

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

І.Д. Фартушний, С.М. Кириєнко, С.С. Колбасинський

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Практикум

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітніми програмами «Економічна аналітика», «Економіка», «Міжнародна економіка»
спеціальності 051 Економіка
(С1 Економіка та міжнародні економічні відносини (за спеціалізаціями))

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2025

Укладачі: *Фартушний Іван Дмитрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент*
Кириєнко Сергій Михайлович
Колбасинський Сергій Станіславович

Рецензент *Кулик А.Б., кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики факультету маркетингу Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана*

Відповідальний редактор *Капустян В.О., доктор фізико-математичних наук, професор*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 06.03.2025 р.)
за поданням Вченої ради факультету менеджменту та маркетингу
(протокол № 6 від 27.12.2024 р.)*

Фартушний І.Д.

Математика для економістів. [Електронний ресурс] : практикум: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітніми програмами «Економічна аналітика», «Економіка», «Міжнародна економіка» спеціальності 051 Економіка (С1 Економіка та міжнародні економічні відносини (за спеціалізаціями)) / І.Д. Фартушний, С.М. Кириєнко, С.С. Колбасинський; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 117 с.

Практикум «Математика для економістів» призначений для студентів економічних спеціальностей та охоплює основні математичні методи, необхідні для аналізу економічних процесів і прийняття рішень. Посібник містить приклади розв'язання типових задач, а також завдання для самостійної роботи. Основна увага приділяється таким розділам: лінійна алгебра, математичний аналіз, диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння.

Практикум допоможе студентам сформувати аналітичне мислення, розвинути навички застосування математичних методів у фінансовому аналізі, моделюванні економічних процесів та прогнозуванні.

Рекомендовано для студентів, викладачів та всіх, хто цікавиться математичними методами в економіці.

Реєстр. № НП 24/25-235. Обсяг 6,4 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© І.Д. Фартушний, С.М. Кириєнко, С.С. Колбасинський, 2025

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

Зміст

Тема 1. Матриці та дії над ними. Визначники 2-го і 3-го та n -го порядків.	5
Методика розв'язання типових задач	6
Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів	9
Тема 2. Розв'язування систем за допомогою правила Крамера та оберненої матриці.	11
Методика розв'язання типових задач	12
Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів	15
Тема 3. Дослідження та розв'язування систем лінійних рівнянь загального виду. Метод Гауса.	17
Методика розв'язання типових задач	18
Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів	20
Тема 4. Вектори, їх ранг та базис.	22
Методика розв'язання типових задач	25
Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів	28
Тема 5. Власні числа та власні вектори матриці	30
Методика розв'язання типових задач	32
Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів	33
Тема 6. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз). Модель міжнародної торгівлі.	35
Методика розв'язання типових задач	36
Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів	44
Тема 7. Вступ до математичного аналізу. Розкриття невизначеностей. Особливі границі.	45
Методика розв'язання типових задач	46
Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів	50
Тема 8. Неперервність функції.	56
Методика розв'язання типових задач	57
Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів	57
Тема 9. Похідна та еластичність функції. Диференціал функції.	60
Методика розв'язання типових задач	61
Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів	63
Тема 10. Похідні та диференціали вищих порядків. Функція попиту та пропозиції.	67
Методика розв'язання типових задач	68
Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів	69
Тема 11. Основні поняття функції багатьох змінних.	72

<i>Методика розв'язання типових задач</i>	74
<i>Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів</i>	77
Тема 12. Первісна функції. Невизначений інтеграл.	81
<i>Методика розв'язання типових задач</i>	82
<i>Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів</i>	85
Тема 13. Основні методи інтегрування. Інтегрування раціональних функцій	87
<i>Методика розв'язання типових задач</i>	89
<i>Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів</i>	91
Тема 14. Інтегрування ірраціональних та тригонометричних виразів.	94
<i>Методика розв'язання типових задач</i>	95
<i>Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів</i>	96
Тема 15. Визначений інтеграл. Економічне застосування визначеного інтегралу.	99
<i>Методика розв'язання типових задач</i>	100
<i>Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів</i>	101
Тема 16. Теорія диференціальних рівнянь. Рівняння з відокремленими змінними.	104
<i>Методика розв'язання типових задач</i>	105
<i>Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів</i>	105
Тема 17. Однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Лінійні рівняння першого порядку та методи їх розв'язування.	108
<i>Методика розв'язання типових задач</i>	108
<i>Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів</i>	110
Тема 18. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку. Методи їх вирішення.	113
<i>Методика розв'язання типових задач</i>	113
<i>Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів</i>	115
Література	117

Тема 1. Матриці та дії над ними. Визначники 2-го і 3-го та n-го порядків.

1. Основні означення

Матриця A розміру $m \times n$ — це прямокутна таблиця чисел, розташованих у m рядках і n стовпцях:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Квадратна матриця порядку n — це матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців ($m = n$).

Головна діагональ квадратної матриці містить елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Одинична матриця I_n — це квадратна матриця, у якої всі елементи на головній діагоналі дорівнюють 1, а всі інші — 0.

Транспонована матриця A^T — це матриця, отримана з A шляхом заміни її рядків на відповідні стовпці:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

2. Дії над матрицями

- **Додавання матриць:** $C = A + B$, якщо вони одного розміру, виконується за правилом: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- **Множення матриці на число:** кожен елемент матриці множиться на число
- **Множення матриць:** $C = A \cdot B$, якщо число стовпців A дорівнює числу рядків B :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Операції транспонування, додавання і множення на число задовольняють таким законам:

- 1) *Комутативність додавання:* $A + B = B + A$;
- 2) *Асоціативність додавання:* $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- 3) *Асоціативність множення на число:* $(ab)A = a(bA)$;
- 4) *Дистрибутивність для суми чисел:* $(a + b)A = aA + bA$;
- 5) *Дистрибутивність для суми матриць:* $a(A + B) = aA + aB$;
- 6) *Двоїстість транспонування:* $(A^T)^T = A$;
- 7) *Дистрибутивність транспонування щодо суми матриць:* $(A + B)^T = A^T + B^T$.

3. Визначники

Визначник (детермінант) квадратної матриці A позначається як $\det(A)$ або $|A|$.

Визначник 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначник 3-го порядку обчислюється за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Обчислення визначника n-го порядку розкладанням за рядком або стовпцем:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

де M_{ij} — мінор елемента a_{ij} , тобто визначник матриці (n-1)-го порядку, отриманої шляхом викреслення i -го рядка і j -го стовпця.

4. Властивості визначників

- Якщо два рядки (або стовпці) матриці рівні або пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
- Якщо поміняти місцями два рядки (або два стовпці), то знак визначника змінюється.
- Якщо всі елементи якогось рядка (або стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.
- Якщо всі елементи деякого рядка (або стовпця) помножити на число λ , то визначник помножиться на λ .
- Визначник добутку матриць дорівнює добутку їх визначників:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

- Визначник транспонованої матриці дорівнює визначнику вихідної:

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Методика розв'язання типових задач

1. Додавання та віднімання матриць

Умова: Матриці мають однакові розміри.

Алгоритм:

- Додайте/відніміть відповідні елементи матриць.

Приклад:

Для матриць $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ та $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

2. Множення матриці на скаляр

Алгоритм:

- Помножте кожен елемент матриці на число.

Приклад:

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Множення матриць

Умова: Кількість стовпців першої матриці = кількості рядків другої.

Алгоритм:

- Елемент c_{ij} результуючої матриці C обчислюється як:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Приклад:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

4. Транспонування матриці

Алгоритм:

- Рядки стають стовпцями.

Приклад:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Визначники 2-го порядку

Для матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

визначник обчислюється за формулою:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад:

Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Розв'язання:

$$\det A = (3 \cdot 7) - (5 \cdot 2) = 21 - 10 = 11.$$

2. Визначники 3-го порядку

Для матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

визначник можна обчислити за **правилом Саррюса** (тільки для матриць 3×3 !)

Кроки:

- Дописати перші два стовпці праворуч від матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right)$$

- Додати суму добутків елементів на **трьох "прямих" діагоналях** (зліва направо):
- Відняти суму добутків елементів на **трьох "зворотніх" діагоналях** (справа наліво):

Формула:

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Приклад:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ | & 3 & 4 & 5 & | = (1 \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 2) - (2 \cdot 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 3) \\ -1 & 2 & 3 & & \\ & & & & \end{array} = (12 + 0 + 12) - (-8 + 10 + 0) = 24 - 2 = 22$$

3. Визначники n-го порядку ($n \geq 4$)

Визначник n-го порядку знаходиться за методом розкладу за рядком/стовпцем або методом приведення до трикутного вигляду.

3.1. Розклад за елементами рядка

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j},$$

де M_{1j} — міnor елемента a_{1j} .

Приклад:

Знайти визначник матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Розв'язання:

Розкладаємо за першим рядком:

$$\det(A) = 2M_{11} - 1M_{12} + 3M_{13} - 4M_{14}.$$

Де M_{1j} — визначники 3×3 , які розраховуються за правилом Саррюса або розкладом.

3.2. Метод Гауса (перетворення в трикутну матрицю)

Визначник не змінюється при додаванні до одного рядка іншого, помноженого на число. Якщо перетворити матрицю до верхньої трикутної форми, визначник дорівнює добутку діагональних елементів.

Приклад:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Приводимо до трикутного вигляду:

- Віднімаємо від другого рядка перший, помножений на 2.
- Від третього — перший, помножений на 3.

Отримуємо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Висновки

- **2×2 визначники** — обчислюємо за формулою.
- **3×3 визначники** — за правилом Саррюса або розкладом за елементами.
- **n×n визначники** — розкладаємо за рядком або використовуємо метод Гауса.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

1. Скориставшись правилом обчислення визначників 3-го порядку, довести властивості 1-7.

2. Скориставшись властивостями визначників, обчислити:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & ax_1 + bx_2 \\ y_1 & y_2 & ay_1 + by_2 \\ z_1 & z_2 & az_1 + bz_2 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1+b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2+b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}.$$

Відповідь. а) 0; б) 0; в) 0.

3. Скориставшись властивостями визначників, довести тотожності:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$
$$\text{б) } \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ba \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

4. Розклавши визначник за рядком або стовпцем, що складається лише з букв, обчислити:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

Відповідь. а) $8a+15b+12c-19d$; б) $2a-8b+c+5d$; в) $abcd$.

5. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}.$$

Відповідь. а) 90; б) 27; в) 52; г) 10; д) 100.

6. Побудувати всі можливі мінори другого порядку визначника:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 9 & 8 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Скільки таких мінорів?

Тема 2. Розв'язування систем за допомогою правила Крамера та оберненої матриці.

1. Вступ

Розв'язування систем лінійних рівнянь (СЛР) є важливою задачею в економіці та інших сферах. Серед основних методів розв'язування можна виділити:

- Правило Крамера
- Метод оберненої матриці

Ці методи застосовуються для квадратних систем рівнянь, тобто систем, у яких кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих (n). Обидва методи застосовуються лише для невинорджених матриць ($\det(A) \neq 0$).

2. Правило Крамера

Правило Крамера застосовується для розв'язання системи лінійних рівнянь виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

у випадку, коли **визначник основної матриці системи** не дорівнює нулю ($\det A \neq 0$).

Основна матриця системи:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Розширена матриця системи:

$$(A | B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ & & \ddots & & | & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & | & b_n \end{bmatrix}$$

Формула для знаходження розв'язку:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де:

- $\det A$ — визначник основної матриці A .
- A_i — матриця, отримана заміною **i -го стовпця** матриці A на стовпець вільних членів B .

Властивості правила Крамера:

- Використовується лише для квадратних матриць ($n \times n$).
- Потребує обчислення $n + 1$ визначників.
- Не застосовується, якщо $\det(A) = 0$ (система або несумісна, або має безліч розв'язків).

3. Метод оберненої матриці

Якщо квадратна матриця A є невинродженою ($\det(A) \neq 0$), то її обернена матриця A^{-1} існує, і розв'язок системи можна знайти за формулою:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

4. Обчислення оберненої матриці

Обернену матрицю A^{-1} можна знайти за допомогою таких методів:

4.1. Метод через визначник та ад'юнктовану матрицю

Обернену матрицю можна обчислити за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A),$$

де $\text{adj}(A)$ – ад'юнктована (спряжена) матриця, елементи якої є алгебраїчними доповненнями транспонованої матриці A .

4.2. Метод елементарних перетворень

Обернену матрицю також можна знайти, використовуючи елементарні перетворення:

- Записати розширену матрицю $[A \mid I]$, де I – одинична матриця.
- Виконати рядкові перетворення, щоб привести A до одиничної матриці I .
- Отримана права частина розширеної матриці буде оберненою матрицею A^{-1} .

6. Висновки

- **Правило Крамера** ефективне для малих систем, але складне при великих матрицях.
- **Метод оберненої матриці** простий для теоретичного розгляду, неефективний для великих матриць (потрібно обчислювати визначник і багато алгебраїчних доповнень).
- **Обидва методи** застосовуються лише для квадратних невинроджених матриць.

Методика розв'язання типових задач

Приклад розв'язання системи рівнянь за правилом Крамера

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 4x - y = 1. \end{cases}$$

Крок 1: Записуємо основну матрицю системи

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Крок 2: Обчислюємо визначник основної матриці

$$\det A = (2 \cdot (-1)) - (3 \cdot 4) = -2 - 12 = -14.$$

Крок 3: Створюємо матриці A_1 та A_2

Замінімо перший стовпець на $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1 = (5 \cdot (-1)) - (3 \cdot 1) = -5 - 3 = -8.$$

Замінімо другий стовпець на B :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_2 = (2 \cdot 1) - (5 \cdot 4) = 2 - 20 = -18.$$

Крок 4: Обчислюємо значення x та y

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-8}{-14} = \frac{4}{7}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-18}{-14} = \frac{9}{7}.$$

Відповідь:

$$x = \frac{4}{7}, \quad y = \frac{9}{7}.$$

3. Узагальнення на випадок трьох рівнянь

Для системи

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$$

аналогічно:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad z = \frac{\det A_3}{\det A}.$$

де A_1, A_2, A_3 — матриці, отримані заміною відповідних стовпців.

✓ Метод Крамера ефективний для малих систем (2×2 , 3×3).

✓ Якщо $\det A = 0$, метод не застосовується (система або не має розв'язків, або має безліч).

✓ Для великих систем ($n \geq 4$) метод Гауса більш ефективний.

Приклади розв'язку системи рівнянь за допомогою оберненої матриці

Задача1:

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -9 \end{cases}$$

Крок 1. Запис системи у матричній формі

$$A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

- A — матриця коефіцієнтів,
- X — вектор змінних,
- B — вектор вільних членів.

Крок 2. Перевірка існування оберненої матриці

Обчислимо $\det(A)$:

$$\det(A) = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = -6 - 1 = -7 \quad (\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{обернена матриця існує})$$

Крок 3. Знаходження оберненої матриці A^{-1}

Формула:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

де $\text{adj}(A)$ — приєднана матриця (транспонована матриця алгебраїчних доповнень).

- **Алгебраїчні доповнення:**

$$\text{Для елемента } a_{11} = 2: A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-3) = -3$$

$$\text{Для елемента } a_{12} = 1: A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$$

$$\text{Для елемента } a_{21} = 1: A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1$$

$$\text{Для елемента } a_{22} = -3: A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

- **Матриця алгебраїчних доповнень:**

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. **Транспонування** (для отримання $\text{adj}(A)$):

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Обернена матриця:

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Крок 4. Множення A^{-1} на вектор B

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Обчислюємо координати:

- $x = \frac{3}{7} \cdot 5 + \frac{1}{7} \cdot (-9) = \frac{15}{7} - \frac{9}{7} = \frac{6}{7}$
 - $y = \frac{1}{7} \cdot 5 + \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot (-9) = \frac{5}{7} + \frac{18}{7} = \frac{23}{7}$
-

Відповідь:

$$x = \frac{6}{7}, \quad y = \frac{23}{7}$$

Перевірка підстановкою:

- $2 \cdot \frac{6}{7} + \frac{23}{7} = \frac{12}{7} + \frac{23}{7} = \frac{35}{7} = 5 \quad \checkmark \square$
 - $\frac{6}{7} - 3 \cdot \frac{23}{7} = \frac{6}{7} - \frac{69}{7} = -\frac{63}{7} = -9 \quad \checkmark \square$
-

Чому цей метод ефективний?

Він дозволяє швидко знайти розв'язок для систем з однаковою кількістю рівнянь і змінних, особливо коли потрібно розв'язати одну систему з різними векторами B .

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

1. Розв'язати за правилом Крамера системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8 \end{cases}; \text{ г)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}.$$

Відповідь. а) $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$; б) $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = 0$; в) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$; г) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{3}{2}$.

2. Знайти матриці, обернені до матриць:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ б)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \text{ в)} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \text{ г)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результат перевірити множенням.

3. Розв'язати системи рівнянь методом оберненої матриці:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_4 = -13 \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} -4x_1 + x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 6 \end{cases}$$

Відповідь. а) $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = -2, x_4 = 2$; б) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -3, x_4 = 1$; в) $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 1$; г) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

4. Розв'язати матричні рівняння:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь. а)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ в)} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \text{ г)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Тема 3. Дослідження та розв'язування систем лінійних рівнянь загального виду. Метод Гауса.

Системи лінійних рівнянь (СЛР) широко застосовуються в економіці, фінансах та інженерії для моделювання взаємозв'язків між змінними. Загальний вигляд СЛР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Де:

- a_{ij} — коефіцієнти системи,
- x_i — невідомі змінні,
- b_i — вільні члени.

Класифікація систем лінійних рівнянь

В залежності від кількості рівнянь m та кількості невідомих n , СЛР поділяють на:

- **Квадратні системи** ($m = n$): можуть мати єдиний розв'язок, безліч розв'язків або бути несумісними.
- **Прямокутні системи** ($m \neq n$): зазвичай мають або безліч розв'язків, або є несумісними.

Система може бути:

- **Сумісною** — якщо вона має хоча б один розв'язок.
- **Несумісною** — якщо не має жодного розв'язку.
- **Визначеною** — якщо вона має єдиний розв'язок.
- **Невизначеною** — якщо вона має безліч розв'язків.

3. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь

3.1. Метод Гауса (метод виключення)

Метод Гауса дозволяє поетапно зводити систему до трикутного вигляду шляхом елементарних перетворень рядків.

- Використовуємо перетворення рядків для отримання верхньої трикутної матриці.
- Знаходимо значення змінних шляхом зворотної підстановки.

Допустимі перетворення рядків у методі Гауса:

- Перестановка двох рядків місцями.
- Множення рядка на ненульове число.
- Додавання до одного рядка іншого, помноженого на число.

Ці операції не змінюють сумісність системи та дозволяють поступово зводити матрицю коефіцієнтів до трикутного вигляду.

3.2. Метод Гаусса-Жордана

Цей метод є модифікацією методу Гауса, де система зводиться не просто до трикутного вигляду, а до діагонального вигляду (матриця стає одиничною, а розв'язки знаходяться без підстановки).

4. Критерії сумісності та кількість розв'язків

- Система має **єдиний розв'язок**, якщо $\det(A) \neq 0$.
- Якщо $\det(A) = 0$, система або несумісна, або має безліч розв'язків.
- **Теорема Кронекера-Капеллі:** Система сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці коефіцієнтів дорівнює рангу розширеної матриці.

Методика розв'язання типових задач

Розв'язок методом Гауса

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ 4x - y + 5z = 2, \\ -2x + 6y + 4z = 3. \end{cases}$$

Зводимо систему до верхньої трикутної форми:

- Ділимо перший рядок на 2, щоб отримати 1 на першому місці.
- Віднімаємо 4 перших рядки від другого рядка та додаємо 2 перших рядки до третього рядка відповідно.
- Перетворюємо другий стовпець.
- Використовуємо зворотний хід для знаходження x, y, z .

Отримуємо систему:

$$\begin{cases} x + 1.5y - 0.5z = 0.5, \\ y + 3z = 1, \\ z = -1. \end{cases}$$

Зворотним ходом знаходимо:

$$z = -1, \quad y = 1 - 3(-1) = 4, \quad x = 0.5 - 1.5(4) + 0.5(-1) = -6.$$

Отже, розв'язок: $x = -6, y = 4, z = -1$.

6. Висновки

- Метод Гауса – універсальний і ефективний для будь-яких систем.

Докладний приклад розв'язку системи лінійних рівнянь методом Гауса:

Задача:

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Крок 1. Запис розширеної матриці

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Крок 2. Прямий хід (отримання верхньої трикутної матриці)

- Елімінація x з другого та третього рядків:

- Для другого рядка:

$$R2 = R2 + \frac{3}{2}R1 \Rightarrow (0 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 1)$$

- Для третього рядка:

$$R3 = R3 + R1 \Rightarrow (0 \quad 2 \quad 1 \quad 5)$$

Нова матриця:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Нормалізація другого рядка (множення на 2):

$$R2 = 2 \cdot R2 \Rightarrow (0 \quad 1 \quad 1 \quad 2)$$

Матриця:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Елімінація y з третього рядка:

$$R3 = R3 - 2 \cdot R2 \Rightarrow (0 \quad 0 \quad -1 \quad 1)$$

Фінальна верхнетрикутна матриця:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Крок 3. Зворотній хід (підстановка)

- З третього рядка:

$$-z = 1 \Rightarrow z = -1$$

- 3 другого рядка:

$$y + z = 2 \Rightarrow y + (-1) = 2 \Rightarrow y = 3$$

- 3 першого рядка:

$$2x + y - z = 8 \Rightarrow 2x + 3 - (-1) = 8 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Відповідь:

$$x = 2, \quad y = 3, \quad z = -1$$

Перевірка:

- $2(2) + 3 - (-1) = 4 + 3 + 1 = 8 \quad \checkmark \textcircled{R}$
- $-3(2) - 3 + 2(-1) = -6 - 3 - 2 = -11 \quad \checkmark \textcircled{R}$
- $-2(2) + 3 + 2(-1) = -4 + 3 - 2 = -3 \quad \checkmark \textcircled{R}$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

1. Розв'язати за теоремою Кронекера—Капеллі:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

Відповідь. а) $x_3 = 6 - 15x_1 + 10x_2; x_4 = -7 + 18x_1 - 2x_2$; б) система несутісна; в) $x_3 = 2 - \frac{27}{13}x_1 + \frac{9}{13}x_2, x_4 = -1 + \frac{3}{13}x_1 - \frac{1}{13}x_2$; г) $x_1 = -\frac{6}{7} + \frac{8}{7}x_4, x_2 = \frac{1}{7} - \frac{13}{4}x_4, x_3 = \frac{15}{7} - \frac{6}{7}x_4$.

2. Розв'язати методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 6 \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ -9x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

Відповідь. а) $x_1 = \frac{1}{11}(x_3 - 9x_4 - 2)$; $x_2 = \frac{1}{11}(-5x_1 + x_4 + 10)$;

б) $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$; $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$;

в) $x_1 = \frac{1}{2}(-3 - 2x_2 + 3x_5)$, $x_3 = \frac{1}{2}(3 - 3x_5)$, $x_4 = 1$;

г) $x_1 = \frac{31}{4}$, $x_2 = \frac{103}{4}$, $x_3 = \frac{215}{4}$, $x_4 = 0$;

г) $x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1 + 2x_1 - x_2$;

д) $x_3 = -\frac{9}{2} - x_1 - 2x_2$, $x_4 = -\frac{25}{2} - 2x_1 - 4x_2$, $x_5 = -\frac{15}{2} - 2x_1 - 4x_2$.

3. Дослідити на сумісність системи залежно від λ . У разі сумісності знайти розв'язок:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

Відповідь. а) При $\lambda = 0$ система несумісна; при $\lambda \neq 0$ $x_1 = \frac{4 - \lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{9\lambda - 16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_3$; б) система сумісна при будь-якому λ ; при $\lambda = 8$, $x_2 = 4 + 2x_1 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$; при $\lambda \neq 8$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$; в) при $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \neq 0$ система має єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 3}$; при $\lambda = 1$, $x_1 = 1 - x_2 - x_3$; при $\lambda = -2$ система несумісна; г) при $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$ система має єдиний розв'язок $x_1 = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda + 3)}$, $x_2 = \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}$, $x_3 = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}$; при $\lambda = 0$ і $\lambda = -3$ система несумісна.

Тема 4. Вектори, їх ранг та базис.

Лінійний векторний простір, вектори як елементи векторного простору, лінійна незалежність, ранг системи векторів та базис

1. Лінійний векторний простір

Лінійний векторний простір (ЛВП) – це множина V елементів (векторів), на якій визначені операції додавання векторів та множення на число (скаляр) і які задовольняють такі аксіоми:

- Асоціативність додавання: $(u + v) + w = u + (v + w)$ для всіх $u, v, w \in V$.
- Комутативність додавання: $u + v = v + u$ для всіх $u, v \in V$.
- Існування нульового вектора: існує $0 \in V$, що $u + 0 = u$ для всіх $u \in V$.
- Існування протилежного вектора: для кожного $u \in V$ існує $-u \in V$, що $u + (-u) = 0$.
- Множення на скаляр: для будь-якого $\lambda \in \mathbb{R}$ і $u \in V$, $\lambda u \in V$.
- Асоціативність множення на скаляр: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u \in V$.
- Розподільний закон відносно додавання векторів: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$.
- Розподільний закон відносно додавання скалярів: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u \in V$.
- Множення на одиницю: $1 \cdot u = u$ для всіх $u \in V$.

2. Вектори як елементи векторного простору

Вектор – це елемент векторного простору. Вектори можуть бути представлені як впорядковані множини чисел (координат), наприклад:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Дії над векторами:

- Додавання векторів: $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.
- Множення вектора на число: $\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.
- Лінійна комбінація векторів:

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n$$

3. Лінійна незалежність

Система векторів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ називається **лінійно незалежною**, якщо рівність

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = 0$$

виконується лише тоді, коли всі коефіцієнти $\alpha_i = 0$. Якщо існує нетривіальне розв'язання (де хоча б одне $\alpha_i \neq 0$), то система лінійно **залежна**.

4. Ранг системи векторів

Рангом системи векторів називається максимальна кількість лінійно незалежних векторів у цій системі. Формально:

$$\text{rank}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \max\{r \mid \exists \text{ лінійно незалежна підсистема з } r \text{ векторів}\}.$$

Для знаходження рангу векторної системи:

- Записуємо вектори у вигляді матриці.
- Виконуємо елементарні перетворення для знаходження рангу матриці.

5. Базис векторного простору

Базисом векторного простору називається сукупність лінійно незалежних векторів, які породжують весь простір. Тобто будь-який вектор $\mathbf{v}$ у просторі може бути поданий у вигляді лінійної комбінації базисних векторів:

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \dots + c_n \mathbf{e}_n$$

де $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис, а $c_1, c_2, \dots, c_n$ — координати вектора $\mathbf{v}$ у цьому базисі.

Властивості базису:

- Будь-який вектор простору однозначно розкладається за базисом.
- Кількість векторів у базисі називається **розмірністю простору**.
- Два базиси одного і того ж простору мають однакову кількість елементів.

6. Висновки

- Лінійний векторний простір — це множина векторів, що задовольняє певним аксіомам.
- Лінійна незалежність визначає, чи можна подати вектор через інші вектори.
- Ранг системи векторів показує максимальну кількість лінійно незалежних векторів.
- Базис — це мінімальна кількість векторів, через які можна виразити будь-який вектор у просторі.

Практичні завдання

- **Перевірка лінійної незалежності:** Дано систему векторів $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Перевірте, чи є ця система лінійно незалежною.
- **Знаходження рангу системи векторів:** Дано систему векторів $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Знайдіть ранг цієї системи.
- **Розкласти вектор по базису:** Дано вектор $\mathbf{v}$ і базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Знайдіть координати вектора $\mathbf{v}$ у цьому базисі.

Означення рангу матриці

Ранг матриці — це максимальна кількість лінійно незалежних рядків (або стовпців) матриці. Іншими словами, ранг матриці A — це розмірність простору, породженого її рядками або стовпцями. Ранг матриці позначається як $\text{rank}(A)$.

Властивості рангу матриці:

- Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях рядків або стовпців.
- Ранг матриці дорівнює рангу її транспонованої матриці.
- Ранг матриці не перевищує мінімуму з кількості її рядків і стовпців.

Алгоритм пошуку рангу матриці

Для знаходження рангу матриці можна використовувати метод **елементарних перетворень**, який полягає в приведенні матриці до ступінчастого вигляду (або східчастого вигляду). Ось основний алгоритм:

Крок 1: Приведення матриці до ступінчастого вигляду

- **Вибір ведучого елемента:** Виберіть ненульовий елемент у першому стовпці першого рядка (якщо такий є). Це буде ведучий елемент.
- **Нормалізація рядка:** Поділіть весь рядок на ведучий елемент, щоб отримати одиницю на місці ведучого елемента.
- **Обнулення інших елементів стовпця:** Використовуйте ведучий елемент для обнулення інших елементів у цьому стовпці, віднімаючи відповідний кратний рядок від інших рядків.
- **Повторення для наступних рядків:** Повторіть ці дії для наступних рядків і стовпців, поки не отримаєте ступінчасту форму матриці.

Крок 2: Визначення рангу

- **Підрахунок ненульових рядків:** Ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків у ступінчастій формі матриці.

Приклад

Розглянемо матрицю A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Крок 1: Приведення до ступінчастого вигляду

- Виберемо перший елемент першого рядка як ведучий: $a_{11} = 1$.
- Нормалізуємо перший рядок, поділивши його на 1 (залишається незмінним).
- Обнулимо інші елементи першого стовпця:
 - Від другого рядка віднімемо 4 рази перший рядок:
$$(4 \ 5 \ 6) - 4 \cdot (1 \ 2 \ 3) = (0 \ -3 \ -6)$$
 - Від третього рядка віднімемо 7 разів перший рядок:
$$(7 \ 8 \ 9) - 7 \cdot (1 \ 2 \ 3) = (0 \ -6 \ -12)$$
- Тепер матриця має вигляд:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$
- Виберемо другий елемент другого рядка як ведучий: $a_{22} = -3$.
- Нормалізуємо другий рядок, поділивши його на -3:
$$(0 \ -3 \ -6) / -3 = (0 \ 1 \ 2)$$
- Обнулимо інші елементи другого стовпця:
 - а. Від третього рядка віднімемо 6 разів другий рядок:
$$(0 \ -6 \ -12) - 6 \cdot (0 \ 1 \ 2) = (0 \ 0 \ 0)$$
- Тепер матриця має ступінчастий вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Крок 2: Визначення рангу Кількість ненульових рядків у ступінчастій формі матриці дорівнює 2. Отже, ранг матриці A дорівнює 2.

Методика розв'язання типових задач

Перевірка лінійної незалежності: Дано систему векторів $\{v_1, v_2, v_3\}$.
Перевірте, чи є ця система лінійно незалежною.

Алгоритм перевірки лінійної незалежності системи векторів $\{v_1, v_2, v_3\}$:

Крок 1. Запис матриці

Складіть матрицю A , де вектори v_1, v_2, v_3 — це **стовпці**:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Крок 2. Визначте розмірність векторів

- Якщо вектори належать до $\mathbb{R}^n$:
 - Якщо $n < 3 \rightarrow$ система **завжди залежна** (бо кількість векторів більша за розмірність простору).
 - Якщо $n = 3 \rightarrow$ обчисліть $\det(A)$.
 - Якщо $n > 3 \rightarrow$ знайдіть **ранг** матриці A .
-

Крок 3. Перевірка незалежності

Випадок 1: $n = 3$ (матриця 3×3)

Обчисліть визначник:

Якщо $\det(A) \neq 0 \rightarrow$ лінійно незалежні.

Якщо $\det(A) = 0 \rightarrow$ лінійно залежні.

Випадок 2: $n > 3$ (матриця $n \times 3$)

- Методом Гауса приведіть матрицю до **ступінчастого вигляду**.
- Знайдіть кількість **ненульових рядків** (ранг матриці):

Якщо $\text{ранг}(A) = 3 \rightarrow$ незалежні.

Якщо $\text{ранг}(A) < 3 \rightarrow$ залежні.

Приклад 1 (для $n = 3$):

Нехай $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Обчислюємо $\det(A)$:

$$\det(A) = 1 \cdot (3 \cdot 0 - 1 \cdot 1) - (-1) \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 2) + 2 \cdot (0 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = -1 + 2 - 12 = -11 \neq 0$$

Висновок: Вектори лінійно незалежні.

Приклад 2 (для $n = 4$):

Нехай $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Приведення до ступінчастого вигляду:

- За допомогою елементарних перетворень отримуємо ненульові рядки.
- Приклад ступінчастої форми:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ранг = 3 $\rightarrow$ вектори незалежні.
-

Знаходження рангу системи векторів: Дано систему векторів $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
Знайдіть ранг цієї системи

Дано систему векторів:

$$v_1 = (2, 1, 3)$$

$$v_2 = (4, 2, 5)$$

$$v_3 = (1, 0, 1)$$

$$v_4 = (5, 3, 8)$$

Крок 1. Записуємо матрицю з векторів-стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Крок 2. Приводимо матрицю до ступінчастого вигляду:

- Міняємо місцями перший і другий рядки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Віднімаємо 2×1 -й рядок з 2-го:

$$R_2 = R_2 - 2R_1 \rightarrow (0, 0, 1, -1)$$

4. Віднімаємо 3×1 -й рядок з 3-го:

$$R_3 = R_3 - 3R_1 \rightarrow (0, -1, 1, -1)$$

5. Міняємо місцями 2-й і 3-й рядки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Крок 3. Визначаємо ранг:

- Ненульові рядки: 3
- Лінійно незалежні вектори: 3

Відповідь: Ранг системи векторів дорівнює 3

Пояснення:

Ранг системи векторів визначається максимальною кількістю лінійно незалежних векторів у системі. У цьому випадку отримана ступінчаста форма матриці містить 3 ненульові рядки, що свідчить про наявність трьох лінійно незалежних векторів.

Розкласти вектор по базису: Дано вектор v і базис $\{e_1, e_2, e_3\}$. Знайдіть координати вектора v у цьому базисі.

Дано:

- Вектор $v = (5, 3, 2)$ (у стандартному базисі)

- Базисні вектори:

$$e_1 = (1,1,0), \quad e_2 = (2,-1,1), \quad e_3 = (0,3,1)$$

Крок 1: Запис рівняння

Шукаємо координати (x, y, z) , такі що:

$$v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$$

Підставляємо значення:

$$(5,3,2) = x(1,1,0) + y(2,-1,1) + z(0,3,1)$$

Крок 2: Складання системи рівнянь

Порівнюємо компоненти:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 & (\text{за першою координатою}) \\ x - y + 3z = 3 & (\text{за другою координатою}) \\ y + z = 2 & (\text{за третьою координатою}) \end{cases}$$

Крок 3: Розв'язання системи

$$x = \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

$$z = \frac{2}{3}$$

Перевірка:

$$\frac{7}{3}e_1 + \frac{4}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{7}{3}(1,1,0) + \frac{4}{3}(2,-1,1) + \frac{2}{3}(0,3,1) = (5,3,2)$$

Відповідь:

$$(5,3,2) = \frac{7}{3}e_1 + \frac{4}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

1. Знайти лінійно незалежні системи векторів:

$$\begin{array}{ll}
\vec{a}_1 = (1, 2, 3, 4), & \vec{a}_1 = (1, 2, 3), \\
\vec{a}_2 = (2, 3, 4, 5), & \vec{a}_2 = (2, 3, 4), \\
\text{а) } \vec{a}_3 = (3, 4, 5, 6), & \text{б) } \vec{a}_3 = (3, 2, 3), \\
\vec{a}_4 = (4, 5, 6, 7); & \vec{a}_4 = (4, 3, 4), \\
& \vec{a}_5 = (1, 1, 1); \\
\vec{a}_1 = (5, 2, -3, 1), & \vec{a}_1 = (2, 1, -3, 1), \\
\text{в) } \vec{a}_2 = (4, 1, -2, 3), & \vec{a}_2 = (4, 2, -6, 2), \\
\vec{a}_3 = (1, 1, -1, -2), & \text{г) } \vec{a}_3 = (6, 3, -9, 3), \\
\vec{a}_4 = (3, 4, -1, 2); & \vec{a}_4 = (1, 1, 1, 1).
\end{array}$$

Відповідь. а) Будь-які вектори; б) будь-які три вектори, крім $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5$ і $\vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$; в) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$, тому що $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$; г) 1) $\vec{a}_1, \vec{a}_1$; 2) $\vec{a}_2, \vec{a}_4$; 3) $\vec{a}_3, \vec{a}_4$.

2. Знайти всі значення λ , при яких вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

$$\begin{array}{ll}
\text{а) } \vec{a}_1 = (3, 4, 2), \vec{a}_2 = (6, 8, 7), \vec{b} = (9, 12, \lambda). \\
\text{б) } \vec{a}_1 = (4, 4, 3), \vec{a}_2 = (7, 2, 1), \vec{a}_3 = (4, 1, 6), \vec{b} = (5, 9, \lambda). \\
\text{в) } \vec{a}_1 = (3, 2, 5), \vec{a}_2 = (2, 4, 7), \vec{a}_3 = (5, 6, \lambda), \vec{b} = (1, 3, 5).
\end{array}$$

Відповідь. а) λ — будь-яке; б) λ — будь-яке; в) $\lambda \neq 12$.

3. Знайти: а) $\vec{x} = (7, 14, -1, 2)$ в базисі $\vec{e}_1 = (1, 2, -1, -2), \vec{e}_2 = (2, 3, 0, -1), \vec{e}_3 = (1, 2, 1, 4), \vec{e}_4 = (1, 3, -1, 0)$;

б) $\vec{x} = (6, 2, -7)$ у базисі $\vec{e}_1 = (2, 1, -3), \vec{e}_2 = (3, 2, -5), \vec{e}_3 = (1, -1, 1)$.

Відповідь. а) $(0, 2, 1, 2)$; б) $(1, 1, 1, 1)$.

4. Знайти зв'язок між координатами одного і того самого вектора в різних базисах.

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{e}: \vec{e}_1 = (1, 1, 1, 1) & \mathbf{e}': \vec{e}_1 = (1, 0, 3, 3) \\
\vec{e}_2 = (1, 2, 1, 1) & \vec{e}_2 = (-2, -3, -5, -4) \\
\vec{e}_3 = (1, 1, 2, 1) & \vec{e}_3 = (2, 2, 5, 4) \\
\vec{e}_4 = (1, 3, 2, 3) & \vec{e}_4 = (-2, -3, -4, -4)
\end{array}$$

Відповідь. $x_1 = 2x'_1 + x'_3 - x'_4$; $x_2 = -3x'_1 + x'_2 - 2x'_3 + x'_4$; $x_3 = x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3 - x'_4$; $x_4 = x'_1 - x'_2 + x'_3 - x'_4$.

Тема 5. Власні числа та власні вектори матриці

Відображення лінійних просторів. Матриця лінійного оператора

Основні поняття

- **Лінійний простір (векторний простір)**

Лінійний простір V над полем $\mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$) — це множина елементів (векторів), для яких визначені операції додавання та множення на скаляр, що задовольняють певним аксіомам (асоціативність, комутативність, наявність нульового вектора тощо).

- **Лінійний оператор**

Лінійний оператор $A: V \rightarrow W$ — це відображення між лінійними просторами V і W , яке задовольняє умовам лінійності:

- $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}), \quad A(\alpha \mathbf{u}) = \alpha A(\mathbf{u}),$

- де $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \alpha$ — скаляр.

- **Матриця лінійного оператора**

Якщо V і W — скінченновимірні простори з базисами $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ та $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ відповідно, то матриця A лінійного оператора A відносно цих базисів — це матриця розміру $m \times n$, елементи якої a_{ij} визначаються як коефіцієнти розкладу образів базисних векторів $A(\mathbf{e}_j)$ за базисом $\{\mathbf{f}_i\}$:

$$A(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{f}_i.$$

Основні формули

- **Дія лінійного оператора на вектор**

Якщо $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j$, то образ $A(\mathbf{v})$ обчислюється як:

- $A(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mathbf{f}_i.$

- У матричній формі:

- $A(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{x},$

- де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$

- **Композиція лінійних операторів**

Якщо $A: V \rightarrow W$ і $B: W \rightarrow U$ — лінійні оператори з матрицями A і B відповідно, то матриця композиції $B \circ A$ дорівнює добутку матриць $B \cdot A$.

- **Обернений оператор**

Якщо лінійний оператор A є оборотним, то його матриця A має обернену матрицю A^{-1} , і:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I,$$

де I — одинична матриця.

Властивості лінійних операторів

- **Ядро та образ**
 - **Ядро** оператора A — це множина векторів $\mathbf{v} \in V$, для яких $A(\mathbf{v}) = 0$.
 - **Образ** оператора A — це множина векторів $\mathbf{w} \in W$, які є образами векторів з V .
- **Ранг та дефект**
 - **Ранг** оператора A — це розмірність його образу.
 - **Дефект** оператора A — це розмірність його ядра.
- **Інваріантні підпростори**

Підпростір $U \subseteq V$ називається інваріантним відносно оператора A , якщо $A(\mathbf{u}) \in U$ для всіх $\mathbf{u} \in U$.

Приклади застосування в економіці

- **Моделювання виробничих процесів**

Лінійні оператори використовуються для опису перетворень ресурсів у готову продукцію. Наприклад, матриця витрат ресурсів на одиницю продукції є матрицею лінійного оператора.
- **Аналіз ринкових потоків**

Лінійні оператори допомагають моделювати потоки товарів або послуг між різними секторами економіки.
- **Оптимізація витрат**

Використання матриць лінійних операторів дозволяє знаходити оптимальні рішення для мінімізації витрат або максимізації прибутку.

Практичні задачі

- Знайти матрицю лінійного оператора $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, який виконує обертання векторів на кут θ .
- Для заданої матриці лінійного оператора знайти його ядро та образ.
- Довести, що композиція двох лінійних операторів є лінійним оператором.

Власні числа та власні вектори матриці

Власний вектор квадратної матриці A — це ненульовий вектор $\mathbf{v}$, який при множенні на матрицю A змінюється лише на скалярний множник:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

де λ — **власне число** матриці A .

Основні кроки знаходження власних чисел та векторів:

- **Характеристичне рівняння:** Знаходження власних чисел зводиться до розв'язання рівняння:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

де I — одинична матриця, $\det$ — визначник матриці.

5. **Знаходження власних векторів:** Для кожного знайденого власного числа λ розв'язується система лінійних рівнянь:

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

Основні властивості власних чисел та векторів:

- Сума власних чисел дорівнює сліду матриці:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A)$$

- Добуток власних чисел дорівнює визначнику матриці:

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$$

- Якщо матриця A симетрична, то її власні вектори, що відповідають різним власним числам, ортогональні.

Методика розв'язання типових задач

Завдання: Знайти образ вектора $\vec{x} = (-1, 2, 1)$ при лінійному перетворенні φ з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Координати образу $\varphi\vec{x}$ вектора $\vec{x}$ за лінійного перетворення φ з матрицею A знаходять за формулою

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

або в матричному записі:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Позначимо координати образу вектора $\vec{x}$ через (y_1, y_2, y_3) , тоді

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 4x_2 + 5x_3 \\ -2x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання: Знайти власні числа та власні вектори матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Характеристичне рівняння:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Корені рівняння: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$.

Знаходження власних векторів:

Для $\lambda_1 = 5$:

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Отримуємо систему:

$$\begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0 \\ 2v_1 - 2v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Розв'язок: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Отримуємо систему:

$$\begin{aligned} 2v_1 + v_2 &= 0 \\ 2v_1 + v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Розв'язок: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Відповідь:

Власні числа матриці A $\lambda_1 = 5$ та $\lambda_2 = 2$,

а відповідні власні вектори $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів**1. Як зміниться матриця переходу від одного базису до другого якщо:**

- а) поміняти місцями два вектори першого базису?
- б) поміняти місцями два вектори другого базису?
- в) записати вектори обох базисів у зворотному порядку?

2. Знайти матрицю лінійного перетворення векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ на вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$:

$$\vec{a}_1 = (2, 3, 5), \vec{b}_1 = (1, 1, 1),$$

$$\text{а) } \vec{a}_2 = (0, 1, 2), \vec{b}_2 = (1, 1, -1),$$

$$\vec{a}_3 = (1, 0, 0), \vec{b}_3 = (2, 1, 2);$$

$$\vec{a}_1 = (2, 0, 3), \vec{b}_1 = (1, 2, -1),$$

$$\text{б) } \vec{a}_2 = (4, 1, 5), \vec{b}_2 = (4, 5, -2),$$

$$\vec{a}_3 = (3, 1, 2), \vec{b}_3 = (1, -1, 1).$$

$$\text{Відповідь. а) } \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Лінійне перетворення φ в базисі $\mathbf{e}$: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ має матрицю $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю в базисі $\mathbf{e}'$: $\vec{e}'_1 = (2, 3, 1)$; $\vec{e}'_2 = (3, 4, 1)$; $\vec{e}'_3 = (1, 2, 2)$.

$$\text{Відповідь. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Лінійне перетворення в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього перетворення в базисі:

а) $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4$;

б) $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

$$\text{Відповідь. а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти власні числа і власні вектори матриць.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 0, 1)$, де α і β не дорівнюють нулю одночасно; б) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \vec{b}_1 = (1, 1, 1), \vec{b}_2 = (1, 1, 0), \vec{b}_3 = (1, 0, -3)$, в) $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9; \vec{b}_1 = (1, 0, -1), \vec{b}_2 = (1, -1, 1), \vec{b}_3 = (1, 2, 1)$.

Тема 6. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз).
Модель міжнародної торгівлі.

Балансова модель Леонтьєва

Основне рівняння балансу: $X = AX + Y$ де:

- $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - вектор валового випуску
- $A = [a_{ij}]$ - матриця прямих витрат (a_{ij} - витрати продукції i -ї галузі на одиницю продукції j -ї галузі)
- $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ - вектор кінцевого споживання

Розв'язок моделі: $X = (I - A)^{-1}Y$ де $(I - A)^{-1}$ - матриця повних витрат

Властивості:

- Матриця A продуктивна, якщо максимальне власне значення $\lambda_{\max}(A) < 1$
- Всі елементи матриці $(I - A)^{-1}$ невід'ємні
- Модель має економічний зміст при $Y \geq 0$

Приклад даних:

"A":[0.2, 0.3, 0.1],
[0.4, 0.1, 0.2],
[0.1, 0.2, 0.3]
"Y":[150, 200, 180]

Модель міжнародної торгівлі

Рівняння балансу: $X = AX + E$ де:

- $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ - вектор експорту
- Імпорт визначається як $M = (I - A)X - Y$

Умова торгового балансу: $\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n e_i$

Властивості:

- Модель лінійно залежить від обсягів експорту
- Збалансована торгівля досягається при $E = (I - A)X - Y$
- Чутливість до змін валютних курсів відображається через коефіцієнти матриці A

Приклад з двома країнами:

"Country1":
"A": [[0.3, 0.2], [0.1, 0.4]],
"E": [50, 30]

"Country2":
"A": [[0.25, 0.15], [0.2, 0.35]],
"E": [40, 45]

Практичні задачі

- Розрахувати валовий випуск для трисекторної економіки з матрицею A : $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$, $Y = [200, 150, 180]$
- Визначити обсяги імпорту/експорту для двох країн з торговим балансом:
Країна А: $E_A = [100, 80]$, Країна Б: $E_B = [120, 90]$

Ключові поняття

- Коефіцієнт повних витрат:** c_{ij} - елементи матриці $(I - A)^{-1}$
- Мультиплікатор Леонтьєва:** $\mu = \frac{1}{1 - \lambda_{\max}(A)}$

Методика розв'язання типових задач

1. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз) (Математика для економістів, М.В.Грисенко)

Розглянемо спрощену економіко-математичну модель міжгалузевого балансу. Зв'язок між галузями зазвичай відображають у таблицях міжгалузевого балансу, а математичну модель, яка дає змогу аналізувати їх, розроблено в 1936 р. американським економістом В.Леонтьєвим.

Припустимо, що весь виробничий комплекс поділено на n «чистих» галузей. Чисті галузі є економічною абстракцією, тобто це умовні галузі, кожна з яких об'єднує все виробництво даного виду продукції. Вважатимемо, що кожна з галузей випускає лише один певний вид продукції (тобто різні галузі випускають різну продукцію). В процесі виробництва кожна з галузей потребує продукції, виробленої в інших галузях.

Мета балансового аналізу – відповісти на запитання, яке постає в макроекономіці й пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної з галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник даної продукції, а з іншого – як споживач і своєї, і виробленої іншими галузями продукції.

Основні припущення моделі, яку надалі називатимемо моделлю Леонтьєва, такі:

- в економічній системі виробляються, купуються, споживаються й інвестуються n видів продукції, які позначимо індексами $i = 1, 2, \dots, n$;
- кожна галузь виробляє лише один вид продукції, отже, спільне виробництво різних товарів виключається. Різні галузі виробляють різні товари, й тому галузь, що виробляє продукцію виду i , позначимо тим самим індексом;
- під виробничим процесом у кожній галузі розумітимемо перетворення деяких (можливо всіх) видів продукції, взятих у певних обсягах, на деякий обсяг продукції того чи іншого виду. При цьому припустимо, що співвідношення витраченої й випущеної продукції є сталим.

Нехай економіко-виробнича система складається з n галузей, тобто виробляється n видів продукції. Схему міжгалузевого балансу виробництва й розподілу подано в наступній

таблиці, де зазначено основні показники та зв'язки виробництва за певний період часу (зазвичай за рік).

Галузь виробництва	Розподіл випуску продукції в галузях виробництва							Обсяг кінцевої продукції	Обсяг валової продукції
	1	2	...	j	...	n	Всього		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	$\sum_{j=1}^n x_{1j}$	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}		x_{2j}		x_{2n}	$\sum_{j=1}^n x_{2j}$	Y_2	X_2
...									
i	x_{i1}	x_{i2}		x_{ij}		x_{in}	$\sum_{j=1}^n x_{ij}$	Y_i	X_i
...									
n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nj}		x_{nn}	$\sum_{j=1}^n x_{ij}$	Y_n	X_n
	$\sum_{i=1}^n x_{i1}$	$\sum_{i=1}^n x_{i2}$		$\sum_{i=1}^n x_{ij}$		$\sum_{i=1}^n x_{in}$	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}$	Y	X

Введемо позначення X_i – обсяг валової продукції i – ї галузі

($i = 1, 2, \dots, n$) за одиницю часу (наприклад, за рік); x_{ij} – обсяг продукції i – ї галузі, що потребує j – та галузь у процесі виробництва

($i, j = 1, 2, \dots, n$); Y_i – обсяг кінцевої продукції i – ї галузі, призначеної для невиробничого споживання.

Використовуючи дані таблиці, запишемо квадратну матрицю n – го порядку (за умови рівності поданих у балансі галузей виробництва та споживачів продукції). Кожен елемент матриці x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$, характеризує обсяг поставки продукції з i – ї галузі, що йде на виробниче споживання в j – й галузі. Взявши сумі міжгалузевих поставок продукції i – ї галузі в усіх галузях-споживачах, дістанемо загальний обсяг проміжної продукції i – ї галузі:

$$X'_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Сума обсягів проміжної продукції всіх галузей виробництва становить загальний обсяг проміжної продукції:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} = X'.$$

За економічним змістом обсяг проміжної продукції – частина обсягу валової продукції, яка залишається після вилучення кінцевого продукту й спрямовується для відшкодування поточних матеріальних витрат у межах розглядуваного періоду часу.

Оскільки обсяг валової продукції будь-якої i – ї галузі дорівнює сукупному обсягові продукції, що споживається n галузями, та кінцевої продукції, то запишемо систему

$$\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + Y_1 \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + Y_2 \\ \dots \dots \dots \\ X_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + Y_i \\ \dots \\ X_n = x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} + Y_n \end{cases} \quad (1.1)$$

або в скороченій формі:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

Рівняння (1.1) називають **співвідношеннями балансу**.

Розглянемо *міжгалузевий баланс у вартісній формі*, тобто коли всі величини, що входять у систему (1.1) полягає в тому, що змінні в ній містять в першому степені, тому залежність між обсягом валової продукції та розподілом продукції кожної галузі лінійна.

Зауважимо, що величини x_{ij} , X_i , Y_i можуть виражатися в натуральних одиницях (штуках, тонах, літрах тощо). Тоді йдеться про *міжгалузевий баланс у натуральній формі*.

Під час побудови й практичних застосувань економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу використовують коефіцієнти прямих матеріальних витрат. Якщо обсяг міжгалузевих поставок i – ї галузі в j – ту поділити на обсяг валової продукції j – ї галузі, дістанемо шуканий норматив:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

де a_{ij} – **коефіцієнти прямих витрат** продукції i – ї галузі на одиницю обсягу валової продукції j – ї галузі.

Ці коефіцієнти утворюють квадратну **матрицю коефіцієнтів прямих витрат**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Яку іноді називають матрицею технологічних коефіцієнтів (технологічною матрицею).

Матриця A містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків, про технологію виробництва даної економіко-виробничої системи. З рівності (1.3) випливає, що

$$x_{ij} = a_{ij}X_j \quad (1.4)$$

Підставивши (1.4) в (1.2), дістанемо систему

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}X_j + Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

Запишемо її у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$$

або

$$X = AX + Y \quad (1.6)$$

Співвідношення (1.6) називають **рівнянням лінійного міжгалузевого балансу**, або (в указаних позначеннях) **моделлю Леонтьєва**.

Основна задача міжгалузевого балансу полягає у відшуванні такої матриці обсягів валової продукції X , яка за відомої матриці прямих витрат A забезпечує задану матрицю обсягів кінцевої продукції Y .

Перепишемо рівняння (1.6) так:

$$(E - A)X = Y \quad (1.7)$$

Якщо матриця $(E - A)$ не вироджена, то його можна подати у вигляді

$$X = (E - A)^{-1}Y \quad (1.8)$$

Матрицю $B = (E - A)^{-1}$ називають **матрицею повних витрат**.

Економічний зміст елементів матриці **B** такий: кожен елемент b_{ij} матриці **B** є обсягом валової продукції i – ї галузі, необхідної для забезпечення випуску одиниці кінцевої продукції j – ї галузі ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

За економічним змістом задачі величини X_i мають бути невід'ємними, оскільки $Y_i \geq 0$ і $a_{ij} \geq 0$, де $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Рівняння міжгалузевого балансу можна використовувати у двох випадках. У першому (простішому) випадкові, коли відома матриця обсягів валової продукції **X**, потрібно обчислити матрицю обсягів кінцевої продукції **Y**.

Приклад 1. Нехай матриця обсягів валової продукції галузі й матриця коефіцієнтів прямих витрат мають відповідно такий вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу (1.7) і правило множення матриць, дістаємо матрицю обсягів кінцевої продукції, що призначена для реалізації:

$$Y = (E - A)X = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

У другому випадку рівняння міжгалузевого балансу використовується для планування.

Матрицю **A**, всі елементи якої невід'ємні, називають **продуктивною**, якщо для довільної матриці **Y** із невід'ємними елементами існує розв'язок рівняння (1.6) – матриця **X**, усі елементи якої невід'ємні. В цьому разі модель Леонтьєва називається **продуктивною**.

Є кілька критеріїв продуктивності матриці **A**. Ми коригуватимемося таким:

Матриця **A** з невід'ємними елементами продуктивна, якщо максимум сум елементів її стовпців не перевищує одиниці, причому хоча б для одного зі стовпців сума елементів строго менша за одиницю, тобто матриця **A** продуктивна, якщо: 1) $a_{ij} \geq 0$ для довільних $i, j = 1, 2, \dots, n$;

2) $\max_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; 3) існує номер **j** такий, що $\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Приклад 2. Розглянемо умовну виробничу систему, яка складається з трьох галузей.

Коефіцієнти прямих витрат одиниць продукції i – ї галузі, що використовуються для випуску одиниць продукції j – ї галузі, та обсяги кінцевої продукції (у вартісній формі) наведено в таблиці.

Галузь виробництва	Прямі витрати галузей			Обсяг кінцевої продукції
	1	2	3	
1	0	0,2	0	200
2	0,2	0	0,1	100
3	0	0,1	0,2	300

Визначимо: коефіцієнти повних витрат; матрицю обсягів валової продукції

X та план кожної галузі; коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

Розв'язок. Позначимо матрицю обсягів валової продукції, яка визначає виробничу програму галузей, так:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix},$$

де X_1, X_2, X_3 – планові обсяги валової продукції галузей. У розглядуваному прикладі матрицями технологічних коефіцієнтів та обсягів кінцевої продукції є відповідно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Виробничі зв'язки галузей задовольняють умови

$$\begin{cases} X_1 - (0 \cdot X_1 + 0,2 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3) = 200 \\ X_2 - (0,2 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0,1 \cdot X_3) = 100 \\ X_3 - (0 \cdot X_1 + 0,1 \cdot X_2 + 0,2 \cdot X_3) = 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 - 0,2X_2 = 200 \\ -0,2X_1 + X_2 - 0,1X_3 = 100 \\ -0,1X_2 + 0,8X_3 = 300 \end{cases}$$

Запишемо систему в матричному вигляді:

$$(E - A)X = Y.$$

Тоді

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$B = (E - A)^{-1}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,8 - 0,01 - 0,032 = 0,758.$$

Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці $(E - A)$:

$$\begin{aligned} B_{11} &= 0,79, & B_{21} &= 0,16, & B_{31} &= 0,02, \\ B_{12} &= 0,16, & B_{22} &= 0,8, & B_{32} &= 0,1, \\ B_{13} &= 0,02, & B_{23} &= 0,1, & B_{33} &= 0,96. \end{aligned}$$

Обернена матриця має вигляд

$$B = (E - A)^{-1} \frac{1}{0,758} \begin{pmatrix} 0,79 & 0,16 & 0,02 \\ 0,165 & 0,8 & 0,1 \\ 0,02 & 0,1 & 0,96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (E - A)^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Отже, планові обсяги валової продукції для галузей відповідно становлять:

$X_1 = 238, X_2 = 186, X_3 = 400$. (Обчислюючи обернену матрицю, ми округлили всі числа до сотих).

Визначимо виробничу програму кожної галузі, використовуючи коефіцієнти a_{ij} :

$$\begin{aligned} x_{11} &= a_{11}X_1 = 0 \cdot 238 = 0, & x_{21} &= a_{21}X_1 = 0,2 \cdot 238 = 47,6, \\ x_{12} &= a_{12}X_2 = 0,2 \cdot 186 = 37,2, & x_{22} &= a_{22}X_2 = 0 \cdot 186 = 0, \\ x_{13} &= a_{13}X_3 = 0 \cdot 400 = 0, & x_{23} &= a_{23}X_3 = 0,1 \cdot 400 = 40, \\ & & x_{31} &= a_{31}X_1 = 0 \cdot 238 = 0, \\ & & x_{32} &= a_{32}X_2 = 0,1 \cdot 186 = 18,6, \\ & & x_{33} &= a_{33}X_3 = 0,2 \cdot 400 = 80. \end{aligned}$$

Коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат c_{ij} матриці C визначаються як різниця внутрішньовиробничих витрат (елементи матриці B) та прямих витрат (елементи матриці A):

$$C = B - A = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,01 & 0,03 \\ 0,01 & 1,05 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 1,07 \end{pmatrix}.$$

2. Лінійна модель міжнародної торгівлі.

Розглянемо **лінійну модель обміну**, котру часто інтерпретують як **модель міжнародної торгівлі**, що дає змогу визначити торговельні доходи країн (або їхні співвідношення) для збалансованої торгівлі. Нехай маємо групу з n країн $K_1, K_2, \dots, K_n$, які ведуть між собою торгівлю.

Позначимо через x_j торговельний дохід j -ої країни, який формується з продажу власних товарів на внутрішньому, так і на зовнішньому ринках. Структуру торговельних відносин між країнами вважаємо встановленою: частина q_{ij} торговельного доходу x_j , яку j -та країна витрачає на купівлю товарів i -ої країни, є сталою.

Розглянемо матрицю

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

яку називають *структурною матрицею торгівлі*.

Вважатимемо, що весь торговельний дохід витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн, тобто сума елементів будь-якого стовпчика матриці Q дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

Для країни K_i дохід від внутрішньої та зовнішньої торгівлі становить

$$x_i = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \dots + q_{in}x_n.$$

Для збалансованої торгівлі необхідно знайти таку матрицю торговельних доходів

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Щоб справджувалося матричне рівнянь

$$QX = X,$$

з якого можна визначити X .

Приклад 3. Візьмемо три країни (наприклад: США, Німеччину й Кувейт) – учасниці торгівлі з торговельними доходами X_1, X_2, X_3 . Вважатимемо, що весь торговельний дохід кожної країни витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн. Нехай США половину торговельного доходу витрачають на закупівлю товарів на своїй території, чверть – на закупівлю товарів із Німеччини та ще чверть – товарів із Кувейту. Німеччина порівну витрачає торговельний дохід на закупівлю товарів зі США, на своїй території та з Кувейту. Кувейт половину торговельного доходу витрачає на закупівлю товарів зі США, іншу половину – з Німеччини й нічого не закуповує на своїй території. Визначимо доходи країн, які задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю, якщо сума їхніх доходів становить 9000 умов. грош. од.

Розв'язок. Запишемо структурну матрицю торгівлі:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Нехай q_{ij} – частина доходу, яку j -та країна витрачає на закупівлю товарів i -ої країни. Зазначимо, що сума елементів матриці Q у кожному стовпці дорівнює одиниці. Після підбиття підсумків торгівлі за рік i -та країна одержить прибуток $x_i = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + q_{i3}x_3$, $i = 1, 2, 3$. Запишемо систему рівнянь для відшукування матриці X :

$$QX + X \text{ або } (Q - E)X = 0,$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок цієї системи: $X_1 = 2X_3$, $X_2 = \frac{2}{3}X_3$, $X_3 \in R$. Добутий результат означає, що збалансованість торгівлі країн досягається за співвідношення їхніх доходів $2:(3/2):1$.

Знайдемо доходи країн, які задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю за умови, що сума доходів становить

$X_1 + X_2 + X_3 = 9000$ умов. грош. од. Підставимо в цю рівність значення

$X_1 = 2C$, $X_2 = \frac{2}{3}C$, $X_3 = C$, де $C = \text{const}$. Дістанемо

$2C + \frac{2}{3}C + C = 9000$. Звідки $C = 2000$. Отже, $X_1 = 4000$, $X_2 = 3000$,

$X_3 = 2000$ умовн. грош. од.

На завершення зазначимо, що тут наведено спрощені варіанти моделей міжгалузевого балансу та міжнародної торгівлі.

Приклад 4. Дані про виконання балансу за звітний період (в умовн. грош. од.) наведено в таблиці:

Галузь виробництва	Розподіл випуску продукції в галузях		Обсяг кінцевої продукції	Обсяг валової продукції
	1	2		
1	9	25	66	100
2	8	27	165	200

Обчислити необхідний обсяг валової продукції кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції першої галузі збільшиться вдвічі, а другої – не зміниться.

Розв'язок. Отже, маємо $X_1 = 100$, $X_2 = 200$. Матриця обсягів валової продукції $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$.

Використовуючи формулу (1.3), знаходимо коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{11} = \frac{9}{100} = 0,09, \quad a_{21} = \frac{8}{100} = 0,08, \\ a_{12} = \frac{25}{200} = 0,125, \quad a_{22} = \frac{27}{200} = 0,135.$$

Тобто матриця технологічних коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,125 \\ 0,08 & 0,135 \end{pmatrix}$ має

невід'ємні елементи й задовольняє критерій продуктивності:

$\max\{0,09 + 0,08; 0,125 + 0,135\} = \max\{0,17; 0,26\} = 0,26 < 1$. Тому для довільної матриці обсягів кінцевої продукції Y можна знайти необхідний обсяг валової продукції X за формулою

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Знайдемо матрицю повних витрат $B = (E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,09 & 0,125 \\ 0,08 & 0,135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,91 & -0,125 \\ -0,08 & 0,865 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $|E - A| = 0,77715 \neq 0$, то

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,77715} \begin{pmatrix} 0,865 & 0,125 \\ 0,08 & 0,91 \end{pmatrix}.$$

За умовою матриця обсягів кінцевої продукції $Y = \begin{pmatrix} 132 \\ 165 \end{pmatrix}$. Тоді матриця обсягів валової продукції

$$X = \frac{1}{0,77715} \begin{pmatrix} 0,865 & 0,125 \\ 0,08 & 0,91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 132 \\ 165 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 173,461 \\ 206,794 \end{pmatrix},$$

Тобто обсяг валової продукції в першій галузі треба збільшити до 173,461 умовн. грош. од., а в другій – до 206,794 умовн. грош. од.

Приклад 5. Підприємство випускає три види продукції P_1, P_2, P_3 , використовуючи при цьому два типи ресурсів S_1, S_2 . Технологічна матриця виробництва чи матриця норм витрат сировини має вигляд

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, де a_{ij} ($i = \overline{1,2}; j = \overline{1,3}$) – це кількість одиниць сировини I -го типу, що витрачається на виробництво одиниці продукції

j -го виду. Будемо припускати, що план випуску продукції заданий матрицею-стовпцем $P = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$, вартість одиниці кожного типу ресурсів – матрицею-рядком $S = (20 \quad 10)$.

Визначити витрати ресурсів, які необхідні для забезпечення планового завдання випуску продукції і загальну вартість ресурсів.

Розв'язок. Знайдемо витрати ресурсів необхідні для забезпечення планового завдання випуску продукції, як добуток технологічної матриці на матрицю планового випуску продукції

$$C = A \cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2100 \\ 3000 \end{pmatrix}. \text{ Отже, для того, щоб забезпечити плановий випуск}$$

продукції ресурсами, необхідно мати ресурсу першого типу в кількості 2100 од., а ресурсу другого типу – у кількості 3000 од. Загальну вартість усіх ресурсів можна знайти, як добуток матриці вартості ресурсів на матрицю витрат

$$S \cdot C = (20 \quad 10) \begin{pmatrix} 2100 \\ 3000 \end{pmatrix} = 72000 \text{ (грош. од.)}$$

Загальну вартість ресурсів можна обчислити і іншим способом.

Приклад 6. Прогноз випуску продукції по запасам сировини. Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох типів. Необхідні характеристики виробництва надані в таблиці:

Вид сировини	Витрати сировини по видам продукції			Запаси сировини
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Необхідно визначити об'єм випуску продукції кожного виду при заданих запасах сировини. Задачі такого типу типові для прогнозів та оцінювання функціонування підприємств, експертних оцінок, а також для планування мікроекономіки підприємств.

Розв'язок. Позначимо невідомі об'єми випуску продукції через x_1, x_2, x_3 .

Тоді при умові повних витрат запасів для кожного виду сировини можна записати балансові відношення, які складають систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо $x_1 = 150$, $x_2 = 250$, $x_3 = 100$. Тобто, ми можемо випустити 150 одиниць продукції першого виду, 250 – другого, 100 – третього.

Розв'язати задачу.

Будівельна фірма запланувала побудувати:

- 1) У галузі x_1 10 одиниць об'єктів типу I та 15 одиниць типу II;
- 2) У галузі x_2 20 одиниць об'єктів типу III;
- 3) У галузі x_3 100 одиниць об'єктів типу IV.

Визначити витрати будівельних матеріалів p та q в кожній галузі, якщо норми витрат матеріалів (у відповідних одиницях) наведено в таблиці:

Тип об'єкту	Норми витрат матеріалу	
	p	q
I	2	15
II	10	20
III	10	100
IV	5	50

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

Тема 7. Вступ до математичного аналізу. Розкриття невизначеностей. Особливі границі.

Границі послідовностей та функцій

Послідовність a_n має границю L ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер N , такий що $\forall n > N: |a_n - L| < \varepsilon$

Властивості границь послідовностей :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$ (за умови $\lim b_n \neq 0$)

Теорема про стиснену послідовність:

Якщо $a_n \leq b_n \leq c_n$ і $\lim a_n = \lim c_n = L$, то $\lim b_n = L$

Границя функції

Основні визначення:

4. Границя в точці:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

5. Односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ (ліва границя)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ (права границя)}$$

6. Границя на нескінченності:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Важливі властивості:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] &= \lim f(x) \pm \lim g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim f(x) \cdot \lim g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \text{ (при } \lim g(x) \neq 0) \end{aligned}$$

3. Розкриття невизначеностей

Тип невизначеності Методи розв'язання

$\frac{0}{0}$	Факторизація, спряжені вирази, правило Лопіталя
$\frac{\infty}{\infty}$	Ділення на найвищий степінь, правило Лопіталя
$\infty - \infty$	Приведення до спільного знаменника
1^∞	Використання другої важливої границі

Правило Лопіталя:

Якщо $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, то:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4. Особливі границі

- Перша важлива границя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- Друга важлива границя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

- Границі з експонентою:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Практичні вправи (зразки):

- Обчислити: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 5}{2n^2 - 7}$
- Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
- Дослідити на збіжність: $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

Методика розв'язання типових задач

- Довести, що границею послідовності $x_n = \frac{2n+3}{n+5}$ є число $a = 2$.

Задамо число $\varepsilon > 0$, тоді

$$|x_n - a| = \left| \frac{2n+3}{n+5} - 2 \right| = \left| \frac{2n+3-2n-10}{n+5} \right| = \left| \frac{-7}{n+5} \right| = \frac{7}{n+5}.$$

З нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ маємо $\frac{7}{n+5} < \varepsilon$ або $n > \frac{7}{\varepsilon} - 5$. Звідки $N = \left\lceil \frac{7}{\varepsilon} - 5 \right\rceil$.

- Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 5n + 6}{6 - 2n + 7n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 5n + 6}{6 - 2n + 7n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{6}{n^3}\right)}{n^2 \left(\frac{6}{n^2} - \frac{2}{n} + 7\right)} = \infty.$$

- Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

1. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

• Тут чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x \rightarrow 3$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0} \right]$). Оскільки $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$ при $x \neq 3$, то $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = 2$. Звідси $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2$.

2. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

• Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^2(x+1) - (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

3. **Приклад.** Знайти

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 100}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

• Маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(x^2 + 10x + 100)}{x(x-10)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 + 10x + 100}{x(x-10)} = \infty. \end{aligned}$$

Чисельник дробу прямує до 300, а знаменник — до нуля, тобто є н.м.в. Таким чином, заданий дріб — н.в.в. (нескінченно велика величина):

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \infty.$$

4. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

• Домножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4} + 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

5. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

• Покладемо $1+x = y^5$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^5 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{y^4 + y^3 + y^2 + y + 1} = \frac{3}{5}.$$

6. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

● Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x , тобто на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{4}.$$

7. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

● Поділимо чисельник та знаменник на x^4 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x^4}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^7} + \frac{4}{x^8}}} = \frac{3}{1} = 3.$$

8. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right) = [\infty - \infty]$.

● Помножимо та поділимо заданий вираз на $\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right) \left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right)}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 3 - x^2 - 4x - 3}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

9. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}} \right)^{-1}$.

● Якщо $x \rightarrow 3 - 0$, то $\frac{1}{x-3} \rightarrow -\infty, 2^{\frac{1}{x-3}} \rightarrow 0; \lim_{x \rightarrow 3-0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}} \right)^{-1} = \frac{1}{3}$.

Якщо $x \rightarrow 3 + 0$, то $\frac{1}{x-3} \rightarrow +\infty, 2^{\frac{1}{x-3}} \rightarrow +\infty; \lim_{x \rightarrow 3+0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}} \right)^{-1} = 0$.

Перша особлива границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Границі — наслідки першої особливості границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 1$. 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$.

Зауваження. За допомогою першої особливої границі можна досліджувати невизначеності $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$ для виразів з тригонометричними функціями.

Приклад.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{(\pi - x)^2} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right].$

● Для того щоб скористатися першою особливою границею, потрібно виконати таку заміну змінної x , щоб нова змінна прямувала до нуля, наприклад

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{(\pi - x)^2} &= \left[\begin{array}{l} \pi - x = y \\ x = \pi - y \\ x \rightarrow \pi \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} \right)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{y}{2}}{y^2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{y}{4}}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{y}{4} \right)}{16 \left(\frac{y}{4} \right)^2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Приклад.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{array}{l} 1 - x = y \\ x = 1 - y \\ x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

3.4.2. Друга особлива границя $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

Границі — наслідки другої особливої границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx} = e^{ab}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Зауваження: За допомогою другої особливої границі та її наслідків можна досліджувати невизначеності

$$\left[\frac{0}{0}\right], [1^\infty], \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty\right].$$

Приклад.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1} &= \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1} = [1^\infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} \cdot \left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x} \left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{e^{3 \cdot 2} \cdot 1}{e^{-2 \cdot 2} \cdot 1} = e^{10}. \end{aligned}$$

Приклад.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{\sin 2x}{x \sin 2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}} \right)^{\frac{\sin 2x}{x}} = \left| \begin{array}{l} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e \\ \frac{\sin 2x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 \end{array} \right| = e^2. \end{aligned}$$

Приклад.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot 2x \cdot 5x}{5x \cdot \ln(2x+1) \cdot 2x} = \left| \begin{array}{l} \frac{\sin 5x}{5x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \frac{2x}{\ln(2x+1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \end{array} \right| = \frac{5}{2}.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

1. Довести, що при $n \rightarrow \infty$ послідовність $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots, 2+\frac{1}{n}, \dots$ має границею число 2.
2. Довести, що при $n \rightarrow \infty$ послідовність $\frac{7}{3}, \frac{10}{5}, \frac{13}{7}, \dots, \frac{3n+4}{2n+1}, \dots$ має границею число 1,5.

Знайти границі послідовностей:

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(5n+1)}{n^2+2}.$ Відповідь. 0.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+6n+7}{2-n^2-3n^3}.$ Відповідь. -1/3

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}+n+1}{5n^3-\sqrt[4]{n}+3}.$ Відповідь. 0.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}.$ Відповідь. 1.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}.$ Відповідь. $\frac{1}{2}$.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}.$ Відповідь. 3.

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}. \quad \text{Відповідь. } \infty.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n^3 + 3n^2}{0,001n^4 - 100n^3 + 1}. \quad \text{Відповідь. } 0.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}. \quad \text{Відповідь. } 0.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}. \quad \text{Відповідь. } \frac{15}{17}.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}. \quad \text{Відповідь. } 1.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 1}. \quad \text{Відповідь. } 0.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}}. \quad \text{Відповідь. } 4.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 + 6n^5 + 2} - \sqrt[5]{n^7 + 3n^3 + 1}}. \quad \text{Відповідь. } 1.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[5]{n^4 + 2} - \sqrt{n^3 + 1}}. \quad \text{Відповідь. } 0.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}. \quad \text{Відповідь. } 0.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}. \quad \text{Відповідь. } 0.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}. \quad \text{Відповідь. } 1.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}. \quad \text{Відповідь. } \frac{4}{3}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n). \quad \text{Відповідь. } \frac{1}{2}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right). \quad \text{Відповідь. } \frac{1}{2}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}. \quad \text{Відповідь. } 1.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}. \quad \text{Відповідь. } 0.$$

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$. Відповідь. 9.
2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1 - x}$. Відповідь. ∞ .
3. Знайти $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$. Відповідь. 0.
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$. Відповідь. 0.
5. Знайти $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$. Відповідь. $-\frac{2}{5}$.
6. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$. Відповідь. $\frac{1}{2}$.
7. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$. Відповідь. 6.
8. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$. Відповідь. $\frac{1}{2}$.
9. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$. Відповідь. $\frac{1}{6}$.
10. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$. Відповідь. -2.
11. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$. Відповідь. ∞ .
12. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right)$. Відповідь. -1.
13. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$. Відповідь. ∞ .
14. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2 - 5x + 4} + \frac{x-4}{3(x^2 - 3x + 2)} \right)$. Відповідь. 0.
15. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m та n — цілі числа). Відповідь. $\frac{m}{n}$.
16. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$. Відповідь. 0.
17. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$. Відповідь. ∞ .
18. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$. Відповідь. 1/2.
19. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x - 3x^3}{1 + x^2 + 3x^3}$. Відповідь. -1.

20. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$. *Відповідь.* 0.
21. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$. *Відповідь.* $\frac{1}{4}$.
22. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{2x + 1} - \frac{(2x - 1)(3x^2 + x + 2)}{4x^2} \right)$. *Відповідь.* $-\frac{1}{2}$.
23. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \dots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}} \right)$. *Відповідь.* 100.
24. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}$. *Відповідь.* -1.
25. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^4 + 1}}$. *Відповідь.* 1.
26. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^7 + 3} + \sqrt[4]{2x^3 - 1}}{\sqrt[6]{x^8 + x^7 + 1} - x}$. *Відповідь.* ∞ .
27. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 3} - \sqrt[5]{x^3 + 4}}{\sqrt[3]{x^7 + 1}}$. *Відповідь.* 0.
28. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$. *Відповідь.* 0.
29. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x^2}$. *Відповідь.* ∞ .
30. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$. *Відповідь.* 4.

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$. *Відповідь.* $\frac{m}{n}$.
2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$. *Відповідь.* $\frac{25}{9}$.
3. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + mx)}{x}$. *Відповідь.* m .
5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - x}{\ln(x + 1)}$. *Відповідь.* 2.
6. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} \quad (n, m \in \mathbb{N})$. *Відповідь.* $\begin{cases} 0, & \text{якщо } n > m \\ 1, & \text{якщо } n = m \\ \infty, & \text{якщо } n < m \end{cases}$.
7. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$. *Відповідь.* $\frac{3}{4}$.

8. Знайти $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt[3]{(1 - \cos \alpha)^2}}$. *Відповідь.* ∞ .
9. Знайти $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\operatorname{tg}^3 \alpha - \sin^3 \alpha}$. *Відповідь.* ∞ .
10. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$. *Відповідь.* $-\frac{3}{2}$.
11. Знайти $\lim_{y \rightarrow a} \left(\sin \frac{y-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a} \right)$. *Відповідь.* $-\frac{a}{\pi}$.
12. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$. *Відповідь.* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
13. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$. *Відповідь.* 2.
14. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x} \right)$. *Відповідь.* -2.
15. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x}$. *Відповідь.* $-2 \sin a$.
16. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$. *Відповідь.* $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$.
17. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}$. *Відповідь.* $\cos^3 a$.
18. Знайти $\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\alpha^2 - \beta^2}$. *Відповідь.* $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$.
19. Знайти $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2}$. *Відповідь.* $-\sin a$.
20. Знайти $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2h) - 2\operatorname{tg}(a+h) + \operatorname{tg} a}{h^2}$. *Відповідь.* $\frac{2 \sin a}{\cos^3 a}$.
26. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^{x+1}$. *Відповідь.* e^{-1} .
27. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7} \right)^{3x+2}$. *Відповідь.* e^{-2} .
28. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x+2}{3x+4} \right)^{2x}$. *Відповідь.* $\begin{cases} 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \infty & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$.
29. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$. *Відповідь.* e^2 .
30. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x$. *Відповідь.* $\begin{cases} 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \infty & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$.

31. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$.

Відповідь. $\begin{cases} \infty & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

32. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$.

Відповідь. 1.

33. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}$.

Відповідь. $\begin{cases} \infty & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

34. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}$.

Відповідь. e .

35. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{2x}}$.

Відповідь. $\sqrt{e}$.

42. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$.

Відповідь. e .

43. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

Відповідь. 2.

44. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$.

Відповідь. 1.

45. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$.

Відповідь. $a - b$.

Тема 8. Неперервність функції.

Неперервність функції. Класифікація точок розриву

1. Означення неперервності

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$, якщо:

- $f(a)$ існує (функція визначена в точці a)
- Існує границя $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Неперервність на проміжку:

- Неперервна на інтервалі (a, b) , якщо неперервна в кожній точці інтервалу
- Неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо неперервна на (a, b) і: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

2. Класифікація точок розриву

Тип розриву	Умови	Графічна інтерпретація
Усувний	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$	"Дірка" у графіку
Розрив I роду	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	Стрибок між двома значеннями
Розрив II роду	Хоча б одна з односторонніх границь не існує або нескінченна	Вертикальна асимптота, осциляції

3. Основні теореми та властивості

Властивості неперервних функцій:

Якщо $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці a , то також неперервні:

- $f(x) \pm g(x)$
- $f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ (за умови $g(a) \neq 0$)

Теорема Вейерштрасса:

Будь-яка неперервна на відрізку $[a, b]$ функція досягає свого максимуму і мінімуму на цьому відрізку.

Теорема про проміжні значення:

Якщо $f(x)$ неперервна на $[a, b]$ і $f(a) \neq f(b)$, то для будь-якого C між $f(a)$ і $f(b)$ існує $c \in (a, b)$ така, що $f(c) = C$.

4. Алгоритм дослідження на неперервність

- **Знайти область визначення функції**
- **Виділити підозрілі точки:**
 - Точки, де функція змінює аналітичний вираз
 - Точки, де знаменник дробу дорівнює нулю
 - Точки, де аргумент під знаком модуля або кореня змінює поведінку

- Для кожної підозрілої точки $x = a$:
 - Обчислити $f(a)$
 - Знайти односторонні границі $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
 - Порівняти границі між собою та з $f(a)$

5. Типові функції з розривами (для економічних моделей)

- **Функції зі стрибками:**
- **Функції з вертикальними асимптотами:**
 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ (розрив II роду при $x = 2$)
- **Функції з усувними розривами:**
 $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ (усувний розрив при $x = 2$)

Методика розв'язання типових задач

1. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \frac{x}{x-4}$ має розрив.

$$\text{Знаходимо } \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty.$$

Таким чином, функція при $x \rightarrow 4$ не має ні правої, ні лівої скінченної границі. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 2-го роду.

2. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}$ має розрив.

Якщо $x \rightarrow 4-0$, то $\frac{1}{x-4} \rightarrow -\infty, \lim_{x \rightarrow 4-0} y = -\frac{\pi}{2}$. Якщо $x \rightarrow 4+0$, то $\frac{1}{x-4} \rightarrow +\infty, \lim_{x \rightarrow 4+0} y = \frac{\pi}{2}$. Таким чином, при $x \rightarrow 4$ функція має ліву та праву скінченні границі, причому ці границі різні. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 1-го роду.

3. Показати, що при $x = 5$ функція $y = \frac{x^2-25}{x-5}$ має розрив.

У точці $x = 5$ функція має невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. В інших точках дріб скорочується на $x-5$, оскільки $x-5 \neq 0$. Звідси, при $x \neq 5$ $y = x+5$. Легко показати, що

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} y = \lim_{x \rightarrow 5+0} y = 10.$$

Таким чином, при $x = 5$ функція має усувний розрив. Його можна усунути, якщо домовитися, що при $x = 5$ $y = 10$.

Звідси можна вважати, що функція $y = \frac{x^2-25}{x-5}$ неперервна при всіх значеннях x , якщо вважати, що рівність $\frac{x^2-25}{x-5} = x+5$ справджується при всіх значеннях x , включаючи і саму точку $x = 5$.
 У цьому випадку графіком функції буде пряма лінія $y = x+5$.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

1. Знайти точки розриву функції $y = 1/((x-1)(x-5))$.

Відповідь. $x = 1, x = 5$ — точки розриву 2-го роду.

2. Який характер розриву функції $y = 1/(1 - e^{1-x})$ в точці $x = 1$?

Відповідь. $x = 1$ — точка розриву 2-го роду.

3. Знайти точки розриву функції

$$y = (\operatorname{tg} x \arctg(1/(x-3)))/(x(x-5)).$$

Відповідь. $x = 3$ — точка розриву 1-го роду; $x = 5$ — точка розриву 2-го роду; $x = 0$ — точка усувного розриву; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n (0, 1, 2, \dots)$ — точки розриву 2-го роду.

4. Знайти точки розриву функції

$$y = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)/(x^2 - 3x + 2).$$

Відповідь. $x = 1, x = 2$ — точки усувного розриву.

5. Знайти точки розриву функції $y = 1/(x^2 + x + 1)$.

Відповідь. Функція неперервна на всій числовій прямій $(-\infty, +\infty)$.

6. Дослідити на неперервність функцію $y = \frac{1}{(x-1)(x-6)}$ на сегменті: а) $[2, 5]$; б) $[4, 10]$; в) $[0, 7]$.

Відповідь. а) функція неперервна; б) має одну точку розриву 2-го роду; в) має дві точки розриву 2-го роду.

7. Дослідити на неперервність функцію $y = 1/(x^4 - 26x^2 + 25)$ на сегменті: а) $[6, 10]$; б) $[-2, 2]$; в) $[-6, 6]$.

Відповідь. а) функція неперервна; б) має дві точки розриву 2-го роду; в) має чотири точки розриву 2-го роду.

8. Знайти точки розриву функції $y = (2^{1/(x-2)} - 1)/(2^{1/(x-2)} + 1)$.

Відповідь. $x = 2$ — точка розриву 1-го роду.

9. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} 0,5x^2 & \text{при } |x| < 2, \\ 2,5 & \text{при } |x| = 2, \\ 3 & \text{при } |x| > 2. \end{cases}$$

Відповідь. $x = \pm 2$ — точки розриву 1-го роду (розрив неусувний).

10. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \frac{1}{\frac{1}{1 + 2^x}}.$$

Відповідь. $x = 0$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний).

11. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \arctg \frac{a}{x - a}.$$

Відповідь. $x = a$ — точка розриву 1-го роду.

12. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}.$$

Відповідь. $x = 1$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний).

13. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{якщо } x > 1, \\ x + 1, & \text{якщо } x < 1, \\ 3, & \text{якщо } x = 1. \end{cases}$$

Відповідь. $x = 1$ — точка розриву 1-го роду (розрив усувний).

Тема 9. Похідна та еластичність функції. Диференціал функції.

1. Означення похідної

Похідна функції $f(x)$ у точці x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Геометричний зміст: кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці x_0 .

2. Правила диференціювання

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(cu)' = cu'$, де $c = \text{const}$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- **Правило ланцюга:** $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

3. Таблиця похідних

Функція	Похідна
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
a^x	$a^x \ln a$

4. Диференціал dy функції $y = f(x)$:

$dy = f'(x)dx$ де dx - приріст аргументу.

Застосування диференціала в наближених обчисленнях:

$\Delta y \approx dy$, або в розгорнутому вигляді: $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, звідки

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

5. Еластичність функції

Еластичністю функції $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \rightarrow 0$.

Еластичність $E_x(y)$ показує на скільки відсотків зміниться y при зміні x на 1%:

$$E_x(y) = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

Приклад розрахунку

Задача: Знайти еластичність попиту $Q = 100 - 2P$ при $P = 20$.

- Знаходимо похідну:

$$\frac{dQ}{dP} = -2$$

7. Обчислюємо еластичність:

$$E = (-2) \cdot \frac{20}{100 - 2 \cdot 20} = -2 \cdot \frac{20}{60} = -0.67$$

Інтерпретація: При зростанні ціни на 1% обсяг попиту зменшиться на 0.67% (нееластичний попит).

Методика розв'язання типових задач

Приклад 1. Функція $y = x^2$. Знайти похідну в точках $x = 3$ і $x = -4$.

Надамо аргументу x приросту Δx , тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці $x = 3$ $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, а похідна при $x = -4$ буде $f'(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$.

Приклад 2. $y = C$, де $c = \text{const}$.

Надавши аргументу x приросту Δx , дістанемо приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Тепер знайдемо границю відношення $\Delta y / \Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0, \text{ тобто } C' = 0$$

Приклад 3. $y = \sin x$.

Користуючись відомою з тригонометрії формулою

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

знайдемо приріст функції у точці x і обчислимо границю:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x;$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Аналогічно можна дістати: $(\cos x)' = -\sin x$.

Приклад 4. $y = e^x$.
Для цієї функції маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x,$$

тобто $(e^x)' = e^x$.

Приклад 5. $y = x^{x^2}$.

Логарифмуючи функцію, дістаємо $\ln y = x^2 \ln x$.

Звідки: $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$,

$$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x, \quad \frac{y'}{y} = x(1 + 2 \ln x),$$

$$y' = xy(1 + 2 \ln x) = xx^{x^2}(1 + 2 \ln x) = x^{x^2+1}(1 + 2 \ln x).$$

Приклад 6. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Маємо: $\ln y = \operatorname{tg} x \ln \sin x$, $\frac{y'}{y} = \operatorname{tg} x \frac{1}{\sin x} \cos x +$

$$+ \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x = 1 + \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x,$$

$$y' = y \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x \right) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x \right).$$

Приклад 7. Знайти похідну y'_x з рівняння $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Продиференціювавши за x обидві частини рівняння, дістанемо $3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y \cdot y' - 2xe^y = 0$.

Звідки $y' = \frac{(2xye^y - 3x^2)y}{1 - x^2 ye^y}$.

Означення. Еластичністю функції $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'. \quad (10.1)$$

Приклад. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. грош. од.) та випуском продукції x (млрд грош. од.) виражається функцією $y = -0,5x + 80$. Знайти еластичність собівартості за умови випуску продукції в розмірі 60 млрд грош. од.

За формулою (10.1) еластичність собівартості

$$E_x(y) = \frac{-0,5x}{-0,5x + 80} = \frac{x}{x - 160}.$$

При $x = 60$ $E_{x=60}(y) = -0,6$, тобто при виробництві продукції в розмірі 60 млн грош. од., збільшення її на 1% викличе зменшення собівартості на 0,6%.

Правила знаходження диференціала:

Диференціал функції однієї змінної — це добуток $f'(x)\Delta x$.

1. $y = \text{const}; dy = 0;$
2. $y = uv, dy = u dv + v du;$
3. $y = u + v, dy = du + dv;$
4. $y = \frac{u}{v}, dy = \frac{v du - u dv}{v^2}.$

1. **Приклад.** Знайти диференціал функції $y = \arctg x$.

$$\text{Маємо: } dy = (\arctg x)' dx = \frac{dx}{1+x^2}.$$

2. **Приклад.** Знайти диференціал функції $s = e^{t^2}$.

$$\text{Маємо: } ds = e^{t^2} \cdot 2t \cdot dt.$$

3. **Приклад.** Обчислити наближено значення $\arcsin 0,51$.

Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Візьмемо $x = 0,5$, $\Delta x = 0,01$ та, застосовуючи формулу $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$, одержимо

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,011 = 0,513.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

Використовуючи означення похідної, знайти похідні функцій:

1. $y = \frac{1}{x^2}.$ *Відповідь.* $y' = -\frac{2}{x^3}.$

2. $y = \sqrt[3]{x^2}.$ *Відповідь.* $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$

3. $y = 5 \sin x + 3 \cos x.$ *Відповідь.* $y' = 5 \cos x - 3 \sin x.$

4. $y = 5(\operatorname{tg} x - x).$ *Відповідь.* $y' = 5 \operatorname{tg}^2 x.$

5. $y = \frac{1}{e^x + 1}.$ *Відповідь.* $y' = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$

6. $y = 2^{x^2}.$ *Відповідь.* $y' = 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2.$

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

7. $y = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}.$ *Відповідь.* $y' = x^2\sqrt{x}(1-x^2)^2.$

8. $y = 3x^3 \cdot \ln x - x^3.$ *Відповідь.* $y' = 9x^2 \cdot \ln x.$

9. $y = 2^{3x} / 3^{2x}.$ *Відповідь.* $y' = \left(\frac{8}{9}\right)^x \cdot \ln \frac{8}{9}.$

10. $y = x \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}.$ *Відповідь.* $y' = \arccos \frac{x}{2}.$

11. $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$. *Відповідь.* $y' = \frac{1}{\cos x}$.
12. $y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1})$. *Відповідь.* $y' = \frac{6x}{\sqrt{9x^4 + 1}}$.
13. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\sin x) + \ln \cos(\sin x)$. *Відповідь.* $y' = \operatorname{tg}^3(\sin x) \cdot \cos x$.
14. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 1}$. *Відповідь.* $y' = \frac{1}{x(x + 1)(x + 2)}$.
15. $y = 2x \cdot \operatorname{tg} 2x + \ln \cos 2x - 2x^2$. *Відповідь.* $y' = 4x \cdot \operatorname{tg}^2 2x$.
16. $y = \operatorname{arctg} \frac{3x - x^2}{1 - 3x^2}$. *Відповідь.* $y' = \frac{3}{1 + x^2}$.
17. $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x$. *Відповідь.* $y' = -\frac{2e^{3x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.
18. $y = e^x \cdot 2^{5x} / 3^{4x}$. *Відповідь.* $y' = \frac{e^x \cdot 2^{5x}}{3^{4x}} \cdot \ln \frac{32e}{81}$.
19. $y = \frac{x + 1}{x} - e^{-\ln \frac{x}{x + 1}}$. *Відповідь.* $y' = 0$.
20. $y = \frac{x^2 \cdot e^{x^2}}{x^2 + 1}$. *Відповідь.* $y' = 2e^{x^2} \cdot x \cdot \frac{x^4 + x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$.
21. $y = \frac{1}{4a} \ln \frac{x - a}{x + a} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$. *Відповідь.* $y' = \frac{x^2}{x^4 - a^4}$.
22. $y = \log_{x^2} 2$. *Відповідь.* $y' = -\frac{\ln 2}{2x \ln^2 x}$.
23. $y = x^{\arcsin x}$.
Відповідь. $y' = x^{\arcsin x} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\arcsin x}{x} \right)$.
24. $y = \frac{x^x}{e^x} (x \ln x - x - 1)$.
Відповідь. $y' = x(\ln x - 1) \cdot \frac{x^x}{e^x} \ln x$.
25. $y = \log_{\cos x} \sin x$.
Відповідь. $y' = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \ln \cos x + \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x}{\ln^2 \cos x}$.
26. $y = \ln(e^x \cos x + e^{-x} \sin x)$.
Відповідь. $\frac{(\cos x - \sin x)(e^x + e^{-x})}{e^x \cos x + e^{-x} \sin x}$.
27. $y = e^x \sin x \cos^3 x$.
Відповідь. $e^x \sin x \cos^3 x (1 + \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x)$.
28. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln x + 1}$.

Відповідь. $\left(2x - \frac{1}{1+x^2}\right) e^{\frac{x^2 - \arctg x + \frac{1}{2} \ln x + 1}{\sqrt{x}}}.$

29. $y = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$

Відповідь. $\frac{1}{\cos^5 x}.$

30. $y = \sin^2 3x \cdot f(\cos^3 u)$, де $f(x) = 2^x, u = 7x.$

Відповідь. $2^{\cos^3 7x} \left(3 \sin 6x - \frac{21}{2} \ln 2 \sin^2 3x \cos 7x \sin 14x \right).$

31. $y = \cos \sqrt{x} \cdot f(u^{-1})$, де $f(x) = x^2, u = 7x.$

Відповідь. $-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \operatorname{tg} 7x + 14 \cos \sqrt{x} \cos^{-2} 7x \right) / \operatorname{tg}^3 7x.$

32. $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}.$

Відповідь. $(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}} \left(\frac{4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \ln \operatorname{tg} 2x}{\sin 4x} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \right).$

Знайти похідну y'_x від неявно заданих функцій:

33. $x \sin y + y \sin x = 0.$ Відповідь. $y' = -\frac{y \cos x + \sin y}{x \cos y + \sin x}.$

34. $\frac{y}{x} + e^{y/x} - 3 \sqrt{\frac{y}{x}} = 0.$ Відповідь. $y' = y/x.$

35. $x^{y^2} + y^2 \cdot \ln x - 4 = 0.$ Відповідь. $y' = -\frac{y}{2x \ln x}.$

36. $y^2 - 2xy + b = 0.$ Відповідь. $\frac{y}{y-x}.$

37. $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0.$ Відповідь. $-\frac{3x^2 + 2axy + by^2}{ax^2 + 2bxy + 3y^2}.$

38. $y = \cos(x+y).$ Відповідь. $-\frac{\sin(x+y)}{1 + \sin(x+y)}.$

39. $y = 1 + xe^y.$ Відповідь. $\frac{e^y}{2-y}.$

40. $y \sin x - \cos(x-y) = 0.$ Відповідь. $\frac{y \cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}.$

41. $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-K}{1+K}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$ Відповідь. $\frac{\sqrt{1-K^2}}{1+K \cos x}.$

42. $y = x + \arctg y.$ Відповідь. $\frac{1+y^2}{y^2}.$

43. $\cos(xy) = x.$ Відповідь. $-\frac{1+y \sin(xy)}{x \sin(xy)}.$

Знайти похідну y'_x від параметрично заданих функцій:

44. $x = 1 - t^2, y = t - t^3$. Відповідь. $(3t^2 - 1)/(2t)$.
45. $x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{t-1}{t}$. Відповідь. -1 .
46. $x = \ln(1+t^2), y = t - \arctgt$. Відповідь. $\frac{t}{2}$.
47. $x = \varphi(1 - \sin \varphi), y = \varphi \cos \varphi$. Відповідь. $\frac{\cos \varphi - \varphi \sin \varphi}{1 - \sin \varphi - \varphi \cos \varphi}$.
48. $x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, y = \frac{t}{t^2-1}$. Відповідь. $\frac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}$.
49. $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$. Відповідь. $\frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$.
50. $x = \frac{3at}{1+t^2}, y = \frac{3at^2}{1+t^2}$. Відповідь. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.
-

Знайти диференціали функцій:

1. $y = \frac{x}{2} \sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2} \arcsin \frac{x}{7}$. Відповідь. $dy = \sqrt{49 - x^2} dx$.
2. $y = \frac{1}{12} \ln \frac{x-6}{x+6}$. Відповідь. $dy = \frac{dx}{x^2 - 36}$.
3. $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$. Відповідь. $dy = \frac{2e^{2x} dx}{1 + e^{4x}}$.
4. $y = e^{\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x} \cdot \cos x$.
Відповідь. $dy = e^{\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x} \cdot \sin x \operatorname{tg}^2 x dx$.
5. Обчислити Δy та dy для функції $y = x^2 - 2x$ при $x = 3$ та $\Delta x = 0,01$.
Відповідь. $\Delta y = 0,0401$; $dy = 0,04$.
6. Знайти наближене значення $\operatorname{arctg} 1,05$.
Відповідь. $0,811$.
7. Знайти наближене значення об'єму кулі радіусом $2,01$ м.
Відповідь $34,04 \text{ м}^3$.
8. Знайти наближене значення $\operatorname{tg} 46^\circ$.
Відповідь. $1,035$.
9. Знайти наближене значення $\sqrt[4]{15,8}$.
Відповідь. $1,9938$.

Тема 10. Похідні та диференціали вищих порядків. Функція попиту та пропозиції.

Похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора. Дослідження функцій

1. Похідні вищих порядків

Означення:

Похідна **n-го порядку** – це похідна від похідної (n-1)-го порядку:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} (f^{(n-1)}(x))$$

2. Диференціали вищих порядків

Другий диференціал:

$$d^2 y = f''(x) dx^2$$

n-й диференціал:

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$$

3. Формула Тейлора

Розклад функції в точці x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n$$

Залишковий член R_n :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad c \in (x_0, x)$$

Економічний застосунок:

Апроксимація нелінійних функцій (наприклад, витрат або доходу) поблизу точки рівноваги.

4. Дослідження функцій

Основні етапи:

Знаходження області визначення

Інтервали монотонності:

$$f'(x) > 0 \rightarrow \text{функція зростає}$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow \text{функція спадає}$$

Екстремуми:

Критичні точки: $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує

Опуклість/угнутість:

$$f''(x) > 0 \rightarrow \text{опукла вниз}$$

$$f''(x) < 0 \rightarrow \text{опукла вгору}$$

Точки перегину: $f''(x) = 0$

5. Функції попиту та пропозиції

Ключові поняття:

- Функція попиту: $Q_d = D(P)$
- Функція пропозиції: $Q_s = S(P)$
- Еластичність попиту:

$$E_d = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

- $|E_d| > 1$: еластичний попит
- $|E_d| < 1$: нееластичний попит

Властивості еластичності:

- Не залежить від одиниць виміру
- Характеризує реакцію обсягу попиту на зміну ціни

Практичні завдання

- Для функції витрат $C(q) = 2q^3 - 15q^2 + 36q$:
 - а) Знайдіть граничні витрати ($C'(q)$)
 - б) Дослідіть на опуклість ($C''(q)$)
- Розкладіть функцію $f(x) = e^{2x}$ за формулою Тейлора в точці $x_0 = 0$ до 3-го порядку.
- Для функції попиту $Q_d = 100 - 4P$:
 - а) Обчисліть еластичність при $P = 10$
 - б) З'ясуйте тип еластичності

Методика розв'язання типових задач

Приклад. Задано функцію $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$. Знайти $y', y'', y''', \dots$.

● Маємо: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2}$,
 $y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2$, $y''' = 60x^2 + 48x - 18$,
 $y^{(4)} = 120x + 48$, $y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \dots = 0$.

Приклад. $y = \ln x$. Знайти $y^{(n)}$.

● Маємо: $y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $y'' = -1 \cdot x^{-2}$, $y''' = 1 \cdot 2x^{-3}$, $y^{(4)} = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4}$, ...,
 $y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}$.

Приклад. За допомогою досліду були встановлені функції попиту $q = \frac{p+8}{p+2}$ та пропозиції $s = p+0,5$, де q та s — кількість товарів, відповідно що купується і пропонується для продажу за одиницю часу, p — ціна товару. Знайти: а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та

пропозиція врівноважуються; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

а) Рівноважна ціна визначається з умови $q = s$, $\frac{p+8}{p+2} = p+0,5$, звідки $p = 2$, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 грош. од.

б) Знайдемо еластичності попиту та пропозиції за формулою (10.1):

$$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \quad E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p = 2$ маємо $E_{p=2}(q) = -0,3$; $E_{p=2}(s) = 0,8$.

Оскільки отримані значення еластичності за абсолютною величиною менші 1, то попит і пропозиція даного товару за рівноважної (ринкової) ціни нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту та пропозиції. Так, при збільшенні ціни p на 1% попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція збільшиться на 0,8%.

в) При збільшенні ціни p на 5% від рівноважної попит зменшиться на $5 \cdot 0,3 = 1,5\%$, тобто прибуток зросте на 3,5%.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

Знайти похідні другого порядку від функцій:

51. $y = -\frac{22}{x+5}$. Відповідь. $y'' = -\frac{44}{(x+5)^3}$.

52. $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$. Відповідь. $y'' = \ln x$.

53. $y = -\frac{1}{9}x \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x$. Відповідь. $y'' = x \cdot \sin 3x$.

54. $y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}$. Відповідь. $y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

55. $y = xe^{x^2}$. Відповідь. $2e^{x^2}(3x + 2x^3)$.

56. $y = \frac{1}{1+x^3}$. Відповідь. $\frac{6x(2x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^3}$.

57. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$. Відповідь. $\frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$.

58. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Відповідь. $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

59. $y = \frac{1}{a + \sqrt{x}}$. Відповідь. $\frac{a + 3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(a + \sqrt{x})^3}$.

60. $y = e^{\sqrt{x}}$. Відповідь. $\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}$.

Знайти похідні третього порядку від функцій:

61. $y = ax^2 + bx + c$. Відповідь. $y''' = 0$.

62. $y = \operatorname{tg} x$. Відповідь. $y''' = 6\sec^4 x - 4\sin^2 x$.

63. $y = \ln \sin x$. Відповідь. $y''' = 2\operatorname{ctg} x \cos \operatorname{ec}^2 x$.

64. $y = \frac{x}{6(x+1)}$. Відповідь. $y''' = \frac{1}{(x+1)^4}$.

65. $y = \frac{1}{2} \ln^2 x$. Відповідь. $y''' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$.

66. $y = (2x+3)^3 \sqrt{2x+3}$. Відповідь. $y''' = 105\sqrt{2x+3}$.

67. $y = (x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$. Відповідь. $y''' = \frac{4a^3}{(a^2 + x^2)^2}$.

Знайти похідні n -го порядку від функцій:

68. $y = x^n \cdot \sqrt{x}$.

Відповідь. $y^{(n)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{2^n} \sqrt{x}$.

69. $y = 5 - 3 \cos^2 x$.

Відповідь. $y^{(n)} = -\frac{3}{2} \cdot 2^n \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

70. $y = 2^x + 2^{-x}$.

Відповідь. $y^{(n)} = (2^x + (-1)^n \cdot 2^{-x}) \ln^n 2$.

71. $y = a^x$. Відповідь. $y^{(n)} = (\ln a)^n a^x$.

72. $y = \ln(1+x)$. Відповідь. $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

73. $y = \frac{1-x}{1+x}$. Відповідь. $y^{(n)} = 2(-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

74. $y = xe^x$. Відповідь. $y^{(n)} = e^x(x+n)$.

75. $y = x^{n-1} \ln x$. Відповідь. $y^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$.

172. Записати формулу Тейлора для функції $y = \sqrt{x}$ при $a = 1$, $n = 3$.

Відповідь. $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1!} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \frac{3}{8} - \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \frac{15}{16} (1 + \Theta(x-1))^{\frac{7}{2}}$, $0 < \Theta < 1$.

173. Написати формулу Маклорена для функції $y = \sqrt{1+x}$ при $n = 2$.

Відповідь. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\Theta x)^{\frac{5}{2}}}$, $0 < \Theta < 1$.

Користуючись формулою Тейлора, обчислити границі:

174. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$. Відповідь. 0.

175. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}$. Відповідь. $\frac{1}{4}$.

$$176. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

Відповідь. 0.

$$177. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right).$$

Відповідь. $\frac{1}{3}$.

$$178. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$$

Відповідь. $\frac{2}{3}$.

Тема 11. Основні поняття функції багатьох змінних.

1. Функція багатьох змінних

Означення:

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де кожній точці $(x_1, \dots, x_n)$ з області визначення ставиться у відповідність число z .

Приклад (економіка):

Витрати виробництва: $C(K, L) = aK + bL + c$, де K — капітал, L — праця.

Приклад. Розглянемо функцію двох незалежних змінних K, L , яка називається *функцією виробництва*, або *функцією Кобба—Дугласа*, де K — кількість капіталу, L — кількість праці, яку вкладено у виробництво $P = \text{const} K^\alpha L^\beta$, $\alpha + \beta = 1$.

Приклад. Припустимо, що предметами споживання будуть два товари A та B , ціни яких відповідно становлять p_1 та p_2 . Якщо ціни інших товарів сталі, а прибуток споживачів та структура споживань не змінюються, то попит та пропозиція кожного з товарів залежить від їх цін.

Маємо функцію попиту на товар A : $g_1 = f_1(p_1; p_2)$; функцію попиту на товар B : $g_2 = f_2(p_1; p_2)$; функцію пропозиції товару A : $s_1 = f_3(p_1; p_2)$; функцію пропозиції товару B : $s_2 = f_4(p_1; p_2)$.

Лінії рівня функції багатьох змінних — це множина точок, де функція набуває постійного значення. Розглянемо детальніше:

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$:

Лінії рівня називають **ізолініями**. Наприклад:

Для $z = x^2 + y^2$ лінії рівня — це кола: $x^2 + y^2 = C$.

Для $z = 2x + 3y$ лінії рівня — прямі: $2x + 3y = C$.

Накресливши кілька ліній рівня та зазначивши, яких значень набуває на них функція, дістанемо наближене уявлення про зміну функції. Елементарний приклад зображення функції за допомогою ліній рівня є зображення рельєфу місцевості на географічній карті. Висота місцевості над рівнем моря є функцією координат точки земної поверхні. За лініями рівня висоти, нанесеними на карту, легко уявити собі рельєф даної місцевості.

2. Частинні похідні

Першого порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

Властивості:

- Лінійність: $\frac{\partial}{\partial x}(af + bg) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial g}{\partial x}$
 - Похідна добутку: $\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$
-

3. Повний диференціал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Застосування: Наближені обчислення:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + df$$

4. Похідна за напрямом та градієнт

Градієнт:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Похідна за напрямом $\vec{v} = (a, b)$: $D_{\vec{v}}f = \nabla f \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Властивість: Градієнт вказує напрямок найшвидшого зростання функції.

5. Екстремум функції двох змінних

Необхідна умова (стаціонарна точка):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Достатня умова:

Нехай $D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$

- Якщо $D > 0$ і $f''_{xx} > 0 \rightarrow$ локальний мінімум
 - Якщо $D > 0$ і $f''_{xx} < 0 \rightarrow$ локальний максимум
 - Якщо $D < 0 \rightarrow$ сідлова точка
-

6. Умовний екстремум (метод Лагранжа)

Для задачі $f(x, y) \rightarrow \text{extr}$ з обмеженням $g(x, y) = 0$:

Функція Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

Система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

7. Найбільше та найменше значення в замкненій області

Алгоритм:

- Знайти критичні точки всередині області (стаціонарні точки).
- Дослідити функцію на межі області (метод Лагранжа або параметризація межі).
- Порівняти значення функції в усіх критичних точках та на межі.

Економічні застосування

Концепція	Приклад використання
Гradient	Оптимізація витрат виробництва
Умовний екстремум	Максимізація прибутку з обмеженнями
Повний диференціал	Аналіз чутливості економічних моделей

Приклад задачі:

Знайти максимум функції корисності $U(x, y) = x^{0.6}y^{0.4}$ за бюджетного обмеження $2x + 3y = 100$.

Розв'язок: Використати метод множників Лагранжа.

Методика розв'язання типових задач

Приклад. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2y$.

Рівняння ліній рівня має вигляд $x^2y = c$ або $y = c/x^2$. Узявши $c = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, дістанемо сім'ю ліній рівня (рис. 11.1).

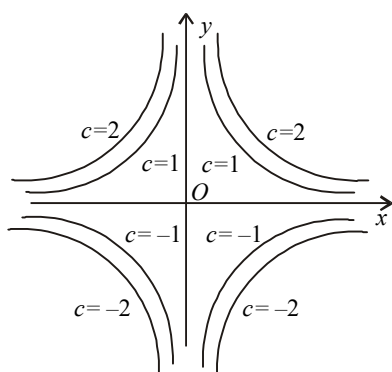
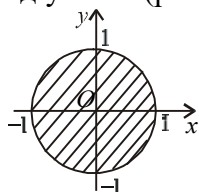


Рис. 11.1

Приклад. Знайти область визначення функції двох змінних та надати їй геометричну інтерпретацію:

$$z = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2};$$

Функція визначена, якщо $1 - (x^2 + y^2) \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 1$. Це є коло з центром $(0; 0)$ та радіусом 1 (рис. 11.2).



Приклад.

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin(x^2 + \sqrt{y}) + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \operatorname{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos(x^2 + \sqrt{y}) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \operatorname{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos(x^2 + \sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Приклад.

Знайти частинні похідні z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + xy^2$.

Знайдемо z'_x , вважаючи $y = \operatorname{const}$:

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y , вважаючи $x = \operatorname{const}$:

$$z'_y = x^2 + 2xy.$$

Приклад.

Знайти повний диференціал dz , якщо $z = \ln(x + \ln y)$.

$dz = z'_x dx + z'_y dy$, де

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y};$$

$$z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}, \text{ отже,}$$

$$dz = \frac{1}{x + \ln y} \left(dx + \frac{1}{y} dy \right).$$

Приклад.

Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2$ у точці $(1; 1)$ за напрямом $\vec{l} = (\cos 30^\circ; \cos 60^\circ)$.

Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці $(1; 1)$ функції $u = x^2 + y^2$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1;1)} = 2x|_{(1;1)} = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1;1)} = 2y|_{(1;1)} = 2.$$

Тоді за формулою похідної за напрямом дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = 2 \cos 30^\circ + 2 \cos 60^\circ = 1 + \sqrt{3}.$$

Приклад.

Знайти градієнт функції $u = 4 - x^2 - 2y^2 - xy + z^2y^2$ у точці $(1; 2; -1)$.
Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці $(1; 2; -1)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1;2;-1)} = (-2x - y)|_{(1;2;-1)} = -4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1;2;-1)} = (-4y - x + 2z^2y)|_{(1;2;-1)} = -2,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1;2;-1)} = 2zy^2|_{(1;2;-1)} = -8.$$

Тоді $\vec{\text{grad}} u = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}$.

Приклад.

Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \quad (a > 0, b > 0).$$

Знайдемо z'_x і z'_y :

$$z'_x = \frac{x}{a}, \quad z'_y = \frac{y}{b}.$$

2. Необхідна умова екстремуму: $\begin{cases} \frac{x}{a} = 0 \\ \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$.

Отже, $(0; 0)$ — стаціонарна точка.

3. Знайдемо z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yy} :

$$z''_{xx} = \frac{1}{a}, \quad z''_{xy} = 0, \quad z''_{yy} = \frac{1}{b}.$$

4. У точці $(0; 0)$

$$a_{11} = \frac{1}{a}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \frac{1}{b}.$$

$$\Delta = \frac{1}{ab} > 0.$$

5. Точка $(0;0)$ — мінімум, хоча це ясно і безпосередньо.

Приклад. Знайти умовний екстремум функції $u = f(x; y) = 6 - 5x - 4y$ відносно рівняння зв'язку $\varphi(x; y) = x^2 - y^2 - 9 = 0$.

Функції f і φ подвійно неперервно диференційовні. Матриця Якобі в даному випадку має вигляд $(2x - 2y)$, і її ранг дорівнює 1 в усіх точках, що задовольняють рівняння зв'язку. Отже, можна скористатися методом Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x; y) = 6 - 5x - 4y + \lambda(x^2 - y^2 - 9).$$

Згідно з необхідними умовами дістанемо систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -5 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо $x = -5$, $y = 4$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$; $x = 5$, $y = -4$ при $\lambda = \frac{1}{2}$. Таким чином, функція f може мати умовний екстремум тільки в двох точках $(-5; 4)$ і $(5; -4)$.

Обчислимо другий диференціал функції Лагранжа: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda$, тоді $d^2 L = 2\lambda(dx^2 - 2y^2)$.

Знайдемо перший диференціал функції $\varphi(x; y)$.

У точках $(-5; 4)$ і $(5; -4)$ диференціали dx і dy пов'язані рівністю: $5dx + 4dy = 0$, $dy = -\frac{5}{4}dx$. При виконанні цієї умови другий диференціал функції Лагранжа в точці $(-5; 4)$ є додатно визначеною квадратичною формою $d^2 L = \frac{9}{16}dx^2$, а в точці $(5; -4)$ — від'ємно визначеною формою $d^2 L = -\frac{9}{16}dx^2$.

Отже, функція f у точці $(-5; 4)$ має умовний мінімум $u(-5; 4) = 15$, а в точці $(5; -4)$ — умовний максимум $u(5; -4) = -3$.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

1. Знайти та зобразити область визначення функції двох змінних:

- | | |
|---|---|
| 1) $u = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$; | 2) $u = \sqrt{4x^2 - y^2 - 4y}$; |
| 3) $u = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x-y}}\right)$; | 4) $u = \sqrt{1-2 x - y }$; |
| 5) $u = \ln(y^2 - 4x + 8)$; | 6) $u = \arcsin \frac{y-1}{x}$; |
| 7) $u = \sqrt{x-\sqrt{y}}$; | 8) $u = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$; |
| 9) $u = \sqrt{x \sin y}$; | 10) $u = \ln x - \ln \cos y$; |
| 11) $u = \arcsin[2y(1+x^2)-1]$; | 12) $u = \operatorname{ctg} \pi(x+y)$. |

2. Побудувати лінії рівня для даних функцій:

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| 1) $z = x + y$; | 3) $z = (1 + x + y)^2$; |
| 2) $z = \sqrt{xy}$; | 4) $z = 1 - x - y $. |

3. Знайти частинні похідні першого порядку.

- | | |
|---|--|
| 1) $u = xy + yz + zx$; | 2) $u = \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$; |
| 3) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; | 4) $u = \frac{y}{z} + \operatorname{arctg} \frac{z}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{z}$; |

- 5) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$;
- 6) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$;
- 7) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;
- 8) $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
- 9) $z = e^{\frac{x}{y}}$;
- 10) $z = xy \ln(x + y)$;
- 11) $z = (1 + \log_y x)^{10}$;
- 12) $z = xy e^{\sin \pi^2 xy}$;
- 13) $z = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}}$;
- 14) $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x + y}{xy}\right)^2}$;
- 15) $z = \arcsin \frac{x + y}{xy}$;
- 16) $z = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$;
- 17) $u = \operatorname{arctg}(x - y)^z$;
- 18) $z = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}$;
- 19) $z = xy^3 + 3x^4y^5 + 10y^4$;
- 20) $z = \frac{xy^2}{x^3 + y^2}$;
- 21) $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;
- 22) $u = \ln \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

4. Розв'язати систему рівнянь $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, якщо

$$f(x; y) = xy\sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

5. Знайти $\Delta f(x; y)$ і $df(x; y)$ для функції $f(x; y) = x^3 - y^3$.

6. Знайти повний диференціал функції $f(x; y)$ у заданій точці, якщо:

- 1) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, а задана точка $(1; 1)$; $(0; 1)$;
- 2) $f(x; y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$, а задана точка $(2; 1)$;
- 3) $f(x; y) = \frac{\cos(x - 2y)}{\cos(x + 2y)}$, а задана точка $\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

7. Знайти повний диференціал даних функцій:

- 1) $z = x^3y^4 - x^4y^4 + x^4y^3$;
- 2) $z = \frac{x + y}{x - y}$;
- 3) $z = \sin(xy)$;
- 4) $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$;
- 5) $z = \arcsin \frac{x}{y}$;
- 6) $z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$.

8. Знайти похідну функції $z = x^2 - xy + y^2$ у точці $M(1; 1)$ за напрямом $\vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

Відповідь. $\left(\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} \right) \Big|_M = \frac{7}{5}.$

9. Знайти абсолютну величину і напрям градієнта функції $u = \frac{1}{r}$, де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ у точці $M(x_0, y_0, z_0)$.

Відповідь. $\left| \text{grad} u \right|_M = \frac{1}{r_0^2}, \cos \alpha = -\frac{x_0}{r_0}, \cos \beta = -\frac{y_0}{r_0}, \cos \gamma = -\frac{z_0}{r_0}, r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$

10. Знайти y' , якщо $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = a^2$.

Відповідь. $y' = -\frac{x}{y}.$

11. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x + y + z = e^z$.

Відповідь. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + y + z - 1}.$

12. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, якщо $z = x + \arctg \frac{y}{z - x}$.

Відповідь. 1.

13. Знайти похідну функції f у точці M за заданим напрямом $\vec{l}$, якщо:

1) $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{l}$ — напрям зовнішньої нормалі до кола $x^2 + y^2 = 2x$ у точці M ;

2) $f(x; y) = \text{tg } xz, M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; 1\right)$ за напрямом градієнта функції $f(x; y) = \sin yz$ у точці M .

14. Знайти екстремум функцій.

1) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

2) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$;

3) $z = xy(a - x - y)$;

4) $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$;

5) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;

6) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$;

7) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;

8) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$;

9) $z = x^2 + (y - 1)^2$;

10) $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$;

11) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - y^2$;

12) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$;

13) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

- 14) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$;
- 15) $z = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$;
- 16) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;
- 17) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;
- 18) $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;
- 19) $z = \sin x \sin y \sin(x + y) (0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi)$;
- 20) $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a > 0, b > 0)$.

15. Знайти точки умовного екстремуму функцій.

- 1) $z = xy$, якщо $x + y = 1$;
- 2) $z = \frac{x}{3} + \frac{y}{3}$, якщо $x^2 + y^2 = 1$;
- 3) $z = x^2 + y^2$, якщо $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$;
- 4) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, якщо $x - y = \frac{\pi}{4}$;
- 5) $z = 5x^2 + 10Bxy + 4y^2$, якщо $x^2 + y^2 = 3$;
- 6) $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, якщо $ax^2 + b^2y^2 = c^2$.

16. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ у замкненій області, що обмежена прямими $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Відповідь. $z_{\text{найб}} = 16$, $z_{\text{найм}} = -\frac{16}{3}$.

17. Максимізувати виробничу функцію Кобба—Дугласа $P = KC^\alpha L^\beta$ за умови, що бюджет не перевищує $B = \omega L + rC$. Дати економічну інтерпретацію здобутих результатів.

Тема 12. Первісна функції. Невизначений інтеграл.

12.1 Визначення первісної функції

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на проміжку I , якщо:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{для всіх } x \in I$$

Властивості:

- Якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$, то $F(x) + C$ (де C — довільна константа) теж є первісною
- Будь-які дві первісні для однієї функції відрізняються на константу

12.2. Невизначений інтеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

де: $f(x)$ — підінтегральна функція

dx — диференціал змінної інтегрування

C — довільна константа інтегрування

12.3. Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
5. $\int e^x dx = e^x + C$;
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
11. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$;
12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$;
13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$;
14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;
- 15^a. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$;
16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;
- 16^a. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$;
17. $\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2} \ln|x^2+a| + C$;
18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$;
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$.

12.4. Основні правила інтегрування

- **Лінійність:**

$$\int (af(x) \pm bg(x))dx = a \int f(x)dx \pm b \int g(x)dx$$

де a, b — константи

- **Інтегрування частинами:**

$$\int u dv = uv - \int v du$$

- **Метод підстановки:**

Якщо $x = \varphi(t)$, то:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

12.5. Економічні додатки

- **Знаходження загальних витрат** за відомими граничними витратами:

$$TC = \int MC dQ + FC$$

Приклад практичного завдання:

Знайти загальні витрати підприємства, якщо граничні витрати задані функцією $MC = 3Q^2 - 4Q + 5$, а постійні витрати становлять 1000 грн.

Розв'язок:

$$TC = \int (3Q^2 - 4Q + 5)dQ = Q^3 - 2Q^2 + 5Q + C$$

При $Q = 0$: $TC = FC = 1000$, отже $C = 1000$

Остаточна формула: $TC = Q^3 - 2Q^2 + 5Q + 1000$

Методика розв'язання типових задач

Приклад. Первісні для функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ мають вигляд:

$$F_1(x) = \arctg x, \text{ бо } F_1'(x) = (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in R;$$

$$F_2(x) = \arctg x + C, \text{ бо } F_2'(x) = (\arctg x + C)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in R;$$

Приклади

1. Функція $F(x) = \sin x$ є первісною функції $f(x) = \cos x$ в інтервалі $(-\infty, +\infty)$, оскільки

$$(\sin x)' = \cos x.$$

2. $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ є первісною функції $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ в інтервалі $(-1,1)$, оскільки

$$(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

3. Знайдемо первісну для функції $3x^2 - 2x + 7$.

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 2x + 7) dx &= \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int 7 dx = 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + 7 \int dx = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 7x + C = x^3 + x^2 + 7x + C. \end{aligned}$$

4. Знайдемо первісну для функції $\frac{x^2 - x^3 + 1}{x^5}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - x^3 + 1}{x^5} dx &= \int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \\ &= \int x^{-3} dx - \int x^{-2} dx + \int x^{-5} dx = \left(\frac{1}{-2} \right) x^{-2} - \left(\frac{1}{-1} \right) x^{-1} + \left(\frac{1}{-4} \right) x^{-4} + C = \\ &= \frac{-2x^2 + 4x^3 - 1}{4x^4} + C. \end{aligned}$$

5. Знайдемо первісну для функції $5\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} \int (5\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}}) dx &= 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 3 \int x^{\frac{3}{5}} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= 5 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} - 3 \cdot \frac{1}{\frac{3}{5}+1} x^{\frac{3}{5}+1} - 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{10}{3} \sqrt{x^3} - \frac{15}{8} \sqrt[5]{x^4} - 4\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

6. Знайдемо первісну для функції $x^m \sqrt[m]{x}$, де m – деяке натуральне число.

$$\int x^m \sqrt[m]{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{m}} dx = \int x^{1+\frac{1}{m}} dx = \frac{m}{2m+1} x^{2+\frac{1}{m}} + C.$$

7. Знайдемо первісну для функції $\frac{1}{x^2 \sqrt[3]{x}}$.

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{7}{3}} dx = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} + C.$$

8. Знайдемо первісну для функції $\frac{2x^2\sqrt[3]{x} - 5x + 3x^2e^x - 4}{x^2}$.

$$\int \frac{2x^2\sqrt[3]{x} - 5x + 3x^2e^x - 4}{x^2} dx = \int (2x^{\frac{1}{3}} - 5x^{-1} + 3e^x - 4x^{-2}) dx =$$

$$\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} - 5\ln|x| + 3e^x + \frac{4}{x} + C.$$

Інтегрування розкладанням. Мета методу — розкласти підінтегральну функцію на такі доданки, інтеграли від яких відомі або їх простіше інтегрувати, ніж початкову підінтегральну функцію.

Приклад. $\int \frac{1 \cdot dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx =$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C.$$

Метод безпосереднього інтегрування. При безпосередньому інтегруванні використовується формула (7.7) варіанта заміни змінної, але саму заміну не записують (її роблять усно) при цьому використовують операцію внесення функції під знак диференціала. Отже, якщо $\int f(u)du = F(u) + C$, то $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$.

Зокрема, коли $\varphi(x)$ є лінійною функцією, тобто $\varphi(x) = ax + b$, дістаємо:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) \cdot d(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

$$d\varphi(x) = d(\varphi(x) + C).$$

Приклад. $\int \frac{\sin x dx}{1 + 3\cos x} = \int \frac{d(-\cos x)}{1 + 3\cos x} = -\frac{1}{3} \int \frac{d(3\cos x)}{1 + 3\cos x} =$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{d(1 + 3\cos x)}{1 + 3\cos x} = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3\cos x| + C.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

Розклавши підінтегральні функції за формулою

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

знайти такі інтеграли:

1561. $\int \frac{\sqrt{x} + x^2 e^x - 1}{x^2} dx.$

1562. $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

1563. $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx.$

1564. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$

1565. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

1566. $\int \frac{x}{x-1} dx.$

1567. $\int \frac{x^2}{x+2} dx.$

1568. $\int \frac{x^3}{x+1} dx.$

1569. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$

1570. $\int x\sqrt{2x+1} dx.$

1571. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx.$

1572. $\int \sin^4 x dx.$

1573. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$

1574. $\int (2^x + 3^x)^2 dx.$

1575. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$

1576. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$

1577. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

1578. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

Безпосереднім інтегруванням знайти інтеграли:

1579. $\int e^{\sin x} \cos x dx.$

1580. $\int \sin^2 x \cos x dx.$

1581. $\int \frac{dx}{x \ln^4 x}.$

1582. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$

1583. $\int (3 + 7x^2)^5 x dx.$

1584. $\int \frac{x^2 dx}{(4x^3 + 9)^4}.$

1585. $\int x e^{-x^2} dx.$

1586. $\int x^2 3^{x^3} dx.$

1587. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$

1588. $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

1589. $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}.$

1590. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx.$

1591. $\int \cos(e^x) e^x dx.$

1592. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx.$

1593. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx.$

1594. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}.$

1595. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^2 x}{1+x^2} dx.$

1596. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx.$

1597. $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx.$

1598. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

$$1599. \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$$

$$1601. \int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx.$$

$$1603. \int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 4)}.$$

$$1605. \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$1600. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 - \cos^2 x}} dx.$$

$$1602. \int \frac{\cos 2x dx}{1 + \sin x \cos x}.$$

$$1604. \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

$$1606. \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Знайти інтеграли, використовуючи найпростіші методи інтегрування:

$$1607. \int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$1608. \int \frac{x + \ln(x-2)}{x-2} dx.$$

$$1609. \int \frac{x^2 + \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$1610. \int \frac{\sin^2 x + \cos x}{\sin x} dx.$$

$$1611. \int \frac{\cos^3 x + \sin x}{\cos x} dx.$$

$$1612. \int \frac{x^2 - \ln(x+2)}{x+2} dx.$$

$$1613. \int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx.$$

$$1614. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

$$1615. \int \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x}{\sin 3x} dx.$$

$$1616. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$1617. \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$$

$$1618. \int \frac{\sqrt{x^2-1} + \operatorname{tg} \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} dx.$$

$$1619. \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx.$$

$$1620. \int \frac{dx}{x^6 + x^4}.$$

Тема 13. Основні методи інтегрування. Інтегрування раціональних функцій

13.1. Основні методи інтегрування

- **Метод безпосереднього інтегрування**

Застосовується, коли підінтегральна функція міститься в таблиці інтегралів.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

- **Метод підстановки (заміни змінної)**

Використовується, коли підінтегральна функція має складну будову.

Якщо $I = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$, то вводиться заміна $t = \varphi(x)$, і інтеграл набуває вигляду

$$I = \int f(t) dt.$$

- **Інтегрування частинами**

Якщо інтеграл має вигляд

$$I = \int u dv,$$

то застосовується формула

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

- **Інтегрування раціональних функцій**

Використовується для інтегралів виду

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

де $P(x)$ та $Q(x)$ — многочлени.

13.2. Алгоритм інтегрування раціональних функцій

Крок 1. Розділення правильного та неправильного дробу

Якщо степінь чисельника $P(x)$ вищий або дорівнює степеню знаменника $Q(x)$, виконується поділ многочленів:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де $S(x)$ — частка, $R(x)$ — залишок.

Крок 2. Розклад знаменника на множники

Типи множників:

- Лінійні: $(x - a)$
- Кратні лінійні: $(x - a)^k$
- Квадратичні: $(x^2 + px + q)$ (без дійсних коренів)

- Кратні квадратичні: $(x^2 + px + q)^m$

Крок 3. Розклад на прості дроби

Правила розкладу:

Тип множника	Форма доданків
$(x - a)$	$\frac{A}{x - a}$
$(x - a)^k$	$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}$
$(x^2 + px + q)$	$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$
$(x^2 + px + q)^m$	$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + px + q)^m}$

Приклад розкладу:

Для $\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)^2}$: $= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$

Крок 4. Знаходження коефіцієнтів

Метод 1: Підстановка значень

- Прирівняти вихідний дріб до розкладу
- Помножити обидві частини на спільний знаменник
- Підставити корені знаменника для швидкого обчислення

Метод 2: Порівняння коефіцієнтів

- Розкрити дужки в отриманому рівнянні
- Прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x

Приклад:

Для $\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$

- Привести до спільного знаменника та прирівняти чисельники:

$$3x + 5 = A(x + 2)^2 + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)$$
- Підставити $x = 1$:

$$8 = 9A \rightarrow A = \frac{8}{9}$$
- Підставити $x = -2$:

$$-1 = -3C \rightarrow C = \frac{1}{3}$$
- Порівняти коефіцієнти при x^2 :

$$0 = A + B \rightarrow B = -\frac{8}{9}$$

Крок 5. Інтегрування простих дробів

5.1 Для лінійних множників

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C$$

5.2 Для кратних лінійних множників

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k \neq 1)$$

5.3 Для квадратичних множників

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln |x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \right) + C$$

Крок 6. Збірка результату

Приклад повного розв'язку:

$$\int \frac{3x+5}{(x-1)(x+2)^2} dx = \frac{8}{9} \ln |x-1| - \frac{8}{9} \ln |x+2| - \frac{1}{3(x+2)} + C$$

Методика розв'язання типових задач

Метод інтегрування частинами

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du.$$

$$\text{Приклад. } \int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Іноколи доводиться інтегрування частинами застосовувати кілька разів, що ілюструє такий приклад.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx; \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx; \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) = \\ &= e^{3x} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9} x + \frac{2}{27} \right) + C. \end{aligned}$$

Далі наведено деякі типи інтегралів, при інтегруванні яких застосовують метод інтегрування частинами та показано вибір функцій $u(x)$ та $v(x)$:

$$\int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{\sin(ax) dx}{dv}; \int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{\cos(ax) dx}{dv}; \int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{e^{ax} dx}{dv}; \int \frac{\ln(ax)}{u} \cdot \frac{Q(x) dx}{dv}; \int \frac{\arctg x}{u} \cdot \frac{Q(x) dx}{dv}; \int \frac{\arcsin(ax)}{u} \cdot \frac{Q(x) dx}{dv}$$

де $P(x)$ — многочлен, $Q(x)$ — алгебраїчна функція, $a \in \mathbb{R}$.

Звичайно, не слід думати, що метод інтегрування частинами обмежується застосуванням тільки до інтегралів такого типу.

У деяких випадках після інтегрування частинами інтеграла одержується рівняння, із якого знаходять шуканий інтеграл.

Приклад.

$$\begin{aligned} G &= \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = u, \quad du = -\sin x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| = \\ &= e^x \cos x - \int -\sin x \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = u, \quad du = \cos x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| = \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) - G. \end{aligned}$$

Отже, дістали рівняння $G = e^x (\cos x + \sin x) - G$, із якого знаходимо $G = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$.

Метод підстановки (заміна змінної інтегрування).

Мета методу підстановки — перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)} &= \left| \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt; \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(t^2+1)} = 6 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \\ &= 6 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 6(t - \arctg t) + C = 6\sqrt[6]{x} - 6 \arctg \sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

Варіант заміни змінної інтегрування $\varphi(x) = t$ (7.7) зручний тоді, коли підінтегральний вираз можна розкласти на два множники: $f(\varphi(x))$ та $\varphi'(x)dx$.

Приклад.

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

Для деяких класів підінтегральних функцій розроблено стандартні заміни. Вибір зручної підстановки визначається знанням стандартних підстановок та досвідом.

Інтегрування раціональних функцій

Приклад.
$$\int \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 8} dx = \left| \begin{array}{l} x^4 + 2x \\ x^3 + 8 \end{array} \right| \frac{x^3 + 8}{x} \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 8} = x - \frac{6x}{x^3 + 8};$$

$$\begin{aligned}
\frac{6x}{x^3+8} &= \frac{6x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} = \\
&= \frac{A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2)}{x^3+8} \Rightarrow 6x = A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 6x = x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + 4A+2C; \\
&\left. \begin{array}{l} x^2 | 0 = A+B \\ x^1 | 6 = -2A+2B+C \\ x^0 | 0 = 4A+2C \\ x = -2 \Rightarrow -12 = 12A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{array} \right. = \int \left(x + \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-2x+4} \right) dx = \\
&= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3} = \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{t+3}{t^2+3} dt = \\
&= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{tdt}{t^2+3} - 3 \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln(t^2+3) - \\
&- \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \ln \sqrt{x^2-2x+4} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

Інтегруванням частинами знайти інтеграли:

1649. $\int x \sin x dx.$

1650. $\int x \cos 2x dx.$

1651. $\int x e^{-x} dx.$

1652. $\int x 5^x dx.$

1653. $\int \arcsin x dx.$

1654. $\int \operatorname{arctg} x dx.$

1655. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

1656. $\int x^2 e^{3x} dx.$

1657. $\int x \cos^2 x dx.$

1658. $\int \ln(x^2 + 1) dx.$

1659. $\int x^2 \ln(1+x) dx.$

1660. $\int e^{ax} \sin bx dx.$

1661. $\int \sin(\ln x) dx.$

1662. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx.$

1663. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$

1664. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx.$

1665. $\int \frac{x}{e^x} dx.$

1666. $\int x \arcsin x dx.$

1667. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$

1668. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

1669. $\int (2x-3) \sin \frac{x}{2} dx.$

1670. $\int x e^{-2x} dx.$

1671. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

1672. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

1673. $\int \ln^2 x dx.$

1674. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$

$$1675. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$1676. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1677. \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx.$$

$$1678. \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$$

$$1679. \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}.$$

$$1680. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}.$$

$$1681. \int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} dx.$$

Методом підстановки знайти інтеграли:

$$1682. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}.$$

$$1683. \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$1684. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1685. \int \frac{dx}{e^x + 1}.$$

$$1686. \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x + 1}}.$$

$$1687. \int \frac{\ln x dx}{x(1 - \ln^2 x)}.$$

$$1688. \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

$$1689. \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}.$$

$$1690. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x(x+1)}.$$

$$1691. \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b} + m}.$$

$$1692. \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx.$$

$$1693. \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}.$$

$$1694. \int x(2x+5)^{10} dx.$$

$$1695. \int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$1696. \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$1697. \int \frac{dx}{e^x + e^{2x}}.$$

$$1698. \int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$$

$$1699. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

$$1700. \int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)}.$$

Знайти інтеграли від раціональних функцій:

$$1723. \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$$

$$1724. \int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}.$$

$$1725. \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$$

$$1726. \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx.$$

$$1727. \int \frac{xdx}{x^4 - 3x^2 + 2}.$$

$$1728. \int \frac{x^4 dx}{(x+2)(x^2-1)}.$$

$$1729. \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$$

$$1730. \int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx.$$

$$1731. \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$$

$$1733. \int \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x}.$$

$$1735. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2 (x+1)}.$$

$$1737. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2 (x+4)^2}.$$

$$1739. \int \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$1741. \int \frac{x^2 dx}{1-x^4}.$$

$$1743. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}.$$

$$1745. \int \frac{(x^3 + 4x^2 - 2x + 1) dx}{x^4 + x}.$$

$$1747. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

$$1749. \int \frac{2x-3}{x^2-7x+12} dx.$$

$$1751. \int \frac{(x+1)^3 dx}{x^2-x}.$$

$$1753. \int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx.$$

$$1755. \int \frac{dx}{x^4-x^2}.$$

$$1757. \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx.$$

$$1759. \int \frac{dx}{x^3+8}.$$

$$1761. \int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2} dx.$$

$$1732. \int \frac{x^3-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx.$$

$$1734. \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx.$$

$$1736. \int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3}.$$

$$1738. \int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

$$1740. \int \frac{xdx}{x^3-1}.$$

$$1742. \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

$$1744. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$$1746. \int \frac{(7x-15)dx}{x^3-2x^2+5x}.$$

$$1748. \int \frac{dx}{(1+x^2)^4}.$$

$$1750. \int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx.$$

$$1752. \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx.$$

$$1754. \int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4} dx.$$

$$1756. \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx.$$

$$1758. \int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4} dx.$$

$$1760. \int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$$

$$1762. \int \frac{dx}{(x^2+9)^3}.$$

Тема 14. Інтегрування ірраціональних та тригонометричних виразів.

14.1. Інтегрування ірраціональних функцій

14.1.1 Підстановки для видалення коренів

Тип 1: $\sqrt[n]{ax+b}$

Заміна: $t = \sqrt[n]{ax+b}$

Приклад:

$$\int x\sqrt{2x+1} dx \Rightarrow t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2}$$

Тип 2: $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Заміна: $t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow x = \frac{dt^2-b}{a-ct^2}$

14.1.2 Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$

Методи:

- Тригонометрична підстановка (для $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$)
- Гіперболічні підстановки
- Піднесення до повного квадрата

Приклад для $\sqrt{a^2-x^2}$:

$$\int \sqrt{9-x^2} dx \Rightarrow x = 3\sin t \Rightarrow dx = 3\cos t dt$$

14.2. Інтегрування тригонометричних функцій

14.2.1 Спеціальні методи

а) Добуток синусів/косинусів

Використовувати формули перетворення добутку в суму:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

б) Ступеневі функції

Для $\int \sin^n x \cos^m x dx$:

- Якщо n або m непарне, використовувати підстановку
- Якщо обидва парні, застосовувати формули зниження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

с) Універсальна підстановка

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

14.3. Економічні додатки

14.3.1 Періодичні процеси

- **Моделювання сезонних коливань:**

$$\int (a \sin \omega t + b \cos \omega t) dt = -\frac{a}{\omega} \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t + C$$

(Використовується в аналізі попиту)

14.3.2 Нелінійна оптимізація

- **Інтегрування функцій витрат з ірраціональними компонентами:**

$$\int \sqrt{kx+c} dx = \frac{2}{3k} (kx+c)^{3/2} + C$$

(Для моделей з нелінійними граничними витратами)

Приклад економічного застосування:

Обчислення сукупних витрат з нелінійною функцією граничних витрат:

$$MC(x) = \sqrt{0.5x + 100} \Rightarrow TC = \int MC(x) dx = \frac{2}{3 \cdot 0.5} (0.5x + 100)^{3/2} + C$$

Методика розв'язання типових задач

Приклад.

Знайти інтеграл

$$I = \int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{(1+x^{\frac{1}{3}})x^{\frac{1}{2}}}$$

Показники степеня x дорівнюють $\frac{1}{3}$ та $\frac{1}{2}$, найменший їх спільний знаменник дорівнює 6.

Поклавши $x = z^6$, $dx = 6z^5 dz$, отримаємо

$$I = \int \frac{6z^5 dz}{(1+z^2)z^3} = 6 \int \frac{z^2 dz}{1+z^2} = 6z - 6 \arctg z + C.$$

Отже, повертаючись до змінної x , матимемо

$$I = 6\sqrt[6]{x} - 6 \arctg \sqrt[6]{x} + C.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

Позбавляючись від ірраціональності підстановкою типу $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, знайти такі інтеграли:

1804. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx.$

1805. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx.$

1806. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx.$

1807. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}.$

1808. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx.$

1809. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}.$

1810. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

1811. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$

1812. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}.$

1813. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$

1814. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$

1815. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}.$

1816. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$

1817. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}.$

1818. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx.$

1819. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}.$

1820. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx.$

1821. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$

За допомогою підстановок Ейлера знайти такі інтеграли:

1822. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$

1823. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$

1824. $\int x\sqrt{x^2-2x+2} dx.$

1825. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$

1826. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}.$

1827. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}.$

1828. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

1829. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

За допомогою тригонометричних підстановок знайти такі інтеграли:

1830. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1831. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx.$

1832. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx.$

1833. $\int \sqrt{1-x^2} dx.$

$$1834. \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$1835. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}.$$

$$1836. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$1837. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$1838. \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx.$$

$$1839. \int \frac{\sqrt{(9 - x^2)^3}}{x^6} dx.$$

$$1840. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}.$$

$$1841. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}.$$

$$1842. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$1843. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}}.$$

$$1844. \int \frac{dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}.$$

$$1845. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^5}}.$$

$$1846. \int \frac{x^2 dx}{(2 - x^2)^3}.$$

$$1847. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 10)^3}}.$$

$$1848. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Знайти інтеграли від диференціальних біномів:

$$1849. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1850. \int x^5 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2} dx.$$

$$1851. \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx.$$

$$1852. \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}.$$

$$1853. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$1854. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^2}}.$$

$$1855. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}.$$

$$1856. \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{1 + x^6}}.$$

$$1857. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}}.$$

$$1858. \int x^2 (1 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

$$1859. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 + x^2}}.$$

$$1860. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(2 + x^3)^5}}.$$

Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

$$1763. \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

$$1764. \int \sin^3 x \cos^3 x dx.$$

$$1765. \int (1 - \sin 2x)^2 dx.$$

$$1766. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx.$$

$$1767. \int \cos^7 x dx.$$

$$1768. \int \cos^4 x dx.$$

$$1769. \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$1770. \int (1 + 2 \cos x)^2 dx.$$

- 1771.** $\int \cos^2 5x dx.$
1773. $\int \sin^4 x dx.$
1775. $\int \sin^3 x \cos^5 x dx.$
1777. $\int \operatorname{ctg}^4 y dy.$
1779. $\int \sin at \cos btdt.$
1781. $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}.$
1783. $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}.$
1785. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} dx.$
1787. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}.$
1789. $\int \cos^5 x dx.$
1791. $\int \cos \frac{11}{3} x \cos 3x dx.$
1793. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx.$
1795. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$
1797. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
1799. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}.$
1801. $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}.$
1803. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$
1772. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$
1774. $\int \sin^5 x dx.$
1776. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx.$
1778. $\int \sin 5x \sin 6x dx.$
1780. $\int \frac{dx}{\sin x}.$
1782. $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}.$
1784. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$
1786. $\int \frac{\cos 2x - 3}{\cos^4 x \sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}} dx.$
1788. $\int (1 + 3 \cos 2x)^2 dx.$
1790. $\int \sin^2 3x dx.$
1792. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$
1794. $\int \operatorname{tg}^2 5x dx.$
1796. $\int (1 + 2 \cos x)^3 dx.$
1798. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$
1800. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$
1802. $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}.$

Тема 15. Визначений інтеграл. Економічне застосування визначеного інтегралу.

15.1. Основні поняття

Визначений інтеграл – це величина, що виражає площу криволінійної трапеції, обмеженої:

- графіком функції $y = f(x)$
- віссю абсцис Ox
- прямими $x = a$ та $x = b$

Формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

де $F(x)$ – первісна для $f(x)$

15.2. Властивості визначеного інтеграла

- **Лінійність:**

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

- 8. **Адитивність:**

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

- 6. **Порівняння:** Якщо $f(x) \leq g(x)$ на $[a, b]$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

15.3. Економічні застосування

15.3.1. Сукупний дохід та витрати

- **Граничний дохід (MR) → Сумарний дохід (TR):**

$$TR = \int_0^Q MR(q)dq$$

- **Граничні витрати (MC) → Сумарні витрати (TC):**

$$TC = \int_0^Q MC(q)dq + FC$$

15.3.2. Споживчий та виробничий надлишок

- **Споживчий надлишок:**

$$CS = \int_0^{Q^*} [D(q) - P^*] dq$$

- **Виробничий надлишок:**

$$PS = \int_0^{Q^*} [P^* - S(q)] dq$$

15.3.3. Коефіцієнт Джині

Для оцінки нерівномірності розподілу доходів:

$$G = 1 - 2 \int_0^1 L(x) dx$$

де $L(x)$ – крива Лоренца

15.3.4. Теперішня вартість доходу

Для безперервного потоку доходів $f(t)$:

$$PV = \int_0^T f(t) e^{-rt} dt$$

де r – ставка дисконтування

15.4. Приклад задачі

Задача: Функція граничного доходу $MR(q) = 100 - 2q$. Знайти сукупний дохід при обсязі виробництва 20 одиниць.

Розв'язок:

$$TR = \int_0^{20} (100 - 2q) dq = [100q - q^2]_0^{20} = 2000 - 400 = 1600$$

Практичні вправи:

- Обчисліть споживчий надлишок для функції попиту $D(q) = 50 - q$ при рівноважній ціні 30
- Знайдіть коефіцієнт Джині для кривої Лоренца $L(x) = x^2$
- Визначте сукупні витрати, якщо $MC(q) = 3q^2 - 4q + 5$ та постійні витрати $FC = 100$

Методика розв'язання типових задач

Метод підстановки у визначеному інтегралі

Приклад. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{l} x = t^2, \quad dx = 2tdt \\ \frac{x}{4} \bigg| \frac{9}{2} \\ t \bigg| \frac{2}{3} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2 \int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1} dt =$

$$= 2 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2(t - \ln|t+1|) \Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)) = 2\left(1 + \ln \frac{3}{4}\right).$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \sin \pi + \frac{1}{2} \cos \pi \right) - \left(0 \cdot \sin 0 + \frac{1}{2} \cos 0 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

Використовуючи метод підстановки, обчислити такі визначені інтеграли:

1886. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos x dx.$

1887. $\int_0^1 (1 + e^{3x})^2 e^{3x} dx.$

1888. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

1889. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

1890. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

1891. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$

1892. $\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

1893. $\int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}.$

1894. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x-1}}.$

1895. $\int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x+5}}.$

1896. $\int_5^8 \frac{\sqrt{x-4}}{x} dx.$

1897. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx.$

1898. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

1899. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$

1900. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$

1901. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$

$$1902. \int_0^1 \sqrt{2x + x^2} dx.$$

Інтегруванням частинами обчислити такі визначені інтеграли:

$$1903. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$$

$$1904. \int_1^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

$$1905. \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

$$1906. \int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$$

$$1907. \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$1908. \int_1^2 (2-x) e^{\frac{x}{2}} dx.$$

$$1909. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$1910. \int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$1911. \int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

$$1912. \int_0^{0.5} \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^2} dx.$$

Застосовуючи різні методи інтегрування, обчислити такі визначені інтеграли:

$$1913. \int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x} dx.$$

$$1914. \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$$

$$1915. \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$1916. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$$

$$1917. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$$

$$1918. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx.$$

$$1919. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$1920. \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$1921. \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$$

$$1922. \int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$1923. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$1924. \int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx.$$

$$1925. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$1926. \int_1^e \ln x dx.$$

$$1927. \int_0^{2\pi} x \sin 2x dx.$$

$$1928. \int_0^1 x e^{3x} dx.$$

$$1929. \int_0^1 \ln(x+1) dx.$$

$$1930. \int_0^1 (x-1) e^{-x} dx.$$

$$1931. \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x dx.$$

$$1932. \int_1^e x \ln x dx.$$

$$1933. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$1934. \int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$\mathbf{1935.} \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

$$\mathbf{1936.} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$\mathbf{1937.} \int_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}.$$

$$\mathbf{1938.} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\mathbf{1939.} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$$

$$\mathbf{1940.} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx.$$

Тема 16. Теорія диференціальних рівнянь. Рівняння з відокремленими змінними.

16.1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке містить шукану функцію та її похідні. Загальний вигляд диференціального рівняння:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

де $y = y(x)$ — шуканий розв'язок, а $y', y'', \dots, y^{(n)}$ — його похідні.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної, що входить у рівняння.

Приклад:
Рівняння

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

є диференціальним рівнянням другого порядку, оскільки найвища похідна — y'' .

16.2. Задача Коші

Формулювання: Знайти розв'язок диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє **початковій умові**:

$$y(x_0) = y_0$$

Де (x_0, y_0) — задана точка області визначення.

16.3. Рівняння з відокремленими змінними

Загальний вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

або

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Алгоритм розв'язання:

Відокремити змінні: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

Проінтегрувати обидві частини: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx + C$

16.4. Рівняння з відокремлюваними змінними

Загальний вигляд: $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$

Метод розв'язання:

- Привести до форми з відокремленими змінними
- Проінтегрувати обидві частини

Властивості

- Існування розв'язку задача Коші (теорема Пікара)
- Стабільність розв'язків:
Для економічних моделей важлива стійкість до малих змін параметрів.

Приклад застосування в економіці:

Моделювання динаміки капіталу: $\frac{dK}{dt} = sY - \delta K$

де K – капітал, Y – ВВП, s – норма заощадження, δ – норма амортизації.

Методика розв'язання типових задач

Диференціальне рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $2xdx + 2ydy = 0$.

Інтегруючи, дістаємо інтеграл ДР $x^2 + y^2 = C$.

Інтегральними кривими є концентричні кола з центром у початку координат.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = 2xy^2$.

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2, \quad \frac{dy}{y^2} = 2xdx, \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx$$

або

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C, \quad y = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

Вправи та задачі для аудиторної роботи:

Розв'язати наступні рівняння, там, де вказано, знайти розв'язок, що задовольняє початкову умову:

1. $x(1 + y^2) + y(1 + x^2)y' = 0, \quad y(1) = 2;$

2. $\sqrt{y^2 + 1} = xyu';$

3.
$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \\ y(2) = 0; \end{cases}$$
4. $y' = xy^2 + 2xy;$
5.
$$\begin{cases} e^x - (1 + e^x)yy' = 0, \\ y(0) = 1; \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} y' = (2 - y)\operatorname{tg} x, \\ y(0) = -1; \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} y'x^2 - 1 = \cos 2y, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \frac{5\pi}{4}; \end{cases}$$
8. $y' + y = 2x + 1;$
9. Схематично зобразити графіки розв'язків рівняння $y' = y^2 + y$.

Домашнє завдання:

Розв'язати наступні рівняння, там, де вказано, знайти розв'язок, що задовольняє початкову умову:

1. $xy + (1 + x)y' = 0;$
2.
$$\begin{cases} xy' + y = y^2, \\ y(1) = \frac{1}{2}; \end{cases}$$
3. $2x^2yy' + y^2 = 2;$
4. $y' = \cos(y - x);$
5. $y' = y + 2x - 3;$
6.
$$\begin{cases} (x + 2y)y' = 1, \\ y(0) = -1; \end{cases}$$
7. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1};$

8.
$$\begin{cases} 3y^2 y' + 16x = 2xy^3, \\ y(x) - \text{обмежений при } x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Схематично зобразити графіки розв'язків рівнянь:

9. $y' = y^2 - 1;$

10. $y' = y^2 - 3y + 2.$

Тема 17. Однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Лінійні рівняння першого порядку та методи їх розв'язування.

17.1 Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння виду $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ називається однорідним, де f — неперервна функція одного аргументу. Метод розв'язання підстановка: $y = v \cdot x$, де $v = v(x)$

17.2 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійне однорідне рівняння: $y' + P(x)y = 0$

Лінійне неоднорідне рівняння: $y' + P(x)y = Q(x)$

17.2.1. Для лінійних однорідних рівнянь

Записуємо рівняння у вигляді: $\frac{dy}{dx} = -P(x)y$

Розділяємо змінні: $\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$

Знаходимо загальний розв'язок: $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

17.2.2. Метод Лагранжа (варіації сталої) для лінійних неоднорідних рівнянь

Знаходимо розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = Ce^{-\int P(x)dx}$

Замінюємо сталу C на функцію $C(x)$

Підставляємо $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ у вихідне рівняння

Знаходимо $C(x)$: $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$

Загальний розв'язок: $y = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)$

17.2.3. Метод Бернуллі для лінійних неоднорідних рівнянь

Шукаємо розв'язок у вигляді $y = u(x)v(x)$

Підставляємо у рівняння: $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$

Вибираємо $v(x)$ так, щоб: $v' + P(x)v = 0 \Rightarrow v = e^{-\int P(x)dx}$

Розв'язуємо рівняння для $u(x)$: $u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$

Методика розв'язання типових задач

Однорідне диференціальне рівняння

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = \frac{y}{x}$.

Підставимо $y = ux$, тоді $y' = u'x + u$ дістанемо ДР і його загальний розв'язок $u'x + u = u$, $u'x = 0$, $u = C$, $y = Cx$.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = \frac{y^2}{x^2}$.

Візьмемо $y = ux$ і одержимо ДР для функції u

$$u'x + u = u^2, \quad x \frac{du}{dx} = u^2 - u, \quad \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи ДР з відокремленими змінними, знаходимо загальний розв'язок:

$$\int \frac{du}{u^2 - u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln \left| \frac{u-1}{u} \right| = \ln x + \ln C, \quad \frac{u-1}{u} = Cx, \quad u = \frac{1}{1-Cx}, \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{1-Cx}, \quad y = \frac{x}{1-Cx}.$$

Лінійні диференціальні рівняння

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР

$$xy' + y = x^2.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді добутку функцій $y = u \cdot v$. Підставляючи, дістаємо рівняння

$$x(u'v + uv') + uv = x^2.$$

Зведемо це рівняння до системи ДР:

$$\begin{cases} xuv' + uv = 0, \\ xu'v = x^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння $xv' + v = 0$ знаходимо:

$$v' = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = x^{-1}.$$

Із другого рівняння маємо:

$$xu'x^{-1} = x^2, \quad u' = x^2, \quad u = \int x^2 dx, \quad u = \frac{x^3}{3} + c.$$

Знаходимо розв'язок:

$$y = uv, \quad y = \left(\frac{x^3}{3} + c \right) x^{-1}.$$

Приклад. Метод Лагранжа часто називають *методом варіації довільної сталої*.

Знайдемо за методом Лагранжа розв'язок неоднорідного лінійного ДР

$$y' + xy = 1 + x^2.$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного ДР: $y' + xy = 0$, $\frac{dy}{dx} = -xy$, $\frac{dy}{y} = -x dx$,

$$\int \frac{dy}{y} = -\int x dx, \quad \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln C, \quad y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Шукаємо розв'язок неоднорідного ДР у вигляді $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Підставивши в неоднорідне ДР, дістанемо

$$C'_{(x)} e^{-\frac{x^2}{2}} + C_{(x)} e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) + x C_{(x)} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + x^2,$$

або

$$C'_{(x)} = (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}, \quad C(x) = \int (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Використаємо формулу інтегрування частинами:

$$\int e^{\frac{x^2}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{\frac{x^2}{2}}, \quad du = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = xe^{\frac{x^2}{2}} - \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Отже, остаточно дістанемо загальний розв'язок ДР:

$$C(x) = \int e^{\frac{x^2}{2}} dx + \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx = xe^{\frac{x^2}{2}} + C_1,$$

$$y(x) = \left(xe^{\frac{x^2}{2}} + C_1 \right) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad y(x) = x + C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

Вправи та задачі для аудиторної роботи:

Розв'язати наступні рівняння:

$$1. \quad y' = \frac{y \cos \frac{y}{x} - x}{x \cos \frac{y}{x}};$$

$$2. \quad y' = \frac{y-x}{y+x};$$

$$3. \quad y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x};$$

4. Знайти криву, що проходить через точку $(1, 1)$ і для якої відстань від будь-якої дотичної до точки $(0, 0)$ дорівнює абсцисі точки дотику.

5. Довести, що інтегральні криві рівняння $y' = \frac{-2x(x^2 + y^2) + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{2y(x^2 + y^2) + xy \sqrt{x^2 + y^2}}$ є

замкненими лініями, що охоплюють початок координат.

Розв'язати наступні рівняння, якщо потрібно, знайти розв'язок, що задовольняє початкові умови. Дати відповідь на питання:

$$1. \quad y' - \frac{2}{x}y = 2x^3;$$

$$2. \quad \begin{cases} (2x+1)y' = 4x+2y, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Знайти проміжок існування розв'язку.

$$3. \quad y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Знайти розв'язок для якого $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1$.

$$4. \quad y' \sin 2x = 2(y + \cos x).$$

Знайти розв'язок, що обмежений на $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, обчислити $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y(x)$.

$$5. \quad y(x) = \int_0^x y(t) dt + x + 1;$$

$$6. \quad y' = \frac{y}{3x - y^2};$$

$$7. \quad y' + 2y = e^x y^2;$$

$$8. \quad xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y;$$

$$9. \quad y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2};$$

$$10. \quad y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x;$$

$$11. \quad y' = 2y \cos^2 x - \sin x.$$

Довести, що існує єдиний 2π -періодичний розв'язок. Знайти цей розв'язок.

Домашнє завдання:

Розв'язати наступні рівняння, там, де вказано, знайти розв'язок, що задовольняє початкову умову:

$$1. (x + 2y)dx - xdy = 0;$$

$$2. 2x^3y' = y(2x^2 - y^2);$$

$$3. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x};$$

$$4. xy' = y - x e^{\frac{y}{x}};$$

$$5. (2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0;$$

$$6. (x + 4y)y' = 2x + 3y - 5;$$

$$7. x^3(y' - x) = y^2;$$

$$8. 2x^2y' = y^3 + xy;$$

$$9. 2y' + x = 4\sqrt{y};$$

10. Знайти криву, в якій точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис однаково віддалена і від точки дотику і від початку координат.

Розв'язати рівняння:

$$1. y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$$

$$2. y' = y + \frac{e^x}{x};$$

$$3. (xy' - 1) \ln x = 2y;$$

$$4. (2e^y - x)y' = 1;$$

$$5. (x + 1)(y' + y^2) = -y;$$

$$6. xy^2y' = x^2 + y^3;$$

$$7. \int_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int_0^x y(t)dt;$$

$$8. x^2y' + xy + x^2y^2 = 4;$$

Тема 18. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку. Методи їх вирішення.

Означення

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння вигляду:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

де $a_i(x)$ та $f(x)$ — деякі задані функції, а $y^{(k)}$ позначає k-ту похідну функції $y(x)$.

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння називається **однорідним**, у протилежному випадку — **неоднорідним**.

Основні властивості

- **Принцип суперпозиції:** якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — розв'язки однорідного рівняння, то їх лінійна комбінація $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ також є розв'язком.
- **Загальний розв'язок неоднорідного рівняння** знаходиться як сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння.

Методи розв'язку

1. Метод знаходження загального розв'язку однорідного рівняння

Розглянемо однорідне рівняння:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

- **Якщо коефіцієнти сталі** ($a_i = \text{const}$), то його розв'язують за допомогою характеристичного рівняння:

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Корені цього рівняння визначають вигляд розв'язку.

- **Якщо коефіцієнти змінні**, використовують методи:
 - варіації параметрів,
 - інтегруючого множника,
 - редукції порядку.

2. Метод варіації довільних сталих

Цей метод застосовується для знаходження часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Якщо загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n,$$

то для знаходження часткового розв'язку функції C_i розглядаються як невідомі змінні.

3. Метод невизначених коефіцієнтів

Застосовується, коли $f(x)$ має спеціальний вигляд (наприклад, поліном, експонента або тригонометрична функція). Частковий розв'язок шукається у вигляді функції аналогічного типу, а коефіцієнти знаходяться підстановкою в рівняння.

Методика розв'язання типових задач

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Згідно описаної вище процедури виписуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Характеристичне рівняння має два різні дійсні корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, які породжують фундаментальну систему розв'язків заданого лінійного однорідного рівняння $\{e^{1 \cdot x}, e^{2 \cdot x}\}$ (випадок 1).

Отже, загальний розв'язок даного диференціального рівняння $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, $C_1, C_2 \in R$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + y = 0$.

Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ має пару комплексно спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \pm i$, яким відповідає система з двох лінійно незалежних розв'язків вихідного рівняння $\{\cos x, \sin x\}$ – фундаментальна система розв'язків цього рівняння (випадок 2). Тому $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $C_1, C_2 \in R$ – загальний розв'язок рівняння.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$.

Випишемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0,$$

$$\lambda^3 + 1 - 3(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0,$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) - 3(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0,$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0,$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i.$$

Отже, $\{e^{-x}, e^{2x} \cos 3x, e^{2x} \sin 3x\}$ – фундаментальна система розв'язків (випадок 2), а

$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x$, $C_1, C_2, C_3 \in R$ – загальний розв'язок вихідного рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Характеристичне рівняння для рівняння з цього прикладу $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0$ має корінь $\lambda = 1$ кратності 3. Тому згідно випадку 3 фундаментальна система розв'язків має вигляд $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$. Тоді $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$, $C_1, C_2, C_3 \in R$ – загальний розв'язок рівняння.

Зауваження. До рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною $x = e^t$ (при $x > 0$) зводиться **рівняння Ейлера**.

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0.$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Після впровадження заміни $x = e^t$ потрібно перерахувати похідні:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dt}(y') \cdot e^{-t} = \frac{d}{dt}(y'_t \cdot e^{-t}) \cdot e^{-t} = (y''_t - y'_t) \cdot e^{-2t}.$$

Тоді підставляючи в рівняння, дійсно отримуємо рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$e^{2t}(y'' - y'_t) \cdot e^{-2t} - 2e^t y'_t \cdot e^{-t} + 2y = 0 \Leftrightarrow y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Далі розв'язання проводиться за вище наведеною схемою: виписуємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, знаходимо його корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ і будуємо фундаментальну систему розв'язків $\{e^t, e^{2t}\}$. Повертаючись до незалежної змінної x , отримуємо фундаментальну систему розв'язків $\{x, x^2\}$, а отже, і загальний розв'язок заданого рівняння Ейлера

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^2, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів

Розв'язати рівняння:

$$1. \quad y''' - 3y'' + 2y' = 0;$$

2. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0;$
3. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0;$
4. $y^{(4)} + 4y = 0;$
5. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0;$
6. $y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0;$
7. $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0;$
8. $x^2 y'' - xy' + y = 0;$
9. $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0;$
10. $x^2 y'' + xy' - 4y = 0.$

Розв'язати рівняння:

- | | |
|---------------------------|----------------------------------|
| 1. $y'' + y' - 2y = 0;$ | 14. $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0;$ |
| 2. $y'' + 4y' + 3y = 0;$ | 15. $y^V - 10y''' + 9y' = 0;$ |
| 3. $y'' - 2y' = 0;$ | 16. $y^{IV} + 2y'' + y = 0;$ |
| 4. $2y'' - 5y' + 2y = 0;$ | 17. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;$ |
| 5. $y'' - 4y' + 5y = 0;$ | 18. $y''' - y'' - y' + y = 0;$ |
| 6. $y'' + 2y' + 10y = 0;$ | 19. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0;$ |
| 7. $y'' + 4y = 0;$ | 20. $y^V + 8y''' + 16y' = 0;$ |
| 8. $y''' - 8y = 0;$ | 21. $y''' - 3y' + 2y = 0;$ |
| 9. $y^{IV} - y = 0;$ | 22. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0;$ |
| 10. $y^{IV} + 4y = 0;$ | 23. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0;$ |
| 11. $y^{IV} + 64y = 0;$ | 24. $x^2 y'' - xy' - 3y = 0;$ |
| 12. $y'' - 2y' + y = 0;$ | 25. $x^3 y''' + xy' - y = 0;$ |
| 13. $4y'' + 4y' + y = 0;$ | 26. $x^2 y''' = 2y'.$ |

Література

1. Математика для економістів. Частина 1. Векторний та диференціальний аналіз. Розрахункова робота [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітніми програмами: «Економічна кібернетика», «Міжнародна економіка», «Економіка бізнес-підприємства» спеціальності 051 Економіка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. Фартушний І. Д. - Електронні текстові дані (1 файл). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. - 59 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/49549>
2. Математика для економістів. Частина 2. Інтегральне числення та ряди: конспект лекцій [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітніми програмами: «Економічна аналітика», «Міжнародна економіка», «Економіка і бізнес» спеціальності 051 Економіка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І.Д. Фартушний, І.С. Лазаренко, С.М. Кириєнко – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 121 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/65490>
3. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
4. Грисенко М. В. Вища математика для економістів : підручник / М. В. Грисенко. — К. : ВПЦ "Київський університет", 2022. — 687 с
5. Лютий О. І., Макаренко О. І. Збірник задач з вищої математики: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2003. — 305 с.