МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

М. О. Хмельницький

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітніми програмами «Системи, технології та математичні методи кібербезпеки»
та «Системи технічного захисту інформації» спеціальності 125 Кібербезпека

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент Терещенко І.М., канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ММАД

Відповідальний редактор Смирнов С.А., канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 24.06.2022 р.)
за поданням Вченої ради НН ФТІ
(протокол № 7 від 20.06.2022 р.)

Навчальний посібник розроблено для більш детального ознайомлення студентів з теоретичними відомостями та практичними прийомами лінійної алгебри та аналітичної геометрії, а також для використання на лекційних заняттях і для самостійної роботи студентів. У навчальному посібнику докладно викладено основні поняття, методи, алгоритми та приклади з базових тем дисципліни: системи лінійних рівнянь, матриці, визначники, векторна алгебра, лінійні та квадратичні образи на площині та в просторі, основні алгебраїчні структури, векторні простори, лінійна залежність та незалежність систем векторів, ранг систем векторів та матриць, комплексні числа, многочлени та основна теорема алгебри (многочленів), лінійні та білінійні функції, лінійні оператори та їх жорданова нормальна форма, евклідові простори та лінійні оператори в них. Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра, які навчаються за спеціальністю 125 Кібербезпека.

Реєстр. №НП XX/XX-XXX. Обсяг 9.1 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №5354 від 25.05.2017 р.

Зміст

Передмова

Посібник складається з розділів, а кожен розділ ділиться на пункти, назва якого відображає теоретичне питання, що виноситься на іспит. В кінці кожного пункту даються ключові слова, тобто терміни, зміст яких розкривається в даному теоретичному питанні, і опанування яких гарантує необхідний рівень засвоєння матеріалу. Так само питання та завдання для самоопрацювання. Відповіді на деякі питання та завдання для самоопрацювання можна знайти в наступних розділах.

Курс умовно можна поділити на дві частини: обчислювальну та якісну. Мета першої частини (обчислювальної) навчитися використовувати алгоритми лінійної алгебри для розв'язання задач практики. Друга частина (якісна) має за мету обгрунтування алгоритмів лінійної алгебри з першої частини.

Будь-коли можна задавати будь-які питання.

Консультації.

Розподіл балів.

Позначення

СЛР $m \times n$ — система(и) m лінійних рівнянь з n невідомими;
$\binom{n}{k}$ — біноміальний коефіфцієнт, який обчислюється за формулою $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;
$\mathbb{M} = \mathbb{M}_{m\times n}(P)$ — множина всіх матриць розмірності $m \times n$ з елементами з поля P;
——————————
$\mathbb{P}$ — множина простих чисел;
$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множина невід'ємних цілих чисел;
$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;
$\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел;
$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;
$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;
$\mathbb{Z}_m$ — кільце лишків за модулем m;
$\mathbb{Z}_m^*$ — мультиплікативна група кільця $\mathbb{Z}_m$;
$|M|$ — потужність множини M;
$\varnothing$ — порожня множина;

СЛР — система лінійних рівнянь;
СЛОР — система лінійних однорідних рівнянь;
ЕП — елементарне перетворення;
ЕПр — елементарне перетворення рядків;
ЕПс — елементарне перетворення стовпців;
ЛК — лінійна комбінація;
ФСР — фундаментальна система розв'язків (системи лінійних однорідних рівнянь);
АСК — афінна система координат;
ПДСК — прямокутна декартова система координат;
ПСК — полярна система координат;
ЦСК — циліндрична система координат;
ССК — сферична система координат;
БСК — барицентрична система координат;
ГМТ — геометричне місце точок;
СВ — система векторів;
ЛЗ — лінійно залежна (система векторів);
ЛНЗ — лінійно незалежна (система векторів);
СВр — система векторів-рядків (матриці);
СВс — система векторів-стовпців (матриці);

Нагадаємо, що зазвичай теореми формулюються у вигляді твердження «$A \Longrightarrow B$» або «$A \Longleftrightarrow B$», причому останнє твердження рівносильно твердженню «$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$».

У твердженні «$A \Longrightarrow B$» висловлювання A називається умовою або посилкою, а висловлювання B — наслідком або висновком. При цьому висловлювання A є достатньою умовою для B (якщо твердження «$A \Longrightarrow B$» є істинним, то для істинності висловлювання B достатньо, щоб істинним було висловлювання A), а B — необхідною умовою для A (якщо твердження «$A \Longrightarrow B$» є істинним, то для істинності висловлювання A необхідно, щоб істинним було висловлювання B).

Нагадаємо також, що твердження «$B \Longrightarrow A$» називається оберненим, а твердження «$\overline{A} \Longrightarrow \overline{B}$», де $\overline{A}$ та $\overline{B}$ є запереченнями тверджень A та B відповідно, — протилежним до твердження «$A \Longrightarrow B$». Твердження «$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$» називається протилежним до оберненого або оберненим до протилежного до твердження «$A \Longrightarrow B$», і, як це випливає з законів математичної логіки, твердження «$A \Longrightarrow B$» та «$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$» є рівносильними.

Розділ 1

Системи лінійних рівнянь, визначники та матриці

Мотивація

Багато задач сучасної науки, зокрема природознавства, фізики, теорії прийняття рішень, теорії кодування, криптографії тощо, зводяться до розв'язання так званих систем лінійних рівнянь (надалі СЛР). В процесі розвинення теорії СЛР виникають поняття матриці та визначника. Ці дві теорії (теорія матриць та теорія визначників) до того ж становлять інтерес і як самостійні розділи математики, які мають багато застосувань в інших галузях математики та науки. Зокрема, теорія визначників застосовується для обчислення площ, об'ємів та узагальнених об'ємів в геометрії, для складання так званих характеристичних рівнянь лінійних операторів тощо. Теорія ж матриць взагалі складає один з інструментів дослідження в точних науках, і дуже важко назвати таку галузь, де б вона не застосовувалась.

1.1 СЛР $m \times 1$ та $1 \times n$

Лінійне рівняння

$$a\,x = b \tag{1.1}$$

з дійсними коефіцієнтами (параметрами) a та b та змінною x можна розглядати як СЛР розмірності 1×1, де перша одиниця вказує на кількість рівнянь в системі, а друга — на кількість змінних. Якщо $a \neq 0$, то рівняння (1.1) має єдиний (дійсний) розв'язок $x = \dfrac{b}{a}$. Якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, то СЛР 1×1 розв'язків не має, тобто множина розв'язків рівняння (1.1) є порожньою множиною. І нарешті, якщо $a = b = 0$, то рівняння (1.1) має безліч розв'язків, а саме, множина розв'язків збігається з множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Множина розв'язків СЛР $m \times 1$ ($m \geqslant 2$)

$$\begin{cases} a_1\,x = b_1, \\ \dots\dots\dots \\ a_m\,x = b_m, \end{cases} \tag{1.2}$$

яка є, вочевидь, перетином множин розв'язків кожного з рівнянь системи, як і в попередньому випадку може бути порожньою, нескінченною або одноелементною. А множина розв'язків СЛР $1 \times n$ ($n \geqslant 2$)

$$\begin{cases} a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \ldots + a_n\,x_n = b, \end{cases} \tag{1.3}$$

може бути лише порожньою або нескінченною. У випадку $a_1 \neq 0$ розв'язок системи (1.3) записується у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{a_1} - \dfrac{a_2}{a_1}\, x_2 - \ldots - \dfrac{a_n}{a_1}\, x_n, \\ x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

де змінна x_1 називається основною або базисною, а змінні $x_2, \ldots, x_n$ — вільними, оскільки вони можуть набувати довільних дійсних значень.

Ключові слова:

Лінійне рівняння; параметри лінійного рівняння; множина розв'язків лінійного рівняння; СЛР; параметри СЛР; множина розв'язків СЛР; основна або базисна змінна; вільна невідома.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести, що при $a \neq 0$ рівняння (1.1): a) має розв'язок, b) і до того ж єдиний.
2. Довести, що при $a = 0$ з того, що множина розв'язків лінійного рівняння (1.1) непорожня, випливає, що вона нескінченна.
3. За яких умов множина розв'язків СЛР (1.2) є: a) порожньою, b) одноелементною, c) нескінченною?
4. Скласти алгоритм розв'язання СЛР (1.2).
5. За яких умов множина розв'язків СЛР (1.3) ($n \geqslant 2$) є: a) порожньою, b) нескінченною?
6. Чому множина розв'язків СЛР (1.3) ($n \geqslant 2$) не може бути одноелементною?

1.2 СЛР $m \times 2$ та $2 \times n$

Розглянемо СЛР 2×2 з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Домножимо перше рівняння системи (1.4) на a_{22}, друге — на $(-a_{12})$ і додамо їх. Отримаємо

$$(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})\, x_1 = b_1\, a_{22} - b_2\, a_{12}. \tag{1.5}$$

Домножимо тепер перше рівняння системи (1.4) на $(-a_{21})$, друге — на a_{11} і додамо їх. Отримаємо

$$(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})\, x_2 = b_2\, a_{11} - b_1\, a_{21}. \tag{1.6}$$

Біля змінних x_1 та x_2 в рівняннях (1.5) та (1.6) відповідно стоїть один і той же коефіцієнт, який називається визначником СЛР (1.4) і позначається

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}. \tag{1.7}$$

В загальному, має місце наступне означення.

Означення 1. Нехай задані (дійсні) числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Вираз вигляду (1.7) називається визначником другого порядку, а самі числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ — його елементами. У визначника (1.7) виділяють перший рядок — a_{11}, a_{12}, другий рядок — a_{21}, a_{22}, перший стовпчик — a_{11}, a_{21}, другий стовпчик — a_{12}, a_{22}. Елементи a_{11} та a_{22} утворюють так звану головну діагональ, а елементи a_{12} та a_{21} утворюють так звану побічну діагональ. Таким чином, визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів по головній та по побічній діагоналям.

Вочевидь, вільни члени рівнянь (1.5) та (1.6) також можна подати у вигляді визначників

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1\, a_{22} - b_2\, a_{12} \quad \text{та} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2\, a_{11} - b_1\, a_{21}$$

відповідно. Тоді, у випадку $\Delta \neq 0$, розв'язок системи (1.4) існує і до того ж єдиний, і його можна обчислити за так званими формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Розглянемо випадок, коли $\Delta = 0$. Якщо хоча б один з вільних членів Δ_1 або Δ_2 відмінний від нуля, то одне з рівнянь (1.5) або (1.6) має порожню множину розв'язків, а отже порожню множину розв'язків має й система (1.4), наслідками з якої є рівняння (1.5) та (1.6).

Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то виконується формальне відношення $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{b_1}{b_2}$ і СЛР (1.4) зводиться до (1.3) при $n = 2$.

Множина розв'язків СЛР $m \times 2$ ($m \geqslant 3$)

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 = b_m, \end{cases} \tag{1.8}$$

є, вочевидь, перетином множин розв'язків усіх $\dbinom{m}{2}$ можливих СЛР 2×2, складених з двох рівнянь цієї СЛР.

СЛР $2 \times n$ ($n \geqslant 3$)

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2, \end{cases} \tag{1.9}$$

у випадку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ зводиться до СЛР 2×2

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1 - a_{13}\, x_3 - \ldots - a_{1n}\, x_n, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = b_2 - a_{23}\, x_3 - \ldots - a_{2n}\, x_n, \end{cases}$$

з базисними змінними x_1, x_2, а змінні $x_3, \ldots, x_n$ розглядаються як параметри. В розв'язку СЛР (1.9) змінні $x_3, \ldots, x_n$ будуть вільними, тобто набуватимуть довільних дійсних значень.

Приклад 1. Розв'язати СЛР 2×3

$$\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 2x + 3y - 2z = 1. \end{cases} \tag{1.10}$$

► *1-й спосіб.* Запишемо СЛР (1.10) у вигляді

$$\begin{cases} x + y = z - 2, \\ 2x + 3y = 2z + 1, \end{cases}$$

зі змінною z в якості параметра. Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} z-2 & 1 \\ 2z+1 & 3 \end{vmatrix} = z - 7, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & z-2 \\ 2 & 2z+1 \end{vmatrix} = 5.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то змінні $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = z - 7$ та $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 5$ є базисними, а z — вільною. Таким чином, система

$$\begin{cases} x = z - 7, \\ y = 5, \\ z \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.11}$$

є розв'язком СЛР (1.10).

2-й спосіб. В СЛР (1.10) в якості параметра можна взяти, наприклад, також змінну y:

$$\begin{cases} x - z = -y - 2, \\ 2x - 2z = -3y + 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -y-2 & -1 \\ -3y+1 & -2 \end{vmatrix} = -y + 5, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -y-2 \\ 2 & -3y+1 \end{vmatrix} = -y + 5.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то для того, щоб СЛР (1.12) мала розв'язок, необхідно виконання умови

$$\Delta_x = \Delta_z = 0, \tag{1.13}$$

при якій одне з рівнянь (наприклад, друге) з СЛР (1.12) може бути виключено. Умова (1.13) виконується тоді й лише тоді, коли параметр набуває значення $y = 5$. Таким чином, легко бачити, що система (1.11) є розв'язком СЛР (1.10). $\square$

Ключові слова:

СЛР 2×2; визначник другого порядку; формули Крамера; параметри СЛР; множина розв'язків СЛР; основна або базисна змінна; вільна невідома.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести, що при $\Delta \neq 0$, розв'язок системи (1.4): a) існує, b) і до того ж єдиний.
2. Довести, що при $\Delta = 0$ з того, що множина розв'язків системи (1.4) непорожня, випливає, що вона нескінченна.
3. Навести приклад несумісної СЛР 2×2, у якої $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$.
4. За яких умов множина розв'язків СЛР (1.8) є: a) порожньою, b) одноелементною, c) нескінченною?
5. Скласти алгоритм розв'язання СЛР (1.8).
6. На які два принципові класи за множиною розв'язків можна поділити множину всіх СЛР $m \times 2$ з нескінченною множиною розв'язків?
7. За яких умов множина розв'язків СЛР (1.9) ($n \geqslant 3$) є: a) порожньою, b) нескінченною?
8. Чому множина розв'язків СЛР (1.9) ($n \geqslant 3$) не може бути одноелементною?
9. На скільки принципових класів за множиною розв'язків можна поділити: a) множину всіх СЛР $2 \times n$, b) множину всіх СЛР $2 \times n$ з нескінченною множиною розв'язків?
10. Скільки СЛР 2×2 можна скласти, якщо задано: a) СЛР $m \times 2$, b) СЛР $2 \times n$?
11. Розв'язати СЛР 2×3
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x + 4y - 2z = 1. \end{cases}$$

1.3 СЛР $m \times 3$ та $3 \times n$

Означення 2. Нехай задані (дійсні) числа $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$. Вираз вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

називається визначником третього порядку, а самі числа $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ — його елементами. Таким же чином, як і у визначника другого порядку, виділяють перший, другий та третій рядки, перший, другий та третій стовпчики, а також головну та побічну діагональ.

Розглянемо тепер СЛР 3×3

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = b_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 = b_2, \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.14}$$

В якості наслідків з неї способом, подібним до того, як це робилося з СЛР 2×2, можна отримати рівняння

$$\Delta\,x_1 = \Delta_1,\ \Delta\,x_2 = \Delta_2,\ \Delta\,x_3 = \Delta_3, \quad \text{де}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Як і у випадку СЛР 2×2, визначник Δ називається визначником СЛР 3×3. При цьому якщо $\Delta \neq 0$, то як і у випадку СЛР 2×2, СЛР (1.14) має і до того ж єдиний розв'язок (так звані формули Крамера для СЛР 3×3)

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{1.15}$$

Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників Δ_1, Δ_2 або Δ_3 відмінний від нуля, то СЛР (1.14) не має розв'язків; а якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то — не має розв'язків або має безліч розв'язків. В останньому випадку необхідно перейти до СЛР 2×3, яка складається з довільних двох непропорційних (якщо такі існують, в протилежному випадку просто з довільних двох) рівнянь системи (1.14).

Приклад 2. В СЛР 3×3

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 2, \\ 3x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

всі визначники $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, проте СЛР розв'язків не має. □

Теорії СЛР $m \times 3$ та $3 \times n$ при $m, n \geqslant 4$ будується аналогічно до теорій СЛР $m \times 2$ та $2 \times n$ при $m, n \geqslant 3$.

Ключові слова:

СЛР 3×3; визначник третього порядку; формули Крамера; параметри СЛР; множина розв'язків СЛР; основна або базисна змінна; вільна невідома.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести, що при $\Delta \neq 0$, розв'язок системи (1.14): a) існує, b) і до того ж єдиний.
2. Довести, що при $\Delta = 0$ з того, що множина розв'язків системи (1.14) непорожня, випливає, що вона нескінченна.
3. За яких умов множина розв'язків СЛР $m \times 3$ є: a) порожньою, b) одноелементною, c) нескінченною?
4. На які принципові класи за множиною розв'язків можна поділити множину всіх СЛР $m \times 3$ з нескінченною множиною розв'язків?
5. За яких умов множина розв'язків СЛР $3 \times n$ $(n \geqslant 4)$ є: a) порожньою, b) нескінченною?
6. Чому множина розв'язків СЛР $3 \times n$ $(n \geqslant 4)$ не може бути одноелементною?
7. На скільки принципових класів за множиною розв'язків можна поділити: a) множину всіх СЛР $3 \times n$, b) множину всіх СЛР $3 \times n$ з нескінченною множиною розв'язків?
8. Скільки СЛР 3×3 можна скласти, якщо задано: a) СЛР $m \times 3$, b) СЛР $3 \times n$?
9. Побудувати теорію визначників для СЛР 1×1.
10. В СЛР $n \times n$, $n = \overline{1,3}$, всі визначники $\Delta = \Delta_1 = \ldots = \Delta_n = 0$. Чи залежить множина розв'язків цієї СЛР від n і яким чином?

1.4 Матриці та їх елементарні перетворення

Як це видно з означення визначників другого та третього порядків та запису СЛР, зручно ввести до розгляду поняття матриці.

Означення 3. Прямокутна таблиця (дійсних) чисел a_{ij}, де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2l} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kl} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{ml} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) = (a_{ij})_{m \times n},$$

яка складається з m рядків та n стовпців, називається матрицею розмірності $m \times n$. Числа a_{ij} називаються елементами матриці $A = (a_{ij})$. Матриці

$$A_{(k)} = \begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kl} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} \qquad \text{та} \qquad A^{(l)} = \begin{pmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \ldots \\ a_{kl} \\ \ldots \\ a_{ml} \end{pmatrix}$$

називаються відповідно k-тим рядком та l-тим стовпцем матриці A. У випадках, коли матриця не має назви або назва неважлива, k-тий рядок та l-тий стовпець матриці будемо позначати через $k\mathcal{R}$ та $l\mathcal{C}$ відповідно.

Якщо $m = n$, то матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ називається квадратною порядку n.

Дві матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ та $B = (b_{ij})_{k \times l}$ називаються рівними, якщо $m = k$, $n = l$ і $a_{ij} = b_{ij}$ для будь-яких $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Нехай $A = (a_{ij})_{m\times k}$ та $B = (b_{ij})_{m\times l}$ — дві матриці з однаковою кількістю рядків. Тоді матриця

$$C = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ml} \end{array}\right)$$

розмірності $m\times(k+l)$ називається розширеною матрицею (матриці A за допомогою матриці B).

Визначимо деякі перетворення матриць, для чого спочатку домовимось про термінологію.

Нехай φ деяке перетворення матриць. Результат застосування перетворення φ до матриці A будемо позначати через $\varphi(A)$ або φA. Якщо ψ деяке інше перетворення матриць, то перетворення, яке виходить в результаті послідовного застосування спочатку перетворення φ, а після перетворення ψ, будемо позначати[1] через $\varphi \circ \psi$ або $\psi\varphi$ (читається «ψ після φ»). Таким чином, матриця $\psi(\varphi A) = (\psi\varphi)A = (\varphi \circ \psi)A$ є результатом застосування до матриці A послідовно перетворень φ та ψ.

Нехай задана довільна матриця $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Елементи a_{ik} та a_{jk} двох різних рядків матриці A, які розміщені в тому самому стовпці цієї матриці, називаються відповідними елементами i-го та j-го рядків. Якщо всі елементи i-го рядка матриці A помножено на число λ, то говорять, що i-й рядок матриці A помножено на число λ. Якщо до всіх елементів i-го рядка матриці A додано відповідні елементи її j-го рядка, помноженого на число λ, то говорять, що до i-го рядка матриці A додано j-й рядок, помножений на число λ. Аналогічні домовленості мають місце й для стовпців.

Означення 4. Першим елементарним перетворенням рядків (1ЕПр) матриці A називається таке її перетворення, при якому два (різних) рядки матриці A міняються місцями. Результат застосування до матриці A 1ЕПр, при якому міняються місцями i-й та j-й рядки, будемо позначати через $\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\leftrightarrow j}A$.

Другим елементарним перетворенням рядків (2ЕПр) матриці A називається таке її перетворення, при якому деякий рядок матриці A множиться на число $\lambda \neq 0$. Результат застосування до матриці A 2ЕПр, при якому i-й рядок матриці множиться на число $\lambda \neq 0$, будемо позначати через $\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\cdot(\lambda)}A$.

Третім елементарним перетворенням рядків (3ЕПр) матриці A називається таке її перетворення, при якому до деякого рядка матриці A додається інший її рядок, помножений на число λ. Результат застосування до матриці A 3ЕПр, при якому до i-го рядка додається j-й рядок, помножений на число λ, будемо позначати через $\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i+j\cdot(\lambda)}A$.

Аналогічно до ЕПр визначаються та позначаються (з відповідною заміною верхнього індексу з $\mathcal{R}$ на $\mathcal{C}$) елементарні перетворення стовпців (ЕПс) матриці.

Транспонуванням матриці A називається таке її перетворення, при якому рядки матриці A стають її стовпчиками зі збереженням порядку елементів. Іншими словами, матриця $B = (b_{ij})_{k\times l}$ називається транспонованою до матриці A, що позначається $B = A^T$, якщо $k = n$, $l = m$ і $b_{ij} = a_{ji}$ для будь-яких $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Перетворення ε, яке залишає кожну матрицю A без змін, називається тотожним. Результат застосування до матриці A тотожного перетворення позначається через $\varepsilon(A)$ або εA. Таким чином, $\varepsilon(A) = \varepsilon A = A$.

Нехай φ та ψ деякі перетворення матриць. Якщо їх послідовне виконання в будь-якому порядку дає тотожне перетворення, тобто $\psi\varphi = \varphi\psi = \varepsilon$, то перетворення ψ називається оберненим до φ і позначається $\psi = \varphi^{-1}$. При цьому перетворення φ називається оборотним, і воно саме буде оберненим до ψ.

[1] Ця домовленість буде зберігатися також для всіх інших видів відображень (як то підстановки, оператори тощо).

Для запису елементарного перетворення (ЕП) на практиці будемо користуватися наступними позначеннями:

	над рядками		над стовпцями	
	перетворення	позначення	перетворення	позначення
1ЕП	$\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\leftrightarrow j}$	$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{pmatrix}$	$\varepsilon^{\mathcal{C}}_{i\leftrightarrow j}$	$\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$
2ЕП	$\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\cdot(\lambda)}$	$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{pmatrix} \cdot(\lambda)$	$\varepsilon^{\mathcal{C}}_{i\cdot(\lambda)}$	$\begin{array}{c} \cdot(\lambda) \\ \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix} \end{array}$
3ЕП	$\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i+j\cdot(\lambda)}$	$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{pmatrix} (\lambda)$	$\varepsilon^{\mathcal{C}}_{i+j\cdot(\lambda)}$	$\begin{array}{c} (\lambda) \\ \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix} \end{array}$
3ЕП при $\lambda = 1$	$\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i+j\cdot(1)} = \varepsilon^{\mathcal{R}}_{i+j}$	$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{pmatrix}$	$\varepsilon^{\mathcal{C}}_{i+j\cdot(1)} = \varepsilon^{\mathcal{C}}_{i+j}$	$\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$

Приклад 3. Виконаємо над матрицею послідовно декілька елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot(2) \to \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} (-2) \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot(-1/2) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Лема 1. *Всі ЕПр виражаються через друге* $\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\cdot(\lambda)}$ *та третє* $\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i+j}$, *в якому* $\lambda = 1$. *Аналогічне твердження має місце для ЕПс.*

Доведення. Позначимо i-тий рядок матриці через a, а j-тий через b, де $i < j$. Якщо в матриці містяться ще рядки, які не беруть участі в перетвореннях, то вони переписуються без змін.

Для 1ЕПр маємо

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} \cdot(-1) \to \begin{pmatrix} -a-b \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -a-b \\ b-a-b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -a-b \\ -a \end{pmatrix} \cdot(-1) \to \begin{pmatrix} a+b \\ -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \cdot(-1) \to \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\leftrightarrow j} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

2ЕПр виражається само через себе. Для 3ЕПр маємо

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot(\lambda) \to \begin{pmatrix} a \\ \lambda b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+\lambda b \\ \lambda b \end{pmatrix} \cdot(1/\lambda) \to \begin{pmatrix} a+\lambda b \\ b \end{pmatrix} = \varepsilon^{\mathcal{R}}_{i+j\cdot(\lambda)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Випадок для ЕПс розглядається аналогічно. □

Лема 2. *Нехай існує послідовність ЕП, яка переводить матрицю A в матрицю B. Тоді існує послідовність ЕП, яка переводить матрицю B в матрицю A.*

Доведення. Нехай φ — деяке оборотне перетворення матриць, а A — деяка матриця. Якщо $\varphi A = B$, то $\varphi^{-1}B = \varphi^{-1}(\varphi A) = (\varphi^{-1}\varphi)A = \varepsilon A = A$.

Нехай тепер послідовність $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$ деяких оборотних перетворень матриць переводить матрицю A в матрицю B:

$$A \xrightarrow{\varphi_1} C_1 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} B.$$

Тоді, вочевидь, послідовність $\varphi_n^{-1}, \varphi_{n-1}^{-1}, \ldots, \varphi_2^{-1}, \varphi_1^{-1}$ переводить матрицю B в матрицю A:

$$B \xrightarrow{\varphi_n^{-1}} C_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}^{-1}} \ldots \xrightarrow{\varphi_2^{-1}} C_1 \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} A.$$

Отже, для того, щоб довести твердження, достатньо показати, що кожне елементарне перетворення матриць має обернене. Не порушуючи загальності[2], перевіримо це лише для ЕПр. Легко бачити, що

$$(\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\leftrightarrow j})^{-1} = \varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\leftrightarrow j}, \qquad (\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\cdot(\lambda)})^{-1} = \varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\cdot(1/\lambda)}, \qquad (\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i+j\cdot(\lambda)})^{-1} = \varepsilon^{\mathcal{R}}_{i+j\cdot(-\lambda)}.$$

Отже, твердження леми доведено. □

Ключові слова:

Матриця; квадратна матриця; рівність двох матриць; розширена матриця; відповідні елементи двох рядків (стовпців) матриці; множення рядка (стовпця) матриці на число; додавання до одного рядка (стовпця) матриці іншого; елементарні перетворення рядків (стовпців) матриці; тотожне перетворення; обернене перетворення.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Сформулювати в явному вигляді перше (1ЕПс), друге (2ЕПс) та третє (3ЕПс) елементарні перетворення стовпців матриці. Виразити ЕПс матриці через ЕПр матриці та операцію транспонування.
2. Довести лему 1 для ЕПс.
3. Довести, що 2ЕПр не виражаються через 1ЕПр та 3ЕПр. Довести аналогічне твердження для ЕПс.
4. Нехай A — множина всіх перетворень матриці, які виражаються через 1ЕПр та 3ЕПр, а B — множина всіх перетворень матриці, які виражаються через 2ЕПр. Знайти $A \cap B$.
5. Визначити, які перетворення є оберненими до ЕПр та ЕПс.
6. Визначити, яке перетворення є оберненим до тотожного перетворення.
7. Визначити, яке перетворення є оберненим до послідовності двох оборотних перетворень.
8. Визначити, яке перетворення є оберненим до транспонування матриці.
9. Обчислити значення виразу $(A^T)^T$.
10. За яких умов деяку матрицю A шляхом ЕП можна звести a) до нульової, b) до одиничної матриці (див. означення 10)?

[2]Слова «не порушуючи загальності» означають, що всі решта можливих випадків розглядаються аналогічно до даного.

1.5 Елементи теорії визначників

Для кожної квадратної матриці A порядку n можна визначити число, яке називається визначником матриці A або просто визначником порядку n і позначається $\det A = |A|$. Частинним випадком цих чисел при $n = 2$ та 3 є поняття визначника другого та третього порядків з означень 1 та 2. Загальна теорія визначників вищих порядків буде розглянута пізніше (див. розділ 6), але деякі їх властивості, які легко перевірити на визначниках другого та третього порядків, наведемо зараз.

Перша група властивостей.

1°. $\det A^T = \det A$.

Ця властивість урівноправнює рядки і стовпчики визначника, що дає можливість формулювати властивості визначників лише для рядків або стовпчиків (залежно від зручності).

Друга група властивостей.

2°. $\det \varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\leftrightarrow j} A = -\det A$ при $i \neq j$.

3°. $\det \varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\cdot(\lambda)} A = \lambda \det A$.

4°. $\det \varepsilon^{\mathcal{R}}_{i+j\cdot(\lambda)} A = \det A$.

Друга група властивостей показує, як впливають елементарні перетворення матриці на її визначник.

Третя група властивостей.

5°. Якщо в матриці A деякий рядок є лінійною комбінацією інших рядків матриці A (тобто є сумою інших рядків матриці A, взятих з деякими коефіцієнтами, див. означення 5), зокрема, в матриці A деякий рядок є сумою двох інших рядків або матриця A містить два пропорційні рядки, два рівні рядки або один з рядків складається з нулів, то $\det A = 0$.

Зауважимо, що квадратна матриця A, визначник якої $\det A = 0$, називається особливою; інакше матриця A називається неособливою.

6°. Якщо кожен елемент i-го рядка матриці A є сумою двох доданків $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, $j = \overline{1, n}$, то $\det A = \det B + \det C$, де B і C — дві матриці, в яких всі рядки, крім i-го, такі самі, як і в матриці A, а i-тий рядок складається з елементів b_{ij} та c_{ij} відповідно, де $j = \overline{1, n}$.

7°. Визначник трикутної матриці (див. означення 10) дорівнює добутку її елементів, розміщених на головній діагоналі, зокрема, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$ і $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$.

Третя група властивостей дає (властивості **5°** та **7°**) або підготовляє (властивість **6°**, див. також завдання 5 для самоопрацювання на стор. 19) деякі способи обчислення визначників.

Важливу роль в застосуваннях та в обчисленні визначників довільного порядку відіграють наступні два твердження, перше з яких називається розкладом визначника за елементами деякого рядка (або стовпчика). При цьому мінором M_{ij} квадратної матриці A, який відповідає елементу a_{ij}, називається визначник матриці, яка утворюється з матриці A шляхом викреслення з неї i-го рядка та j-го стовпчика; а алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} у визначнику $\det A$ називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Твердження 1. *Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків усіх елементів довільного його рядка (або стовпчика) на їх алгебраїчні доповнення.*

Приклад 4. Розкласти визначник $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ за елементами a) 1-го рядка, b) 2-го стовпця.

► a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$

$= 3\,(4 \cdot 2 - 5 \cdot 1) + 1\,(2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + 2\,(2 \cdot 5 - 3 \cdot 4) = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 6.$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 1\,(2\cdot 2 - 3\cdot 1) + 4\,(3\cdot 2 - 3\cdot 2) - 5\,(3\cdot 1 - 2\cdot 2) = 1\cdot 1 + 4\cdot 0 - 5\cdot(-1) = 6.$ □

Твердження 2. *Сума добутків всіх елементів деякого рядка (або стовпця) визначника квадратної матриці на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (або стовпця) дорівнює нулю.*

Приклад 5. Для визначника з прикладу 4 знайти a) суму добутків елементів 3-го рядка на алгебраїчні доповнення відповідних елементів 1-го рядка, b) суму добутків елементів 1-го стовпця на алгебраїчні доповнення відповідних елементів 2-го стовпця.

► a) $a_{31}\cdot A_{11}+a_{32}\cdot A_{12}+a_{33}\cdot A_{13} = 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$

$= 3\,(4\cdot 2 - 5\cdot 1) - 5\,(2\cdot 2 - 3\cdot 1) + 2\,(2\cdot 5 - 3\cdot 4) = 3\cdot 3 - 5\cdot 1 + 2\cdot(-2) = 0.$

b) $a_{11}\cdot A_{12}+a_{21}\cdot A_{22}+a_{31}\cdot A_{32} = 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= (-3)\,(2\cdot 2 - 3\cdot 1) + 2\,(3\cdot 2 - 3\cdot 2) - 3\,(3\cdot 1 - 2\cdot 2) = (-3)\cdot 1 + 2\cdot 0 - 3\cdot(-1) = 0.$ □

Ключові слова:

Визначник 2-го порядку; визначник 3-го порядку; лінійна комбінація; трикутна матриця; мінор; алгебраїчне доповнення; розклад визначника за елементами деякого рядка або стовпчика.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Сформулювати (вербально) властивості $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{4}^\circ$ визначників.
2. Сформулювати властивості $\mathbf{2}^\circ - \mathbf{7}^\circ$ визначників відносно стовпчиків.
3. Записати твердження 1 та 2 у вигляді загальних формул та формул для випадку визначників 2-го, 3-го та 4-го порядків.
4. Перевірити всі властивості визначників та твердження 1 та 2 на прикладі визначників 2-го та 3-го порядків.
5. На прикладі визначників третього порядку показати, що з властивості $\mathbf{6}^\circ$ випливає твердження 1.
6. Показати, що твердження 2 випливає з властивості $\mathbf{5}^\circ$ та твердження 1.
7. Користуючись твердженнями 1 та 2, довести формули Крамера (1.15) для СЛР 3×3.

1.6 Способи завдання СЛР

Нехай n — деяке натуральне число і $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел[3]. Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх впорядкованих n-ок $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ дійсних чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n$, тобто

$$\mathbb{R}^n = \{(l_1, l_2, \ldots, l_n) \mid l_1, l_2, \ldots, l_n \in \mathbb{R}\}.$$

[3]Як буде зрозуміло пізніше, множину $\mathbb{R}$ дійсних чисел можна замінити на будь-яку іншу множину, яка утворює поле (див. означення 49), тобто володіє такими ж алгебраїчними властивостями, як і множина $\mathbb{R}$.

Множину $\mathbb{R}^n$ будемо називати n-вимірним арифметичним векторним простором, а її елементи — впорядковані n-ки $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ — n-вимірними векторами. При цьому самі числа $l_1, l_2, \ldots, l_n$ називаються координатами вектора $\boldsymbol{l}$. Два вектори $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ та $\boldsymbol{l}' = (l'_1, l'_2, \ldots, l'_n)$ називаються рівними, якщо рівні їхні відповідні координати, тобто $l_1 = l'_1$, $l_2 = l'_2$, …, $l_n = l'_n$. Вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, всі координати якого рівні нулю, називається нульовим.

На n-вимірному арифметичному векторному просторі $\mathbb{R}^n$ можна ввести операції додавання векторів та множення вектора на дійсне число λ за формулами

$$\begin{gathered} (l_1, l_2, \ldots, l_n) + (l'_1, l'_2, \ldots, l'_n) = (l_1 + l'_1, l_2 + l'_2, \ldots, l_n + l'_n) \\ \text{та} \qquad \lambda(l_1, l_2, \ldots, l_n) = (\lambda\, l_1, \lambda\, l_2, \ldots, \lambda\, l_n). \end{gathered} \tag{1.16}$$

Означення 5. Вектор $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ називається лінійною комбінацією (ЛК) векторів (або лінійно виражається через вектори) $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $\boldsymbol{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, …, $\boldsymbol{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$, якщо існують дійсні числа λ_1, λ_2, …, λ_m такі, що

$$\boldsymbol{l} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m.$$

Введемо також до розгляду n невідомих, які можуть набувати дійсних значень і які будемо позначати $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Означення 6. Рівняння з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається лінійним, якщо його можна подати у вигляді

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b, \tag{1.17}$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і вільний член b є дійсними числами. Лінійне рівняння називається однорідним, якщо $b = 0$.

Вектор $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ розмірності n називається (частковим) розв'язком лінійного рівняння (1.17), якщо виконується рівність $a_1 l_1 + a_2 l_2 + \ldots + a_n l_n = b$.

Означення 7. Нехай задано m лінійних рівнянь з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вважають, що задана система m лінійних рівнянь з n невідомими або СЛР $m \times n$, якщо необхідно знайти множину спільних розв'язків цих рівнянь. СЛР $m \times n$ записується у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.18}$$

де перший індекс в коефіцієнті a_{ij} вказує на номер рівняння, а другий — на номер невідомої, біля якої він стоїть, а індекс вільного члена вказує на номер рівняння, в якому він стоїть.

Вектор $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ розмірності n називається (частковим) розв'язком СЛР (1.18), якщо він є розв'язком кожного рівняння з системи (1.18). Розв'язок $\boldsymbol{l}$ називається нульовим розв'язком СЛР, якщо $\boldsymbol{l} = \mathbf{0}$.

СЛР називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною в протилежному випадку. Сумісна СЛР називається визначеною, якщо вона має рівно один розв'язок, і невизначеною в протилежному випадку.

СЛР, в якому кожне рівняння є однорідним, називається системою лінійних однорідних рівнянь (надалі СЛОР).

Означення 3 дає можливість записати СЛР $m \times n$ у вигляді розширеної матриці

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \qquad (1.19)$$

в якій матриця A, складена з коефіцієнтів біля невідомих x_j, називається матрицею СЛР (1.18), а матриця B, складена з вільних членів, називається матрицею-стовпчиком вільних членів. З СЛР (1.18) можна пов'язати також матрицю-стовпчик невідомих

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Чому саме матриця-стовпчик, а не матриця-рядок, буде пояснено пізніше (див. пункт 1.13).

Зрозуміло, що за СЛР (1.18) однозначно можна записати її розширену матрицю (1.19), і навпаки, за розширеною матрицею (1.19) можна однозначно відновити СЛР (1.18). Тому надалі без спеціальних застережень будемо вважати, що матриця (1.19) задає СЛР (1.18).

СЛР (1.18) можна подати також в так званій векторній формі, тобто у вигляді ЛК

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}, \qquad (1.20)$$

де вектори $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$, $\boldsymbol{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Легко бачити, що всі три форми запису (1.18), (1.19) та (1.20) СЛР є рівносильними.

Приклад 6. Нехай задано вектори $\boldsymbol{a}_1 = (3, -1, 8)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 5, -3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-2, 3, 0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1, 2, 1)$ та $\boldsymbol{b} = (4, 9, 6)$. Записати у вигляді СЛР той факт, що вектор $\boldsymbol{b}$ є ЛК векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$. Для отриманої СЛР знайти її розмірність та матриці, які можна поставити у відповідність до неї.

► Нехай $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ — коефіцієнти, з якими вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ входять у лінійну комбінацію вектора $\boldsymbol{b}$. Тоді

$$x_1\,\boldsymbol{a}_1 + x_2\,\boldsymbol{a}_2 + x_3\,\boldsymbol{a}_3 + x_4\,\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{b}.$$

Підставимо в останню рівність координати векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ та $\boldsymbol{b}$, які для зручності запишемо у стовпчик, та зробимо перетворення з використанням формул (1.16):

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3\,x_1 \\ -x_1 \\ 8\,x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\,x_2 \\ 5\,x_2 \\ -3\,x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\,x_3 \\ 3\,x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ 2\,x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3\,x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 + x_4 \\ -x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 \\ 8\,x_1 - 3\,x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

З означення рівності двох векторів отримуємо наступну СЛР, яка і є шуканою:

$$\begin{cases} 3\,x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 = 9, \\ 8\,x_1 - 3\,x_2 + x_4 = 6. \end{cases} \qquad (1.21)$$

СЛР (1.21) є СЛР 3×4.

СЛР (1.21) можна поставити у відповідність такі матриці: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \\ 8 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця СЛР (1.21), $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ — матриця вільних членів, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ — матриця невідомих та $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 9 \\ 8 & -3 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$ — розширена матриця, яка повністю і однозначно визначає СЛР (1.21). $\square$

Ключові слова:

Арифметичний векторний простір; операції над векторами; нульовий вектор; лінійна комбінація; лінійне рівняння; лінійне однорідне рівняння; (частковий) розв'язок лінійного рівняння; СЛР $m \times n$; (частковий) розв'язок СЛР $m \times n$; сумісна СЛР; несумісна СЛР; визначена СЛР; невизначена СЛР; СЛОР.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Навести приклади векторів $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ таких, що вектор $\boldsymbol{l}$: a) є, b) не є ЛК векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$.

2. При яких умовах нульовий вектор $\mathbf{0}$ є ЛК векторів $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$.

3. Побудувати граф залежностей між поняттями: СЛР, сумісна СЛР, несумісна СЛР, визначена СЛР, невизначена СЛР.

4. Довести, що СЛОР завжди є сумісною. Включити поняття СЛОР в граф залежностей з попереднього завдання.

5. Довести, що форми запису (1.18) та (1.20) СЛР є рівносильними.

1.7 Еквівалентні СЛР

Означення 8. Нехай S_1 і S_2 — дві СЛР. СЛР S_1 і S_2 називаються еквівалентними (що позначається $S_1 \sim S_2$), якщо множини їх розв'язків збігаються.

Мають місце наступні властивості відношення еквівалентності СЛР.
1°. $S \sim S$, тобто кожна СЛР S еквівалентна сама собі (рефлексивність).
2°. $S_1 \sim S_2 \implies S_2 \sim S_1$ (симетричність).
3°. $S_1 \sim S_2$, $S_2 \sim S_3 \implies S_1 \sim S_3$ (транзитивність).

Означення 9. Першим елементарним перетворенням СЛР називається таке її перетворення, в результаті якого два рівняння системи міняються місцями (міняються своїми номерами).

Другим елементарним перетворенням СЛР називається таке її перетворення, при якому обидві частини одного з рівнянь системи множаться на число, відмінне від нуля.

Третім елементарним перетворенням СЛР називається таке її перетворення, при якому до одного рівняння системи додається інше, помножене на деяке число.

Зрозуміло, що, якщо задана СЛР (1.18), то кожне її елементарне перетворення задає відповідне ЕПр її розширеної матриці (1.19), і навпаки, кожне ЕПр матриці (1.19) задає відповідне елементарне перетворення СЛР (1.18).

Теорема 1. *Кожне елементарне перетворення СЛР переводить її в еквівалентну СЛР.*

Доведення. Нехай СЛР S_1 з множиною розв'язків T_1 після деякого елементарного перетворення переходить в СЛР S_2 з множиною розв'язків T_2. Необхідно довести, що $T_1 = T_2$. За лемою 2 достатньо довести, що $T_1 \subset T_2$, а за лемою 1 останнє включення достатньо перевірити лише для ЕПр $\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\cdot(\lambda)}$ та $\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i+j}$.

В СЛР S_1 після виконання над нею одного з ЕПр $\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i\cdot(\lambda)}$ або $\varepsilon^{\mathcal{R}}_{i+j}$ зміниться лише i-те рівняння, яке набуде вигляду

$$(\lambda a_{i1})\, x_1 + (\lambda a_{i2})\, x_2 + \ldots + (\lambda a_{in})\, x_n = \lambda b_i$$

або

$$(a_{i1} + a_{j1})\, x_1 + (a_{i2} + a_{j2})\, x_2 + \ldots + (a_{in} + a_{jn})\, x_n = b_i + b_j$$

відповідно. Якщо вектор $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \in T_1$, то він, вочевидь, є розв'язком й останніх двох рівнянь, а тому $\boldsymbol{l} \in T_2$. $\square$

Ключові слова:

Розв'язок СЛР; еквівалентні СЛР; елементарні перетворення СЛР.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести властивості відношення еквівалентності СЛР.
2. Довести теорему 1 без використання лем 1 та 2.
3. Вказати необхідні та достатні умови, які слід накласти на деяке лінійне рівняння, щоб до/з СЛР можна було додати/вилучити це рівняння.

1.8 Розв'язування СЛР методом Гаусса

Означення 10. Матриця, всі елементи якої є нулями, називається нульовою і позначається через O.

Ступінчастою матрицею називається матриця, яка задовольняє такі умови:

1) якщо в i-му рядку перший відмінний від нуля елемент стоїть на j-му місці, то в наступному $i+1$-му рядку на перших j місцях стоять нулі;

2) якщо кожен елемент i-го рядка дорівнює нулю, то й кожен елемент наступного $i+1$-го рядка також дорівнює нулю.

Перший ненульовий елемент в рядку ступінчастої матриці називається ведучим елементом, а множина всіх ведучих елементів ступінчастої матриці утворює головну діагональ.

Ступінчаста квадратна матриця називається трикутною, якщо кількість елементів на її головній діагоналі збігається з порядком матриці.

Трикутна матриця називається діагональною, якщо всі всі її елементи, які не стоять на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Діагональна матриця називається одиничною, якщо всі всі її елементи, які стоять на головній діагоналі, дорівнюють одиниці.

Приклад 7. Прикладом ступінчастої матриці є матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

елементи $a_{12} = 2$, $a_{23} = 6$, $a_{35} = 9$ якої утворюють її головну діагональ. Прикладом трикутної матриці є матриця

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

□

Теорема 2. *Кожну матрицю A шляхом ЕПр можна звести до ступінчастого вигляду.*

Доведення. Теорему доведемо індукцією по кількості рядків m матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Якщо матриця A нульова або містить лише один рядок, то вона, вочевидь, ступінчаста.

Нехай матриця A ненульова і $m \geqslant 2$. І нехай k — номер її першого ненульового стовпця. Переставляючи, якщо треба, рядки, досягнемо того, що перший елемент у k-му стовпчику буде відмінний від нуля. Після цього, застосовуючи 3ЕПр, досягнемо того, щоб всі елементи k-го стовпця, окрім першого, стали рівні нулю. Отримаємо матрицю виду

$$B = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & b_{1k} & b_{1,k+1} & \dots & b_{1n} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & b_{2,k+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_{m,k+1} & \dots & b_{mn} \end{array}\right).$$

Вочевидь, матриця

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{2,k+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m,k+1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

складається з $m - 1$ рядка, а тому за припущенням індукції шляхом ЕПр її можна звести до ступінчастого вигляду. Оскільки ЕПр матриці B_1 ніяким чином не впливають на перший рядок та на перші k стовпчиків матриці B, то це означає, що відповідними ЕПр матрицю B, а отже й матрицю A можна звести до ступінчастого вигляду. □

Означення 11. СЛР називається ступінчастою, якщо її розширена матриця є ступінчастою.

СЛР називається трикутною, якщо трикутною є її матриця коефіцієнтів.

З теореми 2 випливає, що кожну СЛР за допомогою ЕПр можна звести до ступінчастого вигляду. Метод розв'язання СЛР, який грунтується на теоремі 2, називається методом послідовного виключення невідомих або методом Гаусса.

Розглянемо тепер довільну ступінчасту СЛР. Нехай кількість ненульових рядків (кількість сходинок) її матриці коефіцієнтів дорівнює r, а кількість ненульових рядків її розширеної матриці дорівнює R. Вочевидь, що $R = r$ або $R = r + 1$. Можливі наступні три принципово різні випадки.

Перший випадок. $R = r + 1$. В цьому випадку СЛР містить рівняння виду

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \ldots + 0\,x_n = b,$$

де $b \neq 0$, а отже, вона є несумісною.

Другий випадок. $R = r = n$. В цьому випадку після відкидання нульових рівнянь утворюється трикутна система. З її останнього рівняння однозначно визначається невідома x_n, потім з передостаннього рівняння однозначно визначається невідома x_{n-1} і т.д. Отже, СЛР має розв'язок і до того ж єдиний. На практиці в цьому випадку зручно користуватися так званим зворотним ходом метода Гаусса. Він полягає в тому, щоб шляхом ЕПр привести розширену матрицю СЛР до вигляду, в якому її матриця коефіцієнтів буде одиничною. Тоді невідома x_i дорівнює вільному члену b_i i-го рівняння.

Третій випадок. $R = r < n$. В цьому випадку нехай $k_1, k_2, \ldots, k_r$ — номери стовпчиків, в яких стоять ведучі елементи, тобто елементи з головної діагоналі. Тоді невідомі $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ називаються основними або базисними, а решта невідомих — вільними. Після відкидання нульових рівнянь і перенесення членів з вільними невідомими в праву частину, отримуємо трикутну СЛР відносно основних невідомих. Розв'язуючи її, як і в попередньому випадку, знаходимо залежність основних невідомих від вільних. Ці вирази називаються загальним розв'язком СЛР. Всі (часткові) розв'язки СЛР утворюються з загального шляхом надання вільним змінним всіх можливих значень. Оскільки ці значення обираються довільно, а множина $\mathbb{R}$ дійсних чисел нескінченна, то СЛР має нескінченну кількість розв'язків.

З викладеного вище випливає справедливість таких тверджень.

Теорема 3. *СЛР сумісна тоді й лише тоді, коли її можна звести до ступінчастої СЛР, в якій немає рівнянь вигляду* $0 = b$, *де* $b \neq 0$.

Теорема 4. *Сумісна СЛР є визначеною тоді й лише тоді, коли її можна звести до ступінчастої СЛР, в якій кількість рівнянь* r *збігається з кількістю невідомих* n.

Наслідок 1. *Сумісна СЛР* $m \times n$ *при* $m < n$ *є невизначеною.*

Приклад 8. Дослідити та розв'язати СЛР методом Гаусса залежно від значень параметра λ.

$$\begin{cases} (3-2\,\lambda)\,x_1 + (2-\lambda)\,x_2 + x_3 = \lambda, \\ (2-\lambda)\,x_1 + (2-\lambda)\,x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)\,x_3 = 1. \end{cases} \tag{1.22}$$

► Запишемо СЛР (1.22) у вигляді розширеної матриці. Після цього будемо виконувати ЕПр розширеної матриці так, щоб звести матрицю до ступінчастого вигляду. При цьому будемо дотримуватись такого емпіричного правила: елементи матриці СЛР, які залежать від λ, будемо розглядати або обирати за ведучий лише тоді, коли ніяким чином не можна розглянути або вибрати за ведучий інший елемент, який від λ не залежить.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \begin{array}{c} (\lambda-2) \quad (2\lambda-3) \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(3-\lambda) & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & (\lambda-1)(5-2\lambda) & 3(\lambda-1) \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & (\lambda-1)(5-2\lambda) & 3(\lambda-1) \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(3-\lambda) & \lambda-1 \end{array}\right).$$

Остання матриця буде *вже* ступінчастою і навіть трикутною, якщо елементи $a_{22} = \lambda - 1$ та $a_{33} = (\lambda-1)(3-\lambda)$ будуть ненульовими. Таким чином виникають три випадки.

1-й випадок. Нехай $\lambda \neq 1$ і $\lambda \neq 3$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & (\lambda-1)(5-2\lambda) & 3(\lambda-1) \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(3-\lambda) & \lambda-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(\frac{1}{\lambda-1}) \\ \cdot(\frac{1}{(\lambda-1)(3-\lambda)}) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 5-2\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3-\lambda} \end{array}\right).$$

Отже, при $\lambda \neq 1$ і $\lambda \neq 3$ за теоремами 3 та 4 СЛР (1.22) є сумісною та визначеною. Розв'язок СЛР (1.22) в цьому випадку знайдемо з останньої матриці зворотним ходом метода Гаусса. Маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 5-2\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3-\lambda} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & 1 & 5-2\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3-\lambda} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (2\lambda-5) \quad (3-\lambda) \end{array} \to$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4-\lambda}{3-\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3-\lambda} \end{array}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = \frac{4-\lambda}{3-\lambda}, \\ x_3 = \frac{1}{3-\lambda}. \end{cases}$$

2-й випадок. Нехай $\lambda = 1$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & (\lambda-1)(5-2\lambda) & 3(\lambda-1) \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(3-\lambda) & \lambda-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3, \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3-й випадок. Нехай $\lambda = 3$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & (\lambda-1)(5-2\lambda) & 3(\lambda-1) \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(3-\lambda) & \lambda-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Отже, при $\lambda = 3$ за теоремою 3 СЛР (1.22) є несумісною. □

Ключові слова:

Нульова матриця; ступінчаста матриця; головна діагональ ступінчастої матриці; трикутна матриця; діагональна матриця; одинична матриця; ступінчаста СЛР; трикутна СЛР; метод Гаусса; зворотній хід методу Гаусса; базисні та вільні невідомі; загальний розв'язок СЛР.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Чи є нульова матриця ступінчастою і чому?
2. Сформулювати якомога більш просте означення одиничної матриці.
3. Чи є подібними означення нульової та одиничної матриць?
4. Довести нерівності: a) $0 \leqslant R - r \leqslant 1$, b) $r \leqslant n$, c) $R - n \leqslant 1$.
5. Довести теореми 3, 4 та наслідок 1.
6. Навести приклад несумісної СЛР $m \times n$ при $m < n$.

1.9 СЛОР

СЛОР завжди сумісна, оскільки вона має нульовий розв'язок. Якщо вона визначена, то вона має тільки нульовий розв'язок, в іншому випадку вона має хоча б один ненульовий розв'язок (і навіть нескінченно багато таких розв'язків). В попередніх позначеннях останній випадок має місце, якщо $r < n$. Користуючись тим, що $r \leqslant m$, отримуємо наступний важливий наслідок з методу Гаусса.

Теорема 5. *СЛОР $m \times n$ при $m < n$ має ненульові розв'язки.*

Теорема 6. *Нехай T_0 — множина розв'язків деякої СЛОР S_0. Тоді:*
1) $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2 \in T_0 \Longrightarrow \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 \in T_0$;
2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{l} \in T_0 \Longrightarrow \lambda \boldsymbol{l} \in T_0$.

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. □

Означення 12. Деяка підмножина множини розв'язків СЛОР називається фундаментальною системою розв'язків (ФСР) СЛОР, якщо будь-який розв'язок СЛОР через неї лінійно виражається, і до того ж єдиним чином.

Із-за порушення умови єдиності ЛК, нульовий розв'язок не входить до жодної ФСР СЛОР, звідки випливає, що ФСР визначеної СЛОР є порожньою множиною. До ФСР СЛОР входить стільки розв'язків, скільки є вільних змінних в розв'язку СЛОР. Для знаходження однієї з усіх можливих ФСР СЛОР кожній вільній змінній по черзі надають значення 1, а решті вільних невідомих — значення 0. Отримані таким чином розв'язки СЛОР утворюють її ФСР.

Приклад 9. Знайти ФСР СЛОР

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = 0. \end{cases}$$

►

□

Кожній СЛР можна поставити у відповідність СЛОР, яка утворюється з даної шляхом заміни вільних членів на нулі, тобто, якщо задана СЛР (1.18), то відповідною до неї СЛОР буде

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = 0. \end{cases}$$

Фундаментальний зв'язок між множинами розв'язків сумісної СЛР та відповідної до неї СЛОР встановлюється так званою теоремою про накладання розв'язків.

Теорема 7 (про накладання розв'язків). *Загальний розв'язок сумісної СЛР дорівнює сумі будь-якого часткового її розв'язку та загального розв'язку відповідної СЛОР. Іншими словами, будь-який розв'язок сумісної СЛР можна записати у вигляді суми (довільного) фіксованого розв'язку цієї СЛР і деякого розв'язку відповідної СЛОР, причому, кожна така сума буде розв'язком заданої СЛР.*

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що сума довільного (часткового) розв'язку СЛР та довільного (часткового) розв'язку відповідної до неї СЛОР є розв'язком заданої СЛР, і того, що різниця будь-яких двох (часткових) розв'язків заданої СЛР є розв'язком відповідної до неї СЛОР. □

Ключові слова:

СЛОР; сумісна СЛР; визначена СЛР; невизначена СЛР; арифметичний векторний простір; операція додавання векторів; операція множення вектора на дійсне число; лінійна комбінація; ФСР СЛОР; спряжена СЛОР; теорема про накладання розв'язків.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести теорему 5.

2. Довести, що ФСР СЛОР не може містити ЛК інших розв'язків з ФСР, зокрема: a) нульовий розв'язок, b) два пропорційниз розв'язки, c) суму двох інших розв'язків з ФСР.

3. З якої кількісті векторів може складатися ФСР СЛОР?

4. Довести, що коли СЛР має два різних розв'язки $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, то їх ЛК виду $\lambda\boldsymbol{a} + (1-\lambda)\boldsymbol{b}$ буде також розв'язком цієї системи при будь-яких значеннях параметра λ.

5. Чи може ЛК деяких (часткових) розв'язків неоднорідної СЛР бути розв'язком цієї СЛР? Якщо так, то встановити необхідну та достатню умову для цього.

6. Встановити необхідну та достатню умову для того, щоб сума $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ двох розв'язків $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ СЛР була б розв'язком цієї ж системи. Те саме для $\lambda\boldsymbol{a}$, де $\lambda \neq 1$.

7. Чи може деякий розв'язок СЛР бути розв'язком відповідної СЛОР? А навпаки?

1.10 Операції над матрицями

Позначимо через $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ — множину всіх матриць розмірності $m \times n$ з дійсними елементами. На множині $\mathbb{M}$ можна ввести операції додавання двох матриць та множення матриці на дійсне число (скаляр) в такий спосіб: якщо $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$A + B = C = (c_{ij}), \quad \text{де } \; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n},$$

$$\lambda\, A = D = (d_{ij}), \quad \text{де } \; d_{ij} = \lambda\, a_{ij}, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

Для операцій додавання матриць та множення матриць на скаляр на множині $\mathbb{M}$ виконуються наступні властивості, які легко випливають з означення операцій та відповідних властивостей множини $\mathbb{R}$.

1°. $(A+B)+C = A+(B+C)$ (асоціативність додавання).

2°. Існує матриця $O \in \mathbb{M}$ (нульова матриця) така, що для довільної матриці $A \in \mathbb{M}$ виконується співвідношення $A+O = O+A = A$ (існування нейтральної відносно додавання матриці).

3°. Для кожної матриці $A \in \mathbb{M}$ існує (своя) матриця $B \in \mathbb{M}$, яку позначають через $-A$, така, що $A+B = B+A = O$ (існування симетричної відносно додавання матриці).

4°. $A+B = B+A$ (комутативність додавання).

5°. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (асоціативність множення на скаляр).

6°. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ (дистрибутивність множення на скаляр відносно додавання скалярів).

7°. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивність множення на скаляр відносно додавання матриць).

Означення 13. Нехай задано матрицю-рядок $A = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_k \end{pmatrix}$ та матрицю-стовпчик $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix}$ з однаковою кількістю k дійсних елементів. Говорять, що елемент $c \in \mathbb{R}$ є добутком рядка A на стовпчик B, якщо

$$c = a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k.$$

Впорядкована пара матриць $A = (a_{ik})_{m\times p}$ та $B = (b_{lj})_{q\times n}$ з дійсними елементами називаються узгодженими, якщо кількість стовпчиків першої матриці A дорівнює кількості рядочків другої матриці B, тобто $p = q$.

Добутком двох узгоджених матриць $A = (a_{ik})_{m\times p}$ та $B = (b_{kj})_{p\times n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m\times n}$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj},$$

тобто елемент c_{ij}, який стоїть в i-му рядку та j-му стовпці матриці C, дорівнює добутку i-го рядка матриці A на j-й стовпчик матриці B.

Приклад 10. Задача, яка зумовила введення операції добутку двох матриць, була наступною. Нехай змінні $z_1, \ldots, z_m$ лінійно виражаються через змінні $y_1, \ldots, y_p$, а змінні $y_1, \ldots, y_p$ лінійно виражаються через змінні $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1p}y_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_m = a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mp}y_p, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_p = b_{p1}x_1 + \ldots + b_{pn}x_n. \end{cases} \tag{1.23}$$

Тоді цим лінійним виразам можна поставити у відповідність дві матриці $A = (a_{ik})_{m\times p}$ та $B = (b_{kj})_{p\times n}$. Тепер, якщо виразити змінні $z_1, \ldots, z_m$ через змінні $x_1, \ldots, x_n$, то цим лінійним виразам буде відповідати якраз матриця AB.

Більше того, самі системи (1.23) можна записати у вигляді добутку матриць: $Z = AY$ та $Y = BX$, де $Z = (z_1, \ldots, z_m)^T$, $Y = (y_1, \ldots, y_p)^T$ та $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — матриці-стовпчики змінних. □

Приклад 11. Пара матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ є узгодженою, а тому існує добуток $AB =$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + (-2)\cdot 3 + 5\cdot 1 & 3\cdot 5 + (-2)\cdot 1 + 5\cdot 0 \\ 4\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 1 & 4\cdot 5 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 2\cdot 2 + (-3)\cdot 3 + 2\cdot 1 & 2\cdot 5 + (-3)\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 6 & 19 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Натомість пара B та A цих же матриць вже не є узгодженою, а тому добуток BA не існує. □

З прикладу 11 зокрема випливає, що добуток двох матриць в загальному не є комутативною операцією, тобто $AB \neq BA$.

Мають місце наступні властивості добутку матриць.

8°. Операція множення матриць асоціативна, тобто, якщо добутки AB та BC визначені, то $(AB)C = A(BC)$.

Доведення. Нехай $A = (a_{ik})_{m\times p}$, $B = (b_{kl})_{p\times q}$, $C = (c_{lj})_{q\times n}$, $AB = U = (u_{il})_{m\times q}$, $BC = V = (v_{kj})_{p\times n}$, $(AB)C = UC = S = (s_{ij})_{m\times n}$, $A(BC) = AV = T = (t_{ij})_{m\times n}$. Тоді

$$s_{ij} = \sum_{l=1}^{q} u_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}v_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

звідки випливає, що $s_{ij} = t_{ij}$, тобто $(AB)C = A(BC)$. □

9°. Операція множення матриць дистрибутивна відносно операції додавання, тобто, якщо добутки AB та AC визначені, то $A(B+C) = AB + AC$, і якщо добутки AC та BC визначені, то $(A+B)C = AC + BC$.

10°. Якщо добуток AB двох матриць A та B визначений, то для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ має місце співвідношення $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Для раніше введеної операції транспонування матриць мають місце наступні властивості.

11°. $(A^T)^T = A$.

12°. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

13°. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

14°. $(AB)^T = B^T A^T$.

Для двох квадратних матриць однакового порядку виконується наступна властивість.

15°. $\det(AB) = \det A \det B$.

Ключові слова:

Сума двох матриць; добуток матриці на скаляр; пара узгоджених матриць; добуток двох матриць; операція транспонування матриць; лінійне вираження одних змінних через інші; асоціативність операції; комутативність операції; дистрибутивність однієї операції відносно іншої; нейтральний відносно додавання елемент; симетричний відносно додавання елемент.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести властивості **1°–14°**.
2. Як можна ввести операцію різниці двох матриць?
3. Обчислити: a) $0 \cdot A$, b) $1 \cdot A$, c) $(-1) \cdot A$.
4. Чи завжди здійсненна операція добутку двох матриць?
5. За яких умов матрицю можна помножити саму на себе?
6. За яких умов існують добутки AB та BA?
7. Якщо існують добутки AB та BA, то чи завжди виконується рівність $AB = BA$?
8. Чи буде операція добутку матриць комутативною?
9. Як можна назвати властивості **10°–14°**?
10. Користуючись прикладом 10, знайти матриці P та Q такі, щоб для довільної матриці $A \in \mathbb{M}$ виконувалися рівності $PA = A$ та $AQ = A$. Чи виконується рівність $P = Q$?
11. Записати СЛР (1.18) у вигляді матричного рівняння.

1.11 Блочні матриці

Нехай A — довільно вибрана матриця. Системою горизонтальних та вертикальних прямих розіб'ємо матрицю A на частини. Ці частини називаються клітинами або блоками і позначаються великими літерами латинського алфавіту з індексами. Клітини можна розглядати як матриці менших розмірів і вважати, що матриця A утворена з них, як з елементів. Матриця, розбита певним способом на клітини, називається клітинною або блочною.

Над блочними матрицями, так само як над звичайними, можна виконувати операції додавання, множення на скаляр, множення двох матриць та транспонування. Зокрема, якщо узгоджені матриці $A = (a_{ik})_{m\times p}$ та $B = (b_{kj})_{p\times n}$ розбиті на клітини A_{uw}, B_{wv} так, що

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & \dots & B_{st} \end{pmatrix}$$

і число стовпців клітини A_{uw} дорівнює числу рядків клітини B_{wv}, то

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{r1} & \dots & C_{rt} \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad C_{uv} = \sum_{w=1}^{s} A_{uw}B_{wv}.$$

Квадратні матриці найчастіше розбивають на клітини так, щоб діагональні клітини були також квадратними. Якщо квадратні матриці A і B розбито на клітини так, що їх діагональні клітини квадратні й порядки відповідних діагональних клітин збігаються, то ці розбиття задовольняють умови, при яких можливе як додавання, так і множення матриць A і B як блочних.

Блочна матриця вигляду

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_s \end{pmatrix},$$

де $A_1, A_2, \dots, A_s$ — квадратні клітини, а O — нульова матриця належних розмірів, називається блочно-діагональною. В цьому випадку говорять також, що матриця A є прямою сумою матриць $A_1, A_2, \dots, A_s$, що позначається $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_s$.

Ключові слова:

Клітинна матриця; квадратна клітина; блочно-діагональна матриця.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Навести приклади операцій над: a) клітинними матрицями, b) блочно-діагональними матрицями. Зробити перевірку, виконавши ці операції як над звичайними матрицями.

2. Записати формули для операцій над блочно-діагональними матрицями.

1.12 Обернені матриці

Нехай $\mathbb{M} = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць порядку $n \geqslant 2$ з дійсними елементами. Вочевидь, будь-яка пара матриць з множини $\mathbb{M}$ є узгодженою. Крім того, матриці P та Q з завдання 10 для самоопрацювання на стор. 30 для цієї множини $\mathbb{M}$ збігаються $P = Q = E$ і дорівнюють одиничній матриці E порядку n. Таким чином, матриця $E \in \mathbb{M}$ є нейтральним елементом множини $\mathbb{M}$ відносно операції добутку двох матриць, тобто для довільної матриці $A \in \mathbb{M}$ виконується співвідношення $EA = A = AE$.

> **Означення 14.** Квадратна матриця A' порядку n називається оберненою до квадратної матриці A порядку n, якщо $AA' = E = A'A$, де E — одинична матриця порядку n. Матриця A, для якої існує обернена, називається оборотною, а обернена до неї матриця позначається A^{-1}.

Останнє позначення є коректним в силу наступного твердження.

Лема 3. *Кожна матриця може мати не більше ніж одну обернену матрицю.*

Доведення. Якщо $A'A = E = AA'$ і $A''A = E = AA''$, то $A' = A'AA'' = A''$. □

Зрозуміло, що не для кожної квадратної матриці існує обернена. Так, наприклад, для нульової квадратної матриці O оберненої не існує, оскільки для будь-якої матриці A даного порядку $AO = OA = O \neq E$. Питання про існування для даної матриці A оберненої напряму пов'язане з визначником $\det A$ матриці A.

> **Означення 15.** Квадратна матриця A порядку n називається неособливою, якщо її визначник $\det A \neq 0$. В протилежному випадку матриця A називається особливою.

Теорема 8. *Квадратна матриця є оборотною тоді й лише тоді, коли вона є неособливою.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо A оборотна, то за властивістю **7**° визначників та теоремою 95 про те, що визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, $1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$, звідки $\det A \neq 0$.

Достатність. Якщо квадратна матриця A порядку n є неособливою, то, як випливає з тверджень 1 та 2, обернена до неї обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

де A_{ij} — алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} в матриці A. □

На практиці для знаходження оберненої матриці часто користуються наступним твердженням, яке буде доведено пізніше (див. наслідок 12).

Твердження 3. *Якщо який-небудь ланцюжок ЕПр (ЕПс) переводить квадратну матрицю A в одиничну матрицю E, то цей же ланцюжок переводить матрицю E в матрицю A^{-1}.*

Ключові слова:

Одинична матриця; нейтральний відносно множення елемент; симетричний відносно множення елемент; оборотна матриця; оберенена матриця; особлива матриця; неособлива матриця; елементарні перетворення рядків (стовпців) матриці.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Чому при побудові теорії множини $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ з розгляду виключається випадок, коли $n = 1$?

2. Чи виконується на множині $\mathbb{M}$ властивість: a) існування нейтральної відносно множення матриці, b) існування симетричної відносно множення матриці?

3. Чи може існувати більше ніж одна нейтральна відносно додавання матриця?

4. Чи може деяка матриця мати більше ніж одну симетричну відносно додавання матрицю?

5. Обчислити двома способами обернену матрицю до загльної квадратної матриці другого порядку, за умови її неособливості.

6. Довести, що формула (1.24) дійсно визначає обернену матрицю до матриці A.

7. Обчислити $(A \oplus B)^{-1}$.

1.13 Матричні рівняння

Як зазначалося в пункті 1.7, кожній СЛР (1.18) можна поставити у відповідність три матриці: A — матриця СЛР (складена з коефіцієнтів біля невідомих x_j), B — матриця вільних членів, та X — матриця невідомих. Тоді кожну СЛР (1.18) можна записати у вигляді матричного рівняння

$$AX = B, \tag{1.25}$$

причому матриці A та X мають бути узгодженими, чим й пояснюється, що X — матриця-стовпчик.

В загальному ж випадку на розмірності матриць A, B та X ніяких обмежень, окрім природних, не накладається. З некомутативності добутку матриць випливає необхідність разом з рівнянням (1.25) розглядати також матричне рівняння

$$YA = B \tag{1.26}$$

з природними обмеженнями на розмірності матриць A, B та Y.

Теорема 9. *За умови, що матриця A має обернену, матричні рівняння* (1.25) *та* (1.26) *мають розв'язок і до того ж единий.*

Доведення. Домножимо рівняння (1.25) зліва, а (1.26) — справа на матрицю A^{-1}. Тоді $X = A^{-1}B$, а $Y = BA^{-1}$. З останніх двох формул безпосередньою перевіркою випливає *існування*, а *единість* гарантується лемою 3. $\square$

На практиці для знаходження розв'язків матричних рівнянь (1.25) та (1.26) часто користуються наступним твердженням, яке буде доведено пізніше (див. наслідок 12).

Твердження 4. *Якщо який-небудь ланцюжок ЕПр (ЕПс) переводить квадратну матрицю A в одиничну матрицю E, то цей же ланцюжок переводить матрицю B в матрицю $A^{-1}B$ (в матрицю BA^{-1}).*

Ключові слова:

СЛР; матричне рівняння; одинична матриця; оберенена матриця; елементарні перетворення рядків (стовпців) матриці.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Які обмеження необхідно накласти на матриці A, B та X в рівнянні (1.25) та на матриці A, B та Y в рівнянні (1.26)?
2. Навести приклади матриць A та B, щоб рівняння (1.25) та (1.26): a) мали єдиний розв'язок, b) мали безліч розв'язків, c) не мали б жодного розв'язку.
3. За яких (достатніх) умов матричне рівняння $AZB = C$ має розв'язок, і до того ж єдиний?
4. Довести, що для будь-яких квадратних матриць A та B рівняння $AX = XB$ має розв'язок. Чи завжди це рівняння має нетривіальний розв'язок?
5. Розв'язати рівняння $AX - XA = E$.

Розділ 2

Векторна алгебра та аналітична геометрія

Мотивація

Як відомо зі шкільного курсу фізики, фізичні величини бувають скалярними (як то об'єм, маса, густина, температура тощо, які повністю визначаються своїм числовим значенням) та векторними (швидкість, сила, напруженість магнітного поля і так далі, які крім числового значення мають ще й напрям). Для роботи з останніми застосовують апарат векторної алгебри. Апарат векторного числення ефективно використовується в багатьох галузях науки та техніки, наприклад, в електродинаміці, гідродинаміці, механіці, теорії механізмів та машин, теорії кодування та інших. Крім того векторна алгебра широко використовується в аналітичній геометрії — розділі математики, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь, фігур, тіл тощо) вивчаються засобами алгебри на основі методу координат. В свою чергу аналітична геометрія дає інструмент для візуалізації таких математичних об'єктів як СЛР $m \times 2$ та $m \times 3$, комплексні числа, лінійні оператори, квадратичні функції.

2.1 Лінійні операції над векторами

Нехай задано деякий простір: пряма W_1, площина W_2 або звичайний тривимірний простір W_3[1]. Нагадаємо, що вектором або напрямленим відрізком $\overrightarrow{AB}$ називається впорядкована пара (A, B) точок, перша з яких A називається його початком (або точкою прикладання), а друга B — кінцем; при цьому сам вектор може позначатися малими латинськими літерами, наприклад, $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$. Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називається нульовим і позначається $\mathbf{0}$.

Довжина відрізка AB називається модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ і позначається $|\overrightarrow{AB}|$. Зрозуміло, що довжина нульового вектора $|\mathbf{0}| = 0$. Напрям вектора $\overrightarrow{AB}$ визначається променем $[AB)$, при цьому нульовий вектор вважається однаково напрямленим[2] з будь-яким вектором.

Вектори, розміщені на прямих, паралельних деякій прямій, називаються колінеарними. Вектори, розміщені на прямих, паралельних деякій площині, називаються компланарними. Нульовий вектор вважається колінеарним з будь-яким вектором і компланарним з будь-якими двома векторами.

[1] Тут і всюди в цьому розділі під деяким простором ми будемо розуміти будь-який з зазначених просторів з фіксованими раз і назавжди одиницею довжини та мірою кута (радіан). При цьому, якщо не буде зазначено інше, будемо проводити міркування на прикладі простору W_3, що не буде порушувати загальності.

[2] Нагадаємо, що два променя $[AB)$ та $[CD)$ називаються однаково напрямленими, якщо прямі AB та CD паралельні, а точки B та D лежать в одній півплощині відносно прямої AC; і два променя $[AB)$ та $[CD)$ називаються протилежно напрямленими, якщо прямі AB та CD паралельні, а точки B та D лежать в різних півплощинах відносно прямої AC.

Означення 16. Два вектори $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ називаються рівними $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, якщо вони:

1) колінеарні $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$;
2) однаково напрямлені $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$;
3) мають рівні модулі $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$.

Лема 4. *Для довільних вектора $\overrightarrow{AB}$ та точки C існує і до того ж єдина точка D така, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Крім того, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.*

Доведення. *Існування* точки D випливає з побудови, а *єдиність* — з означення 16. Рівність векторів $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ випливає з другої та першої ознак рівності трикутників. □

Лема 4 складається з двох тверджень: про перенос вектора з однієї точки в іншу та про рівність двох векторів. Перше з тверджень дозволяє обгрунтувати можливість здійснення тієї чи іншої операції (сума двох векторів, скалярний та векторний добутки тощо), в той час як друге твердження обгрунтовує їх коректність (незалежність від точки, в яку перенесли вектор). Зокрема, лема 4 дозволяє ввести поняття кута між векторами як кута між напрямними для цих векторів променями зі спільною вершиною. Зауважимо тут також, що вектори, кут між якими є прямим, називаються ортогональними. Нульовий вектор вважається ортогональним до кожного вектора.

Означення 17. Сумою двох векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ називається вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, який напрямлений з початку вектора $\boldsymbol{a}$ в кінець вектора $\boldsymbol{b}$ за умови, що початок вектора $\boldsymbol{b}$ збігається з кінцем вектора $\boldsymbol{a}$.

Поряд з «правилом трикутника», яке складає суть означення суми двох векторів, часто користуються рівносильним йому «правилом паралелограма»: якщо вектори $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ зведені до спільного початку і на них побудований паралелограм, то сума $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ є вектор, що збігається з діагоналлю цього паралелограма, яка виходить зі спільного початку векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$. Коректність «правил» забезпечується обома твердженнями леми 4.

Означення 18. Добутком вектора $\boldsymbol{a}$ на дійсне число (скаляр) λ називається вектор $\lambda\boldsymbol{a}$, який визначається наступними умовами:

1) $\lambda\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{a}$,
2) $\lambda\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{a}$, якщо $\lambda \geqslant 0$, і $\lambda\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}$, якщо $\lambda < 0$,
3) $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$.

Для операцій додавання векторів та множення векторів на скаляр виконуються наступні властивості, які легко випливають з означення операцій та відповідних властивостей множини $\mathbb{R}$.

1°. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ (асоціативність додавання).

2°. Існує вектор $\boldsymbol{0} \in W_3$ (нульовий вектор) такий, що для довільного вектора $\boldsymbol{a} \in W_3$ виконується співвідношення $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (існування нейтрального відносно додавання векторів).

3°. Для кожного вектора $\boldsymbol{a} \in W_3$ існує (свій) вектор $\boldsymbol{b} \in W_3$, який позначають через $-\boldsymbol{a}$, такий, що $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ (існування симетричного відносно додавання вектора).

4°. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (комутативність додавання).

5°. $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a})$ (асоціативність множення на скаляр).

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою за означенням 16. □

6°. $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$ (дистрибутивність множення на скаляр відносно додавання скалярів).

7°. $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ (дистрибутивність множення на скаляр відносно додавання векторів).

Вектор $\boldsymbol{e}$, довжина якого $|\boldsymbol{e}| = 1$, називається одиничним. Якщо вектор $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, то одиничний вектор $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ називається ортом вектора $\boldsymbol{a}$.

Ключові слова:

Вектор; початок вектора; кінець вектора; точка прикладання вектора; нульовий вектор; модуль вектора; однаково напрямлені вектори; протилежно напрямлені вектори; колінеарні вектори; компланарні вектори; рівні вектори; лема про перенос вектора з однієї точки в іншу; кут між векторами; ортогональні вектори; сума двох векторів; правило трикутника; правило паралелограма; добуток вектора на скаляр; асоціативність операції; комутативність операції; дистрибутивність однієї операції відносно іншої; нейтральний відносно додавання елемент; симетричний відносно додавання елемент; одиничний вектор; орт вектора.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести властивості **1°**–**7°**.
2. Як можна ввести операцію різниці двох векторів?
3. Побудувати вектори: a) $0\,\boldsymbol{a}$, b) $(0.5)\,\boldsymbol{a}$, c) $(-1)\,\boldsymbol{a}$, d) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, e) $(-2)\,\boldsymbol{a}+(0.5)\boldsymbol{b}$.
4. Поясніть, яким чином лема 4 забезпечує коректність «правила трикутника» та «правила паралелограма».
5. Довести рівносильність «правила трикутника» та «правила паралелограма».
6. Чи можна в означенні 16 прибрати умову 1)?
7. Чи можна в означенні 18 умову 2) переписати у вигляді: $\lambda\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{a}$, якщо $\lambda>0$, і $\lambda\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{a}$, якщо $\lambda\leqslant 0$?
8. Чи може існувати більше ніж один нейтральний відносно додавання вектор?
9. Чи може деякий вектор мати більше ніж один симетричний відносно додавання вектор?
10. Які вектори не мають орта і чому?
11. Які кути можуть бути між векторами в просторі W_1?

2.2 Розклад вектора за базисом

Теорема 10. *Нехай задано вектор $\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}$. Для довільного вектора $\boldsymbol{a}$, колінеарного з вектором $\boldsymbol{e}$, існує і до того ж едине дійсне число λ таке, що $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}$.*

Доведення. *Існування.* Число $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{e}|}$, якщо $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{e}$, і $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{e}|}$, якщо $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{e}$.

Єдиність. Якщо $\lambda\neq\mu$, то $|\lambda\boldsymbol{e}|\neq|\mu\boldsymbol{e}|$ або $\lambda\boldsymbol{e}\uparrow\downarrow\mu\boldsymbol{e}$. □

Теорема 11. *Нехай задано два неколінеарних вектори $\boldsymbol{e}_1$ та $\boldsymbol{e}_2$. Для довільного вектора $\boldsymbol{a}$, компланарного з векторами $\boldsymbol{e}_1$ та $\boldsymbol{e}_2$, існує і до того ж едина пара дійсних чисел λ_1 та λ_2 таких, що $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.*

Доведення. *Існування.* Перенесемо всі три вектора в одну точку O: $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$. Проведемо пряму AB_1 паралельно вектору $\overrightarrow{OE_2}$ так, що $B_1=AB_1\cap OE_1$, і пряму AB_2 паралельно вектору $\overrightarrow{OE_1}$ так, що $B_2=AB_2\cap OE_2$. Тоді $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}$, причому $\overrightarrow{OB_1}\parallel\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OB_2}\parallel\overrightarrow{OE_2}$. За теоремою 10 існують числа λ_1 та λ_2 такі, що $\overrightarrow{OB_1}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$ та $\overrightarrow{OB_2}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

Єдиність. Зауважимо, що $\boldsymbol{e}_1\neq\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{e}_2$. Якщо $\boldsymbol{a}=\mu_1\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2$ — інший розклад, то $(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{e}_1+(\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$. Якщо $\lambda_1-\mu_1\neq 0$ або $\lambda_2-\mu_2\neq 0$, то вектори $\boldsymbol{e}_1$ та $\boldsymbol{e}_2$ колінеарні. □

Теорема 12. *Нехай задано три некомпланарних вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ та $\boldsymbol{e}_3$. Для довільного вектора $\boldsymbol{a}$ існує і до того ж єдина трійка дійсних чисел λ_1, λ_2 та λ_3 таких, що $\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3$.*

Доведення. Теорема доводиться аналогічно до теореми 11. □

> **Означення 19.** Базисом на прямій W_1 називається довільний ненульовий вектор $\boldsymbol{e}$ на цій прямій.
>
> Базисом на площині W_2 називається довільна впорядкована пара неколінеарних векторів $\boldsymbol{e}_1$ та $\boldsymbol{e}_2$ на цій площині.
>
> Базисом в просторі W_3 називається довільна впорядкована трійка некомпланарних векторів $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ та $\boldsymbol{e}_3$ з цього простору.
>
> Базис, кожний вектор якого є одиничним, називається нормованим. Базис, кожна пара різних векторів якого є ортогональною, називається ортогональним. Базис, який одночасно є нормованим і ортогональним, називається ортонормованим.

Як випливає з означення 19 та теорем 10, 11 та 12, кожний вектор деякого простору розкладається за базисом цього простору і до того ж єдиним чином. Тобто, якщо в просторі W_3 зафіксовано деякий базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то кожному вектору $\boldsymbol{a}$ можна поставити у взаємно однозначну відповідність впорядковану трійку $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ дійсних чисел таких, що $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3$. В такий спосіб встановлюється взаємно однозначна відповідність між множинами W_3 та $\mathbb{R}^3$. Більше того, ця відповідність між W_3 та $\mathbb{R}^3$ продовжується до зберігання операцій додавання двох векторів та множення вектора на скаляр, а саме:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \boldsymbol{b} \mapsto (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \\ \lambda\boldsymbol{a} \mapsto \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \end{cases}$$

де операції над трійками визначаються формулами (1.16) на сторінці 20.

Ключові слова:

Колінеарні вектори; компланарні вектори; однаково напрямлені вектори; протилежно напрямлені вектори; нульовий вектор; перенос вектора з однієї точки в іншу; базис простору; арифметичний векторний простір; операції над векторами в арифметичному векторному просторі; взаємно однозначна відповідність; збереження операції; правило паралелограма; ЛК.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Чи може один з: a) двох неколінеарних, b) трьох некомпланарних векторів бути нульовим?
2. Довести теорему 12.
3. Довести, що взаємно однозначна відповідність між множинами W_3 та $\mathbb{R}^3$ продовжується до зберігання операцій додавання двох векторів та множення вектора на скаляр.
4. Чи може нульовий вектор входити до базису?
5. Чи може який-небудь вектор базису бути ЛК інших векторів базису?
6. Чи можна дати таке означення базису: «Базисом простору називається така система векторів, що жоден з векторів цієї системи лінійно не виражається через інші вектори системи, але будь-який вектор простору є ЛК цієї системи векторів.»?

7. Чи можна дати таке означення базису: «Базисом простору називається така система векторів, що будь-який вектор простору лінійно виражається через цю систему векторів і до того ж єдиним чином.»?

8. Чи можна встановити взаємно однозначну відповідність між множинами: a) W_2 та $\mathbb{R}^2$, b) W_1 та $\mathbb{R}^1$? Чи буде ця відповідність зберігати операції додавання двох векторів та множення вектора на скаляр?

9. Нехай в просторі W_3 зафіксовано деякий базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ і кожний вектор $\boldsymbol{a}$ можна подати у вигляді $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3$, де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Чи буде відповідність: a) $\boldsymbol{a} \mapsto (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$, b) $\boldsymbol{a} \mapsto (\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3)$, c) $\boldsymbol{a} \mapsto (\alpha_1 + 1, \alpha_2 - 1, \alpha_3)$, d) $\boldsymbol{a} \mapsto (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3)$ між множинами W_3 та $\mathbb{R}^3$ взаємно однозначною? Якщо так, то чи буде вона зберігати операції?

10. Чи може базис простору W_1 бути: a) нормованим, b) ортогональним, c) ортонормованим?

2.3 Прямокутна декартова система координат

Нехай задано деякий простір з фіксованою точкою O. Тоді довільній точці M цього простору можна поставити у відповідність вектор $\overrightarrow{OM}$, який називається радіус-вектором точки M відносно точки O. Якщо в просторі W_3, крім точки O, зафіксовано деякий базис, то точці M можна поставити у взаємно однозначну відповідність впорядковану трійку чисел — координати її радіус-вектора.

Означення 20. Сукупність точки і базису в просторі називається афінною системою координат (АСК) в цьому просторі, при цьому точка називається початком системи координат і позначається O. Прямі, які проходять через початок координат паралельно базисним векторам, називаються осями координат або координатними осями.

АСК, базис якої є ортонормованим, називається прямокутною декартовою системою координат (ПДСК). Базисні вектори в ПДСК простору W_3 позначаються через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ та $\boldsymbol{k}$.

Розглянемо неперервні[3] лінійні без особливостей перетворення деякого простору. Перетворення простору називається лінійним, якщо будь-які три точки, які лежать на одній прямій, переходять в три точки, які лежать на одній прямій, причому просте відношення цих точок зберігається[4]. Перетворення простору називається неособливим, якщо будь-які дві різні точки переходять в дві різні точки.

Означення 21. Нехай задано деякий простір і в ньому два базиси. Говорять, що два базиси мають однакову орієнтацію, якщо існує неперервне лінійне без особливостей перетворення цього простору, яке переводить один базис в інший, і протилежну орієнтацію, якщо такого перетворення не існує.

Вочевидь, що відношення «мати однакову орієнтацію» на множині базисів є відношенням еквівалентності[5], і неважко довести, що фактор-множина множини всіх базисів простору за

[3] Тут і всюди поняття неперервності (зокрема, неперервного перетворення) вважається інтуїтивно зрозумілим.

[4] Говорять, що точка M ділить напрямлений відрізок (вектор) $\overrightarrow{AB}$ у відношенні λ, якщо $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, при цьому саме число λ називається простим відношенням трьох точок A, B, M.

[5] Відношення $\rho \subset M \times M$, задане на множині M, називається відношенням еквівалентності, якщо воно є рефлексивним ($\forall\ a \in M \quad a\rho a$), симетричним ($a\rho b \implies b\rho a$) та транзитивним ($a\rho b,\ b\rho c \implies a\rho c$). Класом еквівалентності за відношенням ρ з представником a називається множина $[a]_\rho = \{x \in M \mid x\rho a\}$. Множина всіх класів еквівалентності множини M за відношенням ρ утворює так звану фактор-множину M/ρ. Легко довести, що відношення еквівалентності ρ єдиним чином визначає фактор-множину M/ρ, і навпаки, за фактор-множиною M/ρ можна однозначно відтворити відношення ρ.

цим відношенням складається усього з двох елементів. Якщо в просторі зафіксовано деякий базис, то всі однаково орієнтовані з ним базиси називаються правими, а протилежно орієнтовані — лівими. Простір, в якому зафіксовано деякий базис, називається орієнтованим.

Загальноприйнятим є вважати, що на площині W_2 впорядкована пара неколінеарних векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ утворює правий базис, якщо найкоротший поворот від першого вектора $\boldsymbol{a}$ до другого вектора $\boldsymbol{b}$ видно проти годинникової стрілки. Аналогічна домовленість приймається й для простору W_3: вважається, що впорядкована трійка некомпланарних векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ утворює правий базис (є правою трійкою векторів), якщо з кінця третього вектора $\boldsymbol{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\boldsymbol{a}$ до другого вектора $\boldsymbol{b}$ видно проти годинникової стрілки; в протилежному випадку трійка векторів називається лівою. Орієнтація базису в АСК простору W_2 або W_3 визначає відповідну орієнтацію й самої системи координат. Надалі, якщо не буде зазначено інше, будемо розглядати лише ПДСК і вважати, що ПДСК з базисними векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ та $\boldsymbol{k}$ є правою (тобто $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — права трійка векторів).

> **Означення 22.** Пряма l, на якій задано ПДСК з початком в точці O (ця точка не обов'язково є початком ПДСК простору, в якому міститься пряма l), називається напрямленою прямою або віссю і позначається Ol[6]. Базисний вектор осі Ol називається її ортом.
>
> Проекцією (ортогональною проекцією) точки $M \notin l$ на вісь Ol називається точка $M' \in l$ така, що прямі MM' та l ортогональні.
>
> Складовою вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь Ol називається вектор $\overrightarrow{A'B'}$, де A', B' — проекції точок A та B на вісь Ol.
>
> Проекцією вектора $\boldsymbol{a}$ на вісь Ol називається координата складової вектора $\boldsymbol{a}$ на вісь Ol в базисі осі Ol і позначається $\operatorname{pr}_{Ol} \boldsymbol{a}$.
>
> Проекцією вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ називається проекція вектора $\boldsymbol{a}$ на вісь, яка визначається ортом вектора $\boldsymbol{b}$, і позначається $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$.

Мають місце наступні властивості проекції векторів.
1°. Якщо $\boldsymbol{b} \uparrow\uparrow Ol$, то $\operatorname{pr}_{Ol} \boldsymbol{a} = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}^0} \boldsymbol{a}$, де $\boldsymbol{b}^0$ — орт вектора $\boldsymbol{b}$.
2°. $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi$, де φ — кут між векторами $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$.
3°. $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{a} + \operatorname{pr}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{b}$.
4°. $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$.

Твердження 5. *Нехай в просторі W_3 задано ПДСК з початком в точці O та з базисними векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Тоді для довільної точки $A \in W_3$ наступні твердження є рівносильними:*
1) $A(x, y, z)$, тобто точка A має координати x, y, z;
2) $\overrightarrow{OA} = (x, y, z)$;
3) $\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$;
4) $x = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{i}} \overrightarrow{OA}$, $y = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{j}} \overrightarrow{OA}$, $z = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{k}} \overrightarrow{OA}$.

Для того, щоб операції над векторами звести до операцій над числами, розглянемо вектори в ПДСК.

5°. $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a) \iff x_a = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{a},\ y_a = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{a},\ z_a = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{a}$.

6°. Нехай $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\boldsymbol{b} = (x_b, y_b, z_b)$. Тоді $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \iff \begin{cases} x_a = x_b, \\ y_a = y_b, \\ z_a = z_b. \end{cases}$

7°. $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a) \implies |\boldsymbol{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$.

8°. $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B) \implies \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A), \\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \end{cases}$

---

[6] Таким чином, координатні осі — це прямі в просторі W_3, на яких ПДСК індукується з простору W_3. Зазвичай координатні осі, які відповідають векторам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, позначаються Ox, Oy, Oz та називаються осями абсцис, ординат та аплікат відповідно.

9°. Напрям довільного вектора $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a)$ визначається кутами $\alpha = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}})$, $\beta = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}})$, $\gamma = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}})$, де $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$, які утворює вектор $\boldsymbol{a}$ з осями координат. Косинуси цих кутів називаються напрямними косинусами, і для них виконуються такі співвідношення:

$$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y_a}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z_a}{|\boldsymbol{a}|}, \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

10°. $$\begin{cases} \boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a), \\ \boldsymbol{b} = (x_b, y_b, z_b), \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b), \\ \lambda \boldsymbol{a} = (\lambda x_a, \lambda y_a, \lambda z_a), \\ \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \iff \dfrac{x_a}{x_b} = \dfrac{y_a}{y_b} = \dfrac{z_a}{z_b}. \end{cases}$$

11°. Нехай точка M ділить (напрямлений) відрізок $\overrightarrow{AB}$, заданий точками A та B, у відношенні $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \dfrac{\nu}{\mu}$ (тобто $\mu\overrightarrow{AM} = \nu\overrightarrow{MB}$). Тоді для довільної точки O виконується співвідношення

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\mu\overrightarrow{OA} + \nu\overrightarrow{OB}}{\mu + \nu}.$$

Зокрема, якщо $M(x, y, z)$, $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ і $\lambda = \dfrac{\nu}{\mu}$, то

$$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}.$$

12°. Якщо $M(x, y, z)$ — середина відрізка AB, який задається точками $A(x_A, y_A, z_A)$ та $B(x_B, y_B, z_B)$, то $\quad x = \dfrac{x_A + x_B}{2}, \quad y = \dfrac{y_A + y_B}{2}, \quad z = \dfrac{z_A + z_B}{2}.$

Нагадаємо, що центром мас механічної системи називається така точка в просторі, рухом якої можна замінити поступальний рух цієї системи під дією зовнішніх сил за умови, що в цій точці зосереджена вся маса системи.

13°. Якщо в точках $M_i(x_i, y_i, z_i)$ зосереджено маси m_i, де $i = \overline{1, n}$, то центр мас цієї системи n матеріальних точок знаходиться в точці $C(x_C, y_C, z_C)$, де

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}. \tag{2.1}$$

Ключові слова:

Радіус-вектор точки; базис; АСК; ПДСК; лінійне перетворення простору; неособливе перетворення простору; взаємна орієнтація базисів простору; орієнтація простору; напрямлена пряма або вісь; проекція точки на вісь; складова вектора на вісь; проекція вектора на вісь; проекція вектора на вектор; координати вектора; координати точки; кут між векторами; модуль вектора; напрямні косинуси; поділ відрізка у відношенні; середина відрізка; центр мас системи матеріальних точок.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести властивості **1°–13°**.

2. Чи кожен рух[7] простору є: a) неперервним перетворенням, b) лінійним перетворенням, c) перетворенням без особливостей?

[7] Нагадаємо, що рухом простору називається таке його перетворення, яке зберігає відстань між будь-якими двома точками цього простору.

3. Чи є перетворення простору, при якому всі точки простору переходять в деяку фіксовану точку, a) неперервним, b) лінійним, c) без особливостей перетворенням простору?

4. Поясніть, чому в просторі: a) W_1, b) W_2, c) W_3 існує лише дві орієнтації.

5. Нехай $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — права трійка векторів. Якою трійкою (правою чи лівою) будуть інші трійки, складені з векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$?

6. Як пов'язані між собою $\mathrm{pr}_{Ol}\,\boldsymbol{a}$ та $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}$, якщо $\boldsymbol{b} \uparrow\downarrow Ol$?

7. Сформулюйте означення кута між вектором та віссю.

8. Знайти $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$, де α, β, γ — кути, які утворює вектор $\boldsymbol{a}$ з осями координат.

9. Як відносно відрізка AB розміщена точка M, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, якщо: a) $\lambda = 0$, b) $\lambda = 1$, c) $\lambda = -1$, d) $\lambda = 0.5$, e) $\lambda = -0.5$, f) $\lambda = 2$, g) $\lambda = -2$.

10. Як пов'язані між собою поділ відрізка в заданому відношенні з центром мас системи двох матеріальних точок?

11. Знайти центр мас однорідного прямокутника, в якому зроблено нецентральний отвір у формі: a) кола, b) квадрата, c) правильного трикутника.

2.4 Альтернативні системи координат

Афінні системи координат — це не єдиний спосіб визначити за допомогою чисел місце знаходження точки в деякому просторі. Для цієї мети використовують багато інших координатних систем.

Найважливішою після ПДСК на площині W_2 є полярна система координат (ПСК). Вона задається точкою O, яка називається полюсом, і променем Op, який виходить з полюса і називається полярною віссю. Положення точки M фіксується двома числами: радіусом $r = |\overrightarrow{OM}|$ та кутом $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{OM}, Op})$, який відраховується від полярної осі проти годинникової стрілки і називається полярним кутом або азимутом. Для полюса $r = 0$, а φ не визначено. У решти точок $r > 0$, а φ визначено з точністю до доданку, кратного 2π. Інколи обмежують зміну полярного кута деякими умовами, наприклад, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ або $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, що усуває неоднозначність, проте накладає певні незручності. З іншого боку, для усунення незручностей інколи розглядають узагальнену ПСК і приймають, що радіус r може набувати й від'ємних значень. Геометрично це означає, що дві точки з однаковим азимутом і протилежними радіусами є симетричними відносно полюса.

Виберемо на площині (праву) ПДСК таким чином, щоб її початок збігався з полюсом ПСК, а вісь абсцис — з полярною віссю. Так визначені ПДСК і ПСК називаються відповідними. Легко бачити, що декартові координати (x, y) точки M виражаються через її полярні координати (r, φ) таким чином:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{2.2}$$

Зворотній зв'язок здійснюється дещо складніше. Так, радіус шукається за формулою

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а полярний кут, за умови $r \neq 0$, визначається з співвідношень

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

ПСК можна використати для знаходження зв'язку між двома ПДСК, одна з яких отримана з іншої шляхом повороту на деякий кут. Так, якщо ПДСК OXY отримується з ПДСК

Oxy шляхом повороту на кут α і точка M в ПСК, пов'язаній з ПДСК OXY, має полярні координати (r,φ), то в ПСК, пов'язаній з ПДСК Oxy, точка M буде мати полярні координати $(r,\varphi+\alpha)$. Тоді координати точки M в ПДСК Oxy

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi+\alpha) = r\cos\varphi\cos\alpha - r\sin\varphi\sin\alpha = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y = r\sin(\varphi+\alpha) = r\sin\varphi\cos\alpha + r\cos\varphi\sin\alpha = X\sin\alpha + Y\cos\alpha, \end{cases} \tag{2.3}$$

звідки

$$\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{2.4}$$

В просторі W_3 узагальненням ПСК є циліндрична (ЦСК) та сферична (ССК) системи координат. І для тієї, і для іншої фігура, відносно якої визначається положення точки, складається з точки O (полюс), променя Op (полярна вісь) та вектора $\boldsymbol{n}$ (вектор зеніту[8]), ортогонального до полярної вісі. Площина π, яка проходить через полюс перпендикулярно до вектору зеніту, називається фундаментальною або екваторіальною.

Нехай задана деяка точка M. Проведемо з неї перпендикуляр MP на площину π. Циліндричні координати точки M — це трійка (ρ,φ,z), де (ρ,φ) — полярні координати точки P на екваторіальній площині[9], а $z = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{PM}$. Сферичні координати точки M — це трійка (r,φ,θ), де $r = |\overrightarrow{OM}|$, φ — азимут точки P на екваторіальній площині, а θ — кут вектора $\overrightarrow{OM}$ з площиною π (широта).

Як і на площині, в просторі W_3 можна визначити (праву) ПДСК відповідну до ЦСК та ССК: початок ПДСК збігається з полюсом, вісь абсцис — з полярною віссю, а вісь аплікат співнапрямлена з вектором зеніту.

Фізична задача про знаходження центру мас системи матеріальних точок дозволяє ввести так звану барицентричну систему координат (БСК). Якщо в деякому просторі зафіксована система матеріальних точок M_i, де $i=\overline{1,n}$, то, змінюючи розміщені в цих точках маси m_i, можна отримати (при певних умовах) як центри мас цієї системи всі точки простору. Отже, набір мас m_i, які зосереджені в точках M_i, можна розглядати як координати точки в просторі. Як це випливає з формул (2.1), при пропорційному збільшенні мас центр не змінюється, а тому для того, щоб різним впорядкованим n-кам мас відповідали різні точки простору, розглядають так звані зведені маси, тобто накладають умову $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = 1$. Також легко зрозуміти, що для взаємно однозначної відповідності між координатами та точками в просторі (крім умови зведеності мас) система матеріальних точок (базис БСК) має складатися: a) з двох різних точок на прямій W_1, b) з трьох неколінеарних точок на площині W_2, c) з чотирьох некомпланарних точок у просторі W_3. Таким чином, для того, щоб в просторі W_k, де $k=1,2,3$, задати БСК необхідно вказати $k+1$ базисних точок загального розташування. Той факт, що точка C має барицентричні координати λ_i в базисі з точок M_i, де $i=\overline{1,n}$, позначається

$$\begin{cases} C = \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_n M_n, \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1. \end{cases}$$

Ключові слова:

ПДСК; ПСК; ЦСК; ССК; узагальнені системи координат; відповідні системи координат; полюс; полярна вісь; радіус-вектор точки; радіус точки; полярний кут; азимут; зеніт; вектор зеніту; фундаментальна або екваторіальна площина; широта; поворот ПДСК на площині; система матеріальних точок; зведені маси матеріальних точок системи; БСК; базис БСК; точки загального розташування.

[8] Вектор зеніту вказує напрямок на зеніт системи координат. Зеніт, з точки зору астрономії, це точка перетину небесної сфери з прямою, проведеною з центра Землі через місце спостереження на поверхні Землі.

[9] Зрозуміло, що ЦСК індукує на фундаментальній площині ПСК з полюсом в точці O і полярною віссю Op.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. В чому переваги та недоліки узагальненої ПСК?

2. Написати умову, при якій дві точки: a) з полярними координатами, b) з узагальненими полярними координатами $A(r, \varphi)$ та $B(\rho, \psi)$ збігаються.

3. Нехай точка M задана своїми декартовими координатами (x, y). Записати формулу для знаходження азимута φ цієї точки: a) в ПСК, b) в узагальненій ПСК в явному вигляді.

4. Отримати двома різними способами з формул (2.3) формули (2.4).

5. Нехай на площині задано дві ПДСК Oxy та $O'x'y'$, які не обов'язково є правими. Довести, що зв'язок між координатами точки M в цих ПДСК задається співвідношеннями

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha \mp y' \sin\alpha + x_0, \\ y = x' \sin\alpha \pm y' \cos\alpha + y_0, \end{cases} \tag{2.5}$$

так звані формули переходу від ПДСК Oxy до ПДСК $O'x'y'$.

6. Які обмеження необхідно накласти на координати точки в ЦСК та ССК? Що слід розуміти під узагальненими ЦСК та ССК, які їх переваги та недоліки?

7. Як пов'язані між собою координати точки в відповідних ПДСК, ЦСК та ССК в просторі?

8. Нехай в деякому просторі задано ПДСК і відомі декартові координати базисних точок БСК. Знайти декартові координати деякої точки, якщо відомі її барицентричні координати в заданій БСК.

9. Розглянувши центр мас трьох однакових за масою матеріальних точок, довести, що медіани трикутника мають спільну точку, і кожна з медіан ділиться цією точкою у відношенні 2 : 1, починаючи з вершини.

10. Нехай на площині задана БСК з базисними точками A, B, C. Знайти залежність між знаками барицентричних координат точки P і взаємним розміщенням точки P відносно трикутника ABC.

11. Нехай точка P розміщена всередині (невиродженого) трикутника ABC. Довести, що площі трикутників, на які розбиває точка P трикутник ABC, пропорційні барицентричним координатам точки P в БСК з базисними точками A, B, C.

2.5 Скалярний добуток векторів

Означення 23. Нехай задано деякий простір. Скалярним добутком двох векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ простору називається число

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}),$$

де $|\boldsymbol{a}|$ та $|\boldsymbol{b}|$ — модулі векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, а $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ — кут між ними.

Скалярний добуток $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ інколи позначають через $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Якщо $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, то ведуть мову про скалярний квадрат $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^2$ вектора $\boldsymbol{a}$.

З означення 22 проекції векторів випливає співвідношення

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \operatorname{pr}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a},$$

яке дозволяє легко довести алгебраїчні властивості скалярного добутку.

1°. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \geqslant 0$ для довільного вектора $\boldsymbol{a} \in W_3$, причому рівність досягається тоді й лише тоді, коли $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ (додатна визначеність).

2°. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ (симетричність або комутативність).

3°. $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ (асоціативність множення на скаляр).

4°. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ (дистрибутивність скалярного добутку відносно додавання векторів).

Властивості **3°** та **4°** разом називаються лінійністю за першим аргументом. Таким чином, скалярний добуток є додатньо визначеною симетричною білінійною[10] функцією.

Наведемо геометричні властивості скалярного добутку.

5°. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2$, звідки випливає, що $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$.

6°. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, зокрема, нульовий вектор ортогональний до будь-якого іншого вектора.

7°. Якщо $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{b}$ і $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, то

a) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) > 0 \iff 0 \leqslant \varphi < \dfrac{\pi}{2}$,

b) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) < 0 \iff \dfrac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi$.

Нехай в просторі W_3 задано ПДСК з початком в точці O та з базисними векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, і нехай $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\boldsymbol{b} = (x_b, y_b, z_b)$. Тоді мають місце наступні властивості.

8°. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

9°. $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$.

10°. $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$.

11°. $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$.

12°. $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \dfrac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$.

Ключові слова:

Скалярний добуток векторів; модуль вектора; кут між векторами; проекція вектора; додатна визначеність; симетричність; лінійність; білінійність; ортогональність векторів; ПДСК.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести властивості **1°–12°**.
2. Довести, що ядро скалярного добутку (тобто множина всіх векторів, ортогональних до кожного вектора з простору) складається лише з нульового вектора **0**.
3. Які з визначених на просторі W_3 функцій φ є додатньо визначеними симетричними білінійними функціями, якщо: a) $\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$, b) $\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, c) $\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, d) $\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos^3(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, e) $\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = x_a x_b + y_a y_b$, f) $\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = x_a x_b + 2\,y_a y_b + 3\,z_a z_b$, g) $\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = x_a x_b + y_a y_b - z_a z_b$, h) $\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = x_a x_b + y_a z_b + z_a y_b$.
4. Довести правило паралелограма: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$.
5. Довести нерівність Коші–Буняковського: $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.
6. Довести теорему Піфагора: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \implies |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2$. Чи є остання рівність достатньою умовою ортогональності векторів?
7. Довести нерівність трикутника: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.
8. З'ясувати взаємне розміщення векторів $\boldsymbol{a}$ та $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

[10] В силу симетричності скалярний добуток є лінійною функцією й по другому аргументу, а значить — білінійною («двічі лінійною», тобто лінійною по кожному з двох аргументів).

9. Обчислити $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$, якщо $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$ і $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

10. Користуючись властивостями скалярного добутку, довести, що висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

2.6 Векторний добуток векторів

Означення 24. Нехай задано простір W_3. Векторним добутком вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ називається такий вектор $\boldsymbol{c}$, який визначається трьома умовами:

1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, де $|\boldsymbol{a}|$ та $|\boldsymbol{b}|$ — модулі векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, а $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ — кут між ними,

2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,

3) $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}\implies\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ — права трійка векторів.

Векторний добуток вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ позначається через $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ або $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.

Векторний добуток має такі алгебраїчні властивості.
1°. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ (нільпотентність).
2°. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ (антикомутативність).
3°. $[\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ (асоціативність множення на скаляр).
4°. $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ (дистрибутивність векторного добутку відносно додавання векторів).

Доведення. Доведення дистрибутивності грунтується на двох твердженнях.

1) Якщо $|\boldsymbol{c}|=1$, а вектор $\boldsymbol{a}$ ортогональний до $\boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ утворюється з вектора $\boldsymbol{a}$ шляхом повороту навколо вектора $\boldsymbol{c}$ на кут $\dfrac{\pi}{2}$ за годинниковою стрілкою (якщо дивитись з кінця вектора $\boldsymbol{c}$).

2) Якщо $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a_c}+\boldsymbol{a_{\perp c}}$, де вектор $\boldsymbol{a_c}$ колінеарний вектору $\boldsymbol{c}$, а $\boldsymbol{a_{\perp c}}$ ортогональний до $\boldsymbol{c}$, то, як це випливає з означення 24, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a_{\perp c}}\times\boldsymbol{c}$.

Нехай $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a_c}+\boldsymbol{a_{\perp c}}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b_c}+\boldsymbol{b_{\perp c}}$, де $\boldsymbol{a_c}$ та $\boldsymbol{b_c}$ колінеарні вектору $\boldsymbol{c}$, а $\boldsymbol{a_{\perp c}}$ та $\boldsymbol{b_{\perp c}}$ ортогональні до $\boldsymbol{c}$. Тоді, з огляду на твердження 2) та властивість **3°**, достатньо довести співвідношення $[\boldsymbol{a_{\perp c}}+\boldsymbol{b_{\perp c}},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a_{\perp c}},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{b_{\perp c}},\boldsymbol{c}]$, де $|\boldsymbol{c}|=1$. Проте, останнє співвідношення виконується в силу твердження 1) та того факту, що при повороті паралелограм, побудований на векторах $\boldsymbol{a_{\perp c}}$ та $\boldsymbol{b_{\perp c}}$, повертається разом зі своєю діагоналлю. □

Геометричні властивості векторного добутку такі.
5°. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\iff\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.
6°. Модуль $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ векторного добутку двох неколінеарних векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на цих векторах, віднесених до спільного початку, тобто $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

Нехай в просторі W_3 задано ПДСК з початком в точці O та з базисними векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, і нехай $\boldsymbol{a}=(x_a,y_a,z_a)$, $\boldsymbol{b}=(x_b,y_b,z_b)$. Тоді мають місце наступні властивості.
7°. $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$.
8°. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}$.

Ключові слова:

Векторний добуток векторів; модуль вектора; кут між векторами; орієнтація трійки векторів; права трійка векторів; нільпотентність; антикомутативність; лінійність; ПДСК.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести властивості $\mathbf{1}^\circ$–$\mathbf{8}^\circ$.

2. Довести, що нільпотентність векторного добутку випливає з антикомутативності.

3. Довести лінійність векторного добутку за другим аргументом.

4. Довести, що $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

5. Як зміниться векторний добуток, якщо до векторів-співмножників застосувати одне з елементарних перетворень?

6. Розглянувши вираз $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$, довести, що площа паралелограма, побудованого на діагоналях, в два рази більша за площу заданого паралелограма.

7. Довести, що площа опуклого чотирикутника дорівнює половині довжини векторного добутку його векторів-діагоналей.

8. Нехай на площині W_2 задано ПДСК з початком в точці O та з базисними векторами $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{j}$, і нехай $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a)$, $\boldsymbol{b} = (x_b, y_b)$. Довести, що площа S паралелограма, побудованого на векторах $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, віднесених до спільного початку, дорівнює $S = \pm \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}$.

9. Відомо, що $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Знайти довжини векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ та кути між ними.

10. Довести, що для трьох неколінеарних векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ рівності $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$ виконуються тоді й лише тоді, коли $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

11. Нехай задано два вектори $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ такі, що $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ і $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$. Дати геометричну інтерпретацію розв'язків $\boldsymbol{x}$ рівняння $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}] = \boldsymbol{b}$. Чи є серед розв'язків цього рівняння вектор, колінеарний вектору $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

2.7 Подвійний векторний та мішаний добутки векторів

Операція векторного добутку не є асоціативною, тобто в загальному випадку має місце співвідношення $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$. Це випливає з формули Лагранжа[11]

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$

для доведення якої оберемо (праву) ПДСК з базисом $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ так, щоб $\boldsymbol{b} = (x_b, 0, 0)$, $\boldsymbol{c} = (x_c, y_c, 0)$ і $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a)$. Тоді $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = x_b y_c \boldsymbol{k}$ і $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = x_b y_a y_c \boldsymbol{i} - x_a x_b y_c \boldsymbol{j}$. З іншого боку, вектори $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} = (x_a x_b x_c + x_b y_a y_c)\boldsymbol{i}$ і $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = x_a x_b x_c \boldsymbol{i} + x_a x_b y_c \boldsymbol{j}$, знаходження різниці між якими й завершує доведення формули Лагранжа. Вираз $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, нарівні з $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$, називається подвійним векторним добутком трьох векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{c}$.

З формули Лагранжа випливає також тотожність Якобі:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}.$$

Означення 25. Нехай задано простір W_3. Мішаним добутком трьох векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{c}$ називається число $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, яке позначається через $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

[11] Праву частину формули Лагранжа часто записують у вигляді $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, що легко запам'ятовується як мнемонічне правило «бац мінус цаб».

Якщо в просторі W_3 задано ПДСК з початком в точці O та з базисними векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, і $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\boldsymbol{b} = (x_b, y_b, z_b)$ та $\boldsymbol{c} = (x_c, y_c, z_c)$, то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

З останнього співвідношення легко випливають алгебраїчні властивості мішаного добутку трьох векторів.

1°. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями будь-які два множники, то мішаний добуток змінить знак на протилежний.

2°. При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється.

3°. У мішаному добутку знаки векторного та скалярного добутків можна міняти місцями, тобто $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Мають місце такі геометричні властивості мішаного добутку.

4°. Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах-співмножниках.

Доведення. Твердження випливає з формули об'єму паралелепіпеда та з означення мішаного добутку трьох векторів. □

5°. Нехай $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in W_3$. Тоді

a) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0 \iff \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — права трійка векторів,

b) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) < 0 \iff \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — ліва трійка векторів,

c) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0 \iff \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — три компланарних вектори.

Ключові слова:

Асоціативність операції; подвійний векторний добуток; формула Лагранжа; тотожність Якобі; мішаний добуток векторів; визначник третього порядку; компланарні вектори.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Отримати та довести формулу Лагранжа для добутку $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$.
2. Довести, що в загальному випадку $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.
3. За яких умов $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$?
4. Довести тотожність Якобі.
5. Довести співвідношення (2.6).
6. Довести властивості **1**°–**5**°.
7. Який геометричний зміст мають визначники 2-го та 3-го порядків?
8. Нехай в просторі W_3 задано АСК з базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Довести, що якщо вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{c}$ мають в цьому базисі координати (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) та (c_1, c_2, c_3) відповідно, то
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3).$$
9. Довести, що вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{c}$, які задовольняють умову $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$, є компланарними.

2.8 Лінії на площині

Поняття лінії інтуїтивно знайоме кожній людині, навіть тій, що не вивчала геометрію. Проте дати строге означення лінії є складною математичною задачею. Нестрого кажучи, під лінією розуміють таку множину точок в просторі, що в довільному (достатньо малому) околі довільної точки M всі її точки, відмінні від M, утворюють незв'язну множину (тобто розпадаються на декілька частин).

Нехай на площині задано ПДСК та деяка лінія L. Розглянемо деяке рівняння[12]

$$F(x, y) = 0, \tag{2.7}$$

яке пов'язує дві змінні величини x та y.

> **Означення 26.** Рівняння (2.7) називається рівнянням лінії L на площині (відносно заданої ПДСК), якщо $F(x_0, y_0) = 0$ для кожної точки $M(x_0, y_0) \in L$ і $F(x_0, y_0) \neq 0$ для кожної точки $M(x_0, y_0) \notin L$.

З точки зору цього означення сама лінія L являє собою (в заданій ПДСК) геометричне місце точок (ГМТ), координати яких задовольняють рівняння (2.7). При цьому говорять, що рівняння (2.7) визначає лінію L.

Зауважимо, що для того, щоб рівняння виду (2.7) визначало геометричний образ, який відповідає нашому звичному уявленню про лінію, необхідно на функцію $F(x, y)$ накласти певні обмеження (наприклад, вимогу однозначної розв'язності функціонального рівняння (2.7) відносно однієї зі змінних).

Для аналітичного подання лінії L часто буває зручним виражати змінні координати x та y точок цієї лінії через третю допоміжну змінну (або параметр) t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{2.8}$$

де функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ вважаються неперервними за параметром t в деякій області $T \subset \mathbb{R}$. Виключення параметра t з системи (2.8) призводить її до розглянутого вище рівняння (2.7).

Параметричне зображення лінії на площині природно виникає, якщо цю лінію розглядати як шлях, пройдений матеріальною точкою, яка неперервно рухається за певним законом. Дійсно, якщо змінна t являє собою час, який відраховується від деякого початкового моменту, то завдання закону руху й являє собою завдання координат x та y точки, що рухається, як деяких неперервних функцій $x = \varphi(t)$ та $y = \psi(t)$ часу t.

Вигляд рівняння лінії L залежить не лише від самої лінії L, але й від вибору системи координат. Якщо (2.7) являє собою рівняння лінії L відносно деякої ПДСК Oxy, то, щоб отримати рівняння цієї лінії L відносно іншої системи координат, достатньо підставити в рівняння (2.7) замість x та y їх вирази через нові координати. Так, наприклад, в ПСК лінія L буде визначатися рівнянням

$$G(r, \varphi) = 0,$$

де $G(r, \varphi) = F(r\cos\varphi, y\sin\varphi)$ (див. формулу (2.2) переходу від ПДСК до ПСК).

В зв'язку з аналітичним зображенням ліній виникають задачі двох типів. Задачі першого типу полягають у вивченні властивостей лінії за допомогою заздалегідь заданого рівняння цієї лінії. Таке вивчення проводиться засобами математичного аналізу і виходить за рамки аналітичної геометрії. Задачі другого типу полягають у виведенні рівняння лінії, наперед заданої геометрично (наприклад, лінії, яка задана як ГМТ з деякими умовами).

Щоб скласти рівняння лінії за її геометричними властивостями, необхідно:

1) на площині вибрати систему координат,

[12] Нагадаємо, що рівність $F(x, y) = 0$, де $F(x, y)$ — задана функція двох змінних x та y, називається рівнянням, якщо ця рівність виконується не для всіх пар (x, y) дійсних чисел. Рівність $F(x, y) = 0$, яка виконується для всіх пар (x, y) дійсних чисел, називається тотожністю.

2) взяти точку на лінії з довільними координатами,

3) записати у вигляді рівняння геометричну властивість, характерну для всіх точок лінії,

4) виразити через введені координати всі величини, що входять у рівняння.

Приклад 12. Нехай на площині задано дві точки A та B, відстань між якими дорівнює 2. Необхідно скласти рівняння лінії L, сума квадратів відстаней кожної точки якої до точок A та B є сталою та дорівнює 4. Тоді:

1) оберемо ПДСК Oxy так, що $A(-1,0)$ і $B(1,0)$,

2) візьмемо довільну точку $M(x,y) \in L$ і

3) запишемо рівняння лінії L: $AM^2 + BM^2 = 4$.

4) З того, що $AM^2 = (x+1)^2 + y^2$, $BM^2 = (x-1)^2 + y^2$ отримаємо рівняння лінії L: $x^2 + y^2 = 1$. □

Виходячи з аналітичного зображення ліній відносно ПДСК, встановлюють наступну класифікацію ліній на площині.

Означення 27. Лінія L називається алгебраїчною лінією порядку n, якщо існує ПДСК, в якій L визначається рівнянням (2.7), де $F(x,y)$ являє собою алгебраїчний многочлен від двох змінних x та y зведеного степеня n (див. означення 75).

Лінія L, яка не є алгебраїчною, називається трансцендентною.

Коректність означення 27 випливає з наступного твердження.

Теорема 13. *Якщо лінія L в деякій ПДСК визначається алгебраїчним рівнянням (від двох змінних) зведеного степеня n, то ця лінія й в будь-якій іншій ПДСК визначається алгебраїчним рівнянням (від двох змінних) того ж степеня n.*

Доведення. Нехай лінія L в ПДСК Oxy визначається рівнянням (2.7), а в ПДСК $O'x'y'$ — рівнянням $G(x',y') = 0$. Якщо функція $F(x,y)$ — алгебраїчний многочлен зведеного степеня n, то, як це випливає з співвідношення $G(x',y') = F(x,y)$, в якому змінні x, y та x', y' пов'язані формулами переходу (2.5), функція $G(x',y')$ буде алгебраїчним многочленом, зведений степінь якого не перевищує n. Аналогічні міркування при переході від ПДСК $O'x'y'$ до ПДСК Oxy показують, що функція $G(x',y')$ буде алгебраїчним многочленом, степінь якого не менше за n. Отже, $G(x',y')$ — алгебраїчний многочлен зведеного степеня n. □

Означення 28. Алгебраїчна лінія L, задана рівнянням (2.7), називається виродженою, якщо вона складається з скінченної кількості точок або її рівняння розкладається в добуток многочленів ненульового степеня; в протилежному випадку лінія L називається невиродженою.

З теореми 13 випливає, що виродженість лінії L не залежить від вибору ПДСК.

Ключові слова:

Поняття лінії в просторі; рівняння лінії на площині; ГМТ; параметричне рівняння лінії; рівняння лінії в ПСК; алгоритм складання рівняння лінії за її геометричними властивостями; алгебраїчні лінії; трансцендентні лінії; вироджені та невироджені лінії.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Який геометричний образ визначає рівняння (2.7), якщо: a) $F(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$, b) $F(x,y) = x^2 + y^2$, c) $F(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, d) $F(x,y) = x^2 - y^2$, e) $F(x,y) = |x| - x$? Чи будуть ці геометричні образи лінією в інтуїтивному розумінні?

2. Задати параметрично лінію L, якщо вона задається рівнянням $y = f(x)$.

3. Нехай задано ПДСК Oxy. Знайти рівняння кола з центром: а) в точці O, b) в точці $C(x_0, y_0)$ та радіусом R. Знайти рівняння цього кола параметричне та в відповідній ПСК.

4. Які з функцій $F(x, y)$, заданих в завданні 1 для самоопрацювання на стор. 49, визначають алгебраїчну лінію, задану рівнянням (2.7)? Які з цих алгебраїчних ліній є виродженими?

5. Поясніть, чому виродженість лінії L не залежить від вибору ПДСК.

2.9 Пряма на площині

Нехай задано площину і на ній ПДСК. Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: двома точками на прямій; точкою і вектором, паралельним або перпендикулярним до прямої; відрізками, які відтинає пряма на координатних осях, тощо. Різним способам завдання прямої відповідають у ПДСК різні види її рівнянь.

1°. Канонічне рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, з напрямним вектором $\boldsymbol{s} = (m, n)$:

$$l\colon \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

2°. Параметричне рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, з напрямним вектором $\boldsymbol{s} = (m, n)$:

$$l\colon \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$$

3°. Рівняння прямої l, що проходить через дві точки $M_0(x_0, y_0)$ та $M_1(x_1, y_1)$:

$$l\colon \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

4°. Рівняння прямої l у відрізках на осях (пряма l відтинає від координатних осей Ox та Oy відрізки довжинами a та b відповідно, тобто проходить через точки $M_0(a, 0)$ та $M_1(0, b)$):

$$l\colon \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

5°. Якщо напрямний вектор $\boldsymbol{s} = (0, n)$, то канонічне рівняння прямої l можна записати у вигляді $l : x = x_0$. Інакше, канонічне рівняння можна записати у вигляді рівняння

$$l\colon\ y - y_0 = k(x - x_0)$$

з кутовим коефіцієнтом $k = \dfrac{n}{m} = \operatorname{tg} \varphi$, де φ — кут, який утворює пряма l з додатнім напрямком осі Ox.

6°. Якщо пряма l проходить через точку $M_0(0, b)$, то її рівняння з кутовим коефіцієнтом можна переписати у вигляді

$$l\colon\ y = kx + b.$$

7°. Рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, з заданим вектором нормалі $\boldsymbol{n} = (A, B)$:

$$l\colon A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{2.9}$$

8°. Загальне рівняння прямої:

$$l\colon Ax + By + C = 0. \tag{2.10}$$

Теорема 14. *Лінія l визначається рівнянням* (2.10) *(за умови, що $A^2 + B^2 \neq 0$) тоді й лише тоді, коли l — пряма.*

Доведення. *Необхідність.* Рівняння (2.10) (за умови, що $A^2 + B^2 \neq 0$) являє собою сумісну СЛР 1×2, і нехай (x_0, y_0) — деякий її розв'язок. Тоді $Ax_0 + By_0 + C = 0$ і рівняння (2.10) рівносильне рівнянню (2.9), яке визначає пряму.

Достатність випливає з властивості **8°**. □

9°. Побудуємо в ПДСК пряму l, яка не проходить через початок координат (див. рис. 2.1). З початку координат проведемо вектор $\overrightarrow{OP}$, ортогональний до прямої l, такий, що точка $P \in l$. Тоді точка $M(x, y)$ лежить на прямій l тоді й лише тоді, коли

$$\mathrm{pr}_{\overrightarrow{OP}}\ \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OP}|. \tag{2.11}$$

Позначимо через p довжину вектора $\overrightarrow{OP}$, а через φ — кут, який утворює вектор $\overrightarrow{OP}$ з додатнім напрямком вісі Ox. Тоді умову (2.11) можна переписати у вигляді так званого нормального рівняння прямої

$$l\colon x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0. \tag{2.12}$$

Якщо пряма l задана загальним рівнянням (2.10), то для знаходження нормального рівняння (2.12) необхідно рівняння (2.10) помножити на нормуючий множник $\mu = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак якого визначається з умови $\mu C < 0$.

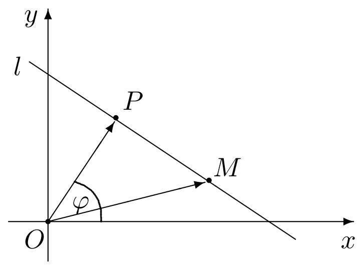


Рис. 2.1:

Означення 29. Нехай в ПДСК пряма l визначається ненульовим вектором нормалі $\overrightarrow{OP}$, де $P \in l$, а $M_0(x_0, y_0)$ — деяка точка на площині. Відхиленням точки M_0 від прямої l називається величина

$$\delta(M_0, l) = \mathrm{pr}_{\overrightarrow{OP}}\ \overrightarrow{OM_0} - |\overrightarrow{OP}|.$$

10°. Відхилення точки M_0 від прямої l

$$\delta(M_0, l) = x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - p,$$

причому

a) $\delta(M_0, l) > 0 \iff$ точки M_0 та O лежать в різних півплощинах відносно прямої l,

b) $\delta(M_0, l) < 0 \iff$ точки M_0 та O лежать в одній півплощині відносно прямої l,

c) $\delta(M_0, l) = 0 \iff$ точка M_0 лежить на прямій l.

Кут між двома прямими можна визначити як кут між відповідними напрямними векторами або векторами нормалі. Якщо прямі l_1 та l_2 задаються векторами $\boldsymbol{s}_1$ та $\boldsymbol{s}_2$ (або $\boldsymbol{n}_1$ та $\boldsymbol{n}_2$), то (найменший) кут між прямими l_1 та l_2 визначається з співвідношення

$$\cos(\widehat{l_1, l_2}) = \left|\frac{(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}\right| \qquad \left(\text{або} \quad \cos(\widehat{l_1, l_2}) = \left|\frac{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|\right).$$

Якщо прямі l_1 та l_2 задаються рівняннями з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2, то (найменший) кут між прямими l_1 та l_2 визначається з співвідношення

$$\mathrm{tg}(\widehat{l_1, l_2}) = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Зокрема, прямі l_1 та l_2 паралельні тоді й лише тоді, коли вектори $\boldsymbol{s}_1$ та $\boldsymbol{s}_2$ (або $\boldsymbol{n}_1$ та $\boldsymbol{n}_2$) колінеарні або $k_1 = k_2$; і прямі l_1 та l_2 перпендикулярні тоді й лише тоді, коли ортогональними є вектори $\boldsymbol{s}_1$ та $\boldsymbol{s}_2$ (або $\boldsymbol{n}_1$ та $\boldsymbol{n}_2$) або $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Ключові слова:

Напрямний вектор прямої; вектор нормалі до прямої; кутовий коефіцієнт прямої; канонічне рівняння прямої; параметричне рівняння прямої; рівняння прямої через дві задані точки; рівняння прямої у відрізках на осях; рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; рівняння прямої з заданим вектором нормалі; загальне рівняння прямої; нормальне рівняння прямої; відхилення точки від прямої; кут між двома прямими.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Як пов'язані між собою напрямний вектор та вектор нормалі прямої? Як знайти один з них, якщо відомий інший?
2. Як знайти одне рівняння прямої, якщо відоме інше (на конкретних прикладах)?
3. Обгрунтуйте можливість побудови вектора $\overrightarrow{OP}$ при виведенні нормального рівняння прямої.
4. Як можна визначити відстань від точки до прямої?
5. Як можна побудувати нормальне рівняння прямої і знайти відхилення точки від прямої, якщо пряма проходить через початок координат? Який геометричний зміст має відхилення в цьому випадку?
6. Обгрунтуйте наявність модуля в формулах для визначення кута між прямими.
7. Як знайти рівняння бісектрис кутів між двома прямими, які перетинаються, якщо відомі їх загальні рівняння?
8. Знайти відстань від початку координат до прямої, заданої рівнянням у відрізках на осях.
9. Довести, що пряма l проходить через точку перетину прямих $l_1\colon A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $l_2\colon A_2x + B_2y + C_2 = 0$ тоді й лише тоді, коли її рівняння можна подати у вигляді
$$l\colon \lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{2.13}$$
де λ та μ — деякі параметри. Який геометричний образ буде визначати рівняння (2.13), якщо прямі l_1 та l_2 не перетинаються?
10. Знайти рівняння прямої l, яка проходить через точку перетину прямих $l_1\colon x + 2y - 5 = 0$ та $l_2\colon 3x - 2y + 1 = 0$ і: a) точку $A(3, -1)$, b) початок координат, c) паралельно вісі Ox, d) паралельно вісі Oy, e) паралельно прямій $4x+3y+5 = 0$, f) перпендикулярно до прямої $2x + 3y + 7 = 0$. Розв'язати задачу не шукаючи точку перетину прямих l_1 та l_2.

2.10 Площина в просторі

Нехай в просторі задано ПДСК. Площина в просторі геометрично може бути задана різними способами: трьома неколінеарними точками; точкою і вектором, перпендикулярним до площини; відрізками, які відтинає площина на координатних осях, тощо. Різним способам завдання площини відповідають у ПДСК різні види її рівнянь.

1°. Рівняння площини π, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, з заданим вектором нормалі $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$:
$$\pi\colon A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2°. Загальне рівняння площини:
$$\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0. \tag{2.14}$$

Теорема 15. *Поверхня π визначається рівнянням* (2.14) *(за умови, що $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) тоді й лише тоді, коли π — площина.*

Доведення. Твердження доводиться аналогічно теоремі 14. $\square$

3°. Рівняння площини π, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно двом неколінеарним векторам $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a)$ та $\boldsymbol{b} = (x_b, y_b, z_b)$:

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = 0.$$

4°. Рівняння площини π, що проходить через три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

5°. Рівняння площини π у відрізках на осях (площина π відтинає від координатних осей Ox, Oy та Oz відрізки довжинами a, b та c відповідно, тобто проходить через точки $M_0(a, 0, 0)$, $M_1(0, b, 0)$ та $M_2(0, 0, c)$):

$$\pi\colon \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

6°. Побудуємо в ПДСК площину π, яка не проходить через початок координат (див. рис. 2.2). З початку координат проведемо вектор $\overrightarrow{OP}$, ортогональний до площини π, такий, що точка $P \in \pi$. Тоді точка $M(x, y, z)$ лежить на площині π тоді й лише тоді, коли

$$\operatorname{pr}_{\overrightarrow{OP}} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OP}|. \tag{2.15}$$

Позначимо через p довжину вектора $\overrightarrow{OP}$, а через α, β та γ — кути, які утворює вектор $\overrightarrow{OP}$ з додатніми напрямками осей Ox, Oy та Oz відповідно. Тоді умову (2.15) можна переписати у вигляді так званого нормального рівняння площини

$$\pi\colon x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{2.16}$$

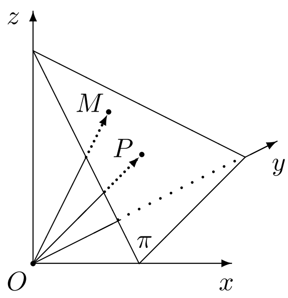


Рис. 2.2:

Якщо площина π задана загальним рівнянням (2.14), то для знаходження нормального рівняння (2.16) необхідно рівняння (2.14) помножити на нормуючий множник $\mu = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, знак якого визначається з умови $\mu D < 0$.

Означення 30. Нехай в ПДСК площина π визначається ненульовим вектором нормалі $\overrightarrow{OP}$, де $P \in \pi$, а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — деяка точка в просторі. Відхиленням точки M_0 від площини π називається величина

$$\delta(M_0, \pi) = \operatorname{pr}_{\overrightarrow{OP}} \overrightarrow{OM_0} - |\overrightarrow{OP}|.$$

7°. Відхилення точки M_0 від площини π

$$\delta(M_0, \pi) = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p,$$

причому

a) $\delta(M_0, \pi) > 0 \iff$ точки M_0 та O лежать в різних півпросторах відносно площини π,
b) $\delta(M_0, \pi) < 0 \iff$ точки M_0 та O лежать в одному півпросторі відносно площини π,
c) $\delta(M_0, \pi) = 0 \iff$ точка M_0 лежить на площині π.

Кут між двома площинами можна визначити як кут між відповідними векторами нормалі. Якщо площини π_1 та π_2 задаються векторами $\boldsymbol{n}_1$ та $\boldsymbol{n}_2$, то (найменший) кут між площинами π_1 та π_2 визначається з співвідношення

$$\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \left| \frac{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} \right|.$$

Зокрема, площини π_1 та π_2 паралельні тоді й лише тоді, коли вектори $\boldsymbol{n}_1$ та $\boldsymbol{n}_2$ колінеарні; і площини π_1 та π_2 перпендикулярні тоді й лише тоді, коли ортогональними є вектори $\boldsymbol{n}_1$ та $\boldsymbol{n}_2$.

Ключові слова:

Вектор нормалі до площини; рівняння площини з заданим вектором нормалі; загальне рівняння площини; рівняння площини, що проходить паралельно двом неколінеарним векторам; рівняння площини через три точки; рівняння площини у відрізках на осях; нормальне рівняння площини; відхилення точки від площини; кут між двома площинами.

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Як знайти вектор нормалі площини π, якщо відомо два неколінеарних вектори, паралельних площині π.
2. Як знайти одне рівняння площини, якщо відомо інше (на конкретних прикладах)?
3. Як можна визначити відстань від точки до площини?
4. Подивитися задачі з попереднього пункту!!!
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

2.11 Пряма в просторі

Нехай в просторі задано ПДСК. Пряма в просторі геометрично може бути задана різними способами: двома точками; точкою і напрямним вектором; як перетин двох площин, тощо. Різним способам завдання прямої відповідають у ПДСК різні види її рівнянь.

1°. Канонічне рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, з напрямним вектором $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$:

$$l\colon \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{2.17}$$

2°. Параметричне рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, з напрямним вектором $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$:

$$l\colon \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

3°. Рівняння прямої l, що проходить через дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$l\colon \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

4°. Загальне рівняння прямої:

$$l\colon \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Приклад 13. Знайдемо канонічне рівняння прямої l, якщо

$$l\colon \begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Спочатку розв'яжемо СЛР (2.18):

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}z, \\ y = \frac{7}{3} + \frac{5}{3}z, \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.19}$$

1-й спосіб. Покладемо $z = t$ і з формули (2.19), виразивши t через змінні x, y та z та виключивши t, отримаємо канонічне рівняння

$$l\colon \frac{x + \frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{y - \frac{7}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{z - 0}{1}. \tag{2.20}$$

Недоліком 1-го способу є наявність великої кількості дробів в канонічному рівнянні.

2-й спосіб. Використовуючи загальний розв'язок (2.19), знайдемо цілочисельний частинний розв'язок системи (2.18): $M_0(-2, 4, 1)$ — точка, яка лежить на прямій l. Напрямний вектор прямої l

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (2, -5, -3),$$

де $\boldsymbol{n}_1 = (1, 1, -1)$ та $\boldsymbol{n}_2 = (2, -1, 3)$ — вектори нормалей до площин, перетином яких є пряма l. Отже, канонічне рівняння прямої

$$l\colon \frac{x + 2}{2} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z - 1}{-3}. \tag{2.21}$$

Вочевидь, рівняння (2.20) та (2.21) визначають одну й ту ж пряму l. □

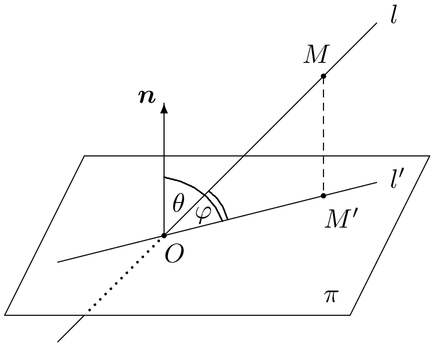


Рис. 2.3:

Кут між двома прямими (які не обов'язково лежать в одній площині) можна визначити як кут між відповідними напрямними векторами. Якщо прямі l_1 та l_2 задаються векторами $\boldsymbol{s}_1$ та $\boldsymbol{s}_2$, то (найменший) кут між прямими l_1 та l_2 визначається з співвідношення

$$\cos(\widehat{l_1, l_2}) = \left| \frac{(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|} \right|.$$

Зокрема, прямі l_1 та l_2 паралельні тоді й лише тоді, коли вектори $\boldsymbol{s}_1$ та $\boldsymbol{s}_2$ колінеарні.

Якщо пряма l перетинає площину π в точці O, то кут між l та π можна визначити як кут φ між прямою l та її ортогональною проекцією (прямою l') на площину π (див. рис. 2.3). При цьому, якщо площина π та пряма l задаються векторами $\boldsymbol{n}$ та $\boldsymbol{s}$ відповідно, то (найменший) кут між прямою l та площиною π визначається з співвідношення

$$\sin\varphi = \cos\theta = \left|\frac{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}\right|.$$

Якщо пряма l задається своїм канонічним рівнянням (2.17), а площина π — загальним рівнянням (2.14), то умову належності прямої до площини можна записати у вигляді

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5. Довести, що рівняння (2.20) та (2.21) визначають одну й ту ж пряму l.
6.
7.
8.
9.
10. Довести умову (2.22) належності прямої до площини.
11.
12.

2.12 Поняття лінії другого порядку. Коло

Нехай в просторі задано ПДСК. З означення 27 алгебраїчної лінії випливає, що рівняння

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{2.23}$$

де $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, визначає криву другого порядку. Рівняння (2.23) може визначати коло, еліпс, гіперболу, параболу, дві прямі, одну пряму (дві прямі, які збігаються), точку, порожню множину. Для того, щоб відповісти на питання, яку криву визначає рівняння (2.23), необхідно підібрати таку систему координат, в якій це рівняння спростилося б. Можна довести, що для кожної лінії другого порядку існує ПДСК, в якій рівняння цієї лінії є найпростішим (канонічним).

Лінії другого порядку називаються ще конічними перерізами, оскільки майже всі лінії другого порядку можна отримати шляхом перетину двостороннього кругового конусу площиною.

Означення 31. Колом γ називається геометричне місце точок площини, відстані яких до фіксованої точки C, яка називається центром кола, дорівнюють сталій величині R, яка називається радіусом кола.

Якщо в ПДСК центр кола γ лежить в точці $C(a, b)$, то рівняння кола

$$\gamma\colon (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

2.13 Еліпс

Означення 32. Еліпсом γ називається геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох заданих точок F_1 та F_2 цієї площини, які називаються фокусами, є величиною сталою (і не меншою за відстань між фокусами F_1F_2).

Припустимо, що відстань між фокусами $|F_1F_2| = 2c$, а сума відстаней від точки $M \in \gamma$ до фокусів

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a. \tag{2.24}$$

Як це випливає з означення 32 еліпса, рівність (2.24) є необхідною та достатньою умовою належності точки M до еліпса, при цьому має місце нерівність

$$a \geqslant c \geqslant 0. \tag{2.25}$$

Для виведення (канонічного) рівняння еліпса введемо ПДСК таким чином, щоб фокуси еліпса мали координати $F_1(-c, 0)$ та $F_2(c, 0)$ (див. рис. 2.4). Для довільної точки $M(x, y)$ на еліпсі γ умову (2.24) можна записати у вигляді

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Позбувшись ірраціональності в останній рівності, отримаємо рівняння

$$(a^2-c^2)^2x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

звідки, зробивши заміну $b^2=a^2-c^2$ (це можна зробити в силу нерівності (2.25)) і поділивши обидві частини рівняння на a^2b^2, отримаємо канонічне рівняння еліпса

$$\gamma\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.26}$$

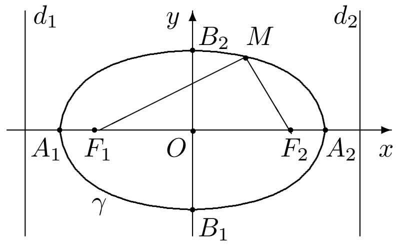


Рис. 2.4:

Дослідимо властивості еліпса γ за його канонічним рівнянням (2.26). Зауважимо, що насправді властивості еліпса не залежать від рівняння, яким еліпс задано.

1°. Розглянемо межові випадки в нерівності (2.25).

a) Якщо $a>c=0$, то $a=b$ і еліпс являє собою коло з радіусом $R=a=b$. Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною ε, яка називається ексцентриситетом і обчислюється за формулою

$$\varepsilon=\frac{c}{a}. \tag{2.27}$$

Для кола $\varepsilon=0$, а для еліпса $0<\varepsilon<1$. Зауважимо також, що два еліпса з рівними ексцентриситетами є подібними.

b) Якщо $a=c>0$, то еліпс γ являє собою відрізок F_1F_2.

c) Якщо $a=c=0$, то еліпс являє собою точку $F_1=F_2$.

В усіх трьох випадках a), b) та c) говорять, що еліпс γ вироджується в коло, відрізок та точку відповідно. Надалі, якщо не буде зазначено інше, вважатимемо, що $a>c>0$, а отже і $b>0$.

2°. Еліпс має дві вісі симетрії (вісь Ox та вісь Oy) та центр симетрії (початок координат — точка O).

3°. Еліпс розміщується в прямокутнику зі сторонами $2a$ та $2b$. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$ та $B_2(0,b)$ — вершини еліпса; A_1A_2 — велика, а B_1B_2 — мала осі еліпса; a та b — велика та мала півосі еліпса.

4°. Фокальні радіуси точки $M(x,y)\in\gamma$ обчислюються за формулами

$$r_1=|F_1M|=a+\varepsilon x \qquad \text{та} \qquad r_2=|F_2M|=a-\varepsilon x.$$

Означення 33. Директрисою d еліпса γ, яка відповідає фокусу F, називається пряма, яка вся цілком розміщена в тій же півплощині відносно малої осі еліпса, що й фокус F, на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$ від центра еліпса.

Зауважимо, що еліпс має дві директриси (див. рис. 2.4), які паралельні малій вісі еліпса, і якщо еліпс γ визначається канонічним рівнянням (2.26), то директриси еліпса, які відповідають фокусам F_1 та F_2, мають рівняння

$$d_1\colon x=-\frac{a}{\varepsilon} \qquad \text{та} \qquad d_2\colon x=\frac{a}{\varepsilon} \tag{2.28}$$

відповідно.

Теорема 16. *Нехай γ — еліпс. Для довільної точки $M\in\gamma$ і довільного $i=\overline{1,2}$ відношення r_i/ρ_i фокального радіуса $r_i=|F_iM|$ точки M до відстані $\rho_i=|\delta(M,d_i)|$ точки M до відповідної директриси d_i є величиною сталою і дорівнює ε.*

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. $\square$

Означення 34. Нехай γ — невироджена алгебраїчна крива (див. означення 28). Дотичною до кривої γ в точці $M \in \gamma$ називається пряма, яка перетинає криву γ в точці M двічі.

Легко бачити, що еліпс є невиродженою кривою другого порядку.

Теорема 17. *Нехай γ — еліпс, заданий своїм канонічним рівнянням* (2.26), *а $M(x_0, y_0) \in \gamma$. Тоді рівняння дотичної l до еліпса γ в точці M має вигляд*

$$l\colon \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{2.29}$$

Доведення. Рівняння дотичної l до еліпса γ в точці M будемо шукати у вигляді

$$l\colon y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2.30}$$

Дослідимо, при яких значеннях параметра k система

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y - y_0 = k(x - x_0), \end{cases} \tag{2.31}$$

має два однакових розв'язки. Враховуючи, що точка $M(x_0, y_0) \in \gamma$, а отже $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, перше рівняння системи (2.31) можна записати у вигляді

$$\frac{x^2 - x_0^2}{a^2} + \frac{y^2 - y_0^2}{b^2} = 0,$$

звідки, враховуючи друге рівняння системи (2.31), його можна записати у вигляді

$$(x - x_0)\left(\frac{x + x_0}{a^2} + \frac{k(y + y_0)}{b^2}\right) = 0.$$

З рівності нулю перших дужок останнього рівняння випливає, що точка $M(x_0, y_0)$ є розв'язком системи (2.31), а тому точка $M(x_0, y_0)$ має перетворювати на нуль й другу дужку останнього рівняння, звідки параметр

$$k = -\frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

Підставивши значення параметра k в рівняння (2.30) дотичної l, після нескладних перетворень отримаємо рівняння (2.29). $\square$

Теорема 18. *Дотична до еліпса γ в точці M є бісектрисою кута, суміжного з кутом між відрізками, які з'єднують точку M з фокусами.*

Доведення. Нехай l — дотична до еліпса γ, заданого своїм канонічним рівнянням (2.26), в точці $M(x_0, y_0)$, а MK — пряма, перпендикулярна до l (див. рис. 2.5). Для доведення теореми достатньо показати, що MK є бісектрисою кута $\angle F_1MF_2$.

Рівняння прямої $MK\colon y - y_0 = \dfrac{y_0\, a^2}{x_0\, b^2}(x - x_0)$, звідки $K(\dfrac{c^2}{a^2}\, x_0, 0)$. Оскільки

$$\frac{|F_1K|}{|F_2K|} = \frac{c + \dfrac{c^2}{a^2}\, x_0}{c - \dfrac{c^2}{a^2}\, x_0} = \frac{a^2 + cx_0}{a^2 - cx_0} = \frac{a + \varepsilon x_0}{a - \varepsilon x_0} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|F_1M|}{|F_2M|},$$

то пряма MK є бісектрисою кута $\angle F_1MF_2$. $\square$

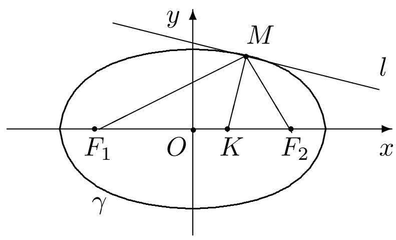


Рис. 2.5:

Теорема 18 встановлює наступну оптичну властивість еліпса: якщо в одному з фокусів еліпса з внутрішньою дзеркальною поверхнею розмістити точкове джерело випромінювання (наприклад, джерело світла або звуку), то всі промені після відбиття від еліпса пройдуть через інший фокус. Ця властивість еліпса спостерігається в деяких печерах та архітектурних спорудженнях, склепіння яких мають еліпсоїдну форму: якщо дві людини знаходяться в різних фокусах, то вони можуть розмовляти без особливих зусиль між собою так, начебто вони знаходяться поруч.

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4. Довести, що еліпс є невиродженою кривою другого порядку.
5.
6. Довести теорему 16.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

2.14 Гіпербола

Означення 35. Гіперболою γ називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней яких до двох заданих точок F_1 та F_2 цієї площини, які називаються фокусами, є величиною сталою (і не більшою за відстань між фокусами F_1F_2).

Припустимо, що відстань між фокусами $|F_1F_2| = 2c$, а модуль різниці відстаней від точки $M \in \gamma$ до фокусів

$$\big||F_1M| - |F_2M|\big| = 2a. \tag{2.32}$$

Як це випливає з означення 35 гіперболи, рівність (2.32) є необхідною та достатньою умовою належності точки M до гіперболи, при цьому має місце нерівність

$$c \geqslant a \geqslant 0. \tag{2.33}$$

Для виведення (канонічного) рівняння гіперболи введемо ПДСК таким чином, щоб фокуси гіперболи мали координати $F_1(-c, 0)$ та $F_2(c, 0)$ (див. рис. 2.6). Для довільної точки $M(x, y)$ на гіперболі γ умову (2.32) можна записати у вигляді

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a.$$

Позбувшись ірраціональності в останній рівності, отримаємо рівняння

$$(c^2-a^2)^2x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2),$$

звідки, зробивши заміну $b^2 = c^2 - a^2$ (це можна зробити в силу нерівності (2.33)) і поділивши обидві частини рівняння на a^2b^2, отримаємо канонічне рівняння гіперболи

$$\gamma\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.34}$$

Зауважимо, що рівняння

$$\overline{\gamma}\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

також визначає гіперболу, яка називається спряженою з гіперболою γ.

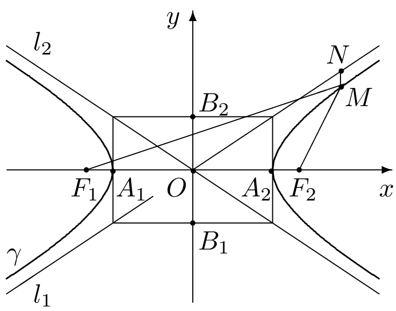


Рис. 2.6:

Дослідимо властивості гіперболи γ за її канонічним рівнянням (2.34). Зауважимо, що насправді властивості гіперболи не залежать від рівняння, яким задано гіперболу. Також надалі вважатимемо, що в співвідношенні (2.33) всі нерівності є строгими, тобто $c > a > 0$, а отже і $b > 0$.

1°. Гіпербола має дві вісі симетрії (вісь Ox та вісь Oy) та центр симетрії (початок координат — точка O).

2°. Гіпербола розміщується зовні прямокутника зі сторонами $2a$ та $2b$ та складається з двох віток — лівої та правої. Точки $A_1(-a, 0)$ та $A_2(a, 0)$ — (дійсні) вершини гіперболи γ, а $B_1(0, -b)$ та $B_2(0, b)$ — уявні вершини гіперболи γ (або дійсні вершини спряженої гіперболи $\overline{\gamma}$); A_1A_2 — дійсна, а B_1B_2 — уявна осі гіперболи γ; a та b — дійсна та уявна півосі гіперболи γ.

Гіпербола γ з рівними півосями ($a = b$) називається рівносторонньою.

3°. Прямі $l_1\colon y = \dfrac{b}{a}\,x$ та $l_2\colon y = -\dfrac{b}{a}\,x$ є двосторонніми асимптотами гіперболи γ.

Доведення. За властивістю **1**° твердження достатньо довести лише для частини гіперболи γ, яка розміщена в першій координатній чверті.

Для біжучої точки $M(x, y) \in \gamma$, де $x > 0$, $y > 0$, розглянемо точку $N(x, \frac{b}{a}\,x) \in l_1$. Оскільки відрізок MN паралельний вісі Oy, то його довжина $|MN| = \dfrac{b}{a}\,x - y$ є різницею ординат точок N та M (див. рис. 2.6). З рівняння (2.34) та умови $y > 0$ випливає, що $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty}|MN| = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}\,x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = 0,$$

що й треба було довести. □

Як і для еліпса, можна ввести величину ε — ексцентриситет гіперболи γ, який обчислюється за тією ж, як і для еліпса, формулою (2.27) і є мірою кута між асимптотами гіперболи γ. Для гіперболи її ексцентриситет $\varepsilon > 1$. Зауважимо також, що дві гіперболи з рівними ексцентриситетами є подібними.

4°. Фокальні радіуси точки $M(x, y) \in \gamma$ обчислюються за формулами

$$r_1 = |F_1M| = |a + \varepsilon x| \qquad \text{та} \qquad r_2 = |F_2M| = |a - \varepsilon x|.$$

Означення 36. Директрисою d гіперболи γ, яка відповідає фокусу F, називається пряма, яка вся цілком розміщена в тій же півплощині відносно уявної осі гіперболи, що й фокус F, на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$ від центра гіперболи.

Зауважимо, що гіпербола має дві директриси (див. рис. 2.7), які паралельні уявній вісі гіперболи, і якщо гіпербола γ визначається канонічним рівнянням (2.34), то директриси гіперболи, які відповідають фокусам F_1 та F_2, мають такі самі відповідні рівняння (2.28), як й директриси еліпса.

Для гіперболи має місце й властивість еліпса, яку сформульовано в теоремі 16.

Теорема 19. *Нехай γ — гіпербола. Для довільної точки $M \in \gamma$ і довільного $i = \overline{1,2}$ відношення r_i/ρ_i фокального радіуса $r_i = |F_iM|$ точки M до відстані $\rho_i = |\delta(M, d_i)|$ точки M до відповідної директриси d_i є величиною сталою і дорівнює ε.*

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. □

Гіпербола γ, як і еліпс, є невиродженою кривою другого порядку, а тому відносно неї є коректним означення 34.

Теорема 20. *Нехай γ — гіпербола, яка задана своїм канонічним рівнянням* (2.34), *а $M(x_0, y_0) \in \gamma$. Тоді рівняння дотичної l до гіперболи γ в точці M має вигляд*

$$l\colon \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Доведення. Твердження доводиться аналогічно до теореми 17. □

Теорема 21. *Дотична до гіперболи γ в точці M є бісектрисою кута між відрізками, які з'єднують точку M з фокусами.*

Доведення. Твердження доводиться аналогічно до теореми 17 з використанням рис. 2.7, де MK — відрізок дотичної до гіперболи γ в точці M. □

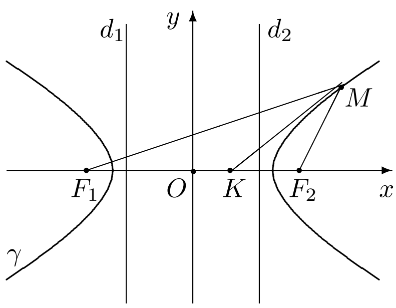


Рис. 2.7:

Теорема 21 встановлює наступну оптичну властивість гіперболи: якщо в одному з фокусів гіперболи з дзеркальною з боку фокуса поверхнею розмістити точкове джерело випромінювання (наприклад, джерело світла або звуку), то всі промені після відбиття від гіперболи пройдуть таким чином, наче джерело випромінювання знаходилося в іншому фокусі.

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4. Розглянути, в які фігури вироджується гіпербола при межових випадках в нерівності (2.33).
5.
6. Визначити тангенс кута між асимптотами гіперболи γ через її ексцентриситет.

7.

8. Довести, що добуток відстаней від точки M на гіперболі до асимптот гіперболи не залежить від точки M.

9.

10. Довести теорему 16 у випадку, коли γ є гіперболою.

11.

12.

2.15 Парабола

Для того, щоб сформулювати означення параболи, яке вписується в загальну схему означень еліпса та гіперболи, зауважимо, що має місце наступне твердження, обернене до теорем 16 та 19.

Теорема 22. *Геометричне місце точок γ площини, для довільної точки $M \in \gamma$ якого відношення r/ρ відстані $r = |FM|$ між точкою M та фіксованою точкою F до відстані $\rho = |\delta(M, d)|$ від точки M до фіксованої прямої d є величиною сталою і дорівнює ε, являє собою еліпс (при $0 < \varepsilon < 1$) або гіперболу (при $\varepsilon > 1$).*

Доведення. Нехай p — відстань від точки F до прямої d. Введемо ПДСК таким чином, що $F(\frac{p\,\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}, 0)$ і рівняння прямої $d\colon x = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$. Тоді для точки $M(x, y) \in \gamma$ відстані між точками M та F та від точки M до прямої d відповідно

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p\,\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + y^2} \qquad \text{та} \qquad \rho = \left|\frac{p}{1-\varepsilon^2} - x\right|.$$

Співвідношення $r/\rho = \varepsilon$ можна переписати у вигляді

$$\sqrt{\left(x - \frac{p\,\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + y^2} = \varepsilon \left|\frac{p}{1-\varepsilon^2} - x\right|.$$

Після його піднесення до квадрату та нескладних перетворень отримаємо рівняння кривої

$$\gamma\colon \frac{x^2}{\frac{p^2\,\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2\,\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} = 1,$$

в якому знаменник першого дробу завжди (при обмеженнях накладених на ε в умові теореми) є додатнім, і тому його можна позначити через $a^2 = \frac{p^2\,\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$, а знаменник другого дробу додатній при $0 < \varepsilon < 1$ і від'ємний при $\varepsilon > 1$, а тому його можна позначити через $b^2 = \frac{p^2\,\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ в першому випадку і через $-b^2 = \frac{p^2\,\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ у другому. Таким чином, крива γ при $0 < \varepsilon < 1$ являє собою еліпс, а при $\varepsilon > 1$ — гіперболу, що й треба було довести. □

З огляду на теореми 16, 19 та 22, наступне означення в частині для відмінного від кола еліпса та гіперболи є коректним і еквівалентним означенням 32 та 35 відповідно.

Означення 37. Параболою (еліпсом або гіперболою) γ називається геометричне місце точок площини, відношення ε відстаней яких до заданої точки F, яка називається фокусом, та до прямої d, яка називається директрисою та не проходить через фокус F, цієї площини є величиною сталою і $\varepsilon = 1$ ($0 < \varepsilon < 1$ або $\varepsilon > 1$ для еліпса або гіперболи відповідно).

Припустимо, що p — відстань від точки F до прямої d. Як це випливає з означення 37 рівність $r=\rho$, де $r=|FM|$ — відстань між точками M та F, а $\rho=|\delta(M,d)|$ — відстань від точки M до прямої d, є необхідною та достатньою умовою належності точки M до параболи γ. Для виведення (канонічного) рівняння параболи введемо ПДСК таким чином, що координати точки $F(\frac{p}{2},0)$ і рівняння прямої $d\colon x=-\frac{p}{2}$ (див. рис. 2.8). Тоді для точки $M(x,y)\in\gamma$ рівність $r=\rho$ можна переписати у вигляді

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Позбувшись ірраціональності в останній рівності, отримаємо канонічне рівняння параболи

$$\gamma\colon y^2=2p\,x. \tag{2.35}$$

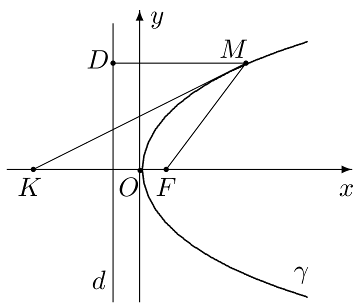


Рис. 2.8:

Дослідимо властивості параболи γ за її канонічним рівнянням (2.35). Зауважимо, що насправді властивості параболи не залежать від того, яким рівнянням її задано.

1°. Парабола має вісь симетрії (вісь Ox). Точка O (початок координат) перетину параболи з її віссю називається вершиною параболи.

2°. Парабола розміщується в правій півплощині відносно вісі Oy. Зауважимо, що крива γ, яка задається рівнянням (2.35) при $p<0$, також є параболою, що розміщується в лівій півплощині відносно вісі Oy.

3°. Ексцентриситет параболи $\varepsilon=1$. Будь-які дві параболи є подібними.

Доведення. Нехай $\gamma_1\colon y^2=2p_1\,x$ та $\gamma_2\colon y^2=2p_2\,x$ — дві параболи, задані своїми канонічними рівняннями, $l\colon y=k\,x$ — рівняння прямої, яка проходить через їх спільну вершину точку $O(0,0)$, а (x_1,y_1) та (x_2,y_2) — точки перетину прямої l з параболами γ_1 та γ_2 відповідно. Тоді

$$x_i=\frac{2p_i}{k^2},\quad y_i=\frac{2p_i}{k}\qquad \text{для}\quad i=\overline{1,2},$$

звідки випливає, що

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Остання рівність й доводить подібність парабол γ_1 та γ_2. □

4°. Фокальний радіус точки $M(x,y)\in\gamma$ обчислюється за формулою

$$r=|FM|=x+\frac{p}{2}.$$

5°. Директриса параболи γ визначається рівнянням

$$d\colon x=-\frac{p}{2}.$$

Парабола γ, як еліпс і гіпербола, є невиродженою кривою другого порядку, а тому відносно неї є коректним означення 34.

Теорема 23. *Нехай γ — парабола, яка задана своїм канонічним рівнянням* (2.35), *а $M(x_0,y_0)\in\gamma$. Тоді рівняння дотичної l до гіперболи γ в точці M має вигляд*

$$l\colon yy_0=p\,(x+x_0).$$

Доведення. Твердження доводиться аналогічно до теореми 17. □

Теорема 24. *Дотична до параболи γ в точці M є бісектрисою кута між відрізками, один з яких з'єднує точку M з фокусом, а інший є паралельним вісі параболи і з'єднує точку M з директрисою.*

Доведення. Нехай γ — парабола, задана своїм канонічним рівнянням (2.35), а відрізок MK (див. рис. 2.8) — частина дотичної l до параболи γ в точці $M(x_0, y_0)$. Оскільки пряма MD паралельна вісі Ox, то пряма MK є січною і для доведення теореми достатньо показати, що трикутник $\triangle FKM$ є рівнобедренним ($|FK| = |FM|$).

Рівняння прямої $MK\colon yy_0 = p(x + x_0)$, звідки $K(-x_0, 0)$. Враховуючи, що $F(\frac{p}{2}, 0)$, отримаємо

$$|FK| = |FM| = x_0 + \frac{p}{2},$$

що й треба було довести. □

Теорема 24 встановлює наступну оптичну властивість параболи: якщо в фокусі параболи з дзеркальною з боку фокуса поверхнею розмістити точкове джерело випромінювання (наприклад, джерело світла або звуку), то всі промені відбиватимуться від параболи паралельно вісі параболи. На цій властивості грунтується принцип роботи параболічних дзеркал, які використовуються при побудові телескопів, параболічних антен, прожекторів, рефлекторів, різного роду обігрівальних та медичних приладів тощо. Зауважимо, що при зміщенні джерела випромінювання вздовж вісі параболи можна отримати майже збіжний (у випадку відддаленя від вершини параболи) або майже розбіжний (в протилежному випадку) пучок променів, тобто параболічне дзеркало наче набуває властивостей еліптичного або гіперболічного дзеркал відповідно. Ця остання властивість використовується, наприклад, при конструюванні автомобільних фар для створення режимів «ближнього» та «дальнього» світла.

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Чи всі невироджені криві другого порядку вписуються в схему означень еліпса, гіперболи та параболи через фокус та директрису?
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

2.16 Еліпс, гіпербола та парабола в ПСК

Складемо полярне рівняння кола γ з центром в точці C і радіусом R. Для цього введемо ПСК таким чином, щоб полюс O збігався з точкою C (полярна вісь Op має лежати в площині кола, а її напрям значення не має). Тоді, вочевидь, полярне рівняння кола

$$r = R.$$

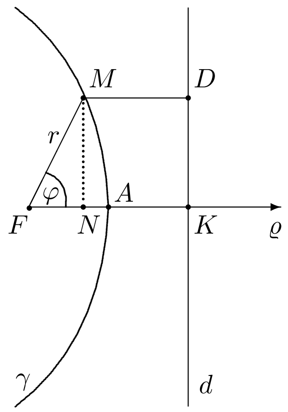


Рис. 2.9:

Нехай крива γ — відмінний від кола еліпс, вітка гіперболи або парабола, точки A та F — її вершина та відповідний вершині фокус, а d — відповідна фокусу директриса; і нехай ε — ексцентриситет кривої γ, а p — відстань від фокуса F до директриси d. Введемо ПСК з полюсом в фокусі F і віссю $F\varrho$, яка проходить через вершину A і перетинає директрису в точці K (див. рис. 2.9). Для довільної точки $M(r,\varphi)$ кривої γ позначимо через D та N її ортогональні проекції на директрису та полярну вісь. За означенням 37 $\dfrac{|FM|}{|MD|} = \varepsilon$, а тому в прямокутній трапеції $FMDK$ ($\angle D = \angle K = \dfrac{\pi}{2}$)

$$p = |FK| = |FN| + |NK| = r\cos\varphi + \frac{r}{\varepsilon},$$

звідки отримуємо полярне рівняння кривої

$$\gamma\colon r = \frac{p\,\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\varphi}. \tag{2.36}$$

Як це видно з полярного рівняння (2.36), еліпс, гіпербола та парабола відрізняються принципово лише значенням ексцентриситета ε. Перша, друга та третя космічні швидкості. Проективна інтерпретація кривих другого порядку.

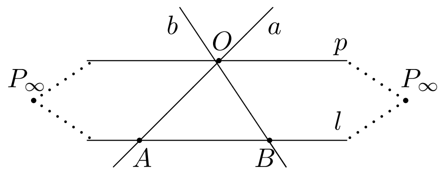


Рис. 2.10:

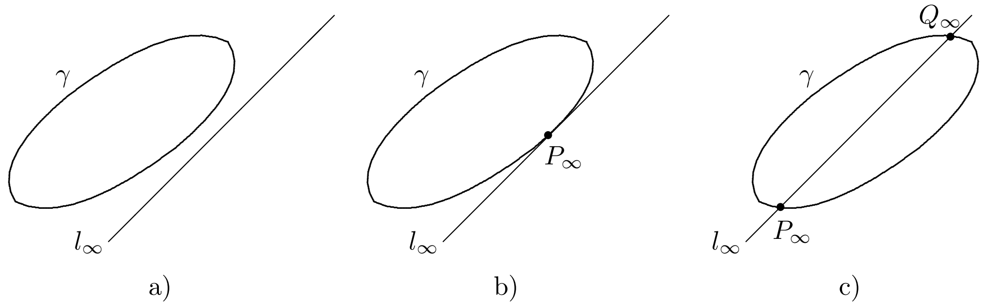


Рис. 2.11:

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Вивести полярне рівняння кола, якщо полюс не збігається з центром кола.
2. Вивести полярне рівняння другої вітки гіперболи. ????
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

Розділ 3

Основні алгебраїчні структури

Мотивація

Ланцюжок
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{3.1}$$
являє собою (якщо не історичну, то логічну) послідовність розширень поняття числа. Символи, які складають ланцюжок, на сьогодні є стандартними позначеннями відповідно для множин натуральних, цілих, раціональних, дійсних та комплексних чисел. Перехід від однієї ланки ланцюжка до іншої зумовлений постановкою тієї чи іншої задачі, яку принципово неможливо розв'язати в межах даної множини. Так, розглянемо множину натуральних чисел $\mathbb{N}$. На ній можна задати операцію додавання, причому сума двох натуральних чисел є знову натуральним числом. Це означає, що для будь-яких двох чисел $a, b \in \mathbb{N}$ завжди можна знайти $x \in \mathbb{N}$ таке, що $x = a + b$. Проте твердження «для будь-яких двох чисел $a, b \in \mathbb{N}$ завжди можна знайти $x \in \mathbb{N}$ таке, що $a = x + b$» вже є хибним, тобто різниця двох натуральних чисел $x = a - b$ може не бути натуральним числом. Найменшою множиною, яка містить $\mathbb{N}$ і для якої останнє твердження є істинним, є множина цілих чисел $\mathbb{Z}$. Введемо на $\mathbb{Z}$ операцію множення. Неможливість розв'язати в $\mathbb{Z}$ рівняння $a = b \cdot x$ призводить до введення множини раціональних чисел $\mathbb{Q}$. В свою чергу несумірність діагоналі зі стороною квадрата призводить до поняття дійсного числа і встановлення взаємно однозначної відповідності між множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$ та числовою прямою (напрямленою прямою з фіксованим початком та одиницею довжини). Далі неможливість розв'язання в множині $\mathbb{R}$ довільного квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами (зокрема рівняння $x^2+1=0$) призводить до введення множини комплексних чисел $\mathbb{C}$. Слід зауважити, що при кожному такому переході «нова» множина наслідує всі властивості «старої» множини.

Історично алгебра розвинулася як наука про методи розв'язання так званих алгебраїчних рівнянь. Проте, як це видно на прикладі ланцюжка (3.1)), успіх в розв'язанні того чи іншого рівняння значною мірою залежить від множини, якій мають належати розв'язки та коефіцієнти рівняння. Для більш точного визначення суті справи введемо до розгляду основні алгебраїчні структури — групи, кільця та поля. Але спочатку розглянемо деякі властивості множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, з введеними на ній операціями додавання та множення.

3.1 Множина цілих чисел $\mathbb{Z}$

Надалі без спеціальних посилань будемо використовувати твердження, еквівалентне принципу математичної індукції, про те, що кожна непорожня підмножина множини натуральних чисел містить найменший елемент.

Означення 38. Говорять, що ціле число a ділиться на ціле число b (позначається $a \vdots b$) або ціле число b є дільником цілого числа a (позначається $b|a$), якщо існує ціле число q таке, що $a = b \cdot q$.

З означення подільності легко випливають такі властивості:
1°. $\forall a \in \mathbb{Z}\ \ a \vdots a,\ a \vdots (-a),\ (-a) \vdots a,\ a \vdots 1,\ a \vdots (-1),\ 0 \vdots a$.
2°. $\forall a, b \in \mathbb{Z}\ \ a \vdots b,\ b \vdots a \Longrightarrow a = \pm b$. Зокрема, $\forall a, b \in \mathbb{N}\ \ a \vdots b,\ b \vdots a \Longrightarrow a = b$.
3°. $a \vdots b \Longrightarrow a \vdots (-b),\ (-a) \vdots b,\ (-a) \vdots (-b)$.
4°. $a \vdots b,\ b \vdots c \Longrightarrow a \vdots c$.
5°. $a \vdots c \Longrightarrow \forall b \in \mathbb{Z}\ \ (ab) \vdots c$.
6°. $a \vdots c,\ b \vdots c \Longrightarrow (a \pm b) \vdots c$.
7°. $a_1 \vdots c,\ \ldots,\ a_n \vdots c \Longrightarrow \forall b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}\ \ (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) \vdots c$.
8°. $a \vdots 0 \Longleftrightarrow a = 0$.
9°. $1 \vdots a \Longleftrightarrow a = \pm 1$.

Означення 39. Ціле число a поділити з остачею на ціле число $b \neq 0$ означає знайти два цілих числа q і r таких, що

1) $a = b \cdot q + r$;

2) $0 \leqslant r < |b|$.

При цьому число a називається діленим, b — дільником, q — неповною часткою, а r — остачею при діленні a на b.

Теорема 25 (про ділення з остачею). *Для будь-яких двох цілих чисел a та b, де $b \neq 0$, існує і до того ж єдина пара цілих чисел q і r таких, що $a = bq + r$, де $0 \leqslant r < |b|$.*

Доведення. *Існування.* Розглянемо підмножину $S \subset \mathbb{Z}$, елементи якої мають вигляд $a - bn$, де $n \in \mathbb{Z}$. Нехай r — найменше невід'ємне число з S (таке число існує, оскільки $S \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$). Тоді для деякого $q \in \mathbb{Z}$ число $r = a - bq$. Припустимо, що $r \geqslant |b|$. Тоді число $r_1 = r - |b| \in S$ і $0 \leqslant r_1 < r$. Отримали суперечність з вибором числа r. Існування чисел q і r доведено.

Єдиність. Нехай
$$a = bq + r = bq_1 + r_1, \text{ де } \ 0 \leqslant r, r_1 < |b|,$$
і нехай, не порушуючи загальності, $r \geqslant r_1$. Тоді $b(q_1 - q) = r - r_1 \geqslant 0$ і $(r - r_1) \vdots |b|$, причому $0 \leqslant r - r_1 \leqslant r < |b|$. А це можливо лише у випадку, коли $r - r_1 = 0$. Отже, $r = r_1$ і з рівності $b(q_1 - q) = 0$ за умови, що $b \neq 0$, випливає, що і $q = q_1$. Єдиність чисел q і r доведено. □

Означення 40. Ціле число c називається спільним дільником цілих чисел a та b, якщо $a \vdots c$ і $b \vdots c$.

Ціле число d називається найбільшим спільним дільником (НСД) цілих чисел a та b і позначається $d = \gcd(a, b)$, якщо d є спільним дільником цих чисел і ділиться на будь-який інший їх спільний дільник.

Якщо $\gcd(a, b) = 1$, то цілі числа a та b називаються взаємно простими.

Лема 5 (про НСД). *Для довільних $a, b, q \in \mathbb{Z}$*
$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a - bq).$$

Доведення. Нехай $d = \gcd(a, b)$. Тоді $d | a$ і $d | b$, звідки за властивістю **7°** подільності $d | a - bq$. Отже d — спільний дільник b та $a - bq$. Нехай тепер c — деякий інший спільний дільник b та $a - bq$. Тоді за властивістю **7°** подільності $c | a$, а отже $d \vdots c$. Таким чином, $d = \gcd(b, a - bq)$. □

Теорема 26 (про НСД). *Для довільних $a, b \in \mathbb{Z}$ існує і до того ж єдиний з точністю до знака НСД чисел a та b.*

Доведення. *Єдиність.* Припустимо, що d і d_1 — два НСД цілих чисел a та b. Тоді за означенням 40 $\ d \vdots d_1$ і $d_1 \vdots d$. За властивістю **2°** подільності $d_1 = \pm d$.

Існування. Оскільки $\gcd(a, b) = \gcd(\pm a, \pm b)$, то, не порушуючи загальності, можна вважати, що $a \geqslant b \geqslant 0$. Тепер доведення існування $\gcd(a, b)$ проведемо індукцією по b.

Якщо $b = 0$, то $\gcd(a, b) = a$. Інакше застосуємо до a теорему 25 про ділення з остачею на $b \neq 0$: $a = bq + r$, де $0 \leqslant r < b$. Тоді за лемою 5 $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$, а $\gcd(b, r)$ за припущенням індукції існує. □

Індуктивний процес, описаний в доведенні теореми 26 в частині існування, називається алгоритмом Евкліда[1]. Зокрема, з цього доведення випливає, що НСД двох цілих чисел дорівнює останній відмінній від нуля остачі алгоритму Евкліда.

Теорема 27 (про лінійне зображення НСД). *Якщо* $d = \gcd(a, b)$*, то існують* $x, y \in \mathbb{Z}$ *такі, що*
$$d = xa + yb. \tag{3.2}$$
Більше того, якщо існують $x, y \in \mathbb{Z}$ *такі, що* $1 = xa + yb$*, то* $\gcd(a, b) = 1$.

Формула (3.2) називається лінійним зображенням НСД цілих чисел a та b.

Доведення. Нехай S — множина, елементи якої мають вигляд $ma + nb$, де $m, n \in \mathbb{Z}$. Вочевидь, $a, b \in S$. Якщо $\alpha, \beta \in S$, то існують $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$ такі, що $\alpha = ia + jb$ і $\beta = ka + lb$. Тоді для довільного $q \in \mathbb{Z}$
$$\alpha - \beta q = (i - kq)a + (j - lq)b \in S.$$
З останнього співвідношення та доведення теореми 26 випливає, що $d = \gcd(a, b) \in S$, а отже існують $x, y \in \mathbb{Z}$ такі, що виконується співвідношення (3.2).

Тепер нехай існують $x, y \in \mathbb{Z}$ такі, що $1 = xa + yb$, і нехай $\gcd(a, b) = d$. Тоді $a \vdots d$ і $b \vdots d$, отже за властивістю **7°** подільності $xa + yb = 1 \vdots d$. За властивістю **9°** подільності $\gcd(a, b) = 1$. □

Наведемо деякі властивості взаємно простих чисел:
1°. $\gcd(a, b) = d \Longleftrightarrow \gcd(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.
2°. $\gcd(a, b) = \gcd(a, c) = 1 \Longrightarrow \gcd(a, bc) = 1$.
3°. $\gcd(a, b) = 1$ і $a|bc \Longrightarrow a|c$.
4°. $a \vdots b$, $a \vdots c$ і $\gcd(b, c) = 1 \Longrightarrow a \vdots bc$.

Означення 41. Натуральне число p називається простим, якщо воно має рівно два натуральних дільники — 1 та саме число p. Натуральне число n, яке має більше двох натуральних дільників, називається складеним. Число 1 не є ні простим, ні складеним. Множина простих чисел позначається через $\mathbb{P}$.

Наведемо деякі властивості простих чисел:
1°. $\forall p, q \in \mathbb{P}$, $p \neq q \Longrightarrow \gcd(p, q) = 1$.
2°. $p \in \mathbb{P}$ і $p \not| a \Longrightarrow \gcd(a, p) = 1$.
3°. $p \in \mathbb{P}$ і $p|ab \Longrightarrow p|a$ або $p|b$.

Теорема 28 (основна арифметики). *Кожне натуральне число* $n \neq 1$ *є простим або розкладається в добуток простих чисел. Такий розклад є єдиним з точністю до порядку співмножників.*

Доведення. Доведення проведемо індукцією по n.

Існування. При $n \in \mathbb{P}$, зокрема при $n = 2$, теорема, вочевидь, виконується. Якщо n складене, то $n = ab$, де $1 < a, b < n$, а отже за припущенням індукції числа a та b є простими або розкладаються в добуток простих. Але тоді число $n = ab$ розкладається в добуток простих.

Єдиність. Нехай
$$n = p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_l, \text{ де } \; p_1, p_2, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_l \in \mathbb{P}.$$
З цієї рівності випливає, що $q_1 q_2 \dots q_l \vdots p_1$. За властивостями простих чисел один з множників $q_1, q_2, \dots, q_l$ має ділитися на p_1, а отже й збігатися з p_1. За рахунок зміни порядку співмножників у другому розкладі, не порушуючи загальності, можна вважати, що $p_1 = q_1$. Тоді число $m = p_2 \dots p_k = q_2 \dots q_l < n$ і за припущенням індукції $k = l$ і прості числа $q_2, \dots, q_l$ відрізняються від $p_2, \dots, p_k$ лише послідовністю. □

[1]Евклід (бл. 356 – бл. 300 до н. е.) — давньогрецький вчений, автор найдавніших трактатів з математики, що дійшли до сьогодення.

За основною теоремою арифметики кожне натуральне число n можна подати у вигляді

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k},$$

де $p_1, p_2, \dots, p_k$ — попарно різні прості числа, а $s_1, s_2, \dots, s_k$ — цілі невід'ємні. Таке зображення називається канонічним розкладом натурального числа n на прості множники.

Теорема 29 (Евкліда). *Множина $\mathbb{P}$ простих чисел нескінченна.*

Доведення. Припустимо, що множина $\mathbb{P}$ простих чисел є скінченною, і нехай $p_1, p_2, \dots, p_n$ — усі її елементи. Тоді натуральне число $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ більше за одиницю і за основною теоремою арифметики має принаймні один простий дільник p. Проте p не може співпадати з жодним з p_i, $i = \overline{1,n}$, оскільки N при діленні на p_i дає остачу 1. Це суперечить тому, що $\mathbb{P}$ містить усі прості числа. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

3.2 Модульна арифметика

Означення 42. Нехай $m \in \mathbb{N}$. Два цілих числа a та b називаються конгруентними за модулем m, що позначається $a \equiv b \pmod m$ або $a \equiv b\ (m)$, якщо їх різниця $a - b$ ділиться на m.

Позначимо через $m\mathbb{Z} + r$ множину всіх цілих чисел виду $mk + r$, де $k \in \mathbb{Z}$. Тоді відношення конгруентності володіє такими властивостями.

1°. $\forall a \in \mathbb{Z}\ \ a \equiv a\ (m)$ (рефлексивність).
2°. $a \equiv b\ (m) \Longrightarrow b \equiv a\ (m)$ (симетричність).
3°. $a \equiv b\ (m)$ і $b \equiv c\ (m) \Longrightarrow a \equiv c\ (m)$ (транзитивність).
4°. $\forall a \in (m\mathbb{Z} + b)\ \ a \equiv b\ (m)$.
5°. $a \equiv b\ (m) \Longleftrightarrow m\mathbb{Z} + a = m\mathbb{Z} + b$.
6°. $(m\mathbb{Z} + a) \cap (m\mathbb{Z} + b) \neq \varnothing \Longrightarrow a \equiv b\ (m)$.
7°. $\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{r=\overline{0,m-1}} (m\mathbb{Z} + r)$.

8°. $m\mathbb{Z}+r = \bigcup\limits_{k=\overline{0,d-1}} (dm\mathbb{Z}+r+km)$.

9°. $a_1 \equiv a_2\ (m)$ і $b_1 \equiv b_2\ (m) \Longrightarrow a_1 \pm b_1 \equiv a_2 \pm b_2\ (m)$.

10°. $a_1 \equiv a_2\ (m)$ і $b_1 \equiv b_2\ (m) \Longrightarrow a_1 b_1 \equiv a_2 b_2\ (m)$.

11°. $ac \equiv bc\ (m)$ і $\gcd(c,m)=1 \Longrightarrow a \equiv b\ (m)$.

12°. $ac \equiv bc\ (mc) \Longrightarrow a \equiv b\ (m)$.

З властивостей **1**°–**3**° випливає, що відношення конгруенції є відношенням еквівалентності. З властивостей **4**°–**7**° випливає, що множина $\mathbb{Z}$ розбивається на підмножини $m\mathbb{Z}+r$, де $r=\overline{0,m-1}$, які попарно не перетинаються. Якщо m фіксовано, то множини $m\mathbb{Z}+r$, де $r=\overline{0,m-1}$, називаються класами лишків за модулем m і позначаються через $\overline{r}$. Множина всіх класів лишків за модулем m утворює множину $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{m-1}\}$. З властивостей **9**° та **10**° випливає, що на множині $\mathbb{Z}_m$ коректно можна ввести операції додавання та множення:

$$\forall \overline{a},\overline{b} \in \mathbb{Z}_m \quad \overline{a}+\overline{b} = \begin{cases} \overline{a+b}, & \text{якщо } a+b<m; \\ \overline{a+b-m}, & \text{якщо } a+b \geqslant m. \end{cases}$$

$$\forall \overline{a},\overline{b} \in \mathbb{Z}_m \quad \overline{a}\cdot\overline{b} = \begin{cases} \overline{ab}, & \text{якщо } ab<m; \\ \overline{ab-km}, & \text{якщо } km \leqslant ab < (k+1)m \text{ для } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Так, при $n=5$ множина $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$ і таблиці додавання та множення елементів:

$(\mathbb{Z}_5,+)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

(3.3)

$(\mathbb{Z}_5,\cdot)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

(3.4)

При $n=6$ множина $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$ і таблиці додавання та множення елементів:

$(\mathbb{Z}_6,+)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

(3.5)

$(\mathbb{Z}_6,\cdot)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

(3.6)

Нехай $\gcd(a,m)=d$. Довести, що лінійна конгруенція $ax \equiv b \pmod{m}$ має розв'язки тоді й лише тоді, коли $b \vdots d$, причому кількість розв'язків у цьому випадку дорівнює d.

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

3.3 Групи

Означення 43. Нехай M — деяка непорожня множина, а n — натуральне число. Говорять, що на множині M визначена n-арна алгебраїчна операція $*$, якщо задано деяке відображення $*\colon \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n \text{ множин}} \to M$, яке кожній впорядкованій n-ці $(a_1, \ldots, a_n)$ елементів з множини M ставить у відповідність деякий (єдиний і для кожної n-ки свій) елемент $c \in M$, що позначається $*(a_1, \ldots, a_n) = c$. Якщо $n = 1$, то операція $*$ називається унарною, якщо $n = 2$ — бінарною, якщо $n = 3$ — тернарною.

Непорожня множина M, на якій визначено декілька алгебраїчних операцій $*, \ldots, \circ$ називається алгебраїчною системою і позначається $(M, *, \ldots, \circ)$.

Надалі важливу роль відіграють бінарні алгебраїчні операції. Прикладами бінарних алгебраїчних операцій на множині $\mathbb{N}$ є операції додавання $((a, b) \mapsto a+b)$, множення $((a, b) \mapsto a\cdot b)$, піднесення до степеня $((a, b) \mapsto a^b)$. Операції віднімання $((a, b) \mapsto a - b)$ та ділення $((a, b) \mapsto a \div b)$ на множині $\mathbb{N}$ є бінарними (залежать від двох аргументів), але не є алгебраїчними, оскільки не виконується замкненість, тобто результат операції не завжди належить до $\mathbb{N}$. Операція піднесення до квадрату $(a \mapsto a^2)$ є алгебраїчною (її результат завжди належить до $\mathbb{N}$) і унарною.

Означення 44. Непорожня множина G, на якій визначена бінарна алгебраїчна операція $*$, тобто пара $(G, *)$, називається групою, якщо виконуються наступні умови (так звані аксіоми групи):

1) $\forall a, b \in G \;\; a * b \in G$ (замкненість[2]);

2) $\forall a, b, c \in G \;\; (a * b) * c = a * (b * c)$ (асоціативність);

3) $\exists \theta \in G \;\; \forall a \in G \;\; \theta * a = a = a * \theta$ (існування нейтрального елемента);

4) $\forall a \in G \;\; \exists a' \in G \;\; a * a' = \theta = a' * a$ (існування симетричного елемента).

Якщо крім цих умов виконується умова

[2]Аксіома замкненості певним чином дублює вимогу бінарності та алгебраїчності операції $*$, проте для практичних потреб це дублювання є корисним.

5) $\forall a, b \in G \quad a * b = b * a$ (комутативність),

то група називається комутативною або абелевою[3].

Якщо множина G скінченна, то група $(G, *)$ (або просто G) називається скінченною, а число $|G|$ називається її порядком. Інакше група G називається нескінченною.

Зауважимо, що завдяки асоціативності в групах елемент $(a * b) * c = a * (b * c)$ можна записати просто як $a * b * c$.

Частіше за все операція $*$ називається додаванням (позначається $+$) або множенням (тоді позначається $\cdot$, а в виразах опускається: $a \cdot b = ab$). При цьому користуються наступним словником термінології:

$*$	$+$	$\cdot$
операція	додавання	множення
група	адитивна	мультиплікативна
вираз $a * b$	сума $a + b$	добуток ab
нейтральний θ	нуль 0 або θ	одиниця e або 1
симетричний a'	протилежний $-a$	обернений a^{-1}
$\underbrace{a * \ldots * a}_{n \text{ елементів}}$	кратне na	степінь a^n

Прикладами абелевих груп є такі алгебраїчні системи: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, де

$$\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}, \ \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \ \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}^4, \tag{3.7}$$

які, за виключенням групи $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ порядку два, є нескінченними. Прикладом скінченної абелевої групи порядка $n \in \mathbb{N}$ є $(\mathbb{Z}_n, +)$. Таблиці (3.3) та (3.5) являють собою так звану таблицю Келі[5] (таблиця в назвах рядків і стовпчиків якої виписані всі елементи групи $(G, *)$, а на перетині рядка з назвою a та стовпчика з назвою b стоїть елемент $a * b$) для груп $(\mathbb{Z}_5, +)$ та $(\mathbb{Z}_6, +)$ відповідно.

Прикладом скінченної неабелевої групи є множина функцій $F = \{f_0(x) = x, f_1(x) = \dfrac{1}{x}, f_2(x) = 1 - x, f_3(x) = \dfrac{x}{x-1}, f_4(x) = \dfrac{x-1}{x}, f_5(x) = \dfrac{1}{1-x}\}$, визначених при $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, відносно операції суперпозиції функцій, тобто $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Приклади нескінченних неабелевих груп з'являться пізніше.

Наведемо приклади алгебраїчних систем, які не є групами: $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, -)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, -)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, -)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$. Прикладом алгебраїчної системи, яка також не утворює групу, є $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ (таблиці Келі для $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ та $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ подані в таблицях (3.3) та (3.5) відповідно.).

Означення 45. Нехай $(G, *)$ — група. Непорожня підмножина H множини G називається підгрупою групи G, що позначається $(H, *) < (G, *)$ або просто $H < G$, якщо H сама є групою відносно операції $*$.

[3] Група називається абелевою на честь норвезького математика Нільса Генріха Абеля (1802 – 1829), який довів нерозв'язність в радикалах загального рівняння 5-го степеня. Абель зробив також значний внесок в теорію еліптичних функцій та теорію рядів.

[4] Пояснення позначення K^* буде дано після означення кільця.

[5] Келі, Артур (1821 – 1895) — англійський математик, більшість робіт якого відноситься до лінійної алгебри, диференціальних рівнянь та еліптичних функцій.

Вочевидь, що сама множина G та її одноелементна підмножина $\{\theta\}$, яка складається з нейтрального елемента, є підгрупами групи G. Ці підгрупи називаються тривіальними підгрупами групи G. У випадку адитивної групи G підгрупа $\{0\}$ називається нульовою групою, а в випадку мультиплікативної групи G підгрупа $\{1\}$ називається одиничною групою.

Наведемо приклади нетривіальних підгруп: $(2\mathbb{Z},+) < (\mathbb{Z},+) < (\mathbb{Q},+) < (\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Z}^*,\cdot) < (\mathbb{Q}^*,\cdot) < (\mathbb{R}^*,\cdot)$. В групі функцій F підгрупу буде утворювати, наприклад, множина $\{f_0, f_1\}$. Множини $\mathbb{N}$ та $2\mathbb{Z}+1$ не утворюють підгруп ні в адитивних групах $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{R}$, ні в мультиплікативних групах $\mathbb{Q}^*$ та $\mathbb{R}^*$.

Теорема 30 (критерій підгрупи). *Непорожня підмножина H групи G буде підгрупою групи G тоді й лише тоді, коли*

1) $a, b \in H \Longrightarrow a * b \in H$;

2) $a \in H \Longrightarrow a' \in H$.

Доведення. *Необхідність.* Якщо $H < G$, то за означенням 45 $(H,*)$ сама є групою. Але тоді за означенням 44 для H виконуються умови 1) та 2) теореми.

Достатність. Нехай для H виконуються умови 1) та 2) теореми. Покажемо, що H є групою за означенням 44.

Замкненість випливає з умови 1) теореми.

Асоціативність випливає з того, що $H \subset G$, а G — группа і для будь-яких її елементів (зокрема для тих, що лежать в H) асоціативність виконується.

Оскільки $H \neq \varnothing$, то $\exists a \in H$. За умовою 2) теореми симетричний елемент $a' \in H$, і за умовою 1) теореми $a * a' \in H$. Проте $a, a' \in G$, G — група, тому $a * a' = \theta \in H$, що доводить існування нейтрального елемента в H.

Існування симетричного елемента випливає з умови 2) теореми. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2. Критерій підгрупи з однією умовою: $a * b' \in H$
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

3.4 Кільця

Означення 46. Непорожня множина K, на якій визначено дві бінарні алгебраїчні операції додавання $+$ та множення $\cdot$, тобто трійка $(K, +, \cdot)$, називається кільцем, якщо виконуються наступні умови (так звані аксіоми кільця):

1) $(K, +)$ — абелева група (так звана адитивна група кільця K);

2) $\forall a, b \in K \quad ab \in K$ (замкненість множення);

3) $\forall a, b, c \in K \quad (ab)c = a(bc)$ (асоціативність множення);

4) $\forall a, b, c \in K \quad a(b+c) = ab+ac$ та $(a+b)c = ac+bc$ (ліва та права дистрибутивності множення відносно додавання)[6].

Якщо в кільці додатково виконується умова

5) $\forall a, b \in K \quad ab = ba$ (комутативність множення),

то кільце називається комутативним.

Якщо в кільці додатково виконується умова

6) $\exists 1 \in K \quad \forall a \in K \quad 1a = a = a1$ (існування одиничного елемента),

то кільце називається кільцем з одиницею.

Якщо в кільці додатково виконується умова

7) $ab = 0 \implies a = 0$ або $b = 0$ (відсутність дільників нуля),

то кільце називається кільцем без дільників нуля.

Кільце, в якому одночасно виконуються умови 5), 6) та 7), тобто комутативне кільце з одиницею без дільників нуля, називається областю цілісності.

Якщо множина K скінченна, то кільце $(K, +, \cdot)$ (або просто K) називається скінченним, інакше кільце K називається нескінченним.

Прикладами областей цілісності є такі алгебраїчні системи: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. Кільце $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ є комутативним без одиниці і без дільників нуля, а кільце $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ є комутативним з одиницею та з дільниками нуля (в цьому кільці добуток ненульових елементів $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$). Приклади некомутативних кілець з'являться пізніше.

Нехай $(K, +, \cdot)$ — кільце з одиницею 1. Позначимо через K^* множину всіх елементів $a \in K$, для кожного з яких існує $x \in K$ такий, що $ax = 1 = xa$.

Твердження 6. *Алгебраїчна система* $(K^*, \cdot)$ *утворює групу.*

Доведення. Для алгебраїчної системи $(K^*, \cdot)$ перевіримо виконання аксіом групи.

$\forall a, b \in K^* \quad \exists x, y \in K \quad ax = 1 = xa$ і $by = 1 = yb$. Тоді $(ab)(yx) = 1 = (yx)(ab)$, звідки випливає $ab \in K^*$. Таким чином, замкненість виконується.

Асоціативність виконується, оскільки $K^* \subset K$.

$1 \in K^*$, оскільки $1 = 1 \cdot 1$.

З означення множини K^* виливає, що, якщо $a \in K^*$ і $x \in K$ такий, що $ax = 1 = xa$, то й $x \in K^*$. Таким чином, для $a \in K^* \quad a^{-1} = x \in K^*$. □

Означення 47. Множина K^* називається мультиплікативною групою кільця K.

Крім встановлених раніше співвідношень (див. формулу (3.7)), вкажемо ще такі: $\mathbb{Z}_5^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ та $\mathbb{Z}_6^* = \{\overline{1}, \overline{5}\}$.

[6] В аксіомі 1) насправді заховано 5 аксіом абелевої групи, тому всього 8 аксіом кільця.

Означення 48. Нехай $(K, +, \cdot)$ — кільце. Непорожня підмножина R множини K називається підкільцем кільця K, якщо R сама є кільцем відносно операцій додавання $+$ та множення $\cdot$.

Вочевидь, що сама множина K та її одноелементна підмножина $\{0\}$, яка складається з самого нуля, є підкільцями кільця K. Ці підкільця називаються тривіальними підкільцями кільця K, а кільце $\{0\}$ називається нульовим кільцем.

Кільце парних цілих чисел $2\mathbb{Z}$ є підкільцем кілець цілих $\mathbb{Z}$, раціональних $\mathbb{Q}$ та дійсних $\mathbb{R}$ чисел. В свою чергу кільце $\mathbb{Z}$ є підкільцем кілець $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{R}$.

Теорема 31 (критерій підкільця). *Непорожня підмножина R кільця K буде підкільцем кільця K тоді й лише тоді, коли*

1) $a, b \in R \Longrightarrow a + b \in R$;

2) $a \in R \Longrightarrow -a \in R$;

3) $a, b \in R \Longrightarrow ab \in R$.

Доведення. *Необхідність.* Якщо R підкільце кільця K, то за означенням 48 $(R, +, \cdot)$ саме є кільцем. Але тоді за означенням 46 для R виконуються умови 1), 2) та 3) теореми.

Достатність. Нехай для R виконуються умови 1), 2) та 3) теореми. Покажемо, що R є кільцем за означенням 46.

З умов 1) та 2) теореми за критерієм підгрупи (теорема 30 випливає, що $(R, +)$ є підгрупою групи $(K, +)$, а отже R — адитивна група.

Замкненість множення випливає з умови 3) теореми.

Асоціативність множення та ліва та права дистрибутивності множення відносно додавання випливають з того, що R є підмножиною K, для елементів якої ці аксіоми виконуються. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2. Критерій підкільця з двома умовами
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

3.5 Поля

Означення 49. Множина P, яка містить щонайменше два елементи і на якій визначено дві бінарні алгебраїчні операції додавання $+$ та множення $\cdot$, тобто трійка $(P, +, \cdot)$ з $|P| \geqslant 2$, називається полем, якщо виконуються наступні умови (так звані аксіоми поля):

1) $(P, +, \cdot)$ — комутативне кільце з одиницею 1;

2) $\forall a \in P \setminus \{0\} \quad \exists a^{-1} \in P \quad aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$ (існування оберненого елемента)[7].

Умову 2) можна замінити рівносильною вимогою

2′) $P^* = P \setminus \{0\}$.

Якщо множина P скінченна, то поле $(P, +, \cdot)$ (або просто P) називається скінченним, інакше поле P називається нескінченним.

Прикладами полів є такі алгебраїчні системи: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$, де $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Твердження 7. *Кожне поле є областю цілісності.*

Доведення. Вочевидь, достатньо довести, що в полі відсутні дільники нуля. Припустимо, що $ab = 0$, проте $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Тоді $b = 1 \cdot b = a^{-1}ab = a^{-1}0 = 0$. Прийшли до суперечності. □

Означення 50. Нехай $(P, +, \cdot)$ — поле. Непорожня підмножина F множини P називається підполем поля P, якщо F сама є полем відносно операцій додавання $+$ та множення $\cdot$.

Поле раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є підполем полів $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ та $\mathbb{R}$. В свою чергу поле $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ є підполем поля $\mathbb{R}$.

Теорема 32 (критерій підполя). *Підмножина F поля P, яка містить щонайменше два елементи, буде підполем поля P тоді й лише тоді, коли*

1) $a, b \in F \Longrightarrow a + b \in F$;

2) $a \in F \Longrightarrow -a \in F$;

3) $a, b \in F \Longrightarrow ab \in F$;

4) $a \in F \setminus \{0\} \Longrightarrow a^{-1} \in F$.

Доведення. *Необхідність.* Якщо F підполе поля P, то за означенням 50 $(F, +, \cdot)$ саме є полем. Але тоді за означенням 49 для F виконуються умови 1) – 4) теореми.

Достатність. Нехай для F виконуються умови 1) – 4) теореми. Покажемо, що F є полем за означенням 49.

З умов 1) – 3) теореми за критерієм підкільця (теорема 31) випливає, що $(F, +, \cdot)$ є підкільцем кільця $(P, +, \cdot)$, а отже F — кільце, комутативність якого випливає з комутативності кільця P. Оскільки F містить щонайменше два елементи, то множина $F \setminus \{0\}$ непорожня і нехай деякий $a \in F \setminus \{0\}$. Тоді за умовою 4) теореми $a^{-1} \in F$, а за умовою 1) теореми $1 = aa^{-1} \in F$. Отже F — комутативне кільце з одиницею.

Існування оберненого елемента випливає з умови 4) теореми. □

[7] В аксіомі 1) насправді заховано 10 аксіом комутативного кільця з одиницею, тому всього 11 аксіом поля.

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2. Критерій підполя з двома умовами
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

3.6 Алгебри

Дивись Вінберг гл 1, §8, 9

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

3.7 Ізоморфізм алгебраїчних структур

Означення 51. Нехай $f\colon A \to B$ — деяке відображення множини A в множину B[8]. Відображення f називається сюр'єктивним, якщо для будь-якого $b \in B$ існує $a \in A$ такий, що $f(a) = b$. Відображення називається ін'єктивним, якщо з того, що $f(a_1) = f(a_2)$, випливає, що $a_1 = a_2$. Відображення називається бієктивним або взаємно однозначним, якщо воно є одночасно сюр'єктивним та ін'єктивним.

Приклад 14. Нехай відображення $f\colon A \to B$ задається законом: для кожного $x \in A$ значення функції $f(x) = x^2$. Тоді в залежності від множин A та B функція $f\colon A \to B$ набуває різних властивостей.

$f\colon A \to B,\ f(x) = x^2$	$B = (-\infty; +\infty)$	$B = [\,0; +\infty)$
$A = (-\infty; +\infty)$	загальне відображення	сюр'єктивне відображення
$A = [\,0; +\infty)$	ін'єктивне відображення	бієктивне відображення

Зокрема звідси випливаї, що кожне відображення $f\colon A \to B$ це не лише закон f, а трійка (f, A, B) — закон f, область визначення A та множина значень B. □

Означення 52. Нехай на множинах A та B задано дві бінарні алгебраїчні операції $*$ та $\circ$ відповідно. Говорять, що відображення $f\colon A \to B$ зберігає операцію $*$, якщо для довільних $a_1, a_2 \in A$ виконується співвідношення: $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \circ f(a_2)$.

Приклад 15. Нехай $(\mathbb{R}, +)$ та $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, де $\mathbb{R}^+ = (0; +\infty)$, — дві алгебраїчні системи з заданими на них операціями додавання та множення відповідно. Тоді відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f\colon x \mapsto \exp x$, зберігає операцію додавання. Дійсно,

$$f(x+y) = \exp\,(x+y) = \exp x \cdot \exp y = f(x) \cdot f(y)$$

для довільних $x, y \in \mathbb{R}$. □

[8] Нагадаємо, що відображенням $f\colon A \to B$ множини A в множину B називається (це означення не є строгим) правило або закон, яке кожному елементу $a \in A$ ставить у відповідність і до того ж єдиний елемент $b \in B$.

Означення 53. Дві групи $(G, *)$ та $(H, \circ)$ називаються ізоморфними, якщо існує бієкція $f\colon G \to H$ множини G на множину H, яка зберігає операцію $*$.

Два кільця $(K, +, \cdot)$ та $(R, \oplus, \odot)$ називаються ізоморфними, якщо існує бієкція $f\colon K \to R$ множини K на множину R, яка зберігає операції $+$ та $\cdot$.

Два поля $(P, +, \cdot)$ та $(F, \oplus, \odot)$ називаються ізоморфними, якщо вони ізоморфні як кільця.

Поняття ізоморфізму є формалізуванням того факту, що дві алгебраїчні системи володіють однаковими алгебраїчними властивостями. Це на кшталт того, як деяка книга виходить з друку в різних форматах, в різних палітурках, надрукована різними шрифтами, але з неї можна дізнатися одну й лише одну й ту ж саму інформацію.

Іншими словами, методами алгебри не можна розрізнити дві ізоморфні алгебраїчні структури. Натомість, якщо існує деяка алгебраїчна властивість, яка виконується в одній алгебраїчній структурі і не виконується в іншій (тобто за її допомогою можна розрізнити ці дві алгебраїчні структури), то такі алгебраїчні структури не є ізоморфними.

Приклад 16. Алгебраїчні структури з прикладу 15 є групами й до того ж ізоморфними, оскільки відображення f є на додаток ще й бієктивним. Методами алгебри ці дві групи розрізнити неможливо. Так, наприклад, якщо в групі $(\mathbb{R}, +)$ рівняння $x + x = a$ має розв'язок для кожного $a \in \mathbb{R}$, то й в групі $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ відповідне рівняння $y \cdot y = b$ має розв'язок для кожного $b \in \mathbb{R}^+$. $\square$

Приклад 17. Адитивні групи $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{R}$ є попарно неізоморфними. В групі $\mathbb{Z}$, на відміну від груп $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{R}$, не для кожного $a \in \mathbb{Z}$ рівняння $x + x = a$ має розв'язок. Неізоморфність груп $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{R}$ випливає з їх нерівнопотужності. $\square$

Приклад 18. Адитивна група $\mathbb{Z}$ ізоморфна своїй власній підгрупі $2\mathbb{Z}$, натомість кільце $\mathbb{Z}$ не є ізоморфним кільцю $2\mathbb{Z}$. Тобто як адитивні групи множини цілих та парних цілих чисел влаштовані однаково, проте як кільця вони різняться, наприклад, тим, що $\mathbb{Z}$ є кільцем з одиницею, а в $2\mathbb{Z}$ одиниці немає. $\square$

Однією з цілей кожної алгебраїчної теорії (як то теорія груп, теорія кілець, теорія полів тощо) є вивчення, тобто опис, усіх алгебраїчних систем даного виду з точністю до ізоморфізму. В цьому сенсі теорія векторних просторів (див. розділ 4) є повністю завершеною (див. теорему 48 та наслідок 8).

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2. Довести, що для кожного простого числа p існує з точністю до ізоморфізму лише одна група порядку p.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.

10.

11.

12.

Розділ 4

Векторні простори

4.1 Векторні простори

Означення 54. Нехай L — непорожня множина елементів довільної природи, а P — деяке поле, елементи якого називаються скалярами. Вважають, що на множині L визначено операцію множення на скаляри з поля P, якщо для кожного елемента $\alpha \in P$ визначена унарна алгебраїчна операція $\alpha\colon L \to L$, $\alpha\colon \boldsymbol{x} \mapsto \alpha\boldsymbol{x}$, де $\boldsymbol{x} \in L$, яка позначається тією ж самою літерою α.

Пара (L, P)[1], де P — поле, а L — непорожня множина елементів довільної природи, на якій визначені бінарна алгебраїчна операція додавання $+$ та операція множення на скаляри з поля P, називається векторним (лінійним) простором над полем P, якщо виконуються такі умови (так звані аксіоми векторного простору):

1) $(L, +)$ — абелева група;

2) $\forall \alpha \in P$, $\forall \boldsymbol{x} \in L$ $\ \alpha\boldsymbol{x} \in L$ (замкненість множення на скаляр);

3) $\forall \alpha, \beta \in P$, $\forall \boldsymbol{x} \in L$ $\ (\alpha\beta)\boldsymbol{x} = \alpha(\beta\boldsymbol{x})$ (асоціативність множення на скаляр);

4) $\forall \boldsymbol{x} \in L$, $1 \in P$ $\ 1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ (унітарність множення на скаляр);

5) $\forall \alpha \in P$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ $\ \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$ (дистрибутивність множення на скаляр відносно додавання елементів множини L);

6) $\forall \alpha, \beta \in P$, $\forall \boldsymbol{x} \in L$ $\ (\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$ (дистрибутивність множення на скаляр відносно додавання скалярів).

Елементи множини L називаються векторами.

Прикладами векторних просторів є так званий нульовий векторний простір $\{\mathbf{0}\}$ над довільним полем P, арифметичний векторний простір P^n над полем P, поле P над довільним своїм підполем F.

З аксіом векторного простору випливає справедливість таких тверджень.

1°. $\forall \alpha \in P$, $\mathbf{0} \in L$ $\ \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

2°. $\forall \boldsymbol{x} \in L$, $0 \in P$ $\ 0\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

3°. $\alpha\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \implies \alpha = 0$ або $x = \mathbf{0}$.

4°. $\forall \alpha \in P$, $\forall \boldsymbol{x} \in L$ $\ (-\alpha)\boldsymbol{x} = -(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(-\boldsymbol{x})$.

[1] Точніше, навіть трійка $(L, P, +)$. Проте, окрім носія векторного простору L обов'язково виділяється поле P, над яким розглядається векторний простір. Це пояснюється тим, що векторні простори з однаковими носіями, але над неізоморфними полями володіють різними алгебраїчними властивостями. Натомість, операції додавання та множення на скаляр цілком визначаються парою (L, P), а тому в позначенні векторного простору їх можна опустити.

Означення 55. Нехай (L, P) — векторний простір. Непорожня підмножина V множини L називається підпростором векторного простору L, якщо пара (V, P) сама є векторним простором відносно операцій додавання векторів та множення їх на скаляр.

Вочевидь, сама множина L та її одноелементна підмножина $\{\mathbf{0}\}$, яка складається з нуля групи L, є тривіальними підпросторами простору L. Нетривіальний підпростір арифметичного векторного простору P^n над полем P утворює множина всіх розв'язків СЛОР з n невідомими з коефіцієнтами з поля P.

Теорема 33 (критерій підпростору). *Підмножина V множини L буде підпростором векторного простору L над полем P тоді й лише тоді, коли*

1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V \Longrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$;

2) $\boldsymbol{a} \in V$, $\lambda \in P \Longrightarrow \lambda \boldsymbol{a} \in V$.

Доведення. *Необхідність.* Якщо V підпростір векторного простору L над полем P, то за означенням 55 пара (V, P) сама є векторним простором. Але тоді за означенням 54 для V виконуються умови 1) – 2) теореми.

Достатність. Нехай для V виконуються умови 1) – 2) теореми. Покажемо, що V є векторним простором за означенням 54.

З умови 2) та властивості $\mathbf{4}^\circ$ випливає, що для довільного $\boldsymbol{a} \in V$ вектор $-\boldsymbol{a} \in V$, а тому за критерієм підгрупи (теорема 30) $(V, +)$ є підгрупою групи $(L, +)$, а отже сама є групою і до того ж абелевою. Умова 2) означає замкненість множення на скаляр. Усі решта аксіом векторного простору випливають з того, що $V \subset L$. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3. Нехай $(V, +)$ — абелева група. На множині A визначено операцію множення $\cdot$ на скаляри з поля $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ в наступний спосіб:

$$\forall \boldsymbol{a} \in V \quad \overline{0} \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0},\ \overline{1} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.$$

   Яким умовам має задовольняти абелева група $(V, +)$, щоб множина V відносно операцій додавання та множення на скаляри з поля $\mathbb{Z}_2$ утворювала векторний простір $(V, \mathbb{Z}_2)$?

4. Нехай $(V, \mathbb{Z}_2)$ — векторний простір, а P — поле, відмінне від $\mathbb{Z}_2$ (наприклад, $P = \mathbb{R}$). Визначимо на множині V операцію $\cdot$ множення на скаляри з поля P в наступний спосіб:

$$\forall \boldsymbol{a} \in V \quad 0 \in P \quad 0 \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0}, \qquad \forall \boldsymbol{a} \in V \quad \forall \alpha \in P \setminus \{0\} \quad \alpha \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.$$

   З'ясувати, за яких умов алгебраїчна система (V, P) утворює векторний простір.

5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

4.2 Системи векторів

Означення 56. Нехай (L, P) — векторний простір. Системою векторів

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s)$$

(або просто СВ A) називається впорядкована s-ка (не обов'язково різних і ненульових) векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s \in L$. Кількість s векторів в СВ A будемо позначати через $\#(A)$.

СВ $C = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_t)$, яка утворюється з СВ A шляхом приєднання до неї СВ $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_t)$, будемо позначати через $A \cup B$. Якщо СВ $B = (\boldsymbol{b})$ складається лише з одного вектора $\boldsymbol{b}$, то СВ $A \cup B$ будемо позначати через $A \cup \boldsymbol{b}$.

СВ $C = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_s)$, яка утворюється з СВ A шляхом вилучення з неї вектора $\boldsymbol{a}_i$, будемо позначати через $A \setminus \boldsymbol{a}_i$.

СВ B називається підсистемою СВ A, що позначається $B \subset A$, якщо СВ B утворюється з СВ A шляхом вилучення з неї скінченної кількості векторів. СВ C, яка утворюється з СВ A шляхом вилучення з неї всіх векторів її підсистеми B, будемо позначати через $A \setminus B$.

Першим елементарним перетворенням СВ називається таке її перетворення, в результаті якого два вектора системи міняються місцями (міняються своїми номерами).

Другим елементарним перетворенням СВ називається таке її перетворення, при якому деякий вектор системи множиться на $\lambda \in P^*$.

Третім елементарним перетворенням СВ називається таке її перетворення, при якому до одного вектора системи додається інший, помножений на деякий скаляр з поля P.

Зауважимо, що для ЕП над СВ мають місце аналоги лем 1 та 2.

Означення 57. Лінійною оболонкою $L(A)$ системи векторів A називається множина всіх її ЛК (див. означення 5), тобто

$$L(A) = \{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots \lambda_s \boldsymbol{a}_s \mid \lambda_i \in P,\ i = \overline{1, s}\}.$$

Вочевидь, що вектор $\boldsymbol{b} \in L$ є ЛК СВ A, тобто $\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{a}_s$, тоді й лише тоді, коли $\boldsymbol{b} \in L(A)$. При цьому матриця-стовпчик $[\boldsymbol{b}]_{\boldsymbol{a}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)^T$ називається координатним стовпчиком вектора $\boldsymbol{b}$ в СВ A.

Зауважимо, що вектор $\boldsymbol{b}$ в загальному випадку може мати безліч координатних стовпчиків в СВ A. Це можливо, наприклад, коли СВ A містить нульовий або два рівних вектори. Точна відповідь на це питання є однією з рушійних сил лінійної алгебри і зумовлює введення поняття лінійно залежної та лінійно незалежної СВ (див. пункт 4.3).

Також зауважимо, що для СВ A та вектора $\boldsymbol{b} \in L(A)$ має місце матричне співвідношення

$$\boldsymbol{b} = A\,[\boldsymbol{b}]_{\boldsymbol{a}}. \tag{4.1}$$

Теорема 34. *Лінійна оболонка $L(A)$ системи векторів A є підпростором векторного простору (L, P).*

Доведення. Твердження доводиться безпосереднім використанням теореми 33. □

Теорема 35. *Нехай СВ A_2 утворюється з СВ A_1 шляхом застосування до неї скінченної кількості ЕП. Тоді $L(A_1) = L(A_2)$.*

Доведення. Твердження доводиться аналогічно до теореми 1 з відповідною заміною СЛР S_i на СВ A_i і множини розв'язків T_i на лінійну оболонку $L(A_i)$ при $i = \overline{1, 2}$. □

Той факт, що кожен вектор СВ $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s)$ належить до підпростору U векторного простору L, будемо позначати через $A \subset U$. Так, враховуючи теорему 34, $A \subset L(A)$. Якщо $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_t)$ — деяка інша СВ, то включення $B \subset L(A)$ означає, що СВ B лінійно виражається через СВ A, тобто кожен вектор СВ B є ЛК СВ A:

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \tau_{11}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{21}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \tau_{s1}\boldsymbol{a}_s, \\ \boldsymbol{b}_2 = \tau_{12}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{22}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \tau_{s2}\boldsymbol{a}_s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{b}_t = \tau_{1t}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{2t}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \tau_{st}\boldsymbol{a}_s. \end{cases}$$

Останню систему можна записати у вигляді матричного співвідношення

$$A\,T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = B, \tag{4.2}$$

де матриця $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \ldots & \tau_{1t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{s1} & \ldots & \tau_{st} \end{pmatrix}$ розмірності $s \times t$ називається матрицею переходу від СВ A до СВ B. Легко помітити, що матриця $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$ складається з координатних стовпчиків СВ B в СВ A, тобто

$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = ([\boldsymbol{b}_1]_{\boldsymbol{a}}, \ldots, [\boldsymbol{b}_t]_{\boldsymbol{a}}).$$

Цей алгебраїчний зміст матриці $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$ надалі буде відігравати значну роль при розумінні тих чи інших процесів, які відбуваються при побудові об'єктів лінійної алгебри. Зокрема, матрицю $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$ зручно уявляти собі у вигляді

$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{b}_t \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1t} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{s1} & \tau_{s2} & \ldots & \tau_{st} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{a}_s \end{array} \end{array},$$

де в назві рядків стоять вектори $\boldsymbol{a}_i$, $i = \overline{1,s}$, а в назві стовпчиків — вектори $\boldsymbol{b}_j$, $j = \overline{1,t}$, які лінійно виражаються через вектори $\boldsymbol{a}_i$.

Наступні дві леми разом з формулами (4.1) та (4.2) узагальнюють приклад 10 з пункту 1.10.

Лема 6. *Нехай A та B — дві СВ, а $\boldsymbol{x} \in L$. Якщо $\boldsymbol{x} \in L(B)$, а $B \subset L(A)$, то $\boldsymbol{x} \in L(A)$ і один з координатних стовпчиків вектора $\boldsymbol{x}$ в СВ A можна знайти за формулою*

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}}.$$

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. □

Лема 7 (про транзитивність лінійного зображення). *Нехай A, B та C — три СВ, причому $C \subset L(B)$, а $B \subset L(A)$. Тоді $C \subset L(A)$ і одна з матриць переходу*

$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{c}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}}.$$

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.

2. «СВ B називається підсистемою СВ A, якщо СВ A утворюється з СВ B шляхом приєднання скінченної кількості векторів.» — чи рівносильно це означенню 56?

3.

4. Навести декілька прикладів СВ A та вектора $\boldsymbol{b} \in L(A)$ таких, що вектор $\boldsymbol{b}$ має безліч координатних стовпців в СВ A.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

4.3 Лінійна залежність та незалежність векторів

Нехай $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s)$ — система векторів простору (L, P).

Означення 58. СВ A називається лінійно залежною (ЛЗ), якщо існують $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in P$ не всі одночасно рівні нулю такі, що

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{0}. \tag{4.3}$$

СВ A називається лінійно незалежною (ЛНЗ), якщо з співвідношення (4.3) з необхідністю випливає, що $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0$.

Означення 59. СВ A називається лінійно залежною, якщо в ній існує вектор $\boldsymbol{a}_i$ такий, що $\boldsymbol{a}_i \in L(A \setminus \boldsymbol{a}_i)$; в протилежному випадку СВ A називається лінійно незалежною.

Теорема 36. *СВ A є ЛЗ (ЛНЗ) за означенням 58 тоді й лише тоді, коли вона буде ЛЗ (ЛНЗ) за означенням 59.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай СВ A є ЛЗ за означенням 58. Тоді виконується співвідношення (4.3), причому не всі λ_i рівні нулю. Не порушуючи загальності, припустимо, що $\lambda_1 \neq 0$. Тоді

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \boldsymbol{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_s}{\lambda_1} \boldsymbol{a}_s \in L(A \setminus \boldsymbol{a}_1),$$

а отже, СВ A є ЛЗ й за означенням 59.

Достатність. Тепер нехай СВ A є ЛЗ за означенням 59. Тоді, не порушуючи загальності, можна вважати, що вектор $\boldsymbol{a}_1 \in L(A \setminus \boldsymbol{a}_1)$, тобто $\boldsymbol{a}_1 = \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{a}_s$. Але тоді

$$1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + (-\lambda_2)\, \boldsymbol{a}_2 + \ldots + (-\lambda_s)\, \boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{0},$$

що й означає, що СВ A є ЛЗ за означенням 58. □

Неформально означення 58 можна вважати алгебраїчним, а означення 59 — геометричним. Для потреб теорії та практики частіше користуються алгебраїчним означенням лінійної залежності та лінійної незалежності.

Теорема 37. *Нехай A та B — дві СВ, причому $A \subset B$. Тоді:*
1) A — ЛЗ СВ $\implies$ B — ЛЗ СВ,
2) B — ЛНЗ СВ $\implies$ A — ЛНЗ СВ.

Доведення. 1) Не порушуючи загальності, можна вважати, що $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s)$, а $B = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_t)$. Тоді

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{a}_s = 0 \quad \implies \quad \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{a}_s + 0 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{b}_t = 0,$$

що й доводить лінійну залежність СВ B за умови лінійної залежності СВ A.

Твердження 2) є оберненим до протилежного до твердження 1). □

Теорема 38. *Нехай СВ A є ЛНЗ. СВ $A \cup \boldsymbol{b}$ є ЛЗ тоді й лише тоді, коли $\boldsymbol{b} \in L(A)$.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо СВ $A \cup \boldsymbol{b}$ є ЛЗ, то в ЛК

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{a}_s + \lambda \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$$

не всі коефіцієнти одночасно рівні нулю. Проте, якщо $\lambda = 0$, то СВ A є ЛЗ, що суперечить умові, а тому $\lambda \neq 0$ і, як наслідок, $\boldsymbol{b} \in L(A)$.

Достатність випливає з означення 59. □

Теорема 39 (основна про ЛЗ). *Нехай A та B — дві СВ, причому $B \subset L(A)$. Тоді якщо $\#(A) < \#(B)$, то СВ B є ЛЗ.*

Доведення. Нехай $\#(A) = s$, $\#(B) = t$, а $T = T_{\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b}}$ — матриця переходу від СВ A до СВ B розмірності $s \times t$. Оскільки $s < t$ то за теоремою 5 СЛОР $TX = O$ має ненульовий розв'язок $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)^T$, тобто $T\Lambda = O$. Тоді з урахуванням формули (4.2) ЛК

$$\lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \lambda_t \boldsymbol{b}_t = B\Lambda = (AT)\Lambda = A(T\Lambda) = AO = \mathbf{0},$$

що й означає лінійну залежність СВ B. □

Наслідок 2. *Нехай A та B — дві СВ, причому $B \subset L(A)$. Тоді якщо СВ B є ЛНЗ, то $\#(B) \leqslant \#(A)$.*

Доведення. Твердження є оберненим до протилежного до теореми 39. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести, що за означенням 58 СВ A є або ЛЗ, або ЛНЗ.
2. Поясніть, чому неформально означення 58 можна вважати алгебраїчним, а означення 59 — геометричним.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

4.4 Базис СВ

Означення 60. Нехай A та B — дві СВ, причому $B \subset A$. СВ B називається базисом СВ A, якщо виконуються наступні умови:

1) СВ B є ЛНЗ,

2) $A \subset L(B)$.

Множину всіх базисів СВ A будемо позначати через $\mathcal{B}(A)$. Таким чином, той факт, що СВ B є базисом СВ A будемо позначати через $B \in \mathcal{B}(A)$.

Теорема 40. *Кількість векторів у базисі СВ не залежить від вибору базису СВ.*

Доведення. Нехай A, B та C — три СВ такі, що $B, C \in \mathcal{B}(A)$. Тоді $B \subset A \subset L(C)$ і СВ B є ЛНЗ. Отже, за наслідком 2 з основної теореми про ЛЗ $\#(B) \leqslant \#(C)$. Аналогічно встановлюється, що $\#(B) \geqslant \#(C)$. Таким чином, $\#(B) = \#(C)$, що й треба було довести. □

Означення 61. Кількість векторів в довільному базисі СВ A називається рангом СВ A і позначається $r(A)$.

Означення 61 є коректним в силу теореми 40. Отже, якщо $B \in \mathcal{B}(A)$, то $r(A) = \#(B)$.

Означення 62. Дві СВ A та B називаються еквівалентними, що позначається $A \sim B$, якщо кожна з них лінійно виражається через іншу, тобто $A \subset L(B)$ і $B \subset L(A)$.

Теорема 41. *Еквівалентні СВ мають рівні ранги.*

Доведення. Нехай A та B — дві еквівалентні СВ, СВ $C \in \mathcal{B}(A)$, а СВ $D \in \mathcal{B}(B)$. Оскільки $C \subset A \subset L(B)$, а $B \subset L(D)$, то за лемою 7 про транзитивність лінійного зображення $C \subset L(D)$. СВ C є ЛНЗ, а тому за наслідком 2 $\#(C) \leqslant \#(D)$. Аналогічно встановлюється, що $\#(C) \geqslant \#(D)$. Таким чином, $r(A) = \#(C) = \#(D) = r(B)$, що й треба було довести. □

Наслідок 3. *ЕП СВ не змінюють її ранг.*

Доведення. Твердження наслідку випливає з теорем 35 та 41. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

4.5 Розмірність векторного простору

Означення 63. Нехай $n \in \mathbb{N}_0$. Число n називається розмірністю векторного простору (L, P), що позначається $\dim_P L = n$ або (L_n, P), якщо:

1) існує ЛНЗ СВ $A \subset L$ така, що $\#(A) = n$,

2) будь-яка СВ $B \subset L$, де $\#(B) = n + 1$, є ЛЗ.

Векторний простір (L, P) називається нескінченновимірним, що позначається $\dim_P L = \infty$, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує ЛНЗ СВ $A \subset L$ така, що $\#(A) = n$.

Зауважимо, що розмірність векторного простору залежить від поля, над яким цей простір розглядається. Так, наприклад, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$, а $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$. Зауважимо також, що оскільки в лінійній алгебрі вивчаються лише скінченновимірні векторні простори, то надалі без спеціальних застережень протилежний випадок не розглядається.

Теорема 42. *Нехай (P^n, P) — арифметичний векторний простір. Тоді $\dim_P P^n = n$.*

Доведення. Розглянемо СВ $E = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) \subset P^n$ таку, що $\boldsymbol{e}_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in})$, $i = \overline{1, n}$, де δ_{ij} — символ Кронекера. СВ E є ЛНЗ, оскільки з рівності $\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$ випливає, що $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Для довільного вектора $\boldsymbol{b} = (x_1, \dots, x_n) \in P^n$ координатний стовпець $[\boldsymbol{b}]_{\boldsymbol{e}} = (x_1, \dots, x_n)^T$, а тому $B \subset L(E)$ для довільної СВ B. Якщо $\#(B) = n + 1$, то за теоремою 39 СВ B є ЛЗ, що й завершує доведення теореми. $\square$

Означення 64. Нехай (L, P) — векторний простір і СВ $A \subset L$. СВ A називається базисом векторного простору (L, P), що позначається через $A \in \mathcal{B}(L)$, якщо

1) СВ A є ЛНЗ,

2) для будь-якого $\boldsymbol{x} \in L$ вектор $\boldsymbol{x} \in L(A)$ або, що те саме, $L = L(A)$.

Теорема 43. *Нехай (L, P) — векторний простір. Розмірність $\dim_P L = n$ тоді й лише тоді, коли існує СВ $A \in \mathcal{B}(L)$ така, що $\#(A) = n$.*

Доведення. *Необхідність.* За пунктом 1) означення 63 існує ЛНЗ СВ $A \subset L$ така, що $\#(A) = n$, а за пунктом 2) цього ж означення для довільного $\boldsymbol{x} \in L$ СВ $A \cup \boldsymbol{x}$ є ЛЗ, звідки за теоремою 38 вектор $\boldsymbol{x} \in L(A)$. Таким чином, за означенням 64 СВ $A \in \mathcal{B}(L)$.

Достатність. Якщо СВ $A \in \mathcal{B}(L)$, то СВ A є ЛНЗ, $\#(A) = n$ і для довільної СВ $B \subset L$ СВ $B \subset L(A)$. При цьому, якщо $\#(B) = n + 1$, то за теоремою 39 СВ B є ЛЗ, що й завершує доведення теореми. $\square$

Наслідок 4. *Нехай (L, P) — векторний простір. Якщо $\dim_P L = n$, то для довільної ЛНЗ СВ $A \subset L$ такої, що $\#(A) = n$, СВ $A \in \mathcal{B}(L)$.*

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. $\square$

Теорема 44. *Нехай (L_n, P) — векторний простір. Тоді довільну ЛНЗ СВ $A \subset L$ можна доповнити до базису всього простору L.*

Доведення. Доведення носить індуктивний характер.

Нехай СВ $A \subset L$, де $\#(A) = s$, є ЛНЗ. Випадок $s > n$ є неможливим; а у випадку $s = n$ за наслідком 4 СВ $A \in \mathcal{B}(L)$. Нехай $s < n$. Тоді для довільного $\boldsymbol{x} \in L \setminus L(A)$ СВ $A \cup \boldsymbol{x}$ є ЛНЗ, причому $\#(A \cup \boldsymbol{x}) = s + 1$. $\square$

Теорема 45. *Нехай (L, P) — векторний простір. Для довільної СВ $A \subset L$ мають місце співвідношення*

1) $\mathcal{B}(A) \subset \mathcal{B}(L(A))$,

2) $\dim_P L(A) = r(A)$.

Доведення. Твердження 1) випливає з леми 6 та означень 60 та 64, а твердження 2) — з твердження 1), теореми 43 та означення 63. $\square$

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

4.6 Координати вектора в базисі

В пункті 4.2 було введено поняття координатного стовпчика вектора в СВ та матриця переходу від однієї СВ до іншої. Ці поняття переносяться і на випадок, коли СВ утворює базис векторного простору. При цьому мають місце наступні твердження.

Теорема 46. *Нехай (L_n, P) — векторний простір, а B — деяка СВ. Для кожного вектора $\boldsymbol{x} \in L$ існує єдиний координатний стовпчик $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}}$ тоді й лише тоді, коли $B \in \mathcal{B}(L)$.*

Доведення. *Необхідність.* З існування для кожного вектора $\boldsymbol{x} \in L$ координатного стовпчика $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}}$ випливає, що $L = L(B)$; а з єдиності — ЛНЗ СВ B (оскільки $\mathbf{0} \in L = L(B)$).

Достатність. Якщо деякий $\boldsymbol{x} \in L$ має два координатних стовпчики, то два координатних стовпчики буде мати й вектор $\mathbf{0}$, звідки випливає ЛЗ СВ B. □

Наслідок 5. *Нехай $B \in \mathcal{B}(L)$. Тоді $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L \quad \forall \lambda \in P$ виконуються співвідношення:*
1) $[\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}]_B = [\boldsymbol{x}]_B + [\boldsymbol{y}]_B$,
2) $[\lambda \boldsymbol{x}]_B = \lambda [\boldsymbol{x}]_B$

Наслідок 6. *Нехай $A, B \in \mathcal{B}(L)$. Тоді існує і до того ж єдина матриця переходу $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$.*

Доведення. *Існування* випливає з того, що СВ $A \in \mathcal{B}(L)$.
Єдиність випливає з теореми 46. □

Таким чином, якщо $A, B \in \mathcal{B}(L)$, то з урахуванням леми 6 для довільного вектора $\boldsymbol{x} \in L$ має місце (однозначний на відміну від леми 6) зв'язок між його координатними стовпцями в різних базисах:

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} [\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}}. \tag{4.4}$$

Лема 8 (про рівність двох матриць). *Нехай A та B — дві матриці $m \times n$, а k та l — фіксовані натуральні числа. Якщо для будь-якої матриці X розмірності $n \times k$ виконується рівність $AX = BX$ або для будь-якої матриці Y розмірності $l \times m$ — рівність $YA = YB$, то $A = B$.*

Доведення. Вочевидь, лему достатньо довести лише у випадку матриць X розмірності $n\times 1$. Нехай $X_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in})^T$, де $i = \overline{1,n}$, а $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j, \end{cases}$ — символ Кронекера. Тоді множення матриць A та B на матрицю X_i справа виділяє в кожній з них i-й стовпчик. З рівності $AX_i = BX_i$ випливає, що i-ті стовпчики матриць A та B є рівними, а отже, рівними будуть і самі матриці $A = B$. $\square$

Нехай $A, B, C \in \mathcal{B}(L)$. Користуючись лемою 8 та формулою (4.4), легко довести зв'язок

$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{c}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}} \tag{4.5}$$

між матрицями переходу від одного базису до іншого, який установлюється лемою 7. Дійсно, з формул $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}}$, $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{c}}$ та $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{c}}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{c}}$ випливає, що

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{c}}\,[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{c}} = (T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}})\,[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{c}}.$$

Оскільки остання рівність виконується для довільного вектора $\boldsymbol{x}$, а отже і для довільного координатного стовпця $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{c}}$, то за лемою 8 має місце формула (4.5).

Теорема 47. *Нехай (L_n, P) — векторний простір, а $A, B \in \mathcal{B}(L)$. Матриця T є матрицею переходу $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$ між деякими базисами A та B тоді й лише тоді, коли вона є неособливою.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо $T = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$, то $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = E\,[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = TT_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}\,[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}}$, де E — одинична матриця. Тоді за лемою 8 $E = TT_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}$ і матриця T має обернену $T^{-1} = T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}$. Таким чином, за теоремою 8 матриця T є неособливою.

Достатність. Нехай A та B — дві СВ, $A \in \mathcal{B}(L)$ і $T = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$ — неособлива матриця переходу від СВ A до СВ B. Покажемо, що $B \in \mathcal{B}(L)$. Дійсно, оскільки $AT = B$, то $A = BT^{-1}$, а тому $A \subset L(B)$ і $L = L(B)$. Далі нехай $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$. Тоді з ЛНЗ СВ A випливає, що ЛК

$$\lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{b}_n = B\Lambda = (AT)\Lambda = A(T\Lambda) = \mathbf{0}$$

тоді й лише тоді, коли $T\Lambda = O$. Оскільки матриця T неособлива, то останнє матричне рівняння має єдиний розв'язок $\Lambda = T^{-1}O = O$, звідки випливає, що СВ B є ЛНЗ. $\square$

Наслідок 7. *Нехай $A, B \in \mathcal{B}(L)$. Тоді $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = (T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}})^{-1}$.*

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2. Чи обов'язковою в наслідку 6 є умова $B \in \mathcal{B}(L)$?
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

4.7 Ізоморфізм векторних просторів

Означення 65. Два векторні простори (L, P) та (V, P) над одним і тим же полем P називаються ізоморфними, якщо існує відображення $\varphi\colon L \to V$ таке, що:

1) φ є бієктивним,

2) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L \ \ \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$, тобто φ зберігає операцію додавання,

3) $\forall \lambda \in P, \forall \boldsymbol{x} \in L \ \ \varphi(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \varphi(\boldsymbol{x})$, тобто φ зберігає операцію множення на скаляр.

Той факт, що векторні простори (L, P) та (V, P) ізоморфні, позначається через $L \simeq V$ або $\varphi\colon L \simeq V$, якщо необхідно вказати відображення φ.

Мають місце наступні властивості ізоморфізму $\varphi\colon L \simeq V$ векторних просторів.
1°. $\forall \boldsymbol{x} \in L \ \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in V$.

Доведення. *Необхідність.* Якщо $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, то $\varphi(\boldsymbol{0}) = \varphi(0\,\boldsymbol{x}) = 0\,\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.
Достатність. Нехай $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. З необхідності випливає, що $\varphi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, а з ін'єктивності φ випливає, що $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. □

2°. $\forall \boldsymbol{x} \in L \ \ \varphi(-\boldsymbol{x}) = -\varphi(\boldsymbol{x})$.
3°. Відображення $\varphi^{-1}\colon V \to L$, обернене до ізоморфізму $\varphi\colon L \simeq V$, також є ізоморфізмом між векторними просторами (L, P) та (V, P).

Нехай $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s)$ — СВ в просторі L. Позначимо через $\varphi(A) = (\varphi(\boldsymbol{a}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{a}_s))$ СВ простору V, в яку переходить СВ A під дією відображення φ. Вочевидь, що $\#(A) = \#(\varphi(A))$.
4°. СВ $A \subset L$ є ЛНЗ тоді й лише тоді, коли СВ $\varphi(A) \subset V$ є ЛНЗ.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\#(A) = s$ і $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)^T$. Якщо ЛК $\varphi(A)\Lambda = \boldsymbol{0}$, то $\varphi(A\Lambda) = \boldsymbol{0}$ і за властивістю **1**° ЛК $A\Lambda = \boldsymbol{0}$. Оскільки СВ A є ЛНЗ, то звідси з необхідністю випливає, що $\Lambda = (0, \ldots, 0)^T$, а отже СВ $\varphi(A)$ є ЛНЗ.
Достатність випливає з необхідності та властивості **3**°. □

5°. СВ $A \in \mathcal{B}(L)$ тоді й лише тоді, коли СВ $\varphi(A) \in \mathcal{B}(V)$.

Доведення. $\forall \boldsymbol{y} \in V \ \ \exists \boldsymbol{x} \in L \ \mid \ \boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(A[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}}) = \varphi(A)[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}}$. □

6°. $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = [\varphi(\boldsymbol{x})]_{\varphi(\boldsymbol{a})}$

Теорема 48. *Нехай (L, P) та (V, P) — два скінченновимірних векторних простори. Простори $L \simeq V$ тоді й лише тоді, коли $\dim_P L = \dim_P V$.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо СВ $A \in \mathcal{B}(L)$, то за властивістю **5**° СВ $\varphi(A) \in \mathcal{B}(V)$. Тоді за теоремою 43 $\dim_P L = \#(A) = \#(\varphi(A)) = \dim_P V$.
Достатність. Якщо СВ $A \in \mathcal{B}(L)$, а СВ $B \in \mathcal{B}(V)$, то $\#(A) = \dim_P L = \dim_P V = \#(B)$. Тоді відображення $\varphi\colon L \to V$ таке, що $\varphi(\boldsymbol{x}) = B[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}}$ для кожного $\boldsymbol{x} \in L$, визначає ізоморфізм $L \simeq V$. □

Наслідок 8. *Нехай (L, P) — векторний простір. Якщо $\dim_P L = n$, то векторний простір (L, P) ізоморфний арифметичному векторному простору (P^n, P), тобто $L \simeq P^n$.*

Доведення. Твердження випливає з теорем 48 та 42. □

По суті наслідок 8 говорить про те, що крім арифметичних векторних просторів інших[2] скінченновимірних векторних просторів над даним полем не існує. Зауважимо також, як це випливає з доведення достатності теореми 48, може існувати декілька ізоморфізмів між векторними просторами, які залежать від вибору базисів в цих просторах. Зокрема, вибір

[2]Тобто таких, які не ізоморфні арифметичному векторному простору.

базису $A \in \mathcal{B}(L)$ векторного простору (L_n, P) визначає ізоморфізм $\varphi \colon L \simeq P^n$, при якому $\varphi(\boldsymbol{a}_i) = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}) \in P^n$, де $i = \overline{1, n}$, а δ_{ij} — символ Кронекера.

Для подальших посилань та більш глибокого розуміння процесів, які відбуваються при побудові об'єктів лінійної алгебри, сформулюємо наступне твердження, яке по суті (завдяки наслідку 8) ототожнює вектор з його координатним стовпчиком в деякому базисі.

Теорема 49. *Нехай (L_n, P) — векторний простір. СВ $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s) \subset L$ є ЛНЗ (ЛЗ) тоді й лише тоді, коли для будь-якої СВ $B \in \mathcal{B}(L)$ СВ $C = ([\boldsymbol{a}_1]_{\boldsymbol{b}}, \ldots, [\boldsymbol{a}_s]_{\boldsymbol{b}}) \subset P^n$ є ЛНЗ (ЛЗ). Більше того, СВ $A' \in \mathcal{B}(A)$, де $A' = (\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_t)$, тоді й лише тоді, коли СВ $C' \in \mathcal{B}(C)$, де $C' = ([\boldsymbol{a}'_1]_{\boldsymbol{b}}, \ldots, [\boldsymbol{a}'_t]_{\boldsymbol{b}})$; при цьому $r(A) = r(C)$.*

Доведення. Твердження випливає з наслідку 8 та властивостей **4°** та **5°**. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2. Навести приклади векторних просторів, між якими існує a) скінченна, b) нескінченна кількість ізоморфізмів.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

4.8 Підпростори векторного простору

Оскільки підпростори векторного простору самі є векторними просторами (див. пункт 4.1), то всі поняття, введені для просторів (розмірність, базис тощо), поширюються й на підпростори.

Теорема 50. *Нехай (L, P) — векторний простір, а U — його підпростір. Тоді*

$$\dim_P U \leqslant \dim_P L.$$

Доведення. Твердження випливає з означення 63. □

Означення 66. Нехай задано векторний простір (L, P) і два його підпростори U та V. Перетином підпросторів U та V називається множина

$$U \cap V = \{\boldsymbol{x} \in L \mid \boldsymbol{x} \in U \wedge \boldsymbol{x} \in V\},$$

а сумою — множина

$$U + V = \{\boldsymbol{x} \in L \mid \exists\ \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\}.$$

Означення перетину легко узагальнюється на будь-яку, а означення суми — на будь-яку скінченну кількість підпросторів.

Сума $U+V$ підпросторів U та V називається прямою та позначається $U \oplus V$, якщо для будь-якого $\boldsymbol{x} \in U + V$ існує не більше однієї пари векторів $\boldsymbol{u} \in U$ та $\boldsymbol{v} \in V$ таких, що $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

Теорема 51. *Перетин та сума двох підпросторів векторного простору є підпростором цього простору.*

Доведення. Доведення випливає з критерія підпростору (теорема 33). $\square$

Теорема 52. *Сума підпросторів U та V є прямою тоді й лише тоді, коли $U \cap V = \{\boldsymbol{0}\}$.*

Доведення. *Необхідність.* Достатньо показати, що $U \cap V \subset \{\boldsymbol{0}\}$. Якщо $\boldsymbol{x} \in (U \cap V) \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0}$.

Достатність. Нехай для деякого $\boldsymbol{x} \in U + V$ існують $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ та $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ такі, що $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2$. Тоді $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 \in U \cap V$. $\square$

Теорема 53. *Нехай U та V — два скінченновимірних підпростори деякого (не обов'язково скінченновимірного) векторного простору (L, P). Тоді*

$$\dim_P(U + V) = \dim_P U + \dim_P V - \dim_P(U \cap V).$$

Зокрема, $\dim_P(U \oplus V) = \dim_P U + \dim_P V$.

Доведення. Якщо хоча б один з підпросторів U або V є нульовим, то твердження очевидне.

Нехай СВ $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m) \in \mathcal{B}(U \cap V)$. За теоремою 44 СВ B можна доповнити до базисів підпросторів U та V: $B \cup (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s) \in \mathcal{B}(U)$ та $B \cup (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t) \in \mathcal{B}(V)$. Доведемо, що СВ

$$C = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t) \in \mathcal{B}(U + V).$$

Розглянемо ЛК

$$\lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{b}_m + \mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \mu_s \boldsymbol{u}_s + \nu_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \nu_t \boldsymbol{v}_t = 0.$$

Тоді вектор

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{b}_m + \mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \mu_s \boldsymbol{u}_s = -\nu_1 \boldsymbol{v}_1 - \ldots - \nu_t \boldsymbol{v}_t \in U \cap V,$$

а тому існують $\tau_1, \ldots, \tau_m$ такі, що

$$\boldsymbol{a} = \tau_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \tau_m \boldsymbol{b}_m = -\nu_1 \boldsymbol{v}_1 - \ldots - \nu_t \boldsymbol{v}_t.$$

З ЛНЗ базисів підпросторів U та V випливає ЛНЗ СВ C, а з означення суми випливає, що будь-який вектор $\boldsymbol{x} \in U + V$ лінійно виражається через СВ C. $\square$

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

4.9 Рядковий та стовпцевий ранги матриці

Кожній матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ можна поставити у відповідність дві СВ: систему векторів-рядків (СВр)

$$A_p = (A_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, A_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})) \subset P^n$$

та систему векторів-стовпців (СВс)

$$A^c = (A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}) \subset P^m.$$

Означення 67. Рядковим рангом $r_p(A)$ матриці A називається ранг її СВр, тобто $r_p(A) = r(A_p)$.

Стовпцевим рангом $r^c(A)$ матриці A називається ранг її СВс, тобто $r^c(A) = r(A^c)$.

Лема 9. *Нехай матриця A під дією ЕПс переходить в матрицю A'. Тоді $r^c(A) = r^c(A')$, тобто стовпцевий ранг матриці не змінюється після застосування до матриці ЕПс.*

Доведення. Твердження випливає з наслідку 3. □

Лема 10. *Нехай матриця A під дією ЕПр переходить в матрицю A'. Тоді $r^c(A) = r^c(A')$, тобто стовпцевий ранг матриці не змінюється після застосування до матриці ЕПр.*

Доведення. Нехай A — матриця $m \times n$ з елементами з поля P, (L_m, P) — векторний простір, а СВ $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m) \in \mathcal{B}(L)$. І нехай СВ $A^* = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) \subset L$ така, що $[\boldsymbol{a}_1]_{\boldsymbol{b}} = A^1$, …, $[\boldsymbol{a}_n]_{\boldsymbol{b}} = A^n$. Тоді на матрицю A можна дивитися як на матрицю переходу від СВ B до СВ A^*, при цьому за теоремою 49 $r(A^*) = r(A^c)$.

Перехід від матриці A до матриці A' під дією ЕПр індукує відповідні ЕП над СВ B, під дією яких СВ B переходить в СВ B'. При цьому, як це легко зрозуміти, СВ A^* залишається без змін, а на матрицю A' можна дивитися як на матрицю переходу від СВ B' до СВ A^*. Як і у випадку матриці A, за теоремою 49 $r(A^*) = r(A'^c)$. Таким чином,

$$r^c(A) = r(A^c) = r(A^*) = r(A'^c) = r^c(A'),$$

що й доводить лему. □

Наслідок 9. *Рядковий ранг матриці не змінюється після застосування до матриці ЕПр або ЕПс.*

Наслідок 10. *Нехай (L_m, P) — векторний простір, а СВ $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m) \in \mathcal{B}(L)$. І нехай СВ $A^* = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \subset L$ така, що матриця A є матрицею переходу від СВ B до СВ A^*. Тоді матрицю A шляхом ЕПр з точністю до 1ЕПс (тобто з точністю до порядку стовпчиків) можна звести до матриці $A' = \begin{pmatrix} E_r & C \\ O & O \end{pmatrix}$, де E_r — одинична матриця порядку r, а C — матриця $r \times (n-r)$. При цьому СВ $A_r^* = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r) \in \mathcal{B}(A^*)$, а матриця C є матрицею переходу від СВ A_r^* до СВ $A^* \setminus A_r^*$.*

Доведення. За теоремою 2 матрицю A шляхом ЕПр можна звести до ступінчастого вигляду, а потім зворотнім ходом методу Гаусса — до матриці A'. При цьому СВ B перейде в СВ $B' = (\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_m) \in \mathcal{B}(L)$. Тоді матриця A' є матрицею переходу від СВ B' до СВ A^*:

$$
A' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_r & \boldsymbol{a}_{r+1} & \boldsymbol{a}_{r+2} & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{c}_{1,r+1} & \boldsymbol{c}_{1,r+2} & \ldots & \boldsymbol{c}_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \boldsymbol{c}_{2,r+1} & \boldsymbol{c}_{2,r+2} & \ldots & \boldsymbol{c}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \boldsymbol{c}_{r,r+1} & \boldsymbol{c}_{r,r+2} & \ldots & \boldsymbol{c}_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \boldsymbol{b}'_1 = \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}'_2 = \boldsymbol{a}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{b}'_r = \boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{b}'_{r+1} \\ \ldots \\ \boldsymbol{b}'_m \end{array},
$$

і, як це випливає з означення матриці переходу (див. пункт 4.2),

$$
\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}'_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{b}'_r, \tag{4.6}
$$

$$
\begin{cases} \boldsymbol{a}_{r+1} = \boldsymbol{c}_{1,r+1}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{c}_{2,r+1}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{c}_{r,r+1}\boldsymbol{a}_r, \\ \boldsymbol{a}_{r+2} = \boldsymbol{c}_{1,r+2}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{c}_{2,r+2}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{c}_{r,r+2}\boldsymbol{a}_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{c}_{1n}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{c}_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{c}_{rn}\boldsymbol{a}_r. \end{cases} \tag{4.7}
$$

З формул (4.6) випливає, що СВ A_r^* є ЛНЗ, а з формул (4.7) — що СВ $A^* \subset L(A_r^*)$. Таким чином, СВ $A_r^* \in \mathcal{B}(A^*)$. З формул (4.7) випливає також, що матриця C є матрицею переходу від СВ A_r^* до СВ $A^* \setminus A_r^*$. Наслідок доведено. □

Приклад 19. Нехай задано СВ $\boldsymbol{a}_1 = (5, 7, 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 5, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (7, 9, 5)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0, 4, 3)$. Необхідно знайти довільний базис цієї СВ та виразити через нього решту векторів цієї системи.

Складемо матрицю A з координатних стовпців векторів системи в природному базисі $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ і зведемо її шляхом ЕПр до матриці A' з наслідку 10:

$$
A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 0 \\ 7 & 5 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 0 \\ 7 & 5 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow \\ \\ (-1) \end{array} \rightarrow
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 5 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 5 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ (-7) \ (-4) \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \rightarrow
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -3 & 15 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b}_1 + 7\,\boldsymbol{b}_2 + 4\,\boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{b}_3 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -3 & 15 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(1/5) \\ \cdot(1/3) \end{array} \rightarrow
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 = 5\,\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{d}_3 = 3\,\boldsymbol{c}_3 \end{matrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} (-1) \\ \longleftarrow \end{matrix} \rightarrow
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{d}_3 \end{matrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \end{matrix} .
$$

Таким чином,

$$
A' = \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{matrix} ,
$$

звідки СВ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \in \mathcal{B}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$, при цьому $\boldsymbol{a}_3 = 2\,\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4 = -3\,\boldsymbol{a}_1 + 5\,\boldsymbol{a}_2$. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

4.10 Ранг матриці

Означення 68. Ступінчаста матриця вигляду $\begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$, де E_s — одинична матриця порядку s, називається канонічною матрицею рангу s і позначається K_s.

Зрозуміло, що ранг s канонічної матриці K_s розмірності $m \times n$ задовольняє нерівність $0 \leqslant s \leqslant \min\{m, n\}$.

Теорема 54. *Будь-яку матрицю шляхом ЕПр та ЕПс можна звести до канонічної.*

Доведення. Твердження безпосередньо випливає з теореми 2 та наслідку 10. □

Теорема 55. *Стовпцевий та рядковий ранги канонічної матриці K_s дорівнюють її рангу s, тобто*

$$r^c(K_s) = r_p(K_s) = s.$$

Доведення. Твердження безпосередньо випливає з наслідку 10. □

Теорема 56. *Для будь-якої матриці A її стовпцевий та рядковий ранги збігаються, тобто*

$$r^c(A) = r_p(A).$$

Доведення. За теоремою 54 будь-яку матрицю A шляхом ЕПр та ЕПс можна звести до канонічної K_s. За лемами 9 та 10 $r^c(A) = r^c(K_s)$, а за наслідком 9 $r_p(A) = r_p(K_s)$. З огляду на теорему 55

$$r^c(A) = r^c(K_s) = s = r_p(K_s) = r_p(A),$$

що й треба було довести. □

З теореми 56 випливає коректність наступного означення.

> **Означення 69.** Рангом $r(A)$ матриці A називається її стовпцевий або рядковий ранг, тобто $r(A) = r^c(A) = r_p(A)$.

Мають місце наступні властивості рангу матриці.

1°. Якщо A — матриця розмірності $m \times n$, то $r(A) \leqslant \min\{m, n\}$.

2°. Довільне ЕП матриці не змінює її рангу.

3°. Ранг ступінчастої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків (елементів на її головній діагоналі).

Властивість **3**° дозволяє переформулювати теореми 3 та 4 на мові рангів матриць.

Теорема 57 (Кронекера–Капеллі). *Нехай СЛР $m \times n$ задано у вигляді розширеної матриці $\overline{A} = (A|B)$ (див. формулу* (1.19) *та означення 3). СЛР $m \times n$ є сумісною тоді й лише тоді, коли $r(A) = r(\overline{A})$. При цьому сумісна СЛР $m \times n$ є визначеною тоді й лише тоді, коли $r(A) = r(\overline{A}) = n$.*

Теорема 58. *Нехай A та B — дві узгоджені матриці (над полем P). Тоді*

$$r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}.$$

Доведення. Нехай $C = AB$. Тоді СВ $C^c \subset L(A^c)$ і за теоремами 45 та 50

$$r(C) = r(C^c) = \dim_P L(C^c) \leqslant \dim_P L(A^c) = r(A^c) = r(A).$$

Аналогічно, розглядаючи СВ B_p та C_p, можна довести, що $r(C) \leqslant r(B)$. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.

2.

3. Довести теорему 57 безпосередньо, тобто без використання властивості **3**° та теорем 3 та 4. *Вказівка*: записати СЛР у векторній формі.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

4.11 Невироджені матриці

Множини матриць з введеними на них операціями утворюють певні алгебраїчні структури.

Теорема 59. *Множина $\mathbb{M}_{m\times n}(P)$ всіх матриць розмірності $m \times n$ з елементами з поля P відносно операцій додавання та множення на скаляри з поля P утворює векторний простір над полем P, ізоморфний арифметичному векторному простору P^{mn}.*

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. □

Теорема 60. *Множина $\mathbb{M}_n(P)$ всіх квадратних матриць порядку $n \geqslant 2$ з елементами з поля P відносно операцій додавання та множення матриць утворює некомутативне кільце з одиницею та з дільниками нуля.*

Доведення. З теореми 59 та властивостей добутку матриць випливає, що алгебраїчна система $(\mathbb{M}_n(P), +, \cdot)$ утворює кільце. Одиницею цього кільця є одинична матриця E. Некомутативність та наявність дільників нуля доводиться наступним контрприкладом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорему доведено. □

Означення 70. Квадратна матриця n-го порядку називається елементарною, якщо вона утворюється з одиничної матриці (n-го порядку) за допомогою одного ЕП.

Елементарні матриці, які утворюються з одиничної за допомогою 1ЕПр, 2ЕПр та 3ЕПр, будемо позначати E_{ij}, $E_{i(\lambda)}$ та $E_{ij(\lambda)}$ відповідно.

Теорема 61. *Кожне ЕП матриці A рівносильне множенню цієї матриці на відповідну елементарну матрицю: ЕПр рівносильне множенню матриці A на відповідну елементарну матрицю зліва, ЕПс — на відповідну елементарну матрицю справа.*

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. □

Лема 11. *Кожна елементарна матриця є оборотною, а саме:*

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij},\ E_{i(\lambda)}^{-1} = E_{i(\frac{1}{\lambda})},\ E_{ij(\lambda)}^{-1} = E_{ij(-\lambda)}.$$

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. □

Означення 71. Квадратна матриця A порядку n називається невиродженою, якщо її ранг $r(A) = n$.

Теорема 62. *Кожну невироджену матрицю шляхом ЕПр (ЕПс) можна перетворити на одиничну матрицю.*

Доведення. Твердження випливає з наслідку 10. □

Теорема 63. *Квадратна матриця є оборотною тоді й лише тоді, коли вона є невиродженою.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо A оборотна, то за теоремою 58 та властивістю $\mathbf{1}^\circ$ рангу матриці
$$n = r(E) = r(AA^{-1}) \leqslant \min\{r(A), r(A^{-1})\} \leqslant n,$$
звідки $r(A) = n$.

Достатність. Якщо A невироджена, то за теоремами 61 та 62 (для ЕПр) існують елементарні матриці $E_1, \ldots, E_s$ такі, що $E_s \ldots E_1 A = E$. Тоді, враховуючи лему 11, $A = E_1^{-1} \ldots E_s^{-1}$ і $AE_s \ldots E_1 = E$. Таким чином, матриця $A' = E_s \ldots E_1$ є оберненою до матриці A, а сама матриця A є оборотною. □

Наслідок 11. *Кожна невироджена квадратна матриця розкладається в добуток елементарних матриць.*

Доведення. Твердження випливає безпосередньо з достатності теореми 63. □

Наслідок 12. *Якщо який-небудь ланцюжок ЕПр (ЕПс) переводить квадратну матрицю A в одиничну матрицю E, то цей же ланцюжок переводить матрицю B в матрицю $A^{-1}B$ (в матрицю BA^{-1}).*

Доведення. Твердження доводиться аналогічно доведенню достатності з теореми 63. □

Наслідок 13. *Квадратна матриця є невиродженою тоді й лише тоді, коли вона є неособливою.*

Доведення. Твердження безпосередньо випливає з теорем 8 та 63. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

Розділ 5

Комплексні числа та многочлени

5.1 Алгебраїчна форма комплексних чисел

Як зазначалося вище, принципова неможливість розв'язання рівняння $x^2 + 1 = 0$ в полі дійсних чисел $\mathbb{R}$ призводить до введення так званих комплексних чисел.

Означення 72. Полем комплексних чисел називається кожне поле $\mathbb{C}$, яке володіє властивостями:

1) воно містить в якості підполя поле дійсних чисел $\mathbb{R}$;

2) воно містить такий елемент i, що $i^2 = -1$;

3) воно мінімальне серед полів з умовами 1) та 2), тобто якщо $K \subset \mathbb{C}$ — деяке підполе, яке містить $\mathbb{R}$ та i, то $K = \mathbb{C}$.

Теорема 64. *Поле комплексних чисел існує і єдине з точністю до ізоморфізма, який переводить всі дійсні числа в себе. Кожне комплексне число однозначно зображується у вигляді $a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, а i — фіксований елемент, для якого $i^2 = -1$.*

Доведення. Нехай $\mathbb{C}$ — деяке поле комплексних чисел (якщо воно існує). Розглянемо його підмножину $K = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. З властивостей операцій в полі та співвідношення $i^2 = -1$ випливає, що

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \tag{5.1}$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i. \tag{5.2}$$

Розв'язуючи відповідні рівняння, знаходимо також, що

$$-(a + bi) = (-a) + (-b)i, \tag{5.3}$$

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i \quad \text{при } a^2 + b^2 \neq 0. \tag{5.4}$$

З формул (5.1) – (5.4) за критерієм підполя (теорема 32) випливає, що K — підполе поля $\mathbb{C}$. Оскільки K, вочевидь, містить $\mathbb{R}$ та i, то за пунктом 3) означення 72 $K = \mathbb{C}$.

Таким чином, кожний елемент поля $\mathbb{C}$ зображується у вигляді $a+bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$. Покажемо, що таке зображення єдине. Дійсно, нехай $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$, де $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Тоді

$$a_1 - a_2 = (b_2 - b_1)i \implies (a_1 - a_2)^2 = -(b_2 - b_1)^2 \implies a_1 - a_2 = b_2 - b_1 = 0.$$

Якщо тепер $\mathbb{C}'$ — інше поле комплексних чисел і $i' \in \mathbb{C}'$ — такий елемент, що $(i')^2 = -1$, то, оскільки формули (5.1) та (5.2) залишаються вірними при заміні i на i', відображення

$$f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}', \quad a + bi \mapsto a + bi' \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

є ізоморфізмом поля $\mathbb{C}$ на поле $\mathbb{C}'$.

Доведемо тепер існування поля комплексних чисел. Розглянемо множину $\mathbb{C}$ пар (a, b), де $a, b \in \mathbb{R}$. Визначимо на ній операції додавання та множення за формулами

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2),$$

які підказані формулами (5.1) та (5.2). Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що множина $\mathbb{C}$ з введеними на ній операціями додавання та множення є полем, причому нулем поля є пара $(0, 0)$, одиницею поля — пара $(1, 0)$, протилежною та оберненою до пари (a, b) (в останньому випадку $(a, b) \neq (0, 0)$) є пари $(-a, -b)$ та $(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2})$ відповідно.

Позначимо через $R = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Легко бачити, що R — підполе поля $\mathbb{C}$ і відображення

$$f : \mathbb{R} \to R, \quad a \mapsto (a, 0)$$

задає ізоморфізм поля $\mathbb{R}$ на підполе R поля $\mathbb{C}$. Отже $\mathbb{C}$ містить поле дійсних чисел $\mathbb{R}$ в якості свого підполя і можна ототожнити пару $(a, 0)$ з елементом $a \in \mathbb{R}$. Оскільки

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0),$$

то поле $\mathbb{C}$ містить елемент $i = (0, 1)$, квадрат якого дорівнює -1. Далі,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi,$$

звідки випливає, що кожний елемент поля $\mathbb{C}$ однозначно зображується у вигляді $a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$. Тому, якщо деяке підполе $K \subset \mathbb{C}$ містить $\mathbb{R}$ та i, то $K = \mathbb{C}$. Отже, $\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел. $\square$

Зображення комплексного числа c у вигляді

$$c = a + bi, \quad \text{де } a, b \in \mathbb{R},$$

називається його алгебраїчною формою. При цьому число a називається дійсною частиною числа c і позначається через $\operatorname{Re} c$, а число b називається уявною частиною числа c і позначається через $\operatorname{Im} c$. Комплексні числа, які не є дійсними, називаються уявними; числа виду bi, де $b \in \mathbb{R}$, називаються суто уявними. Зрозуміло, що два комплексних числа є рівними тоді й лише тоді, коли є рівними їх дійсні та уявні частини.

Якщо в доведенні теореми 64 в якості $\mathbb{C}'$ взяти те ж саме поле $\mathbb{C}$, а в якості i' — елемент $-i$, то отримаємо, що відображення

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad c = a + bi \mapsto \overline{c} = a - bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

є ізоморфізмом поля $\mathbb{C}$ на себе. Це відображення називається комплексним спряженням. Для комплексного спряження виконуються такі властивості:

1°. $\overline{\overline{c}} = c$.

2°. $c = \overline{c} \iff c \in \mathbb{R}$.

3°. $c = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R} \implies c + \overline{c} = 2a$.

4°. $c = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R} \implies c\overline{c} = a^2 + b^2$.

5°. $\overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$.

6°. $\overline{c_1 - c_2} = \overline{c_1} - \overline{c_2}$.

7°. $\overline{c_1c_2} = \overline{c_1}\ \overline{c_2}$.

8°. $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$ при $c_2 \neq 0$.

9°. Якщо внаслідок скінченного числа операцій додавання, віднімання, множення та ділення над комплексними числами $c_1, \ldots, c_n$ одержується число z, то внаслідок тих самих операцій і у тому ж самому порядку над спряженими числами $\overline{c_1}, \ldots, \overline{c_n}$ одержується число $\overline{z}$, комплексно спряжене з числом z.

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

5.2 Тригонометрична форма комплексних чисел

Комплексні числа зображують точками або векторами на площині. А саме, число $c = a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, зображується точкою або вектором з декартовими координатами (a, b) (див. рис. 5.1).

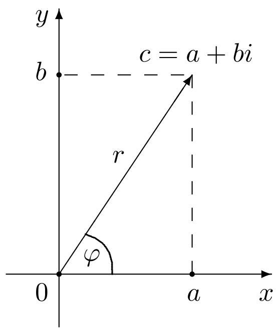


Рис. 5.1:

При векторному зображенні додаванню комплексних чисел відповідає звичайне додавання векторів за правилом паралелограма або еквівалентному йому правилом трикутника.

Замість декартових координат на площині буває зручно використовувати полярні координати, що призводить до наступних понять.

Модулем комплексного числа $c = a+bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, називається довжина вектора, який зображує це число. Модуль числа c позначається через $|c|$, і, вочевидь,

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Аргументом комплексного числа c називається кут, який утворює відповідний вектор з додатнім напрямком вісі абсцис. Аргумент визначений з точністю до доданка $2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$. Аргумент числа 0 невизначений. Аргумент числа c позначається через $\arg c$.

Нехай r та φ (див. рис. 5.1) — відповідно модуль та аргумент ненульового комплексного числа $c = a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$. Тоді

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi,$$

звідки

$$c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{де } r, \varphi \in \mathbb{R},\ r > 0. \tag{5.5}$$

Зображення комплексного числа c у вигляді (5.5) називається його тригонометричною формою. Два ненульових комплексних числа, які подані в тригонометричній формі, є рівними тоді й лише тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи відрізняються на доданок кратний 2π. У більшості випадків, подаючи комплексне число в тригонометричній формі, аргумент φ беруть у межах $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Зауважимо, що на комплексній площині комплексно спряжені числа зображуються векторами, симетричними відносно дійсної вісі (вісі абсцис), модулі яких є однаковими, а аргументи протилежними.

Комплексні числа, які зображені в тригонометричній формі, зручно перемножати, ділити, підносити до степеня та добувати корінь. Так, з формул для косинуса та синуса суми двох кутів випливає, що

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\rho(\cos\psi + i\sin\psi) = r\rho(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)),$$

тобто при множенні комплексних чисел їх модулі перемножуються, а аргументи додаються. Звідси випливають наступні формули для ділення та піднесення до степеня:

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{r}{\rho}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)),$$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad \text{де } n \in \mathbb{Z}. \tag{5.6}$$

Остання формула носить назву формули Муавра.

Методами математичного аналізу можна довести співвідношення

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

з якого випливають формули для показникової та логарифмічної функцій комплексного числа $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)),$$

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

При цьому слід зауважити, що з огляду на багатозначність аргумента $\arg z$, логарифм $\ln z$ комплексного числа z є багатозначною функцією.

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Довести, що $i^i = \exp(-\frac{\pi}{2} - 2\pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

5.3 Корені з комплексного числа

Означення 73. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Коренем n-го степеня з комплексного числа c називається таке число $z \in \mathbb{C}$, що $z^n = c$. Корінь n-го степеня з комплексного числа c позначається $\sqrt[n]{c}$.

Вочевидь, що якщо $c = 0$, то $\sqrt[n]{c} = 0$ для довільного $n \in \mathbb{N}$, і якщо $n = 1$, то $\sqrt[n]{c} = c$. Тому надалі при знаходженні коренів n-го степеня з числа $c \in \mathbb{C}$ без спеціального наголошення будемо припускати, що $c \neq 0$ і $n \neq 1$.

Теорема 65. *Операція добування квадратного кореня в полі комплексних чисел завжди здійсненна і має два значення, які відрізняються одне від одного лише знаком.*

Доведення. Нехай $c = a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, — довільне (ненульове[1]) комплексне число. Припустимо, що квадратний корінь з числа c існує і дорівнює $z = x + yi$, де $x, y \in \mathbb{R}$. Тоді $(x + yi)^2 = a + bi$, звідки $(x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi$. Прирівнюючи дійсні та уявні частини отримаємо, що

$$x^2 - y^2 = a, \tag{5.7}$$

$$2xy = b. \tag{5.8}$$

Піднісши обидві частини кожної з цих рівностей до квадрата і почленно додавши їх, матимемо $(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$, звідки

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{5.9}$$

(беремо додатне значення кореня[2], оскільки $x, y \in \mathbb{R}$ і, отже, $x^2 + y^2 > 0$).

З рівностей (5.7) та (5.9) знаходимо

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a), \\ y^2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a), \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}, \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}. \end{cases}$$

При будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$ підкореневі вирази в останніх формулах є невід'ємними числами, тому $x, y \in \mathbb{R}$. Знаки для x та y обираються так, щоб виконувалось співвідношення (5.8). Таким чином, якщо корінь квадратний $\sqrt{a + bi}$ з комплексного числа $c = a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, існує, то його значення визначається формулою

$$\sqrt{a + bi} = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}\ \right), & \text{якщо } b \geqslant 0; \\ \pm\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} - i\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}\ \right), & \text{якщо } b < 0. \end{cases}$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що квадрат кожного з чисел, поданих останньою формулою, дорівнює $a + bi$, що доводить існування квадратних коренів з комплексного числа c. $\square$

Поширити щойно викладений метод добування квадратного кореня з комплексного числа в алгебраїчній формі на корені більш високого степеня в загальному випадку неможливо. Питання про добування з комплексного числа c кореня будь-якого степеня n можна з'ясувати з вичерпною повнотою, якщо скористатися тригонометричною формою числа c.

---

[1] Див. домовленість перед теоремою 65.
[2] Усі корені в доведенні цієї теореми є арифметичними.

Теорема 66. *Коренями n-го степеня з комплексного числа $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, зображеного в тригонометричній формі, є числа*

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad \text{де } k = \overline{0, n-1}.$$

Доведення. Нехай $z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, де $\rho, \psi \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, і нехай $z^n = c$. Тоді

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} \rho^n = r, \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Оскільки корінь z залежить від числа k, то будемо його супроводжувати індексом k і позначати символом

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

де $k \in \mathbb{Z}$, а $\sqrt[n]{r}$ — арифметичне значення кореня n-го степеня з додатнього числа r.

Покажемо, що числа ω_k, де $k = \overline{0, n-1}$, вичерпують всі попарно різні значення $\sqrt[n]{c}$.

Нехай $0 \leqslant k < l \leqslant n-1$, але $\omega_l = \omega_k$, тобто

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi l}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi l}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right).$$

Тоді $\dfrac{\varphi+2\pi l}{n} = \dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + 2\pi m$, де $m \in \mathbb{Z}$. Звідси $l = k + mn$ і $l - k \vdots n$. Проте $0 < l - k \leqslant n-1$. Прийшли до суперечності, отже всі числа ω_k, де $k = \overline{0, n-1}$, є попарно різними.

Нехай k — остача від ділення числа l на n, тобто $l = nq + k$, де $k = \overline{0, n-1}$. Тоді

$$\omega_l = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi l}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi l}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{\varphi+2\pi k}{n} + 2\pi q) + i\sin(\frac{\varphi+2\pi k}{n} + 2\pi q)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) = \omega_k,$$

отже інших значень $\sqrt[n]{c}$, окрім чисел ω_k, де $k = \overline{0, n-1}$, не існує. □

В геометричному зображенні значення $\sqrt[n]{c}$ розміщуються в вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло з центром в початку координат і радіусом $\sqrt[n]{|c|}$. При цьому аргумент числа ω_0 дорівнює $\dfrac{\varphi}{n}$, а аргументи чисел $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ отримуються послідовним додаванням кута $\dfrac{2\pi}{n}$.

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1. Знайдіть помилку в міркуванні:
   $1 = 1 \implies 1 = \sqrt{(-1)\times(-1)} \implies 1 = \sqrt{-1}\times\sqrt{-1} \implies 1 = i \times i \implies 1 = -1.$
2.
3.
4.
5.
6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

5.4 Група коренів з одиниці

Елементи множини $\mathbb{C}_n = \{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid \varepsilon^n = 1\}$ називають коренями n-го степеня з одиниці й позначають символами $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. Вочевидь,

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \text{де } k = \overline{0, n-1}.$$

Приклад 20. Множина коренів 4-го степеня з одиниці $\mathbb{C}_4 = \{1, i, -1, -i\}$. □

Твердження 8. *Всі значення $\sqrt[n]{c}$ можна отримати, помноживши одне з цих значень на кожен з коренів n-го степеня з одиниці.*

Доведення. Дійсно, нехай z є одним із значень $\sqrt[n]{c}$, а ε — будь-який з коренів n-го степеня з одиниці. Тоді $(z\varepsilon)^n = z^n\varepsilon^n = c \cdot 1 = c$ і тому $z\varepsilon$ є одним із значень $\sqrt[n]{c}$. Якщо $z\varepsilon_k = z\varepsilon_l$, де $k, l = \overline{0, n-1}$, то, вочевидь, $\varepsilon_k = \varepsilon_l$ і $k = l$. Таким чином, добутки $z\varepsilon_0, z\varepsilon_1, \ldots, z\varepsilon_{n-1}$ утворюють n попарно різних значень $\sqrt[n]{c}$, чим всі значення $\sqrt[n]{c}$ й вичерпуються. □

Теорема 67. *Множина $\mathbb{C}_n$ всіх коренів n-го степеня з одиниці утворює абелеву мультиплікативну групу.*

Доведення. $\forall \varepsilon, \tau \in \mathbb{C}_n \;\; \varepsilon^n = \tau^n = 1 \implies (\varepsilon\tau)^n = \varepsilon^n\tau^n = 1 \implies \varepsilon\tau \in \mathbb{C}_n$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{C}_n \;\; (\varepsilon^{-1})^n = (\varepsilon^n)^{-1} = 1^{-1} = 1 \implies \varepsilon^{-1} \in \mathbb{C}_n$.

Оскільки $1^n = 1$, то $1 \in \mathbb{C}_n$ і $\mathbb{C}_n \neq \varnothing$. $0 \notin \mathbb{C}_n$, тому $\mathbb{C}_n \subset \mathbb{C}^*$ і за критерієм підгрупи (теорема 30) $\mathbb{C}_n < \mathbb{C}^*$, а отже $(\mathbb{C}_n, \cdot)$ сама є групою, причому абелевою, оскільки $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ — абелева група. □

Корінь n-го степеня з одиниці, який не є коренем з одиниці ніякого меншого степеня ніж n, називається первісним. При будь-якому n корінь $\varepsilon_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ є первісним, оскільки при натуральному $k < n$ маємо $\varepsilon_1^k = \varepsilon_k \neq 1$.

Теорема 68. *Корінь n-го степеня з одиниці*

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \textit{де } k = \overline{0, n-1},$$

є первісним тоді й лише тоді, коли $\gcd(k, n) = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $d = \gcd(k, n)$. Припустимо, що $d > 1$ і $k = k_1 d$, $n = n_1 d$. Тоді $n_1 < n$ і $\varepsilon_k^{n_1} = \varepsilon_1^{kn_1} = \varepsilon_1^{k_1 d n_1} = \varepsilon_1^{k_1 n} = \varepsilon_{k_1}^n = 1$. Отже, ε_k не є первісним, що суперечить умові.

Достатність. Нехай $\gcd(k, n) = 1$. Припустимо, що ε_k є коренем з одиниці степеня $m < n$. Тоді $\varepsilon_k^m = \cos\dfrac{2\pi km}{n} + i\sin\dfrac{2\pi km}{n} = 1$. Остання рівність можлива тоді й лише тоді, коли $km \vdots n$. Оскільки $\gcd(k, n) = 1$, то $m \vdots n$, що суперечить припущенню $m < n$. □

З доведеної теореми випливає, що кількість первісних коренів n-го степеня з одиниці збігається з кількістю натуральних чисел, не більших за n та взаємно простих з ним. Кількість натуральних чисел, не більших за n та взаємно простих з ним, позначається $\varphi(n)$ і називається функцією Ойлера. Якщо $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_k^{s_k}$ — канонічний розклад числа n на прості множники, то, можна довести,

$$\varphi(n) = p_1^{s_1-1} p_2^{s_2-1} \ldots p_k^{s_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_k-1).$$

Теорема 69. *Елемент $\tau \in \mathbb{C}_n$ є первісним тоді й лише тоді, коли кожен елемент $\varepsilon \in \mathbb{C}_n$ є його степенем.*

Доведення. *Необхідність.* З того, що $\tau \in \mathbb{C}_n$ є первісним, випливає, що τ^k пробігає всю множину $\mathbb{C}_n$ при $k = \overline{1,n}$.

Достатність. $\tau = \varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, $\varepsilon_1 = \tau^l \implies \varepsilon_1 = \varepsilon_1^{kl}$ і $kl \equiv 1 \pmod n \implies \gcd(k,n) = 1 \implies \tau \in \mathbb{C}_n$ є первісним. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

5.5 Кільце многочленів над областю цілісності

Нехай K — комутативне кільце з одиницею. Розглянемо множину $\widetilde{K}$ всіх нескінченних послідовностей $f = (a_0, a_1, \ldots)$, $a_i \in K$, в кожній з яких майже всі[3] члени дорівнюють нулю. Дві послідовності $f = (a_0, a_1, \ldots)$ та $g = (b_0, b_1, \ldots)$ називаються рівними, якщо $a_i = b_i$ для будь-якого $i \in \mathbb{N}_0$. Визначимо на множині $\widetilde{K}$ операції додавання та множення:

$$\forall\ f = (a_0, a_1, \ldots), g = (b_0, b_1, \ldots) \in \widetilde{K}$$

$$f + g = (c_0, c_1, \ldots), \quad \text{де} \quad c_k = a_k + b_k,$$

$$f \cdot g = (d_0, d_1, \ldots), \quad \text{де} \quad d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0,$$

[3] В математиці термін «майже всі» означає «всі, крім скінченного числа», або, більш загально, «всі, крім елементів множини міри нуль».

або в іншій формі запису $d_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$, де $i, j, k \in \mathbb{N}_0$.

Позначимо через $\deg f$ (читається «степінь f») максимальний індекс $n \in \mathbb{N}_0$, для якого $a_n \neq 0$, а через $\operatorname{coef} f$ (читається «старший коефіцієнт f») — елемент a_n, для якого $n = \deg f$. Для послідовності $\theta = (0, 0, \dots)$ будемо вважати, що $\deg\theta = 0$ та $\operatorname{coef}\theta = 0$. Мають місце наступні властивості степенів та старших коефіцієнтів.

1°. $\deg(f+g) \leqslant \max\{\deg f, \deg g\}$, причому остання нерівність є строгою тоді й лише тоді, коли $\deg f = \deg g$ і $\operatorname{coef} f = -\operatorname{coef} g$.

2°. $\deg(fg) \leqslant \deg f + \deg g$, причому остання нерівність є строгою тоді й лише тоді, коли $\operatorname{coef} f \cdot \operatorname{coef} g = 0$.

3°. Якщо K — кільце без дільників нуля (зокрема, якщо K — поле), то для довільних $f, g \in \widetilde{K} \setminus \{\theta\}$ мають місце співвідношення

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g \quad \text{та} \quad \operatorname{coef}(fg) = \operatorname{coef} f \cdot \operatorname{coef} g.$$

Теорема 70. *Множина $\widetilde{K}$ з визначеними на ній операціями додавання та множення утворює комутативне кільце з одиницею, яке містить підкільце, ізоморфне кільцю K. Зокрема, якщо K — область цілісності, то й $\widetilde{K}$ є областю цілісності.*

Доведення. Замкненість операцій додавання та множення на $\widetilde{K}$ випливає з властивостей **1**° та **2**° степенів та старших коефіцієнтів. Комутативність та асоціативність операції додавання виконується, оскільки додавання двох послідовностей із множини $\widetilde{K}$ зводиться до додавання їх членів з однаковими індексами, тобто до додавання елементів кільця K, а операція додавання в кільці K є асоціативною та комутативною. Нульовим елементом є послідовність $\theta = (0, 0, \dots)$, а протилежним до послідовності $f = (a_0, a_1, \dots)$ є послідовність $-f = (-a_0, -a_1, \dots)$. Таким чином, $(\widetilde{K}, +)$ — абелева група.

Комутативність операції множення випливає безпосередньо з формули $d_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$, в яку елементи a_i та b_j входять симетрично, та комутативності операції множення в кільці K. Асоціативність операції множення випливає з співвідношення

$$\sum_{l+k=n} \Bigl(\sum_{i+j=l} a_i b_j\Bigr) c_k = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k = \sum_{i+m=n} a_i \Bigl(\sum_{j+k=m} b_j c_k\Bigr),$$

а дистрибутивність операції множення відносно додавання — з співвідношення

$$\sum_{i+j=k} (a_i + b_i) c_j = \sum_{i+j=k} a_i c_j + \sum_{i+j=k} b_i c_j.$$

Вочевидь, що для послідовності $e = (1, 0, \dots)$ та довільної послідовності $f = (a_0, a_1, \dots)$ маємо, що $ef = fe = f$. Таким чином, $\widetilde{K}$ є комутативним кільцем з одиницею $e = (1, 0, \dots)$.

Позначимо через $R = \{(a, 0, \dots) \mid a \in K\}$. Легко бачити, що R — підкільце кільця $\widetilde{K}$ і відображення

$$f\colon K \to R, \quad a \mapsto (a, 0, \dots)$$

задає ізоморфізм кільця K на підкільце R кільця $\widetilde{K}$. Отже $\widetilde{K}$ містить підкільце R, ізоморфне кільцю K. Останнє твердження теореми випливає з властивості **3**° степенів та старших коефіцієнтів. □

Ототожнимо послідовність $(a, 0, \dots) \in \widetilde{K}$ з елементом $a \in K$, а елемент $(0, 1, 0, \dots) \in \widetilde{K}$ позначимо символом x і назвемо його змінною x. Тоді, за означенням операцій додавання та множення на $\widetilde{K}$,

$$\begin{aligned} (0, 1, 0, 0, \dots) &= x, \\ (0, 0, 1, 0, \dots) &= x^2, \\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{k \text{ нулів}},1,0,\ldots) = x^k,$$
$$(0,\ldots,0,a_k,0,\ldots) = a_k x^k,$$
$$(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,\ldots) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Таким чином,
$$f = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{5.10}$$
де $a_i \in K$, а $a_n \neq 0$, якщо $n \in \mathbb{N}$, — загальний вигляд елементів кільця $\widetilde{K}$, причому для кожного елемента кільця $\widetilde{K}$ існує тільки один запис такого вигляду. Зрозуміло, що, якщо елемент $f \in \widetilde{K}$ зображено у вигляді (5.10), то $\deg f = n$ і $\operatorname{coef} f = a_n$.

Означення 74. Кільце $\widetilde{K}$ називається кільцем многочленів від змінної x над кільцем K і позначається символом $K[x]$. Елементи цього кільця називаються многочленами від змінної x над кільцем K (або з коефіцієнтами з кільця K) і позначаються символами $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ тощо.

Перехід від кільця K до кільця $K[x]$ називається приєднанням змінної x.

Кільце $K[x_1,\ldots,x_m]$, отримане в індуктивний спосіб як
$$K[x_1,\ldots,x_{m-1},x_m] = K[x_1,\ldots,x_{m-1}][x_m],$$
називається кільцем многочленів від змінних $x_1,\ldots,x_m$ над кільцем K. Елементи цього кільця називаються многочленами від змінних $x_1,\ldots,x_m$ над кільцем K (або з коефіцієнтами з кільця K) і позначаються символами $f(x_1,\ldots,x_m)$, $g(x_1,\ldots,x_m)$, $\varphi(x_1,\ldots,x_m)$ тощо.

Зауважимо, що за теоремою 70 кільце $K[x_1,\ldots,x_m]$ є областю цілісності, якщо областю цілісності є кільце K.

Означення 75. Дати означення зведеного степеня многочлена від декількох змінних (використовується для означення алгебраїчних ліній). Див. Вінберг, стор. 123, степінь за сукупністю змінних.

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

5.6 Теорія подільності в $K[x]$

Аналогічно до подільності в кільці цілих чисел $\mathbb{Z}$ можна розвинути теорію подільності в кільці многочленів $K[x]$ над областю цілісності K. До кінця цього пункту будемо вважати, що K є областю цілісності.

Означення 76. Говорять, що многочлен $f(x) \in K[x]$ ділиться на многочлен $g(x) \in K[x]$ (позначається $f(x) \vdots g(x)$) або многочлен $g(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ (позначається $g(x) | f(x)$), якщо існує многочлен $h(x) \in K[x]$ такий, що $f(x) = g(x)h(x)$.

З означення подільності легко випливають такі властивості:
1°. $\forall f(x) \in K[x] \;\; f(x) \vdots f(x)$, $\theta \vdots f(x)$.
2°. $\forall f(x), g(x) \in K[x] \;\; f(x) \vdots g(x)$, $g(x) \vdots f(x) \iff \exists\, \varepsilon \in K^* \;\; f(x) = \varepsilon g(x)$.
3°. $f(x) \vdots g(x) \implies \varepsilon f(x) \vdots \tau g(x)$, де $\varepsilon, \tau \in K^*$
4°. $f(x) \vdots g(x)$, $g(x) \vdots h(x) \implies f(x) \vdots h(x)$.
5°. $f(x) \vdots h(x) \implies \forall g(x) \in K[x] \;\; f(x)g(x) \vdots h(x)$.
6°. $f(x) \vdots h(x)$, $g(x) \vdots h(x) \implies (f(x) \pm g(x)) \vdots h(x)$.
7°. $f_1(x) \vdots h(x)$, $\ldots$, $f_n(x) \vdots h(x) \implies \forall g_1(x), \ldots, g_n(x) \in K[x] \quad (f_1(x)g_1(x) + \ldots + f_n(x)g_n(x)) \vdots h(x)$.
8°. $f(x) \vdots \theta \iff f(x) = \theta$.
9°. $(K[x])^* = K^*$.

Означення 77. Поділити многочлен $f(x)$ з остачею на многочлен $g(x) \neq \theta$ означає знайти два многочлена $s(x)$ і $r(x)$ таких, що

1) $f(x) = g(x) \cdot s(x) + r(x)$;

2) $r(x) = \theta$ або $\deg r(x) < \deg g(x)$.

При цьому многочлен $f(x)$ називається діленим, $g(x)$ — дільником, $q(x)$ — неповною часткою, а $r(x)$ — остачею при діленні $f(x)$ на $g(x)$.

Теорема 71 (про ділення з остачею). *Для будь-яких двох многочленів $f(x), g(x) \in K[x]$, де $\operatorname{coef} g(x) \in K^*$, існує і до того ж єдина пара многочленів $s(x), r(x) \in K[x]$ таких, що $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$, де $r(x) = \theta$ або $\deg r(x) < \deg g(x)$.*

Доведення. *Існування.* Нехай

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0,$$

де $a_n \neq 0$, $b_m \in K^*$. Якщо $\deg g(x) = m = 0$, то $s(x) = \dfrac{1}{b_0} f(x)$ і $r(x) = \theta$. В протилежному випадку доведення існування проведемо індукцією за $\deg f(x) = n$, що по суті є звичайною процедурою ділення кутком.

Якщо $n < m$, то можна покласти $s(x) = \theta$, $r(x) = f(x)$. Якщо $n \geqslant m$, то розглянемо многочлен

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} g(x),$$

для якого $\deg f_1(x) < n$. Тоді, за припущенням індукції, існують $s_1(x)$ та $r(x)$ такі, що

$$f_1(x) = g(x)s_1(x) + r(x), \quad \text{де} \quad \deg r(x) < \deg g(x).$$

Але тоді, $f(x)$ має потрібний вигляд, де $s(x) = s_1(x) + \dfrac{a_n}{b_m}\, x^{n-m}$.

Єдиність. Нехай

$$f(x) = g(x)s(x) + r(x) = g(x)s_1(x) + r_1(x),$$

де $r(x) = \theta$ або $\deg r(x) < \deg g(x)$ і $r_1(x) = \theta$ або $\deg r_1(x) < \deg g(x)$. Тоді

$$r(x) - r_1(x) = g(x)(s_1(x) - s(x))$$

і, якщо $s(x) \neq s_1(x)$, то за властивостями **1°** та **3°** степенів та старших коефіцієнтів

$$\max\{\deg r(x), \deg r_1(x)\} \geqslant \deg(r(x) - r_1(x)) = \deg g(x) + \deg(s_1(x) - s(x)) \geqslant \deg g(x),$$

що, вочевидь, є хибним. Отже, $s(x) = s_1(x)$ і $r(x) = r_1(x)$. □

Важливе значення має наступний наслідок, відомий як теорема про ділення з остачею в кільці многочленів над полем.

Наслідок 14. *Нехай P — поле. Тоді для будь-яких двох многочленів $f(x), g(x) \in P[x]$, де $g(x) \neq \theta$, існує і до того ж єдина пара многочленів $s(x), r(x) \in P[x]$ таких, що $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$, де $r(x) = \theta$ або $\deg r(x) < \deg g(x)$.*

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

5.7 НСД в кільці многочленів

З огляду на наслідок 14 надалі усюди будемо розглядати кільця многочленів над полем.

Означення 78. Многочлен $h(x) \in P[x]$ називається спільним дільником многочленів $f(x), g(x) \in P[x]$, якщо $f(x) \vdots h(x)$ і $g(x) \vdots h(x)$.

Многочлен $d(x) \in P[x]$ називається найбільшим спільним дільником (НСД) многочленів $f(x)$ та $g(x)$ і позначається $d = \gcd(f, g)$, якщо $d(x)$ є спільним дільником цих многочленів і ділиться на будь-який інший їх спільний дільник.

Якщо $\gcd(f, g) = 1$, то многочлени $f(x)$ та $g(x)$ називаються взаємно простими.

Лема 12 (про НСД). *Для довільних $f(x), g(x), s(x) \in P[x]$*

$$\gcd(f, g) = \gcd(g, f - gs).$$

Доведення. Лема доводиться аналогічно до леми 5. □

Теорема 72 (про НСД). *Для довільних $f(x), g(x) \in P[x]$ існує і до того ж єдиний з точністю до множника з P^* НСД многочленів $f(x)$ та $g(x)$.*

Доведення. Теорема доводиться аналогічно до теореми 26. □

Для знаходження НСД двох многочленів застосовується алгоритм Евкліда.

Теорема 73 (про лінійне зображення НСД). *Якщо $d = \gcd(f, g)$, то існують $u(x), v(x) \in P[x]$ такі, що*

$$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x),$$

причому $\deg u < \deg(g/d)$ і $\deg v < \deg(f/d)$. Більше того, якщо існують $u(x), v(x) \in P[x]$ такі, що $1 = f(x)u(x) + g(x)v(x)$, то $\gcd(f, g) = 1$.

Доведення. Треба ще написати. □

Приклад 21. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 10$, $g(x) = 2x^2 - x - 1 \implies \gcd(f, g) = x - 1$. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

5.8 Незвідні над полем многочлени

Означення 79. Многочлен $f(x) \in P[x]$, степінь якого $\deg f \geqslant 1$, називається незвідним над полем P, якщо він не розкладається над полем P в добуток двох многочленів меншого степеня; інакше многочлен $f(x)$, степінь якого $\deg f \geqslant 1$, називається звідним. Многочлен нульового степеня не є ні звідним, ні незвідним.

Приклад 22. Всі многочлени першого степеня $x - c$, де $c \in P$, є незвідними над полем P.

$f(x)$ — незвідний над	$\mathbb{Q}$	$\subset$	$\mathbb{R}$	$\subset$	$\mathbb{C}$
$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$	ні	$\Rightarrow$	ні	$\Rightarrow$	ні
$x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$	так		ні	$\Rightarrow$	ні
$x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$	так	$\Leftarrow$	так		ні

□

Наведемо деякі властивості незвідних многочленів:
1°. $c \in P^*$, $p(x) \in P[x]$, $p(x)$ — незвідний над $P \Longrightarrow cp(x)$ — незвідний над P.
2°. $p(x), q(x) \in P[x]$, $p(x), q(x)$ — незвідні над P, $p(x) \vdots q(x) \Longrightarrow p(x) = cq(x)$, $c \in P^*$.
3°. $p(x), f(x) \in P[x]$, $p(x)$ — незвідний над $P \Longrightarrow f(x) \vdots p(x)$ або $\gcd(f, p) = 1$.
4°. $f(x)g(x) \vdots p(x)$, $p(x)$ — незвідний над $P \Longrightarrow f(x) \vdots p(x)$ або $g(x) \vdots p(x)$.

Теорема 74. *Кожен многочлен $f(x) \in P[x]$ ненульового степеня є незвідним над полем P або розкладається в добуток незвідних над полем P многочленів. Такий розклад є єдиним з точністю до порядку співмножників.*

Приклад 23. В кільці $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ елемент

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 - i\sqrt{5})(1 + i\sqrt{5}),$$

а в кільці $P_{\neq 1}[x] = \{f(x) \in P[x] \mid a_1 = 0\}$ многочлен

$$x^6 = x^3 \cdot x^3 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$$

розкладаються на прості (незвідні) множники не єдиним чином. □

Многочлен $f(x) \in P[x]$, старший коефіцієнт якого $\operatorname{coef} f = 1$, називається нормованим або унітарним. Для многочленів над полем має місце аналог теореми Евкліда 29.

Теорема 75. *Для довільного поля P множина всіх незвідних над полем P унітарних многочленів є нескінченною.*

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

5.9 Корені многочлена

Означення 80. Значенням многочлена $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ в точці $c \in P$ називається елемент $f(c) = a_n c^n + \ldots + a_1 c + a_0$ поля P. Елемент $c \in P$ називається коренем многочлена $f(x)$, якщо $f(c) = 0$.

Зауважимо, що наявність коренів у многочлена залежить від поля, над яким цей многочлен розглядають (див. приклад 23).

Зауважимо також, що для довільних многочленів $f(x), g(x) \in P[x]$ значення многочленів $s(x) = f(x) + g(x)$ та $t(x) = f(x)g(x)$ в точці $c \in P$ $s(c) = f(c) + g(c)$ та $t(c) = f(c)g(c)$.

Важливий зв'язок між поняттям подільності та поняттям кореня многочлена встановлює наступна теорема.

Теорема 76 (Безу). *Остача від ділення многочлена $f(x) \in P[x]$ на двочлен $x - c \in P[x]$ збігається з $f(c)$. Зокрема, елемент $c \in P$ є коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ тоді й лише тоді, коли $f(x) \vdots x - c$.*

Доведення. Остача $r(x)$ від ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $x - c$ має степінь нуль, тому $f(x) = (x - c)s(x) + r$, де $r \in K$. Тоді $f(c) = (c - c)s(c) + r = r$.

Зокрема, рівність $f(c) = 0$ рівносильна рівності $r = 0$, що, за означенням 76, рівносильно тому, що $f(x) \vdots x - c$. □

Теорема 77. *Многочлен $f(x) \in P[x]$ степеня 2 або 3 є звідним над полем P тоді й лише тоді, коли він має корінь в полі P.*

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. □

Означення 81. Елемент $c \in K$ називається коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ кратності $k \in \mathbb{N}_0$, якщо $f(x) \vdots (x - c)^k$, а $(x - c)^{k+1} \not| f(x)$.

Теорема 78. *Многочлен $f(x) \in P[x]$ ненульового степеня $\deg f = n$ може мати в полі P не більше n коренів з урахуванням їх кратності.*

Приклад 24. Квадратне рівняння $X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ має чотири розв'язки $X_{1,2} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X_{3,4} = \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

5.10 Схема Горнера

Ділення з остачею многочлена на двочлен $x - c$ зручно виконувати за так званою схемою Горнера.

Нехай $f(x) = (x-c)s(x) + r$ і $s(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$. Тоді

$$f(x) = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (b_0 - cb_1)x + (r - cb_0),$$

і якщо $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, то

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1}, \\ a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 = b_0 - cb_1, \\ a_0 = r - cb_0. \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0 = cb_1 + a_1, \\ r = cb_0 + a_0. \end{cases}$$

Приклад 25. Розділимо многочлен $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 9x + 8$ на двочлен $x + 2$ за схемою Горнера.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & 3 & 5 & -4 & 0 & 9 & 8 \\ -2 & \underbrace{3}_{b_4=3} & \underbrace{(-2)\cdot 3 + 5}_{b_3=-1} & \underbrace{(-2)\cdot(-1) - 4}_{b_2=-2} & \underbrace{(-2)\cdot(-2) + 0}_{b_1=4} & \underbrace{(-2)\cdot 4 + 9}_{b_0=1} & \underbrace{(-2)\cdot 1 + 8}_{r=6} \end{array}$$

Отже, $f(x) = (x+2)(3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x + 1) + 6$, зокрема $f(-2) = 6$. □

Приклад 26. Розкладемо многочлен $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 13x^2 + 4x - 4$ за степенями двочлена $x - 1$ з використанням схеми Горнера.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & 2 & -5 & 9 & -13 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 & -7 & -3 & \boxed{-7} \\ 1 & 2 & -1 & 5 & -2 & \boxed{-5} & \\ 1 & 2 & 1 & 6 & \boxed{4} & & \\ 1 & 2 & 3 & \boxed{9} & & & \\ 1 & 2 & \boxed{5} & & & & \\ 1 & \boxed{2} & & & & & \end{array}$$

Отже, $f(x) = 2(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 9(x-1)^3 + 4(x-1)^2 - 5(x-1) - 7$. □

Приклад 27. Знайдемо кратність кореня $x_0 = 2$ многочлена $f(x)$ з використанням схеми Горнера, якщо $f(x) = 3x^5 - 16x^4 + 23x^3 + 6x^2 - 28x + 8$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & 3 & -16 & 23 & 6 & -28 & 8 \\ 2 & 3 & -10 & 3 & 12 & -4 & \boxed{0} \\ 2 & 3 & -4 & -5 & 2 & \boxed{0} & \\ 2 & 3 & 2 & -1 & \boxed{0} & & \\ 2 & 3 & 8 & \boxed{15} & & & \end{array}$$

Отже, $f(x) = (x-2)^3(3x^2 + 2x - 1) = (x-2)^3((x-2)(3x+8) + 15)$ і $x_0 = 2$ є коренем кратності $k = 3$ многочлена $f(x)$. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

5.11 Основна теорема алгебри

Розділити основну теорему алгебри на два твердження.

Теорема 79 (основна алгебри многочленів). *Має місце кожне з наступних тверджень, які є рівносильними.*

1) Многочлен ненульового степеня над полем комплексних чисел має щонайменше один комплексний корінь.

2) Многочлен степеня n над полем комплексних чисел має рівно n (з урахуванням кратності) комплексних коренів.

3) Над полем комплексних чисел незвідними є лише многочлени першого степеня.

Доведення. Рівносильність тверджень доводиться за схемою 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

Доведемо твердження 1). Не порушуючи загальності розглянемо многочлен

$$p(z) = z^n + b(z), \quad \text{де} \quad b(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z],\ a_0 \neq 0,\ n \geqslant 1,$$

який не має комплексних коренів.

Якщо z робить один оберт навколо нуля по колу радіуса R, то, як це випливає з формули (5.6) Муавра, z^n зробить n обертів навколо нуля по колу радіуса R^n. При цьому якщо $R \to \infty$, то $|b(z)| \ll |z^n|$ і $p(z)$ також зробить n обертів навколо нуля[4].

З іншого боку, якщо $R \to 0$, то $p(z) \to a_0$. Тоді (коли z робить один оберт навколо нуля по колу радіуса R) $p(z)$ описує замкнуту криву поблизу a_0 і робить 0 обертів навколо нуля.

Кількість обертів $N(R)$ точки $p(z)$ навколо нуля (коли z робить один оберт навколо нуля по колу радіуса R) не можна визначити, вочевидь, коли траєкторія точки $p(z)$ проходить через нуль, тобто коли многочлен $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ має корінь. За припущенням $p(z)$ коренів не

[4]Суттєвим тут є те, що відрізок, який з'єднує $p(z)$ з z^n, не проходить через нуль, а тому рух точок $p(z)$ та z^n можна продеформувати одне в інше, не проходячи при цьому через нуль і тим самим не змінюючи кількості обертів. Цю частину доведення можна назвати принципом «Дама з собачкою»: якщо дама гуляє навколо будинку з собачкою на повідку, то собачка зробить стільки ж обертів навколо будинку, скільки й сама дама.

має, а тому $N(R)$ визначено для всіх $R \geqslant 0$ і неперервно від нього залежить. Оскільки функція $N(R)$ набуває лише цілих значень, то вона стала. Проте,

$$\lim_{R\to\infty} N(R) = n, \quad \text{а} \quad \lim_{R\to 0} N(R) = 0,$$

що й призводить до суперечності. □

Поле, над яким незвідними є лише многочлени першого степеня, називається алгебраїчно замкненим. Над алгебраїчно замкненим полем кожен многочлен ненульового степеня розкладається в добуток лінійних множників.

Наслідок 15. *Мають місце наступні твердження:*

1) Многочлен ненульового степеня над полем дійсних чисел має щонайменше один комплексний корінь;

2) Якщо $z \in \mathbb{C}$ корінь многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, то й $\overline{z}$ є коренем многочлена $f(x)$;

3) Над полем дійсних чисел незвідними є лише многочлени першого та другого (з від'ємним дискримінантом) степенів.

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

5.12 Многочлени над $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{Z}$

Теорема 80. *Нехай $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\gcd(p, q) = 1$. Якщо $f(\frac{p}{q}) = 0$, то:*

1) $p|a_0$;

2) $q|a_n$;

3) $\forall\ k \in \mathbb{Z} \quad f(k) \vdots (p - k\,q)$.

Доведення. З співвідношення $f(\frac{p}{q}) = 0$ випливає, що

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Оскільки перші (відповідно останні) n доданків діляться на p (відповідно на q), то останній (відповідно перший) доданок також ділиться на p (відповідно на q), а з $\gcd(p, q) = 1$ випливає, що $a_0 \vdots p$ (відповідно $a_n \vdots q$), що й доводить твердження 1 (відповідно 2).

Для довільного $k \in \mathbb{Z}$ за теоремою 76 Безу $f(x) = (x - k)s(x) + f(k)$, і, оскільки $f(\frac{p}{q}) = 0$, то $(\frac{p}{q} - k)s(\frac{p}{q}) + f(k) = 0$ і $-q^n f(k) = (p - kq)\left[q^{n-1} s(\frac{p}{q})\right] \in \mathbb{Z}$ □

Теорема 81. *Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$ тоді й лише тоді коли він є незвідним над $\mathbb{Z}$.*

Теорема 82 (критерій незвідності Ейзенштейна). *Нехай $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Якщо існує просте число p таке, що:*
1) $a_n \not\vdots\, p$;
2) $\forall\ k = \overline{0, n-1} \quad a_k \vdots p$;
3) $a_0 \not\vdots\, p^2$,
то $f(x)$ є незвідним над $\mathbb{Q}$.

Наслідок 16. *Над полем $\mathbb{Q}$ існують незвідні многочлени будь-якого ненульового степеня.*

Доведення. $f(x) = x^n - 2$, $n \in \mathbb{N}$. □

Ключові слова:

Питання та завдання для самоопрацювання

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

Розділ 6

Визначники

6.1 Перестановки

Нехай задана n-елементна множина M_n, елементами якої, не порушуючи загальності, можна вважати відрізок перших n натуральних чисел, тобто

$$M_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Означення 82. Перестановкою з n елементів множини M_n називається впорядкована n-ка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ елементів множини M_n така, що $i_j \neq i_k$ при $j \neq k$.

Оскільки перестановка є впорядкованою n-кою, то $(i_1, i_2, \ldots, i_n) = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ тоді й лише тоді, коли $i_k = j_k$ при будь-якому $k = \overline{1, n}$.

Теорема 83. *Кількість різних перестановок на множині з n елементів дорівнює $n!$.*

Доведення. Доведення за правилом добутку з комбінаторики. □

Наприклад, для $n = 3$ маємо $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ перестановок: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

Означення 83. Перетворення перестановки, при якому деякі два її елементи міняються місцями, а решта елементів залишаються нерухомими, називається транспозицією.

Так, внаслідок транспозиції елементів 6 та 4 у перестановці $(1, 6, 2, 5, 4, 3)$, дістанемо з неї перестановку $(1, 4, 2, 5, 6, 3)$.

Теорема 84. *Всі $n!$ перестановок з $n \geqslant 2$ елементів можна розташувати в такому порядку, що кожна наступна утворюється з попередньої шляхом однієї траспозиції, причому розташування можна розпочинати з будь-якої перестановки.*

Доведення. Доведення ММІ при базі $n = 2$. Якщо $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — довільна фіксована перестановка з n елементів, то за припущенням індукції, починаючи з перестановки $(i_2, \ldots, i_n)$, розташуємо відповідно до вимог теореми всі $(n-1)!$ перестановок з $n-1$ елементів $i_2, \ldots, i_n$. Після допишемо до них в якості першого елемента елемент i_1 і в останній перестановці виконаємо транспозицію символів i_1 та i_2. І т.д. □

Означення 84. Говорять, що два елементи i_j та i_k утворюють інверсію в перестановці $(i_1, \ldots, i_j, \ldots, i_k, \ldots, i_n)$, якщо $i_j > i_k$ при $j < k$.

Перестановка $(i_1, \ldots, i_n)$ називається парною, якщо кількість $I(i_1, \ldots, i_n)$ інверсій, утворюваних її елементами парна, і непарною, якщо число $I(i_1, \ldots, i_n)$ утворюваних її елементами інверсій непарне.

Наприклад, перестановка $(7,5,4,6,1,2,3)$ парна, бо її елементи утворюють 16 інверсій, а перестановка $(2,1,3,6,4,5,7)$ непарна, бо її елементи утворюють 3 інверсії.

Теорема 85. *Кожна транспозиція змінює парність перестановки.*

Доведення. Можливі два випадки: 1) елементи, які транспонуються, стоять у перестановці поруч, тоді $I(A,j,i,B) - I(A,i,j,B) = I(j,i) - I(i,j) \equiv 1 \pmod 2$, 2) між елементами, які транспонуються, знаходиться s елементів, тоді $I(A,i,B,j,C) \equiv s + I(A,i,j,B,C) \equiv s+1+$ $+I(A,j,i,B,C) \equiv 2s+1+I(A,j,B,i,C) \equiv 1+I(A,j,B,i,C) \pmod 2$. Таким чином, другий випадок зводиться до першого шляхом виконання $2s+1$ транспозиції сусідніх елементів. $\square$

Теорема 86. *При $n \geqslant 2$ кількість парних перестановок з n елементів дорівнює кількості непарних перестановок і дорівнює $\dfrac{n!}{2}$.*

Доведення. Доведення випливає з теорем 83, 84 та 85. $\square$

6.2 Підстановки

Означення 85. Підстановкою степеня n називається будь-яке взаємно однозначне відображення множини M_n на себе.

Підстановки позначаються малими літерами грецького алфавіту. Якщо підстановка φ відображає число i в число a_i, $i = \overline{1,n}$, то підстановку зображують у вигляді матриці $2 \times n$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

причому стовпчики в матриці можна міняти місцями. Таким чином, кожну підстановку

$$\varphi = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

можна подати у вигляді двох перестановок: верхньої $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ та нижньої $(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Теорема 87. *Кількість підстановок степеня n дорівнює $n!$.*

Доведення. Доведення випливає з формули (6.1) та теореми 83. $\square$

Теорема 88. *Парність суми кількостей інверсій верхньої та нижньої перестановок підстановки φ не залежить від форми запису (6.2).*

Доведення. Доведення випливає з теорем 84 та 85. $\square$

Означення 86. Підстановка φ називається парною, якщо сума кількостей інверсій верхньої та нижньої перестановок підстановки φ є парною, і непарною в протилежному випадку.

Теорема 89. *При $n \geqslant 2$ кількість парних підстановок n-го степеня дорівнює кількості непарних підстановок і дорівнює $\dfrac{n!}{2}$.*

Доведення. Доведення випливає з формули (6.1) та теореми 86. $\square$

6.3 Визначники n-го порядку

Означення 87. Визначником квадратної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

порядку n з елементами з деякого поля P (не порушуючи загальності будемо вважати, що поле P є числовим, тобто $P \subset \mathbb{C}$) називається число

$$\det A = |A| = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

яке дорівнює алгебраїчній сумі $n!$ доданків, кожний з яких є добутком n елементів матриці A, взятих по одному з кожного рядка та кожного стовпчика, і береться зі знаком «+» або «−» в залежності від того, відповідно парною чи непарною є підстановка, складена з перших та других індексів елементів матриці, які входять в добуток.

Перша група властивостей.

1°. $\det A^T = \det A$.

Ця властивість урівноправнює рядки і стовпчики визначника, що дає можливість формулювати властивості визначників лише для рядків або стовпчиків (залежно від зручності).

Друга група властивостей.

2°. $\det \dot{E}_{ij} A = -\det A$ при $i \neq j$.

3°. $\det \dot{E}_{i(\lambda)} A = \lambda \det A$.

4°. $\det \dot{E}_{ij(\lambda)} A = \det A$.

Друга група властивостей показує, як впливають елементарні перетворення матриці на її визначник.

Третя група властивостей.

5°. Якщо в матриці A деякий рядок є ЛК інших рядків матриці A (зокрема, матриця A містить два пропорційні рядки, два рівні рядки або один з рядків складається з нулів), то $\det A = 0$.

6°. Якщо кожен елемент i-го рядка матриці A є сумою двох доданків $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, $j = \overline{1, n}$, то $\det A = \det B + \det C$, де B і C — дві матриці, в яких всі рядки, крім i-го, такі самі, як і в матриці A, а i-тий рядок складається з елементів b_{ij} та c_{ij} відповідно, де $j = \overline{1, n}$.

7°. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку її елементів, розміщених на головній діагоналі.

Третя група властивостей дає деякі способи обчислення визначників.

Доведення. Порядок доведення властивостей: **1°**, **2°**, **3°**, **6°**, **5°**, **4°**, **7°**. □

6.4 Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Означення 88. Мінором M_{ij} матриці A, який відповідає елементу a_{ij}, називається визначник матриці, яка утворюється з матриці A шляхом викреслення з неї i-го рядка та j-го стовпчика.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} у визначнику $\det A$ називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Лема 13. *Якщо всі елементи деякого рядка або стовпця матриці A рівні нулю крім одного ($a_{ij} \neq 0$), то визначник матриці A дорівнює добутку цього елемента на його алгебраїчне доповнення:*

$$\det A = a_{ij} A_{ij}.$$

Доведення. За властивістю **1**° лему достатньо довести лише для рядків. Спочатку розглянемо випадок, коли $a_{11} \neq 0$, а $a_{1j} = 0$ при $j = \overline{2,n}$. Тоді

$$\det A = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} (-1)^{\sigma\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} (-1)^{\sigma\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} a_{11} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} =$$

$$= a_{11} \sum_{\begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} (-1)^{\sigma\begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}.$$

В загальному випадку, коли $a_{ij} \neq 0$, але $a_{1k} = 0$, $k \neq j$, після виконання $i-1$ перестановки рядків та $j-1$ перестановки стовпчиків отримаємо попередній випадок, але у визначника з'явиться множник $(-1)^{(i-1)+(j-1)}$. □

Теорема 90. *Визначник $\det A$ дорівнює сумі добутків усіх елементів довільного його рядка або стовпчика на їх алгебраїчні доповнення:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Доведення. Доведення випливає з властивості **6**° та леми 13. □

Теорема 91. *Сума добутків всіх елементів деякого рядка (стовпця) визначника $\det A$ на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{sj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{it} = 0,$$

де $s \neq i$, $t \neq j$.

Доведення. Доведення випливає з властивості **5**° і того, що задана сума дорівнює визначнику з двома однаковими рядками або стовпцями. □

Блочна матриця A називається квазітрикутною, якщо її можна подати у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix},$$

де B — квадратна матриця порядку n, C — квадратна матриця порядку m, D — матриця розмірності $m \times n$, а O — нульова матриця розмірності $n \times m$.

Теорема 92. *Визначник квазітрикутної матриці дорівнює добутку визначників її діагональних клітин:*

$$\det \begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix} = \det B \cdot \det C.$$

Доведення. Доведення проводиться ММІ за порядком n матриці B з використанням теореми 90. □

6.5 Застосування визначників

Теорема 93. *Квадратна матриця A є невиродженою тоді й лише тоді, коли її визначник* $\det A \neq 0$.

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що $\det A = 0$. За теоремою 54 матрицю A шляхом ЕП можна перетвори на канонічну матрицю K. Тоді за другою групою властивостей визначників $\det A = \lambda \det K = 0$, де $\lambda \neq 0$, а з властивості $\mathbf{7}^\circ$ випливає, що матриця A є виродженою.

Достатність випливає з властивості $\mathbf{5}^\circ$. □

Наслідок 17. *Визначник дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли деякий його рядок є ЛК інших рядків.*

Наслідок 18. *СЛОР $n \times n$ має ненульові розв'язки тоді й лише тоді, коли визначник її матриці дорівнює нулю.*

Доведення. Доведення випливає з теореми 93 та теореми 57 Кронекера–Капеллі. □

Нехай задано СЛР $n \times n$

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = b_n. \end{cases} \tag{6.3}$$

Позначимо через A матрицю цієї СЛР, а через A_j — матрицю, яка утворюється з матриці A шляхом заміни j-го стовпчика стовпчиком вільних членів.

Теорема 94 (Крамера). *СЛР* (6.3) *має єдиний розв'язок тоді й лише тоді, коли її визначник* $\det A \neq 0$. *При цьому, якщо СЛР* (6.3) *має єдиний розв'язок, то він шукається за формулами*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A},\ \ldots,\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A}. \tag{6.4}$$

Доведення. *Необхідність.* За теоремою 7 про накладання розв'язків СЛОР, відповідна до СЛР (6.3), має єдиний розв'язок, а за наслідком 18 це можливо лише за умови, що визначник $\det A \neq 0$. Для доведення формули $x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}$ домножимо кожне i-те рівняння системи (6.3) на алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} матриці A і знайдемо їхню суму.

Достатність. За наслідком 18 та теоремою 7 про накладання розв'язків, достатньо довести, що формули (6.4) визначають розв'язок СЛР (6.3). □

Теорема 95. *Визначник добутку двох квадратних матриць n-го порядку дорівнює добутку визначників цих матриць.*

Доведення. Нехай $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ — дві квадратні матриці n-го порядку, і нехай $AB = C = (c_{ij})$. Тоді

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & C \\ -E & B \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} C & O \\ B & -E \end{vmatrix}$$

і за теоремою 92 $\det A \det B = \det(AB)$. □

Теорема 96. *Якщо квадратна матриця A порядку n є невиродженою, то обернена до неї обчислюється за формулою*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} — алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} в матриці A.

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою перевіркою з урахуванням теорем 90 та 91. $\square$

Означення 89. Нехай A — довільна матриця над деяким полем. Мінором M_k порядку k матриці A називається визначник складений з елементів матриці A, які стоять на перетині довільних k рядків та k стовпчиків, взятих в їх природньому порядку.

Теорема 97. *Ранг матриці A збігається з найвищим порядком відмінних від нуля мінорів матриці A.*

Доведення. Нехай r — найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці A. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що мінор M_r, складений з перших r рядків та перших r стовпців матриці A відмінний від нуля. Доведемо, що перші r рядків матриці A утворюють базис системи векторів-рядків.

Для доведення ЛНЗ перших r рядків матриці A складемо їх ЛК і прирівняємо її до нуля. Множина розв'язків отриманої СЛОР є підмножиною СЛОР, яка утворюється з даної шляхом викреслення усіх рівнянь крім перших r. Але остання за наслідком 18 має лише нульові розв'язки.

Покажемо, що довільний рядок матриці A є ЛК перших r рядків матриці A. Для цього розглянемо матрицю A', яка складається з перших r та деякого іншого рядків матриці A, і покажемо, що її ранг $r(A') = r$. Останнє випливає з того, що перші r стовпців матриці A' є ЛНЗ і довільний мінор $r+1$ порядку рівний нулю (а отже СВ, яка складається з перших r та деякого іншого стовпців матриці A', є ЛЗ). $\square$

З доведення теореми 97 випливає правило знаходження рангу матриці з використанням визначників, так званий метод оточуючих мінорів або метод окантування мінорів:

При обчисленні рангу матриці A слід переходити від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків. Якщо вже знайдено мінор r-го порядку $M_r \neq 0$, то потребують обчислення лише ті мінори $(r+1)$-го порядку матриці A, які містять визначник M_r в якості мінора; якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює r.

Наприклад, знайдемо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & -14 & 0 & -6 & -16 \\ 1 & -2 & -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$ і $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & -14 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -14 & 0 & -6 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ -14 & 0 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$, то $r(A) = 2$.

6.6 Методи обчислення визначників

Загального методу обчислення визначників n-го порядку з параметрами або числовими елементами не існує (крім виразу згідно з означенням визначника). Для обчислення визначників того чи іншого спеціального виду застосовують різні методи, серед яких, наприклад, метод зведення до трикутного виду, метод виділення лінійних множників, метод рекурентних співвідношень і метод зміни елементів визначника. Розглянемо ці методи.

Метод зведення до трикутного виду.

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x) \begin{vmatrix} 1+\frac{x}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x) \begin{vmatrix} 1+\frac{x}{a_1-x}+\dots+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right).$$

Метод виділення лінійних множників.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & z & y \\ y & z & 1 & x \\ z & y & x & 1 \end{vmatrix} = (1+x+y+z)(1+x-y-z)(1-x+y-z)(1-x-y+z)\Delta =$$

$$= (1+x+y+z)(1+x-y-z)(1-x+y-z)(1-x-y+z).$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})D_{n-1} = \dots = \prod_{j>i}(x_j-x_i).$$

При розв'язанні останнього прикладу також застосовувався метод рекурентних співвідношень.

Метод рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & 0 \\ x & a_2 & \dots & x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \dots & x & a_n-x \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 & x \\ 0 & a_2 - x & \dots & 0 & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} - x & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & 0 \\ x & a_2 & \dots & x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \dots & x & a_n - x \end{vmatrix} =
$$

$$
= x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_{n-1} - x) + D_{n-1}(a_n - x) = x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_{n-1} - x) +
$$

$$
+ x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_{n-2} - x)(a_n - x) + D_{n-2}(a_{n-1} - x)(a_n - x) = \dots =
$$

$$
= x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x}\right).
$$

Твердження 9. *Нехай $f(x) = x^2 + px + q$ — характеристичний многочлен однорідного рекурентного співвідношення другого порядку зі сталими коефіцієнтами*

$$
u_n + pu_{n-1} + qu_{n-2} = 0, \tag{6.5}
$$

де $n \geqslant n_0 + 2$ для деякого $n_0 \in \mathbb{Z}$. Тоді мають місце такі твердження:

a) функція $u(n) = \alpha^n$ є розв'язком рівняння (6.5) тоді й лише тоді, коли α є коренем $f(x)$;

b) функція $u(n) = n\alpha^n$ є розв'язком рівняння (6.5) тоді й лише тоді, коли α є подвійним коренем $f(x)$;

c) якщо $f(x)$ має різні корені α та β, то будь-який розв'язок рівняння (6.5) має вигляд

$$
u(n) = C_1\alpha^n + C_2\beta^n,
$$

причому сталі C_1 та C_2 визначаються однозначно;

d) якщо $f(x)$ має подвійний корінь α, то будь-який розв'язок рівняння (6.5) має вигляд

$$
u(n) = C_1\alpha^n + C_2 n\alpha^n,
$$

причому сталі C_1 та C_2 визначаються однозначно.

Твердження 9 легко можна узагальнити на рекурентні співвідношення будь-якого порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$
D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 5 & 3 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 5D_{n-1} - 6D_{n-2}.
$$

Характеристичний многочлен $f(x) = x^2 - 5x + 6$ має корені $\alpha = 3$ та $\beta = 2$. Тоді

$$
D_n = C_1 3^n + C_2 2^n,
$$

де C_1 та C_2 шукаються з умови $\begin{cases} D_1 = 5 = 3C_1 + 2C_2, \\ D_2 = 19 = 9C_1 + 4C_2. \end{cases}$ Таким чином, $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Метод зміни елементів визначника.

Твердження 10. *Якщо до всіх елементів визначника D додати одне й те саме число x, то визначник збільшиться на добуток числа x на суму алгебраїчних доповнень всіх елементів визначника D. Тобто, якщо $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ і $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + x & \dots & a_{1n} + x \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}$, то*

$$
\Delta = D + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij},
$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення визначника D.

Доведення.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x & x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x \end{vmatrix} =$$

$$= D + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

□

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1-x)+x & 0+x & \dots & 0+x \\ 0+x & (a_2-x)+x & \dots & 0+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0+x & 0+x & \dots & (a_n-x)+x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} =$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x) + x\sum_{i=1}^{n} A_{ii} =$$

$$= x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1-x} + \dots + \frac{1}{a_n-x}\right).$$

Розділ 7

Поверхні другого порядку

Нехай в просторі задана ПДСК. Поверхнею другого порядку називається множина S точок $M(x, y, z)$ простору, які задовольняють рівняння виду

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0,$$

де принаймні один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля.

Деякі поверхні другого порядку реалізуються циліндричними та конічними поверхнями, поверхнями обертання; до поверхонь другого порядку належать, зокрема, сфера, еліпсоїд, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди, пара площин тощо. Можна довести, що для кожної поверхні другого порядку існує ПДСК, в якій рівняння цієї поверхні є найпростішим (канонічним).

Для дослідження форми поверхонь (не обов'язково другого порядку) часто використовують метод перерізів, який полягає в наступному. Поверхню S, задану в ПДСК деяким рівнянням $F(x, y, z) = 0$, перетинають площинами, паралельними координатним площинам. По виду ліній перетину поверхні з цими площинами робиться висновок про форму поверхні S. Метод перерізів грунтується на наступному твердженні.

Твердження 11. *Нехай в ПДСК поверхню S задано деяким рівнянням $F(x, y, z) = 0$, а площину π, паралельну Oxy, — рівнянням $z = h$. Якщо поверхня S перетинається площиною π по лінії $\gamma = S \cap \pi$, то проекція лінії γ на площину Oxy має рівняння*

$$F(x, y, h) = 0.$$

7.1 Циліндричні, конічні поверхні та поверхні обертання

Означення 90. Циліндричною поверхнею або циліндром називається поверхня, яка разом з кожною точкою M містить й усю пряму, яка проходить через точку M і паралельна деякому ненульовому фіксованому вектору $\overrightarrow{p}$.

Прямі, які паралельні вектору $\overrightarrow{p}$ і належать циліндричній поверхні, називаються твірними цієї поверхні. Лінія, яка утворюється перетином циліндра з площиною, не паралельною до вектора $\overrightarrow{p}$, називається напрямною.

Якщо на деякій площині π задано лінію γ і вектор $\overrightarrow{p}$ не паралельний до цієї площини, то множина всіх прямих, які проходять через деяку точку лінії γ паралельно вектору $\overrightarrow{p}$, утворюють циліндричну поверхню. Має місце наступне твердження.

Твердження 12. *Нехай в просторі задано ПДСК. Якщо на площині Oxy рівняння $F(x, y) = 0$ визначає лінію γ, то це ж рівняння в просторі визначає циліндричну поверхню з напрямною γ і твірними, паралельними вісі аплікат.*

Якщо рівняння $F(x, y) = 0$ є рівнянням другого степеня відносно x та y (тобто, якщо лінія γ є лінією другого порядку), то циліндрична поверхня з напрямною γ і твірними, паралельними вісі аплікат, є циліндричною поверхнею другого порядку. В залежності від лінії γ циліндри бувають еліптичними, гіперболічними, параболічними тощо.

Означення 91. Конічною поверхнею або конусом з вершиною в точці K називається поверхня, яка з кожною своєю точкою M, відмінною від K, містить пряму KM.

Прямі, які проходять через вершину конуса і лежать на ньому, називаються твірними цього конуса. Лінія, яка утворюється перетином конуса з площиною, що не проходить через вершину конуса, називається напрямною.

Зауважимо, що з означення конуса зовсім не випливає, що він має єдину вершину. Наприклад, площина є конічною поверхнею, кожна точка якої може бути прийнята в якості вершини.

Якщо на деякій площині π задано лінію γ і точку K поза цією площиною, то множина всіх прямих, які проходять через точку K і деяку точку лінії γ, утворюють конічну поверхню.

Теорема 98. *Рівняння*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{7.1}$$

є рівнянням конічної поверхні з вершиною в точці $O(0, 0, 0)$ *і напрямною* γ*, заданою рівняннями* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *та* $z = c$.

Доведення. Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка конічної поверхні, а $N(x_1, y_1, z_1)$ — точка перетину твірної OM з лінією γ. Тоді вектори $\overrightarrow{OM}$ та $\overrightarrow{ON}$ є колінеарними і точка $N(x_1, y_1, z_1)$ задовольняє рівняння лінії γ. □

В останній теоремі у випадку, коли $a = b$, тобто напрямна γ є колом, отримуємо кругову конічну поверхню. Як зазначалося раніше, різні перерізи кругового конуса площиною дають різні лінії другого порядку, як то: еліпс, гіперболу, параболу, пару прямих тощо.

Означення 92. Поверхнею обертання з віссю обертання l називається поверхня, яка з кожною своєю точкою містить коло, отримане обертанням цієї точки навколо прямої l.

Лінія, яка утворюється перетином площини, що проходить через вісь обертання, з поверхнею обертання, називається меридіаном. Лінія, яка утворюється перетином площини, перпендикулярної до осі обертання, з поверхнею обертання, називається паралеллю.

Якщо на деякій площині π задано пряму l та лінію γ, то, вочевидь, поверхня, яка утворюється обертанням лінії γ навколо прямої l, утворює поверхню обертання.

Теорема 99. *Рівняння*

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

є рівнянням поверхні обертання навколо вісі Oz *лінії* γ*, заданою (в площині* Oyz*) рівняннями* $F(y, z) = 0$ *та* $x = 0$.

Доведення. Проведемо через довільну точку $M(x, y, z)$ поверхні обертання площину, перпендикулярну до вісі Oz, і позначимо через $K(0, 0, z_1)$ та $N(0, y_1, z_1)$ точки перетину цієї площини з віссю Oz та лінією γ. Тоді з того, що відрізки $|y_1|$, KM та KN рівні між собою як радіуси і точка $N(0, y_1, z_1)$ задовольняє рівняння лінії γ, випливає справедливість теореми. □

Вочевидь, кругові циліндр та конус є поверхнями обертання. Поверхнями обертання (при певному виборі параметрів) є також деякі з наступних поверхонь другого порядку.

7.2 Сфера та еліпсоїд

Означення 93. Сферою називається множина всіх точок простору, рівновіддалених від заданої точки, яка називається центром сфери. Відрізок, що сполучає центр сфери з її довільною точкою, називається радіусом сфери.

Якщо $K(x_0, y_0, z_0)$ — центр сфери з радіусом R, то рівняння сфери має вигляд

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

або після розкриття дужок

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0,$$

де $A = -2x_0$, $B = -2y_0$, $C = -2z_0$, $D = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$. Проте не кожне рівняння останнього вигляду визначає сферу.

Означення 94. Еліпсоїдом називається поверхня другого порядку, яка в деякій ПДСК визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

яке називається канонічним рівнянням еліпсоїда. Величини a, b, c називаються півосями еліпсоїда.

Методом перерізів встановлюється форма еліпсоїда: a) $z = h$, b) $y = h$, c) $x = h$ — $\varnothing$, точка, еліпс, точка, $\varnothing$.

Якщо будь-які дві півосі еліпсоїда рівні між собою, то еліпсоїд перетворюється на еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою, — у сферу.

7.3 Гіперболоїди

Означення 95. Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня другого порядку, яка в деякій ПДСК визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{7.2}$$

яке називається канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда. Величини a та b називаються дійсними, а c — уявною півосями однопорожнинного гіперболоїда.

Методом перерізів встановлюється форма однопорожнинного гіперболоїда: a) $z = h$ — еліпс, b) $y = h$, c) $x = h$ — спряжена гіпербола, пара прямих, гіпербола, пара прямих, спряжена гіпербола.

Якщо дійсні півосі однопорожнинного гіперболоїда рівні між собою, то гіперболоїд перетворюється на однопорожнинний гіперболоїд обертання.

Означення 96. Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня другого порядку, яка в деякій ПДСК визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{7.3}$$

яке називається канонічним рівнянням двопорожнинного гіперболоїда. Величини a та b називаються уявними, а c — дійсною півосями двопорожнинного гіперболоїда.

Методом перерізів встановлюється форма двопорожнинного гіперболоїда: a) $z = h$ — еліпс, точка, $\varnothing$, точка, еліпс, b) $y = h$, c) $x = h$ — спряжена гіпербола.

Якщо уявні півосі двопорожнинного гіперболоїда рівні між собою, то гіперболоїд перетворюється на двопорожнинний гіперболоїд обертання.

Перетин одно- та двопорожнинного гіперболоїдів (7.2) та (7.3) будь-якою площиною, що проходить через вісь Oz, являє собою дві спряжені гіперболи. Тому відповідно й самі гіперболоїди називаються спряженими.

Теорема 100. *Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка на гіперболоїді* (7.2) *або* (7.3). *Тоді, при необмеженому зростанні аплікати z, точка M необмеженно наближається до конуса* (7.1).

Доведення. Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка на гіперболоїді, а $N(x, y, z_0)$ — точка на конусі (7.1) з тією ж проекцією на площину $z = 0$, що й точка M. Тоді відрізок $MN = |z - z_0|$. З різниці рівнянь гіперболоїда та конуса $\left|\frac{z^2}{c^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right| = 1$ випливає, що $MN = |z - z_0| = \frac{c^2}{|z + z_0|}$, а тому $\lim\limits_{z\to\infty} MN = 0$. $\square$

7.4 Параболоїди

Означення 97. Еліптичним параболоїдом називається поверхня другого порядку, яка в деякій ПДСК визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

яке називається канонічним рівнянням еліптичного параболоїда.

Методом перерізів встановлюється форма еліптичного параболоїда: a) $z = h$ — $\varnothing$, точка, еліпс, b) $y = h$, c) $x = h$ — парабола.

Якщо в рівнянні еліптичного параболоїда $a = b$, то параболоїд перетворюється на параболоїд обертання.

Означення 98. Гіперболічним параболоїдом називається поверхня другого порядку, яка в деякій ПДСК визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \tag{7.4}$$

яке називається канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда.

Методом перерізів встановлюється форма гіперболічного параболоїда: a) $z = h$ — спряжена гіпербола, пара прямих, гіпербола, b) $y = h$, c) $x = h$ — парабола.

7.5 Лінійчасті поверхні

Означення 99. Прямолінійною твірною поверхні називається будь-яка пряма, яка лежить на поверхні. Поверхні, які мають прямолінійні твірні, називаються лінійчастими.

З означень циліндра та конуса випливає, що їх твірні є прямолінійними твірними.

Теорема 101. *Еліпсоїд, двопорожнинний гіперболоїд та еліптичний параболоїд не мають прямолінійних твірних.*

Доведення. Для еліпсоїда твердження теореми випливає з його обмеженості.

Перетин двопорожнинного гіперболоїда площинами $z = h$ не містить прямих, тому він не має прямолінійних твірних, які паралельні площині Oxy або лежать на ній. Проте будь-яка пряма, яка не паралельна площині Oxy і не лежать на ній, має з площиною Oxy спільну точку, а тому не може лежати на поверхні.

Випадок еліптичного параболоїда доводиться аналогічно. □

Теорема 102. *Однопорожнинний гіперболоїд та гіперболічний параболоїд мають прямолінійні твірні.*

Доведення. Рівняння (7.2) однопорожнинного гіперболоїда можна подати у вигляді

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

звідки отримуємо дві родини прямолінійних твірних, які належать до поверхні:

$$\begin{cases} k\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=l\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ l\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=k\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} k\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=l\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ l\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=k\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \end{cases}$$

де k та l — будь-які не одночасно рівні нулю дійсні числа. Оскільки ранг кожної з останніх двох систем дорівнює двом, то ці системи дійсно визначають прямі в просторі.

Аналогічно, рівняння (7.4) гіперболічного параболоїда можна подати у вигляді

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z,$$

звідки отримуємо дві родини прямолінійних твірних, які належать до поверхні:

$$\begin{cases} k\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=lz, \\ l\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=2k, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} k\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=2l, \\ l\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=kz, \end{cases}$$

де k та l — будь-які не одночасно рівні нулю дійсні числа. Оскільки ранг кожної з останніх двох систем дорівнює двом, то ці системи дійсно визначають прямі в просторі. □

Прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда та гіперболічного параболоїда мають такі властивості.

1°. Будь-які дві прямолінійні твірні з однієї родини є мимобіжними.

2°. Будь-які дві прямолінійні твірні з різних родин лежать в одній площині.

3°. Через кожну точку поверхні проходить дві й лише дві прямолінійні твірні, які належать до різних родин твірних.

4°. Всі прямолінійні твірні однієї родини гіперболічного параболоїда паралельні одній і тій же площині.

Розділ 8

Білінійні функції та евклідові простори

8.1 Лінійні функції

Означення 100. Нехай (L, P) — деякий векторний простір. Кожне відображення $f\colon L \to P$ називається функцією векторного аргументу, заданою на просторі L.

Функція $f\colon L \to P$ векторного аргументу називається лінійною функцією, або лінійним функціоналом, якщо вона задовольняє умови:

1) $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ для будь-яких $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$;

2) $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$ для будь-яких $\boldsymbol{x} \in L$ і $\lambda \in P$.

Ядром лінійної функції $f\colon L \to P$ називається множина $\ker f = \{\boldsymbol{x} \in L \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$.

Прикладами лінійних функцій, визначеними на векторному просторі $\mathbb{R}[a, b]$ всіх неперервних на відрізку $[a, b]$ дійсних функцій, є відображення $f \mapsto \int\limits_a^b k(x)f(x)\,dx$ та $f \mapsto f(x_0)$, де $k(x)$ — деяка неперервна функція, визначена на $[a, b]$, а $x_0 \in [a, b]$. Ці два відображення будуть лінійними функціями також, якщо замінити простір $\mathbb{R}[a, b]$ на простір $\mathbb{R}_n[x]$ всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує число $n \in \mathbb{N}_0$.

Прикладом лінійної функції, визначеної на просторі $(\mathbb{M}_n(P), P)$ квадратних матриць, є так званий слід матриці. Слідом $\operatorname{tr} A$ квадратної матриці A називається сума її діагональних елементів. Мають місце наступні властивості сліду матриці.

1°. $\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$.
2°. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.
3°. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$.
4°. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

В алгебрі вивчаються функції, задані на скінченновимірних просторах. Нехай надалі (L, P) — векторний простір, $\dim_P L = n$ і СВ $E = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n), B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) \in \mathcal{B}(L)$.

Теорема 103. *Значення $f(x)$ будь-якої лінійної функції $f\colon L \to P$ на векторі $\boldsymbol{x} \in L$, для якого $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{e}} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, виражається формулою*

$$f(x) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, \tag{8.1}$$

де $\lambda_i = f(\boldsymbol{e}_i)$, $i = \overline{1, n}$.

І навпаки, для довільних $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P$ формула (8.1) *однозначно визначає лінійну функцію $f\colon L \to P$, для якої $\lambda_i = f(\boldsymbol{e}_i)$, $i = \overline{1, n}$.*

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою перевіркою. Однозначність функції f випливає з однозначності розкладу вектора за базисом. □

Позначимо через $[f]_e = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ так званий координатний рядок лінійної функції $f\colon L \to P$ в базисі E. Тоді формулу (8.1) можна записати у вигляді

$$f(x) = [f]_e [x]_e.$$

Теорема 104. *Якщо $S_{e\to b}$ — матриця переходу від базису E до базису B векторного простору (L, P), то*

$$[f]_b = [f]_e \ S_{e\to b}.$$

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою перевіркою. □

На множині L^* всіх лінійних функцій, визначених на просторі L, можна природним чином ввести операції додавання та множення на скаляр.

Теорема 105. *Множина L^* всіх лінійних функцій, заданих на просторі (L, P), є векторним простором над полем P.*

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою перевіркою. □

Означення 101. Векторний простір (L^*, P) всіх лінійних функцій, визначених на просторі (L, P), називається простором, спряженим з L.

Якщо простори L та L^* розглядаються одночасно, то вектори з L називаються контраваріантними і позначаються з літерами з нижніми індексами: $x_1, \ldots, x_s$, $y_1, \ldots, y_m$; а вектори з простору L^* — коваріантними і позначаються літерами з верхніми індексами: $f^1, \ldots, f^t$, $g^1, \ldots, g^n$.

Теорема 106. *Якщо* $\dim L = n$, *то* $\dim L^* = n$, *а отже простори L та L^* ізоморфні.*

Доведення. Розглянемо в просторі L^* лінійні функції $f^1, \ldots, f^n$, визначені співвідношенням $f^i(e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, де $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{якщо} \quad i = j, \end{cases}$ — дельта-функція Кронекера.

З співвідношення $\alpha_1 f^1 + \ldots + \alpha_n f^n = \theta$, де θ — нульова функція, випливає, що для будь-якого $x \in L$ має місце рівність $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f^i\right)(x) = \theta(x)$. Зокрема, при $x = e_1, \ldots, e_n$ отримаємо, що $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, тобто функції $f^1, \ldots, f^n$ — ЛНЗ.

Якщо $f\colon L \to P$ — довільна лінійна функція і $[f]_e = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то для будь-якого вектора $x \in L$ з координатним стовпчиком $[x]_e = (x_1, \ldots, x_n)^T$ з співвідношення $f^i(x) = x_i$ та формули (8.1) випливає, що $f = \lambda_1 f^1 + \ldots + \lambda_n f^n$. □

Базис $f^1, \ldots, f^n$ простору L^*, побудований в доведенні теореми 106, називається базисом, спряженим або дуальним до базису $e_1, \ldots, e_n$ простору L.

Зауважимо, що між скінченновимірним простором L та двічі спряженим до нього простором $L^{**} = (L^*)^*$ (на відміну від пари L та L^*) існує так званий природний ізоморфізм, який не залежить від вибору базису в L. Він визначається таким чином: кожному вектору $x \in L$ ставиться у відповідність функція $\varphi_x \in L^{**}$ така, що $\varphi_x\colon L^* \to P$ і $\varphi_x\colon f \mapsto f(x)$.

Задачі 11.6 (теор) + 11.18 (практ) [Без, Ган] — важливо!!!

Означення 102. Функція $f\colon L \to \mathbb{C}$, яка визначена на комплексному векторному просторі $(L, \mathbb{C})$, називається напівлінійною функцією, якщо вона задовольняє умови:

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для будь-яких $x, y \in L$;

2) $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$ для будь-яких $x \in L$ і $\lambda \in \mathbb{C}$, де $\overline{\lambda}$ — комплексно спряжене до λ.

8.2 Білінійні функції

> **Означення 103.** Нехай (L, P) — деякий векторний простір. Кожне відображення $A\colon L \times L \to P$ називається функцією двох векторних аргументів, заданою на просторі L.
>
> Функція $A\colon L \times L \to P$ двох векторних аргументів називається білінійною функцією, або білінійним функціоналом, якщо при кожному фіксованому значенні одного аргумента вона є лінійною функцією від іншого:
>
> 1) $A(x + y, z) = A(x, z) + A(y, z)$, $A(\lambda x, y) = \lambda A(x, y)$ — лінійність по першому аргументу,
>
> 2) $A(x, y + z) = A(x, y) + A(x, z)$, $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$ — лінійність по другому аргументу.

Прикладами білінійних функцій, визначеними на векторному просторі $\mathbb{R}[a, b]$ всіх неперервних на відрізку $[a, b]$ дійсних функцій, є відображення $(f, g) \mapsto \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ та $(f, g) \mapsto \int\limits_a^b \int\limits_a^b k(x, y)f(x)g(y)\,dx\,dy$, де $k(x, y)$ — деяка неперервна функція, визначена на квадраті $[a, b] \times [a, b]$. Ці два відображення будуть лінійними функціями також, якщо замінити простір $\mathbb{R}[a, b]$ на простір $\mathbb{R}_n[x]$ всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує число $n \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 107. *Значення $A(x, y)$ будь-якої білінійної функції $A\colon L \times L \to P$ на векторах $x, y \in L$ виражається формулою*

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = [x]_e^T A_e [y]_e, \tag{8.2}$$

де $a_{ij} = A(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, $A_e = (a_{ij})$ — так звана матриця білінійної функції $A(x, y)$ в базисі E, $[x]_e = (x_1, \ldots, x_n)^T$ та $[y]_e = (y_1, \ldots, y_n)^T$ — координатні стовпчики векторів x та y відповідно в базисі $e_1, \ldots, e_n$.

І навпаки, для довільних $a_{ij} \in P$, $i, j = \overline{1, n}$, формула (8.2) однозначно визначає білінійну функцію $A\colon L \times L \to P$, для якої $a_{ij} = A(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою перевіркою. Однозначність функції f випливає з однозначності розкладу вектора за базисом. □

Теорема 108. *Якщо $S_{e \to b}$ — матриця переходу від базису E до базису B векторного простору (L, P), то*

$$A_b = S_{e \to b}^T A_e S_{e \to b}.$$

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою перевіркою. □

Теорема 109. *Ранг матриці білінійної форми не змінюється при переході до нового базису.*

Доведення. Доведення випливає з теореми 58 про ранг добутку матриць. □

Остання теорема дає можливість сформулювати наступне означення.

> **Означення 104.** Рангом білінійної функції $A\colon L \times L \to P$ називається ранг матриці цієї функції в довільно вибраному базисі простору (L, P).
>
> Білінійна функція називається невиродженою, якщо її ранг дорівнює розмірності простору, і виродженою — в протилежному випадку.

8.3 Симетричні білінійні функції

Означення 105. Білінійна функція $A\colon L \times L \to P$ називається симетричною, якщо $A(x, y) = A(y, x)$, і кососиметричною, якщо $A(x, y) = -A(y, x)$, де $x, y \in L$.

Зрозуміло, що матриця симетричної білінійної функції є симетричною, тобто $A_e^T = A_e$, і кососиметричної — кососиметричною, тобто $A_e^T = -A_e$.

Теорема 110. *Кожна білінійна функція $A\colon L \times L \to P$ єдиним чином зображується у вигляді суми симетричної та кососиметричної функцій.*

Доведення. *Існування.* $A_s(x, y) = \dfrac{1}{2}(A(x, y) + A(y, x))$, $A_k(x, y) = \dfrac{1}{2}(A(x, y) - A(y, x))$.

Єдиність. Якщо $A(x, y) = A'_s(x, y) + A'_k(x, y)$, то $\begin{cases} A'_s(x, y) = A_s(x, y), \\ A'_k(x, y) = A_k(x, y). \end{cases}$ □

Однією з важливих задач теорії білінійних функцій є відшукання базису, в якому матриця білінійної функції має найпростіший вигляд. Розглянемо цю задачу для симетричних білінійних функцій $A\colon L \times L \to P$. Це зумовлюється тим, що звичайний скалярний добуток векторів є симетричною білінійною функцією.

Означення 106. Нехай (L, P) — векторний простір і $A\colon L \times L \to P$ — деяка симетрична білінійна функція на ньому. Вектори $x, y \in L$ називаються ортогональними відносно симетричної білінійної функції A, або A-ортогональними, якщо $A(x, y) = 0$.

A-ортогональним доповненням до підпростору U називається множина

$$U^{\perp} = \{y \in L \mid \forall x \in U \quad A(x, y) = 0\}.$$

A-ортогональне доповнення $L^{\perp}$ до всього простору L називається ядром функції A і позначається $\ker A$.

Підпростір U називається невиродженим відносно функції A, якщо її обмеження $A|_U\colon U \times U \to P$ на U є невиродженим.

Базис $e_1, \ldots, e_n$ простору L називається A-ортогональним, якщо будь-які два його вектори є A-ортогональними.

Теорема 111. *Нехай (L, P) — векторний простір, U — його підпростір, а $A\colon L \times L \to P$ — деяка симетрична білінійна функція на ньому. Тоді:*
1) A-ортогональне доповнення $U^{\perp}$ є підпростором векторного простору L;
2) розмірність доповнення $\dim U^{\perp} \geqslant \dim L - \dim U$;
3) розмірність ядра $\dim(\ker A) = \dim L - r(A)$, де $r(A)$ — ранг функції A;
4) функція A є невиродженою тоді й лише тоді, коли $\ker A = \{0\}$;
5) якщо функція A є невиродженою, то $\dim U^{\perp} = \dim L - \dim U$;
6) якщо функція A є невиродженою, то $(U^{\perp})^{\perp} = U$.
7) ядро обмеження функції A на підпростір U $\ker A|_U = U \cap U^{\perp}$.

Доведення. Твердження 1) теореми доводиться за критерієм підпростору (теорема 33).

2) Нехай $e_1, \ldots, e_n$ — базис L, і, не порушуючи загальності, $e_1, \ldots, e_k$ — базис U. Тоді $U^{\perp} = \{y \in L \mid A(e_i, y) = 0,\ i = \overline{1, k}\}$. Таким чином, отримуємо СЛОР з матрицею B, яка складається з перших k рядків матриці A_e. ФСР цієї СЛОР й утворює базис $U^{\perp}$.

3) Матриця СЛОР $B = A_e$.

Твердження 4) випливає з твердження 3).

5) Оскільки A є невиродженою, то $r(B) = k$.

6) Оскільки $\dim(U^{\perp})^{\perp} = \dim U$ і $(U^{\perp})^{\perp} \supset U$, то $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

Твердження 7) доводиться безпосередньою перевіркою. □

Теорема 112. *Простір $L = U \oplus U^{\perp}$ тоді й лише тоді, коли підпростір U є невиродженим.*

Доведення. *Необхідність* випливає з твердження 7) теореми 111.

Достатність випливає з теореми 53 та з тверджень 2) та 7) теореми 111. □

Вочевидь, що в A-ортогональному базисі матриця функції A є діагональною, а сама функція зображується у вигляді так званої канонічної форми $A(x, y) = a_1 x_1 y_1 + \ldots + a_n x_n y_n$, що розв'язує зазначену вище задачу.

Теорема 113. *Для довільної симетричної білінійної функції $A\colon L \times L \to P$ існує A-ортогональний базис.*

Доведення. Теорема доводиться ММІ за $\dim L$. База індукції і випадок $A \equiv 0$ очевидні.

Нехай $\dim L \geqslant 2$ і $A \not\equiv 0$. Тоді існує $e_1 \in L$ такий, що $A(e_1, e_1) \neq 0$. За теоремою 112 простір $L = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^{\perp}$. За припущенням індукції існує A-ортогональний базис $e_2, \ldots, e_n$ простору $\langle e_1 \rangle^{\perp}$. Тоді $e_1, \ldots, e_n$ — A-ортогональний базис L. □

8.4 Квадратичні функції

Означення 107. Квадратичною функцією або квадратичною формою, асоційованою з симетричною білінійною функцією $A\colon L \times L \to P$, називається функція $Q\colon L \to P$ така, що $Q(x) = A(x, x)$.

Зрозуміло, що симетрична білінійна функція A може бути однозначно відтворена з відповідної квадратичної функції Q за формулою

$$A(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)).$$

Білінійна функція A при цьому називається поляризацією квадратичної функції Q.

Таким чином, існує взаємно однозначна відповідність між симетричними білінійними та квадратичними функціями. З огляду на це, всі поняття, як то матриця, ранг, невиродженість тощо, які відносяться до симетричних білінійних функцій, переносяться на квадратичні функції. А тому вибір подальшого розгляду теорії між симетричними білінійними та квадратичними функціями залежить від міркувань зручності і проводиться без спеціальних застережень. Надалі симетричну білінійну й асоційовану з нею квадратичну функції будемо позначати однією літерою, що не буде призводити до непорозумінь.

Наведемо індуктивний алгоритм Лагранжа побудови канонічної форми (за теоремою 113 така існує) квадратичної функції $A\colon L \to P$ і A-ортогонального базису $e_1, \ldots, e_n$ простору L, якщо відомий деякий його базис $f_1, \ldots, f_n$.

1. Нехай $b_{k+1}, \ldots, b_n$ — вектори, які доповнюють (можливо порожню) множину A-ортогональних векторів $e_1, \ldots, e_k$ до базису всього простору. Якщо множина A-ортогональних векторів порожня, то, вочевидь, $b_i = f_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$.

   Позначимо через $T_{f \to b}$ матрицю переходу від заданого базису $f_1, \ldots, f_n$ до поточного базису $e_1, \ldots, e_k$, $b_{k+1}, \ldots, b_n$.

   Тоді функція A в поточному базисі зображується у вигляді

   $$A(x) = [x]_b^T A_b [x]_b = a_{11} x_1^2 + \ldots + a_{kk} x_k^2 + Q(x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

   де $A_b = (a_{ij})$ — матриця форми A, а $[x]_b = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — координатний стовпчик вектора $x \in L$ в поточному базисі; $Q = A|_U$ — обмеження функції A на підпростір U, який породжується векторами $b_{k+1}, \ldots, b_n$. При цьому будемо вважати, що $A(x)$ залежить від змінних $x_1, \ldots, x_n$.

Нагадаємо, що заміна змінних $\begin{cases} x_1 = t_{11}\,y_1 + \ldots + t_{1n}\,y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = t_{n1}\,y_1 + \ldots + t_{nn}\,y_n, \end{cases}$ рівносильна переходу від поточного до нового базису з матрицею переходу $T_{b\to e} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$, і матриця переходу від заданого до нового базису $T_{f\to e} = T_{f\to b}T_{b\to e}$.

2. Якщо $Q \equiv 0$, то покласти $e_{k+1} = b_{k+1}$, а решту векторів базису залишити без змін. Тоді, вочевидь, $T_{b\to e} = E$ і $T_{f\to e} = T_{f\to b}$. Перейти до пункту 6.

3. Якщо $a_{ii} = 0$ для кожного $i = \overline{k+1, n}$, але $a_{ij} \neq 0$ при деяких $i < j$, де $i, j = \overline{k+1, n}$, то ввести нові змінні $x_i = y_i + y_j$, $x_j = y_i - y_j$ і $x_l = y_l$ для всіх $l \neq i, j$. Перетворення змінних є невиродженим, оскільки $\det T_{b\to e} = -2$. Перейти до пункту 6.

4. Якщо $a_{ii} = 0$ для кожного $i = \overline{k+1, l-1}$, але $a_{ll} \neq 0$ для деякого $l = \overline{k+2, n}$, то перейти до нового базису, в якому вектори b_{k+1} та b_l міняються місцями, а всі решта векторів базису залишаються без змін. Це рівносильно заміні змінних $x_{k+1} = y_l$, $x_l = y_{k+1}$ і $x_i = y_i$ для всіх $i \neq k+1, l$. Вочевидь, $\det T_{b\to e} = -1$. Перейти до пункту 6.

5. Якщо $a_{k+1,k+1} \neq 0$, то покласти $e_{k+1} = b_{k+1}$, а вектори $b_{k+2}, \ldots, b_n$ замінити відповідно векторами $-\dfrac{a_{k+1,i}}{a_{k+1,k+1}} b_{k+1} + b_i$, де $i = \overline{k+2, n}$. При цьому в формі Q виокремлюються доданки, які містять змінну x_{k+1}, і на їх основі виділяється повний квадрат з наступною заміною змінних: $x_{k+1} = y_{k+1} - \dfrac{a_{k+1,k+2}}{a_{k+1,k+1}} y_{k+2} - \ldots - \dfrac{a_{k+1,n}}{a_{k+1,k+1}} y_n$, $x_i = y_i$ для всіх $i \neq k+1$. Вочевидь, $\det T_{b\to e} = 1$.

6. Якщо $k + 1 = n$, то кінець алгоритму, інакше новий базис вважати поточним і перейти до пункту 1.

Приклад 28. Зведемо до канонічного вигляду квадратичну форму $Q = 2\,x_2x_3 + 2\,x_3x_4$.

$$Q = 2\,x_2x_3 + 2\,x_3x_4 = \left| \begin{cases} x_1 = y_4, \\ x_2 = y_1, \\ x_3 = y_2, \\ x_4 = y_3, \end{cases} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 2\,y_1y_2 + 2\,y_2y_3 =$$

$$= \left| \begin{cases} y_1 = z_1 + z_2, \\ y_2 = z_1 - z_2, \\ y_3 = z_3, \\ y_4 = z_4, \end{cases} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2\,z_1^2 - 2\,z_2^2 + 2\,z_1z_3 - 2\,z_2z_3 =$$

$$= 2\,(z_1 + \frac{1}{2}z_3)^2 - 2\,z_2^2 - \frac{1}{2}z_3^2 - 2\,z_2z_3 = \left| \begin{cases} z_1 = t_1 - \frac{1}{2}t_3, \\ z_2 = t_2, \\ z_3 = t_3, \\ z_4 = t_4, \end{cases} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= 2\,t_1^2 - 2\,t_2^2 - \frac{1}{2}t_3^2 - 2\,t_2t_3 = 2\,t_1^2 - 2\,(t_2 + \frac{1}{2}t_3)^2 =$$

$$= \left| \begin{cases} t_1 = u_1, \\ t_2 = u_2 - \frac{1}{2}u_3, \\ t_3 = u_3, \\ t_4 = u_4, \end{cases} \quad T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2\,u_1^2 - 2\,u_2^2 + 0\,u_3^2 + 0\,u_4^2 = 2\,u_1^2 - 2\,u_2^2.$$

Матриця квадратичної форми Q в початковому базисі $Q_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Матриця переходу від початкового до кінцевого базису $S = T_1T_2T_3T_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді матриця квадратичної форми Q в кінцевому базисі $Q_e = S^T Q_f S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

Приклад 29. $Q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ □

Перевагою методу Лагранжа є те, що його можна застосовувати для побудови базису, A-ортогонального відносно будь-якої квадратичної форми. Його недоліком є те, що він не дає змоги одразу виразити шуканий базис через заданий (тобто одразу вказати матрицю переходу). При певних обмеженнях на матрицю симетричної білінійної функції цей недолік виправляє метод Якобі.

Теорема 114. *Нехай $A\colon L \to P$ — квадратична функція, а A_f — її матриця в деякому базисі $f_1, \ldots, f_n$. Якщо всі головні мінори матриці $A_f = (a_{ij})$ відмінні від нуля, тобто*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

при $k = \overline{1, n}$, то існує A-ортогональний базис $e_1, \ldots, e_n$ простору L такий, що $A(e_k) = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ при $k = \overline{1, n}$, $\Delta_0 = 1$.

Доведення. Позначимо через V_k, $k = \overline{1, n}$, підпростір, породжений векторами $f_1, \ldots, f_k$. Теорема доводиться індукцією по n. При $n = 1$ покладемо $e_1 = f_1$. Тоді $A(e_1) = \Delta_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_0}$.

При $n \geqslant 2$ застосуємо припущення індукції до базису $f_1, \ldots, f_{n-1}$ простору V_{n-1}. Нехай $e_1, \ldots, e_{n-1}$ — ортогональний базис простору V_{n-1}, який задовольняє умовам теореми. Будемо шукати вектор e_n у вигляді

$$e_n = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{n-1} f_{n-1} + f_n \in f_n + V_{n-1}.$$

Тоді умова ортогональності $A(f_k, e_n) = 0$ для кожного $k = \overline{1, n-1}$ запишеться у вигляді СЛР $(n-1) \times (n-1)$, визначник якої $\Delta_{n-1} \neq 0$. За теоремою Крамера 94 числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ визначаються однозначно. Оскільки $e_n \notin V_{n-1}$, то $e_1, \ldots, e_n$ — базис простору $V_n = L$.

Залишається довести, що $A(e_n) = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$. Оскільки матриця переходу $T_{f\to e}$ є верхнею унітрикутною, то її визначник $\det T_{f\to e} = 1$, і за теоремою 108 $\det A_e = \det A_f = \Delta_n$. Оскільки матриця A_e діагональна, то $\Delta_n = A(e_1) \ldots A(e_{n-1}) A(e_n)$. За припущення індукції $\Delta_{n-1} = A(e_1) \ldots A(e_{n-1})$, що й завершує доведення теореми. □

Приклад 30. Зведемо до канонічного вигляду квадратичну форму

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2\,x_2^2 + 5\,x_3^2 + 2\,x_1x_2 + 4\,x_2x_3.$$

Тоді в заданому базисі f_1, f_2, f_3 її матриця $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Головні мінори матриці $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1 \neq 0$, тому квадратична форма зводиться до вигляду

$$Q(y_1, y_2, y_3) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}\, y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\, y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2}\, y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

За методом Якобі Q-ортогональний базис e_1, e_2, e_3 шукається у вигляді

$$e_1 = f_1, \quad e_2 = \lambda_1 f_1 + f_2, \quad e_3 = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + f_3.$$

Маємо, що $0 = A(f_1, e_2) = A(f_1, f_1)\lambda_1 + A(f_1, f_2) = a_{11}\lambda_1 + a_{12}$, тобто $\lambda_1 = -1$. Аналогічно

$$0 = A(f_1, e_3) = A(f_1, f_1)\mu_1 + A(f_1, f_2)\mu_2 + A(f_1, f_3) = a_{11}\mu_1 + a_{12}\mu_2 + a_{13},$$

$$0 = A(f_2, e_3) = A(f_2, f_1)\mu_1 + A(f_2, f_2)\mu_2 + A(f_2, f_3) = a_{21}\mu_1 + a_{22}\mu_2 + a_{23},$$

звідки отримуємо СЛР $\begin{cases} \mu_1 + \ \mu_2 = 0, \\ \mu_1 + 2\,\mu_2 = -2, \end{cases}$ розв'язки якої $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = -2$. Таким чином,

$$e_1 = f_1, \quad e_2 = -f_1 + f_2, \quad e_3 = 2f_1 - 2f_2 + f_3, \quad T_{f \to e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_1 = y_1 - y_2 + 2\,y_3, \quad x_2 = y_2 - 2\,y_3, \quad x_3 = y_3.$$

□

Приклад 31. $Q = x_1^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 = y_1^2 - \dfrac{1}{4}\,y_2^2 + 2y_3^2$ □

8.5 Дійсні квадратичні форми

Нехай $e_1, \ldots, e_n$ — A-ортогональний базис простору (L, P). Тоді за рахунок нормування векторів базису коефіцієнти $a_i = A(e_i)$, $i = \overline{1, n}$, в канонічній формі

$$A(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$$

можна множити на квадрати ненульових елементів поля P. Крім того, переставляючи базисні вектори, можна переставляти й ці числа. Таким чином, в залежності від поля P канонічну форму можна привести до так званої нормальної форми, яка над полем $\mathbb{C}$ має вигляд

$$A(x) = x_1^2 + \ldots + x_r^2,$$

де r — ранг форми A (а отже, є інваріантом), а над полем $\mathbb{R}$ — вигляд

$$A(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2, \tag{8.3}$$

де $p + q = r$ — ранг форми A. Для відповіді на питання, чи є по окремості числа p та q інваріантами дійсної форми A, введемо наступне поняття.

> **Означення 108.** Дійсна квадратична функція A називається додатньо визначеною, якщо $A(x) > 0$ при $x \neq 0$.
>
> Дійсна симетрична білінійна функція називається додатньо визначеною, якщо відповідна їй квадратична функція є додатньо визначеною.

Аналогічно визначаються від'ємно визначені квадратичні та симетричні білінійні функції. Прикладом додатньо визначеної симетричної білінійної функції є скалярний добуток геометричних векторів. Вочевидь, нормальний вигляд додатньо визначеної квадратичної функції A є $A(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Теорема 115. *Число p в нормальній формі* (8.3) *довільної дійсної квадратичної функції A є максимальна розмірність підпростору, на якому функція A додатньо визначена.*

Доведення. Вочевидь, функція A додатньо визначена на p-вимірному підпросторі, породженому векторами $e_1, \ldots, e_p$. Якщо U — довільний підпростір, на якому функція A додатньо визначена, а V — підпростір, який породжується векторами $e_{p+1}, \ldots, e_n$, то $U \cap V = 0$, звідки $\dim U \leqslant p$. □

Аналогічно доводиться наступна теорема.

Теорема 116. *Число q в нормальній формі* (8.3) *довільної дійсної квадратичної функції A є максимальна розмірність підпростору, на якому функція A від'ємно визначена.*

Наслідок 19 (Закон інерції). *Числа p та q в нормальній формі* (8.3) *довільної дійсної квадратичної функції A не залежать від вибору базису, в якому функція A має нормальний вигляд.*

Числа p та q називаються відповідно додатнім та від'ємним індексами інерції квадратичної форми A. Пара (p, q) називається сігнатурою функції A. Теорема 114 дозволяє при вказаних в ній обмеженнях визначити індекси інерції дійсної квадратичної функції A.

Теорема 117. *Якщо всі кутові мінори Δ_k, $k = \overline{1, n}$, матриці A_f дійсної квадратичної функції A відмінні від нуля, то від'ємний індекс інерції q функції A дорівнює числу змін знака в послідовності $1, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$.*

Доведення. Твердження безпосередньо випливає з теореми 114. □

Наслідок 20 (Критерій Сильвестра). *Дійсна квадратична функція A є додатньо визначеною тоді й лише тоді, коли всі кутові мінори Δ_k, $k = \overline{1, n}$, матриці A_f додатні.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо квадратична функція A є додатньо визначеною, то її обмеження на підпростір V_k (в позначеннях теореми 114) також є додатньо визначеною, а отже невиродженою функцією. Звідси випливає, що кутові мінори Δ_k, $k = \overline{1, n}$, матриці A_f відмінні від нуля, а за теоремою 117 вони додатні.

Достатність. Достатність випливає з теорем 114 та 117. □

8.6 Евклідові простори

Означення 109. Евклідовим векторним простором $\mathbb{E}$ називається векторний простір $(L, \mathbb{R})$ з фіксованою додатньо визначеною симетричною білінійною функцією $A\colon L \times L \to \mathbb{R}$. При цьому функція A називається скалярним добутком, а її значення $A(x, y)$ від векторів x та y позначається через (x, y).

Матриця

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_k) \end{pmatrix}$$

називається матрицею Грама системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$, а її визначник $\det G(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — визначником Грама.

Теорема 118. *Для довільної системи векторів $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{E}$ визначник Грама*

$$\det G(a_1, \ldots, a_k) \geqslant 0,$$

причому рівність має місце тоді й лише тоді, коли система векторів $a_1, \ldots, a_k$ є лінійно залежною.

Доведення. Якщо $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = 0$, то $\lambda_1(a_1, a_j) + \ldots + \lambda_k(a_k, a_j) = 0$ для кожного $j = \overline{1, k}$, а це значить, що ЛК рядків матриці Грама $G(a_1, \ldots, a_k)$ з коефіцієнтами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ рівна нулю. Тому, якщо система векторів $a_1, \ldots, a_k$ є лінійно залежною, то $\det G(a_1, \ldots, a_k) = 0$. Якщо ж система векторів $a_1, \ldots, a_k$ є лінійно незалежною, то твердження теореми випливає з додатньої визначеності скалярного добутку. □

В евклідовому просторі визначаються довжина вектора і кут між векторами таким чином, що у випадку геометричних векторів вони збігаються зі звичайною довжиною та звичайним кутом. А саме, довжина або норма $\|x\|$ вектора x визначається за формулою

$$\|x\| = \sqrt{\det G(x)} = \sqrt{(x, x)}.$$

Для визначення кута необхідно довести наступне твердження.

Теорема 119 (Нерівність Коші–Буняковського). *Для довільних $x, y \in \mathbb{E}$ виконується нерівність*

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$

причому рівність має місце тоді й лише тоді, коли вектори x та y пропорційні.

Доведення. Доведення випливає з теореми 118. □

Тепер кут $\widehat{xy}$ між ненульовими векторами x та y евклідового простору $\mathbb{E}$ визначається як таке число $\varphi = \widehat{xy} \in [0, \pi]$, що

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \ \|y\|}.$$

Зауважимо, що, як це випливає з нерівності Коші–Буняковського, останнє співвідношення завжди й до того ж однозначно визначає кут між векторами. Зокрема, вектори x та y є ортогональними (див. означення 106) тоді й лише тоді, коли $\widehat{xy} = \dfrac{\pi}{2}$.

Теорема 120 (Піфагора). *Для довільних ортогональних векторів $x, y \in \mathbb{E}$ виконується співвідношення*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою. □

Теорема 121 (Нерівність трикутника). *Для довільних векторів $x, y \in \mathbb{E}$ виконується співвідношення*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Доведення. Твердження доводиться безпосередньою перевіркою з використанням нерівності Коші–Буняковського. □

Як це випливає з означення 106, система векторів $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{E}$ називається ортогональною, якщо вектори цієї системи попарно ортогональні, тобто $(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$.

Теорема 122. *Будь-яка ортогональна система ненульових векторів евклідового простору є лінійно незалежною.*

Доведення. Твердження доводиться методом від супротивного за означенням ЛНЗ СВ. □

За теоремою 113 у кожному n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{E}_n$ існує ортогональний базис. Зокрема, як це випливає з доведення теореми 114, наслідку 20 та означення 109, будь-яку лінійно незалежну систему векторів $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{E}_n$, $k \leqslant n$, можна ортогоналізувати. Проте, на відміну від доведення теореми 114, якщо вже побудована ортогональна система векторів $e_1, \ldots, e_{k-1}$, то вектор e_k краще шукати у вигляді

$$e_k = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + f_k,$$

оскільки для знаходження коефіцієнтів, які внаслідок умови ортогональності системи векторів $e_1, \ldots, e_k$ шукаються за формулою $\lambda_i = -\dfrac{(f_k, e_i)}{(e_i, e_i)}$, не потрібно розв'язувати СЛР. Побудова ортогональної системи векторів в такий спосіб називається процесом ортогоналізації Грама–Шмідта.

Означення 110. Базис евклідового простору, в якому скалярний добуток має нормальний вигляд, називається ортонормованим.

Вочевидь, має місце таке твердження.

Твердження 13. *Наступні властивості базису $e_1, \ldots, e_n$ евклідового простору $\mathbb{E}_n$ є еквівалентними:*

1) базис $e_1, \ldots, e_n$ є ортонормованим;

2) скалярний добуток в базисі $e_1, \ldots, e_n$ має вигляд $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$;

3) скалярний квадрат в базисі $e_1, \ldots, e_n$ має вигляд $(x, x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$;

4) матриця скалярного добутку в базисі $e_1, \ldots, e_n$ є одиничною матрицею, тобто матриця Грама $G(e_1, \ldots, e_n) = E$;

5) скалярний добуток $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ при $i, j = \overline{1, n}$;

6) вектори $e_1, \ldots, e_n$ є попарно ортогональними і довжина кожного з них $\|e_i\| = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Згідно з загальною теорією, в довільному скінченновимірному евклідовому просторі існує ортонормований базис, до того ж не єдиний. Якщо $e_1, \ldots, e_n$ — ортономований базис і $f_1, \ldots, f_n$ — деякий інший базис простору $\mathbb{E}_n$, то за теоремою 108 матриця скалярного добутку в базисі $f_1, \ldots, f_n$

$$G(f_1, \ldots, f_n) = S_{e\to f}^T E S_{e\to f} = S_{e\to f}^T S_{e\to f}.$$

Отже, базис $f_1, \ldots, f_n$ є ортонормованим тоді й лише тоді, коли $S_{e\to f}^T S_{e\to f} = E$.

Означення 111. Матриця $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ називається ортогональною, якщо виконується співвідношення $S^T S = E$.

Вочевидь, має місце таке твердження.

Твердження 14. *Наступні властивості матриці $S = (s_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ є еквівалентними:*

1) матриця $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ є ортогональною;

2) $SS^T = E$;

3) $S^{-1} = S^T$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} s_{ki} s_{kj} = \delta_{ij}$ при $i, j = \overline{1, n}$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} s_{ik} s_{jk} = \delta_{ij}$ при $i, j = \overline{1, n}$;

6) матриця $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ є матрицею переходу між ортонормованими базисами.

Зауважимо, що з рівності $S^T S = E$ випливає співвідношення $\det S = \pm 1$, проте не навпаки.

Якщо U деякий підпростір евклідового простору $\mathbb{E}$, то за теоремою 112 $\mathbb{E} = U \oplus U^{\perp}$. Це означає, що кожний вектор $x \in \mathbb{E}$ має єдине зображення у вигляді $x = \operatorname{pr}_U x + \operatorname{ort}_U x$, де вектор $\operatorname{pr}_U x \in U$ називається (ортогональною) проекцією вектора x на підпростір U, а вектор $\operatorname{ort}_U x$ — ортогональною складовою вектора x відносно підпростору U.

Визначимо відстань ρ між векторами x та y евклідового простору $\mathbb{E}$ за формулою $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Тоді відстань між підмножинами $X, Y \subset \mathbb{E}$ визначимо за формулою

$$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \rho(x, y).$$

Теорема 123. *Нехай U — підпростір евклідового простору $\mathbb{E}$. Тоді для довільного $x \in \mathbb{E}$ відстань $\rho(x,U) = \|\operatorname{ort}_U x\|$, при цьому единим найближчим до x вектором підпростору U є проекція $\operatorname{pr}_U x$.*

Доведення. Для довільного $u \in U$ відстань $\rho(x,u) = \|x-u\| = \|\operatorname{ort}_U x + (\operatorname{pr}_U x - u)\| = \sqrt{\|\operatorname{ort}_U x\|^2 + \|\operatorname{pr}_U x - u\|^2} \geqslant \|\operatorname{ort}_U x\| = \rho(x, \operatorname{pr}_U x)$. □

Теорема 124. *Нехай $f_1,\ldots,f_k$ — довільний базис підпростору U евклідового простору $\mathbb{E}$. Тоді для довільного $x \in \mathbb{E}$ відстань $\rho(x,U) = \sqrt{\dfrac{\det G(f_1,\ldots,f_k,x)}{\det G(f_1,\ldots,f_k)}}$.*

Доведення. Якщо $x \in U$, то $\rho(x,U) = 0$ і $\det G(f_1,\ldots,f_k,x) = 0$.

Якщо $x \notin U$, то, застосовуючи теорему 114 до базису $f_1,\ldots,f_k,x$ простору $U \oplus \langle x\rangle$, отримаємо

$$\|\operatorname{ort}_U x\|^2 = (\operatorname{ort}_U x, \operatorname{ort}_U x) = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} = \frac{\det G(f_1,\ldots,f_k,x)}{\det G(f_1,\ldots,f_k)},$$

що й треба було довести. □

Означення 112. Паралелепіпедом, побудованим на векторах $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{E}$, називається множина $P(a_1,\ldots,a_k) = \{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i a_i \mid x_i \in [0,1],\ i = \overline{1,k}\}$.

Основою k-вимірного паралелепіпеда $P(a_1,\ldots,a_k)$ називається $(k-1)$-вимірний паралелепіпед $P(a_1,\ldots,a_{k-1})$, а його висотою — довжина вектора $\operatorname{ort}_U a_k$, де U — підпростір, породжений векторами $a_1,\ldots,a_{k-1}$.

Об'ємом k-вимірного ($k \geqslant 2$) паралелепіпеда називається добуток об'єму його основи на висоту. Об'ємом одновимірного паралелелпіпеда $P(a)$ називається довжина вектора a.

Об'єм паралелепіпеда P позначається через $vol\, P$.

Теорема 125. $vol\, P(a_1,\ldots,a_k) = \sqrt{\det G(a_1,\ldots,a_k)}$.

Доведення. Теорема доводиться ММІ по k з використанням теореми 124. □

Теорема 126. *Нехай вектори $a_1,\ldots,a_n$ виражаються через вектори деякого ортонормованого базису $e_1,\ldots,e_n$ за допомогою матриці A, тобто $(a_1,\ldots,a_n) = (e_1,\ldots,e_n)A$. Тоді*

$$vol\, P(a_1,\ldots,a_n) = |\det A|.$$

Доведення. Доведення випливає з того, що $G(a_1,\ldots,a_n) = A^T E A = A^T A$. □

Означення 113. Евклідові простори $\mathbb{E}$ та $\mathbb{E}'$ називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ векторних просторів $\mathbb{E}$ та $\mathbb{E}'$, який зберігає скалярний добуток, тобто $(f(x), f(y)) = (x,y)$ для довільних $x,y \in \mathbb{E}$.

Теорема 127. *Довільні два евклідові векторні простори однакової скінченної розмірності ізоморфні.*

Доведення. Як і в теоремі 48, ізоморфізм будується за допомогою ортонормованих базисів цих просторів. □

Розділ 9

Лінійні оператори

9.1 Лінійні відображення

Означення 114. Нехай L та M — два векторних простори над полем P. Відображення $\varphi\colon L \to M$ називається лінійним, якщо

1) $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$ для довільних $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$,

2) $\varphi(\lambda\,\boldsymbol{x}) = \lambda\,\varphi(\boldsymbol{x})$ для довільних $\boldsymbol{x} \in L$ та $\lambda \in P$.

Ядром лінійного відображення φ називається множина $\ker\varphi = \{\boldsymbol{x} \in L \mid \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$, а образом — множина $\operatorname{Im}\varphi = \{\boldsymbol{y} \in M \mid \exists\, \boldsymbol{x} \in L\ \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$.

З означення лінійного відображення випливають такі властивості.
1°. $\varphi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.
2°. $\varphi(-\boldsymbol{x}) = -\varphi(\boldsymbol{x})$.

Теорема 128. *Нехай СВ $E = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \in L$, а СВ $C = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \in M$. Якщо СВ $E \in \mathcal{B}(L)$, то існує і до того ж єдине лінійне відображення $\varphi\colon L \to M$ таке, що $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{c}_i$ для $i = \overline{1,n}$.*

Доведення. *Існування.* Оскільки СВ $E \in \mathcal{B}(L)$, то $\forall\, \boldsymbol{x} \in L$ покладемо $\varphi(\boldsymbol{x}) = C[\boldsymbol{x}]_E$. Тоді, з огляду на наслідок 5, відображення $\varphi\colon L \to M$ є лінійним, і $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{c}_i$ для $i = \overline{1,n}$.

Єдиність. Нехай $\psi\colon L \to M$ — деяке лінійне відображення таке, що $\psi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{c}_i$ для $i = \overline{1,n}$. Тоді $\forall\, \boldsymbol{x} \in L\quad \psi(\boldsymbol{x}) = \psi(E[\boldsymbol{x}]_E) = \psi(E)[\boldsymbol{x}]_E = C[\boldsymbol{x}]_E = \varphi(\boldsymbol{x})$, а отже, відображення φ та ψ збігаються. □

Теорема 129. *Ядро $\ker\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором L, а образ $\operatorname{Im}\varphi$ — підпростором M.*

Доведення. Теорема доводиться за критерієм підпростору (теорема 33). □

Розмірність образу лінійного відображення φ називається рангом лінійного відображення φ і позначається $r(\varphi)$, а розмірність ядра — дефектом і позначається $\operatorname{def}\varphi$.

Теорема 130. *Нехай $\varphi\colon L \to M$ — лінійне відображення. Тоді $\dim L = r(\varphi) + \operatorname{def}\varphi$.*

Доведення. Нехай $e_1, \ldots, e_k$ — деякий базис ядра $\ker\varphi \subset L$. Доповнимо його векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$ до базису простору L. Тоді для довільного $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in L$ його образ $\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n)$, а тому образ $\operatorname{Im}\varphi$ породжується векторами $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$. Оскільки $\varphi(e_1) = \ldots = \varphi(e_k) = 0$, то образ $\operatorname{Im}\varphi$ породжується векторами $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$.

Нехай $\lambda_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \ldots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0$. Тоді $\varphi(\lambda_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \lambda_ne_n) = 0$ і

$$\lambda_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \lambda_ne_n = \lambda_1e_1 + \ldots + \lambda_ke_k \in \ker\varphi.$$

Оскільки $e_1, \ldots, e_n$ — базис простору L, то $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ і $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ — базис простору $\operatorname{Im}\varphi$, що й доводить теорему. □

Нехай $e_1, \dots, e_n$ — базис простору L, а $f_1, \dots, f_m$ — базис простору M. Якщо $\varphi\colon L \to M$ — лінійне відображення, то матриця $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(P)$, для якої виконується рівність

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m)\, A,$$

називається матрицею лінійного відображення φ в базисах $e_1, \dots, e_n$ та $f_1, \dots, f_m$; тобто матриця лінійного відображення — це матриця переходу від базису другого простору до СВ образів базису першого простору. Вочевидь, ранг лінійного відображення збігається з рангом його матриці в деяких базисах. Якщо $[x]_e = (x_1, \dots, x_n)^T$ — координатний стовпчик вектора $x \in L$ в базисі $e_1, \dots, e_n$, то координатний стовпчик його образу $[\varphi(x)]_f$ в базисі $f_1, \dots, f_m$ обчислюється за формулою

$$[\varphi(x)]_f = A[x]_e.$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_n) \end{array} \\
A = & \left(\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array}\right) \begin{array}{l} \boldsymbol{f}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{f}_m \end{array}
\end{array}$$

Якщо $a_1, \dots, a_n$ — деякий інший базис L, $b_1, \dots, b_m$ — деякий інший базис M, а $T_{e\to a}$ та $S_{f\to b}$ — відповідні матриці переходу від старих базисів до нових, то матриця B лінійного відображення φ в базисах $a_1, \dots, a_n$ та $b_1, \dots, b_m$ обчислюється за формулою

$$B = S^{-1}_{f\to b} A T_{e\to a} = S_{b\to f} A T_{e\to a}.$$

На множині $\hom(L, M)$ всіх лінійних відображень простору L в простір M можна природним чином ввести операції додавання та множення на скаляр, що перетворює множину $\hom(L, M)$ на векторний простір над полем P.

Якщо $\varphi\colon L \to M$ та $\psi\colon M \to N$ — деякі лінійні відображення, то можна визначити природним чином відображення $\psi\varphi\colon L \to N$ (читається «ψ після φ»), яке також є лінійним. Вочевидь, операція множення лінійних відображень володіє властивостями асоціативності та дистрибутивності відносно додавання.

Якщо φ та ψ — деякі лінійні відображення, $[\varphi]$ та $[\psi]$ — їх матриці в деяких базисах, а $\lambda \in P$, то мають місце такі співвідношення:

$$[\lambda\varphi] = \lambda[\varphi], \quad [\varphi + \psi] = [\varphi] + [\psi], \quad [\psi\varphi] = [\psi][\varphi].$$

9.2 Лінійні оператори

Означення 115. Лінійне відображення $\varphi\colon L \to M$ називається лінійним оператором, якщо $L = M$.

Нехай $e_1, \dots, e_n$ — базис простору L. Якщо $\varphi\colon L \to L$ — лінійний оператор, то матриця $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(P)$, для якої виконується рівність

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n)\, A,$$

називається матрицею лінійного оператора φ в базисі $e_1, \dots, e_n$. Іншими словами, матриця лінійного оператора — це матриця переходу від базису простору до СВ образів цього базису.

Якщо $a_1, \dots, a_n$ — деякий інший базис L, а $T_{e\to a}$ — матриця переходу від старого базису до нового, то матриця B лінійного оператора φ в базисі $a_1, \dots, a_n$ обчислюється за формулою

$$B = T^{-1}_{e\to a} A T_{e\to a} = T_{a\to e} A T_{e\to a}.$$

Приклади лінійних операторів нульового, одиничного або тотожного, подібності, повороту на площині та в просторі, проектування та відбиття паралельно підпростору, диференціювання многочленів та тригонометричних функцій.

1) $\theta(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in L$
2) $\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in L$
3) $\lambda(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in L$, де $\lambda \in P$

4) $$[\varphi]_{\boldsymbol{e}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{array}$$

5) $L = U \oplus V \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \quad \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}$
6) $L = U \oplus V \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \quad \psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$
7) $L = P_n[x]$, $E = (1, x, \dots, x^n) \in \mathcal{B}(L)$, $\varphi(f(x)) = f'(x)$

$$[\varphi]_E = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(x) & \varphi(x^2) & \dots & \varphi(x^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ x \\ \dots \\ x^{n-1} \\ x^n \end{array}$$

Лінійний оператор називається невиродженим, якщо його ранг дорівнює рангу простору. Вочевидь, лінійний оператор є невиродженим тоді й лише тоді, коли його матриця в деякому базисі є невиродженою.

Невироджений лінійний оператор будь-яку ЛНЗ СВ переводить в ЛНЗ СВ.

Природнім чином визначається обернений лінійний оператор та встановлюється критерій його існування.

Множина всіх лінійних операторів відносно операцій додавання та множення утворює кільце, ізоморфне кільцю квадратних матриць над полем (див. теорему 60).

9.3 Власні числа та власні вектори

Означення 116. Підпростір $U \subset L$ називається інваріантним відносно лінійного оператора φ, якщо $\varphi(U) \subset U$.

Теорема 131. *Нехай $e_1, \dots, e_n$ — базис простору L такий, що його підпростір U породжується векторами $e_1, \dots, e_k$, а підпростір V — векторами $e_{k+1}, \dots, e_n$ (таким чином, $L = U \oplus V$). Підпростір U є φ-інваріантним тоді й лише тоді, коли*

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} [\varphi|_U] & A \\ O & B \end{pmatrix},$$

а підпростори U та V є φ-інваріантними тоді й лише тоді, коли

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} [\varphi|_U] & O \\ O & [\varphi|_V] \end{pmatrix}.$$

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою перевіркою. □

Вочевидь, простір, нульовий підпростір, ядро $\ker\varphi$ та образ $\operatorname{Im}\varphi$ лінійного оператора є φ-інваріантними підпросторами відносно будь-якого лінійного оператора φ. При цьому першочерговий інтерес становить вивчення одновимірних φ-інваріантних підпросторів. Це пояснюється тим, що в базисі, кожен вектор якого породжує одновимірний φ-інваріантний підпростір, матриця оператора φ є діагональною.

Означення 117. Вектор $b \in L$ називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо він є базисом деякого одновимірного φ-інваріантного підпростору, тобто $\varphi(b) = \lambda b$. При цьому елемент $\lambda \in P$ називається власним числом лінійного оператора φ, який відповідає власному вектору b.

Множина $V_\lambda(\varphi) = \ker(\varphi - \lambda\,\varepsilon)$ називається власним підпростором лінійного оператора φ, який відповідає значенню λ.

Многочлен $\chi_A(t) = \det(A - t\,E)$ називається характеристичним многочленом квадратної матриці A, а його корені — характеристичними коренями або власними числами цієї матриці.

Оператор повороту на кут не кратний π власних векторів не має, натомість будь-який ненульовий вектор є власним вектором оператора подібності.

Вочевидь, виконуються такі властивості.

1°. Власний вектор завжди має бути ненульовим.

2°. Власні вектори достатньо шукати з точністю до сталого множника.

3°. Для будь-якого $\lambda \in P$ власний підпростір $V_\lambda(\varphi)$ є непорожнім.

4°. Елемент $\lambda \in P$ є власним числом лінійного оператора φ тоді й лише тоді, коли власний підпростір $V_\lambda(\varphi)$ є ненульовим.

5°. Будь-який підпростір власного підпростору є φ-інваріантним.

6°. Для довільних невиродженої матриці T та квадратної матриці A виконується рівність $\chi_{T^{-1}AT}(t) = \chi_A(t)$.

Доведення. $\chi_{T^{-1}AT}(t) = \det(T^{-1}AT - tE) = \det(T^{-1}AT - tT^{-1}ET) = \det(T^{-1}(A - tE)T) =$
$= \det T^{-1} \det(A - tE) \det T = \det(A - tE) = \chi_A(t)$ □

7°. Якщо базис $e_1, \ldots, e_n$ простору L складається з власних векторів лінійного оператора φ, то в цьому базисі лінійний оператор φ задається діагональною матрицею. І навпаки, якщо в деякому базисі матриця лінійного оператора φ є діагональною, то всі вектори цього базису є власними векторами оператора φ.

Доведення. $$[\varphi]_{\boldsymbol{b}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{b}_1) & \varphi(\boldsymbol{b}_2) & \ldots & \varphi(\boldsymbol{b}_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{b}_n \end{array} \end{array} \iff \begin{cases} \varphi(\boldsymbol{b}_1) = \lambda_1 \boldsymbol{b}_1, \\ \varphi(\boldsymbol{b}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{b}_2, \\ \ldots \\ \varphi(\boldsymbol{b}_n) = \lambda_n \boldsymbol{b}_n. \end{cases}$$ □

З властивості **6**° випливає коректність наступного означення.

Означення 118. Характеристичним многочленом $\chi_\varphi(t)$ лінійного оператора φ називається характеристичний многочлен $\chi_A(t)$ його матриці A в довільному базисі $e_1, \ldots, e_n$.

Теорема 132. *Елемент $\lambda \in P$ є власним числом лінійного оператора φ тоді й лише тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена $\chi_\varphi(t)$.*

Доведення. За властивістю **4**° достатньо довести, що власний підпростір $V_\lambda(\varphi)$ є ненульовим тоді й лише тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена $\chi_\varphi(t)$. Останнє легко випливає з означень власного підпростору, характеристичних многочленів (матриці та лінійного оператора) та наслідку 18. □

Наслідок 21. $\dim V_\lambda(\varphi) = \dim L - r(\varphi - \lambda\,\varepsilon)$.

Доведення. *1-й спосіб.* Твердження випливає з означення власного підпростору лінійного оператора та теореми 130.

2-й спосіб. Твердження випливає безпосередньо з доведення теореми 132. □

З доведення теореми 132 випливає алгоритм знаходження власних чисел та власних векторів лінійного оператора φ, якщо відома його матриця A в базисі $e_1, \ldots, e_n$ простору L.

1. Скласти та розв'язати характеристичне рівняння $\chi_A(t) = 0$, коренями $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $k = \overline{0, n}$, якого є власні числа лінійного оператора φ. Випадок $k = 0$ означає, що характеристичне рівняння $\chi_A(t) = 0$ коренів не має.

2. Для кожного λ_i, $i = \overline{1, k}$, скласти та розв'язати СЛОР $(A - \lambda_i E|0)$.

3. ФСР СЛОР $(A - \lambda_i E|0)$ утворює ЛНЗ систему власних векторів, яким відповідає власне значення λ_i.

Теорема 133. *Власні вектори $b_1, \ldots, b_k$ лінійного оператора φ, яким відповідають попарно різні власні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, утворюють ЛНЗ систему векторів.*

Доведення. Доведення проводиться ММІ по k. □

Наслідок 22. *Сума скінченної кількості власних підпросторів, які відповідають різним власним значенням, є прямою.*

Доведення. Наслідок доводиться ММІ по кількості власних підпросторів. □

Теорема 134. *Характеристичний многочлен обмеження лінійного оператора на інваріантний підпростір є дільником характеристичного многочлена самого оператора.*

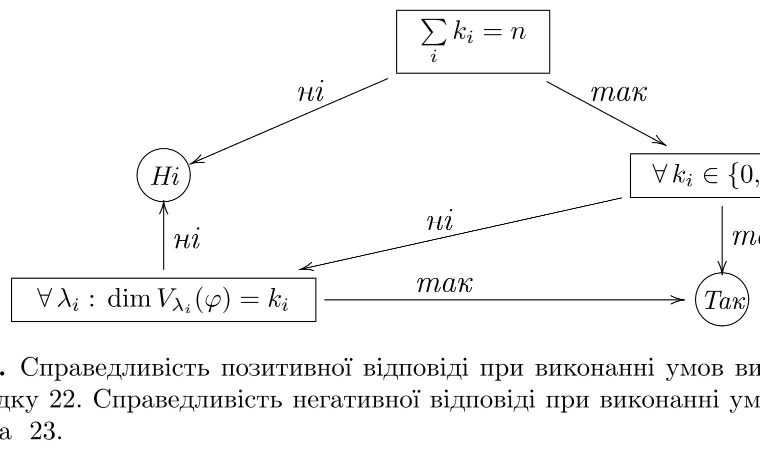
Доведення. Доведення випливає з теореми 131 та теореми 92 про визначник квазітрикутної матриці. □

Наслідок 23. *Має місце нерівність $\dim V_\lambda(\varphi) \leqslant k$, де k — кратність кореня λ характеристичного многочлена $\chi_\varphi(t)$.*

Доведення. Нехай $V = V_\lambda(\varphi)$. Якщо $\dim V = l$, то $\chi_{\varphi|_V}(t) = (\lambda - t)^l$ і за теоремою 134 многочлен $\chi_{\varphi|_V}(t)$ є дільником $\chi_\varphi(t)$. □

Лінійний оператор φ називається оператором з простим спектром, якщо він має n різних власних значень. Вочевидь, для оператора з простим спектром існує базис, в якому матриця оператора є діагональною. Відповідь на питання, чи існує базис, в якому матриця оператора є діагональною (тобто, чи існує для заданої матриці спряжена до неї діагональна матриця), дається наступною теоремою.

Теорема 135. *Нехай (L, P) — векторний простір розмірності $\dim L = n$, а $\varphi\colon L \to L$ — лінійний оператор з різними власними числами $\lambda_i \in P$ кратності $k_i \geqslant 0$. Тоді відповідь на питання, чи існує базис, в якому матриця оператора φ є діагональною, задається наступною схемою.*



Доведення. Справедливість позитивної відповіді при виконанні умов випливає з теореми 133 та наслідку 22. Справедливість негативної відповіді при виконанні умов випливає з наслідків 22 та 23. □

Вочевидь, лінійний оператор над полем комплексних чисел завжди має одновимірний інваріантний підпростір. Має місце наступне твердження.

Теорема 136. *Будь-який лінійний оператор над полем дійсних чисел має одновимірний або двовимірний інваріантний підпростір.*

Доведення. Якщо характеристичний многочлен $\chi_\varphi(t) \in \mathbb{R}[t]$ має дійсний корінь λ, то за властивостями **4°** та **5°** одновимірний підпростір простору $V_\lambda(\varphi)$ є φ-інваріантним.

Якщо це не так, то за основною теоремою алгебри 79 многочлен $\chi_\varphi(t)$ має комплексний корінь $\lambda+\mu i$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, і власний вектор, який йому відповідає, можна подати у вигляді $x+yi$, $x, y \in L$. Тоді $\varphi(x) + \varphi(y)i = \varphi(x+yi) = (\lambda+\mu i)(x+yi) = (\lambda x - \mu y) + (\mu x + \lambda y)i$, звідки

$$\varphi(x) = \lambda x - \mu y, \qquad \varphi(y) = \mu x + \lambda y.$$

Останні дві рівності й означають, що підпростір, породжений векторами x та y є φ-інваріантним. □

9.4 Жорданова нормальна форма

Означення 119. Вектор $b \in L$ називається кореневим вектором лінійного оператора φ, який відповідає числу $\lambda \in P$, якщо $(\varphi - \lambda\,\varepsilon)^m b = 0$ для деякого $m \in \mathbb{N}_0$. Найменше з таких m називається висотою кореневого вектора b.

Множина всіх кореневих векторів, які відповідають значенню λ, називається кореневим підпростором і позначається $V^\lambda(\varphi)$.

Мають місце наступні властивості.

1°. Кореневим вектором висоти нуль є лише нульовий вектор, а кореневі вектори висоти один — це власні вектори лінійного оператора.

2°. Кореневий підпростір $V^\lambda(\varphi)$ є φ-інваріантним підпростором простору L.

3°. Кореневий підпростір $V^\lambda(\varphi)$ є ненульовим тоді й лише тоді, коли λ є коренем характеристичного многочлена $\chi_\varphi(t)$.

4°. Кореневий підпростір $V^\lambda(\varphi)$ є об'єднанням зростаючого ланцюга підпросторів

$$\ker(\varphi - \lambda\,\varepsilon) \subset \ker(\varphi - \lambda\,\varepsilon)^2 \subset \ldots,$$

а матриця оператора $\varphi - \lambda\,\varepsilon$ в базисі простору $V^\lambda(\varphi)$, узгодженому з цим ланцюгом підпросторів, є верхнею нільтрикутною.

5°. Характеристичний многочлен обмеження оператора φ на підпростір $V^\lambda(\varphi)$ дорівнює $(\lambda - t)^k$, де $k = \dim V^\lambda(\varphi)$.

6°. При $\mu \neq \lambda$ оператор $\varphi - \mu\,\varepsilon$ є невиродженим на підпросторі $V^\lambda(\varphi)$.

Наступне твердження виправдовує поняття кореневого простору.

Теорема 137. *Розмірність кореневого підпростору дорівнює кратності відповідного кореня характеристичного многочлена.*

Доведення. Нехай $e_1, \ldots, e_n$ — базис простору L такий, що його підпростір $V = V^\lambda(\varphi)$ породжується векторами $e_1, \ldots, e_k$, а підпростір U — векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$ (таким чином, $L = V^\lambda(\varphi) \oplus U$). За теоремами 131 та 92 (про визначник квазітрикутної матриці) $\chi_\varphi(t) = \chi_\psi(t) \cdot \chi_\xi(t) = (\lambda - t)^k \cdot \det(B - tE)$, де $\psi = \varphi|_V$, а ξ — лінійний оператор в просторі U, який задається в базисі $e_{k+1}, \ldots, e_n$ матрицею B. Необхідно довести, що λ не є коренем многочлена $\chi_\xi(t) = \det(B - tE)$, тобто власним значенням оператора ξ.

Припустимо супротивне. Тоді для деякого $u \in U \setminus \{0\}$ $\xi(u) = \lambda u$, тобто $\varphi(u) = \lambda u + v$, де $v \in V$. Таким чином, $(\varphi - \lambda\,\varepsilon)u = v$ — кореневий вектор, але тоді й u — кореневий вектор, що суперечить означенню підпростору V. □

Теорема 138. *Кореневі вектори $b_1, \ldots, b_k$ лінійного оператора φ, яким відповідають попарно різні власні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, утворюють ЛНЗ систему векторів.*

Доведення. Доведення, як й доведення теореми 133, проводиться ММІ по k. □

Теорема 139. *Якщо характеристичний многочлен лінійного оператора φ розкладається на лінійні множники, то простір розкладається в пряму суму кореневих підпросторів, які відповідають різним власним значенням оператора φ.*

Доведення. Доведення випливає з теорем 137 та 138. □

Дослідимо дію оператора φ на кореневих підпросторах.

Означення 120. Лінійний оператор ν називається нільпотентним, якщо існує таке $m \in \mathbb{N}_0$, що $\nu^m = \theta$. Найменше з таких m називається висотою нільпотентного оператора ν.

Висотою вектора $e \in L$ відносно нільпотентного оператора ν називається найменше з таких $m \in \mathbb{N}_0$, для якого $\nu^m(e) = 0$, тобто висота вектора e як кореневого вектора оператора ν, який відповідає кореню 0.

Циклічним підпростором нільпотентного оператора ν, породженим вектором e, називається лінійна оболонка векторів $e, \nu(e), \nu^2(e), \ldots, \nu^{m-1}(e)$, де m — висота вектора e (відносно нільпотентного оператора ν).

Прикладом нільпотентного оператора висоти $n+1$ є оператор диференціювання в просторі многочленів степеня не вище за n. Оскільки обмеження оператора $\varphi - \lambda\varepsilon$ на кореневий підпростір $V^\lambda(\varphi)$ є нільпотентним, то задача звелася до дослідження нільпотентних операторів.

Лема 14. *Розмірність циклічного підпростору (нільпотентного оператора ν), породженого вектором e, дорівнює висоті вектора e (відносно нільпотентного оператора ν).*

Доведення. Лема випливає з лінійної незалежності векторів $e, \nu(e), \nu^2(e), \ldots, \nu^{m-1}(e)$. □

Вочевидь, циклічний підпростір інваріантний відносно оператора ν. Обмеження оператора ν на циклічний підпростір розмірності m має висоту m і в базисі $\nu^{m-1}(e), \ldots, \nu^2(e), \nu(e), e$ задається матрицею

$$J_m(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так званою нільпотентною жордановою клітиною порядка m.

Будь-який вектор циклічного підпростору U, який не лежить в підпросторі $\nu(U)$, має висоту m, а отже, породжує той же циклічний підпростір U.

Теорема 140. *Простір L, на якому задано нільпотентний лінійний оператор ν, розкладається в пряму суму циклічних підпросторів оператора ν, причому кількість доданків в цьому розкладі дорівнює* $\operatorname{def}\nu$.

Зауважимо, що в циклічному підпросторі нільпотентного оператора $\nu = (\varphi - \lambda\varepsilon)|_{V^\lambda(\varphi)}$ оператор φ визначається матрицею $J_m(\lambda) = J_m(0) + \lambda E$, яка називається жордановою клітиною з власним значенням λ. Жордановою матрицею називається блочно-діагональна матриця $J = J_1 \oplus \ldots \oplus J_k$, де $J_1, \ldots, J_k$ — деякі жорданові клітини.

Теорема 141. *Якщо характеристичний многочлен $\chi_\varphi(t)$ розкладається на лінійні множники, то існує базис, в якому матриця оператора φ є жордановою.*

Теорема 142. *Кількість $N(J_k(\lambda))$ жорданових клітин розмірності k, які відповідають власному числу λ, дорівнює $r(B_\lambda^{k-1}) - 2r(B_\lambda^k) + r(B_\lambda^{k+1})$, де B_λ — матриця лінійного оператора $\varphi - \lambda\varepsilon$.*

Теорема 143. *Дві квадратні матриці однакового порядку над полем комплексних чисел є подібними тоді й лише тоді, коли вони мають однакові жорданові нормальні форми.*

9.5 Функції від матриць

Нехай (L,P) — векторний простір розмірності n і φ — лінійний оператор на ньому. Для довільного многочлена $f(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0\in P[t]$ можна визначити оператор $f(\varphi)=a_n\varphi^n+a_{n-1}\varphi^{n-1}+\ldots+a_1\varphi+a_0\varepsilon\in P[t]$. Аналогічно можна визначити многочлен від матриці A. При цьому зрозуміло, що якщо оператор φ в деякому базисі має матрицю A, то оператор $f(\varphi)$ в цьому ж базисі має матрицю $f(A)$.

> **Означення 121.** Многочлен $f(t)\in P[t]$ називається анулюючим многочленом оператора φ, якщо $f(\varphi)=\theta$ — нульовий оператор.
>
> Анулюючий многочлен $m_\varphi(t)$ найменшого степеня, старший коефіцієнт якого $\operatorname{coef} m_\varphi=1$, називається мінімальним (анулюючим) многочленом оператора φ.

Аналогічно визначається анулюючий та мінімальний $m_A(t)$ многочлен матриці A. Мають місце такі властивості.

1°. Якщо $A=A_1\oplus\ldots\oplus A_k$, то для довільного многочлена $f(t)\in P[t]$ має місце співвідношення $f(A)=f(A_1)\oplus\ldots\oplus f(A_k)$.

2°. Для довільних многочлена $f(t)\in P[t]$ і матриць A та B, причому матриця B є невиродженою, має місце співвідношення $f(B^{-1}AB)=B^{-1}f(A)B$.

3°. Для кожного оператора φ (визначеного на скінченновимірному векторному просторі) існує ненульовий анулюючий (а отже, і мінімальний) многочлен.

4°. Кожний анулюючий многочлен ділиться на мінімальний.

5°. $m_{A_1\oplus\ldots\oplus A_k}=\text{НСК}\ (m_{A_1},\ldots,m_{A_k})$

Лема 15. $m_{J_m(\lambda)}=(t-\lambda)^m$.

Доведення. Нехай φ — лінійний оператор, матриця якого в деякому базисі $J_m(\lambda)$. Тоді $\nu=\varphi-\lambda\,\varepsilon$ — нільпотентний оператор висоти m, тобто $(\varphi-\lambda\,\varepsilon)^m=\theta$, проте $(\varphi-\lambda\,\varepsilon)^{m-1}\neq\theta$. Це й означає, що $(t-\lambda)^m$ — анулюючий многочлен оператора φ і ніякий його власний дільник не є анулюючим многочленом. Отже, $m_{J_m(\lambda)}=(t-\lambda)^m$. □

Теорема 144. *Нехай φ — лінійний оператор, характеристичний многочлен якого $\chi_\varphi(t)$ розкладається на лінійні множники. Якщо $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ — всі різні корені многочлена $\chi_\varphi(t)$, то*

$$m_\varphi(t)=\prod_{i=1}^{s}(t-\lambda_i)^{m_i},$$

де m_i — максимальний порядок жорданової клітини з власним значенням λ_i в жордановій формі матриці оператора φ.

Доведення. Твердження випливає з леми 15 та властивості **5**°. □

Наслідок 24. *Жорданова форма матриці оператора φ є діагональною тоді й лише тоді, коли його мінімальний многочлен не має кратних коренів.*

Наслідок 25 (Теорема Гамільтона–Келі). $\chi_\varphi(\varphi)=\theta$.

Твердження 15. *Якщо $f(x)$ — аналітична функція (функція, яка збігається зі своїм рядом Тейлора в околі будь-якої точки області визначення), то*

$$f(J_k(\lambda))=\begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \ldots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ldots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Розділ 10

Лінійні оператори в евклідовому просторі

10.1 Спряжені оператори

Нехай $\mathbb{E}$ — евклідів простір і $e_1, \dots, e_n$ — його ортонормований базис.

Лема 16. *Якщо для будь-якого вектора $x \in \mathbb{E}$ виконується рівність $(x, u) = (x, v)$, то $u = v$.*

Доведення. З рівності $(x, u) = (x, v)$ випливає, що $(x, u - v) = 0$ при будь-якому x, зокрема, при $x = u - v$. □

Теорема 145. *Відображення $f\colon a \mapsto \varphi_a(x)$, яке кожному вектору $a \in \mathbb{E}$ ставить у відповідність лінійну функцію $\varphi_a(x) = (x, a)$, визначає ізоморфізм $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}^*$ між простором $\mathbb{E}$ та спряженим з ним $\mathbb{E}^*$ (так званий природний ізоморфізм, який не залежить від базисів цих просторів).*

Доведення. З властивостей скалярного добутку випливає, що $\varphi_a(x)$ — лінійна функція. З леми 16 випливає ін'єктивність відображення f. Сюр'єктивність відображення f випливає з того, що довільна лінійна функція $\varphi(x) = \varphi_a(x)$, де $a = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$. Незалежність від базисів просторів випливає з теореми 104, твердження 14 та того, що матриця переходу між ортонормованими базисами є ортогональною. □

Теорема 146. *Відображення $f\colon \varphi \mapsto A_\varphi(x, y)$ та $f^*\colon \varphi \mapsto A^*_\varphi(x, y)$, які кожному лінійному оператору $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ставлять у відповідність білінійні функції $A_\varphi(x, y) = (x, \varphi(y))$ та $A^*_\varphi(x, y) = (\varphi(x), y)$, визначають ізоморфізми f та f^* між простором $\hom(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ та простором $BL(\mathbb{E})$ всіх білінійних функцій, визначених на $\mathbb{E}$. Ці ізоморфізми є природними (тобто, не залежать від базисів цих просторів) і при цьому матриці $[A_\varphi]_e$ та $[A^*_\varphi]_e$ білінійних функцій A_φ та A^*_φ в ортонормованому базисі $e_1, \dots, e_n$ збігаються з матрицями $[\varphi]_e$ та $[\varphi]_e^T$ відповідно.*

Доведення. Білінійність функцій A_φ та A^*_φ випливає з властивостей скалярного добутку та лінійності оператора φ. Ін'єктивність відображень f та f^* випливає з леми 16, а сюр'єктивність — з рівностей $[A_\varphi]_e = [\varphi]_e$ та $[A^*_\varphi]_e = [\varphi]_e^T$. Незалежність від базисів просторів випливає з теореми 108, твердження 14 та того, що матриця переходу між ортонормованими базисами є ортогональною. □

Означення 122. Відображення $\varphi^*\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ називається спряженим до відображення $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, якщо для будь-яких $x, y \in \mathbb{E}$ виконується рівність

$$(x, \varphi(y)) = (\varphi^*(x), y).$$

Теорема 147. *Для кожного лінійного оператора $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ існує єдине спряжене до нього відображення $\varphi^*\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, яке до того ж є лінійним оператором.*

Доведення. *Існування.* Нехай A — матриця лінійного оператора φ в (ортонормованому) базисі $e_1, \ldots, e_n$. Розглянемо лінійний оператор ψ, який в цьому ж базисі має матрицю A^T. З рівності білінійних функцій $A_\varphi(x, y) = A^*_\psi(x, y)$ випливає, що $\psi = \varphi^*$.

Єдиність. Єдиність випливає з леми 16. □

Наслідок 26. *Якщо $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ — лінійний оператор, то $[\varphi^*]_e = [\varphi]_e^T$, де $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормований базис.*

Зауважимо, що твердження наслідку 26 в загальному випадку не має місця, якщо $e_1, \ldots, e_n$ — не ортонормований базис. В загальному випадку має місце наступне твердження.

Теорема 148. *Якщо A — матриця лінійного оператора $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ в деякому (не обов'язково ортонормованому) базисі $f_1, \ldots, f_n$, а A^* — матриця спряженого оператора φ^* в цьому ж базисі, то $A^* = G^{-1}A^TG$, де G — матриця Грама базиса $f_1, \ldots, f_n$.*

Доведення. Твердження випливає з співвідношень $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{f}}^T G[\boldsymbol{y}]_{\boldsymbol{f}}$, $G^T = G$ та леми 8. Дійсно,

$$\left.\begin{aligned}
&(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{y})) = [\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{f}}^T G[\varphi(\boldsymbol{y})]_{\boldsymbol{f}} = [\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{f}}^T GA[\boldsymbol{y}]_{\boldsymbol{f}}\\
&(\varphi^*(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = [\varphi^*(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{f}}^T G[\boldsymbol{y}]_{\boldsymbol{f}} = (A^*[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{f}})^T G[\boldsymbol{y}]_{\boldsymbol{f}} = [\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{f}}^T (A^*)^T G[\boldsymbol{y}]_{\boldsymbol{f}}
\end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad GA = (A^*)^T G \quad \Longrightarrow \quad GA^* = A^T G \quad \Longrightarrow \quad A^* = G^{-1}A^T G.$$ □

Операція $*$ переходу до спряженого оператора має такі властивості.

1°. $\varepsilon^* = \varepsilon$.
2°. $(\varphi^*)^* = \varphi$.
3°. $(c\varphi)^* = c\varphi^*$, де $c \in \mathbb{R}$.
4°. $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$.
5°. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$. Дійсно, $((\varphi\psi)^*(x), y) = (x, \varphi\psi(y)) = (\varphi^*(x), \psi(y)) = (\psi^*\varphi^*(x), y)$.
6°. $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$, якщо φ — невироджений оператор.

Теорема 149. *Нехай $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ — лінійний оператор. Якщо $U \subset \mathbb{E}$ є φ-інваріантним підпростором, то його ортогональне доповнення $U^\perp$ є φ^*-інваріантним підпростором.*

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою перевіркою. □

10.2 Самоспряжені оператори

Означення 123. Лінійний оператор $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ називається самоспряженим, якщо він збігається зі спряженим до себе $\varphi = \varphi^*$, тобто $(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{y})) = (\varphi(x), y)$.

Прикладом самоспряженого оператору є оператор гомотетії $c\varepsilon$. З означення випливають такі властивості.

1°. Добуток $c\varphi$ самоспряженого оператора φ на будь-яке число $c \in \mathbb{R}$ є самоспряженим оператором.

2°. Сума $\varphi + \psi$ самоспряжених операторів φ та ψ є самоспряженим оператором.

3°. Оператор φ^{-1}, обернений до невиродженого самоспряженого оператора φ, є самоспряженим.

4°. Добуток $\varphi\psi$ самоспряжених операторів φ та ψ є самоспряженим тоді й лише тоді, коли оператори φ та ψ комутують, тобто $\varphi\psi = \psi\varphi$.

5°. Многочлени з дійсними коефіцієнтами від самоспряжених операторів є самоспряженими операторами.

Теорема 150. *Нехай $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ — самоспряжений лінійний оператор. Якщо $U \subset \mathbb{E}$ є φ-інваріантним підпростором, то його ортогональне доповнення $U^{\perp}$ також є φ-інваріантним підпростором.*

Доведення. Твердження випливає з теореми 149. □

Теорема 151. *Кожний самоспряжений оператор, заданий на евклідовому просторі, в будь-якому ортонормованому базисі задається симетричною матрицею. І навпаки, якщо лінійний оператор, заданий на евклідовому просторі, в деякому ортонормованому базисі задається симетричною матрицею, то цей оператор є самоспряженим.*

Доведення. Твердження випливає з наслідку 26. □

Теорема 152. *Лінійний оператор $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ є самоспряженим тоді й лише тоді, коли в просторі $\mathbb{E}$ існує ортонормований базис, складений з власних векторів оператора φ.*

Доведення. *Необхідність.* За теоремою 150 достатньо довести існування хоча б одного власного вектора. За теоремою 136 це достатньо зробити для двовимірного простору. Матриця самоспряженого оператора φ в ортонормованому базисі в цьому випадку має вигляд $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, і характеристичний многочлен $\chi_\varphi(t) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2)$. Дискримінант $D = (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0$, отже, $\chi_\varphi(t)$ має дійсні корені, а φ — власні вектори.

Достатність. Матриця лінійного оператора φ в ортонормованому базисі, складеному з власних векторів, є діагональною, а отже, симетричною. Тому за теоремою 151 оператор φ є самоспряженим. □

Наслідок 27. *Нехай $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ — самоспряжений лінійний оператор. Тоді евклідів простір $\mathbb{E} = \operatorname{Im}\varphi \oplus \ker\varphi$.*

Доведення. Нехай $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ — базис простору $\mathbb{E}$, складений з власних векторів оператора φ, яким відповідають власні числа $\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_k \neq 0, \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Тоді $\operatorname{Im}\varphi = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \rangle$, $\ker\varphi = \langle \boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n \rangle$ і $\mathbb{E} = \operatorname{Im}\varphi \oplus \ker\varphi$. □

Наслідок 28. *Кожна симетрична матриця з дійсними елементами зводиться до діагонального виду, тобто подібна деякій діагональній матриці.*

Доведення. В евклідовому просторі з фіксованим ортонормованим базисом кожна симетрична матриця (відповідного порядку) задає самоспряжений оператор. □

Наслідок 29. *Для довільної квадратичної (симетричної білінійної) функції в евклідовому просторі існує ортонормований базис, в якому її матриця є діагональною.*

Доведення. Твердження випливає з огляду на теорему 146. □

Слід розуміти, що в останньому наслідку мова йде про ортонормованість у сенсі скалярного добутку, а не в сенсі симетричної білінійної функції. Проте, оскільки матриця квадратичної функції в зазначеному базисі є діагональною, то цей базис є також ортогональним (але, взагалі кажучи, не ортонормованим) в сенсі симетричної білінійної функції.

Процес знаходження ортонормованого базису, в якому квадратична функція має канонічний вид, називається зведенням до головних осей. Методом зведення до головних осей можна дослідити довільну криву або поверхню другого порядку, задану в ПДСК, і звести її до канонічного вигляду (див. пункт 10.3).

З наслідку 29 випливає, зокрема, наступне твердження.

Теорема 153. *Нехай на деякому скінченновимірному дійсному просторі задано дві квадратичні функції. Якщо одна з цих функцій є додатньо визначеною, то існує базис, в якому додатньо визначена функція має нормальний вигляд, а інша квадратична функція — канонічний вигляд.*

Доведення. Додатньо визначена квадратична функція перетворює дійсний векторний простір на евклідовий. Тоді за наслідком 29 існує ортонормований (за додатньо визначеною квадратичною функцією) базис, в якому матриця другої квадратичної функції є діагональною. □

Наприклад, $f = -4x_1x_2$, $g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$.

Приклад 32. Показати, що одна з квадратичних функцій є додатньо визначеною. Знайти базис, в якому додатньо визначена функція має нормальний вигляд, а інша квадратична функція — канонічний вигляд, а також знайти ці вигляди, якщо $f = 2\,x_1x_2 - 2\,x_2^2$, $g = x_1^2 - 2\,x_1x_2 + 2\,x_2^2$.

► Нехай $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ — базис, в якому задані функції f та g. Тоді

$[f]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, головні мінори $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1$, а тому, за критерієм Сильвестра, функція f не є додатньо визначеною.

$[g]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, головні мінори $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$, а тому, за критерієм Сильвестра, функція g є додатньо визначеною з канонічною формою $g = y_1^2 + y_2^2$ в базисі $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$. За методом Якобі g-ортогональний базис $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ шукається у вигляді

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{a}_2 = \lambda \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2.$$

Маємо, що $0 = g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2) = g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)\lambda + g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \lambda - 1$, тобто $\lambda = 1$. Таким чином,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \end{cases} \qquad S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ звідки } \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_2. \end{cases}$$

Канонічна форма $g = y_1^2 + y_2^2$ в базисі $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ є, вочевидь, і нормальною формою. Тоді

$$[f]_{\boldsymbol{a}} = S^T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}}[f]_{\boldsymbol{e}} S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad f = 2\,y_1y_2.$$

$$\chi_f(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1).$$

Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1 = 1$ та $t_2 = -1$.

При $t_1 = 1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (1, 1).$$

При $t_2 = -1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_2 = (-1, 1).$$

СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ утворює g-ортогональний базис з власних векторів самоспряженого оператора, проте цей базис не є нормованим. Пронормуємо СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1),$$
$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|} = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1),$$

Отже, СВ $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ є g-ортонормованим базисом простору, в якому матриця самоспряженого оператора f є діагональною. Таким чином, маємо:

$$[f]_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = z_1^2 - z_2^2, \quad S_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = z_1^2 + z_2^2,$$

$$S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} S_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} z_1, \\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} z_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} z_2, \end{cases}$$

що підтверджується перевіркою:

$$[f]_{\boldsymbol{f}} = S^T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} [f]_{\boldsymbol{e}} S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$[g]_{\boldsymbol{f}} = S^T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} [g]_{\boldsymbol{e}} S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

10.3 Зведення до головних осей

Нехай в просторі[1] W_3 задана ПДСК. Рівняння поверхні γ другого порядку

$$a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + a_{33}\, z^2 + 2\, a_{12}\, xy + 2\, a_{13}\, xz + 2\, a_{23}\, yz + 2\, a_1\, x + 2\, a_2\, y + 2\, a_3\, z + k = 0$$

можна записати в матричній формі

$$\xi^T A\, \xi + 2\, \boldsymbol{a}\, \xi + k = 0, \tag{10.1}$$

де $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$.

Після деякого перетворення $\xi = f(\xi')$, при якому, як і раніше, старі координати ξ виражаються через нові $\xi' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, рівняння (10.1) перепишеться у вигляді

$$\xi'^T A'\, \xi' + 2\, \boldsymbol{a}'\, \xi' + k' = 0. \tag{10.2}$$

Якщо f — перехід до іншої ПДСК, початок якої збігається з заданою, то перетворення f задається формулою

$$\xi = S\, \xi', \tag{10.3}$$

де S — ортогональна матриця, а параметри рівняння (10.2) визначаються співвідношеннями

$$A' = S^T A S, \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} S, \quad k' = k.$$

Якщо f — паралельне зміщення ПДСК на вектор $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ (або в точку β), то перетворення f задається формулою

$$\xi = \xi' + \beta, \tag{10.4}$$

а параметри рівняння (10.2) визначаються співвідношеннями

$$A' = A, \quad \boldsymbol{a}' = (\beta^T A + \boldsymbol{a}), \quad k' = \beta^T A \beta + 2\, \boldsymbol{a} \beta + k = (\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a})\beta + k.$$

Точка β називається центром поверхні γ (заданої рівнянням (10.1)), якщо після виконання перетворення (10.4) поверхня γ (визначена вже рівнянням (10.2)) разом з кожною точкою ξ'

[1] Аналогічні міркування можна легко провести й для кривих другого порядку на площині.

містить також й точку $-\xi'$. Поверхня γ, для якої існує й до того ж єдиний центр, називається центральною.

Легко бачити, що точка β є центром поверхні (10.1) тоді й лише тоді, коли $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}$, тобто виконується умова

$$A\beta = -\boldsymbol{a}^T.$$

Зрозуміло також, що поверхня γ є центральною тоді й лише тоді, коли $\det A \neq 0$, що (в силу симетричності A) рівносильно відсутності у матриці A власного числа $t = 0$.

Вочевидь, початок координат є центром поверхні (10.1) тоді й лише тоді, коли $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Нехай $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, тобто рівняння поверхні γ містить лінійні доданки. Оскільки матриця S є ортогональною (а отже, невиродженою), то перетворення (10.3) при жодному припустимому значенні S не призведе до рівняння (10.2), в якому $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}$ (найбільше, на що можна розраховувати від використання перетворення (10.3), — це отримати майже нульовий вектор $\boldsymbol{a}'$, тобто вектор, в якого не більше однієї ненульової координати).

Схематично процес зведення поверхні другого порядку до головних осей (уявляємо собі як перехід від рівняння (10.1) до рівняння (10.2)) складається з двох етапів:

1. «Знищити» доданки, які містять добутки різних змінних (шляхом ортогонального перетворення звести матрицю A до діагональної матриці A').

2. «Знищити», за можливості, *всі* лінійні доданки (шляхом виділення повних квадратів перейти від вектора $\boldsymbol{a}$ до нульового або, в найгіршому випадку, до майже нульового вектора $\boldsymbol{a}'$).

Процес реалізації цих двох етапів певною мірою залежить від поверхні γ, хоча й припускає деяку варіативність. Позначимо через $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ ортогональний базис простору W_3, що складається з власних векторів матриці A, яким відповідають власні числа λ_1, λ_2, λ_3. Наведемо план пошуку векторів $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$, дотримання якого дозволяє на першому етапі уникнути *можливого* процесу ортогоналізації, а на другому етапі у разі нецентральних поверхонь[2] позбутись усіх лінійних доданків, крім, можливо, одного.

За будь-якого випадку вектор $\boldsymbol{b}_1$ шукається як довільний ненульовий розв'язок СЛОР $(A - \lambda_1 E|0)$, а, використовуючи специфіку простору W_3, за вектор $\boldsymbol{b}_3$ можна взяти векторний добуток $\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2$ двох, знайдених раніше, власних векторів матриці A.

Вектор $\boldsymbol{b}_2$ у випадку матриці A з простим спектром шукається стандартно (як довільний ненульовий розв'язок СЛОР $(A - \lambda_2 E|0)$). У випадку же ненульових кратних власних чисел $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$ за вектор $\boldsymbol{b}_2$ можна взяти довільний ненульовий рядок (або стовпець) матриці $A - \lambda_1 E$, а у випадку нульових кратних власних чисел $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ — вектор $\boldsymbol{a}^T - \dfrac{(\boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1$.

Зрозуміло, що після знаходження векторів $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ перший етап завершується виконанням перетворення (10.3) з ортогональною матрицею $S = \left(\dfrac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} \;\middle|\; \dfrac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|} \;\middle|\; \dfrac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|} \right)$.

Приклад 33. Методом зведення до головних осей визначити тип поверхні

$$\gamma\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2\,xy - 4\,x + 4\,y + 3 = 0.$$

► $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $k = 3$.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ -1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t)t.$$

[2]Для центральних поверхонь виділення повних квадратів на другому етапі завжди призводить до «знищення» *усіх* лінійних доданків.

Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1 = 2$, $t_2 = 1$ та $t_3 = 0$.

При $t_1 = 2$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (-1, 1, 0).$$

При $t_2 = 1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 = 0, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_2 = (0, 0, 1).$$

При $t_3 = 0$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_3 = (1, 1, 0).$$

Зауважимо, що за вектор $\boldsymbol{b}_3$ можна було взяти й векторний добуток $\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2$.

СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ є ортогональною, оскільки матриця A є матрицею з простим спектром. Пронормуємо СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0) = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big),$$
$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|} = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}} = (0, 0, 1),$$
$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|} = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big).$$

Таким чином, маємо:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}S = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma\colon 2\,(x')^2 + (y')^2 + 4\sqrt{2}\,x' + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma\colon 2\,(x' + \sqrt{2})^2 + (y')^2 = 1.$$

Після заміни $\xi' = \xi'' + \beta'$, де $\beta' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, отримаємо рівняння поверхні

$$\gamma\colon 2\,(x'')^2 + (y'')^2 = 1.$$

Таким чином, поверхня γ являє собою еліптичний циліндр. □

Приклад 34. Методом зведення до головних осей визначити тип поверхні

$$\gamma\colon 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 2x + 6y - 6z - 5 = 0.$$

► $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $k = -5$.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & 2 & -6 \\ 2 & 1-t & -3 \\ -6 & -3 & 9-t \end{vmatrix} = (14-t)t^2.$$

Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1 = 14$ та $t_2 = t_3 = 0$.

При $t_1 = 14$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -10 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & -13 & -3 & 0 \\ -6 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2}\,x_1, \\ x_3 = -\dfrac{3}{2}\,x_1, \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (2, 1, -3).$$

Оскільки $t_2 = t_3 = 0$, то $\quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}^T - \dfrac{(\boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = (-1, 2, 0), \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 = (6, 3, 5).$

Пронормуємо СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 1, -3) = \Big(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\Big),$$
$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|} = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0) = \Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\Big),$$
$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|} = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}} = \frac{1}{\sqrt{70}}(6, 3, 5) = \Big(\frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\Big).$$

Таким чином, маємо:

$$A' = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & -\sqrt{14} & 6 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{14} & 3 \\ -3\sqrt{5} & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}S = \begin{pmatrix} \sqrt{14} & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma\colon 14\,(x')^2 + 2\sqrt{14}\,x' + 2\sqrt{5}\,y' - 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma\colon 14\,(x' + \tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 + 2\sqrt{5}(y' - \tfrac{3}{\sqrt{5}}) = 0.$$

Після заміни $\xi' = \xi'' + \beta'$, де $\beta' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$, отримаємо рівняння поверхні

$$\gamma\colon 14\,(x'')^2 + 2\sqrt{5}y'' = 0.$$

Таким чином, поверхня γ являє собою параболічний циліндр. $\square$

10.4 Ортогональні оператори

Означення 124. Лінійний оператор $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ називається ізометричним, якщо він зберігає довжини векторів $\|\varphi(x)\| = \|x\|$.

Лінійний оператор $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ називається ортогональним, якщо він зберігає скалярний добуток $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$.

Теорема 154. *Наступні твердження є рівносильними.*

1) Оператор φ є ізометричним.

2) Оператор φ є ортогональним.

3) Оператор φ деякий ортонормований базис переводить в інший ортонормований базис.

4) Існує ортонормований базис, в якому матриця лінійного оператора φ є ортогональною.

5) Оператор φ є оберненим до свого спряженого $\varphi^{-1} = \varphi^*$.

Доведення. 1) $\Longrightarrow$ 2). Випливає з співвідношення $(\varphi(x+y), \varphi(x+y)) = (x+y, x+y)$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Нехай $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормований базис. Тоді система векторів $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ є ортонормованою, а отже, й базисом, оскільки $(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} — символ Кронекера.

3) $\Longrightarrow$ 4). Матриця оператора φ в першому базисі є також за означенням й матрицею переходу між ортонормованими базисами, а за твердженням 14 вона є ортогональною.

4) $\Longrightarrow$ 5). Нехай A — матриця оператора φ в деякому ортонормованому базисі. За умовою $A^T = A^{-1}$. За наслідком 26 з останньої рівності випливає, що $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

5) $\Rightarrow$ 1). Випливає з співвідношення $(x, x) = (\varepsilon(x), x) = (\varphi^*\varphi(x), x) = (\varphi(x), \varphi(x))$. □

Наслідок 30. *Ортогональний оператор є невиродженим.*

Доведення. Твердження випливає з невиродженості ортогональної матриці. □

Теорема 155. *Нехай $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ — ортогональний лінійний оператор. Якщо $U \subset \mathbb{E}$ є φ-інваріантним підпростором, то його ортогональне доповнення $U^\perp$ також є φ-інваріантним підпростором.*

Доведення. За теоремою 149 $U^\perp$ є φ^{-1}-інваріантним підпростором. Оскільки обмеження оператора φ^{-1} на підпростір $U^\perp$ є невиродженим, то $\varphi^{-1}(U^\perp) = U^\perp$, а отже, $\varphi(U^\perp) = U^\perp$. □

Лема 17. *Якщо λ — власне число*[3] *ортогонального оператора, то $\lambda \in \{1, -1\}$.*

Доведення. Якщо x — власний вектор ортогонального оператора φ, а λ — відповідне йому власне число, то $(x, x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2(x, x)$. Оскільки $(x, x) \neq 0$, то $\lambda = \pm 1$. □

Лема 18. *Кожне ортогональне перетворення площини $\mathbb{E}_2$ є поворотом або симетрією відносно деякої прямої (що проходить через початок координат).*

Доведення. Нехай $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — матриця ортогонального перетворення φ в деякому ортонормованому базисі. Тоді з умови $A^T A = E$ ортогональності матриці A випливає, що $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ або $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$. В першому випадку φ є поворотом на кут α. В другому випадку $\chi_A(t) = t^2 - 1$ і φ є симетрією відносно прямої, яка утворює з першим вектором базису кут $\dfrac{\alpha}{2}$. □

Теорема 156. *Лінійний оператор $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ є ортогональним тоді й лише тоді, коли в просторі $\mathbb{E}$ існує ортонормований базис, в якому матриця цього оператора має вигляд*

$$[\varphi] = \Pi(\alpha_1) \oplus \ldots \oplus \Pi(\alpha_k) \oplus J_1(1) \oplus \ldots \oplus J_1(1) \oplus J_1(-1) \oplus \ldots \oplus J_1(-1), \qquad (10.5)$$

де $\Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, *а* $J_1(1)$, $J_1(-1)$ *— жорданові клітини розмірності один.*

Матриця виду (10.5) називається канонічною матрицею ортогонального оператора φ, і базис, в якому вона має такий вигляд, називається канонічним.

Доведення. *Необхідність.* За теоремами 136 та 155 достатньо розглянути ортогональні оператори в одно- та двовимірному просторах. В одновимірному просторі за лемою 17 ортогональний оператор є множенням на ± 1. В двовимірному просторі за лемою 18 ортогональний оператор є поворотом на деякий кут α або симетрією відносно деякої прямої. В першому випадку матриця оператора φ має вигляд $\Pi(\alpha)$. В другому випадку існує ортонормований базис, в якому матриця оператора φ має вигляд $J_1(1) \oplus J_1(-1)$.

Достатність випливає з твердження 14 та теореми 154. □

[3]Зауважимо, що власне число лінійного оператора належить до поля, над яким розглядається векторний простір, і не кожен корінь характеристичного рівняння матриці лінійного оператора є його власним числом.

Зокрема, в тривимірному евклідовому просторі матриця довільного ортогонального оператора φ в певному ортонормованому базисі має один з двох видів: $\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. В першому випадку φ являє собою поворот на кут α навколо деякої вісі, а в другому — дзеркальний поворот, тобто поворот, поєднаний з відбиттям відносно площини, яка ортогональна вісі обертання. Зрозуміло, що дзеркальний поворот не може бути результатом неперервного руху, оскільки він змінює орієнтацію простору. Таким чином, кінцевий результат як завгодно складного реального руху твердого тіла з закріпленою точкою є таким же, як й при простому повороті навколо певної вісі на певний кут. Ця цілковито не тривіальна теорема називається теоремою Ойлера.

Приклад 35. Знайти канонічну матрицю та відповідний канонічний базис для ортогонального оператора φ, заданого в деякому ортонормованому базисі матрицею

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

► $$\chi_A(t) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2-3t & -1 & 2 \\ 2 & 2-3t & -1 \\ -1 & 2 & 2-3t \end{vmatrix} = (1-t)(t^2-t+1).$$

Таким чином, для матриці A маємо одне дійсне власне число $t_1 = 1$ та два комплексних

$$t_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}) \quad \text{і} \quad t_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3},$$

які є між собою комплексно спряженими.

Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1 = 1$ та $t_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При $t_1 = 1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (1,1,1).$$

При $t_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})\,x_3, \\ x_2 = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})\,x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ФСР: $\boldsymbol{f} = (-1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}, 2) = \boldsymbol{b}_2 + i\boldsymbol{b}_3$, де $\boldsymbol{b}_2 = (-1,-1,2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)$.

Нагадаємо (див. теорему 136), що для дійсних матриці A, векторів $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ і скалярів λ та μ з рівності

$$A(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = (\lambda + i\mu)(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x} - \mu\boldsymbol{y}) + i(\mu\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y})$$

випливають співвідношення

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} - \mu\boldsymbol{y}, \qquad A\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}.$$

В нашому випадку $\lambda = \dfrac{1}{2} = \cos(-\dfrac{\pi}{3})$, $\mu = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin(-\dfrac{\pi}{3})$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_3$.

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ ортогональна, а отже утворює базис простору. Проте цей базис не є нормованим. Пронормуємо СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),\\
\boldsymbol{f}_2 &= \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|} = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2),\\
\boldsymbol{f}_3 &= \frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|} = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0),
\end{aligned}$$

Отже, СВ $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ є ортонормованим базисом простору, в якому матриця ортогонального оператора φ є канонічною. Таким чином, маємо:

$$[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(-\frac{\pi}{3}) & \sin(-\frac{\pi}{3})\\ 0 & -\sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix},$$

$$T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

що підтверджується перевіркою за формулою $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = [\varphi]_{\boldsymbol{e}}T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$:

$$T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -2 & 0\\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$[\varphi]_{\boldsymbol{e}}T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -2 & 0\\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Елементи абстрактної алгебри

Мотивація переходу до лекції «Елементи абстрактної алгебри». Множина $O_n(\mathbb{R})$ всіх ортогональних операторів евклідового простору відносно множення утворює підгрупу групи $GL_n(\mathbb{R})$ всіх невироджених операторів. В свою чергу спеціальна ортогональна група $SO_n(\mathbb{R})$ є підгрупою ортогональної групи $O_n(\mathbb{R})$.

Циклічні групи

Теорема 157. *Нехай $(G, \cdot)$ — група. Множина $\langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ всіх цілих степенів довільного елемента $g \in G$ утворює підгрупу групи G.*

Означення 125. Підгрупа H групи G називається циклічною (породженою елементом g), якщо існує елемент $g \in H$ такий $H = \langle g \rangle$. Якщо при цьому $H = G$, то вся група G називається циклічною, породженою елементом g.

Найменше $n \in \mathbb{N}$ (якщо таке існує) називається порядком елемента $g \in G$ і позначається $|g| = n$, якщо $g^n = e$. Якщо такого числа не існує, то говорять, що елемент g має нескінченний порядок, і цей факт позначають $|g| = \infty$.

Теорема 158. *Якщо $|g| = n$, то $g^k = g^l$ тоді й лише тоді, коли $k \equiv l \pmod n$, зокрема, $g^m = e$ тоді й лише тоді, коли $m \vdots n$.*

Наслідок 31. $|\langle g \rangle| = |g|$.

Матриця $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ в мультиплікативній групі $GL_2(\mathbb{R})$ має порядок $|A| = 6$.

Теорема 159. *Якщо $|g| = n$, то $|g^k| = \dfrac{n}{\gcd(n, k)}$.*

Наслідок 32. *Якщо $|g| = n$, то $\langle g \rangle = \langle g^k \rangle$ тоді й лише тоді, коли $\gcd(n, k) = 1$.*

Група $\mathbb{C}_n$ коренів n-го степеня з одиниці є циклічною, а первісні корені n-го степеня з одиниці є її твірними.

Теорема 160. *Кожна нескінченна циклічна група ізоморфна групі $\mathbb{Z}$, а кожна скінченна циклічна група порядку n ізоморфна групі $\mathbb{Z}_n$.*

Теорема 161. *Кожна підгрупа циклічної групи є циклічною. В циклічній групі порядку n порядок довільної підгрупи є дільником числа n, і для кожного дільника m числа n існує і до того ж тільки одна підгрупа порядку m.*

Теорема 162. *Нехай $(G, \cdot)$ — група і $S \subset G$. Множина*

$$\langle S \rangle = \{g_1^{\varepsilon_1} g_2^{\varepsilon_2} \dots g_k^{\varepsilon_k} \mid g_1, g_2, \dots, g_k \in S;\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k \in \{1, -1\}\} \cup \{e\}$$

утворює підгрупу групи G, найменшу серед усіх, які містять підмножину S.

Означення 126. Якщо $H = \langle S \rangle$, то говорять, що підгрупа H породжується підмножиною S, а S є системою твірних підгрупи H. Зокрема, якщо $S = \{g\}$, то $H = \langle g \rangle$ є циклічною групою.

Підмножина $S \subset G$ називається незвідною системою твірних підгрупи H, якщо $H = \langle S \rangle$, проте для будь-якої підмножини $T \subsetneqq S$ виконується $H \neq \langle T \rangle$.

Група діедра D_n породжується поворотом на кут $\dfrac{2\pi}{n}$ і довільною симетрією. Симетрична група S_n породжується транспозиціями (ij). Незвідною системою твірних групи S_n при $n \geqslant 3$ є множина $\{(12), (12 \ldots n)\}$. Повна лінійна група $GL_n(\mathbb{R})$ породжується елементарними матрицями.

Суміжні класи

Нехай G — група і H — її підгрупа. Введемо на множині G два відношення $\sim_l$ та $\sim_r$:

$$g_1 \sim_l g_2 \iff g_1^{-1} g_2 \in H \quad \text{та} \quad g_1 \sim_r g_2 \iff g_1 g_2^{-1} \in H.$$

Вочевидь, відношення $\sim_l$ та $\sim_r$ є відношеннями еквівалентності. Клас еквівалентності за відношенням $\sim_l$ з представником g називається лівим суміжним класом групи G за підгрупою H і позначається gH. Клас еквівалентності за відношенням $\sim_r$ з представником g називається правим суміжним класом групи G за підгрупою H і позначається Hg. Вочевидь,

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \quad \text{та} \quad Hg = \{hg \mid h \in H\}.$$

Відображення $g \mapsto g^{-1}$ задає взаємно однозначну відповідність між множинами лівих та правих суміжних класів. А саме, $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$.

Поверхні другого порядку

Поле комплексних чисел $\mathbb{C}$

Означення 127.

Приклад 36.

$$FORMULA$$

□

Лема 19.

$$FORMULA$$

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою перевіркою. □

Твердження 16.

$$FORMULA$$

Теорема 163.

$$FORMULA$$

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою перевіркою. □

Доведення. *Необхідність.*

Достатність.

Існування.

Єдиність. □

Наслідок 33.

$$FORMULA$$

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою перевіркою. □

1°.
2°.
3°.
4°.
5°.
6°.
7°.
8°.
9°.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

Відповіді та вказівки

Література

[1] *Айгнер М., Циглер Г.* Доказательства из Книги. — М.: Мир, 2006. — 256 с.

[2] *Бородін О. І.* Теорія чисел. — К.: Радянська школа, 1965. — 264 с.

[3] *Бухштаб А. А.* Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966. — 384 с.

[4] *Гарднер М.* Крестики–нолики. — М.: Мир, 1988. — 352 с.

[5] Живые числа. — М.: Мир, 1985. — 128 с.

[6] *Крэндалл Р., Померанс К.* Простые числа: Криптографические и вычислительные аспекты. — М.: УРСС, 2011. — 664 с.

[7] *Олійник Б.* Різні доведення теореми Евкліда про нескінченність множини простих чисел // У світі математики. — 2006. — Т.12, вип. 4. — С. 47–53.

[8] *Серпинский В.* 250 задач по элементарной теории чисел. — М.: Просвещение, 1968. — 160 с.

[9] *Серпинский В.* Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. — М.: Физматгиз, 1963. — 92 с.

[10] *Трост Э.* Простые числа. — М.: Физматгиз, 1959. — 136 с.

[11] *Эвнин А.* Девятнадцать доказательств теоремы Евклида // Квант. — 2001. — № 1. — С. 35–38.

[12] *Ribenboim P.* The little book of bigger primes. — New York: Springer, 2004. — 356 p.

[13] http://primes.utm.edu/