = 0$.
2. Чи буде прямокутним трикутник, рівняння сторін якого наступні: $2x - 5y - 1 = 0$, $5x - 2y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$.
3. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A(2, 6) і паралельна прямій $5x - y + 4 = 0$.
4. Знайти кут між прямими $(l_1): x + y + 1 = 0$ та $(l_2): x + 2 = 0$.
5. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A(2,1) і відсікає від першого координатного кута трикутник з площею 4.5 кв.од.
6. Знайти рівняння бісектрис внутрішніх кутів трикутника, з вершинами A(-1,2),

B(3,0), C(5,1).

7. Обчислити відстань від точки A(-1,1) до прямої $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{1}$.
8. Обчислити відстань між прямими $(l_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1}$ та $(l_2): 2x - 4y + 1 = 0$.
9. Обчислити координати точки перетину прямих
 $(l_1): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$ та $(l_2): 2x - 5y + 1 = 0$.
10. Знайти рівняння медіан трикутника з вершинами A(-2, 0), B(3, 7), C(5,1).
11. Обчислити кут між прямими $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 1$ та $y = x \cdot \sqrt{3} - 1$.
12. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A(-2, 1) і ортогональна прямій $y = 2x - 1$.
13. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A(5, 2) і паралельна прямій $y = x - 2$.
14. Знайти відстань між прямими $(l_1): 3x - 2y + 1 = 0$ та $(l_2): 9x - 6y - 1 = 0$.
15. Знайти довжину висоти трикутника, що проходить через вершину A, якщо трикутник задано рівняннями його сторін: AB: $3x - 5y - 25 = 0$, BC: $x + y + 1 = 0$, AC: $3x + y + 3 = 0$.
16. Чи лежить початок координат у полосі поміж прямими: $(l_1): 3x - 5y - 25 = 0$ та $(l_2): 3x - 5y + 5 = 0$?
17. Чи лежить точка M(1, 1) в полосі поміж прямими $(l_1): x + y + 2 = 0$ та $(l_2): 2x + 2y - 1 = 0$?
18. Чи лежить початок координат в тупому куті між прямими $(l_1): 3x - 5y + 5 = 0$ та $(l_2): 6x + 10y - 1 = 0$?
19. Чи знаходиться початок координат в трикутнику, рівняння сторін якого $x + y + 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$, $3x + 2y - 2 = 0$.
20. Чи знаходиться точка M(4, -1) в трикутнику, рівняння сторін якого $2x - 5y + 1 = 0$, $x + 3y - 2 = 0$ та $x + y - 1 = 0$.
21. Знайти рівняння бісектрис трикутника, сторони якого визначені рівняннями $x + 3y + 3 = 0$, $2x + y + 1 = 0$ та $x - y - 3 = 0$.
22. Не обчислюючи координат трикутника знайти рівняння його висот, якщо рівняння сторін наступні:
AB: $x + 2y - 5 = 0$, BC: $3x - y - 1 = 0$, AC: $5x - 2y - 3 = 0$.

ЛЕКЦІЯ 6.

ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ.

Нові терміни:

полюс	- полюс	- pole
полярна вісь	- полярная ось	- polar axis

Питання, що розглядатимуться в лекції.

1. Означення полярної системи координат на площині.
2. Графіки ліній, задані рівняннями в полярних координатах.
3. Зв'язок полярних і декартових координат точки.
4. Побудова графіків ліній, заданих рівняннями в декартових координатах, шляхом застосування полярних координат.

Окрім декартової системи координат на площині існує так звана полярна система координат. *Полярна система* координат складається з фіксованої точки полюса та фіксованої осі з початком в полюсі (полярної осі, див. Рис. 6.1).

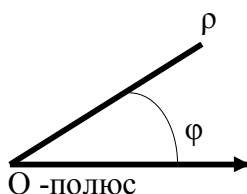


Рис. 6.1

Кожній точці M площини в полярній системі співставляється упорядкована пара чисел (ρ, φ) - пара полярних координат (див. Рис.6.1), де ρ — відстань точки M від полюса, φ — кут між вектором OM та полярною віссю, обчислений в напрямку проти руху годинникової стрілки. Іноді уточнюється, що кут приймає значення від 0 до 2π , чи він може мінятись від 0 до ∞ .

Полярна система координат в деяких випадках буває дуже зручною для задавання тих чи інших ліній за допомогою рівнянь, зв'язуючих полярні координати.

Приклад 6.1. Побудувати графік лінії, рівняння якої в полярній системі координат

має вигляд $\rho = \varphi$, $0 \leq \varphi < \infty$.

Розв'язок. Розглянемо значення ρ в деяких фіксованих точках φ і занесемо ці значення в таблицю.

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
ρ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π

А тепер зобразимо графічно (Рис. 6.2).

Приклад 6.2. Побудувати графік лінії, рівняння якої в полярній системі координат має вигляд $\rho = 2^\varphi$, $0 \leq \varphi < \infty$.

Розв'язок. Як і в попередньому випадку розглянемо деякі значення φ і відповідні їм значення ρ і занесемо все в таблицю. Згідно рівнянню при зростанні φ росте ρ . Цим фактом ми скористаємось при побудові графіку.

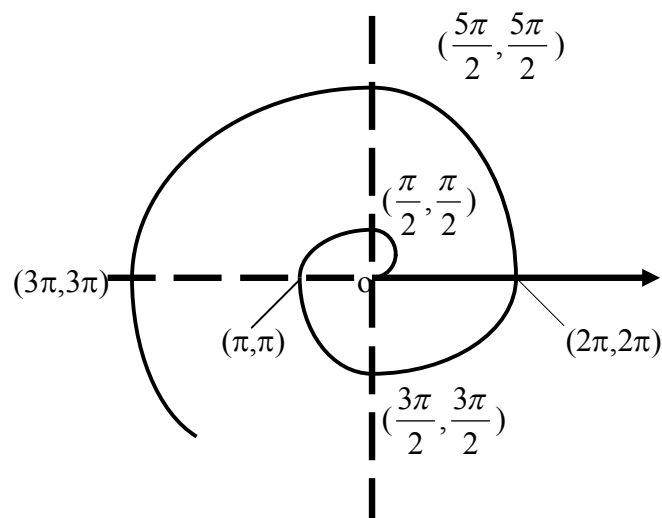


Рис. 6.2

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
ρ	1	$2^{\frac{\pi}{2}}$	2^π	$2^{\frac{3\pi}{2}}$	$2^{2\pi}$	$2^{\frac{5\pi}{2}}$	$2^{3\pi}$

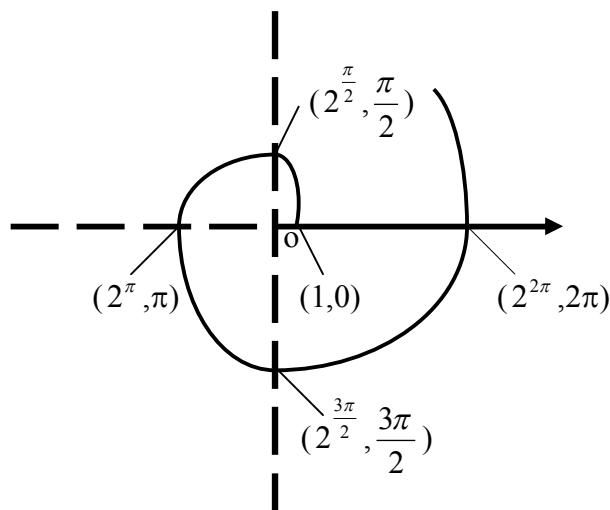


Рис. 6.3

Приклад 6.3. Побудувати графік лінії, рівняння якої в полярній системі координат має вигляд $\rho = \sin 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Розв'язок. Спочатку визначимо, для яких значень кута φ цей запис має сенс.

Очевидно, що коли $\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ та $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 3\pi$ координата ρ приймає від'ємне значення. Тому в рамках означення, яке було введено, для полярної системи координат при таких значеннях координати φ рівняння не має сенсу, отже і не існує точок лінії. Будемо розглядати деякі характерні значення φ в інтервалах $[0, \frac{\pi}{2}]$ та $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ і відповідні їм значення ρ . Результати занесемо в таблицю. Потім, враховуючи поведінку функції $\sin 2\varphi$ при відповідних змінах аргумента φ , намалюємо графік лінії $\rho = \sin 2\varphi$.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
ρ	0	1	0	0	1	1

Примітка. При побудові графіків ліній, рівняння яких задано в полярній системі координат, дуже часто домовляються розглядати і ті значення φ , при яких ρ приймає від'ємне значення, а замість точок з координатами (ρ, φ) в цьому випадку на графіку зображати точку $(-\rho, \varphi + \pi)$. В рамках таких умов графік

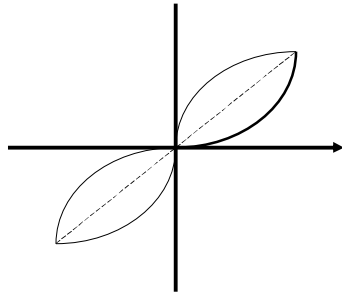


Рис. 6.4. “Двопелюсткова троянда”

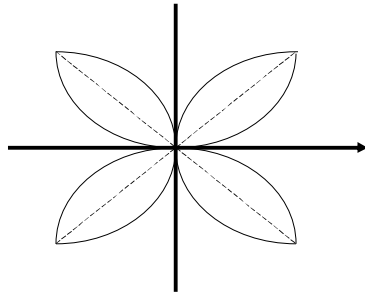


Рис. 6.5. “Чотирипелюсткова троянда” .

лінії, рівняння якої $\rho = \sin 2\varphi$ матиме такий вигляд (див. Рис.6.5). Графік має назву "двопелюсткова троянда".

Приклад 6.4. Побудувати графік лінії, рівняння якої $\rho = \sin 3\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Розв’язок: Побудуємо цей графік для двох умов: коли розглядаються тільки φ , для яких ρ - додатне і коли враховуються точки із такими значеннями φ , при яких ρ - від’ємне.

а) Якщо врахувати тільки ті значення φ , де $\rho > 0$, то графік існуватиме при

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} < \varphi < \pi, \frac{4\pi}{3} < \varphi < \frac{5\pi}{3} .$$

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi, \frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
ρ	0	1	0	1	0	1	0

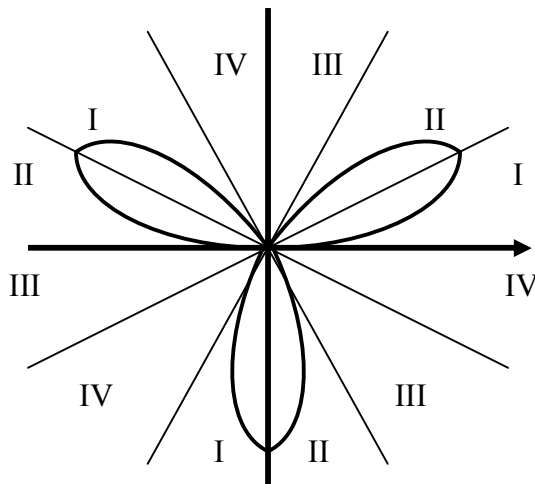


Рис. 6.6а. "Трипелюсткова троянда".

На малюнку римськими цифрами позначено номери чвертей для аргументу синуса 3φ .

б) Якщо врахувати всі значення φ , то на графіку зобразимо пунктиром ті пелюстки, які відображаються в зворотньому напрямку, а неперервною лінією - повний графік лінії за вказаними умовами.

φ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}, \pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	0	-1	0	-1	0	-1	0

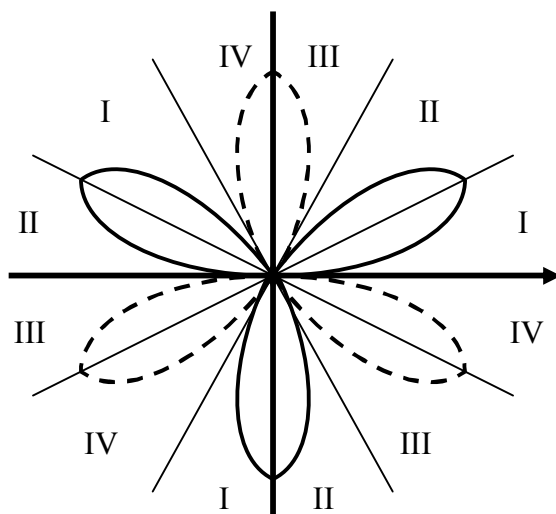


Рис. 6.6б. "Трипелюсткова троянда".

Примітка. Графік лінії, рівняння якої $\rho = \sin k\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ буде "2k-пелюстковою трояндою", якщо k- парне число, і "k- пелюстковою трояндою", якщо k- непарне число.

ЗВ'ЯЗОК ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТ З ПОЛЯРНИМИ.

Розглянемо суміщену з полярною декартову прямокутну систему координат, тобто таку, у якої вісь OX суміщена з полярною віссю, полюс – з початком координат. Тоді декартові і полярні координати однієї і тієї ж точки пов'язані формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \end{cases} \quad (6.2)$$

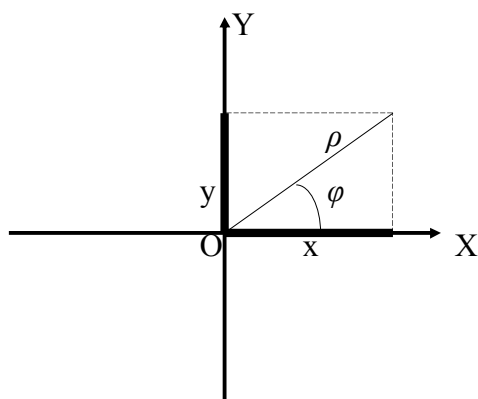


Рис. 6.7

Примітка. За формулами (6.2) не можна однозначно отримати значення координати φ . До них треба ще додати, в якій чверті лежить точка M .

В деяких випадках перехід від рівнянь ліній в декартових координатах до рівнянь в суміщеній полярній системі допомагає побудові графіків ліній.

Приклад 6.5. Побудувати графік лінії, рівняння якої $x^2 + y^2 = r^2$.

Розв'язок. Перейдемо до рівняння в полярних координатах.

$$\rho^2 = r^2 \Rightarrow \rho = r.$$

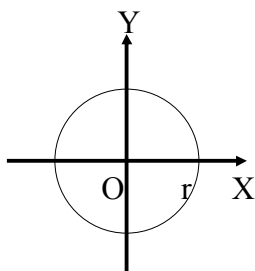


Рис. 6.8.

Це рівняння кола з центром в полюсі (в початку координат) і радіусом r .

Приклад 6.6. Побудувати графік лінії рівняння якої $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Розв'язок. Якщо орієнтуватись тільки на декартові координати, то можна побачити, що лінія проходить через початок координат і розташована симетрично відносно кожної з осей OX та OY . Перейдемо до полярних координат:

$$\rho^4 = a^2 \rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \Rightarrow \rho^2 = a^2 \cos 2\varphi \Rightarrow \rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

З останньої формули витікає, що графік цієї лінії існує тільки в інтервалах $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$. Виходячи з симетрії розташування, побудуємо графік лінії тільки на інтервалі $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, а потім скористаємось симетрією. При зміні φ від 0 до

$\frac{\pi}{4}$ ρ зменшується від a до 0. Отримана крива має назву “Лемніската Бернуллі”.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$
ρ	a	0

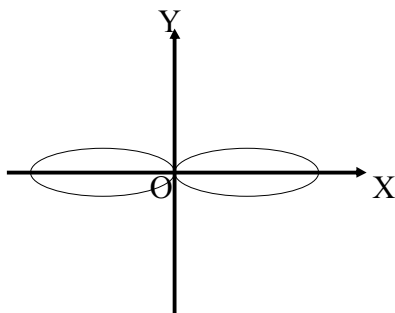


Рис. 6.9. “Лемніската Бернуллі”.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

1. Означення і геометричний зміст полярних координат.
2. Зв'язок полярних і декартових координат в суміщених системах.
3. Який вигляд має графік лінії, рівняння якої $\rho = \sin\varphi$?
4. Який вигляд має графік лінії, рівняння якої $\rho = \sin 4\varphi$?
5. Який вигляд має графік лінії $\rho = 5^\varphi$?
6. Як може змінюватись координата φ ?

ВПРАВИ ДО ВИКОНАННЯ

1. Побудувати графік лінії $\rho = 3\varphi$.
2. Побудувати графік лінії $\rho = 4$.
3. Побудувати графік лінії, рівняння якої $\rho = \cos\varphi$.
4. Побудувати графік лінії, рівняння якої $\rho = \cos 3\varphi$.
5. Побудувати графік лінії, рівняння якої $\rho = \cos 2\varphi$.
6. Побудувати графік лінії, рівняння якої $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.
7. Побудувати графік лінії, рівняння якої $\rho = a(1 - \sin\varphi)$.

ЛЕКЦІЇ 7-8-9.

РІВНЯННЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ.

Нові терміни:

симетричний	- симметричный	- symmetric
еліпс	- эллипс	- ellipse
гіпербола	- гипербола	- hyperbola
фокус	- фокус	- focus
ексцентриситет	- эксцентриситет	- excentrisitet
асимптота	- асимптота	- asymptote
директриса	- директриса	- directrix
парабола	- парабола	- parabola
центр кривої	- центр кривой	- center of curve
вісь кривої	- ось кривой	- axis of curve
крива другого порядку	- кривая второго порядка	- curve of second order

Питання, що розглядатимуться в лекції.

1. Означення еліпсу, канонічне рівняння.
2. Ексцентриситет та директриса еліпсу.
3. Означення гіперболи, канонічне рівняння.
4. Ексцентриситет та директриса гіперболи.
5. Означення параболи, канонічне рівняння.
6. Перетворення координат на площині.
6. Загальне рівняння кривої другого порядку. Приведення до канонічного вигляду.

Означення 7.1. Назвемо *еліпсом* геометричне місце точок, додток відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок, що зветься фокусами, є стала величина.

Канонічне рівняння еліпсу в декартовій прямокутній системі координат має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7.1)$$

Графік еліпсу наведено на рис. 7.1.

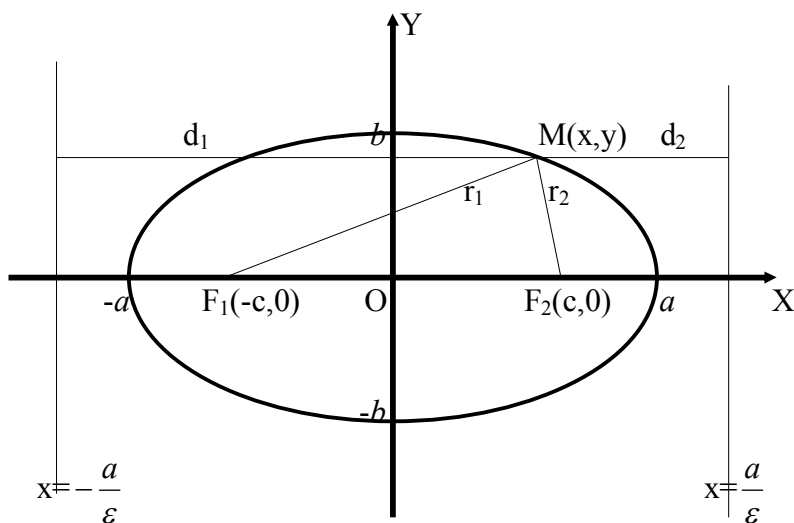


Рис. 7.1

Параметри a , b мають назви півосей еліпсу, точки $F_1(-c, 0)$ та $F_2(c, 0)$ -фокуси, параметр c (координата фокусу) задовольняє рівності $c^2 = a^2 - b^2$, якщо $a > b$ (тобто a - більша піввісь).

Примітки. Якщо $b > a$, то фокуси лежать на осі OY і еліпс буде витягнуто вдовж осі OY ,

$$c^2 = b^2 - a^2.$$

Означення 7.2. Нехай a - більша піввісь еліпса. Назвемо величину $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$

ексцентриситетом еліпсу, а прямі лінії, рівняння яких $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ - його *директрисами*.

(У випадку, коли $b > a$, $\varepsilon = \frac{c}{b} < 1$, а рівняння директрис - $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$.)

Зауважимо, що еліпс можна також розглядати як геометричне місце точок, для кожної з яких відношення між відстанню до одного з фокусів і відстанню до найближчої до цього фокусу директриси ε величина стала і дорівнює ексцентриситету, тобто $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon < 1$ (див. рис. 7.1).

Примітка. Якщо півосі a та b співпадають, то рівняння (7.1) має вигляд $x^2 + y^2 = a^2$ і є рівнянням кола, центр якого знаходиться в початку координат, а радіус дорівнює a .

Приклад 7.1. Знайти рівняння кола, центр якого знаходиться в початку координат і яке проходить через точку $A(2, 3)$.

Розв'язок. Шукаємо рівняння кола у вигляді $x^2 + y^2 = a^2$. Підставимо в це рівняння

координати точки A :

$$4 + 9 = a^2 \Rightarrow a^2 = 13.$$

Рівняння шуканого кола $x^2 + y^2 = 13$.

Приклад 7.2. Знайти рівняння еліпсу, центр якого лежить в початку координат, осі співпадають з координатами, більша піввісь a дорівнює 4, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Розв'язок.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{a}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 16 - 4 = 12.$$

Таким чином, рівняння шуканого еліпсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Приклад 7.3. Знайти рівняння еліпсу, якщо його більша піввісь дорівнює 6, а рівняння директрис має вигляд $y = \pm 12$.

Розв'язок. З умов задачі видно, що фокуси шуканого еліпсу знаходяться на осі OY , тобто

$$\begin{cases} \frac{b}{\varepsilon} = 12 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{c} = 12 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{36}{12} = 3 \\ a^2 = b^2 - c^2 = 36 - 9 = 27. \end{cases}$$

Таким чином, рівняння шуканого еліпсу має вигляд $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Приклад 7.4. Знайти рівняння еліпсу, центр якого знаходиться в початку координат, фокуси лежать на осі OX , мала піввісь $b = 5$ і який проходить через точку $M(2, \frac{5\sqrt{5}}{3})$.

Розв'язок. Рівняння шуканого еліпсу має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Внаслідок того, що еліпс проходить через т. M , отримаємо рівність

$$\frac{4}{a^2} + \frac{5}{9} = 1 \Rightarrow \frac{4}{a^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow a^2 = 9.$$

Таким чином, рівняння шуканого еліпсу має вигляд $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Означення 7.3. Назвемо *гіперболою* геометричне місце точок, модуль різниці відстані від кожної з яких до двох фіксованих точок, що звуться фокусами, є стала величина.

Канонічне рівняння гіперболи в декартовій прямокутній системі координат має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7.2)$$

Графік гіперболи наведено на рис. 7.2.

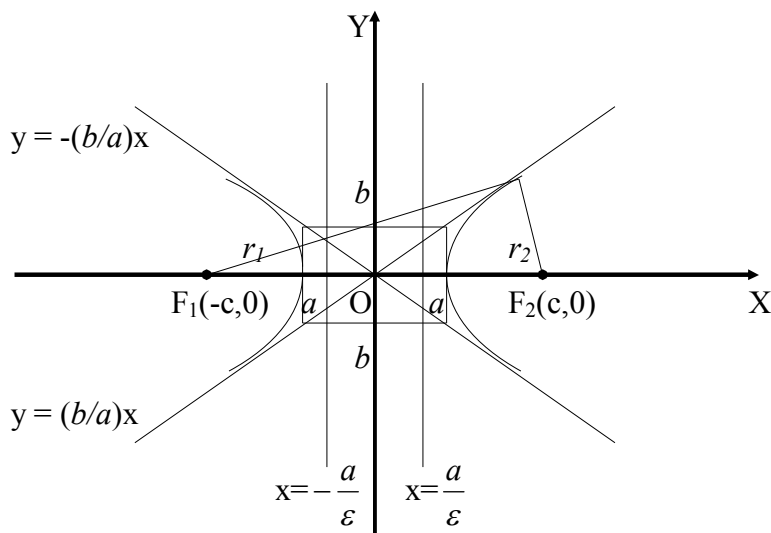


Рис. 7.2.

Параметри a , b мають назви півосей гіперболи, точки $F_1(-c, 0)$ та $F_2(c, 0)$ - фокуси гіперболи, параметр c (координата фокусу) задовольняє рівності $c^2 = a^2 + b^2$.

Означення 7.4. Прямі лінії, рівняння яких $y = \pm \frac{b}{a}x$ назовемо *асимптотами* гіперболи,

тобто лініями, до яких наближається вітки гіперболи, якщо змінна збігається до $\pm\infty$.

З Означення 7.4 витікає правило побудови графіку гіперболи: спочатку побудуємо прямокутник з центром в початку координат і сторонами, довжини яких дорівнюють $2a$ та $2b$; діагоналі цього прямокутника є асимптотами гіперболи, вершини віток якої знаходяться в точках $(a, 0)$ та $(-a, 0)$, тобто в точках дотику віток гіперболи і сторін прямокутника.

Означення 7.5. Назвемо величину $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ *ексцентриситетом* гіперболи, а прямі

лінії, рівняння яких $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ - його директрисами (див. рис. 7.2). Для гіперболи, як і

для еліпса відношення відстані від її довільної точки до якогось фокуса до відстані від тієї ж точки до найближчої до цього фокуса директриси є величина стала і дорівнює

ексцентриситетові, тобто $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}$.

Приклад 7.5. Знайти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі OX , центр - в початку координат, рівняння асимптот має вигляд $y = \pm \frac{4}{3}x$, а відстань між фокусами $2c = 20$.

Розв'язок. Шукаємо канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. З рівняння асимптот отримаємо

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \\ c = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{9} \\ b^2 + a^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{100 - a^2}{a^2} = \frac{16}{9} \\ b^2 = 100 - a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 36 \\ b^2 = 64. \end{cases}$$

Таким чином, рівняння шуканої гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

Приклад 7.6. Знайти рівняння асимптот та директрис гіперболи $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{121} = 1$.

Розв'язок. З рівняння гіперболи видно, що $a = 10$, $b = 11$. Тому рівняння асимптот має вигляд

$y = \pm \frac{11}{10}x$. Параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{100 + 121} = \sqrt{221}$, а рівняннями директрис будуть

$$x = \pm \frac{100}{\sqrt{221}}.$$

Приклад 7.7. Обчислити координати точок гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, відстань від яких до лівого фокуса дорівнює 7.

Розв'язок. Позначимо координати шуканої точки через x_0 та y_0 . Тоді, враховуючи, що $c = \sqrt{9 + 16} = 5$ і x_0 та y_0 задовольняють рівнянню гіперболи, отримаємо:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x_0^2}{9} - \frac{y_0^2}{16} = 1 \\ (x_0 + 5)^2 + y_0^2 = 49 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y_0^2 = \frac{(x_0^2 - 9)16}{9} \\ x_0^2 + 10x_0 + \frac{16}{9}x_0 - 16 - 49 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y_0^2 = \frac{(x_0^2 - 9)16}{9} \\ 25x_0^2 + 90x_0 - 360 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -6 \\ y_0 = \pm 4\sqrt{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Таким чином, шукані точки $M_1(-6, 4\sqrt{3})$ та $M_2(-6, -4\sqrt{3})$.

Приклад 7.8. Знайти рівняння гіперболи, ексцентриситет якої дорівнює $\frac{3}{2}$, а відстань між директрисами $\frac{8}{3}$, якщо фокуси її лежать на осі OX , а центр - в початку координат.

Розв'язок. З умов задачі витікає, що

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \\ \frac{2a^2}{c} = \frac{8}{3} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} c = \frac{3a}{2} \\ \frac{4a^2}{3a} = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5. \end{aligned}$$

Таким чином, рівняння шуканої гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Означення 7.6. Назвемо *параболою* геометричне місце точок, відстань від кожної з яких до фіксованої точки F - фокуса - дорівнює відстані до фіксованої прямої — директриси.

Якщо цю відстань позначити символом p то канонічне рівняння параболої має вигляд:

$$y^2 = 2px \quad (7.3)$$

Графік зображено на рис. 7.3.

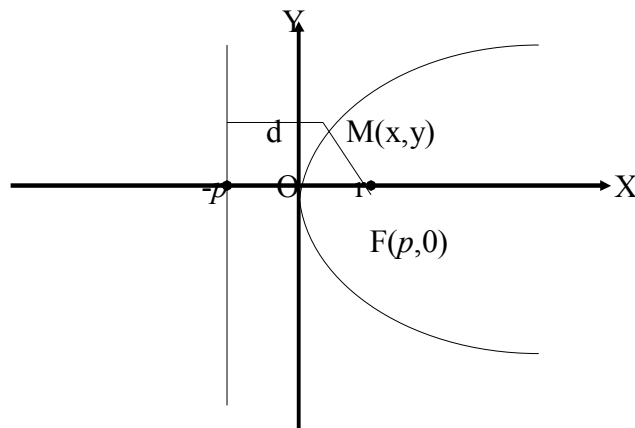


Рис. 7.3.

Рівняння директриси $x = -p$

Приклад 7.9. Знайти рівняння параболої, яку розташовано в лівій півплощині симетрично відносно осі OX , а параметр $p = 0.5$.

Розв'язок. Канонічний вигляд такої параболої $y^2 = -2px \Rightarrow y^2 = -x$.

Приклад 7.10. Знайти рівняння параболи, що розташована симетрично відносно осі OY і проходить через точку $D(4, -8)$.

Розв'язок. Канонічний вигляд такої параболи $x^2 = 2py$. Підставимо координати точки D в це рівняння:

$$16 = -16p \Rightarrow p = -1 \Rightarrow \text{шукане рівняння } x^2 = -2y.$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ. ПАРАЛЕЛЬНИЙ ПЕРЕНІС КООРДИНАТНИХ ОСЕЙ.

Нехай початок декартової прямокутної системи координат XOY перенесено в точку $O'(x_0, y_0)$ (див. рис. 7.4) і побудовано нову систему координат $X'O'Y'$, в якій осі $O'X'$ та $O'Y'$ паралельні осям OX та OY відповідно. Розглянемо довільну точку M площини, координати якої в "старій" системі (x, y) , а в "новій" - (x', y') . Знайдемо зв'язок між "старими" та "новими" координатами:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{array} \right. \quad (7.4)$$

Формули (7.4) є формулами перетворення координат при паралельному переносі.

Примітка. Ці формули можна поширити і на випадок паралельного переносу декартової прямокутної системи координат в просторі. Треба тільки додати аналогічні формули для кожної третьої координати z .

ПОВОРОТ КООРДИНАТНИХ ОСЕЙ.

Нехай декартову прямокутну систему координат повернуто на кут φ проти годинникової стрілки (див. рис. 7.5).

Розглянемо довільну точку M на площині і знайдемо зв'язок між її координатами x, y в "старій" системі і x', y' в "новій" системі. Неважко обчислити що

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{array} \right. \quad (7.5)$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{array} \right.$$

— формули повороту системи координат.

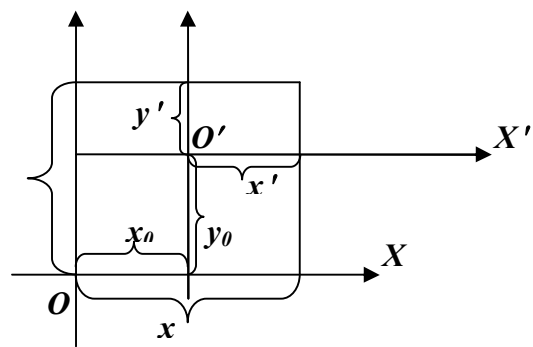


Рис. 7.4.

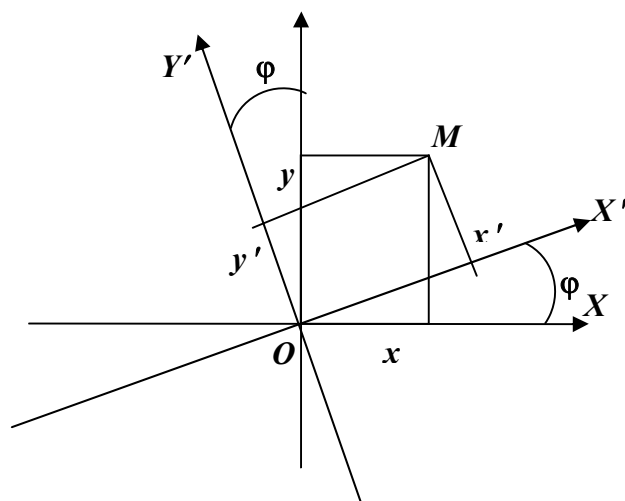


Рис. 7.5.

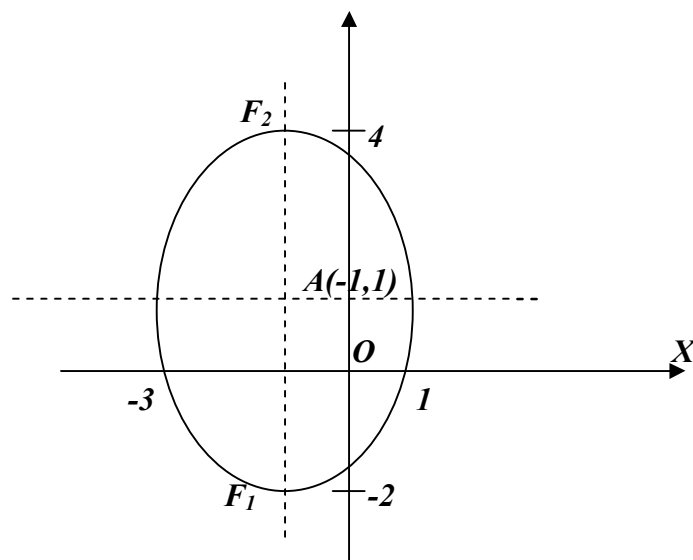


Рис. 7.6.

Приклад 7.11. Побудувати графік еліпсу, рівняння якого

$$(x + 1)^2/4 + (y - 1)^2/9 = 1.$$

Розв'язок. З рівняння видно, що центр цього еліпсу знаходиться в точці $A(-1,1)$, півосі дорівнюють: $a = 2$, $b = 3$, параметр $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$, тобто фокуси знаходяться на прямій $x = -1$ і мають координати $F_1(-1, -\sqrt{5} + 1)$, $F_2(-1, \sqrt{5} + 1)$ (рис.7.6).

Приклад 7.12. Побудувати графік гіперболи, рівняння якої

$$(y - 2)^2/9 - (x + 1)^2/4 = 1.$$

Розв'язок. Вирішимо цю задачу способом дещо іншим, ніж попередню. Введемо заміну:

$$\begin{cases} x + 1 = x' \\ y - 2 = y' \end{cases} \Rightarrow \frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 1$$

і побудуємо графік цієї гіперболи в системі x', y' . Центр цієї гіперболи знаходиться в початку координат системи $X'O'Y'$, півосі $a = 2$, $b = 3$; $c = \sqrt{9 + 4}$.

Віссю гіперболи буде вісь $O'Y'$. Рівняння асимптот $x' = \pm \frac{2}{3} y' \Rightarrow y' = \pm \frac{3}{2} x'$, координати фокусів $F_1(x' = 0, y' = -\sqrt{13})$, $F_2(x' = 0, y' = \sqrt{13})$. Побудувавши гіперболи за цими ознаками, перенесемо початок координат O' в точку $O(x' = 1, y' = -2)$ і отримаємо графік шуканої гіперболи (рис.7.7)

Приклад 7.13. Побудувати графік параболи, рівняння якої

$$(x - 1)^2 = y + 1$$

Розв'язок. Замінімо $(x - 1) = x'$, $(y + 1) = y'$. В нових координатах рівняння параболи матиме вигляд $x'^2 = y'$. Побудуємо її графік в системі $X'O'Y'$, а потім перенесемо початок координат в точку $O(x' = -1, y' = 1)$ (рис. 7.8).

Приклад 7.14. Знайти формули повороту системи координат, якщо кут повороту $\varphi = \pi/4$.

Розв'язок.

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

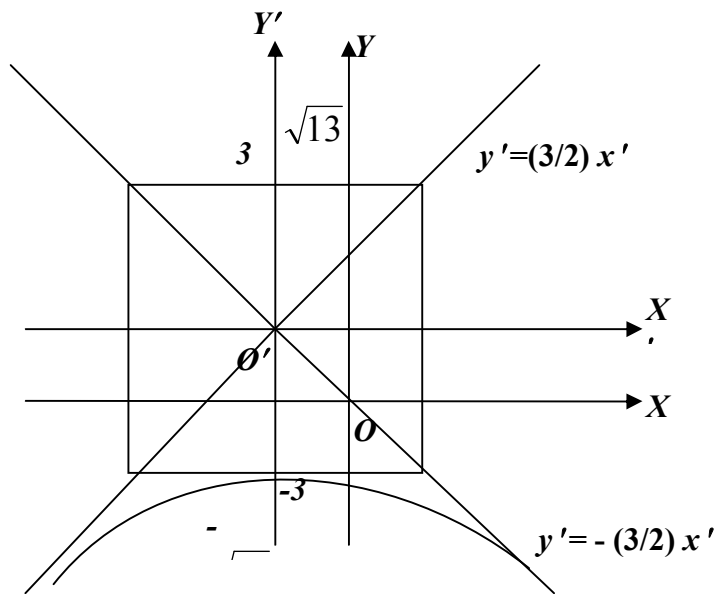


Рис. 7.7 (на рисунку цифри відповідають координатам в системі $X'O'Y'$).

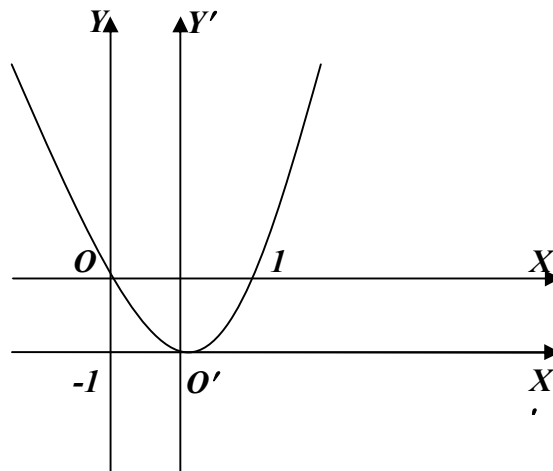


Рис. 7.8 (на рисунку цифри відповідають координатам в системі $X'O'Y'$).

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ АЛГЕБРАЇЧНОЇ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ.

Означення 7.7. Назвемо *кривою другого порядку* геометричне місце точок, що задається рівнянням

$$\boxed{a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 + b_1x + b_2y + c = 0} \quad (7.7)$$

Очевидно що рівняння (7.7) не завжди є рівнянням справжньої кривої. Наприклад, якщо покласти, $a_1 = a_3 = 1$, $b_1 = b_2 = a_2 = 0$, $c = 1$, то отримаємо рівняння $x^2 + y^2 = -1$. Але такого не може бути. В такому випадку кажуть, що рівняння (7.7) - це рівняння "псевдокривої". Або, якщо $a_1 = a_3 = 1$, $b_1 = b_2 = a_2 = c = 0$, рівняння перетвориться на $x^2 + y^2 = 0$. Тобто лінія перетворюється в точку $x = 0$, $y = 0$.

Ще один цікавий випадок. Хай $a_1 = -a_3 = 1$, $b_1 = b_2 = a_2 = c = 0$. Тоді рівняння має вигляд:

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Rightarrow x = \pm y.$$

Це рівняння двох прямих.

Ми розглянули декілька досить простих випадків. Розглянемо дещо складніший варіант.

Хай в рівнянні (7.7) $a_2 = 0$. Тоді хоч один з коефіцієнтів a_1 , a_3 відрізняється від 0, бо інакше це буде рівнянням лінії. Якщо $a_1 \neq 0$ і $a_3 \neq 0$, виділимо повні квадрати по x та y і отримаємо рівняння типу:

$$\boxed{a_1(x - x_0)^2 + a_3(y - y_0)^2 = K.} \quad (7.8)$$

Якщо $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $K > 0$, це буде *рівняння еліпсу*:

$$\frac{\frac{(x - x_0)^2}{K}}{a_1} + \frac{\frac{(y - y_0)^2}{K}}{a_3} = 1 \Rightarrow \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Якщо $a_1 > 0$, $a_3 < 0$, $K > 0$, це буде *рівняння гіперболи*:

$$\frac{\frac{(x - x_0)^2}{K}}{a_1} - \frac{\frac{(y - y_0)^2}{K}}{a_3} = 1 \Rightarrow \frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Якщо один з коефіцієнтів a_1 чи a_3 дорівнює 0, ми отримаємо *рівняння параболи* типу:

$$(x - x_0)^2 = K(y - y_0)^2.$$

Пропонуємо уважно віднестись до нижче наведених прикладів. (7.9)

Приклад 7.15. Визначити тип кривої, рівняння якої

$$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$$

і побудувати її графік.

Розв'язок.

$$4(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 + 4y + 4) - 36 = 0$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \\
& 4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \\
& \Downarrow \\
& (x-5)^2 / 9 + (y+2)^2 / 4 = 1 \\
& \Downarrow \\
& \frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1, \quad \text{де} \quad \begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y + 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким чином рівняння, запропоноване в задачі, є рівняння еліпсу з центром в точці $O'(5, -2)$ і осями, паралельними координатним осям, і півосями $a = 3, b = 2$ (рис.7.9).

Приклад 7.16. Визначити тип кривої, рівняння якої

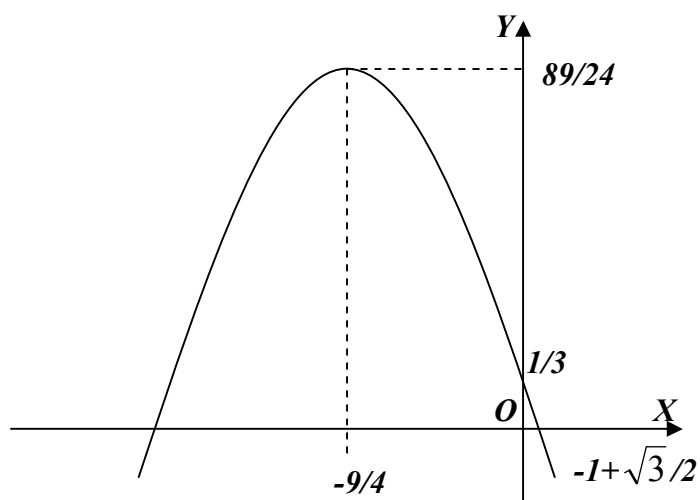
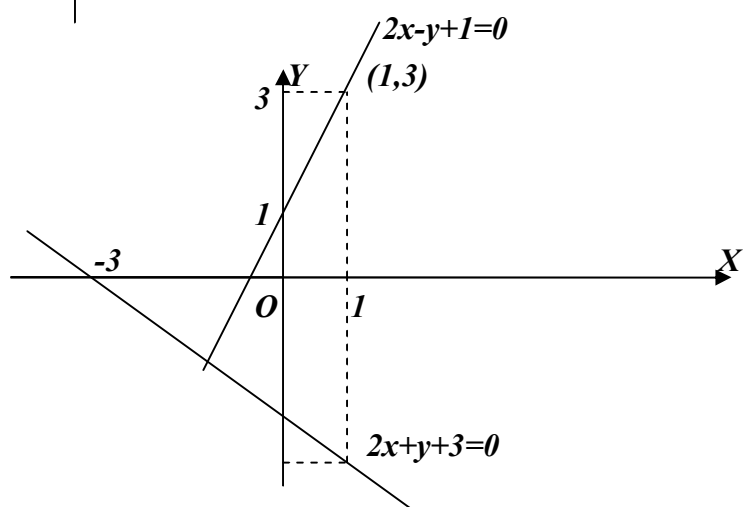
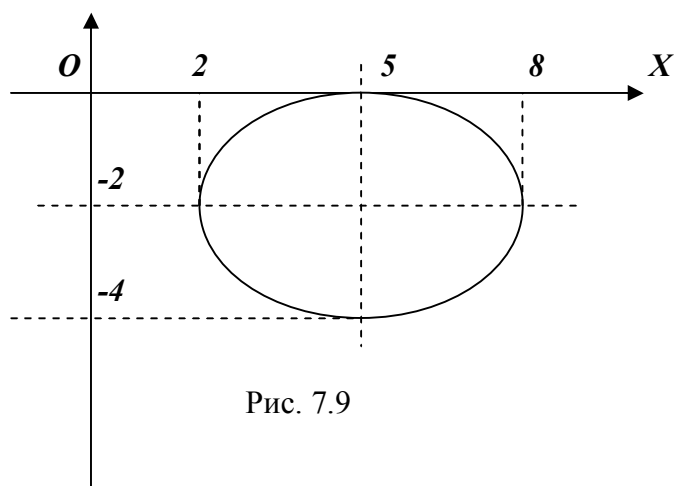
$$4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0,$$

і побудувати її графік.

Розв'язок.

$$\begin{aligned}
& 4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0 \\
& \Downarrow \\
& 4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 2y + 1) = 0 \\
& \Downarrow \\
& 4(x+1)^2 - (y+1)^2 = 0 \\
& \Downarrow \\
& \begin{cases} 2(x+1) = y+1 \\ 2(x+1) = -y-1 \end{cases} \\
& \Downarrow \\
& \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Це рівняння двох прямих (рис.7.10).



Приклад 7.17. Визначити тип кривої, рівняння якої

$$2x^2 + 4x + 3y - 1 = 0$$

та побудувати її графік.

Розв'язок.

$$2x^2 + 4x + 3y - 1 = 0$$

⇓

$$2\left(x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{81}{16}\right) + 3y - \frac{81}{8} - 1 = 0$$

⇓

$$2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + 3\left(y - \frac{89}{24}\right) = 0$$

⇓

$$(x')^2 = -\frac{3}{2}y', \quad \text{де} \quad \begin{cases} x' = x + \frac{9}{4} \\ y' = y - \frac{89}{24} \end{cases}$$

Задане рівняння є рівнянням параболи (рис. 7.11).

ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК.

$$a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

Використаємо формули повороту координатної системи і підберемо такий кут φ , щоб коефіцієнт при мішаному добутку нових координат $x'y'$ дорівнював нулю. Підставимо в загальне рівняння формули:

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

і обчисливши коефіцієнт при $x'y'$,

$$-2a_1 \cos \varphi \sin \varphi + 2a_2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2a_3 \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

⇓

$$-a_1 \cos 2\varphi + 2a_2 \cos 2\varphi + a_3 \sin 2\varphi = 0$$

⇓

$$(-a_3 + a_1) \operatorname{tg} 2\varphi = 2a_2$$

⇓

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_2}{a_1 - a_3}} \quad (7.10)$$

Обчисливши кут повороту за формулою (7.10) і застосувавши формули повороту, прийдемо до загального рівняння кривої другого порядку без мішаного добутку координат.

Приклад 7.18. Визначити тип кривої

$$xy + x - 1 = 0$$

і побудувати графік.

Розв'язок. Скористаємось формулою (7.10).

$$a_1 = a_3 = 0, \quad 2a_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{1}{0-0} = \infty \quad \Rightarrow \quad 2\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{aligned}, \quad \begin{pmatrix} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{pmatrix}.$$

Підставимо ці формули повороту в задане рівняння:

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') - 1 = 0$$

⇓

$$x'^2 - y'^2 + \sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' - 1 = 0$$

⇓

$$\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

⇓

$$(\tilde{x})^2 - (\tilde{y})^2 = 1, \quad \text{де} \quad \begin{cases} \tilde{x} = x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tilde{y} = y' + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Таким чином, задане рівняння - це рівняння гіперболи, графік якої на рис 7.12.

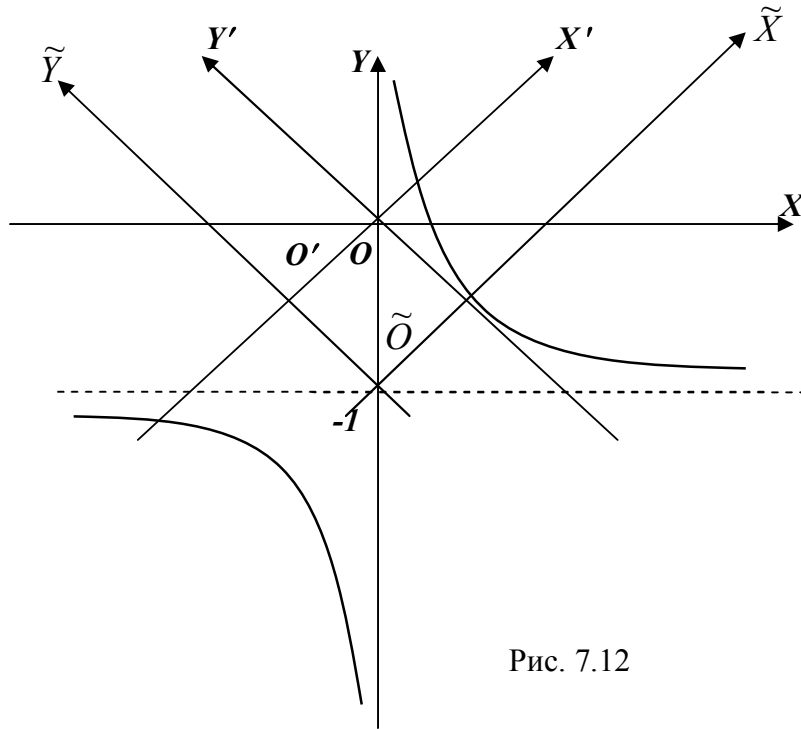


Рис. 7.12

Рівняння їх асимптот:

$$\tilde{y} = \pm \tilde{x} \Rightarrow y' = x' \text{ та } y' = -x' - \sqrt{2} \Rightarrow x + y = -x + y \text{ та}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) - \sqrt{2} \Rightarrow x = 0 \text{ та } y = -1$$

Приклад 7.19. Визначити тип кривої, рівняння якої:

$$2x^2 + 3xy - y^2 + x - 2y - 3 = 0.$$

Розв'язок.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{3}{2+1} = 1 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{8}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \frac{\pi}{8} - y' \sin \frac{\pi}{8} \\ y = x' \sin \frac{\pi}{8} + y' \cos \frac{\pi}{8} \end{cases}.$$

Підставимо отримані формули в задане рівняння прямої:

$$x'^2 \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{8} + \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) + y'^2 \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{8} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + x' \left(\cos \frac{\pi}{8} - 2 \sin \frac{\pi}{8} \right) - y' \left(\sin \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} \right) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow x'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) + y'^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) + \\
& + x' \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} \right) - y' \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} + 2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \right) - 3 = 0 \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow a_1 x'^2 + a_2 y'^2 + a_3 x' - a_4 y' - 3 = 0 \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow a_1 \left(x'^2 + \frac{a_3}{a_1} x' + \frac{a_3^2}{4a_1^2} \right) + a_2 \left(y'^2 + \frac{a_4}{a_2} y' + \frac{a_4^2}{4a_2^2} \right) - \frac{a_3^2}{4a_1^2} - \frac{a_4^2}{4a_2^2} - 3 = 0 \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow a_1 \left(x' + \frac{a_3}{2a_1} \right)^2 + a_2 \left(y' + \frac{a_4}{2a_2} \right)^2 = K.
\end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} > 0,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} > 0,$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$K = 3 + \frac{a_3^2}{4a_1} + \frac{a_4^2}{4a_2} > 0.$$

Таким чином ми отримали рівняння:

$$\frac{\left(x' + \frac{a_3}{2a_1} \right)^2}{K/a_1} + \frac{\left(y' + \frac{a_4}{2a_2} \right)^2}{K/a_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$$

- рівняння еліпсу, де

$$\begin{cases} \tilde{x} = x' + \frac{a_3}{2a_1}, & a^2 = \frac{K}{a_1} \\ \tilde{y} = y' + \frac{a_4}{2a_2}, & b^2 = \frac{K}{a_2} \end{cases}.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

1. Означення еліпсу.
2. Канонічне рівняння еліпсу.
3. Означення ексцентриситету еліпсу.
4. Означення директриси еліпсу.
5. Означення гіперболи.
6. Канонічне рівняння гіперболи.
7. Означення ексцентриситету гіперболи.
8. Означення директриси гіперболи.
9. Означення асимптот гіперболи та їх рівняння.
10. Як пов'язані параметри a, b, c еліпсу?
11. Як пов'язані параметри a, b, c гіперболи?
12. Яка з нерівностей відповідає ексцентриситету еліпса, а яка - ексцентриситету гіперболи?
13. Який геометричний зміст параметрів a, b, c еліпса та гіперболи?
14. Означення параболи та її канонічне рівняння.
15. Формули паралельного переносу системи координат.
16. Формули повороту системи координат.
17. Загальне рівняння кривої другого порядку.
18. Формула для обчислення кута повороту системи координат при приведенні рівняння кривої до канонічного вигляду.

ВПРАВИ ДО ВИКОНАННЯ.

1. Знайти рівняння кола з центром в початку координат і радіусом 3.
2. Знайти рівняння кола з центром в початку координат, що проходить через точку $A(3, 5)$.
3. Побудувати графік кола, рівняння якого $x^2 + (y - 1)^2 = 9$.
4. Побудувати графік кола, рівняння якого $(x + 3)^2 + y^2 = 25$.
5. Побудувати графік кола, рівняння якого $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.
6. Привести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку та побудувати її графік:
 - а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$;
 - б) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$;
 - в) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$;

$$\text{г) } x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0;$$

$$\text{д) } x^2 + y^2 + x = 0.$$

7. Знайти рівняння еліпсу, фокуси якого лежать на осі OX симетрично, відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

- а) його півосі дорівнюють 5 та 2;
- б) його більша піввісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;
- в) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;
- г) відстань між фокусами $2c = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$;
- д) більша піввісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$;
- е) відстань між директрисами дорівнює 32 і $\varepsilon = 1/2$.

8. Знайти рівняння еліпсу фокуси якого лежать на осі OY симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

- а) його півосі дорівнюють 7 та 2;
- б) його більша піввісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;
- в) відстань між фокусами $2c = 24$, $\varepsilon = 12/13$;
- г) мала піввісь дорівнює 16, $\varepsilon = 3/5$;
- д) відстань між директрисами дорівнює $32/3$, $\varepsilon = 3/4$;
- е) відстань між фокусами дорівнює $2c = 6$, а відстань між директрисами дорівнює $50/3$.

9. Побудувати графіки еліпсів, рівняння яких:

$$\text{а) } \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1;$$

$$\text{б) } \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1;$$

$$\text{в) } \frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1;$$

$$\text{г) } \frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

10. Привести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку та побудувати її графік:

$$\text{а) } 5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0;$$

$$\text{б) } 16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0;$$

$$\text{в) } 4x^2 + 5y^2 - 8x + 12y - 32 = 0.$$

11. Знайти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщуються на осі OX симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:
- а) її півосі $a = 5, b = 4$;
 - б) відстань між фокусами $2c = 10$, а вісь $b = 4$;
 - в) відстань між фокусами $2c = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = 3/2$;
 - г) вісь $a = 8$, ексцентриситет $\varepsilon = 5/4$;
 - д) відстань між директрисами дорівнює $228/13$, а відстань між фокусами $2c = 26$;
 - е) рівняння асимптот $y = \pm 4/3x$, а $2c = 20$.
12. Знайти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщуються на осі OY симетрично відносно початку координат, знаючи, окрім того, що:
- а) її півосі $a = 6, b = 18$;
 - б) відстань між фокусами $2c = 10$, ексцентриситет $\varepsilon = 5/3$;
 - в) рівняння асимптот $y = \pm 12/5x$, і відстань між вершинами дорівнює 48;
 - г) рівняння асимптот $y = \pm 4/3x$, а відстань між директрисами дорівнює $32/5$.
13. Побудувати графіки гіпербол, якщо їх рівняння мають вигляд:
- а) $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$;
 - б) $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;
 - в) $\frac{(y-2)^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$;
 - г) $\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$.
14. Привести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку та побудувати її графік:
- а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;
 - б) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;
 - в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.
15. Знайти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, знаючи, що:
- а) парабола знаходиться в правій півплощині, симетрична відносно осі OX і її параметр $p = 3$;

- б) парабола знаходиться в лівій півплощині, симетрична відносно осі OX і її параметр $p = 0,5$;
- в) парабола знаходиться в нижній півплощині, симетрична відносно осі OY і її параметр $p = 1/4$;
- г) парабола знаходиться в верхній півплощині, симетрична відносно осі OY і її параметр $p = 3$.

16. Визначити величину параметру p та розташування відносно координатних осей парабол:

- а) $y^2 = 6x$;
- б) $x^2 = 5y$;
- в) $y^2 = -4x$;
- г) $x^2 = -y$.

17. Знайти рівняння парабол, вершини яких знаходяться в початку координат, знаючи, що:

- а) парабола розташована симетрично відносно осі OX і проходить через точку $A(9,6)$;
- б) парабола розташована симетрично відносно осі OY і проходить через точку $B(4, -8)$.

18. Побудувати графік парабол:

- а) $(y-1)^2 = 3x$;
- б) $y^2 = 3x - 9$;
- в) $y = 2(x-1)^2$;
- г) $(y+2) = 3(x+1)^2$.

19. Привести до канонічного вигляду рівняння кривих другого порядку і побудувати їх графіки:

- а) $y - x^2/4 + x + 2 = 0$;
- б) $y - 4x^2 - 8x + 7 = 0$;
- в) $x - 2y^2 - 12y + 14 = 0$;
- г) $3x^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;
- д) $2x^2 + 8x + y + 1 = 0$;
- е) $3y^2 + 2x - 6y - 4 = 0$.

20. Привести до канонічного вигляду рівняння кривих другого порядку і побудувати їх графіки:

- а) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;
- б) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

в) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;

г) $7x^2 - 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

д) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;

е) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;

ж) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;

и) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x + 16y + 3 = 0$.

ЛЕКЦІЯ 10.

АРИФМЕТИЧНІ ПРОСТОРИ. МАТРИЦІ ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ

Нові терміни

упорядкований	- упорядоченный	- ordered
ковектор	- ковектор	- covector
арифметичний простір	- арифметическое пространство	- arithmetical space
вимірність	- размерность	- dimension
рядок матриці	- строчка матрицы	- line of matrix
стовпчик матриці	- столбец матрицы	- column of matrix
нульова матриця	- нулевая матрица	- zero matrix
прямокутна матриця	- прямоугольная матрица	- right-angled matrix
квадратна матриця	- квадратная матрица	- square matrix
протилежна матриця	- противоположная матрица	- opposite matrix
одинична матриця	- единичная матрица	- matrix - one
невироджена матриця	- невырожденная матрица	- non-degenerate matrix
переставні матриці	- коммутативные матрицы	- comutative matrixes
зворотна матриця	- обратная матрица	- reverse matrix
лінійний простір	- линейное пространство	- linear space
поліном n -того порядку	- полином n -ного порядка	- polynom of n -th order

Питання, що розглядатимуться в лекції.

1. Арифметичні простори, означення, лінійні операції та їх властивості.
2. Матриці, означення.
3. Лінійні операції над матрицями та їх властивості.
4. Добуток матриць та зворотна матриця.
5. Лінійні простори, означення, приклади лінійних просторів.

АРИФМЕТИЧНІ ПРОСТОРИ.

Означення 10.1. Будемо казати, що сукупність деяких об'єктів *упорядкована*, якщо об'єкти розміщені в певному порядку.

Означення 10.2. Назвемо *арифметичним простором* вимірності n сукупність упорядкованих наборів чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Якщо ці числа записані в рядок:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то цей рядок будемо називати ковектором; якщо в стовпчик:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

то цей стовпчик будемо називати вектором. Тобто *арифметичний простір* — це сукупність ковекторів чи векторів. Числа, що утворюють вектори або ковектори, будемо називати координатами. Якщо координати приймають тільки дійсні значення, арифметичний простір будемо позначати символом **R**, якщо можливі комплексні значення координат - символом **C**. Про **R** ще будемо казати, що це арифметичний простір над полем дійсних чисел, а про **C** - що не арифметичний простір над полем комплексних чисел.

Означення 10.3. Вектор або ковектор, всі координати якого нульові назвемо *нульовим* і будемо позначати символом $\vec{0}$ чи $\bar{0}$ тобто

$$\vec{0} = (0, 0, \dots, 0),$$

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ В АРИФМЕТИЧНОМУ ПРОСТОРИ.

Означення 10.4. Назвемо добутком скаляра α на ковектор (вектор)

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ такий ковектор (вектор) $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, що

$$b_k = \alpha a_k$$

(10.1)

Означення 10.5. Назвемо додатком (або сумою) двох ковекторів (векторів)

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ такий ковектор (вектор) $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, що

$$\boxed{c_k = a_k + b_k} \quad (10.2)$$

Операції множення на скаляр та додавання мають назву "*лінійні операції*".

Властивості лінійних операцій в арифметичному просторі:

1. $(\alpha \times \beta)\vec{a} = \alpha(\beta \times \vec{a})$ - асоціативність по скалярах.
 2. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивність по скалярах.
 3. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - комутативність.
- (10.3)
4. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ - дистрибутивність по векторах.
 5. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ - асоціативність.

Неважко пересвідчитись у виконанні і таких властивостей:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}} \quad (10.4)$$

Означенню 10.6. Назвемо ковектор (вектор) $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ протилежним ковектору $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, якщо

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}} \quad (10.5)$$

Очевидно, то в якості протилежного ковектору $\vec{a}$ може виступати, наприклад, ковектор $\vec{b} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) = (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

МАТРИЦІ.

Означення 10.7. Назвемо матрицею упорядковану таблицю чисел. Формально і будемо позначати такими символами:

$$\boxed{A = \left(a_{ij} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \left\| a_{ij} \right\|_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =} \quad (10.6)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n)$$

$$\text{де } \vec{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), \quad \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці, як видно з формули (10.6), позначаються символами a_{ij} , де перший індекс - номер рядка, а другий - номер стовпчика, на перетині яких знаходиться елемент.

Якщо число рядків співпадає з числом стовпчиків і це число дорівнює n , то матрицю називають квадратною порядку n ; якщо це не так, то матриця прямокутна порядку m, n .

Назвемо матрицю нульовою, якщо всі її елементи дорівнюють 0, і позначатимемо її символом O .

Примітка. Матрицею можна вважати також і число (квадратна матриця першого порядку), і вектор, і ковектор.

Якщо у матриці A рядки і стовпчики поміняти місцями, то отримаємо транспоновану матрицю A^T , а сама операція має назву "транспонування".

ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЕЮ.

Означення 10.8. Назвемо добутком скаляра α на матрицю $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ таку

матрицю $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \alpha \times A$, що

$$b_{ij} = \alpha \times a_{ij} \quad (10.7)$$

Означення 10.9. Назвемо додатком двох матриць $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ та $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

таку матрицю $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = A + B$, що

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (10.8)$$

Властивості лінійних операцій над матрицями:

1. Додавати можна лише матриці однієї якості і порядку.
2. $(\alpha \times \beta)A = \alpha(\beta \times A)$ - асоціативність по скалярах.
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ - дистрибутивність по скалярах.
4. $A + B = B + A$ - комутативність.
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ - дистрибутивність по матрицях.
6. $(A + B) + C = A + (B + C)$ - асоціативність.

Неважко пересвідчитись у виконанні і таких властивостей:

$A + \mathbf{O} = A$	$0 \times A = \mathbf{O}$
----------------------	---------------------------

(10.9)

Означення 10.10. Назвемо матрицю $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ протилежною матриці $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, якщо

$A + B = \mathbf{O}$

(10.10)

Очевидно, що в якості матриці, протилежної матриці A , може виступати матриця

$$(-1)A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix} = -A$$

ДОБУТОК МАТРИЦЬ.

Означення 10.11. Назвемо добутком ковектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ на вектор

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ число, що дорівнює}$$

$\vec{a} \times \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$

(10.11)

і задовольняє умовам

$(\alpha \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \times \vec{b}) = \alpha \times \vec{a} \times \vec{b}$
$(\vec{a} + \vec{x}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{x} \times \vec{b}$

(10.12)

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{x}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{x}$$

Означення 10.12. Назвемо добутком матриці $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix}$ на матрицю

$B = (b_{jk})_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,s}} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$, де $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ і $\vec{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$, матрицю

$C = (c_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,s}} = AB$, де

$$c_{ik} = \vec{a}_i \times \vec{b}_k \quad (10.13)$$

Властивості добутку матриць:

1. Не кожні дві матриці можна помножити одна на одну: треба, щоб кількість стовпчиків у першого чинника співпадав з кількістю рядків у другого.
2. У матриці добутку буде стільки рядків, скільки їх у першого чинника A , і стовпчиків – скільки їх у другого чинника B .
3. $A \times B \neq B \times A$.
4. $(\alpha A) \times B = A \times (\alpha B) = \alpha \times (AB)$.
5. $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.

Означення 10.13. Назвемо квадратну матрицю

$$I = (\delta_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.14)$$

де $\delta = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера, *одиничною* матрицею.

Примітка. Неважко обчислити, що

$$I \times A = A \quad A \times I = A \quad (10.15)$$

(під I в обох випадках розглядаються одиничні матриці різної вимірності, а саме такої, щоб формули (10.15) мали сенс).

Означення 10.14. Матриці A та B , для яких виконується рівність

$$\boxed{A \times B = B \times A} \quad (10.16)$$

мають назву *переставних*.

Очевидно, що

$$A^k \times A^s = A^s \times A^k = A^{k+s}$$

$$A \times \mathbf{O} = \mathbf{O} \times A = \mathbf{O}$$

Приклад 10.1. Знайти добуток ковектора $\vec{a} = (1 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \quad 3)$ на вектор $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. $\vec{a} \times \vec{b} = 3 - 2 + 3 = 4$.

Приклад 10.2. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ та $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Розв'язок. } A \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+14+3 \\ 1+7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Приклад 10.3. Знайти добуток матриць $\vec{a} = (1 \quad 4 \quad -5 \quad 2 \quad 1)$ та $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язок.

$$\vec{a} \times B = (1 \quad 4 \quad -5 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = (3-4-10+4 \quad 1+4-5-2+1) = (-7 \quad -1).$$

Приклад 10.4. Знайти добуток матриць $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ та $\vec{b} = (3 \ 5 \ -2 \ 3 \ 8 \ 4 \ 1)$.

Розв'язок.

$\vec{a}$

$\times$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} (3 \ 5 \ -2 \ 3 \ 8 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 33 & 55 & -22 & 33 & 88 & 44 & 11 \\ -3 & -5 & 2 & -3 & -8 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & -4 & 6 & 16 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 10.5. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. $A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & -2 \\ 2 & 13 & 3 \end{pmatrix}.$

Приклад 10.6. Нехай $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Знайти A^k .

Розв'язок. Знайдемо

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Можна ще обчислити:

$$A^5 = \begin{pmatrix} \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 \\ 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 \\ 0 & 0 & \lambda^5 \end{pmatrix}.$$

Очевидна закономірність, яка дає нам формулу:

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & (\lambda^k)' & \frac{(\lambda^k)''}{2!} \\ 0 & \lambda^k & (\lambda^k)' \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad (10.17)$$

Приклад 10.7. Знайти $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{83}$.

Розв'язок. Згідно з формулою (10.17)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{83} = \begin{pmatrix} 1 & 83 & 3403 \\ 0 & 1 & 83 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Примітка. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ зветься клітинкою Жордана третього порядку.

Приклад 10.8. Знайти $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Розв'язок. Обчислимо спочатку

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad (10.18)$$

Приклад 10.9. Знайти $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^8$.

Розв'язок. Згідно з формулою (10.18)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 256 \end{pmatrix}.$$

Означення 10.15. Назвемо матрицю A^{-1} зворотною до матриці A , якщо

$$\boxed{A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I} \quad (10.19)$$

Із формули (10.19) витікає, що матриця, яка має зворотну, повинна бути квадратною, тобто квадратність матриці є необхідною умовою існування зворотної матриці.

Крім того, з цієї ж формули витікає, що прямокутні матриці не мають зворотних.

Означення 10.16. Квадратна матриця, що має зворотну, називається *невиродженою*.

ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ.

Означення 10.17. Назвемо *лінійним простором* $\mathcal{L}$ множину елементів, на якій введено дві лінійні операції: множення на скаляр αx ($x \in \mathcal{L}$, α – скаляр) і додавання $x + y$, ($x, y \in \mathcal{L}$), що задовольняють слідуючим аксіомам:

1. $(\alpha \times \beta) \times x = \alpha \times (\beta \times x)$ – асоціативність по скалярах.
2. $(\alpha + \beta) \times x = \alpha \times x + \beta \times x$ – дистрибутивність по скалярах.
3. $x + y = y + x$ – комутативність.
4. $\alpha \times (x + y) = \alpha \times x + \alpha \times y$ – дистрибутивність по елементах.
5. $(x + y) + z = x + (y + z)$ – асоціативність.
6. $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{L}$ (нульовий елемент) такий, що $0 + x = x \ \forall x \in \mathcal{L}$
7. $\forall x \in \mathcal{L} \ \exists y \in \mathcal{L}$ такий, що $x + y = \mathbf{0}$, y – протилежний x елемент.
8. $1 \times x = x$.

Елементи лінійних просторів прийнято називати векторами.

ПРИКЛАДИ ЛІНІЙНИХ ПРОСТОРІВ.

1. Пряма, що проходить через початок координат, площина, що проходить через початок координат, фізичний тривимірний простір. Будемо позначати ці простори символами E^1, E^2, E^3 .

2. Множина поліномів ступеня не вище n . Будемо позначати її символом

$$P_n(x) = \{f(x): a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n\}.$$

Дійсно, якщо $g(x) \in P_n(x)$ і

$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$$

$$\begin{aligned}\alpha f(x) &= (\alpha a_0)x^n + (\alpha a_1)x^{n-1} + \dots + (\alpha a_{n-1})x + \alpha a_n = \\ &= c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_{n-1}x + c_n\end{aligned}$$

тобто $\alpha f(x) \in P_n$

$$\begin{aligned}f(x) + g(x) &= (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})x + (a_n + b_n) = \\ &= d_0x^n + d_1x^{n-1} + \dots + d_{n-1}x + d_n\end{aligned}$$

тобто $f(x) + g(x) \in P_n$.

Відомо із шкільного курсу, що операції множення полінома на скаляр і додавання поліномів, як їх введено вище, задовольняють всім потрібним аксіомам. Під нульовим поліномом будемо розуміти поліном

$$O(x) = 0 \times x^n + 0 \times x^{n-1} + \dots + 0 \times x + 0.$$

3. Множина прямокутних матриць, в яких m рядків та n стовпчиків, яку позначатиме символом $M_{m \times n} = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \right\}$. Дійсно, в результаті множення такої матриці на скаляр та додавання матриць з цієї множини отримаємо матрицю з цієї ж множини, а виконання Аксіом 1-8 витікає з властивостей лінійних операцій над матрицями.

4. Як частинний випадок лінійного простору $M_{m \times n}$ можна розглядати арифметичні простори

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^n &= M_{1 \times n} & \mathbf{R}^n &= M_{n \times 1} \\ \mathbf{C}^n &= M_{1 \times n} & \mathbf{C}^n &= M_{n \times 1}\end{aligned}$$

Приклад 10.6. Довести, що в лінійному просторі нульовий вектор всього один.

Доведення. При доведенні істинності якогось факту чи об'єкту звичайно користуються так званим методом "від супротивного", тобто вважають, що факт чи об'єкт не єдиним і доводять неспроможність цього твердження. Таким чином, вважатимемо, що нульовий елемент з лінійного простору $\mathcal{L}$ не один, а два: O і $\tilde{O}$, і до того ж $O \neq \tilde{O}$. В наслідок того, що O і $\tilde{O}$ – нульові елементи, виконується рівність:

$$\forall x \in \mathcal{L}: O + x = x \text{ і } \tilde{O} + x = x.$$

Виберемо для першої рівності $x = \tilde{O}$. Тоді $O + \tilde{O} = \tilde{O}$. Аналогічно в другій рівності візьмемо $x = O$, що приведе до $\tilde{O} + O = \tilde{O}$. Співставивши дві рівності, отримаємо, що $\tilde{O} = O$, чого не може бути. Отже нульовий елемент в лінійному просторі один.

Приклад 10.7. Довести, що в лінійному просторі у кожного вектора тільки один протилежний.

Доведення. Скористуємось тим же методом "від супротивного". Нехай у вектора x є два протилежні і нерівні між собою вектори y та $\tilde{y}$: $y \neq \tilde{y}$ і

$$x + y = O \quad (10.18)$$

$$x + \tilde{y} = O \quad (10.19)$$

Розглянемо вираз $x + y + \tilde{y}$. З одного боку, враховуючи (10.18): $x + y + \tilde{y} = O + \tilde{y} = \tilde{y}$, а враховуючи (10.19): $x + y + \tilde{y} = y + O = y$. Отже ми прийшли до рівності $y = \tilde{y}$, тобто до протиріччя.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

1. Означення арифметичних просторів $\mathbf{R}^n$ та $\mathbf{C}^n$.
2. Означення лінійних операцій в арифметичних просторах.
3. Властивості лінійних операцій в $\mathbf{R}^n$ та $\mathbf{C}^n$.
4. Означення нульового елемента в $\mathbf{R}^n$ чи $\mathbf{C}^n$.
5. Означення протилежного елементу $\bar{a}$ елемента в арифметичному просторі.
6. Означення вектора і ковектора.
7. Означення матриці та її символічний запис.
8. Лінійні операції над матрицями.
9. Чи кожен матрицю можна додавати до другої?
10. Властивості лінійних операцій над матрицями.
11. Означення нульової матриці.
12. Означення протилежної до матриці A .
13. Означення добутку матриць.
14. Означення одиничної матриці.
15. Означення переставних матриць.
16. Властивості добутку матриць.
17. Чи будуть переставними матриці A^k та A^s .
18. Означення зворотної матриці.
19. Означення невиродженої матриці.

20. Означення лінійного простору.
21. Чи існує два нульових елементи в лінійному просторі?
22. Чи існує два протилежних елементи у одного елемента лінійного простору.
23. Чи буде утворювати лінійний простір множина поліномів ступеню ні більше двох?
24. Чи утворює лінійний простір множина квадратних матриць?
25. Чи буде лінійним простором множина прямокутних матриць?

ВПРАВИ ДО ВИКОНАННЯ.

1. Знайти ковектор $3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$, якщо $\vec{a} = (-1, 2, 3, 4)$, $\vec{b} = (0, 1, 3, 8)$, $\vec{c} = (1, 1, 5, -1)$.
2. Знайти вектор $5\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, якщо

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти ковектор $2\vec{a} + 2i\vec{b} - 4\vec{c}$, якщо $\vec{a} = (i, 1+3i, -i, 2-i)$, $\vec{b} = (i, -i, i, -i)$, $\vec{c} = (1+i, 1-i, i, -i)$.
4. Знайти $\vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (3, 1, -5, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, 0, 7)$.

$$5. \text{ Знайти } A^{10}, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. \text{ Знайти } A^k, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

$$7. \text{ Знайти } A^{20}, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$8. \text{ Знайти } A^{10}, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$9. \text{ Знайти } A^{101}, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти A^{147} , якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Знайти A^{581} , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

12. Знайти $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ -7 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Знайти $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

14. Знайти $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

15. Обчислити матрицю $2A_1 + 3A_2 - A_3$, якщо

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Довести, що матриці $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ переставні і що $A = B^{-1}$.

17. Знайти A^T , якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

18. Чи буде множина векторів $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, що задовольняє рівності

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

лінійним простором?

ЛЕКЦІЯ 11.

ЛІНІЙНІ ПІДПРОСТОРИ. ЛІНІЙНІ ОБОЛОНКИ

Нові терміни:

лінійний підпростір	- линейное подпространство	- linear subspace
лінійна комбінація	- линейная комбинация	- linear combination
тривіальний	- тривиальный	- trivial
лінійно незалежна система	- линейно независимая система	- linear independent system
лінійно залежна система	- линейно зависимая система	- linear dependent system
лінійна оболонка	- линейная оболочка	- linear envelope
повна система в лінійному просторі	- полная система в линейном пространстве	- full system in the linear space

Питання, що розглядатимуться в лекції.

1. Лінійний підпростір.
2. Лінійно залежні і незалежні системи векторів.
3. Лінійні оболонки.

Означення 11.1. Назвемо лінійним підпростором лінійного простору $\mathcal{L}$ таку його підмножину $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$, що $\forall x, y \in \mathcal{L}_1$ виконуються умови

$$\alpha x \in \mathcal{L}_1, x + y \in \mathcal{L}_1 \quad (11.1)$$

Неважко довести, що кожний лінійний підпростір є лінійним простором.

Приклад 11.1. Довести, що підмножина $\mathcal{L}_1$ лінійного простору $\mathcal{L}$ що складається з одного нульового елементу, тобто $\mathcal{L}_1 = \{O\}$, є лінійний підпростір.

Доведення.

$$\alpha O = O \in \mathcal{L}_1, O + O = O \in \mathcal{L}_1.$$

Приклад 11.2. Довести, що множина $\mathcal{L}_1$ всіх векторів з $\mathbf{R}^n$, додаток координат яких дорівнює 0, тобто

$$\mathfrak{L}_1 = \{ \bar{x} \in \mathbf{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \}$$

є лінійний підпростір.

Доведення. Нехай $\bar{x}, \bar{y} \in \mathfrak{L}_1$. Тоді

$$\begin{aligned} \alpha \bar{x} &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n &= \alpha (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \alpha \times 0 = 0, \\ \bar{x} + \bar{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_n + y_n &= \\ &= x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Таким чином, $\mathfrak{L}_1$ – лінійний підпростір $\mathbf{R}^n$.

Приклад 11.3. Довести, що множина $\mathfrak{L}_1$ квадратних матриць третього порядку, додаток елементів якої, що стоять на головній діагоналі, дорівнює нулю, тобто:

$$\mathfrak{L}_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \right\},$$

є лінійний підпростір лінійного простору квадратних матриць третього порядку.

Доведення. Обчислимо діагональні елементи матриць αA та αB , де

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{31} & b_{33} \end{pmatrix}, \text{ та } b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0,$$

та їх додатки.

$$\begin{aligned} \alpha A &= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}, \\ \alpha a_{11} + \alpha a_{22} + \alpha a_{33} &= \alpha (a_{11} + a_{22} + a_{33}) = 0. \end{aligned}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix},$$

$$a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + a_{33} + b_{33} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0$$

Отже $\alpha A, (A + B) \in \mathfrak{L}_1$. Таким чином, $\mathfrak{L}_1$ – лінійний підпростір простору квадратних матриць третього порядку.

Приклад 11.4. Довести, що множина $\mathfrak{L}_1$ симетричних квадратних матриць третього порядку, тобто

$$\mathfrak{L}_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, 3 \right\}$$

є лінійним підпростором лінійного простору квадратних матриць третього порядку.

Доведення. Нехай $A, B \in \mathfrak{L}_1$, тобто $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1,2,3}$ і $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$.

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{i,j=1,2,3}, \quad \alpha a_{ij} = \alpha a_{ji}$$

$\Downarrow$

$$\alpha A \in \mathfrak{L}_1$$

$\Downarrow$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1,2,3} = (a_{ji} + b_{ji})_{i,j=1,2,3}$$

$\Downarrow$

$$(A + B) \in \mathfrak{L}_1.$$

Таким чином $\mathfrak{L}_1$ – лінійний підпростір $M_{3 \times 3}$.

Приклад 11.5. Довести, що множина $\mathfrak{L}_1$ поліномів $f(x)$ ступеню не більше n , таких, що $f(1) = 0$, є лінійний підпростір $P_n(x)$.

Доведення. Нехай

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n,$$

і

$$\alpha f(x) = (\alpha a_0) x^n + (\alpha a_1) x^{n-1} + \dots + (\alpha a_{n-1}) x + \alpha a_n,$$

$$\alpha f(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 + \dots + \alpha a_{n-1} + \alpha a_n = \alpha (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) = 0,$$

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) x^n + (a_1 + b_1) x^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1}) x + (a_n + b_n),$$

$$f(1) + g(1) = a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + \dots + a_{n-1} + b_{n-1} + a_n + b_n =$$

$$= a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n + b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1} + b_n = 0 + 0 = 0.$$

Таким чином $\mathfrak{L}_1$ – лінійний підпростір $P_n(x)$.

Означення 11.2. Назвемо лінійною комбінацією системи векторів (елементів) $a_1, a_2, \dots, a_n$ із лінійного простору $\mathfrak{L}$ вектор b такий, що

$$\boxed{b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n} \quad (11.2)$$

Приклад 11.6. Знайти лінійну комбінацію векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ з $\mathbf{R}^n$, де

$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\dots,m.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} \\ \alpha_1 a_{21} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 a_{12} \\ \alpha_2 a_{22} \\ \vdots \\ \alpha_2 a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_m a_{1m} \\ \alpha_m a_{2m} \\ \vdots \\ \alpha_m a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m \alpha_k a_{1k} \\ \sum_{k=1}^m \alpha_k a_{2k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m \alpha_k a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = A \vec{\alpha}. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\vec{b} = A \vec{\alpha}, \text{ де } A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_m), \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Примітка. Якщо $m = n$ і розглянути $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (на k -му місці 1, всі інші – 0), то

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Приклад 11.7. Знайти лінійну комбінацію матриць:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} B &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Означення 11.3. Назвемо лінійну комбінацію векторів з лінійного простору $\mathbb{F}$ *тривіальною*, якщо всі коефіцієнти, за допомогою яких вона визначається, дорівнюють 0.

Означення 11.4. Назвемо систему векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ із лінійного простору $\mathbb{F}$ *лінійно незалежною* (л.н.з.), якщо тільки тривіальна лінійна комбінація цих векторів дорівнює нулю (нуль-вектору із $\mathbb{F}$). Факт лінійної незалежності можна записати формально: $a_1, a_2, \dots, a_m$ – л.н.з., якщо

$$\boxed{\sum_{k=1}^m \alpha_k a_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^m |\alpha_k| = 0} \quad (11.3)$$

Означення 11.5. Назвемо систему векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ із лінійного простору $\mathbb{F}$ *лінійно залежною*, якщо існує якась нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, що дорівнює 0, тобто $\sum_{k=1}^m \alpha_k a_k = 0 \Rightarrow$ існує набір $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ такий, що

$$\boxed{\sum_{k=1}^m |\alpha_k| \neq 0} \quad (11.4)$$

тобто хоч один із коефіцієнтів не дорівнюватиме 0.

Приклад 11.8. Знайти необхідну умову для лінійної залежності системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ з $\mathbf{R}^n$.

Розв'язок. Скористаємося результатами Прикладу 11.6.

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad A \vec{\alpha} = \vec{0}.$$

Якщо система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ лінійно залежна, то існує такий вектор $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, для якого виконується умова $A \vec{\alpha} = \vec{0}$.

Приклад 11.9. Довести, що система векторів

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{одиниця на } k\text{-му місці}), \dots, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

з $\mathbf{R}^n$ лінійно незалежна.

Доведення. Обчислимо лінійну комбінацію цих векторів і прирівнюємо її нульовій матриці.

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

і інших значень нема. Таким чином система векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ з $\mathbf{R}^n$ лінійно незалежна.

Приклад 11.10. Довести, що система матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

лінійно незалежна.

Доведення. Обчислимо лінійну комбінацію цих матриць і прирівняємо її нульовій матриці.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

і інших значень нема. Таким чином A_1, A_2, A_3 – лінійно незалежна система.

Приклад 11.11. Довести, що два не колінеарні вектори на площині, чи в просторі, завжди лінійно незалежні.

Доведення. Нехай $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ – не колінеарні, тобто не виконується рівність

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Обчислимо лінійну комбінацію цих векторів і прирівняємо її $\vec{0}$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2, \alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3) = \\ &= (0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 = 0 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 = 0 \\ \alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Якщо $\alpha_1 \neq 0$, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Але такого не може бути. Якщо $\alpha_2 \neq 0$, то

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Знов протиріччя. Отже $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ і два не колінеарні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ завжди незалежні.

Теорема 11.1. Система векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ із лінійного простору $\mathbb{F}$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоч один із векторів цієї система є лінійна комбінація інших.

Доведення цієї теореми пропонується провести самостійно.

Приклад 11.12. Довести, то три некомпланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні.

Доведення. Покажемо, що жоден з векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не може бути лінійною комбінацією інших. Дійсно, якщо хоч один з цих векторів є лінійна комбінація двох інших, то він лежить в площині, "натягнутій" на ці вектори, тобто всі три вектори лежатимуть в одній площині, що протирічить умові некомпланарності. Теорема ж 11.1 дає достатню умову лінійної незалежності системи векторів, тобто якщо жоден з них не може бути

лінійною комбінацією інших, система лінійно незалежна. Отже три некомпланарні вектори в просторі завжди лінійно незалежні.

Приклад 11.13. Довести, то система векторів із лінійного простору, що має в своєму складі нульовий вектор, лінійно залежна.

Доведення. Нехай $\mathcal{L}$ – лінійний простір і $a_1, a_2, \dots, a_m, O$ – його вектори. Очевидно що

$$O = 0 \times a_1 + 0 \times a_2 + \dots + 0 \times a_m$$

(зліва в рівності стоїть нульовий вектор, з правого боку 0 – числа). Таким чином нульовий вектор завжди можна записати як тривіальну лінійну комбінацію будь-яких векторів, що доводить, згідно Теорема 11.1, лінійну залежність системи векторів, що утримує нульовий вектор.

Теорема 11.2. Якщо якийсь вектор b із лінійного простору $\mathcal{L}$, розкладено в лінійну комбінацію лінійно незалежних векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ із цього ж простору, тобто

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m,$$

то такий розклад однозначний.

Доведення цієї теореми пропонується провести самостійно.

Приклад 11.14. Система векторів a_1, a_2, a_3, a_4 із лінійного простору лінійно незалежна.

Довести, що система векторів

$$b_1 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4,$$

$$b_2 = y_1 a_1 + y_2 a_2 + y_3 a_3,$$

$$b_3 = z_1 a_1 + z_2 a_2,$$

$$b_4 = t a_1,$$

(де x_k, y_k, z_k, t – скаляри, $k = 1, 2, 3, 4$, відмінні від 0) теж лінійно незалежна.

Доведення. Обчислимо лінійну комбінацію векторів b_1, b_2, b_3, b_4 і прирівняємо її до нуля.

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \alpha_4 b_4 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1 + \alpha_4 t) a_1 + (\alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 z_2) a_2 + (\alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3) a_3 + \alpha_1 x_4 a_4 = 0$$

Але система a_1, a_2, a_3, a_4 – лінійно незалежна. Тому:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1 + \alpha_4 t = 0 \\ \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 z_2 = 0 \\ \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 = 0 \\ \alpha_1 x_4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

Таким чином, система векторів b_1, b_2, b_3, b_4 лінійно незалежна.

Приклад 11.15. Довести, що система поліномів $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = x^3$ лінійно незалежна.

Доведення. Згідно стандартного методу побудуємо лінійну комбінацію заданих поліномів і прирівняємо її нульовому поліномові.

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) + \alpha_4 f_4(x) &= 0 \\ \Downarrow \\ \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 &= 0 \quad \forall x \\ \Downarrow \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

Отже система $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = x^3$ лінійно незалежна.

Означення 11.6. Назвемо *лінійною оболонкою* системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ із лінійного простору $\mathcal{L}$ множину їх лінійних комбінацій.

Формально лінійну оболонку цих векторів будемо позначати символом $\Lambda(a_1, a_2, \dots, a_m)$, тобто

$$\Lambda(a_1, a_2, \dots, a_m) = \{b \in \mathcal{L}: b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m\} \quad (11.5)$$

Приклад 11.16. Довести, що лінійна оболонка системи поліномів $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2$ є лінійний простір поліномів ступеню не вище 2, тобто $P_2(x)$.

Доведення.

$$\begin{aligned} \Lambda(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) &= \\ &= \{f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x)\} = \\ &= \{f(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2\}. \end{aligned}$$

Приклад 11.17. Знайти лінійну оболонку матриць:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Користуючись результатами Прикладу 11.7, отримаємо

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) = M_{2 \times 2}.$$

Приклад 11.18. Знайти лінійну оболонку системи векторів:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Скористаємося результатами Прикладу 11.6, отримаємо

$$\Lambda(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = \left\{ \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right\} = \mathbf{R}^n.$$

Означення 11.7. Назвемо систему векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ із лінійного простору $\mathcal{L}$ повною в $\mathcal{L}$, якщо її лінійна оболонка співпадає з $\mathcal{L}$, тобто якщо

$$\boxed{\Lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathcal{L}} \quad (11.6)$$

З прикладів 11.13, 11.14, 11.15 видно, що вказані там системи векторів будуть повними у відповідних просторах.

Примітка. Повними в лінійних просторах можуть бути як лінійно незалежні системи, так і лінійно залежні.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

1. Означення лінійного підпростору.
2. Навісти приклади лінійних підпросторів.
3. Означення лінійної комбінації векторів.
4. Означення тривіальної лінійної комбінації векторів.
5. Означення нетривіальної лінійної комбінації векторів.
6. Означення лінійно незалежної системи векторів.
7. Означення лінійно залежної системи векторів.
8. Означення лінійної оболонки системи векторів.
9. Означення повної в просторі системи векторів.
10. Чи витікає з лінійної незалежності системи векторів її повнота в просторі?
11. Чи обов'язкова вимога лінійної незалежності для повноти системи?
12. Привести приклади повних лінійних просторів систем.
13. Чи буде система поліномів $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = x^3$ повною в $P_3(x)$?

14. Чи буде система $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$ повною в $\mathbf{R}^4$?
15. Чи буде система матриць
- $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- лінійно залежною?
16. Чи будуть лінійно залежними два неколінеарних вектори в E^2 чи E^3 ?
17. Чи будуть лінійно залежними три некомпланарних вектори?
18. Як виглядає лінійна комбінація векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ з $\mathbf{R}^n$?
19. Привести приклад лінійно незалежної системи поліномів $P_2(x)$.
20. Привести приклад системи лінійно незалежних матриць в $M_{3 \times 3}$.

ВПРАВИ ДО ВИКОНАННЯ.

- Довести, що $\mathcal{L}_1 = \{\vec{a} \in \mathbf{R}^n : \vec{a} = (0, a_2, \dots, a_n)\}$ є лінійний підпростір $\mathbf{R}^n$.
- Довести, що $\mathcal{L}_1 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ є лінійний підпростір $\mathbf{R}^n$.
- Довести, що $\mathcal{L}_1 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n : x_{2k} = 0, k = 1, 2, \dots\}$ є лінійний підпростір $\mathbf{R}^n$.
- Довести, що $\mathcal{L}_1 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n : \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0\}$ є лінійний підпростір $\mathbf{R}^n$.
- Довести, що $\mathcal{L}_1 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ є лінійний підпростір $\mathbf{R}^n$.
- Довести, що

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ A \in M_{m \times m} : A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

є лінійний підпростір $M_{m \times m}$.

- Довести, що $\mathcal{L}_1 = \{A \in M_{m \times m} : a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \dots, m\}$ – множина симетричних матриць – є лінійний підпростір $M_{m \times m}$.
- Довести, що $\mathcal{L}_1 = \{A \in M_{m \times m} : a_{ij} = -a_{ji}, i, j = 1, 2, \dots, m\}$ – множина косиметричних матриць – є лінійний підпростір $M_{m \times m}$.
- Довести, що $\mathcal{L}_1 = \left\{ A \in M_{m \times n} : \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = 0 \right\}$ є лінійний підпростір $M_{m \times n}$.
- Довести, що

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ A \in M_{m \times n} : A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right\}$$

є лінійний підпростір $M_{m \times n}$.

11. Довести, що система поліномів $f_1(x) = x - 1$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = x^2$, – лінійно незалежна.

12. Перевірити, чи буде лінійно незалежною система векторів $\vec{a}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{a}_2 = (3, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, 5, 0)$.

13. Довести, що система матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

лінійно незалежна.

14. Довести, що система векторів $a_1 + a_2$, $a_1 - a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, лінійно незалежна, якщо система a_1, a_2, a_3 лінійно незалежна.

15. Довести, що система векторів $a, 2a, b, c$ – лінійно залежна.

16. Довести, що система поліномів

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \frac{x^2}{2!}, \quad f_4(x) = \frac{x^3}{3!}$$

повна у $P_3(x)$.

17. Довести, що система матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

повна у $M_{2 \times 2}$.

18. Довести, що система векторів

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

лінійно незалежна і повна у $\mathbf{R}^n$.

19. Довести, що кожна підсистема лінійно незалежної системи векторів лінійно незалежна.

20. Довести, що якщо до повної лінійно незалежної системи додати декілька векторів, вона залишиться лінійно незалежною.

21. Довести, що у лінійно залежної системи може бути підсистема.

22. Знайти лінійну оболонку матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

23. Знайти лінійну оболонку поліномів $f_1(x) = x - 1, f_2(x) = x + 1$.

24. Знайти лінійну оболонку векторів

$$\vec{a}_1 = (2, 0, 0)^T, \quad \vec{a}_2 = (0, 1, 0)^T, \quad \vec{a}_3 = (1, 1, 1)^T.$$

ЛЕКЦІЯ 12-13.

ЛІНІЙНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ ПРОСТОРІВ.

ЕКВІВАЛЕНТНІ СИСТЕМИ.

БАЗИСИ І ВИМІРНІСТЬ ЛІНІЙНИХ ПРОСТОРІВ.

РАНГ МАТРИЦІ ТА ЙОГО ОБЧИСЛЕННЯ.

Нові терміни:

лінійна залежність	- линейная зависимость	- linear dependence
еквівалентні системи	- эквивалентные системы	- equivalent systems
максимальна лінійно незалежна система	- максимальная линейно независимая система	- maximal linear independent system
база системи	- база системы	- base of systems
ранг системи	- ранг системы	- rang of system
базис лінійного простору	- базис линейного пространства	- base of linear space
вимірність	- размерность	- dimension
ранг матриці	- ранг матрицы	- rang of matrix
елементарні перетворення	- элементарные преобразования	- elementary transformation

Питання, що розглядаються в лекції.

1. Лінійна залежність систем векторів одна від одної, база та ранг системи.
2. Еквівалентні системи векторів.
3. Базис та вимірність лінійного простору. Координати векторів.
4. Ранг матриці та його обчислення.

Означення 12.1. Будемо казати, що *система векторів* $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ із лінійного простору $\mathcal{L}$ *лінійно залежить від системи* $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ того ж простору, якщо кожен з векторів a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) є лінійна комбінація векторів B , тобто

$$a_k = x_{1k} b_1 + x_{2k} b_2 + \dots + x_{mk} b_m \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (12.1)$$

де x_{ik} – числа, $i = 1, 2, \dots, m$. Формально цей факт будемо позначати символом $A \prec B$. Лінійна залежність однієї системи від іншої має такі властивості:

- а) якщо $A \prec B$, $B \prec C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, тоді $A \prec C$ – транзитивність;
- б) $A \prec A$ – рефлексивність.

Означення 12.2. Будемо казати, що матриця

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

характеризує залежність $A \prec B$.

Приклад 12.1. Довести, що система векторів $\vec{a}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{a}_2 = (3, 0, -1)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 5)$ лінійно залежить від системи $\vec{b}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{b}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{b}_3 = (0, 0, 1)$ і знайти характеризуючи цю залежність матрицю X .

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3; \\ \vec{a}_2 &= 3\vec{b}_1 - \vec{b}_3; \\ \vec{a}_3 &= 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + 5\vec{b}_3; \end{aligned} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 12.2. Довести, що система матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

лінійно залежить від системи матриць

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} A_1 &= 4B_1 + 2B_2 + 3B_3 - B_4; \\ A_2 &= 5B_1 + 3B_2 + 11B_3 + 4B_4; \\ A_3 &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4; \end{aligned} \quad X = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 11 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 12.3. Довести, що система поліномів

$$f_1(x) = x^2 + 4x - 1, \quad f_2(x) = 3x^2 - x + 2, \quad f_3(x) = 7x + 3, \quad f_4(x) = x^2 - 1$$

лінійно залежить від системи поліномів

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = x, \quad g_3(x) = x^2.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -g_1(x) + 4g_2(x) + g_3(x); \\ f_2(x) &= 2g_1(x) - g_2(x) + 3g_3(x); \\ f_3(x) &= 3g_1(x) + 7g_2(x); \\ f_4(x) &= -g_1(x) + g_3(x); \end{aligned} \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 12.1. Якщо системи векторів з лінійного простору A , B , C пов'язані співвідношенням $A \prec B$, $B \prec C$, відповідають характеризуючи матриці X та Y , відповідно, то залежності $A \prec C$ відповідає матриця $Z = YX$.

Означення 12.3. Якщо мають місце співвідношення між системами векторів A та B із лінійного простору $A \prec B$, $B \prec A$, то ці системи мають назву еквівалентних, що позначатимемо символом $A \sim B$.

Співвідношення еквівалентності має такі властивості:

- а) $A \sim A$;
- б) $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$;
- в) $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Приклад 12.4. Довести, що система векторів з E^3

$$A = \{\vec{a}_1 = (1, 1, 1); \quad \vec{a}_2 = (1, 1, 0); \quad \vec{a}_3 = (1, 0, 0)\}$$

та

$$B = \{\vec{b}_1 = (1, 0, 0); \quad \vec{b}_2 = (0, 1, 0); \quad \vec{b}_3 = (0, 0, 1)\}$$

еквівалентні.

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 &= \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \\ \vec{a}_3 &= \vec{b}_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{матриця, що характеризує } A \prec B.$$

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= \vec{a}_3 \\
\vec{b}_2 &= \vec{a}_2 - \vec{a}_3 \\
\vec{b}_3 &= \vec{a}_1 - \vec{a}_2
\end{aligned}
\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \text{матриця, що характеризує}$$

$$B \prec A.$$

Отже $A \sim B$.

Приклад 12.5. Довести, що системи матриць

$$A = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

та

$$B = \left\{ B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

еквівалентні.

Доведення.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2} B_1 \\
A_2 &= \frac{1}{2} (B_2 + B_3) \\
A_3 &= -\frac{1}{2} (B_2 - B_3)
\end{aligned}
\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= 2A_1 \\
B_2 &= A_2 - A_3 \\
B_3 &= A_2 + A_3
\end{aligned}
\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто $A \sim B$.

Приклад 12.6. Довести еквівалентність систем векторів $A = \{a, b, c\}$ та $B = \{a - b + c, a + b + c, a - c\}$.

Доведення.

$$\begin{aligned}
a &= x_{11} (a - b + c) + x_{21} (a + b + c) + x_{31} (a - c), \\
b &= x_{12} (a - b + c) + x_{22} (a + b + c) + x_{32} (a - c), \\
c &= x_{13} (a - b + c) + x_{23} (a + b + c) + x_{33} (a - c),
\end{aligned}
\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{а)} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ -x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{11} + x_{21} - x_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = x_{21} \\ 2x_{11} + x_{31} = 1 \\ 2x_{21} - x_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{31} = \frac{1}{2} \\ x_{21} = \frac{1}{4} \\ x_{11} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{б)} \quad \begin{cases} x_{12} + x_{22} + x_{32} = 0 \\ -x_{12} + x_{22} = 1 \\ x_{12} + x_{22} - x_{32} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{12} = x_{22} - 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{22} = \frac{1}{2} \\ x_{12} = -\frac{1}{2} \\ x_{32} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{в)} \quad \begin{cases} x_{13} + x_{23} + x_{33} = 0 \\ -x_{13} + x_{23} = 0 \\ x_{13} + x_{23} - x_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{13} = x_{23} \\ x_{13} + x_{23} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{13} = x_{23} = \frac{1}{2} \\ x_{33} = -1 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриця Y , що відповідає залежності $B \prec A$, має вигляд

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже $A \sim B$.

Приклад 12.7. Довести, що система поліномів $A = \{f_1(x) = 1; f_2(x) = x\}$ та $G = \{g_1(x) = x - 1; g_2(x) = x + 1; g_3(x) = 2x + 3\}$ еквівалентні.

Доведення.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}(g_2(x) - g_1(x)) \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}(g_2(x) + g_1(x)) \end{aligned} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f_2(x) - f_1(x) \\ g_2(x) &= f_2(x) + f_1(x) \\ g_3(x) &= 2f_2(x) + 3f_1(x) \end{aligned} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже $F \sim G$.

Означення 12.4. Назвемо лінійно незалежну підсистему $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ системи векторів $A_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_m\}$ *максимальною*, якщо

додавання до неї якогось вектора з системи A перетворює її на лінійно залежну, тобто $a_1, a_2, \dots, a_s$ – лінійно незалежна і $a_1, a_2, \dots, a_s, a_k$ – лінійно залежна ($k = 1, 2, \dots, m$).

Означення 12.5. Максимальну лінійно незалежну підсистему системи векторів звичайно називають *базою системи*.

Приклад 12.8. Довести, що кожен вектор системи векторів

$$A_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_m\}$$

Лінійно розкладається за її базою

$$A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$$

і такий розклад однозначний.

Доведення. Внаслідок того, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_s, a_k$ – лінійно залежна існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, що дорівнює нульовому вектору, тобто

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s + \beta a_k = 0 \quad (12.3)$$

Покажемо, що коефіцієнт $\beta \neq 0$. Якби

$$\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s = 0.$$

Внаслідок лінійної незалежності векторів бази всі коефіцієнти $\alpha_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, s$) і лінійна комбінація, що стоїть в лівій частині буде тривіальна. Отже не тривіальність її може бути досягнуто тільки за рахунок того, що $\beta \neq 0$. Поділивши ліву і праву частини рівності (12.3) на β , отримаємо

$$a_k = -\frac{\alpha_1}{\beta} a_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} a_2 - \dots - \frac{\alpha_s}{\beta} a_s.$$

Єдність розкладу витікає з Теорема 11.2. Отже $A \prec A_1$.

Теорема 12.2. Лінійна оболонка бази системи векторів співпадає з оболонкою всієї системи.

Довести самостійно як наслідок Прикладу 12.8.

Означення 12.6. Назвемо кількість елементів, що входять до бази системи векторів A , її *рангом* і формально будемо позначати $\text{rang } A$.

Теорема 12.3. Якщо дві системи векторів A та B пов'язані співвідношенням $A \prec B$, то $\text{rang } A \leq \text{rang } B$.

Теорема 12.4. Ранги еквівалентних, систем векторів співпадають, тобто

$$A \sim B \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } B.$$

Означення 12.7. Назвемо *базисом лінійного простору* його базу, тобто максимальну лінійно незалежну систему векторів в ньому.

ВЛАСТИВОСТІ БАЗИСУ ЛІНІЙНОГО ПРОСТОРУ.

Базис в лінійному просторі обирається неоднозначне. Всі базиси еквівалентні між собою. Кожний вектор лінійного простору є лінійна комбінація базисних векторів, тобто розкладається за базисом і такий розклад однозначний.

Означення 12.8. Коефіцієнти розкладу вектору із лінійного простору називаються *його координатами*. В різних базисах координати різні (окрім координат нульового вектору).

Означення 12.9. Кількість елементів базису лінійного простору $\mathcal{L}$, тобто ранг базису, називається *вимірністю лінійного простору* і позначається символом $\dim \mathcal{L}$. Вимірність лінійного простору не залежить від вибору базису внаслідок рівності рангів еквівалентних систем.

Приклад 12.9. Довести, що базис лінійного простору – повна система в ньому.

Доведення Хай $\mathcal{L}$ – лінійний простір, а система $a_1, a_2, \dots, a_n$ – його базис. Треба показати, що $\Lambda(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – лінійна оболонка, базису – співпадає з $\mathcal{L}$. Той факт, що $\Lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) \subseteq \mathcal{L}$ витікає з властивостей лінійного простору (лінійні операції не виводять за границі $\mathcal{L}$). Той факт, що $\mathcal{L} \subseteq \Lambda(a_1, a_2, \dots, a_n)$ витікає з Прикладу 12.8. Отже базис – повна лінійно незалежна, систем а векторів в лінійному просторі.

Приклад 12.10. Довести, що система векторів

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

є базис в $\mathbf{R}^n$ і обчислити $\dim \mathbf{R}^n$.

Доведення. З Прикладу 11.6 витікає, що ця система лінійно незалежна, а з того, що кожен вектор $\vec{x}$ з $\mathbf{R}^n$ можна розкласти за цією системою

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

– її повнота.

Приклад 12.11. Довести, що система матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є базис в $M_{2 \times 2}$.

Доведення. З Прикладу 11.14 витікає повнота системи A_1, A_2, A_3, A_4 в $M_{2 \times 2}$.

Доведемо її лінійну незалежність.

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

тобто система A_1, A_2, A_3, A_4 – лінійно незалежна.

Приклад 12.12. Довести, що система поліномів

$$f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, \dots, f_{n+1}(x) = x^n$$

є базис в $P_n(x)$.

Доведення. Спочатку доведемо, що система лінійно незалежна.

$$\begin{aligned} & \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_{n+1} f_{n+1}(x) = \\ & = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{n+1} x^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Повнота системи витікає з того, що для довільного полінома

$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n = b_n f_1(x) + b_{n-1} f_2(x) + \dots + b_0 f_{n+1}(x).$$

Приклад 12.13. Обчислити $\dim \mathbf{R}^n$.

Розв'язок. Базисом в $\mathbf{R}^n$ може бути система $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, наведена в Прикладі

12.8. Отже $\dim \mathbf{R}^n = n$.

Приклад 12.14. Обчислити $\dim M_{2 \times 2}$.

Розв'язок. З результату Прикладу 12.11 витікає, що $\dim M_{2 \times 2} = 4$.

Приклад 12.15. Обчислити $\dim P_n(x)$.

Розв'язок. З результату Прикладу 12.12 витікає, що $\dim P_n(x) = n + 1$.

Приклад 12.16. Обчислити $\dim \mathcal{L}$, якщо $\mathcal{L} = \{ \vec{x} \in \mathbf{R}^n : x_1 + x_2 = 0 \}$.

Розв'язок. Якщо $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, то $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. З того, що $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, витікає, що $-x_1 = x_2$,

тобто

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Це доводить, що система векторів

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dots, \quad \vec{a}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

повна в $\mathcal{L}$. Доведемо, що вона лінійно незалежна, для чого обчислимо її лінійну лінійну комбінацію векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Якщо $\vec{x} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, тобто вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ — лінійно незалежні і є базисом в $\mathcal{L}$. Звідси $\dim \mathcal{L} = n - 1$.

Примітка. Вимірність підпростору, що складається з одного нульового вектора прийнято вважати рівною 0.

Приклад 12.17. Нехай

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, a_n\} \text{ і } B = \{a_1, a_2, \dots, \alpha a_m, \dots, a_n\}$$

(α — число) — дві системи векторів. Довести, що $\text{rang } A = \text{rang } B$.

Доведення. Очевидно, що системи A і B — еквівалентні, бо вектор системи A можна записати як лінійну комбінацію векторів з B і навпаки, а ранги еквівалентних систем співпадають.

Приклад 12.18. Нехай

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, a_n\} \text{ і } B = \{a_1, a_2, \dots, a_m + \alpha a_k, \dots, a_n\}$$

($k = 1, \dots, n; k \neq m$) – дві системи векторів. Довести, що $\text{rang } A = \text{rang } B$.

Доведення. Очевидно, що $B \prec A$ і $A \prec B$, тобто $A \sim B$. Отже $\text{rang } A = \text{rang } B$.

Означення 12.10. Операції над векторами системи, які полягають в множенні якогось з векторів цієї системи на скаляр чи додавання до якогось з векторів системи іншого (інших) називаються елементарними перетвореннями системи.

Теорема 12.5. Елементарні перетворення векторів системи не міняють її рангу.

РАНГ МАТРИЦІ.

Означення 12.11. Назвемо *рангом матриці* ранг системи його рядків.

Теорема 12.6. Ранг системи рядків дорівнює рангові системи стовпчиків.

Теорема 12.7. Якщо в матриці деякі рядки чи стовпчики помінять місцями, то ранг не зміниться.

Теорема 12.8. Якщо в системі векторів з арифметичного простору $\mathbf{R}^n$ чи $\mathbf{C}^n$ кількість векторів перевищує n , то така, система, лінійно залежна.

Теорема 12.9. Якщо в системі векторів з довільного лінійного простору кількість векторів перевищує вимірність простору, то така система лінійно залежна.

Пояснення до використання Теорем 12.7, 12.8.

З Теорема 12.8 одразу витікає без усяких обчислень, що, наприклад, система ковекторів $\bar{a}_1 = (1, -1, 121, 530)$, $\bar{x}_2 = (312, 11, 121, 17)$, $\bar{x}_3 = (0, 211, 503, 400)$, $\bar{x}_4 = (1, 17, 19, 28)$, $\bar{x}_5 = (3, 7, 1, 5)$ – лінійно залежна (вектори з $\mathbf{R}^4$, а їх 5).

З Теорема 12.9 одразу витікає, що наприклад система матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} -12 & 309 \\ 5 & 117 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 211 & 100 \\ -13 & 28 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 283 & 11 \\ -17 & 21 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 503 & 702 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 111 & 12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

лінійно залежна (кожна з матриць належить до $M_{2 \times 2}$, $\dim M_{2 \times 2} = 4$, а матриць 5).

Приклад 12.19. Обчислити ранг трапецієподібної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr-1} & a_{rr} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr-1} & a_{mr} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (12.4)$$

якщо $a_{ii} \neq 0; i = 1, \dots, r$.

Розв'язок. Доведемо, що перші r стовпчиків матриці A лінійно незалежні. В силу того, що інші стовпчики нульові, перші r стовпчиків – це база всіх стовпчиків матриці, і ранг її дорівнюватиме r . Використаємо стандартний прийом: запишемо лінійну комбінацію перших r стовпчиків і прирівняємо її нулю.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_r \vec{a}_r &= \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{r1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{r2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{rr} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} \\ \alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} \\ \dots \\ \alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + \alpha_3 a_{m3} + \dots + \alpha_r a_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 a_{11} = 0 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} = 0 \\ \alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + \alpha_3 a_{m3} + \dots + \alpha_r a_{mr} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \dots \\ \alpha_r = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Отже перші r стовпчики лінійно незалежні і $\text{rang } A = r$.

Приклад 12.20. Привести матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

до трапецієподібного вигляду шляхом елементарних і обчислити її ранг.

Розв'язок. Зафіксуємо перший стовпчик, а далі за допомогою елементарних перетворень отримаємо замість всіх стовпчиків, починаючи з другого, стовпчика, перша координата яких буде нульова. Цього можна досягти, віднімаючи від кожного з них перший стовпчик, помножений на відповідне число. Так замість другого запишемо другий мінус перший, помножений на 2; замість третього - третій мінус перший, помножений на 3; замість четвертого - четвертий мінус перший помножений на 4; замість п'ятого - п'ятий мінус перший, помножений на 5. Отримаємо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$\text{rang } A = \text{rang } A_1$. Очевидно, що $\text{rang } A_1 = 2$. В цьому можна переконатись, залишивши перші два стовпчики без змін (вони відповідають потрібному вигляду), а замість всіх інших - їх різницю з другим стовпчиком. Тоді отримаємо матрицю

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rang } A = \text{rang } A_1 = \text{rang } A_2 = 2$.

Приклад 12.21. Обчислити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. Поміняємо місцями перший та третій рядки.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 7 & 6 \\ -3 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -4 \\ -3 & 9 & 11 & 20 \\ -1 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \\ -3 & 11 & 9 & 20 \\ -1 & 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

Далі перший і другий стовпчики залишаємо без змін, а замість третього запишемо третій плюс другий, помножений на 5; замість четвертого – четвертий плюс другий, помножений на 4.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 11 & 64 & 64 \\ -1 & 2 & 17 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 11 & 64 & 0 \\ -1 & 2 & 17 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } A = 3.$$

Приклад 12.22. Обчислити вимірність лінійної оболонки, натягнутої на систему ковекторів

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (-1, 2, 3, 1, 1), & \bar{a}_2 &= (1, 3, 0, 1, 1), \\ \bar{a}_3 &= (-1, 7, 6, 3, 3), & \bar{a}_4 &= (-1, 12, 9, 5, 5). \end{aligned}$$

Розв'язок. Вимірність лінійної оболонки за означенням повинна співпадати з рангом системи $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$. Ранг системи цих ковекторів співпадає з рангом матриці, рядками якої є $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$. Обчислимо його.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ -1 & 12 & 9 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Одразу видно, що четвертий стовпчик співпадає з п'ятим. Тому ранг цієї матриці співпадає з рангом матриці

$$\begin{aligned} A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 6 & 3 \\ -1 & 12 & 9 & 5 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 10 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\sim \text{rang } A = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim \Lambda(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4) = 2. \end{aligned}$$

Приклад 12.23. Знайти вимірність лінійної оболонки системи поліномів

$$f_1(x) = 3 + x, \quad f_2(x) = x^2 + x + 1, \quad f_3(x) = x - 1, \quad f_4(x) = 3x^2 - x + 2.$$

Розв'язок. Серед поліномів присутні тільки поліноми, ступеню не вище 2. Розглянемо лінійний простір $P_2(x)$ і виберемо в ньому базис $g_1(x) = 1, g_2(x) = x, g_3(x) = x^2$. Тоді кожному з системи можна співставити рядок з коефіцієнтів розкладу по базису – рядок з координат.

$$\begin{aligned} f_1(x) &\leftrightarrow \bar{f}_1 = (3, 1, 0) \\ f_2(x) &\leftrightarrow \bar{f}_2 = (1, 1, 1) \\ f_3(x) &\leftrightarrow \bar{f}_3 = (-1, 1, 0) \\ f_4(x) &\leftrightarrow \bar{f}_4 = (2, -1, 3) \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \dim \Lambda(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)) = \dim \Lambda(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \text{rang}(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)) = \text{rang}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4) = \\
&= \text{rang} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & 11 \end{pmatrix} = \\
&\quad 3
\end{aligned}$$

Приклад 12.24. Знайти вимірність $\Lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$, якщо

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Кожну матрицю, як упорядкований набір чисел, можна вважати „довгим” вектором, тобто

$$A_1 \leftrightarrow (1, 7, 1, 0) = \tilde{a}_1$$

$$A_2 \leftrightarrow (1, 0, 2, 0) = \tilde{a}_2$$

$$A_3 \leftrightarrow (2, 7, 3, 0) = \tilde{a}_3$$

$$A_4 \leftrightarrow (4, 14, 6, 0) = \tilde{a}_4$$

$$\begin{aligned}
&\dim \Lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) = \dim \Lambda(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4) = \\
&= \text{rang} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \\ \tilde{a}_4 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 14 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang} \\
&\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2.
\end{aligned}$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

1. Що означає формальний запис

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \prec B = \{b_1, b_2, \dots, b_s\},$$

де a_k, b_j - вектори лінійного простору?

2. Як утворюється матриця, що характеризує лінійну залежність однієї системи векторів від другої?

3. Які властивості співвідношення?

4. Означення еквівалентних систем векторів.
5. Означення максимальної лінійно незалежної підсистеми системи векторів.
6. Означення бази системи векторів.
7. Як пов'язані вектори системи із базою системи?
8. Як пов'язана система векторів із своєю базою?
9. Означення рангу системи векторів.
10. Як пов'язані ранги еквівалентних систем?
11. Означення базису лінійного простору.
12. Означення вимірності лінійного простору.
13. Чи один базис з лінійному просторі?
14. Чи залежить вимірність від обраного базису?
15. Означення координат вектора. Чому дорівнює вимірність $\mathbf{R}^n$?
16. Означення рангу матриці.
17. Як пов'язані ранги системи рядків і системи стовпчиків у матриці?
18. Чи може система векторів з $\mathbf{R}^n$, яка складається з m векторів, мати ранг, що дорівнює m при $m > n$?
19. Чи може ранг системи з 5 поліномів ступеню не більше 2 дорівнювати 4?
20. Як обчислюється вимірність лінійної оболонки системи векторів з $\mathbf{R}^n$?

ВПРАВИ ДО ВИКОНАННЯ.

1. Довести, що системи векторів

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{a}_2 = (1, 1, 0), \quad \vec{a}_3 = (1, 1, 1)$$

та

$$\vec{b}_1 = (0, 1, 0) \quad \vec{b}_2 = (1, 0, -1), \quad \vec{b}_3 = (1, 2, 3)$$

еквівалентні.

2. Довести, що система поліномів

$$f_1(x) = 2, \quad f_2(x) = x^2 - 1, \quad f_3(x) = x + 1$$

та

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = 2x^2 + 1, \quad g_3(x) = x$$

еквівалентні.

3. Знайти матрицю, що характеризує лінійну залежність системи матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

від

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Знайти матрицю залежності системи поліномів

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^3$$

від системи поліномів

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = (x-1), \quad g_3(x) = \frac{(x-1)^2}{2!}, \quad g_4(x) = \frac{(x-1)^3}{3!}.$$

5. Довести, що система векторів з E^3

$$A = \{\vec{a}_1 = (1, 0, 1), \quad \vec{a}_2 = (0, 1, -1), \quad \vec{a}_3 = (-1, 1, 0)\}$$

та

$$B = \{\vec{b}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{b}_2 = (1, 1, 0), \quad \vec{b}_3 = (1, 0, 0)\}$$

еквівалентні.

6. Довести еквівалентність систем векторів

$$A = \{a-b, \quad a+b, \quad a+b+c\}$$

та

$$B = \{2a+3b, \quad -a+3b, \quad a=b-c\}$$

7. Довести, що система векторів

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 1), \quad \vec{a}_2 = (1, 1, 0), \quad \vec{a}_3 = (1, 1, 1)$$

буде максимальною лінійною системою векторів в системі

$$A = \{\vec{a}_1, \quad \vec{a}_2, \quad \vec{a}_3, \quad \vec{a}_4 = (2, 1, -1), \quad \vec{a}_5 = (0, 1, 1)\}.$$

8. Знайти базу в системі матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Знайти базу в системі поліномів

$$f_1(x) = 3, \quad f_2(x) = 1, \quad f_3(x) = x, \quad f_4(x) = x+1, \quad f_5(x) = (x-1)^2, \quad f_6(x) = x^2, \quad f_7(x) = x^2 + 1$$

10. Обчислити ранг системи матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Знайти вимірність і привести приклад базису в лінійному підпросторі

$$\mathcal{L} = \{ \vec{x} \in \mathbf{R}^n : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \}.$$

12. Знайти вимірність і привести приклад базису в лінійній оболонці поліномів

$$f_1(x) = 2, \quad f_2(x) = x - 1, \quad f_3(x) = x + 3.$$

13. Знайти вимірність і привести приклад базису в лінійній оболонці матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

14. Довести, що система ковекторів

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{a}_2 = (1, 0, 0, 0), \quad \vec{a}_3 = (1, 1, 1, 0), \quad \vec{a}_4 = (1, 1, 1, 1),$$

може бути базисом в $\mathbf{R}^4$.

15. Довести, що система поліномів

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = (x - 1), \quad f_3(x) = \frac{(x - 1)^2}{2}, \quad f_4(x) = \frac{(x - 1)^3}{6}.$$

є базис $P_3(x)$.

16. Навести приклад базису і обчислити вимірність $M_{2 \times 3}$.

17. Навести приклад базису і обчислити вимірність $P_5(x)$.

18. Навести приклад базису і обчислити вимірність $M_{3 \times 5}$.

19. Обчислити вимірність і привести приклад базису в множині симетричних квадратних матриць n – того порядку $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$; $a_{ij} = a_{ji}$.

20. Обчислити вимірність і привести приклад базису в множині кососиметричних матриць n – того порядку $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$; $a_{ij} = -a_{ji}$.

21. Обчислити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

22. Обчислити $\dim \Lambda(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x))$, якщо

$$f_1(x) = 3 + 2x, \quad f_2(x) = 2x - 1, \quad f_3(x) = x^2 - x + 1, \quad f_4(x) = x^2 + 2x + 3.$$

23. Обчислити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. Обчислити $\dim \Lambda(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4, \tilde{a}_5)$, якщо

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1 &= (1, -1, 1, 1, 1), & \tilde{a}_2 &= (1, 1, 1, 1, 1), & \tilde{a}_3 &= (0, -1, 0, 1, 0), \\ \tilde{a}_4 &= (2, -1, 2, 3, 2), & \tilde{a}_5 &= (0, -2, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

25. Обчислити $\dim \Lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$, якщо

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}.$$