НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

«На правах рукопису»
УДК 517.9

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри
__________ Дудкін М. Є.
(підпис)

“23” березня 2018 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Метод усереднення в задачах оптимального керування імпульсними системами»

Виконала: студентка VI курсу, групи ОМ-61м
Денисова Юлія Володимирівна __________
(підпис)

Науковий керівник: професор кафедри диф. рівнянь, доктор фізико-математичних наук, професор
Станжицький О. М. __________
(підпис)

Рецензент: доктор фізико-матемтичних наук, професор (КНУ ім. Шевченка)
Капустян О.В. __________
(підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент (-ка) ______________
(підпис)

Київ – 2018 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою
Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ Дудкін М.Є.

« 23 » березня 2018 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Денисовій Юлії Володимирівні

1. Тема дисертації: «Метод усереднення в задачах оптимального керування імпульсними системами»,
науковий керівник дисертації: Станжицький Олександр Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор,
затверджені наказом по університету від «23» березня 2018 р. № 1016-с

2. Термін подання студентом дисертації 4 травня 2018 р.

3. Об’єкт дослідження: керовані системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

4. Предмет дослідження: застосування методу усереднення до задач оптимального керування імпульсними системами

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) ознайомитися з літературою, в якій досліджується теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією
2) дослідити метод усереднення в задачах оптимального керування системами диференціальних рівнянь
3) обґрунтувати застосування методу усереднення до задач оптимального керування імпульсними системами

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 12 слайдів

7. Орієнтовний перелік публікацій: немає

8. Дата видачі завдання 5 лютого 2018 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Взяття завдання та вивчення теоретичних відомостей про диференціальні рівняння з імпульсною дією	5.02.2018 – 19.02.2018	Виконала
2.	Дослідження систем, які піддаються імпульсній дії у фіксовані моменти часу	19.02.2018 – 05.03.2018	Виконала
3.	Дослідження методу усереднення в задачах оптимального керування системами диференціальних рівнянь	05.03.2018 – 19.03.2018	Виконала
4.	Застосування отриманих результатів до імпульсних систем	19.03.2018 – 9.04.2018	Виконала
5.	Обґрунтування застосування методу усереднення до задач оптимального керування імпульсними системами, доведення теореми	9.04.2018 – 23.04.2018	Виконала
6.	Аналіз та перевірка отриманих результатів. Підготовка магістерської дисертації.	23,04.2018 – 04.05.2018	Виконала

Студент _____________ Денисова Ю. В.
(ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації _____________ Станжицький О. М.

Реферат

Магістерська дисертація виконана на 64 сторінках.

Актуальність цієї дисертаційної роботи полягає у вивченні задач оптимального керування із застосуванням методу усереднення, а саме запропоновано більш просту та наглядну процедуру усереднення, при цьому множина допустимих керувань початкової та усередненої задач співпадають.

Мета дослідження – встановлення умов близькості розв'язків точних та відповідних усереднених імпульсних систем в стандартний за Боголюбовим формі.

Об'єкт дослідження – керовані системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Предмет дослідження – застосування методу усереднення до задач оптимального керування імпульсними системами.

Методи дослідження – в роботі використовуються методи теорії диференціальних рівнянь, теорії оптимального керування та теорія усереднення.

Наукова новизна – в роботі вперше отримано наступні результати

1) доведено твердження про близькість розв'язків точних та відповідних усереднених систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією;
2) знайдено умови, при яких оптимальне керування усередненої задачі є η-оптимальним для точної задачі у нелінійному випадку.

Практичне значення отриманих результатів полягає в можливості їх застосування до розв'язання задач оптимального керування реальними процесами.

Ключові слова: оптимальне керування, імпульсні системи, метод усереднення

Реферат

Магистерская диссертация выполнена на 63 страницах.

Актуальность этой магистерской работы заключается в изучении задач оптимального управления с использованием метода усреднения, а именно предложено более наглядную и простую процедуру усреднения, при этом множество допустимых управлений начальной и усредненной задачи совпадают.

Цель исследования – определение условий близости решений точных и соответствующих усредненных импульсных систем в стандартной за Боголюбовым форме.

Объект исследования – управляемые системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Предмет исследования – применение метода усреднения к задачам оптимального управления импульсными системами.

Методы исследования – в работе используются методы теории дифференциальных уравнений, теории оптимального оправления и теория усреднения.

Научная новизна – в работе впервые получено следующие результаты:

1) доказано утверждение про близость решений точных и соответствующих усредненных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием;
2) найдены условия, при которых оптимальное управление усредненной задачи является η-оптимальным для точной задачи в нелинейном случае.

Практическое значение полученных результатов заключается в возможности их применения для решения задач оптимального управления реальными процессами.

Ключевые слова: оптимальное управление, импульсные системы, метод усреднения.

Abstract

Master's thesis performed at 64 pages

The urgency of this master's thesis is to study the problems of optimal control using the method of averaging, namely, more vivid and simple averaging procedure is suggested, while the number of admissible controls of the initial and averaged task coincide.

The purpose of the study is to determine the proximity conditions of solutions of exact and corresponding averaged pulsed systems in the standard Bogolyubov form.

The object of the study is controlled systems of differential equations with impulse effect.

The subject of the study is the application of the averaging method to the tasks of optimal control of impulse systems.

Methods of investigation - in the work were used methods of the theory of differential equations, the theory of optimal refinement and the theory of averagin.

Scientific novelty - the following results were obtained for the first time:

1) the assertion about the proximity of solutions of exact and corresponding averaged systems of differential equations with impulse action is proved;

2) conditions under which the optimal control of the averaged problem is η-optimal for the exact problem in the nonlinear case were found.

The practical significance of the results obtained is the possibility of their application for solving the problems of optimal control of real processes.

Keywords: optimal control, impulse systems, averaging method.

Зміст

Вступ

Одним з найбільш поширених методів аналізу нелінійних динамічних систем є метод усереднення. Для систем звичайних диференціальних рівнянь він був обґрунтований Боголюбовим. В подальшому даний метод узагальнювався на різні класи диференціальних рівнянь, наприклад, імпульсні, функціонально-диференціальні та інші. Метод усереднення виявився також ефективним і до розв’язування задач оптимального керування.

Відомий метод усереднення по часу, що явно входить в праві частини системи, вважаючи функцію керування u параметром, далі при дослідженні усередненої системи розглядаються ті ж керування, що і для початкової задачі. Таким чином, множина керувань u для початкової і усередненої задач співпадає, при цьому не вимагається, щоб u була компактом.

У даній роботі вказаний результат перенесено на системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Важливо при цьому відзначити, що на відміну від вихідної системи, усереднена є вже автономною системою звичайних диференціальних рівнянь — об’єктом значно простішої природи, ніж система диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Основним результатом роботи є встановлення зв’язку між оптимальним керуванням усередненої та точної систем, а саме доводиться, що оптимальне керування усередненою системою є η-оптимальним для точної системи.

Розділ 1. Системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

1.1. Опис математичної моделі

Нехай М – фазовий простір деякого еволюційного процесу, тобто множина всіх можливих станів процесу. Позначимо через $x(t)$ точку, яка відображає стан даного процесу в момент t. Відносно процесу припустимо, що він є скінченновимірним, тобто для опису його стану в фіксований момент часу потрібно скінченне число, наприклад n параметрів. При такому припущенні точку $x(t)$ при кожному фіксованому значенні t можна інтерпретувати як n-вимірний вектор евклідового простору R^n, а M - вважати множиною з R^n. Топологічний добуток $M \times R$ фазового простору M і дійсної осі R назвемо розширеним фазовим простором еволюційного процесу. Нехай закон еволюції процесу, який ми розглядаємо, задається:

а) системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \;\; x \in M, \;\; t \in R; \tag{1.1.1}$$

б) деякою множиною J_t, заданою в розширеному фазовому просторі;

в) оператором A_t, який заданий на множині J_t і відображає її на множину $J'_t = A_t J_t$ розширеного фазового простору.

Сам процес відбувається наступним чином: зображуюча точка $P_t = \big(t, x(t)\big)$, виходячи з точки $(t_0; x_0)$, рухається вздовж кривої $\{t, x(t)\}$, яка визначається розв'язком $x(t) = x(t,\ t_0,\ x_0)$ системи рівнянь (1.1.1). Рух вздовж цієї кривої здійснюється до моменту часу $t = t_1 > t_0$, в якій точка $\big(t, x(t)\big)$ зустрічається з множиною J_t (попадає в точку множини J_t). В момент часу $t = t_1$ точка P_t «миттєво» перекидається оператором A_t з положення $P_{t_1} = (t_1; x(t_1))$ в положення $P_{t_1}^{+} = A_{t_1} P_{t_1} = \big(t_1; x^{+}(t_1)\big) \in J'_{t_1}$ і рухається далі вздовж кривої $\{t, x(t)\}$, яка визначається розв'язком $x(t) = x(t,\ t_1,\ x^{+}(t_1))$ системи рівнянь

(1.1.1). Рух вздовж цієї кривої здійснюється до моменту часу $t_2 > t_1$, в якій точка P_t знову зустрічається з множиною J_t. В цей момент під дією оператора A_t точка P_t «миттєво» перескакує з положення $P_{t_2} = (t_2; x(t_2))$ в $P_{t_2}^{+} = A_{t_2}P_{t_2} = \big(t_2; x^{+}(t_2)\big) \in J'_{t_2}$ і рухається далі вздовж кривої $\{t, x(t)\}$, яка визначається розв'язком $x(t) = x(t,\ t_2,\ x^{+}(t_2))$ системи рівнянь (1.1.1), до нової зустрічі з множиною J_t і т.д.

Сукупність співвідношень а) - в), що характеризують еволюцію процесу, назвемо системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Криву $\{t, x(t)\}$, що описана точкою P_t в розширеному фазовому просторі, назвемо інтегральною кривою, а функцію $x = x(t)$, яка задає цю криву, розв'язком цієї системи.

Систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією, тобто сукупність співвідношень а) – в), напишемо в більш компактній формі:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ \ (t,x)\ \in\ J_t \\ &\Delta x|_{(t;x)\in\, J_t} = A_t x - x \end{aligned} \qquad (1.1.2)$$

Таким чином, розв'язок системи рівнянь (1.1.2) $x = \varphi(t)$ це функція, що задовольняє рівнянню (1.1.1) поза множиною J_t і що має розриви першого роду в точках J_t зі стрибками

$$\Delta x = \ \varphi(t+0) - \varphi(t-0) = A_t\, \varphi(t-0) - \varphi(t-0) \qquad (1.1.3)$$

Апріорі розв'язки рівнянь (1.1.2) можуть бути:

1) такими, що не піддавались миттєвій зміні – інтегральна крива системи рівнянь (1.1.1) в цьому випадку не перетинала множину J_t або перетинала її в нерухомих точках оператора A_t;

2) такими, що піддавались миттєвій зміні скінченну кількість разів – інтегральна крива перетинає множину J_t в скінченній кількості точок, які не являються нерухомими точками оператора A_t;

3) такими, що піддавались миттєвій зміні злічену кількість разів - інтегральна крива перетинає множину J_t в зліченій кількості точок, які не являються нерухомими точками оператора A_t;

Серед розв'язків, інтегральні криві яких з множиною J_t мають злічену кількість спільних точок, виділимо розв'язки, які поглинаються множиною J_t (залишаються в J_t починаючи з деякого моменту $t_1 > t_0$), або мають точку згущання. Рух траєкторією, яка поглинається множиною J_t, представляє собою, починаючи з деякого моменту $t_1 > t_0$, послідовні перекидання зображуючої точки P_t з положення $(t_1; x_1)$ в положення $(t_1; A_{t_1}x_1)$, з нього в $(t_1; A_{t_1}^2 x_1)$, потім в $(t_1; A_{t_1}^3 x_1)$ і т.д. Рух траєкторією, що має в J_t точку згущення, представляє собою рух, який при наближенні до деякого моменту злічену кількість разів зустрічає і залишає множину J_t, а отже його не можна продовжити до моменту $t = t_1$. В реальних процесах, які описуються таким рухом, в околі точки $t = t_1$ відбувається виникнення якісно нового руху, або ж фізична умова, що обумовила таких тип руху, при наближенні до точки $t = t_1$ стає нереалістичною і має бути замінена на іншу фізичну умову.

При розгляді систем з імпульсною дією виникають ті ж задачі, що і для звичайних диференціальних рівнянь, однак існують і специфічні задачі. Характер цих задач в значній мірі залежить від властивостей оператора A_t. Так, якщо A_t не припускати однозначним, то виникають задачі, зв'язані з дослідженням рухів, при яких зображуюча точка може «миттєво» розщеплюватися на декілька точок в момент зустрічі з множиною J_t. Якщо не припускати A_t взаємно відповідним, то можна розглядати задачі, пов'язані з рухами, при яких точки, рухаючись незалежно, «миттєво» зливаються в одну в момент зустрічі з J_t. Не менш специфічні задачі виникають, якщо припустити, що множина $A_t\mathfrak{M}_t$ для деякого $\mathfrak{M}_t \in J_t$ порожня.

Таке припущення дозволяє розглядати «смертні» системи: зображуюча точка P_t , потрапивши в $\mathfrak{M}_t$, переводиться оператором A_t у порожню множину, тобто «вмирає» за Вожелем, а $\mathfrak{M}_t$ служить як би множиною «загибелі» траєкторій. Для вказаних систем природні задачі про середній час життя точки, що рухається, про ймовірність її «загибелі» за час $t_0 \leq t \leq T$ и т.п.

Нажаль, різноманіття систем диференціальних рівнянь, які описують еволюцію процесу в період між двома послідовними попаданнями зображуючої точки в множину J_t, різноманіття множин J_t і відображень $A_t: J_t \to J'_t$ не дозволяють глибоко класифікувати системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією за їх властивостями. В залежності від характеру імпульсної дії виділяють три істотно різних класи систем рівнянь: 1) системи, які піддавались імпульсній дії в фіксовані моменти часу; 2) системи, які піддавались імпульсній дії в момент попадання зображуючої точки P_t на задані поверхні $t = \tau_i(x)$ розширеного фазового простору; 3) розривні динамічні системи.

1.2. Системи, які піддаються імпульсній дії у фіксовані моменти часу

Якщо реальний процес, що описується системою рівнянь (1.1.1), піддається імпульсній дії у фіксовані моменти часу, то математичною моделлю даного процесу є наступна система диференціальних рівнянь з імпульсною дією:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \;\; t \neq \tau_i,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i,} = I_i(x). \tag{1.2.1}$$

В такій системі множиною J_t слугує послідовність гіперплощин $t = \tau_i$ розширеного фазового простору, де $\{\tau_i\}$ – задана послідовність (скінченна або нескінченна) моментів часу. Оператор A_i тут достатньо визначити тільки для $t = \tau_i$, тобто достатньо розглянути лише звуження його на гіперплощині $t = \tau_i$, $A_i: M \to M$, визначених виразами

$$A_i: x \to A_i x = x + I_i(x). \qquad (1.2.2)$$

Розв'язком рівнянь (1.2.1) є така кусково-неперервна функція $x = \varphi(t)$ з розривами першого роду при $t = \tau_i$, що $\psi(t) = f(t, \varphi(t))$ при всіх , $t \neq \tau_i$, яка задовольняє умові стрибка при $t = \tau_i$, тобто

$$\Delta\psi|_{t=\tau_i} = \varphi(\tau_i + 0) - \varphi(\tau_i - 0) = I_i(\varphi(\tau_i - 0)) \qquad (1.2.3)$$

В подальшому під значенням функції $\varphi(t)$ в точці t' будемо розуміти $\lim_{t \to t'-0} \varphi(t)$, тобто якщо τ_i – точка розриву першого роду функції $\varphi(t)$, то вважаємо, що $\varphi(t)$ неперервна зліва і покладаємо

$$\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_i - 0) = \lim_{t \to \tau_i - 0} \varphi(t) \qquad (1.2.4)$$

Наведемо деякі загальні теореми про властивості розв'язків систем рівнянь (1.2.1). Припустимо, що функція $f(t, x)$ визначена на всьому просторі $(t, x) \in R^{n+1}$; випадок, коли вона задана в деякій області цього простору, розглядається аналогічно. Крім того, припустимо також, що сукупність розв'язків системи рівнянь (1.1.1) має наступні властивості:

1 (не може бути продовжено). Кожен розв'язок $x(t)$ являє собою неперервну функцію, визначену на інтервалі $]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ своєму для кожного розв'язку; при цьому якщо $a > \infty$ $(b < \infty)$, то $\|x(a + 0)\| = \infty$ (відповідно $\|x(b - 0)\| = \infty$)

2 (локальний характер). Якщо деяка функція $x(t)$, $a < t < b$, задовольняє умову 1 і для кожного $t_0 \in]a, b[$ існує $\varepsilon > 0$, що на кожному з інтервалів $]t_0 - \varepsilon, t_0[$ і $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ функція $x(t)$ співпадає з деяким розв'язком, то $x(t)$ також буде розв'язком.

3 (розв'язуваність задачі Коші). Для довільних t_0, x_0 існує, принаймні, один розв'язок $x(t)$, $a < t < b$, для якого $a < t_0 < b$ і $x(t_0) = x_0$.

Ці вимоги, як і наступна вимога 4, виконуються, зокрема, для системи (1.1.1), права частина якої неперервна або задовольняє умовам Каратеодорі, а також для рівнянь в контингенціях при звичайних припущеннях. Оператори A_t, взагалі, не передбачаються однозначними, тобто $A_t x$ для довільного $x \in R^n$, і $i \in K$, являють собою деяку, можливо порожню підмножину R^n.

З означення системи з імпульсною дією і припущень про розв'язки системи (1.1.1) випливає теорема

Теорема 1.2.1. *Якщо розв'язки системи рівнянь (1.1.1) задовольняють умовам 1) – 3), то для довільних $t_0 \in R$, $x_0 \in R^n$ існує принаймні один розв'язок $x(t)$, $a < t < b$ системи з імпульсною дією (1.2.1), для якого $-\infty \le a < t_0 < b \le \infty$, $x(t_0) = x_0$ (при $t_0 < b$) або $x(t_0 - 0) = x_0$ (при $t_0 = b$), при цьому*

Якщо $a < -\infty$ то або $\|x(a+0)\| = \infty$, або $a = \tau_i$, $x(a+0)$ існує (як скінченна границя) і $x(a+0) \in A_i R^n$;

якщо $b < \infty$ то або $\|x(b-0)\| = \infty$, або $b = \tau_j$, $x(b-0)$ існує і $A_j x(b-0) = \emptyset$, де $\emptyset$ - порожня множина.

Такий розв'язок $x(t)$ не може бути продовженим.

При довільному $M \in R^n$ позначимо через $g(t, t_0)M$ множину значень $x(t)$ для всіх розв'язків системи (1.1.1), для яких $x(t_0) \in M$. Тоді аналогічна множина для розв'язків системи (1.2.1) має вигляд $G(t, t_0)M$, де відображення G при $t > t_0$ визначено формулою

$$\begin{gathered} G(t, t_0)M = g(t, \tau_i)A_i g(\tau_i, \tau_{i-1})A_{i-1} \ldots A_i g\left(\tau_j, t_0\right) M \\ (\tau_i < t < \tau_{i+1}, \qquad i = j-1, j, \ldots jj = min\{i | \tau_i \ge t_0\}) \end{gathered} \tag{1.2.5}$$

При цьому, якщо $t > t_0$, існує лише скінченне число моментів τ_i і $\tau_m = max\{\tau_i\}$, то формула (1.2.5) при $i = m$ справедлива для $\tau_m < t < \infty$; далі ми не будемо робити такої обмовки. При побудові розв'язків системи (1.2.1) в бік спадання t, тобто для $t < t_0$ справедлива аналогічна формула, в якій замість A_i

треба скористуватися природньо введеними відображеннями A_i^{-1} . Введення оператора $G(t,t_0)$ зсуву по траєкторії системи з поштовхами дає можливість очевидним способом переформулювати умови обмеженості, стійкості і т. д. розв’язків цієї системи в термінах властивостей цього оператора.

В якості зауваження до приведеної теореми відмітимо, що якщо додатково дано, що $A_i x \neq \emptyset$, то при $b < \infty$ буде $\|x(b-0)\| = \infty$. Якщо замість цього дано, що $A_i R^n = R^n$ $(i \in K)$, то при $a > -\infty$ буде $\|x(a+0)\| = \infty$. Випадок, коли $A_i x^* = \emptyset$ відповідає за Вожелем «загибелі» траєкторії, яка прийшла в точку x^* в момент τ_i; таким чином, множина $\{|x|A_j x = \emptyset\}$ слугує «множиною загибелі» траєкторії в момент τ_j.

Так, наприклад, розв’язок $x = f(t)$, $f(0) = 0$ рівняння з імпульсною дією

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad t \neq \tau_i, \qquad \Delta x|_{t=\tau_i} = \ln(2-x) \tag{1.2.6}$$

Де $\tau_i = i, i = 1,2,...$, не може бути продовжено на проміжок $[0,2]$ і момент $t = 2$ є моментом загибелі вказаного розв’язку. Дійсно, при $0 \leq t < 2$ цей розв’язок визначається рівнянням $x = \varphi(t) = t$ (при $t = \tau_1 = 1$), $\varphi(\tau_1) = 1$, тому при $t = \tau_1$ цей розв’язок не має розриву, тому що $\ln(2 - f(1)) = 0$. В момент часу $t = \tau_2 = 2$, $f(2) = 2$, і функція $\ln(2-x)$ в точці $x = f(2)$ не визначена, тому вказаний розв'язок в момент часу $t = \tau_2$ вмирає.

Теорема 1.2.2. *Для єдиності розв’язку задачі Коші для системи з імпульсною дією (1.2.1) в напрямку росту t при довільних початкових даних необхідно і достатньо, щоб система (1.1.1) мала ту ж саму властивість при довільних $t_0 \neq \tau_i$ і при довільному $t_0 = \tau_i$, $x_0 \in A_i R^n$, щоб кожна з множин $A_i x$ мала в собі не більш одного елементу. Для єдиності розв’язку задачі Коші для системи (1.2.1) в напрямку спадання t необхідно і достатньо, щоб система (1.1.1) мала* *ту саму властивість при довільному t_0 , і щоб кожна з множин ${A_i}^{-1}x$ мала в собі не більше однієї точки.*

Таким чином, навіть якщо розв'язок задачі Коші для системи (1.1.1) є єдиним, розв'язки системи з імпульсною дією можуть при своєму продовженні розщеплюватися або злипатися під дією операторів A_i.

Для необмеженого продовження всіх розв’язків системи (1.2.1) вперед (назад) у часі необхідно і достатньо, щоб розв’язки системи (1.1.1) мали цю властивість і щоб всі $A_i x \neq \emptyset$ (відповідно $A_i R^n = R^n$) при всіх $i \in K$. Не слід думати, що якщо розв’язок задачі Коші для системи рівнянь (1.1.1) не може бути продовжено, на проміжок $[t_0, t_0 + h], h > 0$, то і не може бути продовженим на цей проміжок розв’язок відповідної задачі Коші для системи рівнянь (1.2.1).

Так, наприклад, розв’язок $x = \varphi(t), \varphi(0) = 0$ рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$$

не може бути продовжено на інтервал $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (цей розв’язок встигає піти у нескінченність за скінченний час: $f(t) = tg(t \to \infty)$ при $t \to \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$). А якщо розглядати розв’язок $x = f(t)$, $f(0) = 0$ рівняння з імпульсною дією

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2, t \neq \tau_i, \Delta x|_{t=\tau_i} = -1, \tau_i = \frac{\pi i}{4},$$

то виявляється, що розв’язок може бути продовжений для всіх $t \geq 0$. Неважно переконатися, що цей розв’язок являє собою періодичну при $t \geq 0$ функцію з періодом $\frac{\pi}{4}$, яка при $t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ визначається рівнянням $f(t) = tg(t)$, тобто при $t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[$, $f(t) = tg(t - \frac{\pi i}{4})$.

Припустимо, що розв’язок системи (1.1.1) має додатково наступну властивість:

4 (локальна компактність). Для довільних t_0, x_0 існує таке $\varepsilon > 0$, що якщо $|\overline{t_0} - t_0| < \varepsilon$, $\|\overline{x_0} - x_0\| \leq \varepsilon$, то довільний розв’язок $x(t)$, для якого $x(t_0) = \overline{x_0}$

існує на відрізку $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon$, і сукупність цих розв'язків при фіксованих t_0, ε компактною (в себе) за метрикою $C\ [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

Припустимо також, що відображення A_i напів-неперервні зверху: при кожному i відображення A_i локально обмежено і з того, що $x_j \to \bar{x},\ \ A_i x_j \ni y_j \to \bar{y},\ j \to \infty$, випливає, що $\bar{y} \in A_i \bar{x}$.

Теорема 1.2.3. *Нехай при вказаних припущеннях і при заданих $t_0, x(t_0)$ і непорожньому компакті $K \subset R^n$ всі розв'язки системи (1.1.1), для яких $x(t_0) \ni K$, існує на деякому відрізку $t_0 \leq t \leq T,\ t_0 < T < \infty$. Тоді для деякого $\varepsilon > 0$ будь-який розв'язок $\bar{x}(t)$, яка задовольняє умову $\rho(\bar{x}(\bar{t}_0), K) \leq \varepsilon$, $|\bar{t}_0 - t_0| \leq \varepsilon$, існує на всьому відрізку $t_0 - \varepsilon \leq t \leq T$ і сукупність цих ров'язків при фіксованих t_0, K, T, ε компактно за метрикою рівномірних відхилень для розривних функцій. Якщо ж $t_0 = \tau_i$, то те ж саме справедливо при додатковій умові $\bar{t}_0 \leq t_0$.*

Відмітимо, що якщо $T = \tau_i$, то замість відрізка $[t_0 - \varepsilon, T]$ можна взяти відрізок $[t_0 - \varepsilon, T + \varepsilon]$. Щоб поширити теорему 1.2.3 на відрізок $T_1 \leq t \leq t_0$, $T_1 < t_0$, треба припустити, що навів-неперервність зверху відображень A_i^{-1}: при цьому замість відрізка $[t_0 - \varepsilon, T]$ буде мати участь відрізок $[T_1 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $t_0 \neq \tau_i$ або $[T_1 - \varepsilon, t_0]$, $t_0 = \tau_i$

Наслідок 1. *Якщо додатково дано, що розв'язок задачі Коші для системи (1.1.1) єдино, а відображення A_i взаємно відповідні, то розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ системи з імпульсною дією (1.2.1) неперервно залежить від $t_0 \neq \tau_i$, x_0 на кожному замкненому інтервалі осі t, на якому воно визначено; при $t_0 = \tau_i$ ця залежність неперервна зліва.*

Наслідок 2. *В умовах теореми 1.2.3 множина $G(t, t_0)K$, $t_0 \leq t \leq T$ є компактним при кожному t, неперервно залежить від $t_0 \neq \tau_i$, а при $t_0 = \tau_i$ ця залежність неперервна зліва і $G(\tau_i + 0, t_0)K = A_i G(\tau_i, t_0)K$. Залежність $G(t, t_0)K$ від K напів-неперервна зверху рівномірно по t. Якщо система (1.1.1)* *має властивість Кнезера зв'язності перерізу інтегральної воронки, всі множини* $A_i x$ *зв'язані і* K *зв'язано, то і множина* $G(t,t_0)K$ *при кожному* $t \in [t_0, T]$ *зв'язано.*

Точки спокою і поглинаючі множини.

Якщо не вимагати єдиності розв'язку задачі Коші, то при означенні поняття точки спокою можливі варіанти. Назвемо $x_0 \in R^n$ точкою можливого спокою, якщо функція $x(t) \equiv x_0$, $t \in R$ є розв'язком системи з імпульсною дією (1.2.1). Для цього необхідно і достатньо, щоб функція $x(t) = x_0$ була розв'язком системи (1.1.1) і $x_0 \in A_i x_0$ для всіх i. Якщо додатково дано, що при довільному t_0 розв'язок задачі Коші $x(t) = x_0$ для системи (1.2.1) єдиний у напрямку зростання t, то назвемо x_0 точкою примусового спокою. Для цього необхідно і достатньо, щоб розв'язок $x(t) \equiv x_0$ системи (1.1.1) мав аналогічну властивість єдиності і щоб $A_i x_0 = x_0$ для всіх i.

Назвемо множину $Q \in R^n$ поглинаючою, якщо для довільного розв'язку системи (1.2.1) $x(t)$, $a < t < b$, з того, що $x(t_0) \in Q$ випливає, що $x(t) \in Q$ для всіх $t_0 < t < b$. Для цього необхідно і достатньо, щоб $A_i Q \in Q$ при всіх $i \in K$ і щоб Q мало аналогічну властивість локального поглинання системи (1.1.1) при довільному $t_0 \neq \tau_i$, $x(t_0) \in Q$ і $t_0 = \tau_i$, $x(t_0) \in A_i Q$.

Якщо поглинаюча множина Q є замкненою, непорожньою і не містить власних замкнених поглинаючих підмножин, то назвемо Q непривідною (мінімальною) множиною. Так, точка примусового спокою завжди утворює непривідну поглинаючу множину.

Теорема 1.2.4. *Усіляка компактна поглинаюча множина містить принаймні одну непривідну поглинаючу підмножину.*

На відміну від системи звичайних диференціальних рівнянь, непривідна поглинаюча множина для системи з імпульсною дією не повинна бути зв'язною.

Якщо поглинаюча множина Q 0-вимірно, а права частина системи рівнянь (1.1.1) однозначна і неперервна, то при всіх $x \in Q$

$$f(t,x) = 0, t \in R. \qquad (1.2.7)$$

Припустимо, що функція $f(t,x)$ однозначна, неперервна і забезпечує єдиність розв'язку задачі Коші для системи (1.1.1) в напрямку роста t, і позначимо через S множину всіх x, для яких виконується тотожність (1.2.7)

Щоб отримати максимальну поглинаючу множину $\tilde{Q} \subseteq S$, виберемо довільну послідовність номерів $i_1, i_2, \dots$, якими занумеровані всі моменти τ_iб в який кожен номер повторювався б нескінченну кількість разів, після чого покладемо $Q_0 = S,\ Q_k = \{x | x = Q_{i-1}, A_{i_k} x \subseteq Q_i\}$. Тоді множини Q_k утворюють монотонну послідовність і $\tilde{Q}$ співпадає з їх перетином. Для цих властивостей легко вказати умови непорожньості і замкненості множини Q. Непривідні поглинаючі множини Q можна вважати аналогом точок спокою для систем з імпульсною дією.

Неперервна залежність розв'язків від початкових умов і правих частин системи рівнянь.

Вкажемо достатні умови, які повинна задовольняти система рівнянь (1.2.1), щоб була неперервна залежність її розв'язків від початкових значень і правих частин.

В подальшому нам будуть потрібні наступні леми.

Лема 1.2.1. *Нехай невід'ємна кусково-неперервна функція* $u(t)$ *задовольняє при* $t \geq t_0$ *нерівності*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} v(\tau)u(\tau)d\tau + \sum_{t_0 \leq \tau_i \leq t} \beta_i(\tau_i) \qquad (1.2.8)$$

де $C \geq 0, \beta_i \geq 0, v(\tau) > 0, \tau_i$ – точки розриву першого роду функції $u(t)$. Тоді для функції $u(t)$ справедлива оцінка

$$u(t) \leq C \prod_{t_0 \leq \tau_i \leq t} (1+\beta_i) e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau} \tag{1.2.9}$$

Доведемо лему методом математичної індукції. На проміжку $[t_0, t_1]$ нерівність (1.2.8) має вигляд

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} v(\tau)u(\tau)d\tau,$$

тому, в силу відомої нерівності Гронуолла-Беллмана маємо

$$u(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau},$$

тобто для $t \in [t_0, t_1]$ оцінка (1.2.9) справедлива. Припустимо, що вона справедлива і для $t \in]\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 1,2, \dots, k-1$.

Тоді для $t \in]\tau_k, \tau_{k+1}]$ маємо

$$u(t) \leq C + \sum_{i=1}^{k} \beta_i C \prod_{j=1}^{i-1} (1+\beta_j)\, e^{\int_{t_0}^{\tau_i} v(\tau)d\tau} + \sum_{i=1}^{k} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v(t) C \prod_{j=1}^{i-1} (1+$$

$$+\beta_j)\, e^{\int_{t_0}^{\tau} v(\tau)d\tau} + \int_{\tau_k}^{t} v(\tau)u(\tau)d\tau = C\left[1 + \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{i-1} (1+\beta_j) e^{\int_{t_0}^{\tau_i} v(\tau)d\tau} (1+\right.$$

$$\left.+\beta_i) - \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{i-1} (1+\beta_j) e^{\int_{t_0}^{\tau_i-1} v(\tau)d\tau}\right] + \int_{\tau_k}^{t} v(\tau)u(\tau)d\tau = C \prod_{j=1}^{k} (1+$$

$$+\beta_j) e^{\int_{t_0}^{\tau_k} v(\tau)d\tau} + \int_{\tau_k}^{t} v(\tau)u(\tau)d\tau,$$

Тобто функція $u(t)$ при $t \in]\tau_k, \tau_{k+1}]$ задовольняє нерівність

$$u(t) \leq C_1 + \int_{\tau_k}^{t} v(\tau)u(\tau)d\tau,$$

де

$$C_1 = C \prod_{i=1}^{k} (1+\beta_i) e^{\int_{t_0}^{\tau_k} v(\tau)d\tau}.$$

Отже, в силу леми Гронуолла-Беллмана для $t \in]\tau_k, \tau_{k+1}]$

$$u(t) \le \prod_{t_0 \le \tau_i \le t} (1+\beta_i) e^{\int_{t_0}^{\tau_k} v(\tau) d\tau}$$

або остаточно

$$u(t) \le C \prod_{t_0 \le \tau_i \le t} (1+\beta_i) e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau}.$$

Лема доведена.

Приведемо ще два твердження, доведення яких неважно отримати із доведень попередньої леми.

Лема 1.2.2. *Нехай невід'ємна кусково-неперервна функція $u(t)$ задовольняє при $t \ge t_0$ нерівності*

$$u(t) \le C + \int_{t_0}^{t} \gamma u(\tau) d\tau + \sum_{t_0 \le \tau_i \le t} \beta u(\tau_i), \qquad (1.2.10)$$

В якому $C \ge 0, \beta \ge 0, \gamma > 0, \tau_i$ – точки розриву першого роду функції $u(t)$. Тоді для функції $u(t)$ справедлива оцінка

$$u(t) \le \mathrm{C}(1+\beta)^{i(t_0,t)} e^{\gamma(t-t_0)}, \qquad (1.2.11)$$

Де $i(t_0, t)$ – кількість точок τ на проміжку $[t_0, t[$, тобто $i(t_0, t) = i$, якщо $\tau_i < t \le \tau_{i+1}$.

Нерівність (1.2.11) безпосередньо випливає з оцінки (1.2.9), якщо покласти в останній $v(t) = \gamma, \beta_i = \beta$.

Лема 1.2.3. *Якщо невід'ємна кусково-неперервна функція $u(t)$ задовольняє при $t \ge t_0$ нерівності*

$$u(t) \le \alpha + \int_{t_0}^{t} [\beta + \gamma u(\tau)] d\tau + \sum_{t_0 \le \tau_i \le t} [\beta + \varphi u(\tau_i)], \qquad (1.2.12)$$

в якому $\alpha \ge 0, \beta \ge 0, \varphi > 0, \tau_i$ – точки розриву першого роду функції $u(t)$, то справедлива оцінка

$$u(t) \le (\alpha + \frac{\beta}{\gamma})(1+\gamma)^{i(t_0,t)} e^{\gamma(t-t_0)} - \frac{\beta}{\gamma}. \qquad (1.2.13)$$

Д о в е д е н н я. Справедливість оцінки (1.2.13) можна встановити методом математичної індукції, враховуючи, що якщо неперервна при $t \geq t_0$ функція $u(t)$ задовольняє нерівності

$$0 \leq u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} [\beta + \gamma u(\tau)] d\tau \qquad (1.2.14)$$

де $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \varphi > 0$ – константи, то справедлива нерівність

$$u(t) \leq (\alpha + \frac{\beta}{\gamma}) e^{\gamma(t-t_0)} - \frac{\beta}{\gamma} \qquad (1.2.15)$$

Однак, це простіше зробити, враховуючи лему 1.2.1. Представимо нерівність виду (1.2.12) у вигляді

$$u(t) + \frac{\beta}{\gamma} \leq \alpha + \frac{\beta}{\gamma} + \int_{t_0}^{t} \gamma \left(u(\tau) + \frac{\beta}{\gamma} \right) d\tau + \sum_{t_0 \leq \tau_i \leq t} \gamma \left(u(\tau_i) + \frac{\beta}{\gamma} \right) \qquad (1.2.16)$$

Тоді функція $v(t) = u(t) + \frac{\beta}{\gamma}$ задовольняє нерівність виду (1.2.10), якщо в останньому покласти $C = \alpha + \frac{\beta}{\gamma}$ і β замінити на γ. Отже, для неї справедлива нерівність виду (1.2.11), тобто

$$u(t) + \frac{\beta}{\gamma} \leq \left(\alpha + \frac{\beta}{\gamma} \right) (1 + \gamma)^{i(t_0,t)} e^{\gamma(t-t_0)}.$$

З цієї нерівності випливає безпосередньо оцінка (1.2.13). Лема доведена.

Використовуючи доведені леми, виведемо оцінку зміни розв'язків системи рівнянь (1.2.1), відповідає зміна початкових умов і правих частин цієї системи.

Припустимо, що функції $f(t, x)$ І $I_i(x)$ неперервні за своїми змінними при $x \in M, t \in I$ і задовольняє умову Ліпшиця по x відносно $t \in I$ і $i \in K$, тобто

$$\|f(t, x') - f(t, x'')\| \leq L \|x' - x''\|,$$

$$\|I_i(x') - I_i(x'')\| \leq L\|x' - x''\|. \quad (1.2.17)$$

Використовуючи рівняння (1.2.1), розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) + R(t,y), t \neq \tau_i,$$
$$\Delta y|_{t=\tau_i} = I_i(y) + R_i(y), \quad (1.2.18)$$

де функції $R(t,y)$ і $R_i(y)$ такі, що розв'язки рівнянь (1.2.18) існують.

Припустимо, що при всіх $x \in M, t \in I$

$$\|R(t,y)\| < \eta, \ \|R_i(y)\| < \eta, \quad (1.2.19)$$

І розглянемо розв'язки $x(t,x_0)$ системи рівнянь (1.2.1), $y(t,y_0)$ системи рівнянь (1.2.18).

Нехай вказані розв'язки визначені при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ і

$$\|x_0 - y_0\| < \delta. \quad (1.2.20)$$

Теорема 1.2.5. *Якщо функція, яка визначає системи рівнянь (1.2.1) і (1.2.18), задовольняє нерівності (1.2.17) і* $y(t,y_0)$, *початкові значення яких задовольняють нерівності (1.2.20), справедлива оцінка*

$$\|x(t,x_0) - y(t,y_0)\| < \left(\delta + \frac{\eta}{L}\right)^{(1+L)^{i(t_0,t)}} e^{L(t-t_0)} - \frac{\eta}{L} \quad (1.2.21)$$

при всіх $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Д о в е д е н н я. Розв'язок $x(t,x_0), x(t_0,x_0) = x_0$ рівнянь (1.2.1) при $t \in]\tau_i, \tau_{i+1}]$ співпадає з одним із розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x).$$

Оскільки кожний розв'язок $x = \varphi(t)$ останнього рівняння можна представити у вигляді

$$\varphi(t) = \varphi(\tau) + \int_{\tau}^{t} f\big(\sigma, \varphi(\sigma)\big) d\sigma,$$

то при $t \in \,]\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$x(t, x_0) = x(\tau_i, x_0) + I_i\big(x(\tau_i, x_0)\big) + \int_{\tau_i}^{t} f\big(\tau, x(\tau, x_0)\big) d\tau, \qquad (1.2.22)$$

Аналогічне представлення справедливо і для розв'язку $y(t, y_0)$ системи рівнянь (1.2.18), тобто

$$y(t, y_0) = y_0 + \sum_{t_0 \le \tau_i \le t} \big[I_i\big(y(\tau_i, y_0)\big) + R_i(y(\tau_i, y_0))\big]$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \big[f\big(\tau, y(\tau, y_0)\big) + R(\tau, y(\tau, y_0))\big]\, d\tau. \qquad (1.2.23)$$

Тому для норми різновиду розв'язків $x(t, x_0) - y(t, y_0)$ маємо

$$\|x(t, x_0) - y(t, y_0)\| \le \|x_0 - y_0\| +$$
$$+ \sum_{t_0 \le \tau_i \le t} \big[\big\|I_i\big(x(\tau_i, x_0)\big) - I_i\big(y(\tau_i, y_0)\big)\big\| + \big\|R_i\big(y(\tau_i, y_0)\big)\big\|\big] +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \big[\big\|f\big(\tau, x(x_0)\big) - f\big(\tau, y(\tau, y_0)\big)\big\| + \|R(\tau, y(\tau, y_0))\|\big] d\tau.$$

Звідси, беручи до уваги нерівність (1.2.17) і (1.2.19), отримаємо

$$\|x(t, x_0) - y(t, y_0)\| \le \|x_0 - y_0\| +$$
$$+ \sum_{t_0 \le \tau_i \le t} [\eta + L\|x(\tau_i, x_0) - y(\tau_i, y_0)\|] + \int_{t_0}^{t} [\eta + L\|x(\tau, x_0) - y(\tau, y_0)\|] d\tau,$$

Тобто норма різниці $\|x(t, x_0) - y(t, y_0)\|$ задовольняє вимогу леми 1.2.3, якщо покласти

$$u(t) = \|x(t, x_0) - y(t, y_0)\|,$$

$a = \|x_0 - y_0\|, \beta = \eta, \gamma = L.$ В силу твердження вказаної леми маємо

$$\|x(t, x_0) - y(t, y_0)\| \leq \left(\|x_0 - y_0\| + \frac{\eta}{L}\right)(1 + L)^{i(t_0,t)} e^{L(t-t_0)} - \frac{\eta}{L}. \quad (1.2.24)$$

Необхідна нерівність (1.2.21) випливає безпосередньо з (1.2.24), оскільки початкові значення x_0, y_0 підлягають умові (1.2.20). Теорема доведена.

Відмітимо частинні випадки доведеної теореми. Нехай $\eta = 0$. Тоді $x(t, x_0), y(t, y_0)$ – розв'язки однієї і тієї ж системи рівнянь (1.2.1), але з різними початковими умовами. Для таких розв'язків оцінка (1.2.21) приймає вигляд

$$\|x(t, x_0) - y(t, y_0)\| < \delta(1 + L)^{i(t_0,t)} e^{L(t-t_0)},$$

тобто

$$\|x(t, x_0) - y(t, y_0)\| < \delta(1 + L)^{\rho} e^{LT} \quad (1.2.25)$$

для всіх $t \in [t_0, t_0 + T]$, де ρ – кількість точок τ_i на проміжку $[t_0, t_0 + T]$.

З нерівності (1.2.25) випливає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon(1 + L)^{-p} e^{-LT}$, що якщо $\|x_0 - y_0\| < \delta$, то $\|x(t, x_0) - y(t, y_0)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in [t_0, t_0 + T]$. Це означає, що при виконанні нерівностей (1.2.17) розв'язку системи (1.2.1) неперервно залежить від початкових умов. Більше того, як випливає з оцінки (1.2.24), ця залежність не тільки неперервна, але й ліпшицева, тобто розв'язки системи (1.2.1) задовольняють умові Ліпшиця по x_0 рівномірно відносно $t \in [t_0, t_0 + T]$:

$$\|x(t, x_0) - y(t, y_0)\| < (1 + L)^{p} e^{LT} \|x_0 - y_0\|, \quad (1.2.26)$$

Якщо ж $\delta = 0,$ а $\eta \neq 0$, то маємо випадок постійно діючих збурень, тому оцінка (1.2.21) приймає вигляд

$$\|x(t,x_0)-y(t,y_0)\| < \frac{\eta}{L}\big((1+L)^{i(t_0,t)}e^{L(t-t_0)}-1\big),$$

тобто

$$\|x(t,x_0)-y(t,y_0)\| < \frac{\eta}{L}((1+L)^{p}e^{LT}-1) \qquad (1.2.27)$$

При всіх $t \in [t_0, t_0+T]$.

Із (1.2.27) випливає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\eta = \eta(\varepsilon) = \varepsilon L((1+L)^p e^{LT}-1)^{-1}$, що як тільки виконуються нерівності (1.2.19), то

$$\|x(t,x_0)-y(t,y_0)\| < \varepsilon$$

для всіх $t \in [t_0, t_0+T]$.

Це твердження виражає властивість неперервності розв'язків системи з імпульсною дією (1.2.1) в деякому функціональному просторі правих частин. В частинному випадку, якщо праві частини рівнянь (1.2.1) неперервно залежать від деякого параметра λ, то з отриманих оцінок випливає неперервність розв'язків по даному параметру.

Розділ 2. Задачі оптимального керування. Існування розв'язків.

Розглянемо нелінійну систему в R^n:

$$\dot{x} = A(x,t) + B(x,t)u$$

з критеріями якості

$$C(u) = \int_0^T [A^0(x,t) + B^0(u,t)]dt$$

Ми будемо припускати, що $A^0(x,t) \geq 0$ і $B^0(u,t) \geq a|u^p|$ для деяких сталих $a > 0$, $p > 1$. Тоді допустимими керуваннями будуть всі m-вимірні вектори-функції $u(t)$ для класу L_p на заданому скінченному інтервалі $0 \leq t \leq T$, такі, що розв'язки $x(t)$, які їм відповідають, вихідні з точки x_0, визначені на всьому інтервалі $0 \leq t \leq T$, а значення критерію якості $C(u)$ скінченне. В силу нерівності Гельдера

$$\int_0^T |u|dt \leq \left(\int_0^T |u|^p dt\right)^{1/p} T^{1/q}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

кожне допустиме керування $u(t)$ належить L_1 на $0 \leq t \leq T$, тобто

$$\|u\|_1 = \int_0^T |u(t)|dt < \infty$$

Теорема 2.1. *Розглянемо систему в* R^n*:*

$$\dot{x} = A(x,t) + B(x,t)u$$

з критерієм якості

$$C(u) = \int_0^T [A^0(x,t) + B^0(u,t)]dt$$

де A, A^0, B, B^0, $\partial A/\partial x$, $\partial B/\partial x$ *неперервні при всіх* $x \in R^n$ *і* $u \in R^m$ *і* $t \in R^l$. *Припустимо, що*

a) $A^0(x,t) \geq 0$;

b) $B^0(u,t) \geq a|u|^p$, *для сталих* $a > 0, p > 1$;

c) $B^0(u,t)$ *випукло по* u *при будь якому фіксованому* t.

Допустимими є усі керування $|u(t)|$ *з* L_p *на заданому скінченному інтервалі* $0 \leq t \leq T$, *які разом з відповідними розв'язками* $x(t)$, *що виходять з точки* x_0, *надають критерію якості кінцеве значення. Припустимо також, що* *d)* $|x(t)| \leq \beta(\|u\|_1)$*, де межа* β *монотонно зростає разом з* $\|u\|_1$.

Тоді існує оптимальне керування $u^*(t)$*, що мінімізує критерій якості.*

Доведення. Зауважимо, що кожному обмеженому скінченному керуванню $u(t)$ на інтервалі $0 \leq t \leq T$ відповідає розв'язок $x(t)$, обмежений величиною $\beta(\|u\|_1)$ на $0 \leq t \leq T$, і отже, $u(t)$ є допустимим керуванням. Оскільки $C(u) \geq 0$, то існує невід'ємна нижня межа m значень $C(u)$. Нехай $u^{(k)}(t)$ – послідовність допустимих керувань, таких, що відповідна послідовність $C\left(u^{(k)}\right)$ монотонно прямує до границі m, зауважимо, що

$$C\left(u^{(k)}\right) \leq m + 1$$

і, отже

$$a\int_0^T \left|u^{(k)}\right|^p dt \leq m + 1$$

для великих k. Тому можна вибрати послідовність (яка також позначається $u^{(k)}(t)$), яка б слабко сходилась до границі $u^*(t)$ з $L_p(0, T)$ і таку, що

$$\int_0^T \left|u^{(k)}\right|^p dt \leq \frac{m+1}{a}$$

Далі $\left\|u^{(k)}\right\|_1 \leq \left[\frac{m+1}{a}\right]^{1/p} T^{1/q}$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тому всі розв'язки рівномірно обмежені

$$\left\|x^{(k)}(t)\right\| \leq \beta\left(\left(\frac{m+1}{a}\right)^{1/p} T^{1/q}\right).$$

Переконаємось тепер, що рівномірно обмежене сімейство функцій $x^{(k)}(t)$ буде також рівномірно неперервним на інтервалі $0 \leq t \leq T$. Для будь яких двох моментів часу t_1 і t_2 $(0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T)$ маємо

$$\left|x^{(k)}(t_1) - x^{(k)}(t_2)\right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \left|A\left(x^{(k)}(s), s\right)\right| + \left|B\left(x^{(k)}(s), s\right)\right|\left|u^{(k)}(s)\right| ds.$$

Таким чином існує стала $c > 0$ (що не залежить від k), для якої

$$\left|x^{(k)}(t_1) - x^{(k)}(t_2)\right| \leq c|t_2 - t_1| + c\left(\int_{t_1}^{t_2} \left|u^{(s)}(s)\right|^p ds\right)^{1/p} |t_2 - t_1|^{1/q}$$

і

$$\left|x^{(k)}(t_1) - x^{(k)}(t_2)\right| \leq c|t_2 - t_1| + c\left(\frac{m+1}{a}\right)^{1/p} |t_2 - t_1|^{1/q}.$$

З теореми Асколі слідує, що можна вибрати послідовність, яка також позначається як $x^{(k)}(t)$, так, що

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}(t) = \bar{x}(t)$$

при кожному t з інтервалу $0 \le t \le T$. Покажемо тепер, що $\bar{x}(t)$ є розв'язок, який відповідає $u^*(t)$. Запишемо

$$\bar{x}(t) = x_0 + \lim_{k\to\infty} \int_0^t \left[A\left(x^{(k)}(s), s\right) + B\left(x^{(k)}(s), s\right)u^{(k)}(s)\right]ds.$$

Користуючись граничними співвідношеннями

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t \left|A\left(x^{(k)}(s), s\right) - A(\bar{x}(s), s)\right|ds = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t B(\bar{x}(s), s)\left[u^{(k)}(s) - u^*(s)\right]ds = 0$$

а також співвідношенням

$$\lim_{k\to\infty} B\left(x^{(k)}(t), t\right) = B(\bar{x}(t), t)$$

Що виконується рівномірно, за межами деякої множини S довільно малої міри, і нерівністю

$$\int_S \left|u^{(k)}\right|ds \le \left(\int_0^T \left|u^{(k)}\right|^p ds\right)^{1/p} |S|^{1/q},$$

можна довести що

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \left|B\left(x^{(k)}(s), s\right) - B(\bar{x}(s), s)\right|\left|u^{(k)}(s)\right|ds = 0.$$

Звідси слідує, що

$$\bar{x}(t) = x_0 + \lim_{k\to\infty} \int_0^t [A(\bar{x}(s), s) + B(\bar{x}(s), s)u^*(s)]ds,$$

тобто $\bar{x}(t)$ це розв'язок, який відповідає керуванню $u^*(t)$ на інтервалі $0 \le t \le T$. З випуклості $B^0(u, t)$ слідує, що

$$C(u^*) \le \lim_{k\to\infty} C\left(u^{(k)}\right) = m.$$

Отже, $C(u^*) = m$ і $u^*(t)$ це оптимальне керування.

Теорема доведена

Наступні дві задачі присвячені використанню керувань з оберненим зв'язком $u = u(x)$ в нелінійних системах в R^n.

Звернемося спочатку до задачі стабілізації нелінійної системи в R^n,

$$\dot{x} = f(x, u) = f\big(x, u(x)\big),$$

За допомогою лінійних керувань $u(x) = Fx$, де матриця оберненого зв'язку F обрана так, щоб оптимізувати ступінь спадання розв'язків поблизу початку координат. Уточнимо постановку цієї задачі, ввівши поняття *узагальненої характеристичної експоненти і критичного демпфірування*, як вказано нижче.

Розглянемо автономну систему диференціальних рівнянь класу C^1 в R^n:

$$\dot{x} = g(x), \tag{2.1}$$

де $g(0) = 0$, і позначимо матрицю $\frac{\partial g}{\partial x}(0)$ через G. Якщо постійна матриця G стійка (тобто всі її власні значення мають від'ємні дійсні частини, так що $\max \mathrm{Re}\lambda[G] < 0$), то нелінійна систем стійка в околі початку координат. (Для кожного околу N_1 початку координат знайдеться такий менший окіл N_2, що кожен розв'язок, що виходить з N_2, назавжди залишається всередині N_1). Якщо Gмає хоч одне власне значення з додатною дійсною частиною, то нелінійна система не буде стійкою в околі початку координат.

Якщо G – стійка матриця, то можна показати, що існує окіл N початку координат, такий, що кожне рішення $x(t) \not\equiv 0$, що виходить з N, назавжди залишається в N, і

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0.$$

Більш точне дослідження граничної поведінки розв'язку $x(t)$ показує, що

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\log|x(t)|}{t} = \mu.$$

Величина μ в цій рівності не залежить від вибору N, а також від вибору норми R^n; вона називається *узагальненою характеристичною експонентою системи* (2.1). Відомо, що узагальнені характеристичні експоненти системи $\mathcal{J}_1$ співпадають з дійсними частинами власних значень матриці G.

Нехай G і $\hat{G}$ – стійкі матриці з власними значеннями $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ і $\{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n\}$, відповідно розташованими в порядку зростання дійсних частин.

$$\mathrm{Re}\lambda_1 \le \mathrm{Re}\lambda_2 \le \cdots \le \mathrm{Re}\lambda_n < 0$$

і

$$\mathrm{Re}\hat{\lambda}_1 \le \mathrm{Re}\hat{\lambda}_2 \le \cdots \le \mathrm{Re}\hat{\lambda}_n < 0.$$

Ми скажемо, що $G \prec \hat{G}$, тобто матриця G більш стійка ніж матриця $\hat{G}$, якщо

$$\mathrm{Re}\lambda_n < \mathrm{Re}\hat{\lambda}_n$$

або

$$\mathrm{Re}\lambda_n = \mathrm{Re}\hat{\lambda}_n \text{ і } \mathrm{Re}\lambda_{n-1} < \mathrm{Re}\hat{\lambda}_{n-1}$$

або

$$\mathrm{Re}\lambda_n = \mathrm{Re}\hat{\lambda}_n, \dots, \mathrm{Re}\lambda_j = \mathrm{Re}\hat{\lambda}_j \text{ і } \mathrm{Re}\lambda_{j-1} = \mathrm{Re}\hat{\lambda}_{j-1}$$

для деякого j $(1 < j < n)$. Будемо писати також, що $G \preccurlyeq \hat{G}$ в випадку коли або що $G \prec \hat{G}$, або власні значення матриць G і $\hat{G}$ мають однакові дійсні частини.

Дамо тепер визначення критичного демпфірування системи диференціальних рівнянь, використовуючи розглянуті поняття.

Визначення. Розглянемо автономну систему в R^n:

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{2.2}$$

де вектор-функція $f(x, u)$ належить C^1 в околі початку координат в R^{n+m}, і

$$f(0,0) = 0, f_x(0,0) = A, f_u(0,0) = B.$$

Нехай $\mathcal{F}$ - деяка підмножина простору $\mathcal{M}_{mn}$, всіх дійсних $(m \times n)$ – матриць. Матриця $F^* \in \mathcal{F}$ визначає критичне демпфірування для системи (2.2) з оберненим зв’язком в $\mathcal{F}$, в випадку, якщо матриця $(A + BF^*)$ стійка, і $(A + BF^*) \preccurlyeq (A + BF)$ для всіх $F \in \mathcal{F}$. Тоді $u = F^* x$ це оптимальне керування, що здійснює критичне демпфірування для системи (2.2) в $\mathcal{F}$.

Зауваження. Для того щоб існувало критичне демпфірування для системи (2.2), необхідно щоб систему

$$\dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu + \cdots \tag{2.3}$$

можна було стабілізувати рівнянням $u = Fx$ з оберненим зв’язком, де $F \in \mathcal{F}$, тобто матриця $A + BF$ повинна бути стійкою. Якщо система (A, B) володіє властивістю керованості і, якщо $\mathcal{F} = \mathcal{M}_{mn}$, то система завжди може бути стабілізована; однак критичного демпфірування для неї не існує.

Теорема 2.2. *Розглянемо автономну систему в* R^n*:*

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{2.4}$$

де вектор-функція $f(x, u)$ *належить* C^1 *поблизу початку координат в* R^{n+m}*, і*

$$f(0{,}0) = 0, f_x(0{,}0) = A, f_u(0{,}0) = B.$$

Нехай $\mathcal{F}$ *це деяка підмножина простору* $\mathcal{M}_{mn}$*, дійсних* $(m \times n)$ *– матриць. Припустимо, що матриця* $(A + BF_0)$ *стійка при деякому* $F_0 \in \mathcal{F}$*. Якщо при цьому або*

1) множина $\mathcal{F}$ *компактна,*

або

2) $\lim_{F\to\infty} inf \{max\, Re\ \lambda[A + BF]\} \geq 0$ *в тому сенсі, що для кожного дійсного* $\varepsilon > 0$ *знайдеться компактна підмножина* $\mathcal{F}_\varepsilon \subset \mathcal{F}$*, така, що будь яка матриця* $A + BF$*, що не належить* $\mathcal{F}_\varepsilon$*, має власне значення з дійсною частиною, більшою, ніж -* ε*, то існує оптимальне керування* $u = F^* x$*, що здійснює критичне демпфірування системи.*

Доведення. Розглянемо спочатку деяку компактну підмножину $\mathcal{F}$ простору $\mathcal{M}_{mn}$ (що топологічно співпадає з R^{mn}). Оскільки власні значення F неперервно залежать від F, то існує матриця $F_1 \in \mathcal{F}$, що мінімізує вираз $\max \mathrm{Re}\ \lambda[A + BF]$ і, зокрема, так, що

$$\max \mathrm{Re}\ \lambda[A + BF_1] \leq \max \mathrm{Re}\ \lambda[A + BF_0] < 0.$$

Нехай $\mathcal{F}_1$ – така компактна підмножина $\mathcal{F}$, що на ній

$$\max \mathrm{Re}\ \lambda[A + BF] = \max \mathrm{Re}\ \lambda[A + BF_1].$$

Нехай матриця $F_2 \in \mathcal{F}_1$ мінімізує вираз $\mathrm{Re}\, \lambda_{n-1}[A + BF]$ на $\mathcal{F}_1$. Нехай $\mathcal{F}_2$ – компактна підмножина, на якій

$$\mathrm{Re}\, \lambda_n[A + BF] = \mathrm{Re}\, \lambda_n[A + BF_1]$$

і

$$\mathrm{Re}\, \lambda_{n-1}[A + BF] = \mathrm{Re}\, \lambda_{n-1}[A + BF_2]$$

(мається на увазі, що $\mathrm{Re}\, \lambda_1 \leq \mathrm{Re}\, \lambda_2 \leq \cdots \leq \mathrm{Re}\, \lambda_n$). Діючи таки чином, отримаємо ланцюжок компактних множин.

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n-1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$$

таких, що кожна матриця $F^* \in \mathcal{F}_n$ здійснює критичне демпфірування. Нехай тепер $\mathcal{F}$ - некомпактна підмножина з $\mathcal{M}_{mn}$, що задовольняє умову (2.4). Тоді

$$\max \mathrm{Re}\ \lambda[A + BF] > \frac{1}{2} \max \mathrm{Re}\ \lambda[A + BF_0]$$

для всіх $F \in \mathcal{F}$, що не належать деякій компактній підмножині $\mathcal{F}_0$. Тоді оптимальне керування $u = F^*x$, що здійснює критичне демпфірування (2.4) в $\mathcal{F}_0$, дає також критичне демпфірування (2.4) в $\mathcal{F}$. Теорема доведена.

Наслідок. *Розглянемо автономну систему в R^n:*

$$\dot{x} = f(x,u) = Ax + Bu + \cdots \tag{2.5}$$

з правою частиною $f(x,u)$, що належить C^1 в поблизу початку координат в R^{n+m}. Нехай керування $u = F_0x$ стабілізує систему (2.5), і нехай множина $\mathcal{F}$ складається з усіх матриць $\{cF_0\}$, для усіх можливих дій чисел c. Якщо є два власних значення μ_1 і μ_2 матриці BF_0, такі, що

$$(Re\,\mu_1)(Re\,\mu_2) < 0,$$

то існує оптимальне керування $F^* = c^*F_0$, що здійснює критичне демпфірування системи (2.5) в $\mathcal{F}$. З іншого боку, якщо всі власні значення матриці BF_0 мають дійсні частини одного і того ж знаку, то критичного демпфірування не існує.

Доведення. Нехай для визначеності $\mathrm{Re}\,\mu_1 > 0$. Тоді власні значення матриці $A + cBF_0$ співпадають з власними значеннями матриці $(1/c)A + BF_0$, перемноженими на $c \neq 0$. Але, якщо $c > 0$ дуже велике, то є власне значення $\tilde{\mu}$ матриці $(1/c)A + BF_0$, таке, що $\mathrm{Re}\,\tilde{\mu} > \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mu_1$. Таким чином, є власне значення матриці $A + cBF_0$ з позитивною дійсною частиною, а отже, матриця $A + cBF_0$ нестійка. Аналогічно, матриця $A + cBF_0$ не буде стійкою при $c \to -\infty$. Отже, існує таке $\gamma > 0$, що матриця $A + cBF_0$ не буде стійка при $|c| > \gamma$. Тому критичне демпфірування повинно існувати і відповідати деякому c^* з інтервалу $-\gamma \le c \le \gamma$.

З іншого боку, якщо всі власні значення матриці BF_0 мають від'ємні (чи додатні) дійсні частини, то для більшості значень c при $c \to +\infty$ (чи $c \to -\infty$), матриця $A + cBF^0$ буде стійкою, при чому

$$\lim_{c \to +\infty} \max \mathrm{Re}\ \lambda[A + cBF_0] = -\infty.$$

Тому в цих випадках критичного демпфірування не існує. Наслідок доведено.

Приклад. Розглянемо скалярну систему

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_nx = u$$

з керуванням в вигляді оберненого зв'язку $u = cx^{(n-1)}$, де c – дійсне число.

Маємо в R^n лінійну систему відносно вектору x,

$$\dot{x} = Ax + Bu, u = Fx,$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$F = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad c).$$

Припустимо, що вільна система стійка (отже, замкнений ланцюг дає стійку систему при достатньо малих $c_1 > 0$), і покажемо, що існує критичне демпфірування при деякому $c \in R^n$.

При $c > a_1$ система нестійка (оскільки необхідною умовою стійкості є позитивність усіх коефіцієнтів многочлену). При $c \to -\infty$ сума $c - a_1$ власних значень матриці $A + BF$ прямує до $-\infty$. Тому хоча б одне з власних значень повинно мати більше по абсолютній величині дійсну частину. Але добуток власних значень матриці $A + BF$ дорівнює a_n. Тому

$$\lim_{c \to -\infty} \inf\{\max \operatorname{Re} \lambda[A + BF]\} \geq 0.$$

Отже, критичне демпфірування існує.

В особливому випадку, при $n = 2$,

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = c\dot{x}, a_1 > 0, a_2 > 0,$$

критичне демпфірування відбувається при

$$(a_1 - c)^2 - 4a_2 = 0 \text{ і } a_1 - c > 0.$$

Звідси отримуємо оптимальне значення для c:

$$c^* = a_1 - 2\sqrt{a_2}.$$

Примітки. Подібна задача виникає в зв'язку з системою диференціальних рівнянь в R^n,

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.6}$$

де u – постійний m-вимірний вектор з множини $\Omega \subset R^m$. Нехай перша частина $f(x, u)$ належить C^1 в R^{n+m}, причому кожному постійному u відповідає розв'язку $x(t)$ (що визначено на деякому заданому інтервалі), що виходить з заданої початкової точки x_0. Нехай $C(u)$ – дійсна неперервна функція $u \subset \Omega$. Необхідно знайти оптимальне значення $u^* \subset \Omega$, що мінімізує $C(u)$.

Якщо множина Ω компактна, то оптимальне керування u^* існує. Якщо Ω не компактна, але

$$\lim_{u\to\infty} \inf C(u) > C(u_0) \text{ для деякого } u_0 \in \Omega$$

(в сенсі теореми 2.2), то повинно існувати оптимальне керування u^*, для якого $C(u^*) \leq C(u_0)$.

Звернемося тепер до побудови оптимального нелінійного ланцюга оберненого зв'язку не нескінченного проміжку часу. Розглянемо нелінійну систему в R^n:

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{2.7}$$

з критерієм якості

$$C(u) = \int_0^\infty G(x,u)dt.$$

Замість звичайного керування $u(t)$ в R^m, що обирається для кожного початкового стану x_0, будемо шукати оптимальне керування $u(x)$, що мінімізує функціонал

$$J(x_0,u) = \int_0^\infty G\left(x(t,x_0), u\big(x(t,x_0)\big)\right) dt$$

вздовж траєкторії $x(t,x_0)$ замкненої системи

$$\dot{x} = f\big(x,u(x)\big), x(0,x_0) = x_0$$

для всіх початкових точок x_0 з деякого околу початку координат в R^n. Будемо припускати, що $f(x,u)$, $G(x,u)$ і $u(x)$ – дійсні аналітичні функції в околі точки $x = u = 0$ в R^{n+m}. Це означає, що в цьому околі вони розкладаються в абсолютно збіжні степеневі ряди і, відповідно, ці ряди визначають відповідні комплексні аналітичні функції, якщо аргумент їх розглядати в деякому околі початку координат комплексного $(n+m)$ – вимірного простору. Припустимо, що члени нижчого порядку в розкладі для $f(x,u)$ лінійні

$$f(x,u) = Ax + Bu + h(x,u)$$

а в розкладі для $G(x,u)$ – квадратичні

$$G(x,u) = x'Wx + u'Uu + H(x,u)$$

де $h(x,u)$ і $H(x,u)$ – степеневі ряди, що починаються з членів другого і третього порядку відносно (x,u). Дійсні сталі матриці (A,B) визначають цілком керовану чи, принаймні, систему, що можна стабілізувати, а дійсні постійні матриці $W > 0$ і $U > 0$ симетричні і позитивно визначені. Ми будемо розглядати керування в вигляді ланцюга оберненого зв'язку,

$$u = u(x) = Fx + \mathcal{H}(x)$$

де F – дійсна постійна матриця, а $\mathcal{H}(x)$ – члени більш високих порядків. Завжди будемо обирати F так, щоб керування $u(x)$ стабілізувало систему

$$\dot{x} = f\big(x, u(x)\big) = Ax + BFx + h\big(x, u(x)\big) + B\mathcal{H}(x),$$

тобто будемо вимагати, щоб матриця $A + BF$ була стійкою. В цьому випадку вектор-функції $x(t, x_0)$ і $u\big(x(t, x_0)\big)$ будуть спадати експоненціально, прямуючи до нуля, якщо $|x_0|$ достатньо мале. Точніше, якщо власні значення λ матриць $A + BF$ мають дійсні частини, менші ніж $-\mu$

$$\operatorname{Re} \lambda[A + BF] <- \mu < 0,$$

то

$$|x(t, x_0)| \leq c_1 e^{-\mu t}|x_0| \text{ для } 0 \leq t < \infty$$

при деякому додатному $c_1 > 0$. Більше того, ця оцінка вірні і для розв'язків з комплексними початковими значеннями z_0, тобто

$$|x(t, z_0)| \leq c_1 e^{-\mu t}|z_0| \text{ для } 0 \leq t < \infty$$

і існує позитивна константа c_2, така що

$$u|x(t, z_0)| \leq c_2|x(t, z_0)| \leq c_1 c_2 e^{-\mu t}|z_0|,$$

при достатньо малому $|z_0|$. Ці основні оцінки для $|x(t, z_0)|$ і $u|x(t, z_0)|$ показують, що інтеграл, який представляє критерій якості, повинен сходитися до кінцевого значення $J(z_0, u)$. Необхідно знайти оптимальне керування, яке б мінімізувало функціонал $J(x_0, u)$ при усіх x_0 з деякого околу початку координат в R^n.

Отже, наша задача є узагальненням задачі синтезу оптимальних керувань, де розглядається спрощена система в R^n,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$C(u) = \int_0^\infty [x'Wx + u'Uu]dt,$$

і шукається оптимальне лінійне керування з оберненим зв'язком

$$u = F^* x.$$

Нагадаємо, що $F^* = U^{-1}B'E^*$ визначалось за допомогою єдиної від'ємно визначеної матриці E^*, що задовольняє матричному квадратному рівнянню

$$A'E + AE + EBU^{-1}B'E = W.$$

Ми будемо розглядати питання побудови і єдиності оптимального керування $u^*(x)$ з оберненим зв'язком для нелінійної системи (2.7), спираючись на основну лему про аналітичні властивості критерію якості $J(x_0, u)$. Зауважимо, що функціонал $J(x_0, u)$ є дійснозначною функцією дійсного вектору x_0 (поблизу початку координат в R^n) і аналітичної функції від u. Як тільки функція $u = u_1(x)$ визначена, функціонал $J(z_0, u_1)$ можна розглядати як комплексну функцію комплексної змінної z_0.

Лема 2.1. *Розглянемо дійсну аналітичну систему в* R^n*:*

$$\dot{x} = f(x,u) = Ax + Bu + h(x,u) \tag{2.8}$$

з критерієм якості

$$J(x_0,u) = \int_0^\infty G(x,u)dt = \int_0^\infty [x'Wx + u'Uu + H(x,u)]dt,$$

що залежить від аналітичного керування з оберненим зв'язком

$$\hat{u}(x) = \hat{F}x + \hat{\mathcal{H}}(x)$$

і з початковим станом x_0*. Припустимо, що* $A + B\hat{F}$ *– стійка матриця. Тоді:*

1) *існує окіл* $\widehat{N}_c$ *початку координат в комплексному* n *– вимірному просторі, де*

$$J(z_0,\hat{u}) = -z_0'\hat{E}z_0 + \hat{J}^{(s)}(z_0) + \cdots$$

буде аналітичною функцією від z_0*. Більше того, матриця*

$$\hat{E} = -\int_0^\infty e^{(\boldsymbol{A}' + \hat{F}'B')t}\left(W + \hat{F}'U\hat{F}\right)e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\hat{F})t}dt$$

залежить лише від спрощеної системи (з коефіцієнтами $A, B, W, U, \hat{F}$*), а функція* $J(x_0,\hat{u})$ *розкладається в дійсний степеневий ряд.*

2) *в околі* $\widehat{N}_c$ *функція* $J(z,\hat{u})$ *задовольняє функціональному рівнянню*

$$\frac{\partial J(z,\hat{u})}{\partial z} f\big(z,\hat{u}(z)\big) + G\big(z,\hat{u}(z)\big) \equiv 0.$$

Доведення. Оскільки матриця $A + B\hat{F}$ стійка, то $\operatorname{Re}\lambda\big[A + B\hat{F}\big] < -\mu < 0$ для деякого $\mu > 0$. Отже існує окіл $\widehat{N}_c$ початку координат в комплексному n – вимірному просторі, в якому кожен розв'язок $x(t,z_0)$ системи

$$\dot{x} = f\big(x,u(x)\big) = A + B\hat{F} + \cdots,$$

що виходить з точки $x_0 \in \widehat{N}_c$, назавжди залишається в $\widehat{N}_c$, і задовольняє основній нерівності

$$|x(t,z_0)| \leq c_1 e^{-\mu t}|z_0| \text{ для } 0 \leq t < \infty$$

Користуючись цією оцінкою для $|x(t,z_0)|$ і нерівністю

$$|\hat{u}(z)| \leq c_3|z| \text{ в } \widehat{N}_c,$$

отримуємо

$$\left|G\big(z,\hat{u}(z)\big)\right| \leq c_3 e^{-2\mu t}|z_0|$$

для позитивних сталих c_1, c_2, c_3, що не залежить від z_0 в $\widehat{N}_c$.

Функції $x(t, z_0)$ і $\hat{u}(x(t, z_0))$ аналітично залежать від z_0 в $\widehat{N}_c$ при кожному фіксованому $t \geq 0$. Оскільки інтеграл

$$J(z_0, \hat{u}) = \int_0^\infty G\left(x(t, z_0), \hat{u}(x(t, z_0))\right) dt$$

рівномірно сходиться в $\widehat{N}_c$, то можна зробити висновок, що $J(z_0, \hat{u})$ є аналітична функція від z_0 в $\widehat{N}_c$.

Для того щоб отримати степеневий ряд для $J(x_0, \hat{u})$, потрібно розкласти функцію $x(t, x_0)$ в ряд по степеням x_0 в $\widehat{N} = \widehat{N}_c \cap R^n$. Легко побачити, що

$$x(t, x_0) = e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\hat{F})t}\, x_0 + \text{члени вищих порядків}$$

і

$$\hat{u}(x(t, x_0)) = \hat{F} e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\hat{F})t}\, x_0 + \text{члени вищих порядків.}$$

Якщо здійснити почленне інтегрування $G\left(x(t, z_0), \hat{u}(x(t, z_0))\right)$, то легко вирахувати

$J(x_0, \hat{u}) = \int_0^\infty x_0' e^{(\boldsymbol{A}'+\hat{F}'B')t} W e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\hat{F})t} x_0 dt +$
$\int_0^\infty x_0' e^{(\boldsymbol{A}'+\hat{F}'B')t} \hat{F}' U \hat{F} e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\hat{F})t} x_0 dt +$ члени 3-го і вищих порядків.

В цьому випадку $J(x_0, u)$ має необхідну форму.

Щоб довести справедливість цього твердження, необхідно оцінити члени вищих порядків в $x(t, x_0)$. Для цього запишемо

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \hat{f}(x(s, x_0)) ds$$

і

$$x_L(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \hat{f}_x(0) x_L(s, x_0) ds$$

де

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(x, \hat{u}(x)) \text{ і } \hat{f}_x(0) = A + B\hat{F}$$

Така різниця

$$\Delta(t, x_0) = x(t, x_0) - x_L(t, x_0) = \int_0^t \left[\hat{f}(x(s, x_0)) - \hat{f}_x(0) x_L(s, x_0)\right] ds$$

так що

$$\Delta = \int_0^t \left[\hat{f}_x(0)x(s,x_0) + \varepsilon(s,x_0) - \hat{f}_x(0)x_L(s,x_0)\right]ds$$

і

$$\Delta = \int_0^t \left[\hat{f}_x(0)\Delta(s,x_0) - \varepsilon(s,x_0)\right]ds$$

де

$$|\varepsilon(t,x_0)| \leq c_4|x(t,x_0)|^2 \leq c_5 e^{-2\mu t}|x_0|^2.$$

Отже,

$$\Delta(t,x_0) = e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\hat{F})t}\int_0^t e^{-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\hat{F})t}\varepsilon(s,x_0)ds$$

і

$$|\Delta(t,x_0)| \leq c_5 e^{-\mu t}|x_0|^2, \text{ для в } x_0 \in \widehat{N}_c,\ t \geq 0$$

Це дає необхідну оцінку

$$x(t,x_0) = e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\hat{F})t}x_0 + \Delta(t,x_0).$$

Тепер зауважимо, що

$$G\big(x,\hat{u}(x)\big) = x'Wx + \hat{u}'U\hat{u} + \gamma(x)$$

де $|\gamma(x)| \leq c_7|x|^3$. Таким чином,

$$G\left(x(t,x_0),\hat{u}\big(x(t,x_0)\big)\right) = x'Wx + \hat{u}'U\hat{u} + \gamma'\big(x(t,x_0)\big)$$

і

$$\int_0^t \left|\gamma\big(x(t,x_0)\big)\right|dt \leq c_8\int_0^t e^{-3\mu t}|x_0|^3 dt \leq c_9|x_0|^3.$$

Отже, в степеневий ряд для $J(x_0,\hat{u})$ входять лінійні і квадратичні члени від x_0з виразу

$$\int_0^t \left[e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\hat{F})t}x_0 + \Delta\right]' W\left[e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\hat{F})t}x_0 + \Delta\right]dt + \int_0^t \hat{u}'(x)U\hat{u}(x)dt.$$

Але

$$|\Delta_1(t,x_0)| \leq c_{10}|x(t,x_0)|^2 \leq c_{11}e^{-2\mu t}|x_0|^2.$$

Таким чином, квадратичні члени в $J(x_0,\hat{u})$ дорівнюють $\hat{J}^{(2)}(x_0) = -x_0'\hat{E}x_0$, і отже,

$$J(x_0,\hat{u}) = -x_0'\hat{E}x_0 + \hat{J}^{(3)}(x_0) + \cdots$$

як і вимагалося.

Перевіримо нарешті функціональні рівняння для $J(x,\hat{u})$ в $\widehat{N}$. (Звернемо увагу, що перший аргумент функції J для простоти часто позначений через x чи z.) Розв'язок $x(t,x_0)$ досягає точки x_{t_1} в момент $t=t_1$, і це нова точка може слугувати вихідною точкою в $\widehat{N}$. Таким чином,

$$J(x_t,\hat{u}) = \int_0^\infty G\left(x(s+t,x_0),\hat{u}\big(x(s+t,x_0)\big)\right)ds = \int_t^\infty G\left(x(s),\hat{u}\big(x(s)\big)\right)ds$$

Диференціюючи по t, отримаємо

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x_t,\hat{u})f\big(x_t,\hat{u}(x_t)\big) = -G\left(x(t,x_0),\hat{u}\big(x(t,x_0)\big)\right).$$

При $t=0$ маємо

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x_0,\hat{u})f\big(x_0,\hat{u}(x_0)\big) + G\big(x_0,\hat{u}(x_0)\big) \equiv 0.$$

В силу аналітичності в цьому функціональному рівнянні можна замінити x_0 довільним $z \in \widehat{N}_c$. Лема доведена.

Визначення. Аналітичне керування з оберненим зв'язком

$$u^*(x) = F^*x + \mathcal{H}^*(x),$$

що стабілізує аналітичну систему

$$\dot{x} = f(x,u) = Ax + Bu + h(x,u) \text{ в } R^n \tag{2.9}$$

називається оптимальним, якщо воно мінімізує критерій якості, тобто, якщо

$$J(x_0,u^*) \le J(x_0,u_1)$$

для кожного аналітичного керування $u_1(x)$. (Нерівність справедлива в деякому околі N_1 початку координат R^n, що залежить від $u_1 = u_1(x)$.)

Будемо шукати оптимальне керування u^*, як розв'язок функціонального рівняння

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,u^*)\frac{\partial f}{\partial u}\big(x,u^*(x)\big) + \frac{\partial G}{\partial u}\big(x,u^*(x)\big) = 0.$$

Пізніше ми дослідимо структуру розв'язку $u^*(x)$, і покажемо, що матриця F^* має вигляд $F^* = U^{-1}B'E^*$ так же, як і для спрощеної системи. Перед тим як доводити єдиність оптимального керування $u^*(x)$, домовимось вважати дві аналітичні функції рівними (або еквівалентними), якщо вони співпадають в якому небудь околі початку координат R^n.

Теорема 2.3. *Нехай $u^* = u^*(x) = F^*x + \mathcal{H}^*(x)$ – аналітичне керування з оберненим зв'язком, що стабілізує аналітичну в R^n систему:*

$$\dot{x} = f(x,u) = Ax + Bu + h(x,u) \tag{2.10}$$

з кінцевим критерієм якості

$$J(x_0,u^*) = \int_0^\infty G\big(x,u^*(x)\big)dt = \int_0^\infty [x'Wx + u^{*\prime}Uu^* + H(x,u^*)]dt$$

Якщо u^* є розв'язком функціонального рівняння

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,u^*)\frac{\partial f}{\partial u}\big(x,u^*(x)\big) + \frac{\partial G}{\partial u}\big(x,u^*(x)\big) = 0$$

Поблизу початку координат, то u^* буде оптимальним керуванням з оберненим зв'язком поблизу початку координат R^n.

Більше того, u^* буде єдиним в тому сенсі, що:

1) *u^* єдиний аналітичний розв'язок функціонального рівняння;*
2) *u^* - єдине оптимальне аналітичне керування з оберненим зв'язком;*
3) *u^* дає єдине оптимальне керування в вигляді розімкнутого ланцюга. Це означає, що існують $\varepsilon > 0$ і окіл N^* такі, що для кожного $x_0 \in N^*$ розв'язок $x^*(t)$ задовольняє рівнянню*

   $$\dot{x} = f\big(x,u^*(x)\big), \qquad x^*(0) = x_0, \qquad x^*(t) \subset N^*,$$

   а відповідне керування

   $$u^*(t) = u^*\big(x^*(t)\big)$$

   є єдиним керуванням в вигляді розімкнутого ланцюга серед усіх вимірних керувань $u(t)$ на інтервалі $0 \le t \le \infty$, що задовольняють обмеженню $|u(t)| \le \varepsilon$ з відповідними розв'язками $x(t) \subset N^*$, що надають критерію якості

   $$C(u) = \int_0^\infty G\big(x,u(t)\big)dt$$

   мінімальне значення.

Доведення. Розглянемо дійснозначну функцію від $u \in R^m$, при x близькому до початку координат в R^n,

$$Q(u) = \frac{\partial J}{\partial x}(x,u^*)f(x,u) + G(x,u)$$

Маємо симетричну квадратичну форму

$$\left.\frac{\partial^2 Q}{\partial u^i \partial u^j}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} = U > 0.$$

Тому існує таке $\varepsilon_1 > 0$, що для всіх $|x_1| < \varepsilon_1$ і $|u_1| < \varepsilon_1$ графік функції $Q(u)$ лежить вище дотичної гіперплощини при $u = u_1$ (принаймні для всіх $|u| < \varepsilon_1$). З припущеної теореми слідує, що

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial u^i}\right|_{u=u^*(x)} = 0,$$

а, отже,

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,u^*)f\big(x,u^*(x)\big) + G\big(x,u^*(x)\big) < \frac{\partial J}{\partial x}(x,u^*)f(x,u_1) + G(x,u_1)$$

для всіх $u_1 \neq u^*(x)$, якщо тільки $|x| < \varepsilon_1$, $|u^*(x)| < \varepsilon_1$ і $|u_1| < \varepsilon_1$.

Нехай $u_1 \neq u^*(x)$ – аналітичне керування з оберненим зв’язком, і N_1^0 – такий окіл початку координат в R^n, що

$$|x| < \varepsilon_1,\ |u^*(x)| < \varepsilon_1,\ |u_1| < \varepsilon_1 \text{ в } N_1^0$$

і всі розв’язки $x^*(t)$ чи $x_1(t)$, відповідні керування з оберненимзв’язком, що виходить з $N_1 \subset N_1^0$, назавжди залишаються в N_1^0. Нехай $u_1(x_0) \neq u^*(x_0)$ в деякій точці $x_1 \in N_1$; тоді з леми слідує, що

$$0 < \int_0^\infty \left[\frac{\partial J}{\partial x}(x_1(t),u^*)f\left(x_1(t),u_1\big(x_1(t)\big)\right) + G\left(x_1(t),u_1\big(x_1(t)\big)\right)\right]dt.$$

Звідси отримуємо необхідний результат:

$$0 < -J(x_0,u^*) + J(x_0,u_1).$$

Отже,

$$J(x_0,u^*) < J(x_0,u_1)$$

і u^* це єдине оптимальне аналітичне керування з оберненим зв’язком. Отже, u^* буде єдиним аналітичним розв’язком функціонального рівняння, що вказано в умові теореми.

Нарешті, нехай $\hat{u}(t)$ – будь яке вимірне аналітичне керування в вигляді розімкнутого ланцюга, прикладене до системи з початковим станом $\hat{x}_0$. Виберемо додатне $\varepsilon < \varepsilon_1$ і окіл $N^* \subset N_1$ початку координат так, щоб

$$|x^*(t)| \le \varepsilon \text{ і } \left|u^*\big(x^*(t)\big)\right| \le \varepsilon \text{ при } 0 \le t < \infty$$

для оптимального розв’язку $x^*(t)$, що виходить з $\hat{x}_0$. Припустимо також, що N^* це окіл в якому залишаються усі розв’язки, що відповідають оптимальному керуванню $u^*(x)$. Будемо тепер вимагати, щоб $|\hat{u}(t)| \le \varepsilon$ і щоб відповідний розв’язок $\hat{x}(t)$ лежав в N^*. Тоді, як і вище,

$$0 = \frac{\partial J}{\partial x}(x,u^*)f\big(x,u^*(x)\big) + G\big(x,u^*(x)\big) < \frac{\partial J}{\partial x}(x,u^*)f\big(x,\hat{u}(t)\big) + G\big(x,\hat{u}(t)\big)$$

скрізь, де $\hat{u}(t) \neq u^*(\hat{x})$. Якщо $\hat{u}(t) \equiv u^*\big(\hat{x}(t)\big)$ майже всюди на інтервалі $0 \le t < \infty$, то з теореми єдиності для диференціальних рівнянь слідує, що $\hat{x}(t) \equiv x^*(t)$, звідки і $\hat{u}(t) \equiv \hat{u}^*\big(x^*(t)\big)$. Припустимо тепер, що $\hat{u}(t) \neq u^*\big(\hat{x}(t)\big)$ на деякому проміжку ненулевої довжини. Тоді

$$0 < \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial J}{\partial x}(\hat{x}(t), u^*) f\big(\hat{x}(t), \hat{u}(t)\big) + G\big(\hat{x}(t), \hat{u}(t)\big)\right] dt.$$

Оскільки керування $\hat{u}(t)$ передає кінцеве значення критерію якості

$$C(\hat{u}) = \int_0^{\infty} G\big(\hat{x}(t), \hat{u}(t)\big) dt,$$

то легко показати, що $\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = 0$. А отже

$$0 < -J(x_0, u^*) + C(\hat{u})$$

і

$$C(u^*) = J(x_0, u^*) < C(\hat{u}).$$

І так, $u^*\big(x^*(t)\big)$ є єдиним оптимальним керуванням в вигляді розімкнутого ланцюга для $\hat{x}_0$ при заданих обмеженнях. Теорему доведено.

Зауваження. Для спрощеної системи

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad J(x_0, u) = \int_0^{\infty} \big[[x'Wx + u'Uu]\big] dt$$

оптимальне керування з оберненим зв'язком має вигляд

$$u^* = F^* x,$$

де $F^* = U^{-1} B' E^*$, а E^* - єдина від'ємновизначена матриця, що задовольняє рівнянню

$$A'E + AE + EBU^{-1}B'E = W.$$

Зауважимо тепер, що для нелінійної системи

$$\dot{x} = Ax + Bu + h(x, u) \tag{2.11}$$

$$J(x_0, u) = \int_0^{\infty} [x'Wx + u'Uu + H(x, u)] dt$$

оптимальне керування з оберненим зв'язком

$$u^*(x) = F^* x + \mathcal{H}^*(x)$$

має той же самий член першого порядку $F^* x$, що і для спрощеної лінійної системи (якщо припускати існування аналітичного розв'язку функціонального рівняння теореми 2.3).

Щоб показати це, будемо шукати оптимальне керування

$$\hat{u}(x) = \hat{F} x + \widehat{\mathcal{H}}(x)$$

з критерієм якості

$$J(x_0, \hat{u}) = -\, x_0' \hat{E} x_0 + \hat{J}^{(3)}(x_0) + \cdots,$$

$$\hat{E} = -\int_0^\infty e^{(A'+\hat{F}'B')t}\left(W + \hat{F}'U\hat{F}\right)e^{(A+B\hat{F})t}dt,$$

і будемо вимагати щоб задовольнялось функціональне рівняння

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x(t),\hat{u})\frac{\partial f}{\partial u}\left(x,\hat{u}(x)\right) + \frac{\partial G}{\partial u}\left(x,\hat{u}(x)\right) = 0.$$

Виділимо лінійну частину цього функціонального рівняння,

$$-2x'\hat{E}B + 2x'\hat{F}'U = 0,$$

або

$$\hat{F} = U^{-1}B'\hat{E}.$$

Однак інтегральний вираз для $\hat{E}$ показує, що $\hat{E}$ це єдиний від'ємно визначений розв'язок рівняння Ляпунова

$$\hat{E}\left(A + B\hat{F}\right) + \left(A' + \hat{F}'B'\right)\hat{E} = W + \hat{F}'U\hat{F}.$$

Звідси робимо висновок, що $\hat{E}$ повинно задовольняти рівнянню

$$A'E + EA + EBU^{-1}B'E = W.$$

Отже, $\hat{E} = E^*$ і, значить, $\hat{F} = F^*$, як і вимагалося.

На завершення, покажемо, що кубічні члени критерію якості $J(x,u) = -x'E^*x + J^{(3)}(x) + \cdots$, який обчислено для керування з оберненим зв'язком

$$u = F^*x + \mathcal{H}(x),$$

яке починається з члену $F^*(x)$, повністю визначаються наступними даними: $\left\{A, B, W, U, F^*, h^{(2)}, H^{(3)}\right\}$. Зауважимо, що

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,u)f\left(x,u(x)\right) + G\left(x,u(x)\right) = 0$$

і прирівняємо кубічні члени нулю:

$$-2x'E^*\left[BU^{(2)}(x) + h^2(x,F^*x)\right] + \frac{\partial J^{(3)}}{\partial x}[Ax + BF^*x] + (F^*x)'Uu^{(2)} + u^{(2)\prime}UF^*x + H^{(3)}(x,F^*x) \equiv 0$$

Оскільки $F^* = U^{-1}B'E^*$, то

$$-2x'E^*B + 2x'{F^*}'U = 0$$

і, значить,

$$\frac{\partial J^{(3)}}{\partial x}[Ax + BF^*x] = 2x'E^*h^2(x,F^*x) - H^{(3)}(x,F^*x).$$

Однак це диференціальне рівняння в частинних похідних може мати лише один розв'язок $J^{(3)}(x)$, оскільки різниця $\Delta J(x)$ між будь якими двома розв'язками повинна бути постійною вздовж кожної інтегральної кривої асимптотично стійкої системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = (A + BF^*)x.$$

В цьому випадку $\Delta J(x)$ повинна мати стале значення $\Delta J(0) = 0$ в деякому околі початку координат в R^n. І так, будь які два розв'язки $J^{(3)}(x)$ можуть відрізнятися найбільше на адитивну сталу. Але $J^{(3)}(0) = 0$, і значить, $J^{(3)}(x)$ однозначно визначається з вказаного вище диференціального рівняння в частинних похідних, а в нього входять лише дані $\{A, B, W, U, F^*, h^{(2)}, H^{(3)}\}$, як і вимагалося.

Розділ 3. Метод усереднення в задачах оптимального керування.

3.1. Постановка задачі на скінченному інтервалі

Розглядається задача оптимального керування системою звичайних диференціальних рівнянь в стандартній за Боголюбовим формі:

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x, u),$$
$$x(0, u(0)) = x_0 \qquad (3.1.1)$$

з критерієм якості

$$J(u) = \Phi(x(\frac{T}{\varepsilon}, u))$$

на відрізку $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$, де $\varepsilon > 0$ - малий параметр, фазовий вектор $x \in D$, D - область в R^n, $u \in U \subset R^m$ - вектор керування, $t \geq 0, T > 0$ деяка константа, X - вектор-функція, неперервна за сукупністю змінних,

$\Phi(x)$ - деяка функція. Позначимо $x(t, u)$ - розв'язок системи (3.1.1), що відповідає керуванню $u(t)$. Керування $u(t)$ вважаються допустимими, якщо

a1) $u(t)$ - вимірні, локально інтегровні при $t \geq 0$ та $u(t) \in U$ при $t \geq 0$;

b1) для кожного керування $u(t) \in U$ існує стала $u_0 \in U$, що $|u(t) - u_0| \leq \phi(t)$, де $\phi(t)$ не залежить від $u(t)$ і $\int_0^\infty \phi(t)dt < \infty$;

c1) існує $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок $x(t, u)$ задачі Коші (3.1.1) визначений при $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$, де ε_0 не залежить від $u(t)$. Множину допустимих керувань позначимо F. Потрібно знайти такі допустимі керування $u(t)$, що забезпечують мінімальне значення вище згаданого функціоналу $J(u) = \Phi(x(\frac{T}{\varepsilon}, u))$.

Позначимо $J^* = \inf_{u(t) \in F} J(u) \;\; J(u)$.

Задачі (3.1.1) поставимо у відповідність наступну усереднену задачу оптимального керування:

$$\dot{y} = \varepsilon X_0(y, \bar{u}), \qquad (3.1.2)$$
$$y(0, \bar{u}(0)) = x_0$$

з критерієм якості

$$\bar{J}(u) = \Phi(y(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u})),$$

де

$$X_0(x, u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{o}^{T} \mathrm{X(t, x, u)dt} \qquad (3.1.3)$$

Тут $\bar{u}$ - допустимі керування усередненої задачі (3.1.2) задовольняють ті ж умови, що і допустимі керування точної задачі (3.1.1), де умова (c1) виконується для розв'язку задачі Коші (3.1.2). Позначимо $\overline{J^*} = \inf_{\bar{u}(t)\in \bar{F}} \bar{J}(\bar{u})$, де $\bar{F}$ - множина допустимих керувань усередненої задачі. Варто відмітити, що хоча задача (3.1.1) є досить загальною нелінійною задачею, умова b1) обмежує клас допустимих керувань. Проте звузивши клас керованих систем, можна отримати більш сильні результати. Для багатьох прикладних задач досить обмежитися тим випадком, коли керування входять в систему лінійно. Для такого класу керованих систем можна відмовитися від обтяжливої умови b1). Отже, розглядається задача оптимального керування лінійною за керуванням системою диференціальних рівнянь наступного виду:

$$\dot{x} = \varepsilon[A(t, x) + B(t, x)u] \qquad (3.1.4)$$
$$x(0, u(0)) = x_0,$$

де $\varepsilon > 0$ —малий параметр, $t \geq 0, T > 0$ —деяка константа, $x \in D$ — фазовий вектор, D — область в R^n, $u \in U \subset R^m$ — вектор керування, U — опукла і замкнена множина, $0 \in U$, A — вектор-функкція, B — $n \times m$-матриця.

Керування $u(t)$ вважаються допустимими, якщо

a2) $u(t) \in L_p(0, \frac{T}{\varepsilon})$ для деякого $p > 1$;

b2) $u(t) \in U$ при $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$;

c2) існує $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок задачі Коші (3.1.4) $x(t, u)$ визначений на $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$, де ε_0 не залежить від $u(t)$.

Множину допустимих керувань позначимо Ω.

Потрібно знайти такі допустимі керування $u(t)$, що забезпечують мінімальне значення функціоналу

$$J(u) = \varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} [\mathrm{C(t,x)} + \mathrm{F(t,u)}]\mathrm{dt}$$

де $F(t, u)$ визначенапри $t \geq 0, x \in D$, опукла по u, неперервна знизу по u для довільного фіксованого t і така, що існує $a > 0$ та $\alpha \in R$, що $F(t, u) \geq a|u|^p + \alpha$ та для деякого $K > 0$, $\varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \mathrm{F(t,0)dt} \leq \mathrm{K}$ для довільного $\varepsilon > 0$. Відносно системи (3..4) вважаємо виконаними наступні умови:

2.1) Існують такі $A_0(x)$ і $B_0(x)$, що рівномірно по $x \in D$ виконуються наступні співвідношення:

$$\lim_{T \to \infty} \left| \frac{1}{T} \int_0^t (A(t, x)dt - A_0(x))dt \right| = 0$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^t \|B(t, x)dt - B_0(x)\|^q dt = 0$$

де q визначається з умови $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

2.2) $A(t,x), B(t,x)$ — визначені, вимірні по t при кожному x, $C(t,x)$ — визначена і неперервна при $t \geq 0, x \in D$;

2.3) $A(t,x), B(t,x), C(t,x)$ — обмежені сталою M при $t \geq 0, x \in D$;

2.4) $A(t,x), B(t,x), C(t,x)$ —ліпшицеві по x зі сталою L в області D.

Поставимо у відповідність задачі (3.4) на $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ наступну усереднену задачу:

$$\begin{gathered} \dot{y} = \varepsilon[A_0(y) + B_0(y)\bar{u}] \\ y(0, \bar{u}(0)) = x_0, \end{gathered} \tag{3.1.5}$$

де $\bar{u}$ –допустимі керування усередненої задачі, які задовольняють ті ж умови, що і допустимі керування точної задачі (3.1.4), де умова (c2) виконується для розв'язку задачі Коші (3.1.5). Множину допустимих керувань позначимо Ω. Критерій якості усередненої задачі наступний:

$$\bar{J}(\bar{u}) = \varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} [C(t,y) + F(t,\bar{u})]dt.$$

Позначимо $J_\varepsilon^* = \inf\limits_{u(t)\in\Omega} \mathrm{J}_\varepsilon(\mathrm{u})$, $\overline{J_\varepsilon^*} = \inf\limits_{u(t)\in\Omega} \bar{\mathrm{J}}_\varepsilon(\bar{\mathrm{u}})$

Метою даного розділу є отримання наступних тверджень для нелінійної та для лінійної за керуванням задач оптимального керування: для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ виконується нерівність

$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\overline{u^*})| \leq \eta$, $\overline{u^*}$ — оптимальне керування усередненою системою. При цьому у випадку лінійної за керуванням задачі при $\varepsilon < \varepsilon_1$ для деякого $\varepsilon_1 > 0$ доводиться існування розв'язків точної та усередненої задач на відрізку.

Слід зауважити, що при існуванні такого $C_0(x)$, що рівномірно по $x \in D$ виконується співвідношення

$$\lim_{T\to\infty} \left| \frac{1}{T} \int_0^T C(t,x)dt - C_0(x) \right| = 0 \tag{B}$$

функціонал в усередненій задачі (3.1.5) можна взяти у вигляді

$$\overline{J_\varepsilon}(\bar{u}) = \varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} [C_0(y) + F(t,\bar{u})]\, dt. \qquad (3.1.6)$$

Надалі будемо вважати виконаною для усередненої системи (3.1.5) наступну умову:

(А) Якщо керування $\bar{u}$ задовольняють оцінку

$$\varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} |\bar{u}(t)|^p\, dt \le C,$$

де $C > 0$ і не залежить від ε і $\bar{u}$, то існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0\,(C)$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок усередненої задачі Коші $y(t,\bar{u})$ лежить при $t \in [0,\frac{T}{\varepsilon}]$ в області D разом з деяким ρ-околом, причому ρ не залежить від ε і від $\bar{u}$.

3.2. Лема про усереднення

Цей підрозділ присвячено лемам про близькість розв'язків початкової системи оптимального керування та розв'язків відповідної усередненої системи у нелінійному та лінійному за керуванням випадках.

Лема 3.2.1.

Нехай в області $Q = \{x \in D, t \ge 0, u \in U\}$ *виконані умови:*

1) $X(t,x,u)$ *- вимірна по* t*, обмежена сталою К та задовольняє умову Ліпшиця по* x *та* u *з константою* M*;*

2) розв'язок $\bar{y} = \bar{y}(t,u_0), \bar{y}(0,u_0) = x_0$ *усередненої системи*

$$\dot{\bar{y}} = \varepsilon X_0(\bar{y},u_0)$$
$$y(0) = x_0, \qquad (3.2.1)$$

визначений при всіх $t \geq 0$ *для всіх сталих керувань* $u_0 \in U$ *і лежить в області D разом з деяким* ρ*-околом, що не залежить від* ε *і* u_0 *;*

3) рівномірно відносно $x \in D$ *та* $u \in U$ *існує границя*

$$X_0(x,u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t,x,u)dt$$

Тоді для $\forall\eta > 0$ *і* $T > 0$ *існує* $\varepsilon_0(\eta, T) > 0$*, що для довільного* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *розв'язки задач Коші для точної системи (3.1) і усередненої системи (3.1.2) визначені на* $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ *і справедлива оцінка* $|x(t,u) - y(t,u)| \leq \eta$ *для кожного керування, що задовольняє умови (a1) та (b1).*

3.3. Оптимальне керування та метод усереднення. Нелінійний випадок

У цій частині розділу отримано результат, що встановлює зв'язок між оптимальним керуванням усередненої та точної задач у нелінійному випадку, а саме доводиться, що оптимальне керування усередненою задачі є η-оптимальним для точної задачі.

Теорема 3.3.1. *Нехай в області* $Q = \{x \in D \subset R^n, t \geq 0, u \in U \subset R^m\}$ *виконуються наступні умови:*

1) $X(t,x,u)$ *- вимірна по* t*, обмежена сталою* K *та задовольняє умову Ліпшиця по* x *та* u *з константою* M*;*

2) розв'язок $\bar{y} = \bar{y}(t,u_0)$*,* $\bar{y}(0,u_0) = x_0$ *усередненої системи (3.7) визначений при всіх* $t \geq 0$ *для всіх сталих керувань* $u_0 \in U$ *і лежить в області* D *разом з деяким* ρ*-околом, що не залежить від* ε *і* u_0 *;*

3) рівномірно відносно $x \in D$ *та* $u \in U$ *існує границя (3.3);*

4) функція $\Phi(x)$ *задовольняє умову Ліпшиця з константою L в області* D*;*

5) існує оптимальне керування $u^*(t, \varepsilon)$ *системи (3.2).*

Тоді для $\forall \eta > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$*, що*

а) для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $J^* > -\infty$;

б) виконується нерівність $|J(u^*(t, \varepsilon)) - J^*| \leq \eta$.

Отже, доведено, що оптимальне керування усередненою системою є η - оптимальним для точної системи.

Розділ 4. Метод усереднення в задачах оптимального керування імпульсними системами.

4.1. Постановка задачі.

Розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь:

$$
\begin{gathered}
\frac{dx}{dt} = \varepsilon X\big(t, x, u(t)\big), \qquad t \neq t_i, \\
X\big(0, u(o)\big) = x_0 \\
\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i + 0) - x(t_i - 0) = \varepsilon I_i\big(x(t_i)\big).
\end{gathered} \tag{4.1}
$$

з критерієм якості

$$
J(u) \; = \; \Phi(x(\frac{T}{\varepsilon})) \to inf \tag{4.2}
$$

де t_i – фіксовані моменти імпульсної дії, $t_i \to \infty,\ i \to \infty$; ε – малий параметр, $u = u(t)$ – вектор керування.

Системі (4.1) ставиться у відповідність усереднена керована система

$$
\begin{gathered}
\frac{dy}{du} = \varepsilon[X_0(y, u) + I_0(y)] \\
y\big(o, u(0)\big) = y_0
\end{gathered} \tag{4.3}
$$

з критерієм якості

$$
J(u) = \; \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) \to inf, \tag{4.4}
$$

де

$$X_0(y,u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t,y,u)\,dt,$$

$$I_0(y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{0\le t_{i<T}} I_i(y).$$

Метою даного розділу є отримання результатів для імпульсних систем, аналогічних результатам попереднього розділу для звичайних диференціальних рівнянь.

Відносно задач (4.1)-(4.2) та (4.3)-(4.4) вважаємо виконаними припущення a1), b1), c1) розділу 3.1.

4.2. Лема про усереднення

Цей підрозділ присвячено доведенню леми про близькість розв'язків початкової системи (4.1) та відповідних розв'язків усередненої системи (4.3). Дана лема є узагальненням теореми Боголюбова [3] на випадок залежності правих частин від функціональних параметрів.

Лема 4.2.1.

Нехай в області $Q = \{x \in D, t \ge 0, u \in U\}$ *виконані умови:*

1) $X(t,x,u)$ - *вимірна по* t*, обмежена сталою K та задовольняє умову Ліпшиця по* x *та* u *з константою* M*;*
2) $I_i(x)$ – *ліпшицеві зі сталою M;*
3) *розв'язок* $\bar{y} = \bar{y}(t,u_0), \bar{y}(0,u_0) = x_0$ *усередненої системи*

$$\dot{\bar{y}} = \varepsilon X_0(\bar{y},u_0) \qquad (4.5)$$

$$y(0) = x_0,$$

визначений при всіх $t \geq 0$ *для всіх сталих керувань* $u_0 \in U$ *і лежить в області* D *разом з деяким* ρ*-околом, що не залежить від* ε *і* u_0 *;*

4) *рівномірно відносно* $x \in D$ *та* $u \in U$ *існують границі*

$$X_0(x,u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t,x,u)dt,$$

$$I_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0\le t_i<T} I_i(x)$$

5) $\exists$ *стала* $C > 0$*, що* $i(t) \le CT$*, де* $i(t)$ *– кількість точок імпульсної дії на* $[0,t]$.

Тоді для $\forall \eta > 0$ *і* $T > 0$ *існує* $\varepsilon_0(\eta,T) > 0$*, що для довільного* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *розв'язки задач Коші для точної системи (4.1) і усередненої системи (4.3) визначені на* $[0,\frac{T}{\varepsilon}]$ *і справедлива оцінка* $|x(t,u) - y(t,u)| \le \eta$ *для кожного керування, що задовольняє умови (a1) та (b1).*

Доведення. Візьмемо довільне $\eta > 0$ та зафіксуємо його. Для $\varepsilon > 0$ і довільного допустимого керування $u(t)$ оцінимо на $[0,\frac{T}{\varepsilon}]$ норму різниці між розв'язками системи (4.1) та розв'язками системи (4.3). Для цього введемо у розгляд допоміжну систему вигляду

$$\begin{gathered}\frac{dz}{dt} = \varepsilon X(t,x,u_0), t \ne t_{i,}\\ \Delta z|_{t=t_i} = \varepsilon I_i\big(z(t_i)\big),\\ z(0) = z_0,\end{gathered} \tag{4.6}$$

де u_0 вибрано із умови b1) розділу 3.

Перейдемо до інтегрально-сумарних зображень розв’язків систем (4.1) та (4.6), [1, с. 20]

$$x(t) = x_0 + \varepsilon\int_0^t X\big(s, x(s), u(s)\big)ds + \varepsilon\sum_{0\le t_i<t} I_i(x(t_{i,})) \tag{4.7}$$

та

$$z(t) = x_0 + \varepsilon\int_0^t \mathrm{X}(\mathrm{s}, \mathrm{z}(\mathrm{s}), \mathrm{u}_0)\mathrm{ds} + \varepsilon\sum_{0\le t_i<t} I_i(z(t_{i,})) \tag{4.8}$$

Маємо, в силу умови Ліпшиця,

$$\begin{aligned}
&|x(t) - z(t)| \le \\
&\le \varepsilon\int_0^t \big|X\big(s, x(s), u(s)\big) - X\big(s, z(s), u(s)\big)\big|ds + \\
&+ \varepsilon\int_0^t \big|X\big(s, z(s), u(s)\big) - X(s, z(s), u_0)\big|ds + \\
&+ \varepsilon\sum_{0\le t_i<t}\Big|I_i\Big(x\big(t_{i,}\big)\Big) - I_i\Big(z\big(t_{i,}\big)\Big)\Big| \le \\
&\le \varepsilon M\int_0^t |x(s) - z(s)|ds + \varepsilon M\int_0^t |u(s) - u_0|ds + \\
&+ \varepsilon M\sum_{0\le t_i<t}\big|x\big(t_{i,}\big) - z(t_{i,})\big|\,.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Врахувавши b1), маємо, що для довільного $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$ отримаємо:

$$|x(t) - z(t) \leq|$$

$$\leq \varepsilon M \int_0^t |x(s) - z(s)|ds + \varepsilon M \int_0^t \varphi(s)ds + \tag{4.10}$$

$$+ \varepsilon M \sum_{0 \leq t_i < t} \left|x\left(t_{i,}\right) - z\left(t_{i,}\right)\right|$$

Позначимо $B = \int_0^\infty \varphi(s)ds$. Тоді то

$$|x(t) - z(t)| \leq \varepsilon M \int_0^t |x(s) - z(s)|ds + \varepsilon MB + \varepsilon M \sum_{0 \leq t_i < t} \left|x\left(t_{i,}\right) - z(t_{i,})\right|,$$

Тоді, з урахуванням інтегро-сумарного аналогу нерівності Гронуолла-Беллмана [1, с.15] маємо оцінку

$$|x(t) - z(t)| \leq \varepsilon MBe^{M\frac{T}{\varepsilon}}(1 + \varepsilon M)^{i(\frac{T}{\varepsilon})}, \tag{4.11}$$

Але в силу умови 5) маємо, що

$$(1 + \varepsilon M)^{i(\frac{T}{\varepsilon})} \leq (1 + \varepsilon M)^{C\frac{T}{\varepsilon}} = \left((1 + \varepsilon M)^{\frac{1}{\varepsilon M}}\right)^{CTM} \leq e^{CTM}.$$

Тоді з (4.11) маємо оцінку

$$|\bar{x}(t) - z(t)| \leq \varepsilon MBe^{MT}e^{CTM}, \tag{4.12}$$

Звідки, поклавши $\varepsilon_0 = \frac{\eta}{2MBe^{TM+CTM}}$. При всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, для різниці $x(t)$ і $z(t)$ отримуємо нерівність

$$|x(t) - z(t)| \leq \frac{\eta}{2},$$

Справедливу при $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$, рівномірно за всіма допустимими керуваннями $u(t)$.

Для систем (4.6) та (4.3) справедлива теорема А.М. Самойленка про усереднення [55].

Тоді для вибраного $y > 0 \; \exists \; \varepsilon_1$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ отримуємо оцінку

$$|y(t) - z(t)| \le \frac{\eta}{2}, \; t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}] \tag{4.14}$$

Причому, в силу нерівності границь з умови 4) дана оцінка не залежить від $u(t)$.

Тоді з (4.12) і (4.14) отримуємо

$$|x(t) - y(t)| \le |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \le \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta$$

при $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$,

що і доводить лему.

Теорема 4.2.1. *Нехай в області* $Q = \{x \in D \subset R^n, t \ge 0, u \in U \subset R^m\}$ *виконуються наступні умови:*

1) $X(t,x,u)$ *- вимірна по* t*, обмежена сталою К та задовольняє умову Ліпшиця по* x *та* u *з константою* M*;*

2) розв'язок $\bar{y} = \bar{y}(t, u_0)$, $\bar{y}(0, u_0) = x_0$ *усередненої системи (4.5) визначений при всіх* $t \ge 0$ *для всіх сталих керувань* $u_0 \in U$ *і лежить в області* D *разом з деяким* ρ*-околом, що не залежить від* ε *і* u_0 *;*

3) рівномірно відносно $x \in D$ *та* $u \in U$ *існують границі з умови 4) леми 4.2.1.;*

4) функція $\Phi(x)$ *задовольняє умову Ліпшиця з константою L в області* D*;*

5) існує оптимальне керування $u^*(t, \varepsilon)$ *системи (4.5).*

Тоді для $\forall \eta > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$*, що*

а) для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad J^* > -\infty$;

б) виконується нерівність $|J(u^*(t, \varepsilon)) - J^*)| \le \eta$.

Доведення.

а) Покажемо, що для системи (4.1) $J^* = J_\varepsilon^* = \inf\limits_{u\in F} J(u) > -\infty$.

Доведення проведемо від супротивного. Нехай існує послідовність $\{\varepsilon_n\}$ така, що $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$, а

$$J_{\varepsilon_n} = -\infty \tag{4.15}$$

Для кожного з ε_n за означенням інфінума існує послідовність допустимих керувань u_m^n, що

$$J_{\varepsilon_n}(u_m^n) \to -\infty \text{ при } m \to \infty. \tag{4.16}$$

Позначимо $x_m^n = x(t, u_m^n)$ - розв'язок системи (4.1) при керуваннях u_m^n,

$y_m^n = y(t, u_m^n)$ - розв'язок системи (4.3) при керуваннях u_m^n. Зауважимо, що $J_{\varepsilon_n}(u_m^n) = \Phi(x_m^n(\frac{T}{\varepsilon_n}))$. Оскільки для системи (4.3) існує для кожного ε оптимальне керування, то $\bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) > \bar{J}_{\varepsilon_n}^* > -\infty$.

Зафіксуємо деяке $0 < \eta_0 < \frac{\rho}{2}$. З вище викладеного випливає існування натурального n_0, що для $0 < \varepsilon_n < \varepsilon_{n_0}$ справедливі оцінки

$$\left|J_{\varepsilon_n}(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n)\right| = \left|\Phi\left(x_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right) - \Phi\left(y_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right)\right| \le$$

$$\le L\left|x_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right) - y_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right| < L\eta_0.$$

Звідси маємо, що

$$J_{\varepsilon_n}(u_m^n) = J_{\varepsilon_n}(u_m^n) + \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) > J_{\varepsilon_n}(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) + \bar{J}^* >$$

$$> \bar{J}^* - L\eta_0,$$

що приводить до протиріччя з (4.16), а тому і з (4.15).

б) Доведемо тепер наступне твердження теореми. Для цього запишемо нерівність $J^* \le J(u^*(t,\varepsilon)) = \bar{J}^* + [J(u^*(t,\varepsilon)) - \bar{J}(u^*(t,\varepsilon))]$.

Оцінимо різницю

$$|\,J(u^*(t,\varepsilon)) - \bar{J}(u^*(t,\varepsilon))| \;=\; |\Phi(x(\tfrac{T}{\varepsilon}\,,u^*(t,\varepsilon))) - \Phi(y(\tfrac{T}{\varepsilon}\,,u^*(t,\varepsilon)))|.$$

Тут $x(\frac{T}{\varepsilon}\,,u^*(t,\varepsilon))$ – це розв'язок системи (4.1) при оптимальному керуванні $u^*(t,\varepsilon)$ усередненою системою, а $y(\frac{T}{\varepsilon}\,,u^*(t,\varepsilon))$ - оптимальний розв'язок системи (4.3). Використовуючи умову 4) теореми, маємо:

$$|\Phi(x(\frac{T}{\varepsilon}\,,u^*(t,\varepsilon))) - \Phi(y(\frac{T}{\varepsilon}\,,u^*(t,\varepsilon)))| \le\; L|x(\frac{T}{\varepsilon}\,,u^*(t,\varepsilon)) - y(\frac{T}{\varepsilon}\,,u^*(t,\varepsilon))|.$$

Застосовуючи лему 4.2.1 для довільного $0 \;<\; \eta_1 \;<\; \frac{\rho}{2}$ при всіх достатньо малих ε отримаємо оцінку:

$$J^* \;\le \bar{J}^* \;+\; L\eta_1 \qquad (4.17)$$

За означенням інфінуму маємо, що для вибраного $\eta_1 \;>\; 0$ існує керування $u_{\eta_1}(t,\varepsilon)$, з виконанням нерівності

$$J(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) \;<\; J^* \;+\; \eta_1.$$

З останнього отримується наступна оцінка

$$\bar{J}^* = \bar{J}(u^*(t,\varepsilon)) \;\le\; \bar{J}(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) \;\le\; \bar{J}(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) \;+\; J^* \;+\; \eta_1 \;- J(u_{\eta_1}(t,\varepsilon))$$

Оцінимо різницю $\left|\bar{J}\left(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)\right) - J\left(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)\right)\right|$, знову користуючись ліпшицевістю функції $\Phi(x)$ та лемою 4.2.1. Отримаємо оцінку

$$|\bar{J}\left(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)\right) - J\left(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)\right)| \;=\; |\Phi(y(\tfrac{T}{\varepsilon}\,,u_{\eta_1}(t,\varepsilon))) - \Phi(x(\tfrac{T}{\varepsilon}\,,u_{\eta_1}(t,\varepsilon)))| \le$$

$$\le L|(y(\tfrac{T}{\varepsilon}\,,u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) - x(\tfrac{T}{\varepsilon}\,,u_{\eta_1}(t,\varepsilon))| \le\; L\eta_1.$$

Отже, $\bar{J}^* \;\le\; J^* \;+\; (L \;+\; 1)\eta_1$, а звідси, застосовуючи (4.17) маємо

$$|J^* - \bar{J}^*| \le (\mathrm{L} + 1)\,\eta_1, \qquad (4.18)$$

Далі розглянемо різницю

$$|J(u^*(t,\varepsilon)) - J^*| \;=\; |J(u^*(t)) - \bar{J}^* \;+\; \bar{J}^* - J^*| \le |J(u^*(t)) - \bar{J}^*| + |\bar{J}^* - J^*|.$$

Використовуючи явний вигляд критерія оптимальності, маємо

$$\left|J\big(u^*(t,\varepsilon)\big)-\bar{J}^*\right| = \left|\Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon},u^*(t,\varepsilon)\right)\right)-\Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon},u^*(t,\varepsilon)\right)\right)\right| \le$$

$$\le\ L|x(\frac{T}{\varepsilon},u^*(t,\varepsilon))-y(\frac{T}{\varepsilon},u^*(t,\varepsilon))| \le\ L\eta_1.$$

Далі, застосовуючи попередню оцінку та нерівність (4.18), отримаємо

$$|J((u^*(t,\varepsilon))-J^*| \le\ \eta,$$

де $\eta := \ \eta_1(2L\ +\ 1)$.

Теорема доведена.

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt}=f(t,x), t\neq t_i\\ x(t_i+0)=x(t_i)+I_i\big(x(t_i)\big),\\ \Delta x(t_i)=I_i\big(x(t_i)\big),\end{gathered} \qquad (1)$$

t_i – задані моменти імпульсної дії.

Метод усереднення Боголюбова:

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,x),\\ x(o)=x_0\end{gathered}$$

- система в стандартній за Боголюбовим формі.

$$\exists\ X_0(y)=\lim_{T\to\infty}\int_0^T X(t,y)dt$$

Усереднена система:

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dt}=\varepsilon X_0(y),\\ y(o)=y_0\end{gathered} \qquad (2)$$

Система (2) є автономною.

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t X\big(s, x(s)\big) ds,$$

$$y(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t X_0(y(s)) ds$$

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon \int_0^t (X\big(s, x(s)\big) - X_0(y(s))) ds \leq \varepsilon 2Mt$$

$t \in [0, T]$, $|x(t) - y(t)|$ - мале

Висновки

Магістерська робота присвячена вивченню задач оптимального керування диференціальними рівняннями з імпульсною дією за допомогою методу усереднення. А саме, встановлено умови існування оптимального керування точної та усередненої задач керування та обґрунтовано оцінки близькості значень критеріїв якості точних систем на оптимальних керуваннях усереднених систем до точних нижніх граней цих критеріїв.

В магістерській роботі отримано наступні основні результати:

• запропоновано більш просту та наглядну процедуру усереднення;

• доведено існування оптимального керування вихідної задачі оптимального керування та відповідної усередненої задачі у випадку лінійної за керуванням системи;

• доведено твердження про близькість точних та відповідних усереднених систем у нелінійному випадку;

• знайдено умови, при яких оптимальне керування усередненої задачі є η-оптимальним для точної задачі у нелінійному випадку;

Дослідження задач оптимального керування є особливо актуальним в сьогоднішніх умовах інтенсивного використання природних багатств, матеріальних ресурсів, технічних засобів, людської праці, оскільки виникає потреба у застосуванні оптимального з можливих варіантів керування певним процесом. Запропоновані у роботі теореми можуть бути використані при розв’язанні задач оптимального керування реальними процесами. Одержані результати дозволяють при дослідженні задач оптимального керування використовувати більш просту усереднену задачу. При цьому керування точними системами можна здійснювати, використовуючи оптимальне керування усередненої задачі, і одержувати близьку до оптимальної поведінку початкового керованого об’єкту.

Список використаної літератури

1. Самойленко А. М. , Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - К.: Вища школа, 1987. - 288 с.
2. Самойленко А. М. Метод усреднения в системах с толчками / А. М. Самойленко // Мат. физика. — 1971. — Вып.9. — С. 101 – 117
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы тории оптимального управления.- перев. с англ., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1972. - 576 с.
4. Станжицкий А. Н. Метод усреднения в задачах оптимального управления системами дифференциальных уравнений / А. Н. Станжицкий, Т. В. Добродзий, В. И. Кравец // Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры: пятая междунар. конф., 9 - 10 октября 2009 г.: тезисы докл. — Актебе, 2009. — С. 115 - 117.
5. Станжицкий А. Н. Исследование задач оптимального управления на полуоси методом усреднения / А. Н. Станжицкий Т. В. Добродзий // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т.47, № 2. — С. 264 – 277.
6. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро—дифференциальных уравнениях / Филатов А. Н. — Ташкент: ФАН, 1971. — 278 с.
7. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. — К.: Либідь, 2003. — 599 с.
8. Плотников В. А. Метод усреднения в задачах оптимального управления / Плотников В. А. — Киев — Одесса: Лыбедь, 1992. — 188 с.
9. Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления / Акуленко Л. Д. — М.: Наука, 1987. — 368 с.