

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Системне програмування та
спеціалізовані комп'ютерні системи»
спеціальності 123 Комп'ютерна інженерія

Укладач: К. О. Радченко

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2024

УДК 519.2(075.8)

Укладач: *Радченко Костянтин Олександрович*

Рецензент: *Марковський О. П.*, канд. техн. наук, доц. кафедри обчислювальної техніки факультету інформатики та обчислювальної техніки НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Відповідальний редактор: *Тесленко О. К.*, канд. техн. наук, доц. кафедри системного програмування і спеціалізованих комп'ютерних систем факультету прикладної математики НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 4 від 01.02.2024 р.)
за поданням вченої ради Факультету прикладної математики
(протокол № 6 від 25.12.2023 р.)*

Теорія ймовірностей і математична статистика. Збірник задач [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Системне програмування та спеціалізовані комп'ютерні системи» спец. 123 Комп'ютерна інженерія / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: К. О. Радченко. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 119 с.

Збірник задач призначений для використання студентами під керівництвом викладача на практичних заняттях та самостійно із теорії ймовірностей та математичної статистики. Завданням даного посібника є набуття студентами практичних навичок розв'язування задач з використанням теорії ймовірностей. Зміст глав відповідає основним темам курсу теорії ймовірностей у технічному вищому навчальному закладі. На початку кожного розділу вміщено короткі теоретичні відомості та формули. Майже всі задачі, які зібрані в посібнику, мають загальнотехнічний характер.

УДК 519.2(075.8)

Реєстр. № НП 23/24-259. Обсяг 5,2 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

Зміст

Вступ.....	5
Розділ 1. Теорія ймовірностей. Випадкові події	6
1.1. Події, операції над подіями	6
1.2. Класичне та статистичне визначення ймовірності	10
1.3. Геометрична ймовірність.....	14
Розділ 2. Основні теореми	18
2.1. Теореми додавання та множення ймовірностей	18
2.2. Ймовірність появи хоча б однієї події.....	21
Розділ 3. Повна та умовна ймовірності.....	24
3.1. Формула повної ймовірності.....	24
3.2. Формула Байєса.....	25
Розділ 4. Повторення випробувань.....	28
4.1. Формула Бернуллі	28
4.2. Локальна та інтегральна теореми Лапласа.....	29
4.3. Відхилення відносної частоти від постійної ймовірності	31
Розділ 5. Дискретні випадкові величини.	33
5.1. Найбільш імовірна кількість подій у незалежних випробуваннях	33
5.2. Твірна функція.....	34
5.3. Біноміальний закон розподілу.....	36
5.4. Пуассонівський закон розподілу.....	39
5.5. Найпростіший потік подій	40
Розділ 6. Числові характеристики дискретних випадкових величин	42
6.1. Основні числові характеристики	42
6.2. Теоретичні моменти.....	46
6.3. Закон великих чисел. Нерівність Чебишева.....	47
Розділ 7. Функції і щільності розподілу ймовірностей випадкових величин.....	49
7.1. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини	49
7.2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини.....	51
7.3. Числові характеристики неперервних випадкових величин.....	53
7.4. Рівномірний розподіл	58
7.5. Нормальний розподіл.....	60
7.6. Показниковий розподіл	65

7.7. Функція надійності	66
Розділ 8. Розподіл функції одного і двох випадкових аргументів	68
8.1. Функція одного випадкового аргументу	68
8.2. Функція двох випадкових аргументів	73
8.3. Закон розподілу двовимірної випадкової величини	78
8.4. Числові характеристики неперервної системи двох випадкових величин	84
Розділ 9. Математична статистика	88
9.1. Вибірковий метод	88
9.2. Полігон та гістограма	89
9.3. Точкові оцінки параметрів розподілу	92
9.4. Метод моментів	97
9.5. Інтервальні оцінки	102
Список літератури	110
Додатки	111
Додаток 1. Таблиця значень локальної функції Лапласа	111
Додаток 2. Таблиця значень інтегральної функції Лапласа	112
Додаток 3. Таблиця значень функції e^{-x}	113
Додаток 4. Розподіл Пуассона	114
Додаток 5. Таблиця значень $t_{\gamma} = t(\gamma, n)$	115
Додаток 6. Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$	115
Додаток 7. Таблиця значень критичних точок розподілу Пірсона	116
Додаток 8. Таблиця значень критичних точок розподілу Стьюдента ..	117
Додаток 9. Таблиця значень критичних точок F розподілу Фішера-Снедекора	118
Додаток 10. Рівномірно розподілені випадкові числа	119

Вступ

Теорія ймовірностей та математична статистика — самостійні математичні науки, які є теоретичною основою викладання багатьох інформаційних, технічних, економічних та спеціальних дисциплін.

Теорія ймовірностей — математична наука, яка вивчає закономірності в масових випадкових явищах. Вона є найбільш експериментальною з усіх математичних дисциплін. До задач теорії ймовірностей входить розробка загальних методів кількісних оцінок впливу випадкових факторів на різні явища реальної дійсності. Як і будь-яка наука, теорія ймовірностей має ряд основних первинних понять, на яких базуються всі теоретичні побудови й висновки. До них належать: стохастичний експеримент, випадкова подія, ймовірність, випадкова величина. Сутність цих понять розглядають, вивчаючи дисципліну. Зазначимо лише, що всі ці поняття є математичними абстракціями, які успішно використовують для характеристики реальних об'єктів.

Мета цього навчального посібника — ознайомити студентів інформаційних спеціальностей (а також усіх зацікавлених фахівців) з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей та математичної статистики, допомогти їм набути первинні навички застосування теоретичного матеріалу у повсякденному житті.

Посібник містить багато завдань для самостійної роботи студентів та поточного контролю якості одержаних знань та навичок, необхідні таблиці. Розподіл матеріалу на частини, розділи та підрозділи дозволяє виділяти головне і зосереджує на ньому увагу студента. На початку кожного параграфа наведено необхідні теоретичні відомості та формули.

Розділ 1. Теорія ймовірностей. Випадкові події

1.1. Події, операції над подіями

Стохастичним експериментом називається експеримент, який можна неодноразово повторювати за деяких незмінних умов і результат якого передбачити заздалегідь неможливо.

Подія – це будь-який результат стохастичного експерименту. Події бувають: елементарні, випадкові, неможливі, вірогідні. Елементарні події – це логічно єдино можливі результати експерименту, які взаємно виключають один одного. Кожному стохастичному експерименту ставиться у відповідність простір елементарних подій Ω , елементами якого є елементарні події ω .

Кожна випадкова подія A представляється як підмножина простору елементарних подій Ω . Неможлива подія – це порожня множина. Достовірна (вірогідна) подія – це весь простір Ω .

Подія A відбулася, якщо відбулася будь-яка подія $\omega \in A$. Над подіями виконують такі операції.

1. *Об'єднання подій $A \cup B$ – це подія, яка відбувається, якщо відбувається хоча б одна з подій A або B . Об'єднувати можна і нескінченну кількість подій*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

2. *Перетин подій $A \cap B$ – це подія, яка відбувається, якщо відбувається і подія A , і подія B . Перетинати можна і нескінченну кількість подій*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Дві події називаються несумісними, якщо $A \cap B = \emptyset$, тобто вони одночасно не відбуваються.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ утворюють повну групу подій:

а) якщо $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$;

б) якщо $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$; такі події називаються попарно несумісними.

3. *Доповнення події $\bar{A}$ (протилежна до A подія). Кожній події A можна поставити у відповідність протилежну подію $\bar{A}$, яка відбувається тоді, коли A не відбувається. Очевидно, що $A \cup \bar{A} = \Omega$ та $A \cap \bar{A} = \emptyset$.*

4. *Різниця $A \setminus B$ подій – це подія, що відбувається тоді, коли відбувається подія A і не відбувається подія B . Очевидно, що $\bar{A} = \Omega \setminus A$.*

Включення ($A \subset B$) означає, що подія B відбулася, якщо відбулася подія A . Тобто з появи події A випливає поява події B .

1. Нехай подія $A_i = \{i\}$ – група, яка в даний момент часу перебуває на заняттях}, $i=1,2,3$. Описати події: 1) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$; 2) $A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$; 3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; 4) $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$; 5) $(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$.

Розв'язок. Подія 1 означає, що всі групи в даний момент часу знаходяться на заняттях. Подія 2 означає, що лише перша та друга групи знаходяться на заняттях. Подія 3 означає, що принаймні одна з груп знаходиться на заняттях. Подія 4 є протилежною до події $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Вона означає, що жодна група не знаходиться на заняттях. Подія 5 означає, що в даний момент часу лише одна з груп знаходиться на заняттях.

2. На електричній схемі (рис. 1): вихід з ладу елемента a – це подія A , елемента b – подія B , елемента c – подія C . Через події A, B, C записати події $D = \{\text{схема не працює}\}$ та $\bar{D}$.

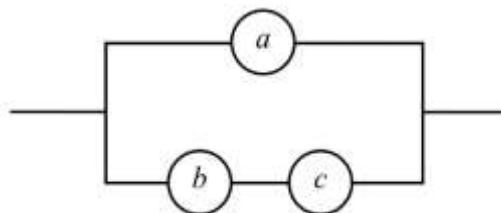


Рис. 1

Розв'язок. Схема не буде працювати, якщо вийде з ладу елемент a та принаймні один з елементів b або c , тому

$$D = A \cap (B \cup C).$$

Відповідно, якщо схема працює, то працюють елемент a або елементи b та c разом. Тому

$$\bar{D} = \bar{A} \cup (\bar{B} \cap \bar{C}).$$

3. По мішені зроблено два постріли. Розглянемо події: $A_0 = \{\text{промах у кожному пострілі}\}$, $A_1 = \{\text{одне влучення}\}$, $A_2 = \{\text{два влучення}\}$. Чи утворюють ці події повну групу?

4. Нехай події A та B означають влучення кулі відповідно у мішені A та B (рис. 2).

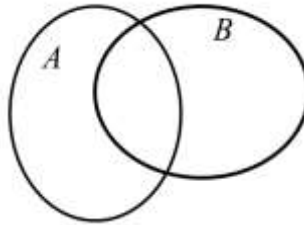


Рис. 2

Описати події $A \cap B, A \cup B, \bar{A} \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cup B}$

5. Нехай події A, B, C означають виконання вправ бойової стрільби курсантами A, B, C відповідно. Описати такі події: $A \cap B \cap C, A \cup B \cup C, A \cap \bar{B} \cap \bar{C}, \overline{A \cap B \cap C}, \overline{A \cup B \cup C}$.

6. На електричній схемі (рис. 3): подія A_i означає роботу елемента a_i , $i = 1, 2$; подія B_i – роботу елемента b_i , $i = 1, 2$; подія C_i – роботу елемента c_i , $i = 1, 2$. Записати події $D = \{\text{схема працює}\}$ та $\bar{D}$.

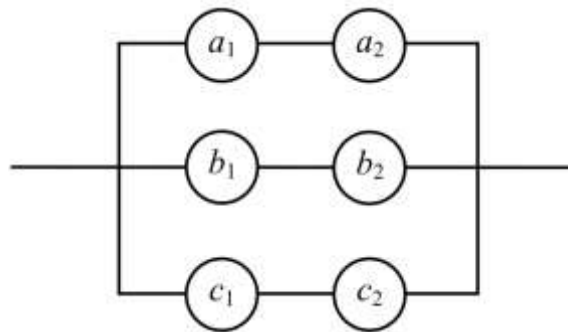


Рис. 3

7. На електричній схемі (рис. 4): вихід з ладу елемента a – це подія A , елементів b_k – подія B_k , $k = 1, 2, 3$. Записати події $C = \{\text{схема не працює}\}$, $\bar{C}$.

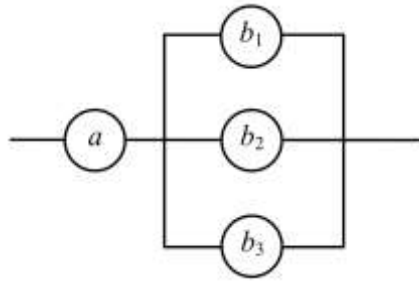


Рис. 4

8. Проведено радіолокаційне спостереження за групою, яка складається з 4 літаків. Розглянемо події: $A = \{\text{виявлено 1 літак}\}$, $B = \{\text{виявлено принаймні 1 літак}\}$, $C = \{\text{виявлено не менше 2 літаків}\}$, $D = \{\text{виявлено 2 літаки}\}$, $E = \{\text{виявлено 3 літаки}\}$, $F = \{\text{виявлено 4 літаки}\}$. Описати події: 1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $B \cup C$; 4) $B \cap C$; 5) $D \cup E \cup F$; 6) $B \cap F$.

9. По мішені зроблено два постріли. Розглянемо події: $A_1 = \{\text{принаймні одне влучення}\}$, $A_2 = \{\text{принаймні один промах}\}$. Чи утворюють ці події повну групу?

10. По мішені зроблено три постріли. Нехай подія $A_k = \{\text{отримано рівно } k \text{ влучень у мішень}\}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Чи утворюють події A_k повну групу?

11. Протягом деякого часу експлуатують два прилади. Розглянемо події: $A_1 = \{\text{прилади працюють}\}$, $A_2 = \{\text{один з приладів працює, а другий – ні}\}$, $A_3 = \{\text{прилади не працюють}\}$. Чи утворюють ці події повну групу?

12. В однакових умовах передають три повідомлення однакової довжини. Розглянемо події: $B_1 = \{\text{спотворено перше повідомлення}\}$, $B_2 = \{\text{спотворено друге повідомлення}\}$, $B_3 = \{\text{спотворено третє повідомлення}\}$. Чи утворюють ці події повну групу?

13. Два шахісти грають одну партію. Розглянемо події: $A = \{\text{виграє перший шахіст}\}$, $B = \{\text{виграє другий шахіст}\}$. Яку подію необхідно додати до означеної сукупності подій, щоб утворилася повна група подій?

14. Прилад складається з 2 блоків першого типу та 3 блоків другого типу.

Розглянемо події: $A_k = \{\text{працює } k\text{-й блок першого типу}\}$, $k=1,2$; $B_j = \{\text{працює } j\text{-й блок другого типу}\}$, $j=1,2,3$. Прилад працює, якщо працює принаймні один з блоків першого типу або не менше двох блоків другого типу. Записати подію $C = \{\text{прилад працює}\}$.

15. Знищення бойового літака може відбутися при влученні в кожний з двох двигунів (події D_1 та D_2) або при влученні в кабіну пілота (подія K). Проведено обстріл літака. Відбулася подія $A = \{\text{знищення літака}\}$. Описати простір елементарних подій. Записати подію A через події D_1, D_2, K .

16. На відрізок $[a, b]$ навмання ставлять дві точки. Нехай x та y – координати точок. Зобразити на площині XOY області, що відповідають подіям: $\Omega, A, B, A \cap B, A \setminus B, A \cup B$, де подія $A = \{\text{друга точка знаходиться ближче до лівого кінця відрізка, ніж перша точка до правого}\}$, подія $B = \{\text{відстань між точками менша за половину довжини відрізка}\}$.

1.2. Класичне та статистичне визначення ймовірності

Непорожня система підмножин f множини Ω називається алгеброю подій, якщо вона замкнена відносно операцій об'єднання та доповнення. Це означає:

$$A1. \Omega \in f;$$

$$A2. \forall A \in f, \forall B \in f \Rightarrow A \cup B \in f;$$

$$A3. \forall A \in f \Rightarrow \bar{A} \in f.$$

Якщо система підмножин f має нескінченну кількість подій, то замкненість операції об'єднання узагальнюється: для будь-яких подій $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in f \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in f$. У такому разі система підмножин f називається σ -алгеброю подій.

Простір елементарних подій Ω , на якому введена алгебра подій f (або σ -алгебра), називається вимірним простором стохастичного експерименту, який позначається через $\{\Omega, f\}$.

Припустимо, що кожній події $A \in f$ поставлено у відповідність число

$P(A)$, що задовольняє умови:

$$P1. \forall A \in \mathcal{f}: P(A) \geq 0;$$

$$P2. P(\Omega) = 1 \text{ (умова нормування);}$$

$$P3. \forall A_1, A_2, \dots, A_n \dots \in \mathcal{f}, \text{ таких, що } A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j;$$

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) - \text{(умова зчисленної адитивності).}$$

Для розв'язання деяких задач достатньо використання умови скінченної адитивності.

Твердження $A1, A2, A3, P1, P2, P3$ складають систему аксіом теорії ймовірностей. Вимірний простір $\{\Omega, \mathcal{f}\}$, на якому введена ймовірність, називається ймовірнісним простором.

Число $P(A)$ називається ймовірністю події A .

При класичному визначенні ймовірність події визначається рівністю

$$P(A) = m/n,$$

де m – кількість елементарних результатів випробування, що сприяють появі події A ; n – загальна кількість можливих елементарних результатів випробування. Передбачається, що елементарні наслідки утворюють повну групу та рівноможливі.

Відносна частота події A визначається рівністю

$$W(A) = m/n,$$

де m – кількість випробувань, в яких подія A настала; n – загальна кількість здійснених випробувань. При статистичному визначенні у якості ймовірності події приймають її відносну частоту.

17. При перевезенні ящика, в якому містилися 21 стандартна та 10 нестандартних деталей, втрачено одну деталь, причому невідомо яку. Довільно витягнута (після перевезення) з ящика деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що було втрачено: а) стандартну деталь; б) нестандартну деталь.

18. Задумано двозначне число. Знайти ймовірність те, що задуманим числом виявиться: а) випадково назване двозначне число; б) випадково

назване двоцифрове число, цифри якого різні.

19. Кинуті дві гральні кістки. Знайти ймовірності наступних подій: а) сума очок, що випали, дорівнює семи; б) сума очок, що випали дорівнює восьми, а різниця – чотирьом; в) сума очок, що випали, дорівнює восьми, якщо відомо, що їх різниця дорівнює чотирьом; г) сума очок, що випали, дорівнює п'яти, а добуток — чотирьом.

20. Куб, усі грані якого забарвлені, розпиляно на тисячу кубиків однакового розміру, які потім ретельно перемішані. Знайти ймовірність того, що довільно витягнутий кубик має забарвлених граней: а) одну; б) дві; в) три.

21. Монета кинута двічі. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз з'явиться «герб».

22. У коробці 6 однакових, пронумерованих кубиків. Навмання по одному витягують усі кубики. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих кубиків з'являться у порядку зростання.

23. Знайти ймовірність того, що при киданні трьох гральних кісток шістька випаде на одній (байдуже якій) кістці, якщо на гранях двох інших кісток випадуть числа очок, що не збігаються між собою (і не дорівнюють шести)

24. (*Задача Гюйгенса про гральні кістки*). При одночасному киданні трьох гральних кісток яка сума очок, що випали на них, повинна з'являтися частіше – 11 чи 12?

25. У ящику є 15 деталей, серед яких 10 пофарбованих. Складальник навмання витягує 3 деталі. Знайти ймовірність того, що витягнуті деталі виявляться пофарбовані.

26. У конверті серед 100 фотокарток знаходиться одна шукана. З конверту навмання витягнуто 10 карток. Знайти ймовірність, що серед них виявиться потрібна.

27. У ящику 100 деталей, із них 10 бракованих. Навмання вилучено 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед вилучених деталей: а) немає бракованих; б) немає стандартних.

28. Пристрій складається з 5 елементів, з яких 2 зношені. При включенні пристрою вмикаються випадково 2 елементи. Знайти ймовірність того, що увімкнутими виявляться незношені елементи.

29. Набираючи номер телефону, абонент забув останні 3 цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібні цифри

30. У партії з N деталей є n стандартних. Навмання відібрані m деталей. Знайти ймовірність того, що серед відібраних деталей рівно k стандартних.

31. У цеху працюють 6 чоловіків та 4 жінки. За табельними номерами навмання відібрано 7 осіб. Знайти ймовірність того, що серед відібраних осіб опиняться 3 жінок.

32. У групі 12 студентів, серед яких 8 відмінників. За списком навмання відібрано 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних студентів є 5 відмінників.

33. У коробці п'ять однакових виробів, причому три з них пофарбовані. Навмання витягнуто два вироби. Знайти ймовірність того, що серед двох витягнутих виробів виявляться: а) один пофарбований виріб; б) два пофарбовані вироби; в) хоча б один пофарбований виріб.

34. У кодовому замку на спільній осі 4 диски, кожен із яких розділений на 5 секторів, у яких написані різні цифри. Замок відкривається лише в тому випадку, якщо диски встановлені так, що цифри на них складають певне чотиризначне число. Знайти ймовірність того, що при довільному встановленні дисків замок буде відкритий.

35. На трамвайній зупинці 9 пасажирів чекають трамвай, який має три вагони. Кожен пасажир вибирає вагон навмання. Знайти ймовірності подій: 1) $A = \{\text{у перший вагон зайдуть три пасажери}\}$; 2) $B = \{\text{у кожний вагон зайдуть по три пасажери}\}$.

36. У ціль було здійснено 20 пострілів, причому зареєстровано 18 влучень. Знайти відносну частоту попадань у ціль.

37. При випробуванні партії приладів відносна частота придатних приладів дорівнювала 0,9. Знайти кількість придатних приладів, якщо було перевірено 200 приладів.

1.3. Геометрична ймовірність

Нехай простір елементарних подій Ω інтерпретується як область на числовій осі (площині, у просторі), яка має відповідно довжину (площу або об'єм). Розглянемо σ -алгебру $\mathcal{f}$ всіх підмножин Ω , які мають довжину (відповідно площу або об'єм). Нехай подія $A \in \mathcal{f}$. Тоді маємо формулу геометричної ймовірності

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

де $\mu(A)$ – довжина (площа, об'єм) області A ; $\mu(\Omega)$ – довжина (площа, об'єм) області Ω .

Нехай відрізок l складає частину відрізка L . На відрізок L навмання поставлена точка. Якщо припустити, що ймовірність попадання точки на відрізок l пропорційна довжині цього відрізка і не залежить від його розташування щодо відрізка, то ймовірність попадання точки на відрізок L визначається рівністю

$$P = l/L$$

Нехай плоска фігура площею g становить частину плоскої фігури G . На фігуру G довільним чином кинута точка. Якщо припустити, що ймовірність потрапляння кинutoї точки на фігуру g пропорційна площі цієї фігури і не залежить ні від її розташування щодо G , ні від форми g , то ймовірність попадання точки в фігуру g визначається рівністю

$$P = \text{Площа } g / \text{Площа } G.$$

Аналогічно визначається ймовірність влучення точки в просторову фігуру v , яка становить частину фігури V :

$$P = \text{Об'єм } v / \text{Об'єм } V.$$

38. На відрізок L довжини 20 см розміщено менший відрізок l довжини 10

см. Знайти ймовірність того, що точка, навмання поставлена на більший відрізок, потрапить також і на менший відрізок. Передбачається, що можливість попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування.

39. У коло радіусу R вміщено менше коло радіуса r . Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута у велике коло, потрапить також і у мале коло. Передбачається, що ймовірність попадання точки в коло пропорційна площі кола і не залежить від його розташування.

40. На площину, розграфлену паралельними прямими, що віддалені одна від одної відстанню 6 см, навмання кинута коло радіуса 1 см. Знайти ймовірність того, що коло не перетне жодної з прямих. Передбачається, що можливість попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування.

41. На площині накреслено два концентричні кола, радіуси яких 5 і 10 см відповідно. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання у велике коло, потрапить також і в кільце, утворене цими колами. Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

42. Всередину кола радіусу R навмання кинута точка. Знайти ймовірність того, що точка виявиться усередині вписаного в коло: а) квадрата; б) правильного трикутника. Передбачається, що ймовірність влучення точки в частину кола пропорційна площі цієї частини і не залежить від її розташування щодо кола.

43. Диск, що швидко обертається, розділений на парне число рівних секторів, по чергово забарвлених у білий і чорний колір. По диску зроблено постріл. Знайти ймовірність того, що куля потрапить до одного з білих секторів. Передбачається, що ймовірність влучення кулі в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури.

44. (Задача Бюфона – французький дослідник природи XVIII ст.). Площина

розграфлена паралельними прямими, що віддалені одна від одної відстанню $2a$. На площину навмання кидають голку довжиною $2l$ ($l < a$). Знайти ймовірність того, що голка перетне якусь пряму.

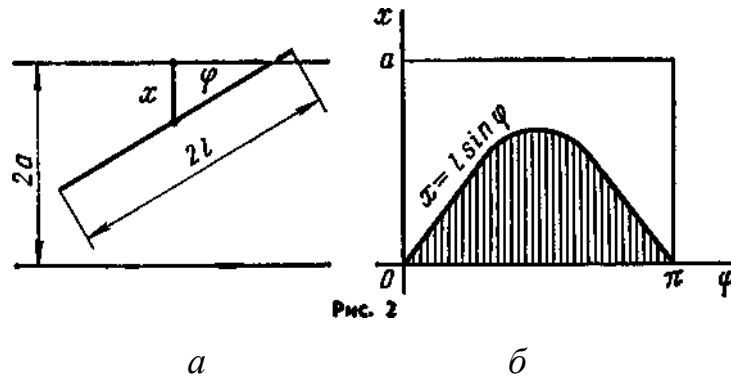


Рис. 5

Розв'язок. Введіть такі позначення: x – відстань від середини голки до найближчої паралелі; φ – кут, що утворює голка з цією паралеллю (рис. 5, а). Положення голки повністю визначається завданням певних значень x і φ , причому x набуває значень від 0 до a ; можливі значення φ змінюються від 0 до π . Іншими словами, середина голки може потрапити в будь-яку точку прямокутника зі сторонами a і π (рис. 5, б). Таким чином, цей прямокутник можна розглядати як фігуру G , точками якої є всі можливі положення середини голки. Очевидно, площа фігури G дорівнює $a\pi$.

Знайдемо тепер фігуру g , кожна точка якої сприяє цікавій для нас події, тобто кожна точка цієї фігури може служити серединою голки, яка перетинає найближчу до неї паралель. Як видно із рис. 5, а голка перетне найближчу до неї паралель за умови $x < l \sin \varphi$, тобто якщо середина голки потрапить в будь-яку з точок фігури, заштрихованої на рис. 5, б.

Таким чином, заштриховану фігуру можна розглядати як фігуру g . Знайдемо площу цієї фігури: $g = 2l$. Шукана ймовірність того, що голка перетне пряму $P = g/G = 2l/(\pi a)$.

45. (Задача про зустріч). Два студенти домовилися зустрітися у певному місці між 12 та 13 годинами дня. Той хто прийшов першим, чекає другого протягом $1/4$ години, після чого йде. Знайти ймовірність того, що зустріч

відбудеться, якщо кожен студент навмання вибирає момент свого приходу (у проміжку від 12 до 13 години).

46. Дві групи туристів А і В мають переправитися через річку по одній і тій же переправі. Групи підходять до переправи незалежно одна від одної протягом двох годин. Групі А для переправи потрібно 30 хв, а групі В – 15 хв. Яка ймовірність того, що жодна з груп не буде чекати переправи?

Розділ 2. Основні теореми

2.1. Теореми додавання та множення ймовірностей

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Імовірність появи однієї з двох несумісних подій, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Наслідок. Імовірність появи однієї з кількох попарно несумісних подій, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій. Імовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їхньої сумісної появи:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

Теорема може бути узагальнена на будь-яку кінцеву кількість спільних подій. Наприклад, для трьох спільних подій

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Теорема множення ймовірностей. Імовірність сумісної появи двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену у припущенні, що перша (друга) подія вже настала:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P_B(A)P(B).$$

Зокрема, для незалежних подій

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Тобто ймовірність спільної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Наслідок. Імовірність спільної появи кількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності решти, причому ймовірність кожної наступної події обчислюють у припущенні, що всі попередні події вже настали:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n),$$

де $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ — ймовірність події A_n , обчислена у припущенні, що події $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ настали.

Зокрема, ймовірність спільної появи кількох подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n).$$

47. На стелажі бібліотеки у випадковому порядку розставлено 15 підручників, причому п'ять із них у палітурці. Бібліотекар бере навмання три підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б один із взятих підручників опиниться в палітурці (подія А).

48. У ящику 10 деталей, із яких 4 пофарбовані. Складальник навмання взяв 3 деталі. Знайти ймовірність того, що хоч би одна з взятих деталей пофарбована.

49. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючі сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що під час аварії спрацює лише один сигналізатор.

50. Дві стрілки стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,7, а для другого 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в ціль потрапляє лише один зі стрільців.

51. Ймовірність одного попадання в ціль при одному залпі з двох гармат дорівнює 0,38. Знайти ймовірність влучення у ціль при одному пострілі першою гарматою, якщо відомо, що для другої гармати ця ймовірність дорівнює 0,8.

52. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з двох перевірених виробів лише один стандартний.

53. Ймовірність того, що при одному вимірі деякої фізичної величини буде допущена помилка, що перевищує задану точність, дорівнює 0,4. Зроблено

три незалежні виміри. Знайти ймовірність того, що лише в одному з них допущена помилка перевищить задану точність.

54. З партії виробів товаровознавець відбирає вироби найвищого гатунку. Ймовірність того, що навмання взятий виріб виявиться вищого гатунку, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з трьох перевірених виробів лише два вироби найвищого гатунку.

55. Пристрій складається з трьох елементів, які працюють незалежно. Ймовірності безвідмовної роботи (за час t) першого, другого та третього елементів відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність того, що за час t безвідмовно працюватимуть: а) лише один елемент; б) лише два елементи; в) усі три елементи.

56. Кинуті три гральні кістки. Знайти ймовірності наступних подій: а) на кожній з граней, що випали, з'явиться п'ять очок; б) на всіх гранях, що випали, з'явиться однакове кількість очок.

57. Кинуті три гральні кістки. Знайти ймовірності наступних подій: а) на двох гранях, що випали, з'явиться одне очко, а на третій грані-інше кількість очок; б) на двох гранях, що випали, з'явиться однакове кількість очок, а на третій грані-інше кількість очок; в) на всіх гранях з'явиться різне кількість очок.

58. Скільки треба кинути гральних кісток, щоб із ймовірністю, меншою за 0,3, можна було очікувати, що на жодній із граней, що випали, не з'явиться шість очок?

59. Ймовірність влучення в ціль стрільцем при одному пострілі дорівнює 0,8. Скільки пострілів повинен зробити стрілок, щоб із ймовірністю, меншою за 0,4, можна було очікувати, що не буде жодного промаху?

60. Відрізок поділено на три рівні частини. На цей відрізок навмання кинуто три точки. Знайти ймовірність того, що на кожну із трьох частин відрізка попадає по одній точці. Вважається, що можливість попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його

розташування.

61. У читальному залі є шість підручників з теорії ймовірностей, з яких три в палітурці. Бібліотекар навмання взяв два підручники. Знайти ймовірність того, що обидва підручники опиняться у палітурці.

62. Серед 100 лотерейних білетів є 5 виграшних. Знайти ймовірність того, що 2 довільним чином вибрані квитки виявляться виграшними.

63. У цеху працюють сім чоловіків та троє жінок. За табельними номерами навмання відібрано троє людей. Знайти ймовірність того, що всі відібрані особи виявляться чоловіками.

64. У ящику 10 деталей, серед яких шість пофарбованих. Складальник навмання витягує чотири деталі. Знайти ймовірність того, що всі витягнуті деталі виявляться забарвленими.

65. У урні є п'ять куль з номерами від 1 до 5. Навмання по одному витягують три кулі без повернення. Знайти ймовірність наступних подій: а) послідовно з'являться кулі з номерами 1, 4, 5; б) вилучені кулі матимуть номери 1, 4, 5 незалежно від того, в якій послідовності вони з'явилися.

66. Студент знає 20 із 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає запропоновані йому екзаменатором три запитання.

67. У мішечку міститься 10 однакових кубиків з номерами від 1 до 10. Навмання витягують по одному три кубики. Знайти ймовірність, що послідовно з'являться кубики з номерами 1, 2, 3, якщо кубики витягуються: а) без повернення; б) із поверненням (витягнутий кубик повертається у мішечок).

2.2. Ймовірність появи хоча б однієї події

Нехай події $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні в сукупності, причому $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_n) = p_n$; нехай у результаті випробування можуть наступити чи всі події, чи частина з них, чи жодна з них.

Ймовірність настання події A , що полягає в появі хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і

добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

де $q_i = 1 - p_i, i = \overline{1, n}$.

Зокрема, якщо всі події мають однакову ймовірність, рівну p , то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій

$$P(A) = 1 - q^n.$$

68. В електричне коло послідовно включені три елементи, що працюють незалежно один від одного. Імовірності відмов першого, другого та третього елементів відповідно дорівнюють: $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,15$; $p_3 = 0,2$. Знайти ймовірність того, що струму в колі не буде.

69. Пристрій містить два незалежно працюючі елементи. Імовірності відмови елементів відповідно дорівнюють 0,05 та 0,08. Знайти ймовірність відмови пристрою, якщо для цього достатньо, щоб відмовив хоча б один елемент.

70. Для зруйнування мосту достатньо влучення однієї авіаційної бомби. Знайти ймовірність того, що міст буде зруйнований, якщо на нього скинути чотири бомби, ймовірності влучення яких відповідно дорівнюють: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

71. Три дослідники, незалежно один від одного, виконують виміри деякої фізичної величини. Імовірність того, що перший дослідник припуститься помилки при зчитуванні показань приладу, дорівнює 0,1. Для другого та третього дослідників ця ймовірність відповідно дорівнює 0,15 та 0,2. Знайти ймовірність того, що при одноразовому вимірі хоча б один із дослідників припуститься помилки.

72. Імовірність успішного виконання вправи кожного з двох спортсменів дорівнює 0,5. Спортсмени виконують вправу по черзі, причому кожен робить дві спроби. Той, хто виконав вправу першим – отримує приз. Знайти можливість отримання призу спортсменами.

73. Імовірність влучення в ціль кожним із двох стрільців дорівнює 0,3.

Стрілки стріляють по черзі, причому кожен має зробити по два постріли. Той, хто влучив у ціль першим – отримує приз. Знайти ймовірність, що стрілки отримають приз.

74. Ймовірність хоча б одного влучення стрільцем у ціль при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі.

75. Ймовірність хоча б одного влучення в ціль при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність попадання в ціль за одного пострілу.

76. Багаторазово вимірюють певну фізичну величину. Ймовірність того, що при зчитуванні показань приладу допущено помилку, дорівнює p . Знайти найменшу кількість вимірювань, яке необхідно зробити, щоб з ймовірністю $p > a$ можна було очікувати, що хоча б один результат вимірів виявиться неправильним.

Розділ 3. Повна та умовна ймовірності

3.1. Формула повної ймовірності

Ймовірність події A , яка може відбутися лише при появі однієї з неsumісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу ($P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$), дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з гіпотез на відповідну умовну ймовірність події A :

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A).$$

Представлене рівняння називають формулою повної ймовірності.

77. В урну, що містить дві кулі, опущена біла куля, після чого з неї навмання вилучено одну кулю. Знайти ймовірність того, що витягнута куля виявиться білою, якщо рівноможливі всі можливі припущення про початковий склад куль (за кольором).

78. У обчислювальній лабораторії є шість клавішних автоматів і чотири напівавтомати. Ймовірність того, що за час виконання деякого розрахунку автомат не вийде з ладу, дорівнює 0,95; для напівавтомата ця можливість дорівнює 0,8. Студент здійснює розрахунок на удачу обраній машині. Знайти ймовірність того, що до закінчення розрахунку машина не вийде з ладу.

79. У піраміді п'ять гвинтівок, три з яких мають оптичний приціл. Ймовірність те, що стрілок вразить мішень під час пострілу з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що ціль буде вражена, якщо стрілець зробить один постріл з довільно взятої гвинтівки.

80. У першій урні міститься 10 куль, з них 8 білих; у другій урні 20 куль, з них 4 білих. З кожної урни навмання витягли по одній кулі, а потім з цих двох куль навмання взято одну кулю. Знайти ймовірність того, що взята біла куля.

81. У кожній із трьох урн міститься 6 чорних та 4 білих куль. З першої урни навмання вилучено одну кулю і перекладено в другу урну, після чого з другої урни навмання вилучено одну кулю і перекладено в третю урну. Знайти

ймовірність того, що куля, навмання витягнута з третьої урни, виявиться білою.

82. Імовірність того, що під час роботи комп'ютера відбудеться збій в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті, в периферійних пристроях, відносяться як 3:2:5. Ймовірності виявлення збою в арифметичному пристрої, оперативної пам'яті та периферійних пристроях відповідно дорівнюють 0,8; 0,9; 0,9. Знайти ймовірність того, що збій, який виник у машині, буде виявлений.

3.2. Формула Байєса

Нехай подія A може наступити лише за умови появи однієї з несумісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу подій. Якщо подія A вже відбулася, то ймовірності гіпотез можуть бути переоцінені за формулами Байєса

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)} \quad (i = \overline{1, n}),$$

де $P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A)$ – це формула повної ймовірності.

83. Два автомати виробляють однакові деталі, які надходять на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата вдвічі більша за продуктивність другого. Перший автомат виробляє середньому 60% деталей відмінної якості, а другий — 84%. Довільним чином узята з конвеєра деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь зроблена першим автоматом.

84. У піраміді 10 гвинтівок, з яких 4 мають оптичний приціл. Ймовірність те, що стрілок вразить мішень під час пострілу з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця можливість дорівнює 0,8. Стрілець вразив мішень із навмання взятої гвинтівки. Що ймовірніше: стрілець стріляв із гвинтівки з оптичним прицілом чи без нього?

85. Кількість вантажних автомашин, що проїжджають по шосе, на якому

стоїть бензоколонка, відноситься до кількості легкових машин, що проїжджають тим же шосе як 3:2. Імовірність того, що заправлятиметься вантажна машина, дорівнює 0,1; для легкової машини ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки підїхала для заправки машина. Знайти ймовірність, що це вантажна машина.

86. У спеціалізовану лікарню надходять у середньому 50% хворих із захворюванням К, 30% - із захворюванням L, 20%-з захворюванням М. Імовірність повного лікування хвороби К дорівнює 0,7; для хвороб L і М ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,8 і 0,9. Хворий, який вступив до лікарні, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що цей хворий страждав на захворювання К.

87. Виріб перевіряється на стандартність одним із двох товарознавців. Імовірність того, що виріб потрапить до першого товарознавця, дорівнює 0,55, а до другого – 0,45. Імовірність того, що стандартний виріб буде визнаний стандартним першим товарознавцем, дорівнює 0,9, а другим – 0,98. Стандартний виріб під час перевірки було визнано стандартним. Знайти ймовірність того, що цей виріб перевіряв другий товарознавець.

88. Є три партії деталей по 20 деталей у кожній. Кількість стандартних деталей у першій, другій і третій партіях відповідно дорівнює 20, 15, 10. З удачу обраної партії навмання вилучено деталь, що виявилася стандартною. Деталь повертають у партію і вдруге з тієї ж партії навмання витягують деталь, яка також виявляється стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі витягли з третьої партії.

89. Батарея з трьох гармат зробила залп, причому два снаряди потрапили в ціль. Знайти ймовірність того, що перша гармата влучила у ціль, якщо ймовірності влучення в ціль першою, другою і третьою гарматами відповідно дорівнюють $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,5$.

90. Три стрільці зробили залп, причому дві кулі вразили мішень. Визначити ймовірність того, що третій стрілець вразив мішень, якщо

ймовірності попадання в ціль першим, другим і третім стрілками відповідно дорівнюють 0,6, 0,5 і 0,4.

91. Два із трьох незалежно працюючих елементів обчислювального пристрою відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили перший та другий елементи, якщо ймовірності відмови першого, другого та третього елементів відповідно дорівнюють 0,2; 0,4 та 0,3.

92. Дві із чотирьох незалежно працюючих ламп приладу відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили перша та друга лампи, якщо ймовірності відмови першої, другої, третьої та четвертої ламп відповідно дорівнюють: $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,3$ та $p_4 = 0,4$.

Розділ 4. Повторення випробувань

4.1. Формула Бернуллі

Якщо відбуваються випробування, у яких ймовірність появи події A у кожному випробуванні залежить від результатів інших випробувань, такі випробування називають незалежними щодо події A .

Формула Бернуллі. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0 < p < 1$), подія настане рівно k разів (не важливо в якій послідовності) дорівнює

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$\text{де } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, q=1-p.$$

Ймовірність того, що в n випробуваннях подія настане: 1) менше k разів; 2) більше k разів; 3) не менше k разів; 4) не більше k разів, — знаходять відповідно за формулами:

$$P_n(m < k) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1)$$

$$P_n(m > k) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n)$$

$$P_n(m \geq k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$$

$$P_n(m \leq k) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$$

93. Два рівносильні супротивники грають у шахи. Що більш імовірно: а) виграти одну партію з двох чи дві партії з чотирьох? б) виграти не менше двох партій із чотирьох чи не менше трьох партій із п'яти? Нічийї до уваги не беруться.

94. Монету кидають п'ять разів. Знайти ймовірність, що «герб» випаде: а) менше двох разів; б) щонайменше двічі.

95. У сім'ї п'ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) два хлопчики; б) не більше двох хлопчиків; в) більше двох хлопчиків; г) не менше двох та не більше трьох хлопчиків. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51.

96. Відрізок AB розділений точкою C у співвідношенні 2:1. На цей

відрізок навмання кинуть чотири точки. Знайти ймовірність того, що дві з них виявляться ліворуч від точки С і дві – правіше. Вважається, що можливість попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування.

97. Відрізок поділено на чотири рівні частини. На відрізок навмання кинуть вісім точок. Знайти ймовірність того, що на кожен із чотирьох частин відрізка потрапить по дві точки. Вважається, що можливість попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування.

4.2. Локальна та інтегральна теореми Лапласа

Локальна теорема Лапласа. Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0 < p < 1$), подія настане рівно k разів (байдуже, в якій послідовності) приблизно дорівнює (тим точніше, чим більше n):

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

$$\text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблиця функції $\varphi(x)$ для додатніх значень наведена в додатку 1; для від'ємних значень x через парність функції $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Інтегральна теорема Лапласа. Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0 < p < 1$), подія настане не менше ніж k_1 разів і не більше k_2 разів, приблизно дорівнює

$$P(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

$$\text{Тут } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функція Лапласа, } x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблиця функції Лапласа для додатніх значень x ($0 \leq x \leq 5$) наведена в додатку 2; для значень $x > 5$ приймають $\Phi(x) = 0,5$. Для від'ємних значень x використовують цю ж таблицю, враховуючи, що функція Лапласа непарна

$$[\Phi(-x) = -\Phi(x)].$$

98. Знайти ймовірність того, що подія А настане рівно 70 разів у 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події у кожному випробуванні дорівнює 0,25.

99. Знайти ймовірність того, що подія А настане 1400 разів у 2400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події у кожному випробуванні дорівнює 0,6.

100. Імовірність ураження мішені за одного пострілу дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде вражена рівно 75 разів.

101. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність, що серед 100 новонароджених виявиться 50 хлопчиків.

102. Імовірність появи події у кожному зі 100 незалежних випробувань постійна і дорівнює $p = 0,8$. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) не менше ніж 75 разів і не більше 90 разів; б) не менше 75 раз; в) не більше 74 раз.

103. Імовірність появи події у кожному з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) не менше ніж 1470 і не більше 1500 разів; б) не менше ніж 1470 разів; в) не більше 1469 разів.

104. Імовірність появи події у кожному з 21 незалежного випробування дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться у більшості випробувань.

105. Імовірність появи події у кожному із незалежних випробувань дорівнює 0,8. Скільки потрібно зробити випробувань, щоб із ймовірністю 0,9 можна було очікувати, що подія з'явиться не менше ніж 75 разів?

106. Імовірність появи позитивного результату в кожному з дослідів дорівнює 0,9. Скільки потрібно зробити дослідів, щоб із ймовірністю 0,98 можна було очікувати, що не менше 150 дослідів дадуть позитивний результат?

4.3. Відхилення відносної частоти від постійної ймовірності

Оцінка відхилення відносної частоти постійної ймовірності.

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p , абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від ймовірності появи події не перевищить деякого числа $\varepsilon > 0$, приблизно дорівнює подвоєній функції Лапласа при $x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

107. Ймовірність появи події у кожному з 900 незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

108. Ймовірність появи події у кожному з 10 000 незалежних випробувань дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01.

109. Французький вчений Бюффон (XVIII ст.) кинув монету 4040 разів, причому герб з'явився 2048 разів. Знайти ймовірність того, що при повторенні досліду Бюффона відносна частота появи «герба» відхилиться від ймовірності появи герба за абсолютною величиною не більше ніж у досліді Бюффона.

110. Ймовірність появи події у кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти кількість випробувань n , при якому з ймовірністю 0,7698 очікується, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

111. Ймовірність появи події у кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти найменше кількість випробувань n , при якому з ймовірністю 0,99 очікується, що відносна частота появи події відхилиться від

його ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,04.

112. У урні містяться білі та чорні кулі у співвідношенні 4:1. Після вилучення кулі реєструється її колір і вона повертається в урну. Чому дорівнює найменша кількість витягів n , при якому з ймовірністю 0,95 очікується, що абсолютна величина відхилення відносної частоти появи білої кулі від її ймовірності буде не більше ніж 0,01?

113. Ймовірність появи події у кожному із 400 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти таке додатне число ε , щоб із ймовірністю 0,99 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від його ймовірності 0,8 не перевищила ε .

114. Ймовірність появи події у кожному з 900 незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти таке додатне число ε , щоб із ймовірністю 0,77 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від його ймовірності 0,5 не перевищила ε .

115. Ймовірність появи події у кожному з 10 000 незалежних випробувань дорівнює 0,75. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю 0,98 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від його ймовірності 0,75 не перевищила ε .

116. Відділ технічного контролю перевіряє стандартність 900 деталей. Ймовірність того, що деталь є стандартною, дорівнює 0,9. Знайти з ймовірністю 0,95 межі, в яких буде знаходитись m кількість стандартних деталей серед перевірених.

117. Відділ технічного контролю перевіряє 475 виробів на брак. Ймовірність того, що виріб бракований, дорівнює 0,05. Знайти з ймовірністю 0,95 межі, в яких буде знаходитись m кількість бракованих виробів серед перевірених.

118. Гральну кістку кидають 80 разів. Знайти з ймовірністю 0,99 межі, в яких буде лежати кількість m випадів шістки.

Розділ 5. Дискретні випадкові величини.

5.1. Найбільш імовірна кількість подій у незалежних випробуваннях

Число k_0 (настання події в незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p) називають найімовірнішим, якщо ймовірність того, що подія настане в цих випробуваннях k_0 разів, перевищує (або принаймні не менше) ймовірності інших можливих результатів випробувань.

Найімовірніше число k_0 визначають з подвійної нерівності

$$np - q \leq k_0 < np + p,$$

причому:

а) якщо число $np - q$ – дробове, то існує одне найімовірніше число k_0 ;

б) якщо число $np - q$ – ціле, то є два найімовірніших числа: k_0 і $k_0 + 1$;

в) якщо число np – ціле, то найімовірніше число $k_0 = np$.

119. Випробовується кожен із 15 елементів деякого пристрою. Імовірність того, що елемент витримає випробування дорівнює 0,9. Знайти найбільш імовірну кількість елементів, які витримують випробування.

120. Відділ технічного контролю перевіряє партію із 10 деталей. Імовірність того, що деталь є стандартною, дорівнює 0,75. Знайти найбільш імовірну кількість деталей, які будуть визнані стандартними.

121. Два рівносильні супротивники грають у шахи. Знайти найбільш імовірну кількість вигравів для будь-якого шахіста, якщо буде зіграно 2 результативних (без нічиїх) партій.

122. Дві стрілки стріляють по мішені. Імовірність промаху при одному пострілі для першого стрілка дорівнює 0,2, а для другого - 0,4. Визначити найбільш імовірну кількість залпів, у яких не буде жодного влучення у ціль, якщо стрілки зроблять 25 залпів.

123. Два стрільці одночасно стріляють по мішені. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,8, а для другого – 0,6. Визначити найбільш імовірну кількість залпів, при яких обидва

стрілка потраплять у ціль, якщо буде зроблено 15 залпів.

124. Імовірність появи події у кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,3. Знайти кількість випробувань n , при якому найбільш імовірна кількість появи події в цих випробуваннях дорівнюватиме 30.

125. Чому дорівнює ймовірність p настання події в кожному з 49 незалежних випробувань, якщо найбільш імовірна кількість настання події в цих випробуваннях дорівнює 30?

126. Чому дорівнює ймовірність p появи події в кожному з 39 незалежних випробувань, якщо найбільш імовірна кількість настання події в цих випробуваннях дорівнює 25?

127. Батарея здійснила шість пострілів по об'єкту. Імовірність влучення в об'єкт з одного пострілу дорівнює 0,3. Знайти: а) найбільш імовірну кількість влучень; б) ймовірність найбільш імовірної кількості влучень; в) ймовірність того, що об'єкт буде зруйнований, якщо для цього достатньо хоча б двох влучень.

128. Прилад складається із п'яти незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови елемента в момент увімкнення приладу дорівнює 0,2. Знайти: а) найбільш імовірну кількість елементів, що відмовили; б) ймовірність найбільш імовірної кількості елементів, що відмовили; в) ймовірність відмови приладу, якщо для цього достатньо, щоб відмовили хоча б чотири елементи.

5.2. Твірна функція

До цього ми розглядали випробування з однаковими ймовірностями появи події; тепер розглянемо випробування, у яких ймовірність появи події різні.

Нехай відбувається n незалежних випробувань, причому в першому випробуванні ймовірність появи події A дорівнює p_1 , в другому – p_2 , ..., в n -му випробуванні – p_n ; ймовірності неяви події A відповідно дорівнюють $q_1, q_2, \dots, q_n$; $P_n(k)$ — ймовірність появи події A в n випробуваннях рівно k разів.

Твірною функцією ймовірностей $P_n(k)$ називають функцію, що визначається рівністю

$$\varphi_n(t) = (p_1t + q_1)(p_2t + q_2) \dots (p_nt + q_n).$$

Імовірність $P_n(k)$ того, що в n незалежних випробуваннях, у першому з яких ймовірність появи події A дорівнює p_1 , у другому p_2 тощо, подія A з'явиться рівно k разів, дорівнює коефіцієнту при t^k в розкладі твірної функції за степенями t . Наприклад, якщо $n = 2$, то

$$\varphi_2(t) = (p_1t + q_1)(p_2t + q_2) = p_1p_2t^2 + (p_1q_2 + p_2q_1)t + q_1q_2.$$

Тут коефіцієнт при t^2 дорівнює ймовірності $P_2(2)$ того, що подія A з'явиться рівно два рази в двох випробуваннях; коефіцієнт при t дорівнює ймовірності $P_2(1)$ того, що подія A з'явиться рівно один раз; коефіцієнт при t^0 , тобто вільний член дорівнює ймовірності $P_2(0)$ того, що подія A не з'явиться жодного разу.

До речі, якщо у різних випробуваннях з'являються різні події (у першому випробуванні подія A_1 (у другому — подія A_2 тощо), то змінюється лише тлумачення коефіцієнтів при різних степенях t . Наприклад, у наведеному вище розкладі коефіцієнт p_1p_2 буде визначати ймовірність появи двох подій A_1 та A_2 .

129. Пристрій складається із трьох незалежно працюючих елементів. Імовірності безвідмовної роботи елементів (за час t) відповідно дорівнюють: $p_1 = 0,7$; $p_2 = 0,8$; $p_3 = 0,9$. Знайти ймовірність того, що за час t працюватимуть безвідмовно: а) всі елементи; б) два елементи; в) один елемент; г) жоден із елементів.

130. З двох гармат зроблено залп у ціль. Імовірність влучення в ціль для першої гармати дорівнює $0,8$, для другої — $0,9$. Знайти ймовірності наступних подій: а) два влучення в ціль; б) одне влучення; в) жодного влучення; г) не менше одного влучення.

131. З трьох гармат зробили постріл у мішень. Імовірність влучення в ціль для першої гармати дорівнює $0,8$, для другої — $0,85$, для третьої — $0,9$. Знайти

ймовірності наступних подій: а) три влучення в ціль; б) два влучення; в) одне влучення; г) жодного влучення; д) хоча б одне влучення.

132. Чотири елементи обчислювального пристрою працюють незалежно. Імовірність відмови першого елемента за час t дорівнює 0,2, другого – 0,25, третього – 0,3, четвертого – 0,4. Знайти ймовірність того, що за час t відмовлять: а) 4 елементи; б) 3 елементи; в) 2 елементи; г) 1 елемент; д) жоден елемент; е) не більше двох елементів.

133. Дві батареї по 3 гармати кожна виконують залп по мішені. Ціль буде вражена, якщо кожна з батарей дасть не менше двох влучень. Імовірності влучення в ціль гарматами першої батареї дорівнюють 0,4; 0,5; 0,6, другої – 0,5; 0,6; 0,7. Знайти ймовірність ураження цілі при одному залпі з двох батарей.

5.3. Біноміальний закон розподілу

Дискретною називають випадкову величину, можливі значення якої є окремі ізольовані значення (тобто між двома сусідніми можливими значеннями немає проміжних значень), які ця величина набуває з певними ймовірностями. Іншими словами, можливі значення дискретної випадкової величини можна пронумерувати. Кількість можливих значень дискретної випадкової величини може бути кінцевою або нескінченною (в останньому випадку множину всіх можливих значень називають зліченною).

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають перелік її можливих значень та відповідних їм ймовірностей. Закон розподілу дискретної випадкової величини X може бути заданий у вигляді таблиці, перший рядок якої містить можливі значення x_i , а другий – ймовірності p_i :

$$X: x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_n$$

$$P: p_1 p_2 p_3 p_4 \dots p_n$$

$$\text{де } \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Якщо множина можливих значень X нескінченна (зліченна), ряд $p_1 + p_2 + \dots$ збігається та його сума дорівнює одиниці.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X може бути заданий аналітично (у вигляді формули)

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i)$$

або за допомогою функції розподілу.

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно, для чого в прямокутній системі координат будують точки $M_1(x_1; p_1)$, $M_2(x_2; p_2)$, ..., $M_n(x_n; p_n)$ (x_i – можливі значення X , p_i – відповідні ймовірності) і з'єднують їх відрізками прямих. Отриману фігуру називають багатокутником розподілу.

Біноміальним називають закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості появи події в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ; ймовірність можливого значення $X = k$ (кількості k появи події) обчислюють за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

134. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

а)	X	2	4	5	6	б)	X	10	15	20
	p	0,3	0,1	0,2	0,4		p	0,1	0,7	0,2

Побудувати багатокутник розподілу.

135. Пристрій складається із трьох незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента в одному досліді дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу кількості елементів, що відмовили, в одному досліді.

136. У партії є 10% нестандартних деталей. Навмання відібрано чотири деталі. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X — кількості нестандартних деталей серед чотирьох відібраних та побудувати багатокутник одержаного розподілу.

137. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X кількості появ «герба» при двох киданнях монети.

138. Дві гральні кістки одночасно кидають двічі. Написати

біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X - випадання парної кількості очок на двох гральних кістках.

139. У партії із 10 деталей є 8 стандартних. Навмання відібрано дві деталі. Скласти закон розподілу кількості стандартних деталей серед відібраних

140. У партії із шести деталей є чотири стандартні деталі. Навмання відібрано три деталі. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості стандартних деталей серед відібраних.

141. Після відповіді студента на запитання екзаменаційного квитка екзаменатор ставить студенту додаткові запитання. Викладач припиняє ставити додаткові питання, як тільки студент виявляє незнання цього питання. Імовірність того, що студент відповість на будь-яке задане додаткове питання, дорівнює 0,9. Потрібно: а) скласти закон розподілу випадкової дискретної величини X — кількості додаткових питань, які поставить викладач студенту; б) знайти найімовірніше кількість k_0 заданих студенту додаткових питань.

142. Ймовірність того, що стрілок поцілить у мішень при одному пострілі, дорівнює 0,8. Стрілку видаються набой доти, допоки він не промахнеться. Потрібно: а) скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості набойів, виданих стрілку; б) знайти найімовірнішу кількість виданих стрілку набойів.

143. З двох гармат по черзі ведеться стрілянина у ціль до першого влучення однією з гармат. Імовірність влучення в ціль першою гарматою дорівнює 0,3, другою – 0,7. Починає вогонь перша гармата. Скласти закони розподілу дискретних випадкових величин X і Y – кількості витрачених снарядів відповідно першою і другою гарматами.

144. Два бомбардувальники по чергово скидають бомби на ціль до першого влучення. Імовірність влучення в ціль першим бомбардувальником дорівнює 0,7, другим – 0,8. Спочатку скидає бомби перший

бомбардувальник. Скласти перші чотири члени закону розподілу дискретної випадкової величини X - кількості скинутих бомб обома бомбардувальниками (тобто обмежитися можливими значеннями X , рівними 1, 2, 3 і 4).

5.4. Пуассонівський закон розподілу

Якщо кількість випробувань велика, а ймовірність появи події у кожному випробуванні дуже мала, то використовують наближену формулу

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

де k – кількість появи події в n незалежних випробуваннях, $\lambda = np$ (середня кількість появи події в n випробуваннях), і кажуть, що випадкова величина розподілена за законом Пуассона.

145. Підручник виданий тиражем 100 000 екземплярів. Імовірність того, що підручник зброшурований неправильно, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить п'ять бракованих книг.

146. Пристрій складається з 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента протягом часу T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час T відмовить рівно три елементи.

147. Верстат штампує деталі. Імовірність того, що виготовлена деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей виявиться рівно чотири браковані.

148. Завод надіслав на склад 500 виробів. Імовірність пошкодження виробу в дорозі дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що в дорозі буде пошкоджено виробів: а) рівно три; б) менше трьох; в) більше трьох; г) хоча б один.

149. Магазин одержав 1000 пляшок мінеральної води. Імовірність того, що при перевезенні пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин отримає розбитих пляшок: а) рівно дві; б)

менше двох; в) більше двох; г) хоча б одну.

150. Імовірність виграшу по одному лотерейному квитку $p = 0,01$. Скільки потрібно купити квитків, щоб виграти хоча б по одному з них із ймовірністю P , не меншою, ніж $0,95$?

5.5. Найпростіший потік подій

Потоком подій називають послідовність подій, що настають у випадкові моменти часу.

Найпростішим (пуассонівським) називають потік подій, який має наступні три властивості: стаціонарність, відсутність післядії і ординарність.

*Властивість **стаціонарності** полягає в тому, що ймовірність появи k подій у будь-якому проміжку часу залежить тільки від кількості k та від тривалості t проміжку часу та не залежить від початку його відліку. Іншими словами, ймовірність появи до подій за проміжок часу тривалістю t є функція, яка залежить тільки від k і t .*

*Властивість **відсутності післядії** полягає в тому, що ймовірність появи k подій у будь-якому проміжку часу не залежить від того, з'являлися або не з'являлися події в моменти часу, що передують початку проміжку, що розглядається. Іншими словами, передісторія потоку не впливає на ймовірність появи подій у найближчому майбутньому.*

*Властивість **ординарності** полягає в тому, що поява двох або більше подій за малий проміжок часу практично неможлива. Інакше кажучи, ймовірність появи більше ніж однієї події за малий проміжок часу зневажливо мала порівняно з ймовірністю появи лише однієї події.*

Інтенсивністю потоку λ називають середню кількість подій, що настають за одиницю часу.

Якщо стала інтенсивність потоку λ відома, то ймовірність появи k подій найпростішого потоку за час t визначається формулою Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Потік, що має властивість стаціонарності, називають стаціонарним; в іншому випадку-нестационарним.

151. Середня кількість замовлень таксі, що надходять диспетчеру за одну хвилину, дорівнює трьом. Знайти ймовірність того, що за 2 хв надійде: а) чотири виклики; б) менше чотирьох дзвінків; в) не менше чотирьох дзвінків.

152. Середня кількість викликів, що надходять диспетчеру за одну хвилину, дорівнює двом. Знайти ймовірність того, що за 4 хв надійде: а) три виклики; б) менше трьох дзвінків; в) не менше трьох дзвінків. Потік викликів передбачається найпростішим.

Розділ 6. Числові характеристики дискретних випадкових величин

6.1. Основні числові характеристики

Характеристикою середнього значення випадкової величини є математичне сподівання.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини називають суму добутків всіх її можливих значень з відповідною їм ймовірністю:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Якщо дискретна випадкова величина приймає зліченну множину можливих значень, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

причому математичне сподівання існує, якщо ряд правої частини рівності є абсолютно збіжним.

Математичне сподівання має такі властивості.

1. *Математичне сподівання постійної величини дорівнює цій сталій:*

$$M(C) = C.$$

2. *Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання:*

$$M(CX) = CM(X).$$

3. *Математичне сподівання добутку взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань співмножників:*

$$M(X_1 X_2 \dots X_n) = M(X_1) * M(X_2) \dots M(X_n).$$

4. *Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків:*

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n).$$

Математичне сподівання біноміального розподілу дорівнює добутку кількості випробувань на ймовірність появи події в одному випробуванні:

$$M(X) = np.$$

Характеристиками розсіювання можливих значень випадкової величини навколо математичного сподівання є, зокрема, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Дисперсію зручно обчислювати за формулою

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Дисперсія має такі властивості.

1. Дисперсія постійної дорівнює нулю:

2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, попередньо піднесши його до квадрату:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій доданків:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n).$$

Дисперсія біноміального розподілу дорівнює добутку кількості випробувань на ймовірності появи та неяви події в одному випробуванні:

$$D(X) = npq.$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називають квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

153. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X , заданої законом розподілу:

а)	X	-4	6	10.	б)	X	0,21	0,54	0,61
	p	0,2	0,3	0,5		p	0,1	0,5	0,4

154. Знайти математичне сподівання випадкової величини Z , якщо відомі математичні сподівання X і Y :

а) $Z = X + 2Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$; б) $Z = 3X + 4Y$, $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$.

155. Дискретна випадкова величина X приймає три можливі значення: $x_1 = 4$ з ймовірністю $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ з ймовірністю $p_2 = 0,3$ та x_3 з ймовірністю p_3 . Знайти x_3 та p_3 , знаючи, що $M(X) = 8$.

156. Наведено перелік можливих значень дискретної випадкової величини X : $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а також відомі математичні сподівання цієї величини та її квадрата: $M(X) = 0,1$, $M(X^2) = 0,9$. Знайти ймовірності p_1 , p_2 , p_3 , які відповідають можливим значенням x_1 , x_2 , x_3 .

157. Наведено перелік можливих значень дискретної випадкової величини X : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а також відомі математичні сподівання цієї величини та її квадрата: $M(X) = 2,3$, $M(X^2) = 5,9$. Знайти ймовірності, що відповідають можливим значенням X .

158. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X – кількості таких кидань п'яти гральних кісток, у кожному з яких двох кістках з'явиться по одному очку, якщо загальна кількість кидків дорівнює двадцяти.

159. Пристрій складається з n елементів. Ймовірність відмови будь-якого елемента під час дослідів дорівнює p . Знайти математичне сподівання кількості таких дослідів, у кожному з яких відмовить рівно m елементів, якщо зроблено N дослідів. Вважається, що досліди незалежні один від одного.

160. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб стандартний, дорівнює $0,9$. Кожна партія містить п'ять виробів. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X – кількості партій, у кожній з яких виявиться рівно чотири стандартні вироби, – якщо перевірці підлягає 50 партій.

161. Випадкові величини X та Y незалежні. Знайти дисперсію випадкової величини $Z = 3X + 2Y$, якщо відомо, що $D(X) = 5$, $D(Y) = 6$.

162. Випадкові величини X та Y незалежні. Знайти дисперсію випадкової величини $Z = 2X + 3Y$, якщо відомо, що $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$.

163. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної

випадкової величини X , заданої законом розподілу:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

164. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X , заданої законом розподілу:

а) X	4,3	5,1	10,6	б) X	131	140	160	180.
p	0,2	0,3	0,5	p	0,05	0,10	0,25	0,60

165. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – кількості появи події A в п'яти незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи подій A в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

166. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – кількості відмов елемента деякого пристрою в десяти незалежних дослідах, якщо можливість відмови елемента в кожному досліді дорівнює 0,9.

167. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – кількості появи події A в двох незалежних випробуваннях, якщо ймовірності появи події в цих випробуваннях однакові і відомо, що $M(X) = 1,2$.

168. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – кількості появи події A в двох незалежних випробуваннях, якщо ймовірності появи події в цих випробуваннях однакові і відомо, що $M(X) = 0,9$.

169. Дискретна випадкова величина X має лише два можливі значення x_1 та x_2 , причому $x_2 > x_1$. Імовірність того, що X набуде значення x_1 , дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу величини X , якщо математичне сподівання та дисперсія відомі: $M(X) = 1,4$; $D(X) = 0,24$.

170. Дискретна випадкова величина X має лише два можливі значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,2. Знайти закон розподілу X , знаючи математичне сподівання $M(X) = 2,6$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = 0,8$.

171. Дискретна випадкова величина X має лише три можливі значення: $x_1 = 1$, x_2 і x_3 , причому $x_1 < x_2 < x_3$. Імовірність того, що X прийме значення x_1 і x_2

відповідно дорівнюють 0,3 і 0,2. Знайти закон розподілу величини X , знаючи її математичне сподівання $M(X) = 2,2$ та дисперсію $D(X) = 0,76$.

6.2. Теоретичні моменти

Початковим моментом порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k :

$$\nu_k = M(X^k)$$

Зокрема, початковий момент першого порядку дорівнює математичному сподіванню:

$$\nu_1 = M(X)$$

Центральним моментом порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k$$

Зокрема, центральний момент першого порядку дорівнює нулю:

$$\mu_1 = M(X - M(X)) = 0;$$

центральний момент другого порядку дорівнює дисперсії:

$$\mu_2 = M(X - M(X))^2 = D(X).$$

Центральні моменти доцільно обчислювати, використовуючи формули, що виражають центральні моменти через початкові:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

172. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	2	3	5
p	0,1	0,4	0,5

Знайти початкові моменти першого, другого та третього порядків.

173. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

Знайти центральні моменти першого, другого, третього та четвертого

порядків.

174. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	3	5
p	0,2	0,8

Знайти центральні моменти першого, другого, третього та четвертого порядків. Попередньо знайти початкові моменти та виразити через них центральні моменти.

6.3. Закон великих чисел. Нерівність Чебишева

Нерівність Чебишева. Ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання по абсолютній величині менше додатнього числа ε , не менше ніж $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

175. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання менш ніж на три середні квадратичних відхилення.

176. Довести нерівність Чебишева у формі

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Скористайтесь тим, що події $|X - M(X)| < \varepsilon$ та $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ – протилежні.

177. Використовуючи нерівність Чебишева у формі, наведеній у задачі 195, оцінити ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання не менше ніж на два середні квадратичних відхилення.

178. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,2$, якщо $D(X) = 0,004$.

179. Дано: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0,9$ і $D(X) = 0,009$. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ε знизу.

180. Пристрій складається з 10 незалежно-працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента за час T дорівнює 0,05. За допомогою

нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів, що відмовили, і середньою кількістю (математичним сподіванням) відмов за час T виявиться: а) менше двох; б) не менше двох.

181. В мережу освітлення паралельно включено 20 ламп. Імовірність того, що за час лампа T буде включена, дорівнює 0,8. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом включених ламп та середньою кількістю (математичним сподіванням) включених ламп за час T виявиться: а) менше трьох; б) не менше трьох.

182. Імовірність появи події A у кожному випробуванні дорівнює $1/2$. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що кількість X появи події A лежить в межах від 40 до 60, якщо буде проведено 100 незалежних випробувань.

183. Імовірність появи події у кожному випробуванні дорівнює $1/4$. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що кількість X події події укладено в межах від 150 до 250, якщо буде проведено 800 випробувань.

184. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,2$.

185. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

186. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < \sqrt{0,4}$.

Розділ 7. Функції і щільності розподілу ймовірностей випадкових величин

7.1. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини

Функцією розподілу називають функцію $F(x)$, що визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше за x , тобто.

$$F(x) = P(X < x).$$

Часто замість терміну "функція розподілу" використовують термін "інтегральна функція розподілу".

Типовий графік функції розподілу зображено на рис. 6.

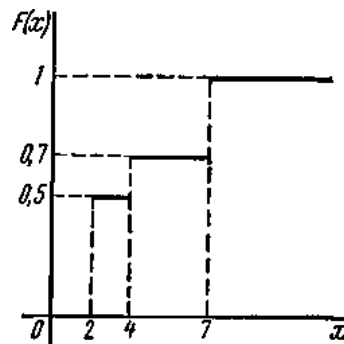


Рис. 6.

Функція розподілу має такі властивості:

1. Значення функції розподілу належать відрізку $[0; 1]$:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. Функція розподілу є неспадною функцією:

$$F(x_2) \geq F(x_1), \text{ якщо } x_2 > x_1.$$

3. Імовірність того, що випадкова величина X набуде значення, що лежить на інтервалі (a, b) , дорівнює зростанню функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде одного певного значення, наприклад x_1 , дорівнює нулю:

$$P(X = x_1) = 0.$$

5. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать до

інтервалу (a, b) , тоді

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a; F(x) = 1 \text{ при } x \geq b.$$

Функція розподілу неперервна зліва.

187. Випадкова величина X задана на всій осі Ox функцією розподілу $F(x) = 1/2 + (\operatorname{arctg} x)/\pi$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X набуде значення, що лежить на інтервалі $(0, 1)$.

188. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) & \text{якщо } -2 < x \leq 2 \\ 1 & \text{якщо } x > 2 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X набуде значення, що лежить на інтервалі $(-1, 1)$.

189. Функція розподілу неперервної випадкової величини X (часу безвідмовної роботи деякого пристрою) дорівнює $F(x) = 1 - e^{-x/T}$ ($x \geq 0$). Знайти можливість безвідмовної роботи пристрою за час $x \geq T$.

190. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x & \text{якщо } 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{якщо } x > 4 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення: а) менше 0,2; б) менше трьох; в) не менше трьох; г) не менше ніж п'ять.

191. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq 0 \\ x^2 & \text{якщо } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань величина X рівно три рази набуде значення, що лежить на інтервалі $(0,25, 0,75)$.

192. Випадкова величина X задана по всій осі Ox функцією розподілу $F(x) = (1/2) + (1/\pi)\operatorname{arctg}(x/2)$. Знайти можливе значення x_1 , що задовольняє умові: з

ймовірністю $1/6$ випадкова величина X в результаті випробування набуде значення, більше ніж x_1 .

193. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3

Знайти функцію розподілу $F(x)$ та накреслити її графік.

7.2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

Щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини називають першу похідну від функції розподілу: $f(x) = F'(x)$.

Часто замість терміну "щільність розподілу" використовують терміни "щільність ймовірностей" та "диференціальна функція".

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (a, b) , визначається рівністю

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Знаючи щільність розподілу, можна знайти функцію розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

Щільність розподілу має наступні властивості:

1. Щільність розподілу невід'ємна, тобто $f(x) \geq 0$.
2. Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює одиниці: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Зокрема, якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b) , тоді

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

194. Дано функцію розподілу неперервної випадкової величини X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{якщо } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$.

195. Дана функція розподілу неперервної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq 0 \\ \sin(2x) & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{якщо } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$.

196. Неперервна випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x) = (3/2)\sin(3x)$ на інтервалі $(0, \pi/3)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти ймовірність того, що X набуде значення, що належить інтервалу $(\pi/6, \pi/4)$.

197. Неперервна випадкова величина X на інтервалі $(0, \infty)$ задається щільністю розподілу $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ ($\alpha > 0$); поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти ймовірність того, що X набуде значення, що належить інтервалу $(1, 2)$.

198. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X на інтервалі $(-\pi/2, \pi/2)$ дорівнює $f(x) = (2/\pi) \cos^2 x$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти ймовірність того, що у трьох незалежних випробуваннях X прийме рівно два рази значення, що лежить на інтервалі $(0, \pi/4)$.

199. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{якщо } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

200. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{якщо } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

201. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq 1 \\ x - 1/2 & \text{якщо } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

202. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq \frac{\pi}{6} \\ 3 \sin(3x) & \text{якщо } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3} \\ 0 & \text{якщо } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

203. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X задана на всій осі Ox рівнянням $f(x) = 4C/(e^x + e^{-x})$. Знайти постійний параметр C .

204. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X задана на всій осі Ox рівнянням $f(x) = 2C/(1+x^2)$. Знайти постійний параметр C .

205. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X на інтервалі $(0, \pi/2)$ дорівнює $f(x) = C \sin(2x)$; поза цим інтервалом $f(x)=0$. Знайти постійний параметр C .

206. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X задана на інтервалі $(0, 1)$ рівнянням $f(x) = C \operatorname{arctg} x$, поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти постійний параметр C .

7.3. Числові характеристики неперервних випадкових величин

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X , можливі значення якої належать до всієї осі Ox , визначається рівністю

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

де $f(x)$ – щільність розподілу випадкової величини X . Вважається, що інтеграл збігається абсолютно.

Зокрема, якщо всі можливі значення належать до інтервалу (a, b) , тоді

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Якщо $Y = \varphi(X)$ – функція випадкового аргументу X , можливі значення якого належать до інтервалу (a, b) , тоді

$$M(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(x)f(x)dx.$$

Якщо існує математичне сподівання $M(X)$ і крива розподілу симетрична відносно прямої $x=C$, тоді $M(X)=C$.

Модую $M_0(X)$ неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає локальний максимум щільності розподілу. Зокрема, якщо розподіл має два однакові максимуми, то його називають бімодальним.

Медіаною $M_e(X)$ неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, яке визначається рівністю

$$P[X < M_e(X)] = P[X > M_e(X)].$$

Геометрично медіану можна витлумачити як точку, в якій ордината $f(x)$ ділить навпіл площу, що обмежена кривою розподілу.

Дисперсія неперервної випадкової величини X , можливі значення якої належать до всієї осі Ox , визначається рівнянням

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx,$$

або рівносильним рівнянням

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - M(X)^2.$$

Зокрема, якщо всі можливі значення X належать до інтервалу (a, b) , тоді

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 f(x) dx - (M(X))^2.$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини визначається так само, як і для дискретної величини:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Якщо $Y = \varphi(X)$ – функція випадкового аргументу X , причому можливі значення X належать до інтервалу (a, b) , тоді

$$D(\varphi(X)) = \int_a^b [\varphi(x) - M(\varphi(X))]^2 f(x) dx = \int_a^b \varphi(x)^2 f(x) dx - M(\varphi(X))^2.$$

Початковий теоретичний момент порядку k неперервної випадкової величини X визначається рівністю

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Центральний теоретичний момент порядку k неперервної випадкової величини X визначається рівністю

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x) dx.$$

Зокрема, якщо всі можливі значення X належать до інтервалу (a, b) , тоді

$$\nu_k = \int_a^b x^k f(x) dx; \quad \mu_k = \int_a^b (x - M(X))^k f(x) dx.$$

Вочевидь, що якщо $k = 1$, тоді $\nu_1 = M(X)$, $\mu_1 = 0$; якщо $k = 2$, тоді $\mu_2 = D(X)$.

Центральні моменти виражаються через початкові моменти за

формулами:

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4.$$

207. Випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x) = 2x$ на інтервалі $(0, 1)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання величини X .

208. Випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x) = (1/2)x$ на інтервалі $(0; 2)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання величини X .

209. Випадкова величина X на інтервалі $(-c, c)$ задається щільністю розподілу $f(x) = 1/\pi\sqrt{c^2 - x^2}$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання величини X .

Розв'язок. Використовуємо формулу $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$. Підставимо $a=-c, b=c, f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}$, отримаємо

$$M(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{x dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}.$$

Враховуючи, що підінтегральна функція непарна та межі інтегрування симетричні щодо початку координат, робимо висновок, що інтеграл дорівнює нулю. Отже, $M(X) = 0$. Цей результат можна отримати відразу, якщо взяти до уваги, що крива розподілу симетрична відносно прямої $x=0$.

210. Випадкова величина X задається щільністю ймовірності (розподіл Лапласа $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)e^{-|x|}$). Знайти математичне сподівання величини X .

211. Випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x)=c(x^2 + 2x)$ на інтервалі $(0, 1)$; поза цим інтервалом $f(x)=0$. Знайти: а) параметр c ; б) математичне сподівання величини X .

212. Знайти математичне сподівання випадкової величини X , заданої функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq 0 \\ x/4 & \text{якщо } 0 < x \leq 4 \\ 1 & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

213. Випадкова величина X , можливі значення якої невід'ємні, задана функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ ($\alpha > 0$). Знайти математичне сподівання величини X .

214. Випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x) = (1/2)\sin x$ на інтервалі $(0, \pi)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання функції $Y = \varphi(X) = X^2$ (не знаходячи попередньо щільності розподілу Y).

215. Випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x) = \cos x$ на інтервалі $(0, \pi/2)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання функції $Y = \varphi(X) = X^2$ (не знаходячи попередньо щільності розподілу Y).

216. Випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x) = x + 0,5$ на інтервалі $(0, 1)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання функції $Y = X^3$ (не знаходячи попередньо щільності розподілу Y).

217. Випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x) = 2\cos 2x$ на інтервалі $(0, \pi/4)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти а) моду; б) медіану X .

218. Випадкова величина X на інтервалі $(2, 4)$ задається щільністю розподілу $f(x) = -(3/4)x^2 + (9/2)x - 6$, поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти моду, математичне сподівання та медіану величини X .

Розв'язок. Представимо щільність розподілу у вигляді $f(x) = -(3/4)(x-3)^2 + (3/4)$. Звідси видно, що при $x=3$ щільність розподілу досягає максимуму; отже, $M_0(X) = 3$. (Звичайно, можна було знайти максимум методами диференціального числення.) Крива розподілу симетрична щодо прямої $x = 3$, тому $M(X) = 3$ і $M_e(X) = 3$.

219. Випадкова величина X на інтервалі $(3, 5)$ задається щільністю розподілу $f(x) = -(3/4)x^2 + 6x - 45/4$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти моду,

математичне сподівання та медіану X .

220. Випадкова величина X на інтервалі $(-1, 1)$ задається щільністю розподілу $f(x) = 1/\pi\sqrt{1-x^2}$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти: а) моду; б) медіану X .

221. Випадкова величина X на інтервалі $(0, \pi)$ задається щільністю розподілу $f(x) = (1/2) \sin x$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти дисперсію X .

222. Випадкова величина X на інтервалі $(0, 5)$ задається щільністю розподілу $f(x) = (2/25) x$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти дисперсію X .

223. Знайти дисперсію випадкової величини X , заданої функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq -2 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{якщо } -2 < x \leq 2 \\ 1 & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

224. Довести, що для будь-якої неперервної випадкової величини центральний момент першого порядку дорівнює нулю.

225. Випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x) = 0,5 x$ на інтервалі $(0, 2)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти початкові та центральні моменти першого, другого, третього та четвертого порядків.

226. Випадкова величина X задана густиною розподілу $f(x) = 2x$ на інтервалі $(0, 1)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти початкові та центральні моменти першого, другого, третього та четвертого порядків.

7.4. Рівномірний розподіл

Рівномірним називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X , якщо на інтервалі (a, b) , якому належать всі можливі значення X , щільність зберігає постійне значення, а саме $f(x) = 1/(b-a)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$.

227. Щільність рівномірного розподілу зберігає на інтервалі (a, b) постійне значення, що дорівнює C ; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти значення постійного параметра C .

228. Ціна розподілу шкали амперметра дорівнює $0,1$ А. Показання

округлюють до найближчого цілого значення. Знайти ймовірність того, що при вимірюванні буде зроблено помилку, що перевищує 0,02 А.

Розв'язок. Помилку округлення відліку можна розглядати як випадкову величину X , яка розподілена рівномірно на інтервалі між двома сусідніми цілими поділками. Щільність рівномірного розподілу $f(x) = 1/(b-a)$, де $(b-a)$ – це довжина інтервалу, на якому лежать можливі значення X ; поза цим інтервалом $f(x)=0$. У даній задачі довжина інтервалу, на якому лежать можливі значення X , дорівнює 0,1, тому $f(x) = 1/0,1 = 10$. Легко бачити, що помилка вимірювання перевищить 0,02, якщо вона буде лежати на інтервалі $(0,02; 0,08)$.

За формулою $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$ отримаємо

$$P(0,02 < X < 0,08) = \int_{0,02}^{0,08} 10 dx = 0,6.$$

229. Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,2. Показання приладу округлюють до найближчої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблено помилку: а) меншу за 0,04; б) більшу ніж 0,05.

230. Автобуси деякого маршруту йдуть за розкладом. Інтервал руху 5 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме на черговий автобус менше 3 хв.

231. Хвилинка стрілка електричного годинника переміщається стрибком наприкінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в цю мить годинник покаже час, який відрізняється від справжнього не більше ніж на 20 с.

232. Закон рівномірного розподілу заданий щільністю ймовірності $f(x) = 1/(b-a)$ на інтервалі (a, b) ; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти функцію розподілу $F(x)$.

233. Знайти математичне сподівання випадкової величини X , що рівномірно розподілена на інтервалі (a, b) .

234. Знайти математичне сподівання випадкової величини X , що

рівномірно розподілена на інтервалі (2, 8).

235. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , що рівномірно розподілена на інтервалі (a, b).

236. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , що рівномірно розподілена на інтервалі (2, 8).

7.5. Нормальний розподіл

Нормальним називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X , щільність якого має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a – математичне сподівання, σ – середнє квадратичне відхилення X .

Імовірність того, що X набуде значення, що належить інтервалу (x_1, x_2) ,

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа.

Правило трьох сигм: ймовірність того, що абсолютна величина відхилення нормально розподіленої випадкової величини буде меншою за потрібне значення середнього квадратичного відхилення, дорівнює 0,9973.

$$P(|X - a| < \varepsilon = 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0,9973.$$

У технічних задачах іноді замість параметра σ застосовують параметр E , який називається середнім відхиленням. Цей параметр визначається так:

$$P(|X - a| < E) = 0,5.$$

З параметром σ він пов'язаний співвідношенням $E = \rho\sqrt{2}\sigma$, де $\rho \approx 0,477$.

У такому випадку використовується зведена функція Лапласа $\hat{\Phi}(x)$. Зв'язок між функцією Лапласа та зведеною функцією Лапласа наступний $\Phi(x) = \hat{\Phi}\left(\frac{x}{\rho\sqrt{2}}\right)$ або $\Phi(x) = \hat{\Phi}(\rho\sqrt{2}x)$.

Згідно з "правилом $4E$ ", практично всі значення нормально розподіленої випадкової величини X знаходяться на інтервалі $(a-4E; a+4E)$, тому що

$$P(|X - a| < \varepsilon = 4E) = 2\hat{\Phi}\left(\frac{\varepsilon}{E}\right) \approx 0,993.$$

Імовірність того, що абсолютна величина відхилення менша за додатне число δ ,

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Зокрема, при $a = 0$ справедлива рівність

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Асиметрія, ексцес, мода та медіана нормального розподілу відповідно дорівнюють:

$$A_s = 0, E_k = 0, M_0 = a, M_e = a, \text{ де } a = M(X).$$

237. Математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини X дорівнює $a = 3$, середнє квадратичне відхилення про $= 2$. Написати щільність ймовірності X .

238. Написати щільність ймовірності нормально розподіленої випадкової величини X , знаючи, що $M(X) = 3$, $D(X) = 16$.

239. Нормально розподілена випадкова величина X задається щільністю $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Знайти математичне сподівання та дисперсію X .

240. Дано функцію розподілу нормованого нормального закону $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Знайти щільність розподілу $f(x)$.

241. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 10 і 2. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення, що лежить на інтервалі $(12, 14)$.

242. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 20 і 5. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення,

що лежить на інтервалі (15, 25).

243. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X , яка нормально розподілена з математичним сподіванням (проектна довжина), рівним 50 мм. Фактично довжина виготовлених деталей не менше ніж 32 і не більше 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі:
а) більше 55 мм; б) менше ніж 40 мм. З рівності $P(32 < X < 68) = 1$ попередньо знайти σ .

244. Вимірюється діаметр валу без систематичних (одного знака) похибок. Випадкові похибки вимірювання X підпорядковані нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 10$ мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде зроблено з похибкою, яка не перевищує за абсолютним значенням 15 мм.

Розв'язок. Математичне сподівання випадкових помилок дорівнює нулю, тому можемо застосувати формулу $P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Поклавши $\delta = 15$, $\sigma = 10$, знаходимо $P(|X| < 15) = 2\Phi(1,5)$. За таблицею додатка 2 знаходимо: $\Phi(1,5) = 0,4332$. Шукана ймовірність $P(|X| < 15) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664$.

245. Здійснюється зважування деякої речовини без систематичних помилок. Випадкові помилки зважування підпорядковані нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 20$ г. Знайти ймовірність того, що зважування буде зроблено з помилкою, яка не перевищує за абсолютним значенням 10 г.

246. Випадкові помилки вимірювання підпорядковані нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 20$ мм і математичним сподіванням $a = 0$. Знайти ймовірність того, що з трьох незалежних вимірювань похибка хоча б одного не перевищить за абсолютним значенням 4 мм.

247. Автомат виготовляє кульки. Кулька вважається придатною, якщо відхилення X діаметра кульки від проектного розміру за абсолютним значенням менше 0,7 мм. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена

нормально із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0,4$ мм, знайти, скільки в середньому буде придатних кульок серед 100 виготовлених.

Розв'язок. Оскільки X – це відхилення (діаметра кульки від проєктного розміру), то $M(X) = a = 0$.

Скористаємося формулою $P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Підставивши $\delta = 0,7$, $\sigma = 0,4$, отримаємо $P(|X| < 0,7) = 2\Phi(1,75) = 2 * 0,4599 = 0,92$.

Таким чином, ймовірність відхилення, яке менше за 0,7 мм дорівнює 0,92. Звідси випливає, що приблизно 92 кульки зі 100 виявляться придатними.

248. Деталь, виготовлена автоматично, вважається придатною, якщо відхилення контрольованого розміру від проєктного не перевищує 10 мм. Випадкові відхилення контрольованого розміру від проєктного підпорядковані нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$ мм та математичним сподіванням $a = 0$. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат?

249. Бомбардувальник, що пролетів уздовж моста, довжина якого 30 м і ширина 8 м, скинув бомби. Випадкові величини X та Y (відстань від вертикальної та горизонтальної осей симетрії моста до місця падіння бомби) незалежні і розподілені нормально із середніми квадратичними відхиленнями, відповідно рівними 6 і 4 м, і математичними сподіваннями, рівними 0. Знайти: а) ймовірність влучення в міст однієї скинутої бомби; б) ймовірність руйнування моста, якщо скинуто дві бомби, причому відомо, що для руйнування мосту достатньо одного влучення.

250. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a = 10$. Імовірність потрапляння X до інтервалу $(10, 20)$ дорівнює 0,3. Чому дорівнює можливість потрапляння X в інтервал $(0, 10)$?

251. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a = 25$. Ймовірність потрапляння X до інтервалу $(10, 15)$ дорівнює 0,2. Чому дорівнює можливість попадання X в інтервал $(35, 40)$?

252. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним

сподіванням $a = 10$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$. Знайти інтервал, симетричний щодо математичного сподівання, в який з ймовірністю 0,9973 потрапить величина X в результаті випробування.

253. Випадкова величина X розподілена нормально із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$ мм. Знайти довжину інтервалу, симетричного щодо математичного сподівання, в який з ймовірністю 0,9973 потрапить X в результаті випробування.

254. Верстат виготовляє валики, причому контролюється їх діаметр X . Вважаючи, що X - нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $a = 10$ мм і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0,1$ мм, знайти інтервал, симетричний щодо математичного сподівання, в якому з ймовірністю 0,9973 буде укладено діаметри виготовлених валиків.

255. Нормально розподілена випадкова величина X задається щільністю

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Знайти моду та медіану X .

Розв'язок. Моду $M_0(X)$ називають те можливе значення X , при якому щільність розподілу має максимум. Легко переконатися, що при $x = a$ похідна $f'(a) = 0$; при $x < a$ похідна $f'(x) > 0$, при $x > a$ похідна $f'(x) < 0$; таким чином, точка $x = a$ є точка максимуму, отже, $M_0(X) = a$.

Медіаною $M_e(X)$ називають те можливе значення X , при якому ордината $f(x)$ ділить навпіл площу, обмежену кривою розподілу. Так як нормальна крива – графік функції $f(x)$ – симетрична відносно прямої $x = a$, то ордината $f(a)$ ділить навпіл площу, обмежену нормальною кривою. Отже, $M_e(X) = a$.

Таким чином, мода та медіана нормального розподілу збігаються з його математичним сподіванням a .

256. Випадкова величина X розподілена нормально, причому математичне сподівання $a = 0$ і середнє квадратичне відхилення дорівнює σ . Знайти значення σ , при якому ймовірність того, що X набуде значення, що належить

інтервалу (α, β) ($\alpha > 0, \beta > \alpha$), буде найбільшою.

7.6. Показниковий розподіл

Показниковим (експоненційним) називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X , який описується щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

де λ – постійне додатне число.

Функція розподілу показникового закону

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Імовірність потрапляння на інтервал (a, b) неперервної випадкової величини X , розподіленої за показниковим законом,

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення та дисперсія показникового розподілу відповідно дорівнюють:

$$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda, D(X) = 1/\lambda^2.$$

257. Написати щільність та функцію розподілу показникового закону, якщо параметр $\lambda = 5$.

258. Знайти параметр λ показникового розподілу: а) заданого щільністю $f(x) = 0$ при $x < 0$, $f(x) = 2e^{-2x}$ при $x \geq 0$; б) заданого функцією розподілу $F(x) = 0$ при $x < 0$ і $F(x) = 1 - e^{-0,4x}$ при $x \geq 0$.

259. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, заданим щільністю ймовірності $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ $f(x) = 0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X потрапить до інтервалу $(0,13; 0,7)$.

260. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, заданим при $x \geq 0$ щільністю розподілу $f(x) = 0,04e^{-0,04x}$; при $x < 0$ функція $f(x) = 0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X потрапить до інтервалу $(1, 2)$.

261. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим

законом, заданим функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-0,6x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ $F(x) = 0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X потрапить до інтервалу $(2, 5)$.

262. Знайти математичне сподівання показникового розподілу $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$); $f(x) = 0$ ($x < 0$).

263. Знайти математичне сподівання показникового розподілу, заданого при $x \geq 0$: а) щільністю $f(x) = 5e^{-5x}$; б) функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$.

264. Знайти: а) дисперсію; б) середнє квадратичне відхилення показникового розподілу, заданого густиною ймовірності: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$); $f(x) = 0$ ($x < 0$).

265. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення показникового розподілу, заданого щільністю ймовірності $f(x) = 10e^{-10x}$ ($x \geq 0$).

266. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення показникового закону, заданого функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-0,4x}$ ($x \geq 0$).

267. Студент пам'ятає, що щільність показникового розподілу має вигляд $f(x) = 0$ при $x < 0$, $f(x) = Ce^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$ / (*); проте він забув, чому дорівнює постійна C . Потрібно знайти C , використавши властивість щільності розподілу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

268. На шосе встановлено контрольний пункт для перевірки технічного стану автомобілів. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини T – часу очікування чергової машини контролером, якщо потік машин найпростіший і час (у годинах) між проходженнями машин через контрольний пункт розподілено за показниковим законом $f(t) = 5e^{-5t}$. Час очікування машини контролером та час проходження машин через контрольний пункт розподілені однаково.

7.7. Функція надійності

Елементом_називають деякий пристрій, незалежно від «простоти»

його чи «складності». Нехай елемент починає працювати у момент часу $t_0=0$, а у момент t відбувається відмова. Позначимо через T неперервну випадкову величину – тривалість часу безвідмовної роботи елемента, а через λ – інтенсивність відмов (середня кількість відмов за одиницю часу).

Часто тривалість безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл, функція розподілу якого

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \text{якщо } \lambda > 0$$

визначає ймовірність відмови елемента за час тривалістю t .

Функцією надійності $R(t)$ називають функцію, що визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента за час тривалістю t :

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

269. Тривалість часу безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл $F(t) = 1 - e^{-0,01t}$ ($t > 0$). Знайти ймовірність того, що за час тривалістю $t = 50$ год: а) елемент відмовить; б) елемент не відмовить.

270. Випробовують два елементи, що працюють незалежно. Тривалість часу безвідмовної роботи першого елемента має показниковий розподіл $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, другого $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Знайти ймовірність того, що за час тривалістю $t = 6$ год: а) обидва елементи відмовлять; б) обидва елементи не відмовлять; в) лише один елемент відмовить; г) хоча б один елемент відмовить.

271. Випробовують три елементи, які працюють незалежно один від одного. Тривалість часу безвідмовної роботи елементів розподілена за показниковим законом: для першого елемента $F_1(t) = 1 - e^{-0,1t}$, для другого $F_2(t) = 1 - e^{-0,2t}$, *, для третього елемента $F_3(t) = 1 - e^{-0,3t}$. Знайти ймовірності того, що на інтервалі часу 0,5 год відмовить а) лише один елемент; б) лише два елементи; в) усі три елементи.

Розділ 8. Розподіл функції одного і двох випадкових аргументів

8.1. Функція одного випадкового аргументу

Якщо кожному можливному значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y , тоді Y називають функцією випадкового аргументу X і записують $Y = \varphi(X)$.

Якщо X – дискретна випадкова величина і функція $Y = \varphi(X)$ монотонна, то різним значенням X відповідають різні значення Y , причому ймовірності відповідних значень X і Y однакові. Іншими словами, можливі значення Y знаходять із рівності

$$y_i = \varphi(x_i),$$

де x_i – можливі значення X ; ймовірності можливих значень Y знаходять із рівності

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i).$$

Якщо ж $Y = \varphi(X)$ – немонотонна функція, то, взагалі кажучи, різним значенням X можуть відповідати однакові значення Y (так буде, якщо можливі значення X потраплять у інтервал, на якому функція $\varphi(X)$ не монотонна). У цьому випадку для відшукування ймовірностей можливих значень слід скласти ймовірності тих можливих значень X , при яких Y приймає однакові значення. Інакше кажучи, ймовірність повторюваного значення Y дорівнює сумі ймовірностей тих можливих значень X , при яких Y приймає одне й те значення.

Якщо X – неперервна випадкова величина, яка задається щільністю розподілу $f(x)$, і якщо $y = \varphi(x)$ – диференційовна строго зростаюча або строго спадна функція, зворотня функція якої $x = \psi(y)$, то щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини Y знаходять із рівності

$$g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)|.$$

Якщо функція $y = \varphi(x)$ на інтервалі можливих значень X не монотонна, слід розбити цей інтервал на такі інтервали, у яких функція $\varphi(x)$ монотонна, і знайти щільності розподілів $g_i(y)$ для кожного з інтервалів монотонності,

а потім вирахувати $g(y)$ у вигляді суми:

$$g(y) = \sum g_i(y).$$

Наприклад, якщо функція $\varphi(x)$ монотонна у двох інтервалах, у яких відповідні зворотні функції дорівнюють $\psi_1(y)$ та $\psi_2(y)$, тоді

$$g(y) = f(\psi_1(y))|\psi_1'(y)| + f(\psi_2(y))|\psi_2'(y)|.$$

272. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	1	3	5
p	0,4	0,1	0,5

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = 3X$.

273. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	3	6	10
p	0,2	0,1	0,7

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = 2X + 1$.

274. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-1	-2	1	2
p	0,3	0,1	0,2	0,4

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

275. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p	0,2	0,7	0,1

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = \sin X$.

276. Встановлено щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X , можливі значення якої лежать на інтервалі (a, b) . Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = 3X$.

Вказівка. $\psi(y)$ – функція, обернена до функції $y=3x$, буде дорівнювати $\psi(y) = x = y/3$.

277. Випадкова величина X розподілена за законом Коші

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = X^3 + 2$.

278. Задано щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X , можливі значення якої лежать на інтервалі $(0, \infty)$. Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини Y , якщо: а) $Y=e^{-x}$; б) $Y = \ln X$; в) $Y = X^3$; г) $Y = 1/X^2$; д) $Y = \sqrt{X}$.

279. Задано щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X , можливі значення якої лежать на інтервалі $(-\infty, \infty)$. Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини Y , якщо: а) $Y = X^2$; б) $Y = e^{-X^2}$; в) $Y = |X|$; г) $Y = \cos X$; д) $Y = \arctg X$; е) $Y = 1/(1 + X^2)$.

280. Випадкова величина X рівномірно розподілена на інтервалі $(-\pi/2, \pi/2)$. Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \sin X$.

Розв'язок. Знайдемо щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X . Величина X розподілена рівномірно на інтервалі $(-\pi/2, \pi/2)$, тому на цьому інтервалі

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\pi},$$

поза цим інтервалом $f(x)=0$.

Функція $y = \sin x$ на інтервалі $(-\pi/2, \pi/2)$ монотонна, отже, на цьому інтервалі вона має зворотню функцію $x = \psi(y) = \arcsin y$. Знайдемо похідну $\psi'(y)$:

$$\psi'(y) = 1/\sqrt{1-y^2}.$$

Знайдемо шукану щільність розподілу за формулою

$$g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)|.$$

З огляду на те, що $f(x)=1/\pi$ (отже, $f(\psi(y)) = 1/\pi$) отримаємо

$$g(y) = 1/(\pi\sqrt{1-y^2}).$$

Оскільки $y = \sin x$, причому $-\pi/2 < x < \pi/2$, то $-1 < y < 1$. Таким чином, на інтервалі $(-1, 1)$ маємо $g(y) = 1/(\pi\sqrt{1-y^2})$; поза цим інтервалом $g(y) = 0$.

Перевірка:

$$\int_{-1}^1 g(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin y \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1.$$

281. Випадкова величина X рівномірно розподілена на інтервалі $(0, \pi/2)$.

Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \sin X$.

282. Задано щільність розподілу випадкової величини X : $f(x) = 1/\pi$ на інтервалі $(-\pi/2, \pi/2)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \operatorname{tg} X$.

283. Випадкова величина X рівномірно розподілена на інтервалі $(0, 2\pi)$. Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \cos X$.

Розв'язок. Знайдемо щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X , на інтервалі $(0, 2\pi)$ маємо $f(x) = 1/(2\pi - 0) = 1/2\pi$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$.

З рівняння $y = \cos x$ знайдемо обернену функцію $x = \psi(y)$. Так як на інтервалі $(0, 2\pi)$ функція $y = \cos x$ не монотонна, то розіб'ємо цей інтервал на інтервали $(0, \pi)$ та $(\pi, 2\pi)$, на яких ця функція буде монотонною. На інтервалі $(0, \pi)$ обернена функція $\psi_1(y) = \arccos y$; на інтервалі $(\pi, 2\pi)$ обернена функція $\psi_2(y) = -\arccos y$. Шукана щільність розподілу може бути знайдена з рівності

$$g(y) = f(\psi_1(y))|\psi_1'(y)| + f(\psi_2(y))|\psi_2'(y)|.$$

Знайдемо похідні обернених функцій:

$$\psi_1'(y) = (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \psi_2'(y) = (-\arccos y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Знайдемо модулі похідних:

$$|\psi_1'(y)| = |\psi_2'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Враховуючи, що $f(x) = 1/2\pi$ маємо

$$f(\psi_1(y)) = f(\psi_2(y)) = \frac{1}{2\pi}.$$

Таким чином:

$$g(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Оскільки $y = \cos x$, причому $0 < x < 2\pi$, то $-1 < y < 1$. Таким чином, на інтервалі $(-1, 1)$ шукана щільність розподілу $g(y) = 1/(\pi\sqrt{1-y^2})$, поза цим інтервалом $g(y)=0$.

Перевірка:

$$\int_{-1}^1 g(y)dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin 1 \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1.$$

284. Випадкова величина X розподілена рівномірно на інтервалі $(-\pi/2, \pi/2)$. Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \cos X$.

285. Ребро куба виміряно наближено, причому $a \leq x \leq b$. Розглядаючи ребро куба як випадкову величину X , рівномірно розподілену на інтервалі (a, b) , знайти: а) математичне сподівання об'єму куба; б) дисперсію об'єму куба.

Вказівка. Попередньо знайти щільність розподілу

$$g(y) = \frac{1}{2(b-a)y^{2/3}}$$

випадкової величини $y = X^3$. Використовувати формули

$$M(Y) = \int_{a^3}^{b^3} yg(y)dy, \quad D(Y) = \int_{a^3}^{b^3} y^2 g(y)dy - (M(Y))^2.$$

286. Задано функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X . Знайти функцію розподілу $G(y)$ випадкової величини $Y = 3X + 2$.

Розв'язок. За визначенням функції розподілу, $G(y) = P(Y < y)$. Оскільки функція $y = 3x + 2$ — зростаюча, то нерівність $Y < y$ виконується, якщо має місце нерівність $X < x$, тому

$$G(y) = P(Y < y) = P(X < x) = F(x).$$

З рівняння $y = 3x + 2$ виразимо x :

$$x = (y-2)/3.$$

Підставивши x у попереднє рівняння, отримаємо $G(y) = F((y-2)/3)$.

287. Задана функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X . Знайти функцію розподілу $G(y)$ випадкової величини $Y = -(2/3)X + 2$.

Розв'язок. За визначенням функції розподілу, $G(y) = P(Y < y)$.

Оскільки функція $y = -(2/3)x + 2$ спадна, то нерівність $Y < y$ виконується, якщо має місце нерівність $X > x$, тому $G(y) = P(Y < y) = P(X > x)$.

Події $X < x$ і $X > x$ протилежні, тому сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці: $P(X < x) + P(X > x) = 1$. Звідси

$$P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x),$$

отже, $G(y) = 1 - F(x)$.

З рівняння $y = -(2/3)x + 2$ виразимо $x = 3(2 - y)/2$.

Остаточно отримаємо $G(y) = 1 - F[3(2 - y)/2]$.

288. Задано функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X . Знайти функцію розподілу $G(y)$ випадкової величини Y , якщо: а) $Y = 4X + 6$; б) $Y = -5X + 1$; в) $Y = aX + b$.

8.2. Функція двох випадкових аргументів

Якщо кожній парі можливих значень випадкових величин X і Y відповідає одне можливе значення випадкової величини Z , тоді Z називають функцією двох випадкових аргументів X і Y :

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Якщо X і Y – дискретні незалежні випадкові величини, то, для того щоб знайти розподіл функції $Z = X + Y$, треба знайти всі можливі значення Z , для чого достатньо скласти усі можливі значення X з усіма можливими значеннями Y ; ймовірності знайдених можливих значень Z дорівнюють добуткам ймовірностей значень X і Y , що додаються.

Якщо X і Y — неперервні незалежні випадкові величини, то щільність розподілу $g(z)$ суми $Z = X + Y$ (за умови, що щільність розподілу хоча б одного з аргументів задана на інтервалі $(-\infty, \infty)$ однією формулою) може бути знайдена за формулами:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy,$$

де f_1 і f_2 – щільності розподілу аргументів; якщо можливі значення аргументів невід'ємні, то щільність розподілу $g(z)$ величини $Z=X+Y$ знаходять за однією з формул:

$$g(z) = \int_0^z f_1(x)f_2(z-x)dx = \int_0^z f_1(z-y)f_2(y)dy,$$

У тому випадку, коли щільності як $f_1(x)$ так і $f_2(y)$ задані на кінцевих інтервалах, для відшукування щільності $g(z)$ величини $Z = X+Y$ доцільно спочатку знайти функцію розподілу $G(z)$, а потім продиференціювати її через z :

$$g(z) = G'(z).$$

Якщо X і Y – незалежні випадкові величини, задані відповідними щільностями розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$, то ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в область D дорівнює подвійному інтегралу по цій області від добутку щільностей розподілу:

$$P((X, Y) \in D) = \iint_{(D)} f_1(x)f_2(y)dxdy.$$

289. Дискретні незалежні випадкові величини X та Y задані розподілами:

X	1	3		Y	2	4
P	0,3	0,7	;	P	0,6	0,4

Знайти розподіл випадкової величини $Z = X+Y$.

Розв'язок. Для того щоб скласти розподіл величини $Z = X+Y$, треба знайти всі можливі значення Z з відповідними ним ймовірностями.

Можливі значення Z є суми кожного можливого значення X з усіма можливими значеннями Y :

$$z_1 = 1+2 = 3; z_2 = 1+4 = 5; z_3 = 3+2 = 5; z_4 = 3+4 = 7.$$

Знайдемо ймовірність цих можливих значень. Щоб $Z=3$, достатньо, щоб

величина X прийняла значення $x_1=1$ і величина Y — значення $y_1=2$. Імовірності цих можливих значень, як випливає з цих законів розподілу, відповідно дорівнюють 0,3 та 0,6. Так як аргументи X і Y незалежні, то події $X = 1$ і $Y = 2$ незалежні і, отже, ймовірність їхньої спільної появи (тобто ймовірність події $Z = 3$) за теоремою множення дорівнює $0,3 \cdot 0,6 = 0,18$.

Аналогічно знайдемо: $P(Z = 1+4 = 5) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$; $P(Z = 3+2 = 5) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42$; $P(Z = 3+4 = 7) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$.

Напишемо шуканий розподіл, склавши попередньо ймовірність несумісних подій $Z = z_2 = 5$, $Z = z_3 = 7$ ($0,12+0,42 = 0,54$):

Z	3	5	7
P	0,18	0,54	0,28

Перевірка: $0,18+0,54+0,28 = 1$.

290. Дискретні випадкові величини X та Y задані розподілами:

a)	X	10	12	16	Y	1	2
	P	0,4	0,1	0,5;	P	0,2	0,8.
b)	X	4	10		Y	1	7
	P	0,7	0,3;		P	0,8	0,2.

Знайти розподіл випадкової величини $Z = X + Y$.

291. Незалежні випадкові величини X та Y задані щільностями розподілів:

$$f_1(x) = e^{-x} \quad (0 \leq x < \infty), \quad f_2(y) = (1/2)e^{-y/2} \quad (0 \leq y < \infty).$$

Знайти композицію цих законів, тобто щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язок. Оскільки можливі значення аргументів невід'ємні, то застосовна формула

$$g(z) = \int_0^z f_1(x)f_2(z-x)dx = \int_0^z e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{-(z-x)/2} \right) dx.$$

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо

$$g(z) = e^{-z/2} \left(1 - e^{-z/2} \right).$$

Тут $z > 0$, оскільки $Z = X + Y$ та можливі значення X та Y невід'ємні.

Отже, $g(z) = e^{-z/2} \left(1 - e^{-\frac{z}{2}}\right)$ на інтервалі $(0, \infty)$, поза цим інтервалом $g(z) = 0$.

Для перевірки варто переконатися, що $\int_0^{\infty} g(z) dz = 1$.

292. Незалежні випадкові величини X та Y задані щільностями розподілів:

$$f_1(x) = (1/3)e^{-x/3} \quad (0 \leq x < \infty), \quad f_2(y) = (1/5)e^{-y/5} \quad (0 \leq y < \infty).$$

Знайти композицію цих законів, тобто щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

293. Задані щільності розподілів незалежних рівномірно розподілених випадкових величин X і Y :

$$f_1(x) = 1/2 \text{ на інтервалі } (0, 2), \text{ поза цим інтервалом } f_1(x) = 0;$$

$$f_2(y) = 1/2 \text{ на інтервалі } (0, 2), \text{ поза цим інтервалом } f_2(y) = 0.$$

Знайти функцію розподілу та щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$. Побудувати графік густини розподілу $g(z)$.

Розв'язок. За умовою, можливі значення X визначаються нерівністю $0 < x < 2$, можливі значення Y – нерівністю $0 < y < 2$. Звідси випливає, що можливі випадкові точки $(X; Y)$ розташовані в квадраті $OABC$ (рис. 7, а).

За визначенням функції розподілу,

$$G(y) = P(Z < z) = P(X + Y < z).$$

Нерівності $x + y < z$ задовольняють ті точки $(x; y)$ площини xOy , які лежать нижче за пряму $x + y = z$ (ця пряма відсікає на осях Ox і Oy відрізки, рівні z): якщо ж брати тільки можливі значення x і y , то нерівність $x + y < z$ виконується тільки для точок, що лежать у квадраті $OABC$ нижче за пряму $x + y = z$.

З іншого боку, оскільки величини X та Y незалежні, то

$$G(z) = \iint_{(D)} f_1(x)f_2(y)dxdy = \frac{1}{4} \iint_{(D)} dxdy = \frac{1}{4}D.$$

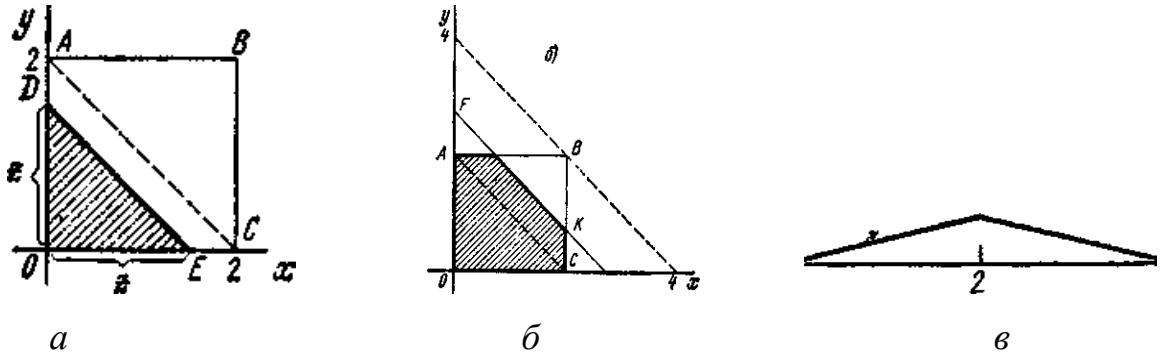


Рис. 7

де D – величина тієї частини площі квадрата $OABC$, яка лежить нижче прямої $x+y = z$. Очевидно, величина площі D залежить від значення z .

Якщо $z < 0$, тоді $D=0$, $G(z) = (1/4)*0=0$.

Якщо $0 < z < 2$, тоді (рис. 7, а) $G(z) = (1/4) D_{ODE} = 1/4 z^2/2 = z^2/8$.

Якщо $2 < z < 4$, тоді (рис. 7, б) $G(z) = (1/4) D_{OAHKC} = 1 - (4-z)^2/8$.

Площу фігури $OAHKC$ знайдено як різницю між площею квадрата $OABC$, яка, очевидно, дорівнює 4, і площею прямокутного трикутника HVK : $S_{HVK} = HV^2/2$, причому $HV = 2 - AH = 2 - AF = 2 - (z - 2) = 4 - z$.

Якщо $z > 4$, тоді $G(z) = (1/4) D_{OABC} = 1/4 * 4 = 1$.

Отже, шукана функція розподілу та щільність розподілу наступні:

$$G(z) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } z \leq 0, \\ \frac{z^2}{8} & \text{якщо } 0 < z \leq 2, \\ 1 - \frac{(4-z)^2}{8} & \text{якщо } 2 < z \leq 4, \\ 1 & \text{якщо } z > 4. \end{cases} \quad g(z) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } z \leq 0, \\ \frac{z}{4} & \text{якщо } 0 < z \leq 2, \\ 1 - \frac{z}{4} & \text{якщо } 2 < z \leq 4, \\ 1 & \text{якщо } z > 4. \end{cases}$$

Графік густини розподілу $g(z)$ зображено на рис. 7, в.

Для перевірки варто переконатися, що площа, обмежена кривою розподілу $g(z)$, дорівнює одиниці.

294. Задані щільності рівномірно розподілених незалежних випадкових величин X і Y : $f_1(x) = 1$ на інтервалі $(0, 1)$, поза цим інтервалом $f_1(x) = 0$; $f_2(y) = 1$ на інтервалі $(0, 1)$, поза цим інтервалом $f_2(y) = 0$.

Знайти функцію розподілу та щільність розподілу випадкової величини Z

$= X + Y$. Побудувати графік щільності розподілу $g(z)$.

295. Задані щільності розподілів рівномірно розподілених незалежних випадкових величин X і Y : $f_1(x) = 1/2$ на інтервалі $(1, 3)$, поза цим інтервалом $f_1(x) = 0$; $f_2(y) = 1/4$ на інтервалі $(2, 6)$, поза цим інтервалом $f_2(y) = 0$. Знайти функцію розподілу та щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$. Побудувати графік щільності розподілу $g(z)$.

8.3. Закон розподілу двовимірної випадкової величини

Двовимірною називають випадкову величину (X, Y) , можливі значення якої є пари чисел (x, y) . Складові X і Y , що розглядаються одночасно, утворюють систему двох випадкових величин.

Двовимірну величину геометрично можна представити як випадкову точку $M(X; Y)$ на площині xOy або як випадковий вектор OM .

Дискретною називають двовимірну величину, складові якої є дискретними.

Неперервною називають двовимірну величину, складові якої неперервні.

Законом розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини називають відповідність між можливими значеннями та їх ймовірностями.

Закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини може бути заданий: а) у вигляді таблиці з подвійним входом, що містить можливі значення та їх ймовірності; б) аналітично, наприклад, у вигляді функції розподілу.

Функцією розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини називають функцію $F(x, y)$, що визначає для кожної пари чисел (x, y) ймовірність того, що X прийме значення, менше x , і при цьому Y прийме значення, менше y :

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Геометрично цю рівність можна витлумачити так: $F(x, y)$ є ймовірність того, що випадкова точка (X, Y) потрапить у нескінченний квадрант з вершиною (x, y) , розташований ліворуч і нижче цієї вершини.

Іноді замість терміну "функція розподілу" використовують термін "інтегральна функція".

Функція розподілу має такі властивості:

1. Значення функції розподілу задовольняють подвійну нерівність

$$0 \leq F(x, y) \leq 1.$$

2. Функція розподілу є незменшуваною функцією за кожним аргументом:

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \text{ якщо } x_2 > x_1,$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \text{ якщо } y_2 > y_1.$$

3. Мають місце граничні співвідношення:

$$F(-\infty, y) = 0, F(x, -\infty) = 0, F(-\infty, -\infty) = 0, F(\infty, \infty) = 1.$$

4. При $y = \infty$ функція розподілу системи стає функцією розподілу складової X : $F(x, \infty) = F_1(x)$. При $x = \infty$ функція розподілу системи стає функцією розподілу складової Y : $F(\infty, y) = F_2(y)$.

Використовуючи функцію розподілу, можна знайти ймовірність потрапляння випадкової точки у прямокутник $x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2$:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Щільністю спільного розподілу ймовірностей (двовимірною щільністю ймовірності) неперервної двовимірної випадкової величини називають другу змішану похідну від функції розподілу:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Іноді замість терміну «двовимірна густина ймовірності» використовують термін «диференціальна функція системи».

Щільність спільного розподілу можна розглядати як ліміт відношення ймовірності потрапляння випадкової точки у прямокутник зі сторонами Δx і Δy до площі цього прямокутника, коли обидві його сторони прямують до нуля; геометрично її можна витлумачити як поверхню, яку називають поверхнею розподілу.

Знаючи густину розподілу, можна знайти функцію розподілу за

формулою

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy.$$

Ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в область D визначається рівністю

$$P((X, Y) \in D) = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy.$$

Двовимірна щільність ймовірності має наступні властивості:

1. Двовимірна щільність ймовірності невід'ємна: $f(x, y) \geq 0$.
2. Подвійний невластний інтеграл з нескінченними межами від двовимірної щільності ймовірності дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Зокрема, якщо всі можливі значення (X, Y) належать обмеженій області D , тоді

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = 1.$$

296. Задано розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини:

X \ Y	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Знайти закони розподілу складових X та Y .

Розв'язок. Склавши ймовірності «за стовпцями», отримаємо ймовірності можливих значень X : $p(3)=0,27$, $p(10)=0,43$, $p(12)=0,30$.
Напишемо закон розподілу складової X :

X	3	10	12
p	0,27	0,43	0,30

Перевірка: $0,27 + 0,43 + 0,30 = 1$.

Склавши ймовірності «за рядками», аналогічно знайдемо розподіл складової Y :

Y	4	5
p	0,55	0,45

Перевірка: $0,55 + 0,45 = 1$.

297. Задано розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини:

$X \backslash Y$	20	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Знайти закони розподілу складових.

298. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin y & \text{якщо } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{якщо } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) до прямокутника, обмеженого прямими $x = 0, x = \pi/4, y = \pi/6, y = \pi/3$.

299. Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у прямокутник, обмежений прямими $x = 1, x = 2, y = 3, y = 5$, якщо відома функція розподілу

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y} & \text{якщо } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{якщо } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

300. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y} & \text{якщо } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{якщо } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Знайти двовимірну щільність ймовірності системи.

Розв'язок. Використаємо формулу $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$. Знайдемо

частинні похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ln 3 (3^{-x} - 3^{-x-y}), \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = (\ln 3)^2 3^{-x-y}.$$

Отже, двовимірну щільність ймовірності

$$f(x, y) = \begin{cases} (\ln 3)^2 3^{-x-y} & \text{якщо } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{якщо } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Для контролю можна перевірити умову нормування подвійного інтеграла

$$(\ln 3)^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} 3^{-x-y} dx dy = 1.$$

301. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}) & \text{якщо } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{якщо } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Знайти двовимірну щільність ймовірності системи (X, Y).

302. Задано двовимірну щільність ймовірності системи випадкових величин (X, Y)

$$f(x, y) = \frac{20}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}$$

Знайти функцію розподілу системи використавши формулу

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy.$$

303. Задано двовимірну щільність ймовірності системи двох випадкових величин: $f(x, y) = (1/2)\sin(x+y)$ у квадраті $0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2$; поза квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти функцію розподілу системи (X, Y).

304. У колі $x^2 + y^2 \leq R^2$ двовимірну щільність ймовірності $f(x, y) = C(R - \sqrt{x^2 + y^2})$, поза колом $f(x, y) = 0$. Знайти: а) постійну C; б) ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) до кола радіусу $r = 1$ з центром у початку координат, якщо $R = 2$.

Розв'язок: а) Використаємо другу властивість двовимірної щільності ймовірності:

$$\iint_{(D)} C (R - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = 1, \quad C = \frac{1}{\iint_{(D)} (R - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy}.$$

Перейшовши до полярних координат, отримаємо

$$C = \frac{1}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R - \rho) \rho d\rho}.$$

б) За умовою, $R = 2$; отже, $C = 3/(8\pi)$ і $f(x, y) = (3/8\pi)(2 - \sqrt{x^2 + y^2})$.

Імовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у коло радіусом $r=1$ з центром у початку координат (область D_1)

$$P((X, Y) \in D_1) = (3/8\pi) \iint_{(D_1)} 2 - \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Перейшовши до полярних координат, остаточно отримаємо ймовірність:

$$P = (3/8\pi) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2 - \rho) \rho d\rho = \frac{1}{2}.$$

305. Поверхня розподілу системи випадкових величин (X, Y) являє собою прямий круговий конус, основа якого – коло з центром у початку координат. Знайти двовимірну щільність ймовірності системи, перейшовши до полярних координат.

306. Задано двовимірну щільність ймовірності $f(x, y) = C/[(9 + x^2)(16 + y^2)]$ системи (X, Y) двох випадкових величин. Знайти постійну C .

307. Задано двовимірну щільність ймовірності $f(x, y) = C/(x^2 + y^2 + 1)^3$ системи випадкових величин (X, Y) . Знайти постійну C , перейшовши до полярних координат.

308. У першому квадранті задана функція розподілу системи двох випадкових величин: $F(x, y) = 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}$, поза першим квадрантом $F(x, y) = 0$. Знайти: а) двовимірну щільність ймовірності системи; б) ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у трикутник з вершинами

A (1; 3), B (3; 3), C (2; 8).

8.4. Числові характеристики неперервної системи двох випадкових величин

Математичні сподівання та дисперсії неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) можна порахувати знаючи щільності розподілу складових X і Y:

$$\begin{aligned}M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_1(y) dy, \\D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx - (M(X))^2, \\D(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(Y))^2 f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y) dy - (M(Y))^2.\end{aligned}$$

Іноді зручніше використовувати формули, що містять двовимірну щільність ймовірності (подвійні інтеграли беруться по області можливих значень системи):

$$\begin{aligned}M(X) &= \iint x f(x, y) dx dy, \quad M(Y) = \iint y f(x, y) dx dy, \\D(X) &= \iint (x - M(X))^2 f(x, y) dx dy = \iint x^2 f(x, y) dx dy - (M(X))^2, \\D(Y) &= \iint (y - M(Y))^2 f(x, y) dx dy = \iint y^2 f(x, y) dx dy - (M(Y))^2.\end{aligned}$$

Початковим моментом $v_{k,s}$ порядку $k+s$ системи (X, Y) називають математичне сподівання добутку $X^k Y^s$:

$$v_{k,s} = M(X^k Y^s).$$

Зокрема, $v_{1,0} = M(X)$, $v_{0,1} = M(Y)$.

Центральним моментом $\mu_{k,s}$ порядку $k+s$ системи (X, Y) називають математичне сподівання добутку відхилень відповідно k -го та s -го ступенів:

$$\mu_{k,s} = M[(X - M(X))^k (Y - M(Y))^s].$$

Зокрема,

$$\mu_{1,0} = M[X - M(X)] = 0, \mu_{0,1} = M[Y - M(Y)] = 0, \\ \mu_{2,0} = M[X - M(X)]^2 = D(X), \mu_{0,2} = M[Y - M(Y)]^2 = D(Y).$$

Кореляційним моментом μ_{xy} системи (X, Y) називають центральний момент $\mu_{1,1}$ порядку $1 + 1$:

$$\mu_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Коефіцієнт кореляції величин X і Y називають відношення кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Коефіцієнт кореляції – безрозмірна величина, причому $|r_{xy}| \leq 1$. Коефіцієнт кореляції служить для оцінки величини лінійного зв'язку між X і Y : чим ближче абсолютна величина коефіцієнта кореляції до одиниці, тим зв'язок сильніший; чим ближче абсолютна величина коефіцієнта кореляції до нуля, тим зв'язок слабший.

Корельованими називають дві випадкові величини, якщо їхній кореляційний момент відмінний від нуля.

Некорельованими називають дві випадкові величини, якщо їхній кореляційний момент дорівнює нулю.

Дві корельовані величини також є залежними; якщо дві величини незалежні, то вони можуть бути як корельованими, так і некорельованими. З незалежності двох величин випливає їхня некорельованість, але з некорельованості ще не можна зробити висновок про незалежність цих величин (для нормально розподілених величин з некорельованості величин випливає їхня незалежність).

Для неперервних величин X і Y кореляційний момент може бути знайдений за формулами:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(Y))f(x, y)dx dy,$$

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dx dy - M(X)M(Y).$$

309. Задано щільність спільного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) :

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy e^{-x^2-y^2} & \text{якщо } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{якщо } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Знайти: а) математичні сподівання; б) дисперсії складових X та Y .

Розв'язок. а) Знайдемо спочатку щільність розподілу складової X :

$$f_1(x) = \int_0^{\infty} f(x, y)dy = 4xe^{-x^2} \int_0^{\infty} ye^{-y^2} dy = 2xe^{-x^2} \quad (x > 0).$$

Аналогічно отримаємо

$$f_2(y) = 2ye^{-y^2} \quad (y > 0)$$

Знайдемо математичне сподівання складової X :

$$M(X) = \int_0^{\infty} xf_1(x)dx = \int_0^{\infty} x(2xe^{-x^2})dx.$$

Інтегруючи частинами та враховуючи, що інтеграл Пуассона $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, отримаємо $M(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Вочевидь, що $M(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

б) Знайдемо дисперсію X :

$$D(X) = \int_0^{\infty} x^2 f_1(x)dx - (M(X))^2,$$

$$D(X) = \int_0^{\infty} x^2 (2xe^{-x^2})dx - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Очевидно, що $D(Y) = 1 - \pi/4$.

310. Задано щільність спільного розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} 36xy e^{-3x^2-3y^2} & \text{якщо } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{якщо } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Знайти математичні сподівання та дисперсії складових.

311. Задано щільність спільного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y): $f(x, y) = (2\cos x \cos y)$ в квадраті $0 \leq x \leq \pi/4$, $0 \leq y \leq \pi/4$; поза квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти математичні сподівання складових.

312. Задана щільність спільного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y): $f(x, y) = (1/2)\sin(x+y)$ у квадраті $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq \pi/2$; поза квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти математичні сподівання та дисперсії складових.

313. Задано щільність спільного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y): $f(x, y) = (1/4)(\sin x \sin y)$ у квадраті $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$; поза квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти: а) математичні сподівання та дисперсії складових; б) кореляційний момент.

314. Задано щільність розподілу незалежних складових неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y):

$$f_1(x) = \begin{cases} 5e^{-5x} & \text{якщо } x > 0, \\ 0 & \text{якщо } x < 0; \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & \text{якщо } y > 0, \\ 0 & \text{якщо } y < 0. \end{cases}$$

Знайти: а) щільність спільного розподілу системи; б) функцію розподілу системи.

Вказівка. Якщо складові системи незалежні, то двовимірна щільність ймовірності дорівнює добутку щільностей складових, а функція спільного розподілу системи дорівнює добутку функцій розподілу складових.

Розділ 9. Математична статистика

9.1. Вибірковий метод

Нехай для вивчення кількісної (дискретної або неперервної) ознаки X з генеральної сукупності виокремлено вибірку $x_1, x_2, \dots, x_n$ об'єму n . Спостережені значення x_i ознаки X називають варіантами, а послідовність варіант, записаних у порядку зростання, – варіаційним рядом.

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант x_i варіаційного ряду і відповідних їм частот n_i – (сума всіх частот дорівнює об'єму вибірки n) або відносних частот w_i (сума всіх відносних частот дорівнює одиниці).

Статистичний розподіл вибірки можна задати також у вигляді послідовності інтервалів і відповідних їм частот (як частоту інтервалу приймають суму частот варіант, що потрапили в цей інтервал).

Емпіричною функцією розподілу (функцією розподілу вибірки) називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$:

$$F^*(x) = n_x/n,$$

де n_x – кількість варіант, менших x ; n – об'єм вибірки.

Емпірична функція має такі властивості:

1. Значення емпіричної функції лежать на відрізку $[0; 1]$.
2. $F^*(x)$ - неспадна функція.
3. Якщо x_1 – найменша варіанта, а x_k – найбільша, то $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_1$ та $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

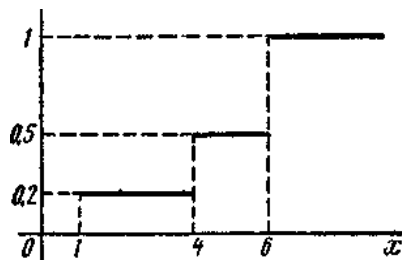


Рис. 8.

Типовий графік емпіричної функції розподілу зображено на рис. 8.

315. Вибірка задана у вигляді розподілу частот:

а)	x_i	2	5	7	
	n_i	1	3	6	
б)	x_i	4	7	8	12
	n_i	5	2	3	10

Знайти розподіл відносних частот w_i .

316. Знайти емпіричну функцію та зобразити її графік за даним розподілом вибірки:

а)	x_i	1	4	6	
	n_i	10	15	25	
б)	x_i	2	5	7	8
	n_i	1	3	2	4
в)	x_i	4	7	8	
	n_i	5	2	3	

9.2. Полігон та гістограма

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують дискретні точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$, де x_i – варіанти вибірки і n_i – відповідні їм частоти.

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \dots, (x_k, w_k)$, де x_i – варіанти вибірки і w_i – відповідні їм відносні частоти.

При неперервному розподілі ознаки X весь інтервал, на якому лежать всі спостережувані значення ознаки, розбивають на ряд частинних інтервалів довжини h і знаходять n_i – суму частот варіант, що потрапили в i -й інтервал.

Гістограмою частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких служать частинні інтервали довжини h , а висоти дорівнюють відношенню n_i/h (щільність частоти). Площа частинного i -го прямокутника дорівнює $h(n_i/h) = n_i$, — сумі частот

варіант, що потрапили в i -й інтервал Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто об'єму вибірки n .

Гістограмою відносних частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких служать частинні інтервали довжини h , а висоти дорівнюють відношенню w_i/h (щільність відносної частоти). Площа частинного i -го прямокутника дорівнює $h(w_i/h) = w_i$, — відносній частоті варіант, що потрапили в i -й інтервал. Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

317. Побудувати полігон частот за даним розподілом вибірки:

а)	x_i	2	3	5	6	
	n_i	10	15	5	20	
б)	x_i	1	4	5	7	
	n_i	20	10	14	6	
в)	x_i	15	20	25	30	35
	n_i	10	15	30	20	25

318. Побудувати полігон відносних частот за цим розподілом вибірки:

а)	x_i	2	4	5	7	10
	w_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45
б)	x_i	1	4	5	8	9
	w_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1
в)	x_i	20	40	65	80	
	w_i	0,1	0,2	0,3	0,4	

319. Побудувати гістограму частот за розподілом вибірки об'єму $n=100$:

Номер інтервалу i	Частинний інтервал $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтервалу n_i	Щільність частоти n_i/h
1	1-5	10	2,5
2	5-9	20	5
3	9-13	50	12,5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2

320. Побудувати гістограму частот за цим розподілом вибірки (Знайти попередньо щільність частоти n_i/h для кожного інтервалу i заповнити останній стовпець таблиці):

а)	Номер інтервалу i	Частинний інтервал $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтервалу n_i	Щільність частоти n_i/h
	1	2-7	5	
	2	7-12	10	
	3	12-17	25	
	4	17-22	6	
	5	22-27	4	
б)	Номер інтервалу i	Частинний інтервал $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтервалу n_i	Щільність частоти n_i/h
	1	3-5	4	
	2	5-7	6	
	3	7-9	20	
	4	9-11	40	
	5	11-13	20	
	6	13-15	4	
	7	15-17	6	

321. Побудувати гістограму відносних частот за цим розподілом вибірки (Знайти спочатку відносні частоти, відповідні щільності відносної частоти кожного інтервалу):

а) ($n = \sum n_i = 100$)	Номер інтервалу i	Частинний інтервал $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтервалу n_i
	1	0-2	20
	2	2-4	30
	3	4-6	50
б) ($n = \sum n_i = 20$)	Номер інтервалу i	Частинний інтервал $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтервалу n_i
	1	10-15	2
	2	15-20	4
	3	20-25	8
	4	25-30	4
	5	30-35	2
в) ($n = \sum n_i = 25$)	Номер інтервалу i	Частинний інтервал $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтервалу n_i
	1	2-5	6
	2	5-8	10
	3	8-11	4
	4	11-14	5

9.3. Точкові оцінки параметрів розподілу

Статистичною оцінкою Θ^* невідомого параметра Θ теоретичного розподілу називають функцію $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ від спостережуваних випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Точковою називають статистичну оцінку, що визначається одним числом $\Theta^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – результати n спостережень над кількісною ознакою X (вибірка).

Незміщеною називають точкову оцінку, математичне сподівання якої

дорівнює оціночному параметру при будь-якому об'ємі вибірки.

Зміщеною називають точкову оцінку, математичне сподівання якої не дорівнює параметру, що оцінюється.

Незміщеною оцінкою генеральної середньої (математичного сподівання) є вибіркова середня

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n},$$

де x_i – варіанта вибірки, n_i – частота варіанти x_i , $n = \sum_{i=1}^k n_i$ – об'єм вибірки.

Якщо початкові варіанти x_i – великі числа, тоді для спрощення розрахунку доцільно відняти з кожної варіанти одне й те саме число C , тобто перейти до умовних варіант $u_i = x_i - C$ (як C доречно прийняти число, близьке до вибіркової середньої, оскільки вибіркова середня невідома). Тоді

$$\bar{x}_B = C + \frac{\sum_{i=1}^k n_i u_i}{n},$$

Зміщеною оцінкою генеральної дисперсії служить вибіркова дисперсія

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n},$$

ця оцінка є зміщеною, оскільки

$$M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_{\Gamma}.$$

Більш зручна формула

$$D_B = \overline{x^2} - (\bar{x}_B)^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i)^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n} \right)^2.$$

Якщо початкові варіанти x_i – великі числа, то доцільно відняти від усіх варіант одне й те саме число C , що дорівнює вибірковій середній або близьке до неї, тобто перейти до умовних варіант $u_i = x_i - C$ (дисперсія при цьому не зміниться). Тоді

$$D_B(X) = D_B(u) = \overline{u^2} - (\bar{u}_B)^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (u_i)^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^k n_i u_i}{n} \right)^2.$$

Якщо початкові варіанти є десятковими дробами з k десятковими знаками після коми, то, щоб уникнути дій з дробами, домножають початкові варіанти на постійне число $C = 10^k$, тобто переходять до умовних варіантів $u_i = Cx_i$. При цьому дисперсія збільшиться у C^2 разів. Тому, знайшовши дисперсію умовних варіантів, треба розділити її на C^2 :

$$D_B(X) = \frac{D_B(u)}{C^2}.$$

Незмщеною оцінкою генеральної дисперсії служить виправлена вибіркова дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}.$$

Більш зручною є формула:

$$s^2_X = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^k n_i x_i)^2}{n}}{n-1}.$$

В умовних варіантах вона має вигляд:

$$s^2_u = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (u_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^k n_i u_i)^2}{n}}{n-1},$$

якщо $u_i = x_i - C$, тоді $s^2_X = s^2_u$; якщо $u_i = Cx_i$, тоді $s^2_X = s^2_u / C^2$.

При великій кількості даних використовують метод добутків або метод сум.

322. З генеральної сукупності відібрали вибірку об'єму $n = 50$:

варіанта x_i	2	5	7	10
частота n_i	16	12	8	14

Знайти незміщену оцінку генеральної середньої, тобто середню вибірку.

323. З генеральної сукупності відібрали вибірку об'єму $n = 60$:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Знайти незміщену оцінку генеральної середньої.

324. Знайти середню вибірку за даним розподілом вибірки об'єму $n = 10$:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Початкові варіанти – великі числа, тому доцільно перейти до умовних варіант $u_i = x_i - 1270$.

325. Знайти вибірку середню за даним розподілом вибірки об'єму $n = 20$, перейшовши до умовних варіант $u_i = x_i - 2620$:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

326. За вибіркою об'єму $n = 41$ знайдено зміщену оцінку $D_B = 3$ генеральної дисперсії. Знайти незміщену оцінку дисперсії генеральної сукупності.

327. За вибіркою об'єму $n = 51$ знайдено зміщену оцінку $D_B = 5$ генеральної дисперсії. Знайти незміщену оцінку дисперсії генеральної сукупності.

328. У результаті п'яти вимірів довжини стрижня одним приладом (без систематичних помилок) отримані такі результати (мм): 92; 94; 103; 105; 106. Знайти: а) вибірку середню довжину стрижня; б) вибірку та виправлену дисперсії помилок приладу.

Розв'язок. а) Знайдемо вибірку середню:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n} = 92 + (0 + 2 + 11 + 13 + 14) / 5 = 92 + 8 = 100.$$

б) Знайдемо вибірку дисперсію: $D_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} =$

$$[(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2 + (105-100)^2 + (106-100)^2] / 5 = 34.$$

Знайдемо виправлену дисперсію: $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{5}{4} 34 = 42,5.$

329. В результаті чотирьох вимірів деякої фізичної величини одним приладом (без систематичних помилок) отримані такі результати: 8; 9; 11; 12. Знайти: а) вибірку середню результатів вимірів; б) вибірку та виправлену дисперсії помилок приладу.

330. Нижче наведено результати виміру зросту (в см) випадково відібраних

100 студентів. Знайти вибірку середню та вибірку дисперсію зросту обстежених студентів (Знайти середини інтервалу і прийняти їх як варіанти).

Зріст	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Кількість студентів	10	14	26	28	12	8	2

331. Знайти вибірку дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму $n = 10$, перейшовши до умовних варіант $u_i = x_i - 191$:

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

332. Знайти вибірку дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму $n = 100$, перейшовши до умовних варіант $u_i = x_i - 360$:

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

333. Знайти вибірку дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму $n = 100$, перейшовши до умовних варіант $u_i = x_i - 2844$:

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

334. Знайти вибірку дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму $n = 10$, щоб уникнути дій з дробами, перейдіть до умовних варіант $u_i = 100 x_i$:

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

335. Знайти вибірку дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму $n = 50$, перейшовши до умовних варіант $u_i = 10 x_i$:

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

336. Знайти вибірку дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму $n = 50$, перейшовши до умовних варіант $u_i = 10 x_i - 195$:

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	5	10	20	15

337. Знайти виправлену вибіркoву дисперсію щодо даного розподілу вибірки $n = 10$, перейшовши до умовних варіант $u_i = x_i - 104$:

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

338. Знайти виправлену вибіркoву дисперсію щодо даного розподілу вибірки об'єму $n = 100$, перейшовши до умовних варіант $u_i = x_i - 1275$:

x_i	1250	1275	1280	1300
n_i	20	25	50	5

339. Знайти виправлену вибіркoву дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму $n = 10$, щоб уникнути дій з дробами, перейдіть до умовних варіант $u_i = 100 x_i$:

x_i	0,01	0,05	0,09
n_i	2	3	5

340. Знайти виправлену вибіркoву дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму $n = 20$, перейшовши до умовних варіант $u_i = 10 x_i$:

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

341. Знайти виправлену вибіркoву дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму $n = 10$, перейшовши до умовних варіант $u_i = 10 x_i - 268$:

x_i	26,1	28,2	30,4	26,1
n_i	2	3	4	1

9.4. Метод моментів

Метод моментів точкової оцінки невідомих параметрів заданого розподілу полягає у прирівнюванні теоретичних моментів відповідним емпіричним моментам того самого порядку.

Якщо розподіл визначається одним параметром, то для його віднайдення прирівнюють один теоретичний момент одному емпіричному

моменту того ж порядку. Наприклад, можна прирівняти початковий теоретичний момент першого порядку початковому емпіричному моменту першого порядку $\nu_1 = M_1$. Враховуючи, що $\nu_1 = M(X)$ та $M_1 = \bar{x}_B$, отримаємо

$$M(X) = \bar{x}_B.$$

Математичне сподівання є функцією від невідомого параметра заданого розподілу, тому вирішивши це рівняння відносно невідомого параметра, тим самим отримаємо його точкову оцінку.

Якщо розподіл визначається двома параметрами, то прирівнюють два теоретичні моменти двом відповідним емпіричним моментам того ж порядку. Наприклад, можна прирівняти початковий теоретичний момент першого порядку початковому емпіричному моменту першого порядку і центральний теоретичний момент другого порядку центральному емпіричному моменту другого порядку:

$$\nu_1 = M_1, \mu_2 = m_2.$$

Враховуючи, що $\nu_1 = M(X)$, $M_1 = \bar{x}_B$, $\mu_2 = D(X)$, $m_2 = D_B$, маємо

$$\begin{cases} M(X) = \bar{x}_B, \\ D(X) = D_B. \end{cases}$$

Ліві частини цих рівнянь є функціями від невідомих параметрів, тому, розв'язавши цю систему, відносно невідомих параметрів, тим самим отримаємо їх точкові оцінки.

Для обчислення вибіркової середньої $\bar{x}_B$ і вибіркової дисперсії D_B потрібно мати вибірку $x_1, x_2, \dots, x_n$.

342. Випадкова величина X розподілена згідно із законом Пуассона

$$P_m(x_i) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

де m – кількість випробувань, виконаних в одному досліді; x_i – кількість появи події в i -му досліді. Знайти методом моментів за вибіркою $x_1, x_2, \dots, x_n$ точкову оцінку невідомого параметра λ , який характеризує розподіл

Пуассона.

Розв'язок. Потрібно оцінити один параметр, тому достатньо мати одне рівняння відносно цього параметра. Прирівняємо початковий теоретичний момент першого порядку ν_1 початковому емпіричному моменту першого порядку M_1 :

$$\nu_1 = M_1,$$

Взявши до уваги, що $\nu_1 = M(X)$ та $M_1 = \bar{x}_B$, отримаємо $M(X) = \bar{x}_B$.

Пам'ятаючи, що математичне сподівання розподілу Пуассона дорівнює параметру λ цього розподілу, маємо остаточно $\lambda = \bar{x}_B$.

Отже, точковою оцінкою параметра λ розподілу Пуассона служить вибіркова середня: $\lambda^* = \bar{x}_B$.

343. Випадкова величина X (кількість насінин бур'янів у пробі зерна) розподілена згідно із законом Пуассона. Нижче наведено розподіл насіння бур'янів у $n = 1000$ пробах зерна (у першому рядку вказано кількість x_i бур'янів у одній пробі; у другому рядку вказана частота n_i – кількість проб, що містять x_i насінин бур'янів):

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	40	8	4	2

Знайти методом моментів точкову оцінку невідомого параметра розподілу Пуассона. Використати результати розв'язку задачі 330.

344. Випадкова величина X (кількість нестандартних виробів у партії виробів) розподілена за законом Пуассона. Нижче наведено розподіл нестандартних виробів у $n = 200$ партіях (у першому рядку вказано кількість x_i нестандартних виробів в одній партії; у другому рядку вказана частота n_i – кількість партій, що містять x_i нестандартних виробів):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Знайти методом моментів точкову оцінку невідомого параметра розподілу Пуассона.

345. Знайти методом моментів за вибіркою $x_1, x_2, \dots, x_n$ точкову оцінку параметра p біноміального розподілу

$$P_m(x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i},$$

де x_i – кількість появи події в i -му досліді ($i = 1, 2, \dots, n$), m – кількість випробувань в одному досліді. Прирівняти початковий теоретичний момент першого порядку до початкового емпіричного моменту першого порядку.

346. Випадкова величина X (кількість появи події A в m незалежних випробуваннях) підпорядкована біноміальному закону розподілу з невідомим параметром p . Нижче наведено емпіричний розподіл кількості події в 10 дослідях по 5 випробувань у кожному (у першому рядку вказано кількість x_i появи події A в одному досліді; у другому рядку вказана частота n_i – кількість дослідів, в яких спостерігалось x_i появ події A):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	5	2	1	1	1

Знайти методом моментів точкову оцінку параметра p біномного розподілу. Використати результати розв'язку задачі 345.

347. Знайти методом моментів за вибіркою $x_1, x_2, \dots, x_n$ точкову оцінку невідомого параметра λ показникового розподілу, щільність якого $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$).

348. Випадкова величина X (час роботи елемента) має показниковий розподіл $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$). Нижче наведено емпіричний розподіл середнього часу роботи $n = 200$ елементів (у першому рядку наведено середній час x_i роботи елемента в годинах; у другому рядку вказана частота n_i – кількість елементів, що пропрацювали в середньому x_i годин):

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_i	133	45	15	4	2	1

Знайти методом моментів точкову оцінку невідомого параметра показникового розподілу. Використовувати результати розв'язку задачі 347.

349. Знайти методом моментів точкову оцінку параметра p

(імовірності) геометричного розподілу $P(X=x_i)=p(1-p)^{x_i-1}$, де x_i – кількість випробувань, проведених до появи події; p – імовірність появи події в одному випробуванні. Врахувати, що $M(X)=1/p$.

350. Знайти методом моментів оцінку параметра p геометричного розподілу $P(X=x_i)=p(1-p)^{x_i-1}$, якщо у 4 дослідах подія з'явилася відповідно після 2, 4, 6 та 8 випробувань.

351. Знайти методом моментів за вибіркою $x_1, x_2, \dots, x_n$ точкові оцінки невідомих параметрів a та σ нормального розподілу, щільність якого

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Прирівняйте початковий теоретичний момент першого порядку і центральний теоретичний момент другого порядку до відповідних емпіричних моментів.

352. Випадкова величина X (відхилення контрольованого розміру виробу від номіналу) підпорядкована нормальному закону розподілу з невідомими параметрами a та σ . Нижче наведено емпіричний розподіл відхилення від номіналу $n = 200$ виробів (у першому рядку вказано відхилення x_i (мм); у другому рядку наведена частота n_i – кількість виробів, що мають відхилення x_i):

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Знайти методом моментів точкові оцінки невідомих параметрів a та σ нормального розподілу. Використовувати результати розв'язку задачі 351.

353. Знайти методом моментів за вибіркою $x_1, x_2, \dots, x_n$ точкові оцінки параметрів a та b рівномірного розподілу, щільність якого $f(x) = 1/(b-a)$ ($b>a$). Врахувати, що $M(X)=(a+b)/2$, $D(X)=(b-a)^2/12$.

354. Випадкова величина X (помилка виміру дальності далекоміром) підпорядкована рівномірному закону розподілу з невідомими параметрами a і b . Нижче наведено емпіричний розподіл середньої помилки $n = 200$ вимірів

дальності (у першому рядку вказана середня помилка x_i , у другому рядку вказана частота n_i – кількість вимірювань, що мають середню помилку x_i):

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Знайти методом моментів точкові оцінки невідомих параметрів a і b рівномірного розподілу. Використати результати розв'язку задачі 353.

9.5. Інтервальні оцінки

Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу, що покриває оцінюваний параметр.

Довірчим називають інтервал, який із заданою надійністю γ покриває заданий параметр.

1. *Інтервальною оцінкою (з надійністю γ) математичного сподівання a нормально розподіленої кількісної ознаки X за вибірковою середньою $\bar{x}_B$ при відомому середньому квадратичному відхиленню σ генеральної сукупності служить довірчий інтервал*

$$\bar{x}_B - t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < a < \bar{x}_B + t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

де $t(\sigma/\sqrt{n}) = \delta$ – точність оцінки, n – об'єм вибірки, t – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$ (див. додаток 2), при якому $\Phi(t) = \gamma/2$;

при невідомому σ (і об'ємі вибірки $n < 30$)

$$\bar{x}_B - t_\gamma\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) < a < \bar{x}_B + t_\gamma\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

де s – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, t_γ знаходять за таблицею додатка 5 при заданих n і γ .

2. *Інтервальною оцінкою (з надійністю γ) середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої кількісної ознаки X за виправленим вибірковим середнім квадратичним відхиленням s служить довірчий інтервал*

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q) \text{ (якщо } q < 1); 0 < \sigma < s(1 + q) \text{ (якщо } q > 1);$$

де q знаходять за таблицею додатка 6 при заданих n і γ .

3. Інтервальною оцінкою (з надійністю γ) невідомої ймовірності p біноміального розподілу за відносною частотою w служить довірчий інтервал (з наближеними кінцями p_1 і p_2) $p_1 < p < p_2$,

де

$$p_1 = \frac{n}{t^2 + n} \left(w^2 + \frac{t^2}{2n} - t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2} \right),$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2 + n} \left(w^2 + \frac{t^2}{2n} + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2} \right),$$

де n – загальна кількість випробувань; m – кількість появи події; $w=m/n$ – відносна частота; t – значення аргументу функції Лапласа (додаток 2) $\Phi(t) = \gamma/2$ (γ – задана надійність).

При великих значеннях n (порядку сотень) можна прийняти як наближені межі довірчого інтервалу

$$p_1 = w - t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}, \quad p_2 = w + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}.$$

355. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю 0,95 невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо генеральне середнє квадратичне відхилення 5, вибіркова середня 14 і об'єм вибірки 25.

Розв'язок. Потрібно знайти довірчий інтервал

$$\bar{x}_B - t \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) < a < \bar{x}_B + t \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

Усі величини, крім t , відомі. Знайдемо t із співвідношення $\Phi(t) = 0,95/2 = 0,475$. За таблицею додатка 2 знаходимо $t = 1,96$. Підставивши $t = 1,96$, $\bar{x}_B = 14$, $\sigma = 5$, $n = 25$, остаточно отримаємо шуканий довірчий інтервал $12,04 < a < 15,96$.

356. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю 0,99 невідомого

математичного сподівання μ нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ , середня вибірка $\bar{x}_v$ і об'єм вибірки n : а) $\sigma = 4$, $\bar{x}_v = 10,2$, $n = 16$; б) $\sigma = 5$, $\bar{x}_v = 16,8$, $n = 25$.

357. Одним і тим самим приладом із середнім квадратичним відхиленням випадкових помилок вимірювання $\sigma = 40$ м виконано п'ять рівноточних вимірів відстані від гармати до цілі. Знайти довірчий інтервал для оцінки справжньої відстані μ до цілі з надійністю $\gamma = 0,95$, знаючи, що середнє арифметичне результатів вимірювань $\bar{x}_v = 2000$ м. Вважати, що результати вимірювання розподілені нормально.

358. Вибірка з великої партії електроламп містить 100 ламп. Середня тривалість горіння лампи з вибірки дорівнювала 1000 год. Знайти з надійністю 0,95 довірчий інтервал для середньої тривалості μ горіння лампи всієї партії, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампи $\sigma = 40$ ч. Вважається, що тривалість горіння ламп розподілена нормально.

359. Верстат штампує валики. За вибіркою об'єму $n = 100$ обчислена середня вибірка діаметрів виготовлених валиків. Знайти з надійністю 0,95 точність δ , з якою середня вибірка оцінює математичне сподівання діаметрів виготовлених валиків, знаючи, що їх середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2$ мм. Вважається, що діаметри валиків розподілені нормально.

360. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,975 точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює $\delta = 0,3$, якщо відомо середнє квадратичне відхилення $\sigma = 1,2$ нормально розподіленої генеральної сукупності.

Розв'язок. Використаємо формулу, що визначає точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності за вибірковою середньою:

$$t(\sigma/\sqrt{n}) = \delta. \text{ Звідси } n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}.$$

За умовою, $\gamma = 0,975$; отже, $\Phi(t) = 0,975/2 = 0,4875$. За таблицею додатка 2 знайдемо $t = 2,24$. Підставивши $t=2,24$, $\sigma=1,2$ і $\delta=0,3$, отримаємо шуканий об'єм вибірки $n = 81$.

361. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,925 точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності за середньою вибірковою дорівнює 0,2, якщо відомо середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності $\sigma=1,5$.

362. З генеральної сукупності відібрали вибірку об'єму $n = 10$:

варіанта	x_i	-2	1	2	3	4	5
частота	n_i	2	1	2	2	2	1

Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання a нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за середньою вибірковою за допомогою довірчого інтервалу.

Розв'язок. Вибіркове середнє та виправлене середнє квадратичне відхилення знайдемо відповідно за формулами:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}}.$$

Підставивши у ці формули дані задачі, отримаємо $\bar{x}_B = 2$, $s = 2,4$.

Знайдемо t_γ . Користуючись таблицею додатка 5, з $\gamma = 0,95$ і $n = 10$ знаходимо $t_\gamma = 2,26$.

Знайдемо шуканий довірчий інтервал:

$$\bar{x}_B - t_\gamma \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right) < a < \bar{x}_B + t_\gamma \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right),$$

Підставляючи обраховані параметри, отримаємо шуканий довірчий інтервал $0,3 < a < 3,7$, що покриває невідоме математичне сподівання a з надійністю 0,95.

363. З генеральної сукупності відібрали вибірку об'єму $n = 12$:

варіанта	x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
частота	n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання μ нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за допомогою довірчого інтервалу.

364. За даними 9 незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини знайдено середнє арифметичне результатів вимірювань $\bar{x}_B = 30,1$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 6$. Оцінити справжнє значення вимірюваної величини за допомогою довірчого інтервалу з надійністю $\gamma = 0,99$. Вважати, що результати вимірювання розподілені нормально.

Розв'язок. Справжнє значення вимірюваної величини дорівнює її математичному сподіванню μ . Тому завдання зводиться до оцінки математичного сподівання (при невідомому σ) за допомогою довірчого інтервалу $\bar{x}_B - t_\gamma \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right) < \mu < \bar{x}_B + t_\gamma \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$.

Усі величини, крім t_γ відомі. За таблицею додатка 5 при $\gamma = 0,99$ і $n = 9$ знаходимо $t_\gamma = 2,36$.

Після цього можемо порахувати шуканий інтервал: $25,38 < \mu < 34,82$.

365. За даними 16 незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини знайдено середнє арифметичне результатів вимірювань $\bar{x}_B = 42,8$ та «виправлене» середнє квадратичне відхилення $s = 8$. Оцінити справжнє значення вимірюваної величини з надійністю $\gamma = 0,999$.

366. За даними вибірки об'єму $n = 16$ з генеральної сукупності знайдено «виправлене» середнє квадратичне відхилення $s = 1$ нормально розподіленої кількісної ознаки. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю 0,95.

Розв'язок. Задача зводиться до пошуку довірчого інтервалу $s(1 - q) < \sigma < s(1 + q)$ (якщо $q < 1$), або $0 < \sigma < s(1 + q)$ (якщо $q > 1$),

За даними $\gamma = 0,95$ і $n = 16$ і за таблицею додатка 6 знайдемо $q = 0,44$.

Так як $q < 1$, то, підставивши $s = 1$, $q = 0,44$ у відповідне рівняння, отримаємо шуканий довірчий інтервал $0,56 < \sigma < 1,44$.

367. За даними вибірки об'єму n з генеральної сукупності нормально розподіленої кількісної ознаки знайдено «виправлене» середнє квадратичне відхилення s . Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю 0,999, якщо: а) $n = 10$, $s = 5,1$; б) $n = 50$, $s = 14$.

368. Зроблено 12 вимірів одним приладом (без систематичної помилки) деякої фізичної величини, причому «виправлене» середнє квадратичне відхилення s випадкових помилок вимірювання дорівнювало 0,6. Визначити точність приладу з надійністю 0,99. Вважати, що результати вимірів розподілені нормально.

Розв'язок. Точність приладу характеризується середнім квадратичним відхиленням випадкових помилок вимірювань. Тому завдання зводиться до пошуку довірчого інтервалу, що покриває σ з заданою надійністю $\gamma = 0,99$:

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q) \text{ (якщо } q < 1),$$

За даними $\gamma = 0,99$ та $n = 12$ і за таблицею додатка 6 знайдемо $q = 0,9$. Підставивши дані у рівняння, отримаємо $0,06 < \sigma < 1,14$.

369. Зроблено 10 вимірів одним приладом (без систематичної помилки) деякої фізичної величини, причому «виправлене» середнє квадратичне відхилення s випадкових помилок вимірів дорівнювало 0,8. Визначити точність приладу з надійністю 0,95. Вважати, що результати вимірів розподілені нормально.

370. Виконуються незалежні випробування з однаковою, але невідомою ймовірністю p появи події A в кожному випробуванні. Знайти довірчий інтервал для оцінки ймовірності p з надійністю 0,95, якщо у 60 випробуваннях подія A з'явилася 15 раз.

Розв'язок. За умовою, $n = 60$, $m = 15$, $\gamma = 0,95$. Знайдемо відносну частоту появи події A : $w = m/n = 15/60 = 0,25$.

Знайдемо t із співвідношення $\Phi(t) = \gamma/2 = 0,95/2 = 0,475$. За таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) знаходимо $t = 1,96$. Знайдемо межі шуканого довірчого інтервалу:

$$p_1 = \frac{n}{t^2 + n} \left(w^2 + \frac{t^2}{2n} - t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2} \right),$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2 + n} \left(w^2 + \frac{t^2}{2n} + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2} \right).$$

Підставивши ці формули одержані величини, отримаємо $p_1=0,16$, $p_2=0,37$. Отже, шуканий довірчий інтервал $0,16 < p < 0,37$.

371. Виконуються незалежні випробування з однаковою, але невідомою ймовірністю p появи події A в кожному випробуванні. Знайти довірчий інтервал з метою оцінки ймовірності p з надійністю $0,99$, якщо у 100 випробуваннях подія A з'явилася 60 раз.

372. Виготовлено експериментальний ігровий автомат, який має забезпечити появу виграшу в одному випадку зі 100 кидань монети в автомат. Для перевірки придатності автомата здійснено 400 випробувань, причому виграш відбувся 5 разів. Знайти довірчий інтервал, що покриває невідому можливість появи виграшу з надійністю $\gamma = 0,999$.

Розв'язок. Знайдемо відносну частоту появи виграшу: $w = m/n = 5/400 = 0,0125$. Знайдемо t із співвідношення $\Phi(t) = \gamma/2 = 0,999/2 = 0,4995$. За таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) знаходимо $t = 3,3$.

Враховуючи, що $n = 400$ велике, використовуємо для відшукування меж довірчого інтервалу наближені формули:

$$p_1 = w - t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}, \quad p_2 = w + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}.$$

Підставивши в ці формули $w = 0,0125$, $t = 3,3$, $n = 400$, отримаємо $p_1 = 0,0058$, $p_2 = 0,0308$. Отже, шуканий довірчий інтервал $0 < p < 0,0308$.

373. Зроблено 300 випробувань, у кожному з яких невідома ймовірність p появи події A постійна. Подія A з'явилася у 250 випробуваннях. Знайти довірчий інтервал, що покриває невідому ймовірність p з надійністю 0,95.

374. У 360 випробуваннях, у кожному у тому числі ймовірність появи події однакова і невідома, подія A з'явилася 270 раз. Знайти довірчий інтервал, що покриває невідому ймовірність p з надійністю 0,95.

375. Серед 250 деталей, виготовлених верстатом, виявилось 32 нестандартні. Знайти довірчий інтервал, що покриває з надійністю 0,99 невідому ймовірність p виготовлення верстатом нестандартної деталі.

376. Під час випробувань 1000 елементів зареєстровано 100 відмов. Знайти довірчий інтервал, що покриває невідому ймовірність p відмови елемента з надійністю: а) 0,95; б) 0,99.

Список літератури

1. Ачкасов А.Є., Плакіда В.Т., Воронков О.О., Воронкова Т.Б. Теорія ймовірностей і математична статистика. Харків, ХНАМГ, 2008. – 247 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. / Київ: Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.
3. Валєєва К.Г., Джалладова І.А. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики. К.: КНЕУ, 2006. — 354 с.
4. Далингер Ст. А. Теорія ймовірностей і математична статистика з застосуванням mathcad. Юрайт – 2018. – 452 с.
5. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика/ Ч.1. Теорія ймовірностей. - К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
6. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика/ Ч.2. Математична статистика. - К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.
7. Зайцев Є. П. Теорія ймовірностей і математична статистика. Базовий курс з індивідуальними завданнями і розв'язком типових варіантів. К.: Алерта, 2017. – 440 с.
8. Кармелюк Г.І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач: Навч. посібник. — К.: Центр учбової літератури, 2007 — 576 с.
9. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / – Львів: ЛьвДУВС, 2017. – 292 с.
10. Самойленко М.І., Кузнецов А.І., Костенко О.Б. Теорія ймовірностей: Підручник. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 194 с.
11. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика. К.: Центр навчальної літератури, 2004. - 448стр. - Підручник. - 1-е вид.
12. Томусяк А.А., Трохименко В.С. Теорія ймовірностей. Частина перша. Вінниця, 2001. – 212 с.
13. Хом'юк І. В., Хом'юк В. В., Краєвський В. О. Теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник. / Вінниця: ВНТУ, 2009. – 189 с.
14. Черняк О.І., Обушна О.М., Ставицький А.В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики. – Теоретично-практичний збірник, м. Київ, вид. "Знання", 2000, 119 с.

Додатки

Додаток 1.

Таблиця значень локальної функції Лапласа

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3387	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2903	0,2780	0,2757	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1876	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0983	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0519	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0388	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0015	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Додаток 2.

Таблиця значень інтегральної функції Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,39	0,1517	0,78	0,2823	1,17	0,3790	1,56	0,4406	1,95	0,4744	2,38	0,4913
0,01	0,0040	0,40	0,1554	0,79	0,2852	1,18	0,3810	1,57	0,4418	1,96	0,4750	2,40	0,4918
0,02	0,0080	0,41	0,1591	0,80	0,2881	1,19	0,3830	1,58	0,4429	1,97	0,4756	2,42	0,4922
0,03	0,0120	0,42	0,1628	0,81	0,2910	1,20	0,3849	1,59	0,4441	1,98	0,4761	2,44	0,4927
0,04	0,0160	0,43	0,1664	0,82	0,2939	1,21	0,3869	1,60	0,4452	1,99	0,4767	2,46	0,4931
0,05	0,0199	0,44	0,1700	0,83	0,2967	1,22	0,3883	1,61	0,4463	2,00	0,4772	2,48	0,4934
0,06	0,0239	0,45	0,1736	0,84	0,2995	1,23	0,3907	1,62	0,4474	2,01	0,4772	2,50	0,4938
0,07	0,0279	0,46	0,1772	0,85	0,3023	1,24	0,3925	1,63	0,4484	2,02	0,4783	2,52	0,4941
0,08	0,0319	0,47	0,1808	0,86	0,3051	1,25	0,3944	1,64	0,4495	2,03	0,4788	2,54	0,4945
0,09	0,0359	0,48	0,1844	0,87	0,3078	1,26	0,3962	1,65	0,4505	2,04	0,4793	2,56	0,4948
0,10	0,0398	0,49	0,1879	0,88	0,3106	1,27	0,3980	1,66	0,4515	2,05	0,4798	2,58	0,4951
0,11	0,0438	0,50	0,1915	0,89	0,3133	1,28	0,3997	1,67	0,4525	2,06	0,4803	2,60	0,4953
0,12	0,0478	0,51	0,1950	0,90	0,3159	1,29	0,4015	1,68	0,4535	2,07	0,4807	2,62	0,4956
0,13	0,0517	0,52	0,1985	0,91	0,3186	1,30	0,4032	1,69	0,4545	2,08	0,4812	2,64	0,4959
0,14	0,0557	0,53	0,2019	0,92	0,3212	1,31	0,4049	1,70	0,4554	2,09	0,4817	2,66	0,4961
0,15	0,0596	0,54	0,2054	0,93	0,3238	1,32	0,4066	1,71	0,4554	2,10	0,4821	2,68	0,4963
0,16	0,0636	0,55	0,2088	0,94	0,3264	1,33	0,4082	1,72	0,4573	2,11	0,4826	2,70	0,4965
0,17	0,0675	0,56	0,2123	0,95	0,3289	1,34	0,4099	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,72	0,4967
0,18	0,0714	0,57	0,2157	0,96	0,3315	1,35	0,4115	1,74	0,4591	2,13	0,4834	2,74	0,4969
0,19	0,0753	0,58	0,2190	0,97	0,3340	1,36	0,41311	1,75	0,4599	2,14	0,4838	2,76	0,4971
0,20	0,0793	0,59	0,2224	0,98	0,3365	1,37	0,4147	1,76	0,4608	2,15	0,4842	2,78	0,4973
0,21	0,0832	0,60	0,2257	0,99	0,3389	1,38	0,4162	1,77	0,4616	2,16	0,4846	2,80	0,4974
0,22	0,0871	0,61	0,2291	1,00	0,3413	1,39	0,4177	1,78	0,4525	2,17	0,4850	2,82	0,4976
0,23	0,0910	0,62	0,2324	1,01	0,3438	1,40	0,4192	1,79	0,4633	2,18	0,4854	2,84	0,4977
0,24	0,0948	0,63	0,2357	1,02	0,3401	1,41	0,4207	1,80	0,4641	2,19	0,4857	2,86	0,4979
0,25	0,0987	0,64	0,2389	1,03	0,3485	1,42	0,4222	1,81	0,4649	2,20	0,4861	2,88	0,4980
0,26	0,1026	0,65	0,2422	1,04	0,3508	1,43	0,4236	1,82	0,4656	2,21	0,4864	2,90	0,4981
0,27	0,1064	0,66	0,2454	1,05	0,3531	1,44	0,4251	1,83	0,4664	2,22	0,4868	2,92	0,4982
0,28	0,1103	0,67	0,2486	1,06	0,3554	1,45	0,4265	1,84	0,4671	2,23	0,4871	2,94	0,4984
0,29	0,1141	0,68	0,2517	1,07	0,3577	1,46	0,4279	1,85	0,4678	2,24	0,4875	2,96	0,4985
0,30	0,1179	0,69	0,2549	1,08	0,3599	1,47	0,4292	1,86	0,4686	2,25	0,4878	2,98	0,4985
0,31	0,1217	0,70	0,2580	1,09	0,3621	1,48	0,4305	1,87	0,4693	2,26	0,4881	3,00	0,49865
0,32	0,1255	0,71	0,2611	1,10	0,3643	1,49	0,4319	1,88	0,4699	2,27	0,4884	3,20	0,49931
0,33	0,1293	0,72	0,2642	1,11	0,3665	1,50	0,4332	1,89	0,4706	2,28	0,4887	3,40	0,49966
0,34	0,1331	0,73	0,2673	1,12	0,3686	1,51	0,4345	1,90	0,4713	2,29	0,4890	3,60	0,49984
0,35	0,1368	0,74	0,2703	1,13	0,3708	1,52	0,4357	1,91	0,4719	2,30	0,4893	3,80	0,49992
0,36	0,1406	0,75	0,2734	1,14	0,3729	1,53	0,4370	1,92	0,4726	2,32	0,4898	4,00	0,49996
0,37	0,1443	0,76	0,2764	1,15	0,3749	1,54	0,4382	1,93	0,4732	2,34	0,4904	4,50	0,49997
0,38	0,1480	0,77	0,2794	1,16	0,3770	1,55	0,4394	1,94	0,4738	2,36	0,4909	5,00	0,49998

Додаток 3.

Таблиця значень функції e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050
0,01	0,990	0,41	0,644	0,81	0,445	3,10	0,040
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,20	0,041
0,03	0,970	0,43	0,650	0,83	0,436	3,30	0,037
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,40	0,033
0,05	0,951	0,45	0,638	0,85	0,427	3,50	0,030
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,423	3,60	0,027
0,07	0,932	0,47	0,625	0,87	0,419	3,70	0,025
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,80	0,022
0,09	0,914	0,49	0,613	0,89	0,411	3,90	0,020
0,10	0,905	0,50	0,606	0,90	0,407	4,00	0,0183
0,11	0,896	0,51	0,600	0,91	0,403	4,10	0,0166
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,20	0,0150
0,13	0,878	0,53	0,589	0,93	0,395	4,30	0,0136
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,40	0,0123
0,15	0,861	0,55	0,577	0,95	0,387	4,50	0,0111
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,60	0,0101
0,17	0,844	0,57	0,565	0,97	0,379	4,70	0,0091
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,80	0,0082
0,19	0,827	0,59	0,554	0,99	0,372	4,90	0,0074
0,20	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,00	0,0067
0,21	0,811	0,61	0,543	1,10	0,333	5,10	0,0061
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,302	5,20	0,0055
0,23	0,795	0,63	0,533	1,30	0,273	5,30	0,0050
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,40	0,0045
0,25	0,779	0,65	0,522	1,50	0,223	5,50	0,0041
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,60	0,0037
0,27	0,763	0,67	0,512	1,70	0,183	5,70	0,0033
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,80	0,0030
0,29	0,748	0,69	0,502	1,90	0,150	5,90	0,0027
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,00	0,0025
0,31	0,733	0,71	0,492	2,10	0,122	6,10	0,0022
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,20	0,0020
0,33	0,719	0,73	0,482	2,30	0,100	6,30	0,0018
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,40	0,0017
0,35	0,705	0,75	0,472	2,50	0,082	6,50	0,0015
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,60	0,0014
0,37	0,691	0,77	0,463	2,70	0,067	6,70	0,0012
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,80	0,0011
0,39	0,677	0,79	0,454	2,90	0,055	6,90	0,0010

Додаток 4.

Розподіл Пуассона

Таблиця значень $P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

k	a								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

(продовження)

k	a									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0933	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,00825	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1377
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Додаток 5.

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 6.

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблиця значень критичних точок розподілу Пірсона

$$\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2(\alpha, k)$$

(ступінь вільності $k = m - 3$)

Кількість ступенів вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Додаток 8.

Таблиця значень критичних точок розподілу Стюдента

(ступінь вільності $k = n_1 + n_2 - 2$)

Кількість ступенів вільності k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Додаток 9.

Таблиця значень критичних точок F розподілу Фішера-Снедекора

$$F_{кр} = F(\alpha, k_1, k_2)$$

($k_1 = n_1 - 1$ – кількість степенів вільності більшої дисперсії)

($k_2 = n_2 - 1$ – кількість степенів вільності меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0,01$

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Рівень значущості $\alpha = 0,05$

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Додаток 10.

Рівномірно розподілені випадкові числа

01.	49487	25252	02431	69414	77285	52852	98740	85022	17778	81833	63789	61840
02.	52802	97738	42193	89353	35179	11444	98054	58736	03840	93449	54958	81740
03.	28667	23901	96960	70724	92042	71868	30195	12138	21636	57781	33167	60986
04.	62058	11106	19620	67893	67518	34534	09891	35146	56269	94621	10909	12498
05.	87822	86864	29188	23218	56773	69124	18453	62085	08149	90998	40343	71546
06.	14704	55808	05863	72452	68374	02760	79464	36170	19001	37561	81023	42249
07.	18519	22557	92900	03095	71115	06406	01156	25433	67367	59688	61590	13812
08.	17889	23214	06836	68333	98166	95234	95522	80787	13138	93299	44474	59902
09.	45869	15021	13433	13751	43352	87995	06884	96496	02400	27726	39810	27864
10.	14454	54268	21709	37260	06414	78560	55073	40579	89515	82167	10305	21809
11.	42243	45236	40338	54040	49158	80958	07636	37227	99460	60248	95076	20944
12.	10153	09129	42477	71253	20908	03808	04876	80750	45915	75845	79089	97852
13.	20891	53031	78804	88789	44859	83655	61063	08261	45637	37296	87380	26586
14.	90883	12260	36272	98203	29089	18415	57571	97048	41353	33783	28982	32796
15.	15782	01278	72053	54999	76130	96563	69434	60438	35335	42393	97750	51513
16.	98167	14404	07958	96564	51442	43582	14965	75053	69087	28185	82221	47475
17.	86837	40969	67158	00789	34453	82207	20911	05939	57536	31880	35584	48621
18.	99166	33419	60979	68879	98590	53322	73162	34414	68418	00241	27444	20067
19.	92143	14188	79891	47134	37353	30419	33576	16685	10247	31642	85793	88975
20.	82441	69557	92409	83941	61137	64435	52839	32103	93253	37526	69755	39506
21.	30458	38905	96545	21944	36910	48745	32519	75757	07911	89887	30543	68442
22.	49207	91282	15638	28328	71928	47626	91993	12965	97756	03328	99488	55201
23.	62358	79309	90114	00692	63327	28856	59374	29285	89561	76911	75363	33946
24.	41532	49022	93730	89164	00980	28382	83994	11481	27464	93168	94187	42495
25.	30057	17405	13741	96025	32154	60639	59873	31744	25133	56236	32885	28384
26.	53017	18830	70177	01383	46006	51370	51217	41754	50026	39056	23887	89889
27.	10375	09136	49175	50252	62289	70091	62806	24428	16436	67905	10872	50278
28.	97204	07629	42113	67044	28079	58261	20028	81819	75846	94933	22793	91985
29.	98675	01785	21600	70596	03076	70135	26545	02354	83718	05456	26232	58185
30.	77634	78317	69625	58266	15619	88259	16820	37895	08533	52347	87356	19124
31.	22403	70701	69804	65806	43902	49145	47363	26244	72875	09065	68256	38744
32.	56698	36907	96122	22398	53070	71587	36295	87033	39496	16283	51225	81018
33.	88524	51242	42342	19470	54319	14273	62126	90247	06385	61398	92645	41909
34.	13692	52083	28467	63653	19347	62440	42358	79131	48458	08288	77747	70458
35.	55012	43126	79037	27055	59506	15770	20322	38773	30545	00708	33104	72459
36.	25343	90379	13218	02606	75440	03281	82000	67687	74383	21816	81206	66136
37.	76391	60380	63510	43347	90826	58124	52830	45541	22814	39615	00112	97266
38.	10097	32533	37542	04805	08422	68953	99019	02529	12807	99970	76520	13586
39.	64894	74296	19645	09303	09376	70715	80157	36147	34673	54876	24805	20437
40.	23209	02560	38311	31165	64032	36653	80959	09117	20636	10402	15953	34764
41.	88676	74397	98951	16877	66065	74717	31060	10805	85269	77602	63573	32135
42.	73796	45753	34072	76850	45571	82406	02051	65692	05325	47048	03529	64778
43.	36697	36170	35303	42614	68665	74818	90553	57548	35808	34282	65813	39885
44.	86799	07439	73053	85247	28468	28709	60935	20344	98520	17767	11805	05431
45.	83452	99634	88685	40200	99594	67348	14905	68607	39808	27732	06288	98083
46.	86507	58401	87517	64969	22109	40558	50725	68248	13746	70078	36766	67951
47.	91826	08928	60970	93433	29405	24201	18475	40610	90364	76493	93785	61368
48.	65481	17674	80124	35635	74350	99817	69916	26803	09893	20505	17468	50950
49.	17727	08015	77402	77214	66252	29148	14225	68514	58047	76974	45318	22374
50.	43236	00210	36936	87203	46427	56788	73039	57186	21115	78253	45521	64237
51.	76621	13990	96297	78822	91499	14523	80336	94598	44104	81949	12550	73742
52.	63606	49329	68479	27686	26940	36858	85157	47954	11100	02040	16505	34484
53.	46162	83554	70297	34135	32979	26575	12860	74697	40219	52563	94750	89923
54.	53140	33340	57600	40881	96644	89439	43651	77082	61196	90446	15474	45266
55.	94557	28573	42481	16213	23523	78317	26457	47774	95270	79953	67897	54387
56.	97344	08721	73208	89837	51924	33729	59367	83848	54622	44431	16868	48767
57.	68935	91416	65394	59593	82396	10118	91190	42592	03071	12059	26252	29663
58.	04493	52494	00549	97654	35963	15307	59808	08391	46058	85236	75246	33824
59.	64051	88159	26898	09354	45427	26842	01390	92286	45862	51025	96119	63896