

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. М. Бондаренко

Основи теорії кіл

Частина 1

Підручник

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальністю 172 Електронні комунікації та радіотехніка

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2024

УДК 621.372 (075.8)
В19

Автор: *Бондаренко Віктор Миколайович*, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: *Антонов В.К.*, д-р техн. наук, проф.,
проф. кафедри комп'ютерних систем та мереж
Національного авіаційного університету
Гільгурт С.Я., д-р техн. наук, ст. наук. співр., зав. відділом
математичного та економетричного моделювання Інституту
проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України

Відповідальний
редактор *Кучернюк П.В.*, канд. техн. наук, доц.,
доц. кафедри конструювання електронно-обчислювальної
апаратури факультету електроніки КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 9 від 11.11.2024 р.)*

Бондаренко В. М.

В19 Основи теорії кіл. Частина 1 [Електронний ресурс] : підруч. для здобувачів
ступеня бакалавра за спец. 172 Електронні комунікації та радіотехніка /
В. М. Бондаренко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ
: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 131 с.

В підручнику викладено матеріал, що охоплює основні елементи електричних і електронних кіл, основні закони та теореми теорії кіл, метод вузлових напруг, як універсальний метод аналізу, теорію схемних функцій та чотириполюсника. Підручник містить відомості, що використовуються як безпосередньо в теоретичному курсі дисципліни «Основи теорії кіл. Частина 1», так і для підготовки до практичних занять, лабораторних робіт і самостійної роботи студентів. Значну увагу приділено розгляду прикладів, що ілюструють теоретичний матеріал, запропоновано запитання для самоперевірки та контролю засвоєння знань. Підручник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 172 «Електронні комунікації та радіотехніка», буде також корисним для інженерно-технічних спеціалістів.

УДК 621.372 (075.8)

Реєстр. № П 24/25-004. Обсяг 5,7 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© В. М. Бондаренко, 2024
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНИХ КІЛ.....	7
1.1. Основні поняття та визначення.....	7
1.2. Незалежні джерела (джерела сигналів).....	9
1.3. Пасивні елементи лінійних кіл.....	11
1.4. Залежні (керовані) джерела	21
1.5. ВАХ пасивних елементів в області комплексної частоти	23
1.5.1. Перетворення Лапласа.....	23
1.5.2. Застосування перетворення Лапласа до рівнянь ВАХ	25
1.5.3. Приклади застосування перетворення Лапласа	26
Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань.....	27
2. ОСНОВНІ ЗАКони І ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ КІЛ.....	30
2.1. Аналіз кола. Основні поняття	30
2.2. Основні закони теорії кіл.....	32
2.2.1. Перший закон Кірхгофа	32
2.2.2. Другий закон Кірхгофа.....	33
2.2.3. Приклади формування та розв'язання рівнянь	34
2.3. Теореми лінійних кіл.....	41
2.3.1. Теорема заміщення	41
2.3.2. Теорема накладання (принцип суперпозиції)	42
2.3.3. Теорема про еквівалентний генератор.....	43
2.3.4. Приклади застосування теорем лінійних кіл.....	46
Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань.....	48
3. МЕТОД ВУЗЛОВИХ НАПРУГ	51
3.1. Топологічні рівняння та рівняння елементів	52
3.1.1. Матриця інцидентії (з'єднань)	52
3.1.2. Закони Кірхгофа в матричному вигляді	55
3.1.3. Рівняння елементів у матричному вигляді	56
3.2. Формування системи вузлових рівнянь	58
3.3. Методика формування системи вузлових рівнянь.....	63
3.3.1. Правило врахування параметрів пасивних елементів	63

3.3.2. Правило врахування параметра незалежного джерела струму	64
3.3.3. Правило врахування параметра незалежного джерела напруги	67
3.3.4. Правило врахування параметра джерела струму, керованого напругою	70
3.3.5. Правило врахування параметра джерела напруги, керованого напругою	72
3.3.6. Правило врахування параметра джерела напруги, керованого струмом	76
3.3.7. Правило врахування параметра джерела струму, керованого струмом	78
Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	80
4. СХЕМНІ ФУНКЦІЇ (ФУНКЦІЇ КОЛА)	82
4.1. Визначення схемних функцій для двополюсника та чотиріполюсника	82
4.2. Визначення схемних функцій для схем із багатьма входами (виходами)	85
4.3. Властивості схемних функцій	88
4.3.1. Нулі та полюси схемних функцій	88
4.3.2. Зв'язок схемної функції з диференціальним рівнянням кола	90
4.4. Частотні характеристики	92
4.4.1. Частотні характеристики на базі схемних функцій	92
4.4.2. Аналітичний спосіб обчислення частотних характеристик	95
4.4.3. Геометрична інтерпретація частотних характеристик	96
4.5. Часові характеристики	99
4.5.1. Елементарні сигнали для отримання часових характеристик	100
4.5.2. Перехідна та імпульсна характеристики	103
4.6. Основи теорії чутливості	108
Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	113
5. ТЕОРІЯ ЧОТИРИПОЛЮСНИКА	115
5.1. Схемні функції чотиріполюсника з навантаженням	115
5.2. Системи параметрів чотиріполюсника	119
5.3. Схеми заміщення чотиріполюсника	122
5.4. Чотиріполюсник з індуктивним зв'язком	123
Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	126
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК	129
Рекомендована (Р) література	129
Використана (В) література	129
ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ	131

ВСТУП

Проведення розрахунків, необхідних для розуміння процесів в електричних і електронних колах, базується на застосуванні основних законів і теорем теорії кіл. Зростання складності кіл призвело до формалізації складання рівнянь, що описують процеси в них. В результаті розроблено методи аналізу кіл в основних режимах роботи, які реалізовані у сучасному програмному забезпеченні. Застосування програмних засобів суттєво спрощує аналіз, але потребує розуміння: рівнянь, що описують основні елементи кіл, їхньої відмінності від рівнянь реальних елементів, топологічних рівнянь, що описують з'єднання елементів, а також особливостей режимів роботи кіл та їх характеристик у різних режимах. Важливо вміти застосовувати результати аналізу кіл, спрямованого на отримання їх основних характеристик, для подальшого приведення цих характеристик у відповідність до технічних вимог.

Підручник з дисципліни «Основи теорії кіл. Частина 1» є першим з групи підручників/навчальних посібників з дисциплін схемотехнічного напрямку спеціальності 172 «Електронні комунікації та радіотехніка». Дисципліна «Основи теорії кіл. Частина 1» викладається здобувачам ступеня бакалавра за освітньою програмою підготовки «Інформаційно-обчислювальні засоби радіoeлектронних систем» і спрямована на здобуття знань основ теорії електричних і електронних кіл, характеристик кіл в основних режимах їх роботи, які необхідні для вирішення завдань моделювання та схемотехнічного проектування радіoeлектронних пристроїв.

Підручник містить матеріали, що використовуються як безпосередньо в теоретичному курсі дисципліни «Основи теорії кіл. Частина 1», так і для підготовки до практичних занять, лабораторних робіт і самостійної роботи студентів. Підручник включає п'ять розділів, що охоплюють основні елементи електричних і електронних кіл, основні закони та теореми теорії кіл, метод вузлових напруг, як універсальний метод аналізу, теорію схемних функцій та чотиріполюсника. Основне призначення підручника – навчити студентів

застосовувати методи аналізу кіл, що відповідають основним режимам їх роботи, інтерпретувати результати аналізу, вносити корективи до еквівалентних схем із метою отримання результатів, які задовольняють умовам фізичної реалізації.

Внаслідок вивчення теоретичних положень і розгляду прикладів студент повинен навчитися складати рівняння, що описують процеси, які відбуваються в електричних і електронних колах, розв'язувати ці рівняння для дослідження перехідних і сталих процесів, визначати схемні функції і розраховувати частотні та часові характеристики лінійних кіл на їх основі.

Підручник призначений для студентів спеціальності 172 «Електронні комунікації та радіотехніка».

1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНИХ КІЛ

1.1. Основні поняття та визначення

Коло (або схема – графічне зображення кола) є сукупністю взаємно з'єднаних елементів [Р:1, В:1]. Поняття «коло» може представляти як реальне з'єднання провідниками резисторів, конденсаторів та інших елементів, так і ідеалізовану модель, створену на основі певних припущень. Лінійні кола – це кола, в яких параметри елементів не залежать від напруги (струму). Модель кола дає змогу отримати результати розрахунку схожі на результати вимірів, проведених на лабораторному зразку. Надалі розглядаємо кола саме в розумінні їх моделей, пам'ятаючи, що останні важливі як засоби для розробки реальних пристроїв. Поняття «схема» підкреслює в основному взаємозв'язок, а не функціональне призначення складових елементів.

Напруга (застосовуються умовні позначення: u , U , V , E) [В:2] між двома точками – енергія (робота), витрачена на перенесення одиничного додатного заряду з точки з низьким потенціалом в точку з високим потенціалом (перша точка має від'ємний потенціал в порівнянні з другою точкою – рис. 1.1).

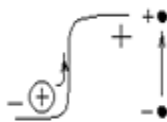


Рисунок 1.1 – Напруга між точками та її напрямок

Енергія, яка виділяється, коли одиничний заряд переходить від високого потенціалу до низького також є напругою або різницею потенціалів чи електрорушійною силою (ЕРС). Застосовують наступні одиниці вимірювання напруги: вольт (В), мікровольт ($1\text{мкВ}=1\cdot 10^{-6}\text{ В}$), мілівольт ($1\text{мВ}=1\cdot 10^{-3}\text{ В}$), кіловольт ($1\text{кВ}=1\cdot 10^3\text{ В}$).

Для перенесення заряду в 1 кулон (Кл) між точками, які мають різницю потенціалів 1 В, необхідно виконати роботу 1 джоуль (кулон слугує одиницею

вимірювання електричного заряду і дорівнює абсолютній величині заряду приблизно $6.242 \cdot 10^{18}$ електронів).

Струм (застосовуються умовні позначення: i , I , J) [В:2] – швидкість руху електричного заряду у точці. Застосовують наступні одиниці вимірювання струму: ампер (А), міліампер ($1\text{mA}=1 \cdot 10^{-3}\text{A}$), мікроампер ($1\text{мкA}=1 \cdot 10^{-6}\text{A}$), наноампер ($1\text{nA}=1 \cdot 10^{-9}\text{A}$), пікоампер ($1\text{пA}=1 \cdot 10^{-12}\text{A}$). Струм в 1 А створюється перенесенням заряду величиною 1 Кл за проміжок часу 1 с. В галузі електроніки вважають, що струм в елементах кола спрямований від «+» до «-», хоча електрони рухаються в протилежному напрямку.

Таким чином, напруга завжди вимірюється між двома точками кола, а струм протікає через точку або елемент кола. Коли йдеться про напругу в якій-небудь точці кола, мають на увазі напругу між даною точкою і «землею» (обраною точкою з нульовим потенціалом, яка позначається  або $\equiv 0$). Напруга виникає шляхом різного роду дії на електричні заряди в таких приладах як батареї (електрохімічні реакції), генератори (взаємодія магнітних сил), сонячні батареї (ефект енергії фотонів) і т.д. Струм виникає в результаті дії напруги, прикладеної між точками кола [В:2].

В електротехніці, електроніці, радіотехніці використовують постійний і змінний струми. У змінного струму змінюються як значення, так і напрямки. Постійний струм можна вважати частковим випадком змінного. Простою формою змінного струму є гармонічне коливання. В електроніці важливими є імпульсні струми, які різко змінюються за відносно короткий час.

Одним з базових законів теорії кіл є закон Ома [В:2], який визначає залежність між струмом і напругою, а саме: струм прямо пропорційний напрузі і обернено пропорційний електричному опору. Застосовують наступні одиниці вимірювання електричного опору: ом (Ом), кілоом (кОм), мегаом (МОм).

Зазвичай в елементах кола задають умовний напрямки струму, який може співпадати і не співпадати з напрямком напруги. Тут і в подальшому приймаємо, що напрямки струму і напруги протилежні, як показано на рис. 1.2.

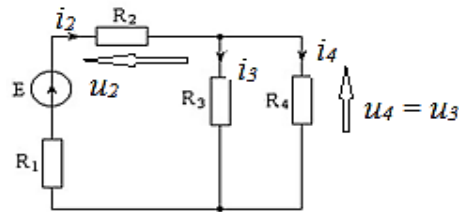


Рисунок 1.2 – Умовні напрямки струмів і напруг

Поведінку кіл розглядають саме під дією сигналів [Р:2, В:2, 3]. Сигналом називають величину фізичного носія інформації. В якості носія можуть виступати струм, напруга, магнітний потік і т.п. Якщо, наприклад, носієм інформації є напруга, то сигнал – це напруга, яка певним чином змінюється в часі. Подібно до кіл сигнали описують моделями і надалі розглядаємо моделі сигналів. За допомогою осцилографа можна спостерігати реальну напругу, яка змінюється в часі.

1.2. Незалежні джерела (джерела сигналів)

Джерело напруги – джерело електричної енергії, яке на зовнішніх клеммах має напругу, незалежну від струму i , що споживається від даного джерела [Р:1, В:2, 4]. Джерело напруги має внутрішній опір R_0 , послідовно з'єднаний з ідеальною ЕРС (E), як показано на рис. 1.3.

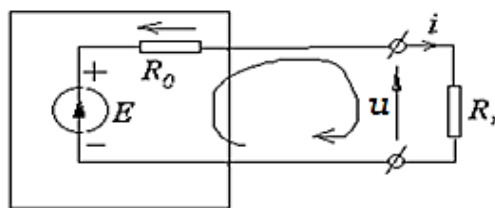


Рисунок 1.3 – Джерело напруги з внутрішнім опором R_0

За умови підключення до джерела напруги зовнішнього кола з опором R_n (опором навантаження), виникне струм i , що потече через внутрішній опір джерела R_0 , на якому виникне падіння напруги тим більше, чим більший струм, спожитий зовнішнім колом. Напруга на клеммах джерела за другим законом Кірхгофа [В:2, 4]:

$$E - iR_0 - u = 0 \quad (1.1)$$

дорівнює

$$u = E - iR_0. \quad (1.2)$$

Таким чином, напруга на клеммах джерела не залежить від струму лише тоді, коли внутрішній опір джерела близький до нуля. Ідеальним джерелом напруги називають джерело з $R_0 = 0$. Такі джерела не існують, але якщо виконується нерівність

$$R_H / R_0 > 10, \quad (1.3)$$

джерело можна вважати джерелом напруги. Вираз (1.2) називають вольт-амперною характеристикою (ВАХ) джерела напруги.

Джерело струму – джерело електричної енергії, яке постачає у коло струм, незалежний від падіння напруги на цьому колі, тобто струм, незалежний від електричного опору R_H кола (рис. 1.4) [Р:1, В:2, 4].

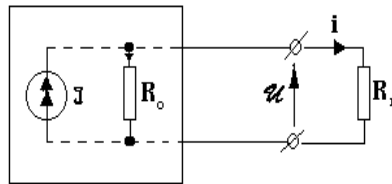


Рисунок 1.4 – Джерело струму з внутрішнім опором R_0

За першим законом Кірхгофа [В:2, 4]:

$$J - (u/R_0) - i = 0 \quad (1.4)$$

струм i у колі, підключеному до джерела струму

$$i = J - uG_0 \quad (1.5)$$

($G_0 = \frac{1}{R_0}$ – внутрішня провідність [В:2] джерела з одиницею виміру сіменс (См)),

не залежить від напруги лише в тому випадку, коли опір R_H дуже малий в порівнянні з внутрішнім опором джерела R_0 . Це можливо, якщо внутрішня провідність джерела близька до нуля ($G_0 = 0$), а саме джерело вважають ідеальним джерелом струму. Такі джерела не існують, але якщо виконується нерівність

$$R_0/R_H > 10, \quad (1.6)$$

джерело можна вважати джерелом струму. Вираз (1.5) називають вольт-амперною характеристикою джерела струму.

Схемне перетворення джерела струму в джерело напруги та навпаки

Можна отримати умову еквівалентності по відношенню до зовнішніх клем джерела напруги з послідовним опором R_0 і джерела струму з паралельною провідністю G_0 . Прирівнявши струм джерела напруги, виражений з (1.2)

$$i = (E/R_0) - (u/R_0), \quad (1.7)$$

до струму джерела струму з (1.5), отримаємо для джерела струму, еквівалентного джерелу напруги

$$J = E/R_0, \quad G_0 = 1/R_0. \quad (1.8)$$

Аналогічно, виразимо напругу джерела струму з (1.5)

$$u = (J/G_0) - (i/G_0) \quad (1.9)$$

і, прирівнявши її до напруги джерела напруги з (1.2), отримаємо для джерела напруги, еквівалентного джерелу струму

$$E = J/G_0, \quad R_0 = 1/G_0. \quad (1.10)$$

Взаємне схемне перетворення джерел проілюстровано на рис. 1.5.

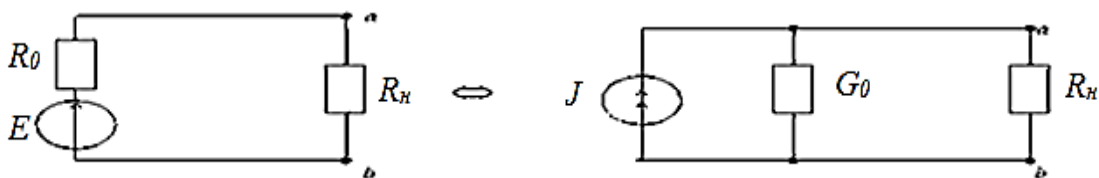


Рисунок 1.5 – Схемне перетворення джерел з навантаженням R_H

1.3. Пасивні елементи лінійних кіл

Резистивний елемент (належить до пасивних елементів, в яких енергія лише поглинається) або елемент з активним опором – ідеалізований елемент, в якому відбувається невідворотне перетворення електромагнітної енергії в тепло або інший вид енергії, а накопичення енергії в електричному і магнітному полях відсутнє [Р:1, В:2, 5]. Графічне позначення елемента наведено на рис. 1.6.

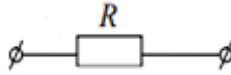


Рисунок 1.6 – Резистивний елемент з активним опором R

Надалі резистивний елемент називаємо спрощено резистором, а рівняння, що пов'язує напругу та струм резистора (ВАХ), записується за законом Ома [Р:1, В:2, 5]:

$$u = Ri, \quad (1.11)$$

де R – електричний опір, а обернена величина $G = 1/R$ є електричною провідністю. Альтернативний запис закону Ома з використанням провідності

$$i = Gu. \quad (1.12)$$

В лінійних колах опір і провідність вважають постійними величинами, незалежними від струму, напруги і інших факторів. Графічне співвідношення між струмом і напругою (ВАХ) можна представити у вигляді прямої, що проходить через початок координат, як показано на рис. 1.7.

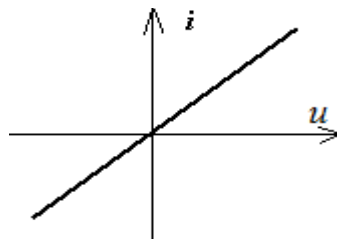


Рисунок 1.7 – ВАХ резистора

Потужність, що виділяється в резисторі в результаті перетворення електричної енергії у теплову, записується за законом Джоуля-Ленца [Р:1, В:4, 5]:

$$p = \frac{dW}{dt} = ui = Ri^2 = Gu^2, \quad (1.13)$$

де W – енергія. Потужність не може бути від'ємною, а отже енергія завжди надходить від джерела в резистор. Одиницею виміру потужності є ват (Вт).

Енергія, що витрачається на перенесення заряду q на ділянці кола з напругою u до моменту часу t , записується у вигляді:

$$W = \int_0^\infty u dq = \int_{-\infty}^t u idt. \quad (1.14)$$

Послідовне з'єднання резисторів

Падіння напруги на резисторах, з'єднаних послідовно (рис. 1.8), визначається відповідно до другого закону Кірхгофа

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n . \quad (1.15)$$

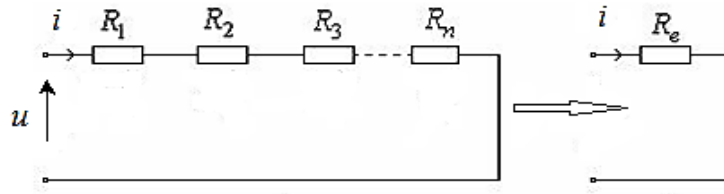


Рисунок 1.8 –Послідовне з'єднання резисторів

В колі тече єдиний струм i , що дає змогу записати падіння напруги наступним чином:

$$u = i(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n) = R_e i , \quad (1.16)$$

де R_e – еквівалентний опір. Таким чином, при послідовному з'єднанні резисторів їх опори додаються [В:2, 4]:

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k . \quad (1.17)$$

Паралельне з'єднання резисторів

Загальний струм (на вході кола, зображеного на рис. 1.9) визначається відповідно до першого закону Кірхгофа:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n . \quad (1.18)$$

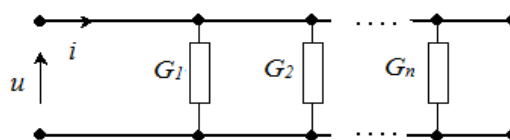


Рисунок 1.9 – Паралельне з'єднання резисторів

На всіх резисторах маємо однакові падіння напруги

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = u , \quad (1.19)$$

що дає змогу записати загальний струм наступним чином

$$i = u(G_1 + G_2 + \dots + G_n) = G_e u , \quad (1.20)$$

де G_e – еквівалентна провідність. Таким чином, при паралельному з'єднанні резисторів їх провідності додаються [В:2, 4]:

$$G_e = \sum_{k=1}^n G_k. \quad (1.21)$$

Реактивні елементи

Реактивні елементи є пасивними, але вони здатні накопичувати енергію, чим відрізняються від резистора.

Індуктивний елемент – ідеалізована індуктивна котушка або котушка індуктивності, в якій відбувається накопичення магнітної енергії, пов'язане з протіканням струму, а втрат і накопичення електричної енергії немає [Р:1, В:2, 5, 6]. Графічне позначення індуктивного елемента, основним параметром якого є індуктивність L , наведено на рис. 1.10. Індуктивність вимірюється в генрі (Гн), а інколи індуктивністю спрощено називають сам індуктивний елемент. Практично застосовують наступні одиниці вимірювання індуктивності: мілігенрі ($1\text{ мГн} = 1 \cdot 10^{-3}\text{ Гн}$), мікрогенрі ($1\text{ мкГн} = 1 \cdot 10^{-6}\text{ Гн}$).

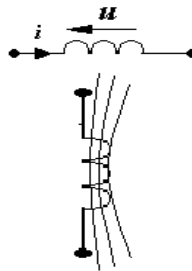


Рисунок 1.10 – Індуктивний елемент і лінії магнітного поля

Завдяки струму i в індуктивній котушці виникає магнітний потік Φ , одиницею виміру якого є вебер (Вб). Кількість ліній магнітного поля, зчеплених з окремими витками котушки, є різною (рис. 1.10), тому застосовують поняття потокозчеплення, що є сумою всіх магнітних потоків, зчеплених з витками котушки [Р:1, В:5, 6]:

$$\Psi = \sum_{k=1}^N \Phi_k, \quad (1.22)$$

де N – кількість витків індуктивної котушки.

Оскільки магнітний потік Φ , що пронизує котушку, пропорційний струму, то потокозчеплення також пропорційне струму:

$$\Psi = Li . \quad (1.23)$$

В лінійних колах індуктивність L – величина, яка не залежить від струму та часу, а в індуктивному елементі відсутні втрати електричної енергії, що є ідеалізацією.

В індуктивному елементі струм і напруга пов'язані за законом електромагнітної індукції [Р:1, В:5, 6]: зі зміною магнітного потоку, зчепленого з контуром, в ньому виникає ЕРС, що дорівнює швидкості зміни потокозчеплення і спрямована так, щоб струм, спричинений нею, протидівав зміні магнітного потоку. Таким чином, маємо напругу

$$u = - e = \frac{d\Psi}{dt} , \quad (1.24)$$

а, враховуючи вираз (1.23), отримаємо ВАХ індуктивного елемента

$$u = L \frac{di}{dt} . \quad (1.25)$$

Отже, напруга на індуктивному елементі пропорційна швидкості зміни струму. У випадку постійного струму магнітний потік не змінюється та падіння напруги не створюється, що еквівалентно закороченню індуктивного елемента, який можна замінити відрізком провідника:

$$u = 0, \text{ якщо } i = \text{const} . \quad (1.26)$$

Інтегруючи в часі напругу в межах від $-\infty$ до t , можна отримати струм з виразу (1.25):

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt . \quad (1.27)$$

Нижня межа інтегрування ($t = -\infty$) дає змогу врахувати всі зміни напруги, які відбувались до моменту t . Альтернативний вираз

$$i = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u dt , \quad (1.28)$$

де $i(0)$ – початковий струм в момент $t=0$, який враховує всі процеси в елементі до цього моменту.

З виразу (1.28) маємо важливу умову безперервності потокозчеплення та струму в момент ($t=0$) прикладання напруги до індуктивного елемента: якщо амплітуда напруги кінцева, то потокозчеплення та струм є безперервними функціями часу та не можуть змінюватися стрибком [Р:1, В:5, 6]:

$$\Psi(0+) = \Psi(0-) + \int_{0-}^{0+} u dt = \Psi(0-), \quad i(0+) = i(0-). \quad (1.29)$$

За умови безперервності струму, для моменту часу $t=0$ індуктивний елемент можна замінити джерелом струму зі струмом $i(0)$. Якщо $i(0)=0$, індуктивний елемент для моменту часу $t=0$ може бути представлений розривом кола. В якості наближення до реальної індуктивної котушки (моделі індуктивної котушки) розглядають коло (рис. 1.11) з врахованим опором провідника R_{np} , з якого виготовлена котушка. В такому випадку рівняння ВАХ індуктивної котушки має вигляд

$$u = L \frac{di}{dt} + i R_{np}. \quad (1.30)$$

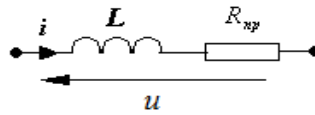


Рисунок 1.11 – Модель індуктивної котушки

Розглянемо потужність, яка виділяється на індуктивному елементі [Р:1, В:5, 6]:

$$p = ui = Li \frac{di}{dt}. \quad (1.31)$$

При зростанні струму відбувається накопичення енергії в магнітному полі індуктивного елемента ($p > 0$), у іншому випадку відбувається повернення накопиченої енергії ($p < 0$).

Інтегруючи потужність p , отримаємо енергію, накопичену в магнітному полі індуктивного елемента:

$$W = \int_{-\infty}^t Li \frac{di}{dt} dt = \int_0^i Li di = L \frac{i^2}{2}. \quad (1.32)$$

Послідовне та паралельне з'єднання індуктивних елементів

Застосування виразу (1.25) та другого закону Кірхгофа для послідовного з'єднання n індуктивних елементів (рис. 1.12) дає змогу отримати вираз для розрахунку еквівалентної індуктивності L_e :

$$L_e = \sum_{k=1}^n L_k. \quad (1.33)$$

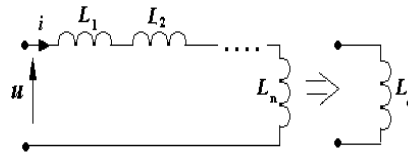


Рисунок 1.12 – Послідовне з'єднання n індуктивних елементів

В свою чергу, застосування виразу (1.27) і першого закону Кірхгофа для паралельного з'єднання n індуктивних елементів (рис. 1.13) дає змогу отримати вираз для розрахунку еквівалентної індуктивності:

$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}; \quad \frac{1}{L_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}. \quad (1.34)$$

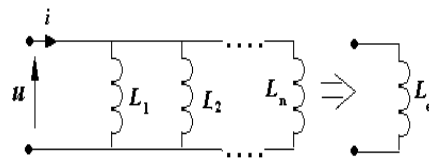


Рисунок 1.13 – Паралельне з'єднання n індуктивних елементів

Ємнісний елемент – ідеалізований конденсатор, в якому відбувається накопичення електричної енергії, залежної від напруги, а втрат і накопичення магнітної енергії немає [Р:1, В:5, 6].

Графічне позначення ємнісного елемента, основним параметром якого є ємність C , наведено на рис. 1.14, а інколи ємністю спрощено називають сам елемент. Надалі ємнісний елемент називаємо спрощено конденсатором. Одиницею виміру ємності є фарада (Ф). Практично застосовують наступні одиниці вимірювання ємності: мікрофарада ($1\text{мкФ}=1*10^{-6}\text{Ф}$), нанофарада ($1\text{нФ}=1*10^{-9}\text{Ф}$), пікофарада ($1\text{пФ}=1*10^{-12}\text{Ф}$).

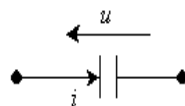


Рисунок 1.14 – Ємнісний елемент

У випадку прикладання до конденсатора напруги, на його обкладинках з'являються заряди, однакові за величиною та протилежні за знаком. В

діелектрику між обкладинками створюється пов'язане з цими зарядами електричне поле (рис. 1.15).

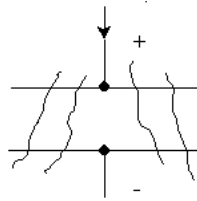


Рисунок 1.15 – Лінії електричного поля в конденсаторі

Оскільки напруженість електричного поля пропорційна напрузі між обкладинками, заряд конденсатора є пропорційним напрузі:

$$q = Cu. \quad (1.35)$$

Зауважимо, що струм в ємнісному елементі є струмом зміщення, природа якого відрізняється від струму провідності, відсутнього в ідеальному діелектрику.

Зв'язок між струмом і напругою (ВАХ) в ємнісному елементі отримаємо шляхом диференціювання виразу (1.35) [Р:1, В:5, 6]:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}. \quad (1.36)$$

Отже, струм в ємнісному елементі пропорційний швидкості зміни напруги. За умови постійної напруги, струм дорівнює нулю, а елемент можна замінити розривом кола.

Інтегруючи вираз (1.36) в межах від $-\infty$ до t , отримаємо напругу у вигляді:

$$u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt, \quad (1.37)$$

де $u(0)$ – початкова напруга на ємнісному елементі, яка враховує всі процеси, що відбувались в ньому до моменту $t = 0$.

Вирази (1.35) і (1.37) дають змогу встановити умови безперервності заряду та напруги в ємнісному елементі: при протіканні струму кінцевої амплітуди заряд і напруга є безперервними функціями часу та не можуть змінюватися стрибком [Р:1, В:5, 6]:

$$q(0+) = q(0-) + \int_{0-}^{0+} i dt = q(0-), \quad u(0+) = u(0-). \quad (1.38)$$

Завдяки безперервності напруги на ємнісному елементі, до моменту часу $t=0$ його можна замінити джерелом напруги з напругою $u(0)$. В якості наближення до реального конденсатора (моделі конденсатора) можна розглядати коло (рис. 1.16), в якому враховано опір витoku R_B , що виникає завдяки неідеальності діелектрика. В такому випадку рівняння ВАХ має вигляд

$$i = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_B} . \quad (1.39)$$

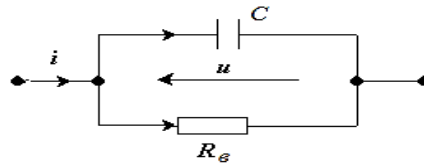


Рисунок 1.16 – Модель конденсатора

Потужність, яка виділяється на ємнісному елементі має вигляд [Р:1, В:5, 6]:

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt} . \quad (1.40)$$

В інтервалах зростання напруги енергія накопичується в електричному полі ємнісного елемента ($p > 0$), у іншому випадку відбувається повернення накопиченої в елементі енергії ($p < 0$).

Шляхом інтегрування виразу (1.40) в межах від $-\infty$ до t отримаємо енергію, накопичену в електричному полі ємнісного елемента:

$$W = \int_{-\infty}^t Cu \frac{du}{dt} dt = \int_0^u Cu du = C \frac{u^2}{2} . \quad (1.41)$$

Послідовне та паралельне з'єднання ємнісних елементів

Застосування виразу (1.37) та другого закону Кірхгофа для послідовного з'єднання n ємнісних елементів (рис. 1.17) дає змогу отримати вираз для розрахунку еквівалентної ємності C_e :

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} . \quad (1.42)$$

Для $n=2$ маємо:

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} . \quad (1.43)$$

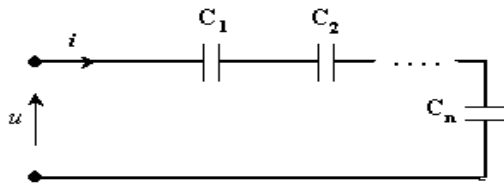


Рисунок 1.17 – Послідовне з'єднання n ємнісних елементів

Для паралельного з'єднання (рис. 1.18)

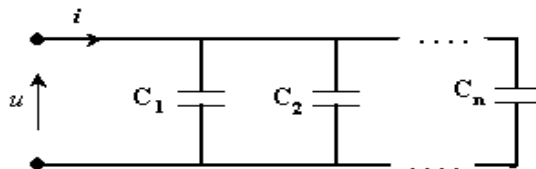


Рисунок 1.18 – Паралельне з'єднання n ємнісних елементів

еквівалентна ємність C_e визначається виразом:

$$C_e = \sum_{k=1}^n C_k . \quad (1.44)$$

Підсумовуючи розгляд пасивних елементів лінійних кіл, наведемо співвідношення між напругами та струмами елементів, які називають вольт-амперними характеристиками (Табл. 1.1) [Р:1, В:5].

Таблиця 1.1 – ВАХ пасивних елементів

Резистивний елемент		$i = Gu$	$u = Ri$
Реактивні елементи	C	$i = C \frac{du}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$
	L	$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt$	$u = L \frac{di}{dt}$

Введені елементи є ідеалізованими елементами та їх не слід ототожнювати з реальними елементами кіл – резистором, індуктивною котушкою, конденсатором, блоком живлення або генератором, які поряд з визначальним параметром, таким же як у ідеалізованого елемента, мають і інші побічні або «паразитні» параметри. Однак, складаючи з ідеалізованих елементів відповідну схему заміщення реального пристрою, можна приблизно відтворити

функціонування пристрою. Збільшення числа елементів схеми заміщення за рахунок тих, що враховують побічні параметри, підвищує точність відтворення функціонування та одночасно ускладнює розрахунок.

Розглянемо далі елементи, які дають змогу створювати схеми заміщення [Р:2, В:6] (моделі) таких складових електронних кіл, як діоди, транзистори і т.п. В той же час, створення моделей потребує точного знання процесів і режимів роботи таких складових, тому на даному етапі вважаємо, що моделі є заданими і придатними для проведення розрахунків.

1.4. Залежні (керовані) джерела

Залежне або кероване джерело, на відміну від розглянутих елементів, має два вхідних і два вихідних виводи, які є виводами двох елементів [Р:1, В:5, 6]. Елемент на вході є або короткозамкненим, або розімкненим елементом, а на виході – джерелом напруги, або джерелом струму. Через короткозамкнений елемент тече струм i_1 , а падіння напруги на ньому нульове. На розімкненому елементі падіння напруги u_1 , а струм через нього нульовий. Вхідний струм або вхідна напруга є керуючими. Елемент на виході є залежним (керованим) джерелом напруги (джерелом струму) і має напругу u_2 (струм i_2), пропорційні керуючому струму або керуючій напрузі вхідного елемента.

В залежності від того, яка з двох вхідних величин u_1 (i_1) є керуючою та яка з двох вихідних величин u_2 (i_2) є залежною (керованою), визначають чотири типи залежних джерел з відповідними коефіцієнтами, які характеризують міру передачі сигналу від вхідного до вихідного елемента [Р:1, В:5, 6].

1. Джерело напруги, кероване напругою (ДНКН). Падіння напруги u_1 на розімкненому вхідному елементі є керуючим. Вхідний струм дорівнює нулю, вхідний опір (u_1 / i_1) прямує до нескінченності. Вихідним елементом є залежне джерело напруги з напругою $u_{\text{ДНКН}}$ (рис. 1.19), пропорційною напрузі на вході (μ – коефіцієнт передачі напруги).



Рисунок 1.19 – Джерело напруги, кероване напругою

2. Джерело напруги, кероване струмом (ДНКС). Струм i_1 короткозамкненого вхідного елемента є керуючим. Вхідна напруга та вхідний опір прямують до нуля. Вихідним елементом є залежне джерело напруги з напругою $u_{\text{ДНКС}}$ (r – передавальний опір або опір передачі), пропорційною вхідному струму (рис. 1.20).

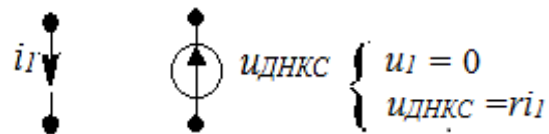


Рисунок 1.20 – Джерело напруги, кероване струмом

3. Джерело струму, кероване напругою (ДСКН). Падіння напруги u_1 на розімкненому вхідному елементі є керуючим. Вхідний струм дорівнює нулю, вхідний опір прямує до нескінченності. Вихідним елементом є залежне джерело струму зі струмом $i_{\text{ДСКН}}$ (g – передавальна провідність або провідність передачі), пропорційним напрузі на вході (рис. 1.21).

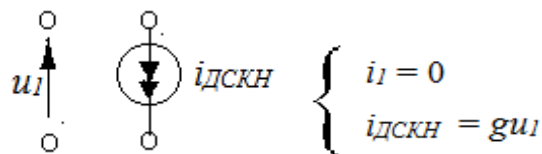


Рисунок 1.21 – Джерело струму, кероване напругою

4. Джерело струму, кероване струмом (ДСКС). Струм i_1 короткозамкненого вхідного елемента є керуючим. Вхідна напруга та вхідний опір прямують до нуля. Вихідним елементом є залежне джерело струму зі струмом $i_{\text{ДСКС}}$ (α – коефіцієнт передачі струму), пропорційним вхідному струму (рис. 1.22).

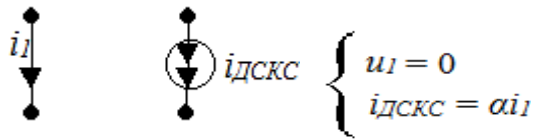


Рисунок 1.22 – Джерело струму, кероване струмом

Залежні (керовані) джерела не поглинають енергію. В таких елементах можливе підсилення сигналу, що надходить на вхід, тому вони є активними елементами. В той же час, їх не слід ототожнювати з такими активними елементами як незалежні джерела, які є джерелами енергії [Р:1, В:5, 6].

1.5. ВАХ пасивних елементів в області комплексної частоти

1.5.1. Перетворення Лапласа

Пряме перетворення Лапласа здійснюється шляхом інтегрування функції часу $f(t)$ – оригіналу, з отриманням функції нової змінної $F(p)$ – зображення:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt . \quad (1.45)$$

Оскільки члени розкладання в ряд

$$e^{-pt} = 1 - pt + \frac{p^2 t^2}{2!} - \frac{p^3 t^3}{3!} + \dots$$

не мають розмірності, змінна p вимірюється в 1/с. Тому $p = \sigma + j\omega$ трактується як комплексна частота. Поняття комплексної частоти ширше звичайного поняття частоти, що застосовується до періодичних функцій та сигналів [Р:1, В:1, 6, 7].

Умовне позначення перетворення Лапласа:

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ або } F(p) < -> f(t) . \quad (1.46)$$

Користуючись зворотнім перетворенням Лапласа, можна за відомим зображенням отримати оригінал:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) e^{pt} dt, \quad (1.47)$$

де уявна одиниця $j = \sqrt{-1}$.

Умовний запис зворотного перетворення:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] . \quad (1.48)$$

Перехід від оригіналів до зображень є значно простішим, ніж зворотне перетворення. Тому в інженерних розрахунках вираз (1.47) майже не застосовується, а для отримання зворотного перетворення користуються спеціальними способами, один з яких розглянемо в четвертому розділі.

Важливою властивістю перетворення Лапласа є його **лінійність**, яка полягає в тому, що множенню оригіналу на постійний коефіцієнт K відповідає множення зображення на той же коефіцієнт

$$F(p) < -> f(t), \quad K F(p) < -> K f(t), \quad (1.49)$$

а також зображення суми оригіналів дорівнює сумі їх зображень

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t), \quad F(p) = \sum_{i=1}^n F_i(p) . \quad (1.50)$$

Особливо важлива властивість перетворення Лапласа полягає в тому, що воно дає змогу звести операції **диференціювання** та **інтегрування** до алгебраїчних операцій, а виходячи з цього – інтегро-диференційні рівняння в часовій області до алгебраїчних рівнянь в області комплексної частоти.

Так, застосовуючи перетворення (1.45) до похідної $f'(t)$ від функції $f(t)$ і інтегруючи по частинах, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= pF(p) - f(0), \end{aligned} \quad (1.51)$$

де $f(t)e^{-pt}$ визначено для t в межах від ∞ до 0, що в результаті дає $f(0)$, а інтеграл в другому доданку є зображенням $F(p)$ функції $f(t)$. Таким чином,

$$f'(t) < -> pF(p) - f(0) , \quad (1.52)$$

де $f(0)$ – початкове значення функції $f(t)$ при $t=0$.

Аналогічно виводиться співвідношення для другої похідної:

$$f''(t) < -> p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) . \quad (1.53)$$

Таким чином, операції диференціювання оригіналу відповідає множення його зображення на змінну p , при цьому підвищення порядку похідної призводить до підвищення ступеня p .

Знайдемо зображення інтегралу функції $f(t)$

$$g(t) = \int f(t)dt \rightarrow f(t)=g'(t) \quad (1.54)$$

шляхом застосування перетворення (1.45) до похідної $g'(t)$ від функції $g(t)$:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty g'(t) e^{-pt} dt = g(t) e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty g(t) e^{-pt} dt;$$

$$\int_0^\infty g(t) e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0)}{p}, \quad (1.55)$$

де $g(t)e^{-pt}$ визначено для t в межах від ∞ до 0, що в результаті дає $g(0)$, яке є початковим значенням функції $g(t)$ при $t=0$.

Таким чином, зображення інтегралу функції $f(t)$ має наступний вигляд:

$$g(t) = \int f(t)dt \rightarrow \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0)}{p}. \quad (1.56)$$

За нульових початкових умов

$$f'(t) \rightarrow pF(p),$$

$$\int f(t)dt \rightarrow \frac{1}{p}F(p),$$

тобто операції диференціювання оригіналу відповідає множення його зображення на p , а операції інтегрування – ділення зображення на p . У зв'язку з цим комплексна частота p може розглядатися як певний оператор.

1.5.2. Застосування перетворення Лапласа до рівнянь ВАХ

Для ВАХ пасивних двополюсних елементів, розглянутих в п. 1.3,

$$i_R = Gu_R, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$$

отримаємо рівняння ВАХ в операторній формі шляхом застосування перетворення Лапласа (нульові початкові умови):

$$I_R(p) = GU_R(p), \quad (1.57)$$

$$I_C(p) = pCU_C(p), \quad (1.58)$$

$$I_L(p) = \frac{1}{pL}U_L(p), \quad (1.59)$$

де в якості напруг і струмів маємо їх зображення.

Відповідно до закону Ома, коефіцієнти поміж струмами та напругами

$$Y_R(p) = G, \quad (1.60)$$

$$Y_C(p) = pC, \quad (1.61)$$

$$Y_L(p) = \frac{1}{pL} \quad (1.62)$$

називають провідностями. Ємнісна (1.61) та індуктивна (1.62) провідності є функціями комплексної частоти. Відповідно, обернені до провідностей величини $Z_R(p)$, $Z_C(p)$, $Z_L(p)$ називають опорами.

Якщо в початковий момент часу $t = 0$ напруга на конденсаторі $u_C(0)$ та струм в індуктивній котушці $i_L(0)$ відмінні від 0, то рівняння (1.58), (1.59) в операторній формі мають наступний вигляд:

$$I_C(p) = pCU_C(p) - Cu_C(0) = Y_C(p)U_C(p) - Cu_C(0); \quad (1.63)$$

$$I_L(p) = \frac{1}{pL}U_L(p) + \frac{i_L(0)L}{pL} = Y_L(p)U_L(p) + \frac{i_L(0)}{p}. \quad (1.64)$$

Відповідні рівнянням (1.63), (1.64) операторні схеми заміщення реактивних елементів зображені на рис. 1.23 [Р:1, В:6, 7].

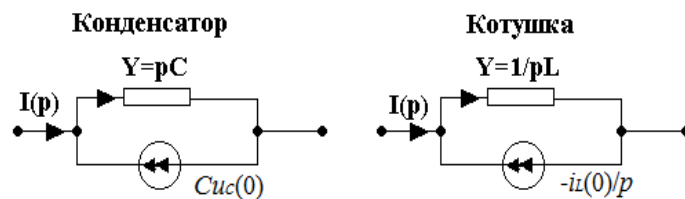


Рисунок 1.23 – Операторні схеми заміщення реактивних елементів

1.5.3. Приклади застосування перетворення Лапласа

Приклад 1.1. Перетворення одиничного стрибка (функції Хевісайда) $f(t) = 1(t)$, зображеної на рис. 1.24 [Р:2]:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}.$$

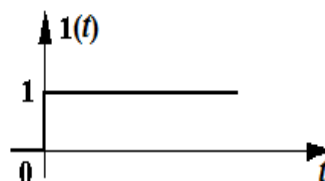


Рисунок 1.24 – Одиничний стрибок

Застосуємо перетворення (1.45):

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p},$$

$$1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}.$$

Приклад 1.2. Перетворення експоненційної функції $f(t) = e^{\sigma t}$.

В результаті застосування перетворення (1.45) маємо:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\sigma t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\sigma)t} dt,$$

$$e^{\sigma t} \leftrightarrow \frac{1}{p-\sigma}.$$

Приклад 1.3. Перетворення затриманої на час τ функції $f(t)$.

Припустимо, що $F(p) \leftrightarrow f(t)$, $F_{\tau}(p) \leftrightarrow f(t - \tau)$. Тоді, позначивши $t' = t - \tau$, отримаємо в результаті застосування перетворення (1.45):

$$F_{\tau}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt = \int_0^{\infty} e^{-p(t'+\tau)} f(t') dt' =$$

$$= e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pt'} f(t') dt' = e^{-p\tau} F(p),$$

$$f(t - \tau) \leftrightarrow F(p) e^{-p\tau}.$$

Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Поясніть відмінність понять «коло» та «схема».
2. Які кола називають лінійними?
3. Поясніть поняття моделі кола.
4. В яких фізичних одиницях вимірюється величина електричної напруги?
5. Який напрямок напруги вважають додатнім?
6. В яких фізичних одиницях вимірюється величина електричного струму?
7. Який напрямок струму вважають додатнім?
8. Який закон визначає зв'язок між напругою та струмом на резисторі?
9. В яких фізичних одиницях вимірюється величина опору?
10. Як пов'язані між собою умовні додатні напрямки напруги та струму?
11. Що називають сигналом?

12. Яке джерело напруги називають незалежним?
13. Яка вимога до внутрішнього опору джерела напруги?
14. Джерело напруги 5 В має внутрішній опір 2 Ом. При підключенні навантаження виникає струм 0.5 А. Яка напруга виникає на навантаженні?
15. Джерело напруги 12 В має внутрішній опір 8 Ом. При підключенні навантаження виникає струм 0,25 А. Яка напруга виникає на навантаженні?
16. Яке джерело струму називають незалежним?
17. В яких фізичних одиницях вимірюється величина провідності?
18. Яка вимога до внутрішньої провідності джерела струму?
19. Джерело струму 10 мА має внутрішній опір 2 кОм. При підключенні навантаження на ньому виникає напруга 4 В. Визначити струм в мА, що виникає в навантаженні.
20. Джерело струму 7 мА має внутрішній опір 3 кОм. При підключенні навантаження на ньому виникає напруга 6 В. Визначити струм в мА, що виникає в навантаженні.
21. Чим відрізняються ідеальні незалежні джерела від реальних?
22. Поясніть поняття вольт-амперної характеристики (ВАХ)?
23. Джерело напруги 12 В має внутрішній опір 4 Ом. Визначити параметри джерела струму, отриманого в результаті еквівалентного перетворення.
24. Джерело струму 2 мА має внутрішню провідність 1 мСм. Визначити параметри джерела напруги, отриманого в результаті еквівалентного перетворення.
25. Які елементи називають пасивними?
26. Чим відрізняється резистивний елемент від реального резистора?
27. В яких фізичних одиницях вимірюється величина електричної потужності?
28. Два резистори з опорами 3 кОм, 6 кОм з'єднані паралельно. Визначити еквівалентний опір в кОм.
29. Навантаження схеми у вигляді двох послідовно з'єднаних резисторів з опорами 1 кОм, 3 кОм підключено до точок з потенціалами 10 В і 2 В. Визначити струм в мА в навантаженні.

30. Які елементи називають реактивними?
31. Чим відрізняється індуктивний елемент від реальної індуктивної котушки?
32. В яких фізичних одиницях вимірюється величина індуктивності?
33. Поясніть умову безперервності поточкозчеплення та струму в індуктивній котушці.
34. Дві індуктивні котушки 1 мГн , 4 мГн з'єднані паралельно. Визначити еквівалентну індуктивність в мГн .
35. Чим відрізняється ємнісний елемент від реального конденсатора?
36. В яких фізичних одиницях вимірюється величина ємності?
37. Поясніть умову безперервності заряду та напруги на конденсаторі.
38. Два конденсатори ємністю 3 мкФ , 6 мкФ з'єднані послідовно. Визначити еквівалентну ємність в мкФ .
39. Чим відрізняються залежні (керовані) джерела від незалежних джерел?
40. Які існують типи залежних (керованих) джерел?
41. В яких фізичних одиницях вимірюється комплексна частота?
42. Які важливі властивості перетворення Лапласа?
43. Як визначаються індуктивна та ємнісна провідності (опори)?

2. ОСНОВНІ ЗАКОНИ І ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ КІЛ

2.1. Аналіз кола. Основні поняття

Електричне коло, що відображає електромагнітні процеси в реальному пристрої, складається шляхом відповідного з'єднання між собою пасивних двополюсних елементів (елементів з двома виводами): резисторів, індуктивних котушок, конденсаторів і т.п., а також джерел сигналів і залежних джерел. Отримаємо відповідну електричну схему, яка має визначену геометричну конфігурацію. Елементи кола також називають компонентами. Характеристиками геометричної конфігурації схеми є вузол і контур [Р:1, В:5].

Вузол – це точка на схемі, в якій сходяться два та більше елементів. Точки з рівними потенціалами представляють одним і тим же вузлом. Зауважимо, що на схемі джерела напруги з'єднуються послідовно з елементами, тому маємо вузол поміж таким джерелом і під'єднаним елементом. При паралельному під'єднанні елемента до ідеального джерела напруги, напруга на елементі відома, а при послідовному з'єднанні елемента з джерелом струму, струм елемента відомий – він задається джерелом. Елемент з відомою напругою або струмом можна виключити зі схеми, яку необхідно розрахувати.

Контур – замкнений шлях, який проходить одноразово по елементах кола. Зазвичай, базові рівняння, що описують геометричну конфігурацію схеми, формулюють саме по відношенню до вузлів і контурів схеми.

Аналіз кола полягає в тому, що для заданої схеми електричного кола з параметрами її елементів, напругами (струмами) незалежних джерел, необхідно розрахувати струми (напруги) елементів. Зазвичай, задані напруги (струми) джерел називають сигналами, а невідомі струми (напруги) елементів – реакціями. Отже, в результаті аналізу кола необхідно отримати реакції кола на дію заданих сигналів [В:5].

Елементи або вузли кола, реакції в яких необхідно розрахувати, називають виходами, а вузли кола, до яких приєднані джерела сигналів –

входами [В:2]. Коло, створене з довільної кількості елементів і з будь-якою геометричною конфігурацією, зображають у вигляді прямокутника – «чорної скриньки». Цим терміном підкреслюють прагнення відволіктися від структури та елементів кола і розглядати його відносно входів і виходів.

Хоча теоретично може знадобитися визначення реакцій (струмів і напруг) всіх елементів кола на дію заданих сигналів, на практиці виникають завдання визначення реакцій в обмеженому числі елементів, при цьому діє єдине джерело сигналу. В таких випадках корисним є поняття двополюсного кола (двополюсника), зображеного на рис. 2.1 [В:5],

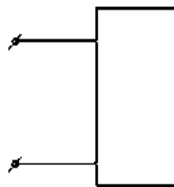


Рисунок 2.1 – Двополюсник

або чотириполюсного кола (чотириполюсника), зображеного на рис. 2.2.

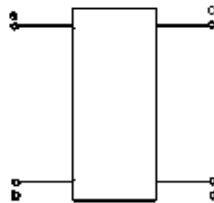


Рисунок 2.2 – Чотириполюсник

Двополюсник має один вхід, а реакцією, яку необхідно визначити, є струм на вході, за умови дії джерела напруги, або напруга на вході, за умови дії джерела струму.

Чотириполюсник має вхід, до якого прикладено сигнал з напругою u_1 або струмом i_1 , і вихід – з реакцією, яку необхідно визначити (напруга u_2 або струм i_2). Залежні джерела, розглянуті в першому розділі, є чотириполюсниками. Детальніше основи теорії чотириполюсника розглянемо в останньому розділі.

2.2. Основні закони теорії кіл

Для визначення реакцій – струмів і напруг на елементах, необхідно сформулювати наступні 2 групи рівнянь кола [Р:1, 2, В:5, 6].

1. Рівняння елементів, які пов'язують струм і напругу кожного елемента (ці рівняння також називають компонентними). Прикладами рівнянь є ВАХ резистивного, індуктивного та ємнісного елементів, а також напруги та струми джерел. Рівняння елементів не залежать від геометричної конфігурації схеми, в яку вони входять.

2. Рівняння з'єднань, які визначаються тільки геометричною конфігурацією схеми, способом з'єднання її елементів (ці рівняння також називають топологічними) і не залежать від виду ВАХ елементів. Рівняння з'єднань пов'язують між собою струми та напруги різних елементів, з яких складається схема.

Топологічні рівняння базуються на законах Кірхгофа, які пов'язують між собою струми елементів, що сходяться у вузлах (перший закон Кірхгофа), і напруги на елементах, що входять в контури (другий закон Кірхгофа).

2.2.1. Перший закон Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа, який є наслідком закону збереження заряду, дає рівняння балансу струмів у вузлах кола та формулюється наступним чином: в будь-якій момент часу алгебраїчна сума струмів елементів, які сходяться у вузлі електричного кола, дорівнює нулю [Р:1, В:5]:

$$\sum_k (\pm i_k) = 0. \quad (2.1)$$

Знак струму залежить від вибору його умовного напрямку, наприклад, струмам, які спрямовані від вузла, надають знак «+», а решті струмів – знак «-».

Так для вузлів, позначених на рис. 2.3 як 1, 2, 3, маємо:

$$\begin{aligned} i_E + i_{R1} &= 0 ; \\ - i_{R1} + i_C + i_L &= 0 ; \\ - i_C + i_{R2} &= 0 , \end{aligned}$$

де i_E – струм незалежного джерела напруги, позначення якого на схемі немає, але джерело задає напругу u на вході. Зауважимо, що складання записаних рівнянь призведе до отримання балансу струмів у вузлі 4

$$i_E + i_L + i_{R2} = 0 .$$

Це, в свою чергу, означає, що отримане рівняння є залежним і надлишковим. Таким чином, за наявності в схемі n вузлів лише $n-1$ рівнянь за першим законом Кірхгофа є незалежними.

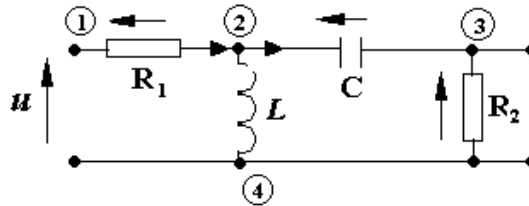


Рисунок 2.3 – Умовні напрямки струмів і напруг

2.2.2. Другий закон Кірхгофа

Другий закон Кірхгофа, який є наслідком закону збереження енергії, дає рівняння балансу напруг в контурі та формулюється наступним чином: в будь-який момент часу алгебраїчна сума напруг на елементах в контурі дорівнює нулю [Р:1, В:5]:

$$\sum_k (\pm u_k) = 0, \quad (2.2)$$

Знак напруги при вибраних напрямках струмів в елементах залежить від вибору напрямку обходу контуру: якщо при обході контуру напрямки напруги на елементі співпадає з напрямком обходу, то напрузі надають знак «+», в іншому випадку – знак «-».

Для контурів, що складаються з напруг на елементах u , R_1 , C , R_2 та L , C , R_2 , зображених на схемі рис. 2.3, маємо:

$$u - u_{R_1} - u_C - u_{R_2} = 0 ;$$

$$u_L - u_C - u_{R_2} = 0 .$$

Зауважимо, що загальна кількість топологічних рівнянь (за першим і другим законами Кірхгофа) має дорівнювати кількості елементів кола, включно

з незалежними джерелами (в розглянутому прикладі сформовано 5 рівнянь) [Р:1, 2].

Лінійні схеми, створені з резистивних елементів, описуються в результаті формування рівнянь системами лінійних алгебраїчних рівнянь, а схеми, які містять також реактивні елементи, називають динамічними та описують в часі системами лінійних інтегро-диференціальних рівнянь [В:5]. Розглянемо розв'язання завдання аналізу на прикладі простих кіл, які містять резистивні та реактивні елементи.

2.2.3. Приклади формування та розв'язання рівнянь

Приклад 2.1. Інтегруюче коло – це лінійне коло (рис. 2.4) , в якому відбувається інтегрування вхідного сигналу [Р:2].

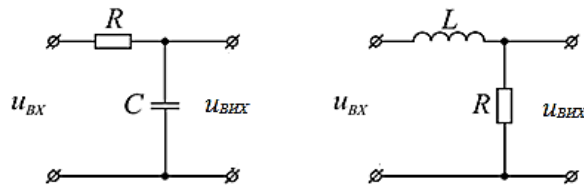


Рисунок 2.4 – RC та RL інтегруючі кола

Сформуємо для RC -кола дві групи рівнянь відповідно до п. 2.2.

1. Рівняння елементів або ВАХ:

$$u_R = Ri;$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

2. Рівняння з'єднань або топологічні рівняння (закони Кірхгофа):

$$i_E + i_R = 0; i_R = i_C = i;$$

$$u_{BX} - u_R - u_C = 0.$$

З врахуванням рівнянь ВАХ, запишемо останнє рівняння наступним чином:

$$Ri + u_C = u_{BX}$$

або

$$CR \frac{du_C}{dt} + u_C = u_{BX}.$$

Припустимо, що $u_{ВХ}$ змінюється у часі подібно одиничній ступінчастій функції, розглянутій в прикладі 1.1, досягаючи рівня E . Тоді останнє рівняння можна представити у вигляді

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}.$$

Якщо ввести позначення

$$x = u_C, \quad k = \frac{1}{RC}, \quad f(t) = \frac{1}{RC} E,$$

отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку, яке в математичному записі виглядає наступним чином:

$$x' + kx = f(t).$$

Розв'язання даного рівняння має вигляд:

$$x = x_0 e^{-kt} + e^{-kt} \int_0^t f(\tau) e^{k\tau} d\tau,$$

або

$$x = x_0 e^{-kt} + \frac{A}{k} (1 - e^{-kt}),$$

де $x_0 = u_C(0)$ – початкова напруга на конденсаторі,

$$A = E/RC.$$

В результаті маємо $u_C = E - E e^{-\frac{t}{RC}} = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$, за умови нульової початкової напруги $u_C(0)=0$, тобто незарядженого конденсатора.

Після подачі сигналу на вхід кола починається заряд конденсатора, який йде доти, поки напруга на ньому не досягне рівня $u_{ВХ}$ (рис. 2.5). У цей момент струм через конденсатор припиниться, схема переходить у **режим постійного струму** (англ. *Direct current* – *DC*). Попередній процес заряджання конденсатора (накопичення енергії) називають **режимом перехідних процесів** (англ. *Transient*) [Р:2, В:6].

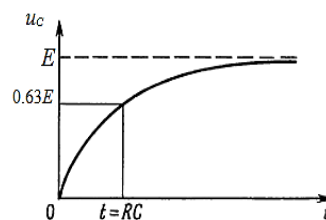


Рисунок 2.5 – Процес заряджання конденсатора

Важливим є параметр, що характеризує швидкодію кола, який називають часом затримки $t_{\text{зат}}$. Швидкодія кола залежить від швидкості заряду (розряду) конденсатора. Чим більше швидкість заряду (розряду), тим менше час затримки

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{RC},$$

де $\tau = RC$ – постійна часу заряду (розряду) конденсатора [В:5,6].

Емпірична (експериментальна) оцінка часу затримки (тривалості перехідних процесів):

$$t_{\text{зат}} \approx (6 \div 10)\tau.$$

Якщо припустити, що в момент часу t'_1 (t_1) вхідний сигнал зміниться миттєво від рівня E до нуля (рис. 2.6), в цей момент почнеться новий перехідний процес, пов'язаний з розрядженням конденсатора. У цьому випадку вхід схеми можна вважати замкнутим, а конденсатор починає виконувати функцію джерела напруги (рис. 2.7).

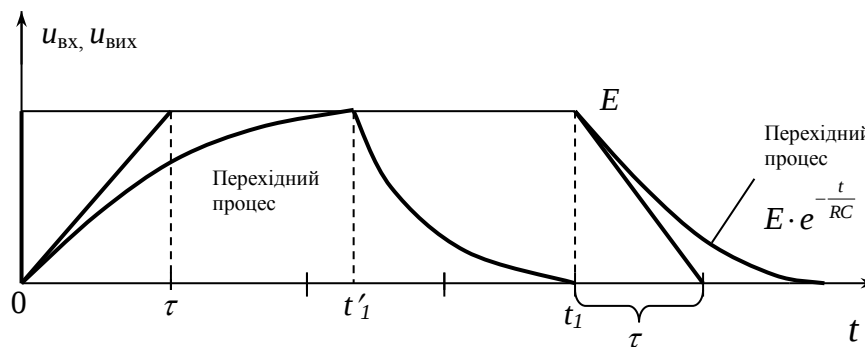


Рисунок 2.6 – Процеси зарядження та розрядження конденсатора

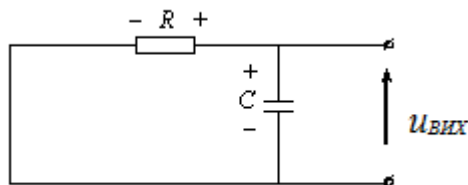


Рисунок 2.7 – Схема розрядження конденсатора

Диференціальне рівняння кола матиме наступний вигляд:

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC} = 0,$$

тобто перетворюється в лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку з початковою напругою на конденсаторі $u_C(0) = E$, якщо конденсатор встиг накопичити максимальний заряд. Напруга на ньому, яка є напругою на виході кола, змінюється наступним чином:

$$u_{\text{вих}} = u_C = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Отже, виходячи з викладеного вище, можна зробити висновок, що при дії на вході **RC**-кола прямокутного імпульсу тривалістю t_i , форма сигналу на його виході тим більше відрізняється від вхідного сигналу, чим більша постійна часу $\tau = RC$ (рис. 2.8).

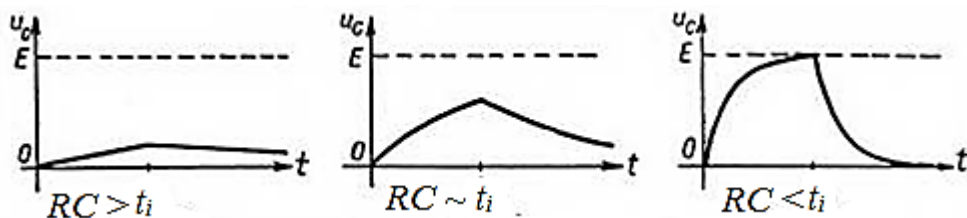


Рисунок 2.8 – Зміна сигналу на виході **RC**-кола при зменшенні постійної часу

Запишемо 2 групи рівнянь для інтегруючого **RL**-кола відповідно до п.2.2.

1. Рівняння елементів або ВАХ:

$$u_R = Ri;$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}.$$

2. Рівняння з'єднань або топологічні рівняння (закони Кірхгофа):

$$i_E + i_L = 0; i_R = i_L = i;$$

$$u_{\text{ВХ}} - u_R - u_L = 0.$$

З врахуванням рівнянь ВАХ запишемо останнє рівняння наступним чином:

$$L \frac{di}{dt} + u_R = u_{\text{ВХ}}$$

або

$$\frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} + u_R = u_{\text{ВХ}},$$

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{R}{L} u_R = \frac{R}{L} u_{\text{ВХ}}.$$

Очевидно, що диференціальні рівняння для **RL** та **RC** інтегруючих кіл відрізняються лише напругами на виході та константами [В:5]:

$$\text{RC-коло: } u_{\text{вих}} = x = u_C, \quad f(t) = \frac{1}{RC} E, \quad k = \frac{1}{RC}, \quad \tau = RC;$$

$$\text{RL-коло: } u_{\text{вих}} = x = u_R, \quad f(t) = \frac{R}{L} E, \quad k = \frac{R}{L}, \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Відповідно, розглянуті процеси зміни в часі напруги на виході у вказаних колах не відрізняються. Як бачимо, однакові функції можна реалізувати із застосуванням різних схем. Інтегруюче коло можна розглядати також в частотній області як фільтр пропускання низькочастотного сигналу з одночасним пригніченням сигналу високої частоти [Р:2]. Це пов'язано з дуже високим ємнісним опором $Z_C(p)$ на низькій частоті вхідного сигналу та, як наслідок, малим струмом у колі, завдяки чому сигнал на виході **RC**-кола майже не відрізняється від вхідного. Аналогічна ситуація на низькій частоті складається в **RL**-колі: завдяки дуже малому індуктивному опору $Z_L(p)$ сигнал на вихід кола проходить майже без втрат.

Приклад 2.2. Диференціююче коло – це лінійне коло (рис. 2.9) , в якому відбувається диференціювання вхідного сигналу.

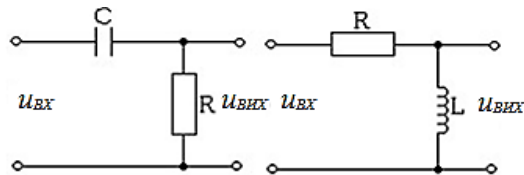


Рисунок 2.9 – **RC** та **RL** диференціюючі кола

Сформуємо для **RC**-кола дві групи рівнянь відповідно до п. 2.2.

1. Рівняння елементів або ВАХ:

$$i = \frac{u_R}{R};$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt.$$

2. Рівняння з'єднань або топологічні рівняння (закони Кірхгофа):

$$i_E + i_C = 0; \quad i_R = i_C = i;$$

$$u_{\text{ВХ}} - u_C - u_R = 0.$$

З врахуванням рівнянь ВАХ запишемо останнє рівняння наступним чином:

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \frac{u_R}{R} dt + u_R = u_{\text{ВХ}} .$$

Диференціюючи в часі отримане рівняння, маємо

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} u_R = \frac{du_{\text{ВХ}}}{dt} .$$

Припустимо, що $u_{\text{ВХ}}$ змінюється у часі подібно одиничному стрибку, розглянутому в прикладі 1.1, досягаючи рівня E . Тоді останнє рівняння можна представити у вигляді лінійного однорідного диференційного рівняння першого порядку:

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} u_R = 0 .$$

Якщо конденсатор не заряджений, то $u_C(0) = 0$ і, за другим законом Кірхгофа, записаним вище, $u_R(0) = E$. За таких початкових умов розв'язання диференційного рівняння має наступний вигляд:

$$u_{\text{ВІХ}} = u_R = E e^{-\frac{t}{RC}} ,$$

а графічна ілюстрація зміни напруги у часі наведена на рис. 2.10.

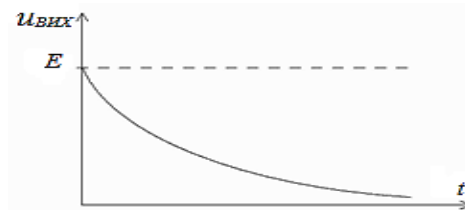


Рисунок 2.10 – Напруга на виході диференціюючого кола

Припустимо, що в момент часу t_1 вхідний сигнал змінився миттєво від рівня E до нуля (рис. 2.11), при цьому конденсатор встиг зарядитися до напруги $u_C(t_1)$, відповідно на виході напруга дорівнює $u_R(t_1)$. Оскільки вхід замкнений, конденсатор під'єднується паралельно до виходу з протилежною полярністю напруги та виконує функцію джерела напруги. Це призводить до зміни напрямків струму та напруги на виході кола після моменту часу t_1 , як показано на рис. 2.11. Швидкість зміни напруги на виході кола визначається швидкістю заряду (розряду) конденсатора, яка залежить від постійної часу $\tau = RC$.

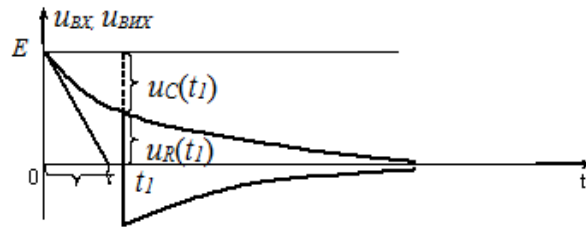


Рисунок 2.11 – Зміна напрямку напруги на виході диференціюючого кола

Аналогічний розглянутому підхід можна застосувати до аналізу диференціюючого **RL**-кола. Диференційні рівняння для **RL** та **RC** диференціюючих кіл відрізняються лише напругами на виході та константами:

$$\text{RC-коло: } u_{\text{вих}} = x = u_R, \quad k = \frac{1}{RC}, \quad \tau = RC;$$

$$\text{RL-коло: } u_{\text{вих}} = x = u_L, \quad k = \frac{R}{L}, \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

На завершення прикладу 2.2 в якості альтернативи до класичного підходу [Р:2] розглянемо застосування перетворення Лапласа до розв'язання диференційного рівняння диференціюючого **RC**-кола

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} u_R = 0.$$

Завдяки властивості диференціювання (1.51) перетворення Лапласа, отримаємо зображення диференційного рівняння в області комплексної частоти

$$pU_R(p) - u_R(0) + \frac{U_R(p)}{RC} = 0.$$

За умови незарядженого конденсатора, як зазначено вище, $u_R(0) = E$. Маємо алгебраїчне рівняння відносно $U_R(p)$ та результат його розв'язання:

$$U_R(p)(p + \frac{1}{RC}) = E,$$

$$U_R(p) = E / (p + \frac{1}{RC}).$$

Відповідно до прикладу 1.2, отриманому зображенню напруги на резисторі відповідає наступний оригінал цієї напруги у часі:

$$u_R = E e^{-\frac{1}{RC}t},$$

що співпадає з отриманим вище результатом із застосуванням класичного підходу.

Диференціююче коло можна розглядати в частотній області як фільтр високих частот [Р:2], що пропускає сигнали високих частот і не пропускає сигнали низьких частот на відміну від інтегруючого кола. Це пов'язано з дуже малим ємнісним опором $Z_C(p)$ на високій частоті вхідного сигналу, завдяки чому сигнал на вихід **RC**-кола проходить майже без втрат. Аналогічна ситуація на високій частоті складається в **RL**-колі: завдяки дуже високому індуктивному опору $Z_L(p)$, струм в колі незначний і сигнал на виході кола майже не відрізняється від вхідного.

Для порівняння, на рис. 2.12 наведено результати проходження (напруги на виході) прямокутного імпульсу з амплітудою U_m через інтегруюче та диференціююче кола за умови, що тривалості імпульсу $t_2 - t_1$ достатньо для накопичення енергії в реактивних елементах.

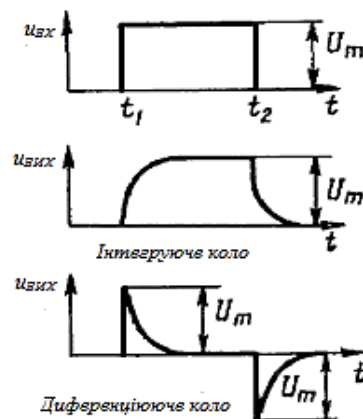


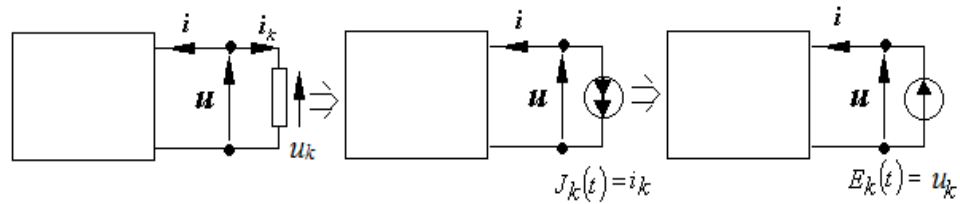
Рисунок 2.12 – Проходження імпульсу через інтегруюче та диференціююче кола

2.3. Теорема лінійних кіл

Застосування теорем лінійних кіл в деяких випадках дає можливість спростити задачу аналізу кола.

2.3.1. Теорема заміщення

Будь-який елемент кола зі струмом i_k і напругою u_k можна замінити (представити) або джерелом струму зі струмом $J_k(t) = i_k(t)$, або джерелом напруги з напругою $E_k(t) = u_k(t)$, що ілюструється рис. 2.13 [Р:1, В:6].



$$i + i_k = 0$$

$$i + J_k(t) = 0$$

$$u - E_k(t) = 0$$

Рисунок 2.13 – Заміщення елемента джерелом струму або напруги

Доказ базується на застосуванні законів Кірхгофа. При заміщенні елемента джерелом струму або напруги перетворюється лише один k -й елемент, а решта кола, позначена на рис. 2.13 «чорною скринькою», залишається без змін. Таким чином, напруга u та струм i на її виході не змінюються. Застосовуючи перший та другий закони Кірхгофа, можна впевнитися в однаковості рівнянь балансу струмів $i_k = -i$ та напруг $u_k = u$ для трьох схем, що доводить теорему.

Теорема заміщення виконується для лінійних кіл з єдиним обмеженням – заміщаючий елемент не може мати зв'язку з рештою кола через взаємну індуктивність, що розглядається в останньому розділі, або залежне джерело.

2.3.2. Теорема накладання (принцип суперпозиції)

Реакція лінійного кола, за умови одночасної дії декількох незалежних джерел, дорівнює сумі реакцій, отриманих від дії кожного джерела окремо (в припущенні, що інші джерела відсутні). Під відсутністю інших джерел маємо на увазі розрив виводів, поміж якими під'єднане незалежне джерело струму, а також коротке замикання виводів, до яких під'єднане джерело напруги [Р:1, В:5, 6].

Доведення даної теореми розглянемо в четвертому розділі при визначенні схемних функцій для схем з багатьма входами (виходами).

2.3.3. Теорема про еквівалентний генератор

Будь-яке лінійне коло з незалежними джерелами на його входах (рис. 2.14) можна представити одним еквівалентним джерелом – з напругою E_0 та внутрішнім опором R_0 або струмом J_0 і внутрішньою провідністю G_0 по відношенню до одного з елементів у вигляді двополюсника довільного виду (лінійного або нелінійного) [Р:1, В:5, 6].

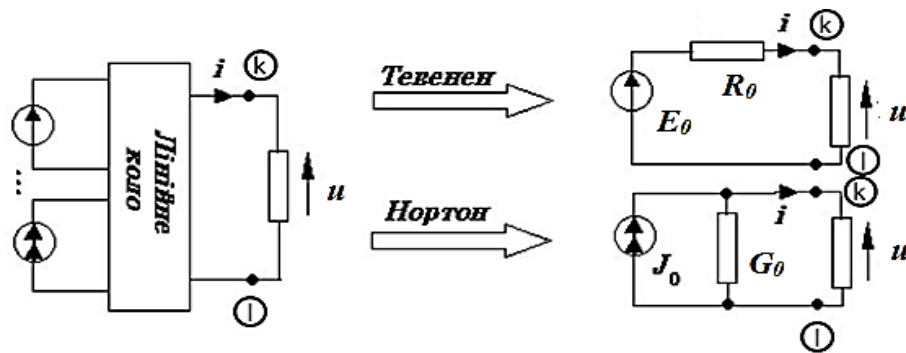


Рисунок 2.14 – Подання кола у вигляді джерела напруги або струму

Теорема Тевенена про еквівалентне джерело напруги: лінійне коло можна замінити одним незалежним джерелом напруги E_0 з послідовним опором R_0 по відношенню до одного з елементів у вигляді двополюсника довільного виду (лінійного або нелінійного). Напруга на клеммах $k-l$ цього джерела дорівнює:

$$u = E_0 - R_0 i. \quad (2.3)$$

Для отримання напруги u на виводах $k-l$ кола з тим же, за умовою еквівалентності, струмом i через обраний елемент, під'єднаний до виводів $k-l$, замінимо його джерелом струму $J = i(t)$, відповідно до теореми заміщення, та застосуємо теорему накладання (принцип суперпозиції). Тоді напруга на виводах $k-l$ складається з двох наступних складових:

1. Складової від дії всіх заданих незалежних джерел у колі за відсутності джерела струму $J = i(t)$, тобто при заміні його розривом. Очевидно, ця складова дорівнює напрузі холостого ходу u_{xx} в місці розриву виводів $k-l$ (рис. 2.15).

2. Складової від дії джерела струму $J = i(t)$ за відсутності всіх незалежних джерел в заданому колі, тобто при заміні джерел напруги коротким замиканням виводів, а джерел струму – розривом виводів, до яких під'єднані джерела (рис. 2.16). Дана складова дорівнює падінню напруги $-i/G_{kl}$ на вхідному опорі кола за відсутності джерел з боку виводів $k-l$, де G_{kl} – вхідна провідність кола з боку виводів $k-l$. Знак зазначеного падіння напруги обумовлений її напрямком, протилежним напрузі u (рис. 2.17).

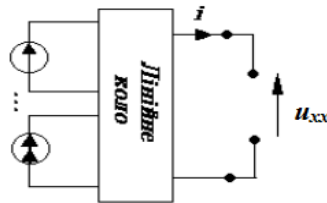


Рисунок 2.15 – Напруга холостого ходу у місці розриву виводів $k-l$

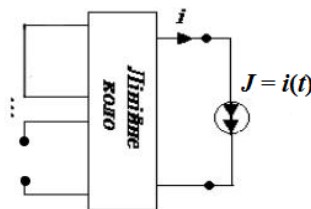


Рисунок 2.16 – Коло під дією джерела струму $J = i(t)$

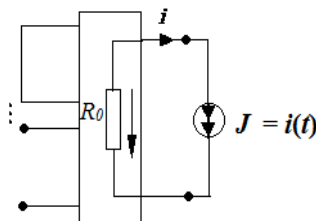


Рисунок 2.17 – Напрямок падіння напруги на опорі $R_0 = 1/G_{kl}$

Отже, напруга на виході розглянутого кола за теоремою накладання:

$$u = u_{xx} - (i / G_{kl}). \quad (2.4)$$

Порівняємо отриманий вираз і рівняння (2.3). В результаті приходимо до висновку, що напруга еквівалентного джерела напруги дорівнює напрузі в місці розриву виводів $k-l$:

$$E_0 = u_{xx}, \quad (2.5)$$

а внутрішній опір джерела напруги дорівнює вхідному опору розглянутого кола з боку виводів $k-l$, за відсутності в ньому незалежних джерел:

$$R_0 = 1 / G_{kl}. \quad (2.6)$$

Оскільки вольт-амперна характеристика елемента, під'єданого до виводів $k-l$, не враховувалась, вона може бути не обов'язково лінійною. Якщо ж ВАХ елемента лінійна (в окремому випадку), а його опір дорівнює R_k , тоді відповідний струм дорівнює:

$$i_k = E_0 / (R_0 + R_k). \quad (2.7)$$

Теорема Нортонa [В:6] про еквівалентне джерело струму: лінійне коло можна замінити джерелом струму J_0 з внутрішньою провідністю G_0 по відношенню до одного з елементів у вигляді двополюсника довільного виду (лінійного або нелінійного). Для доведення теореми достатньо скористатись еквівалентним перетворенням (1.8) джерела напруги E_0 в джерело струму J_0 . Якщо ж для доведення застосувати теореми заміщення та накладання, доведеться замінити k -й елемент джерелом напруги $E=u(t)$ та розглянути дві складові струму i за відсутності цього джерела (виводи $k-l$ закорочено, а складова є струмом короткого замикання $i_{кз}$) та під дією джерела ($-u/R_{kl}$, R_{kl} – вхідний опір кола з боку виводів $k-l$), що дає наступне рівняння еквівалентного джерела струму:

$$i = i_{кз} - (u / R_{kl}), \quad (2.8)$$

звідки маємо наступні параметри цього джерела:

$$J_0 = i_{кз}; \quad (2.9)$$

$$G_0 = 1 / R_{kl}. \quad (2.10)$$

Теорема про еквівалентний генератор спрощує розрахунки в тих випадках, коли розрив або коротке замикання якогось елемента суттєво спрощує структуру кола. Єдине обмеження на застосування теореми: виключається зв'язок елемента з колом через взаємну індуктивність або залежне джерело.

2.3.4. Приклади застосування теорем лінійних кіл

Приклад 2.3. Застосування теореми накладання [Р:1, В:5]. Необхідно розрахувати струми в схемі, зображеній на рис. 2.18. Умовні додатні напрямки струмів, які необхідно розрахувати, позначені в резисторах R_1 , R_2 .

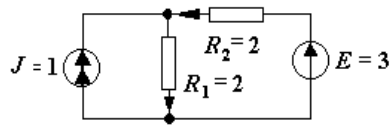


Рисунок 2.18 – Задана схема з умовними додатними напрямками струмів

Припустимо спочатку, що діє лише джерело струму J . Відповідна схема зображена на рис. 2.19. Напрямки струмів визначаються єдиним діючим джерелом струму J . Розрахуємо напругу на паралельно з'єднаних резисторах:

$$u'_{12} = J / (G_1 + G_2) = 1.$$

За законом Ома відповідні струми дорівнюють:

$$i'_{R_1} = i'_{R_2} = 1/2.$$

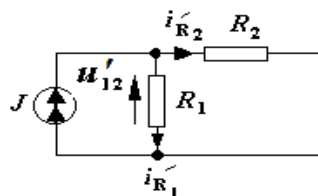


Рисунок 2.19 – Схема з діючим джерелом струму

В схемі, зображеній на рис. 2.20, діє лише джерело напруги E . Струми в схемі з послідовним з'єднанням елементів (джерело струму розірване) однакові:

$$i''_{R_1} = i''_{R_2} = E / (R_1 + R_2) = 3/4.$$

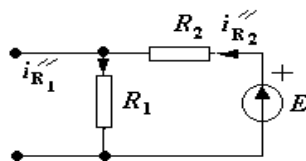


Рисунок 2.20 – Схема з діючим джерелом напруги

Порівнюючи напрямки струмів в схемах на рис. 2.19, 2.20 з умовними додатними напрямками струмів, позначеними на рис. 2.18, складаємо рівняння для визначення струмів елементів при одночасній дії незалежних джерел:

$$i_{R_1} = i'_{R_1} + i''_{R_1} = 1\frac{1}{4}.$$

$$i_{R_2} = -i'_{R_2} + i''_{R_2} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 2.4. Застосування теореми про еквівалентний генератор [В:5].
Необхідно розрахувати струм в резисторі R_3 в схемі, зображений на рис. 2.21.

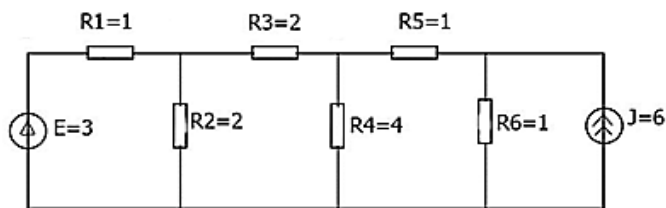


Рисунок 2.21 – Задана для розрахунку схема

Відповідно до теореми, вилючаємо резистор R_3 для визначення напруги холостого ходу u_{xx} (рис. 2.22), а також виконуємо еквівалентне перетворення джерела струму J в джерело напруги E' :

$$E' = JR_6 = 6.$$

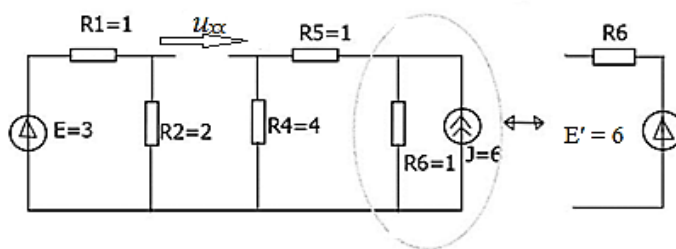


Рисунок 2.22 – Напруга холостого ходу та перетворення джерела струму

Схема на рис. 2.22 розділена на дві частини, кожна з яких розрахуємо окремо.

$$u_{R_2} = ER_2 / (R_1 + R_2) = 6 / (1 + 2) = 2;$$

$$u_{R_4} = E'R_4 / (R_4 + R_5 + R_6) = 24 / (4 + 1 + 1) = 4;$$

Напруга холостого ходу визначається з рівняння, сформованого за другим законом Кірхгофа (контур з напруг u_{xx} , u_{R_4} , u_{R_2}):

$$u_{xx} = E_0 = u_{R_2} - u_{R_4} = 2 - 4 = -2.$$

Отже, маємо напругу E_0 еквівалентного джерела напруги (генератора). Далі розраховуємо вхідний опір кола по відношенню до виводів, поміж якими прикладена напруга u_{xx} . Після виключення незалежних джерел напруги E та струму J , маємо схему на рис. 2.23 для визначення вхідного опору кола.

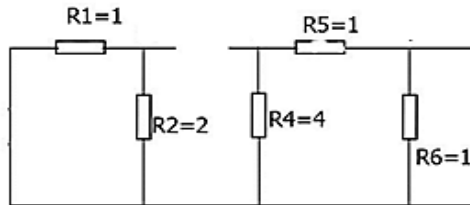


Рисунок 2.23 – Схема для визначення вхідного опору

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{(R_5 + R_6) R_4}{(R_5 + R_6) + R_4} = \frac{2}{1+2} + \frac{8}{2+4} = 2.$$

В результаті маємо можливість розрахувати струм через R_3 :

$$i_{R_3} = \frac{E_0}{R_0 + R_3} = \frac{-2}{2+2} = -1/2.$$

Знак струму показує, що реальний напрямок напруг u_{xx} та u_{R_3} протилежний позначеному на рис. 2.22.

Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Поясніть поняття вузла кола.
2. Що називають контуром кола?
3. Поясніть поняття реакції кола.
4. В чому полягає задача аналізу кола?
5. Що називають входом, виходом кола?
6. Чим відрізняється двополюсник від чотирьохполосника?
7. Які дві групи рівнянь необхідні для розв'язання задачі аналізу кола?
8. Наведіть приклади рівнянь елементів.
9. Які рівняння називають топологічними рівняннями?

10. Чим відрізняються рівняння з'єднань від рівнянь елементів?
11. Що є базою для формування топологічних рівнянь?
12. Який закон пов'язує струми елементів, що сходяться у вузлах?
13. Який закон пов'язує напруги на елементах, що входять в контури?
14. Яка кількість незалежних рівнянь за першим законом Кірхгофа?
15. Яка загальна кількість топологічних рівнянь кола?
16. Які кола називають інтегруючими?
17. На вхід інтегруючого **RC**-кола в момент часу $t = 0$ подається стрибок напруги 5 В. Визначити напругу на виході кола в момент часу $t = 0$.
18. На виході інтегруючого **RL**-кола після завершення перехідного процесу встановилась напруга 3 В. Яка напруга діє на вході кола?
19. Який режим пов'язують з процесами накопичення енергії в реактивних елементах?
20. В який режим переходить схема після завершення перехідних процесів?
21. Конденсатор з ємністю 2 мкФ заряджається через резистор з опором 500 кОм. Визначити постійну часу заряду конденсатора.
22. Індуктивна котушка з індуктивністю 1 мГн накопичує енергію завдяки струму через резистор з опором 1 кОм. Визначити постійну часу накопичення енергії в індуктивній котушці.
23. Чим відрізняються постійні часу конденсатора та індуктивної котушки?
24. Поясніть поняття часу затримки.
25. Які кола називають диференціюючими?
26. На вхід диференціюючого **RC**-кола в момент часу $t = 0$ подається стрибок напруги 5 В. Визначити напругу на виході кола в момент часу $t = 0$.
27. Яка напруга встановиться на виході диференціюючого **RL**-кола після завершення перехідного процесу накопичення енергії в індуктивній котушці, якщо на вхід кола подається напруга 1 В?
28. Які заміни в колі дає змогу виконати теорема заміщення?
29. Сформулюйте теорему накладання (принцип суперпозиції).

30. До кола під'єднано два джерела напруги. Під дією першого джерела в навантаженні виникає струм 3 А, під дією другого джерела – струм 1 А, але протилежного напрямку. Визначити струм під дією двох джерел.
31. Схема по відношенню до навантаження 2 кОм представлена еквівалентним генератором з напругою 12 В та внутрішнім опором 4 кОм. Який струм в мА тече в навантаженні?
32. Схема по відношенню до навантаження 1 кОм представлена еквівалентним генератором з напругою 5 В та внутрішнім опором 4 кОм. Який струм в мА тече в навантаженні?
33. Яку напругу називають напругою холостого ходу?
34. Схема по відношенню до навантаження 2 Ом представлена еквівалентним генератором зі струмом 10 А та внутрішнім опором 3 Ом. Яке падіння напруги на навантаженні?
35. Схема по відношенню до навантаження 4 Ом представлена еквівалентним генератором зі струмом 6 А та внутрішнім опором 2 Ом. Яке падіння напруги на навантаженні?
36. Який струм називають струмом короткого замикання?

3. МЕТОД ВУЗЛОВИХ НАПРУГ

Метод вузлових напруг є методом формування системи рівнянь для заданої схеми. В якості незалежних змінних приймаються **напруги вузлів (вузлові напруги)** або **потенціали вузлів (вузлові потенціали)** схеми відносно одного вузла, вибраного в якості **базисного** або «**заземленого**» вузла (вузла з нульовим потенціалом). За базисний часто приймають вузол, в якому з'єднано найбільшу кількість елементів, або спільний вузол між входом та виходом схеми [Р:2, В:5, 6].

Метод вузлових напруг базується на сформованих певним чином топологічних рівняннях та рівняннях елементів. Як показано вище, загальна кількість таких рівнянь може бути значною, тому суть метода полягає в комбінуванні цих рівнянь таким чином, щоб в результаті отримати компактну систему рівнянь. Важливою для подальшого розв'язання системи рівнянь є також можливість отримання матричного вигляду системи. Метод вузлових напруг дає змогу сформувати систему вузлових рівнянь у матричному вигляді, при цьому застосовуються прості правила врахування параметрів елементів. Однією з суттєвих переваг даного методу аналізу є відносна простота програмної реалізації формування системи рівнянь на відміну від методу контурних струмів, який також дає змогу сформувати систему рівнянь у матричному вигляді [Р:1, 2, В:5, 6]. Більшість сучасних програмних засобів аналізу схем побудовано на базі методу вузлових напруг.

В подальшому розглядаємо формування систем топологічних рівнянь, рівнянь елементів і вузлових рівнянь в матричному вигляді, що дає змогу поширювати формальним способом отримані рівняння на схеми будь-якої структури, а також спростити процес отримання рівнянь за рахунок методики, яка складається з набору правил врахування параметрів елементів у відповідній структурі системи вузлових рівнянь [Р:1, В:5, 6]. Таким чином, досягаємо формалізації та спрощення процесу створення системи вузлових рівнянь. В той же час, зауважимо, що у випадку складних схем розв'язання створених систем

рівнянь «вручну» пов'язано із значними витратами часу та, зазвичай, потребує застосування відповідного програмного забезпечення. Тому в подальшому зосередимось саме на формуванні математичного опису схеми.

3.1. Топологічні рівняння та рівняння елементів

3.1.1. Матриця інцидентії (з'єднань)

Розглянемо поняття графу, який описує властивості кола, пов'язані з взаємним розміщенням елементів, тобто з топологією схеми. Графом схеми називають сукупність двох множин – вузлів (в математиці – вершин), зображених точками, та елементів (в математиці – ребер), зображених відрізками ліній, які з'єднують пари вузлів. Застосування елементів теорії графів пов'язано з тим, що рівняння балансу струмів і напруг, сформовані за законами Кірхгофа, залежать лише від топології схеми (геометричної структури) та не залежать від вольт-амперних характеристик елементів, тобто фізичного змісту елементів. Саме тому при формуванні рівнянь зручно відволікатися від виду елементів, замінивши їх лініями [Р:1, В:5, 6].

Оскільки кожному вузлу та кожному елементу схеми відповідає вузол та елемент графа, граф містить всю інформацію про топологію заданої схеми. Створення рівнянь за законами Кірхгофа починається з того, що на всіх елементах графа вказують умовні додатні напрямки струмів. В результаті отримуємо **направлений граф** струмів схеми [В:5, 6]. Напрямки напруг на елементах протилежні умовним додатнім напрямкам струмів. Часто вказаний граф застосовують також для формування рівнянь за другим законом Кірхгофа, оскільки зміна всіх напрямків струмів на протилежні не призведе до зміни відповідних рівнянь. Застосування поняття графу приводить до матричного вигляду топологічних рівнянь, сформованих на основі законів Кірхгофа. Важлива умова стосовно отриманих рівнянь полягає в їх лінійній незалежності – жодне з рівнянь не може формуватися в результаті лінійної комбінації інших рівнянь.

Розглянемо в якості прикладу схему, що складається з незалежного джерела струму та резисторів, в яких встановлені довільні умовні напрямки струмів (рис. 3.1). Відповідний направлений граф з нумерацією вузлів, елементів, напрямками струмів та вузлових напруг зображений на рис. 3.2.

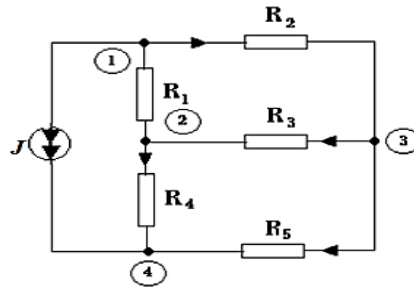


Рисунок 3.1 – Схема з нумерацією вузлів і умовними напрямками струмів

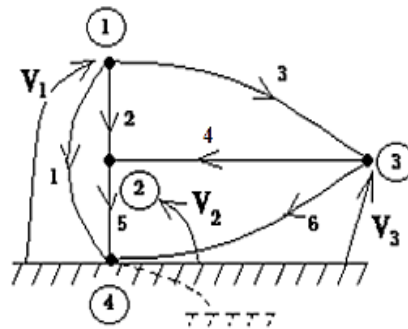


Рисунок 3.2 – Граф з нумерацією елементів, напрямками струмів та вузлових напруг

Отже, аналітичний опис структури графа формується у вигляді таблиць, які називають топологічними матрицями. Позначимо кількість вузлів та елементів через n і m відповідно (в наведеному прикладі $n = 4$, $m = 6$). Повний аналітичний опис структури направленного графа дає таблиця або матриця інцидентії [Р:1, В:5, 6, 7] розмірності $n \times m$, n рядків якої відповідають порядковим номерам вузлів, а m стовпців – номерам елементів. Клітиною a_{ik} цієї таблиці є ознака наявності або відсутності елемента k , приєднаного до вузла i , яка приймається рівною $+1$, (-1) для струму, що виходить з вузла (входить у вузол), та 0 , якщо струм елемента не пов'язаний з вузлом.

Для запису матриці інцидентії, достатньо для кожного елемента визначити номери обох інцидентних вузлів i, j і заповнити клітини на перетинах рядків i, j та стовпця з номером елемента k значеннями $+1$ (-1) ; решту клітин

заповнюємо нулями. Для наведеного на рис. 3.2 графа отримаємо повну матрицю інцидентії

$$A_n = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} \end{matrix} .$$

Повна матриця інцидентії характеризується лінійною залежністю рядків: кожен стовпець складається з двох ненульових клітин (+1 та -1), а сума їх значень дорівнює нулю (кожен елемент схеми з'єднує два вузли – виходить з одного вузла та входить в інший). Отже, достатньо заповнити таблицю для $n-1$ вузлів і отримати **редуковану матрицю інцидентії A** . Цю матрицю можна також отримати з повної матриці A_n шляхом викреслення рядка відповідно до обраного базисного вузла [В:5, 6].

Прийmemo в прикладі на рис. 3.2 в якості базисного вузол 4. Викресливши відповідний рядок матриці A_n , отримаємо редуковану матрицю інцидентії

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix} . \quad (3.1)$$

Рядок матриці A показує, як струми приєднаних до відповідного вузла елементів спрямовані по відношенню до нього, а стовпець – до яких вузлів підключений елемент.

3.1.2. Закони Кірхгофа в матричному вигляді

Як показано вище, на відміну від повної матриці A_n в редукованій матриці інцидентії рядки лінійно-незалежні. Звідси можна зробити висновок про те, що рівняння балансу струмів в $n-1$ вузлах кола, отримані із застосуванням матриці A_n , також лінійно-незалежні.

Введемо вектор струмів m елементів

$$\mathbf{i} = [i_1, i_2, \dots, i_m]^T, \quad (3.2)$$

де T – операція транспонування.

Тоді систему незалежних рівнянь балансу струмів в $n-1$ вузлах, у відповідності до першого закону Кірхгофа, можна записати наступним чином [Р:1, В:5]:

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

де $\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]^T$ – нульовий вектор розмірності $n-1$.

Для розглянутого прикладу маємо

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array} & \times & \begin{array}{|c|}
 \hline i_1 \\
 \hline i_2 \\
 \hline i_3 \\
 \hline i_4 \\
 \hline i_5 \\
 \hline i_6 \\
 \hline
 \end{array} & = & \begin{array}{|c|}
 \hline 0 \\
 \hline 0 \\
 \hline 0 \\
 \hline
 \end{array} . & (3.4)
 \end{array}$$

Введемо вектор напруг на m елементах:

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T, \quad (3.5)$$

а також вектор вузлових напруг:

$$\mathbf{V} = [V_1, V_2, \dots, V_{n-1}]^T. \quad (3.6)$$

Скористаємось транспонованою матрицею інцидентії $\mathbf{A}^T$, кожен рядок якої відповідає елементу схеми та містить знаки напруг вузлів (i, j) , між якими він підключений. Множення рядка на вектор вузлових напруг $\mathbf{V}$ дає різницю потенціалів або напругу на відповідному елементі схеми u_k ($k=1,2,\dots, m$)

$$u_k = V_i - V_j. \quad (3.7)$$

Тому кожне утворене таким чином рівняння еквівалентне балансу напруг у відповідному контурі, що складається з вузлових напруг і напруги на елементі схеми. Звідси за другим законом Кірхгофа можемо записати систему незалежних рівнянь балансу напруг у m контурах [Р:1, В:5]:

$$u = A^T V. \quad (3.8)$$

Для розглянутого вище прикладу маємо:

$$\begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline u_3 \\ \hline u_4 \\ \hline u_5 \\ \hline u_6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline \end{array}. \quad (3.9)$$

3.1.3. Рівняння елементів у матричному вигляді

Для отримання рівнянь елементів у матричному вигляді зробимо наступні припущення: 1) всі незалежні джерела напруги в схемі, що розглядається, перетворені в джерела струму із застосуванням еквівалентних перетворень джерел; 2) кожен k -й елемент схеми представлений у вигляді паралельного з'єднання самого елемента з провідністю Y_k та незалежного джерела струму J_{ok} (рис. 3.3). Для даного паралельного з'єднання справедливе рівняння:

$$i_k = Y_k u_k - J_{ok} \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (3.10)$$

отримане із застосуванням першого закону Кірхгофа. В залежності від типу елемента (а – резистор; б – конденсатор; в – індуктивна котушка) параметри

схем на рис. 3.3 приймають відповідні значення: ($Y_k = 1/R_k = G_k$, $J_{ok} = 0$; $Y_k = pC_k$, $J_{ok} = C_k u_k(0)$; $Y_k = 1/pL_k$, $J_{ok} = -i_k(0)/p$). При цьому для реактивних елементів застосовані їх операторні схеми заміщення в області комплексної частоти (рис. 1.23). У випадку незалежного джерела струму можна застосувати схему рис. 3.3а, параметри якої визначаються наступним чином: J_{ok} – дорівнює струму незалежного джерела з протилежним знаком (3.10), Y_k – дорівнює внутрішній провідності незалежного джерела (0, якщо внутрішня провідність не задана).

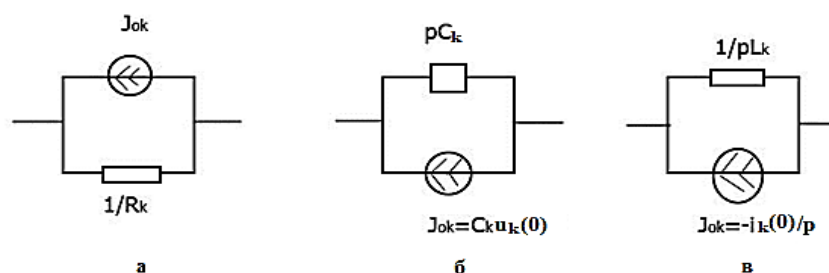


Рисунок 3.3 – Пасивні елементи, представлені у вигляді схем заміщення

Такий підхід дає змогу представити рівняння елементів схеми в матричному вигляді. Додатково до введених виразами (3.2), (3.5) векторів, визначимо вектор параметрів незалежних джерел струму

$$J_0 = [J_{01}, J_{02}, \dots, J_{0m}]^T, \quad (3.11)$$

а також матрицю параметрів пасивних елементів

$$Y_e = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Y_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & Y_2 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & Y_m \\ \hline \end{array} . \quad (3.12)$$

Тоді систему рівнянь елементів схеми можна записати у вигляді [Р:1, В:5]:

$$i = Y_e u - J_0. \quad (3.13)$$

Для схеми на рис. 3.1 система рівнянь елементів набуває вигляду:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -J \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (3.14)$$

3.2. Формування системи вузлових рівнянь

На базі топологічних рівнянь та рівнянь елементів сформуємо систему вузлових рівнянь. Процедура формування складається з наступних етапів:

1. В системі рівнянь за першим законом Кірхгофа (3.3) вектор струмів елементів $\mathbf{i}$ замінимо його виразом із системи рівнянь елементів (3.13):

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}_e \mathbf{u} - \mathbf{A} \mathbf{J}_0 = \mathbf{0}. \quad (3.15)$$

2. В отриманій системі рівнянь вектор напруг на елементах $\mathbf{u}$ замінимо його виразом із системи рівнянь за другим законом Кірхгофа (3.8):

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}_e \mathbf{A}^T \mathbf{V} - \mathbf{A} \mathbf{J}_0 = \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

3. Вектор $\mathbf{J} = \mathbf{A} \mathbf{J}_0$, який складається з лінійної комбінації струмів незалежних джерел струму, переносимо до правої частини системи рівнянь:

$$\mathbf{Y} \mathbf{V} = \mathbf{J}, \quad (3.17)$$

де $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_e \mathbf{A}^T$ – матриця вузлових провідностей розмірності $(n - 1) \times (n - 1)$, n – загальна кількість вузлів заданої схеми [Р:1, В:5, 6]. Вектор $\mathbf{J}$ також називають **вектором сумарних вузлових струмів**.

Таким чином, на базі топологічних рівнянь (їх загальна кількість складає $n - 1 + m$, де m – кількість елементів заданої схеми) та рівнянь елементів (їх загальна кількість складає m) отримана компактна система $n - 1$ вузлових рівнянь. Результатом розв’язання цієї системи є **вектор вузлових напруг $\mathbf{V}$**

розмірності $(n - 1)$. Напруги на елементах схеми, які складають вектор $\mathbf{u}$, за необхідністю визначаються з системи рівнянь (3.8).

Розглянемо приклади формування вузлових рівнянь.

Приклад 3.1. Для схеми на рис. 3.1 сформуємо систему вузлових рівнянь, при цьому для кращого розуміння структури рівнянь представимо топологічні рівняння (3.4), (3.9) та рівняння елементів (3.14) у звичайному вигляді.

Із системи (3.4), що записана за першим законом Кірхгофа, отримаємо три рівняння шляхом множення матриці $\mathbf{A}$ на вектор $\mathbf{i}$:

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &= 0; \\ -i_2 - i_4 + i_5 &= 0; \\ -i_3 + i_4 + i_6 &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Із системи (3.9), що записана за другим законом Кірхгофа, отримаємо шість рівнянь шляхом множення матриці $\mathbf{A}^T$ на вектор $\mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} u_1 &= V_1; \\ u_2 &= V_1 - V_2; \\ u_3 &= V_1 - V_3; \\ u_4 &= -V_2 + V_3; \\ u_5 &= V_2; \\ u_6 &= V_3. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Із системи рівнянь елементів (3.14) отримаємо шість рівнянь для струмів елементів типу, зображеного на рис. 3.3а:

$$\begin{aligned} i_1 &= J; \\ i_2 &= G_1 u_2; \\ i_3 &= G_2 u_3; \\ i_4 &= G_3 u_4; \\ i_5 &= G_4 u_5; \\ i_6 &= G_5 u_6. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Поетапно проведемо формування системи вузлових рівнянь.

1. В системі рівнянь (3.18) замінимо струми елементів їх виразами із системи (3.20):

$$\begin{aligned}
J + G_1 u_2 + G_2 u_3 &= 0; \\
- G_1 u_2 - G_3 u_4 + G_4 u_5 &= 0; \\
- G_2 u_3 + G_3 u_4 + G_5 u_6 &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

2. В отриманих рівняннях замінимо напруги на елементах їх виразами із системи (3.19):

$$\begin{aligned}
J + G_1 (V_1 - V_2) + G_2 (V_1 - V_3) &= 0; \\
- G_1 (V_1 - V_2) - G_3 (-V_2 + V_3) + G_4 V_2 &= 0; \\
- G_2 (V_1 - V_3) + G_3 (-V_2 + V_3) + G_5 V_3 &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.22}$$

3. Формуємо кінцевий вигляд системи вузлових рівнянь:

$$\begin{cases}
(G_1 + G_2)V_1 - G_1 V_2 - G_2 V_3 = -J; \\
- G_1 V_1 + (G_1 + G_3 + G_4)V_2 - G_3 V_3 = 0; \\
- G_2 V_1 - G_3 V_2 + (G_2 + G_3 + G_5)V_3 = 0.
\end{cases}
\tag{3.23}$$

Представимо отриману систему вузлових рівнянь в матричному вигляді:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline G_1 + & & \\ G_2 & - G_1 & - G_2 \\ \hline - G_1 & G_1 + & \\ & G_3 + & - G_3 \\ & G_4 & \\ \hline - G_2 & - G_3 & G_2 + \\ & & G_3 + \\ & & G_5 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -J \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}. \tag{3.24}$$

Приклад 3.2. Розглянемо фрагмент схеми з реактивними елементами, зображений на рис. 3.4 [Р:1, В:5]. В наведеному фрагменті кожен реактивний елемент представлений схемою заміщення відповідно до рис. 3.3. Незалежне джерело струму J_{01} має внутрішню провідність G . Для кожної пари паралельно з'єднаних елементів встановлені умовні напрямки струмів i_1, i_2, i_3 , відповідні напрямки напруг u_1, u_2, u_3 , а також показані напрямки вузлових напруг V_1, V_2, V_3 .

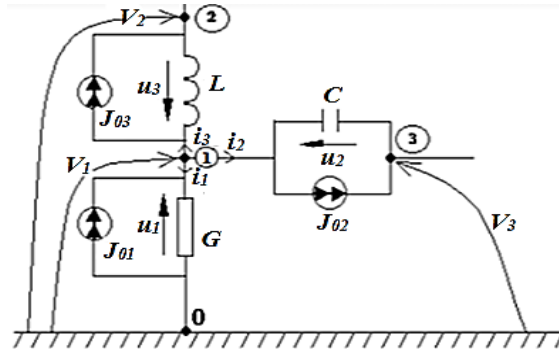


Рисунок 3.4 – Фрагмент схеми з реактивними елементами

Оскільки в даному фрагменті відсутня інформація про всі елементи, приєднані до вузлів 2 і 3, поетапно сформуємо єдине вузлове рівняння для вузла 1. Спочатку отримаємо топологічні рівняння та рівняння елементів.

За першим законом Кірхгофа можливо записати єдине рівняння балансу струмів у вузлі 1:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0. \quad (3.25)$$

Напруги на елементах за другим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} u_1 &= V_1; \\ u_2 &= V_1 - V_3; \\ u_3 &= V_1 - V_2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Рівняння елементів:

$$\begin{aligned} i_1 &= G u_1 - J_{01}; \\ i_2 &= pC u_2 + J_{02}; \\ i_3 &= (1/pL) u_3 + J_{03}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

1. Замінімо струми в рівнянні (3.25) їх виразами з рівнянь (3.27):

$$G u_1 + pC u_2 + (1/pL) u_3 - J_{01} + J_{02} + J_{03} = 0. \quad (3.28)$$

2. В отриманому рівнянні напруги на елементах виразимо через вузлові напруги (різниці потенціалів вузлів) відповідно до (3.26):

$$G V_1 + pC (V_1 - V_3) + (1/pL) (V_1 - V_2) - J_{01} + J_{02} + J_{03} = 0. \quad (3.29)$$

3. Після перегрупування складових рівняння (3.29) отримаємо вузлове рівняння для вузла 1:

$$[G + pC + (1/pL)] V_1 - (1/pL) V_2 - (pC) V_3 = J_{01} - J_{02} - J_{03}. \quad (3.30)$$

У загальному вигляді, як частину матричного запису системи вузлових рівнянь (3.17), вираз (3.30) можна подати так:

$$y_{11} V_1 + y_{12} V_2 + y_{13} V_3 = J_1,$$

а відповідні рівняння для вузлів 2 і 3 мають наступний загальний вигляд:

$$y_{21} V_1 + y_{22} V_2 + y_{23} V_3 = J_2,$$

$$y_{31} V_1 + y_{32} V_2 + y_{33} V_3 = J_3,$$

де коефіцієнти при вузлових напругах є елементами матриці Y .

У випадку $n - 1$ вузлів схеми, система вузлових рівнянь має загальний вигляд:

$$\begin{cases} y_{11}V_1 + y_{12}V_2 + \dots + y_{1,n-1}V_{n-1} = J_1 \\ y_{21}V_1 + y_{22}V_2 + \dots + y_{2,n-1}V_{n-1} = J_2 \\ \dots \\ y_{n-1,1}V_1 + y_{n-1,2}V_2 + \dots + y_{n-1,n-1}V_{n-1} = J_{n-1} \end{cases} \quad (3.31)$$

Коефіцієнти при вузлових напругах системи (3.31) мають розмірність провідності та складають матрицю вузлових провідностей:

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1,n-1} \\ \hline y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2,n-1} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline y_{n-1,1} & y_{n-1,2} & \dots & y_{n-1,n-1} \\ \hline \end{array} . \quad (3.32)$$

Як видно з наведених прикладів 3.1, 3.2, кожен коефіцієнт y_{jj} складений із суми провідностей всіх пасивних елементів схеми, приєднаних до вузла j . Цей коефіцієнт, розташований на діагоналі матриці (3.32), отримав назву: **власна провідність вузла j** ($j=1, 2, \dots, n-1$). В той же час, коефіцієнти $y_{jl} = y_{lj}$ ($j \neq l$) складені із суми провідностей елементів, що з'єднують вузли j, l , взятої з від'ємним знаком. Коефіцієнти $y_{jl} = y_{lj}$ ($j \neq l$), розташовані поза діагоналлю матриці (3.32), отримали назву: **взаємні провідності вузлів j, l** ($j, l = 1, 2, \dots, n-1$; $j \neq l$). Наведена закономірність визначення коефіцієнтів системи рівнянь (3.31) значно спрощує її формування в матричному вигляді, а матриця вузлових

провідностей Y виходить симетричною відносно головної діагоналі [Р:1, 2, В:5, 6].

Елементи J_j вектора сумарних вузових струмів

$$J = [J_1, J_2, \dots, J_{n-1}]^T \quad (3.33)$$

складаються із алгебраїчної суми струмів незалежних джерел струму, приєднаних до вузла j . Знаки струмів незалежних джерел визначаються відповідно до першого закону Кірхгофа, застосованого до струмів джерел J_0 , перенесених в іншу частину системи рівнянь (3.15), а саме: струми джерел, спрямовані до вузла j , враховуються зі знаком «+», у іншому випадку – зі знаком «-». Далі, для формалізації процесу отримання системи вузових рівнянь у матричному вигляді, представимо методику її формування, враховуючи наведені відомості стосовно запису матриці вузових провідностей і вектора сумарних вузових струмів.

3.3. Методика формування системи вузових рівнянь

Методика формування системи вузових рівнянь у матричному вигляді складена з правил врахування параметрів елементів в структурах матриці вузових провідностей Y і вектора сумарних вузових струмів J . Для визначення розмірності матриці Y та векторів V, J системи вузових рівнянь, необхідно виконати нумерацію вузлів схеми, обравши базисний вузол [Р:1, В:5, 6].

3.3.1. Правило врахування параметрів пасивних елементів

Виходячи з наведених вище закономірностей формування власної та взаємної провідностей вузлів, параметри пасивних елементів враховуються в матриці вузових провідностей Y наступним чином. Для k -го елемента з узагальненою провідністю y_k , що може приймати значення з множини

$$\left\{ G_k, pC_k, 1/pL_k \right\},$$

включеного між вузлами j, l (рис. 3.5), діє наступне правило: провідність y_k має бути розміщена зі знаком «+» в клітинах матриці (рис. 3.6), які містять власні провідності вузлів j та l (діагональні клітини jj та ll), а також – зі знаком «-» в клітинах, які містять взаємні провідності вузлів j та l (клітини jl та lj).

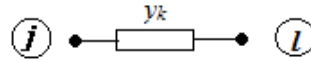


Рисунок 3.5 – Пасивний елемент з провідністю y_k

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & j & l \\
 \begin{array}{c} j \\ l \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline y_k & -y_k \\ \hline -y_k & y_k \\ \hline \end{array} &
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (3.34)$$

Рисунок 3.6 – Фрагмент матриці вузлових провідностей Y

Очевидно, що застосування даного правила не потребує встановлення умовного напрямку струму через пасивний елемент.

3.3.2. Правило врахування параметра незалежного джерела струму

Як зазначено вище, струм J_{ok} незалежного джерела струму, включеного між вузлами j, l (рис. 3.7), спрямований до вузла l , враховується у клітині l вектора сумарних вузлових струмів J (рис.3.8) зі знаком «+», а спрямований від вузла j – у клітині j вказаного вектора зі знаком «-».

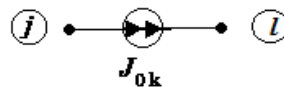


Рисунок 3.7 – Незалежне джерело струму зі струмом J_{ok}

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline -J_{ok} \\ \hline \\ \hline J_{ok} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{c} j \\ \\ l \end{array}
 \end{array}
 \quad (3.35)$$

Рисунок 3.8 – Фрагмент вектора сумарних вузлових струмів

Приклад 3.3. Розглянемо схему (рис. 3.9), складену з резисторів і двох незалежних джерел струму. Застосуємо наведені вище правила та сформуємо систему вузлових рівнянь у матричному вигляді для прийнятої нумерації вузлів [Р:1, В:5].

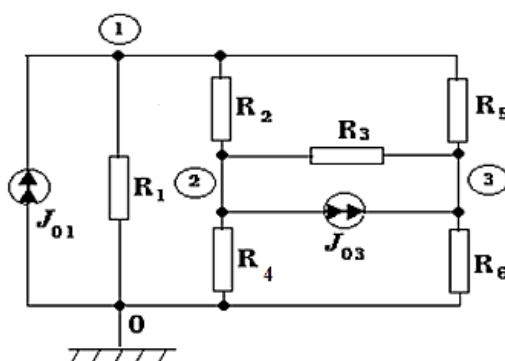


Рисунок 3.9 – Схема з незалежними джерелами струму

Система, складена з трьох рівнянь, має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_5 & -G_2 & -G_5 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & -G_3 \\ -G_5 & -G_3 & G_3 + G_5 + G_6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{01} \\ -J_{03} \\ J_{03} \end{bmatrix} .$$

Еквівалентний запис системи рівнянь в алгебраїчному вигляді:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_5)V_1 - G_2V_2 - G_5V_3 = J_{01} \\ -G_2V_1 + (G_2 + G_3 + G_4)V_2 - G_3V_3 = -J_{03} . \\ -G_5V_1 - G_3V_2 + (G_3 + G_5 + G_6)V_3 = J_{03} \end{cases}$$

Приклад 3.4. На рис. 3.10 зображена схема, складена з резисторів, двох незалежних джерел напруги E_1, E_2 та незалежного джерела струму J . Резистори R_1 та R_3 можна розглядати як внутрішні опори відповідних джерел напруги E_1 та E_2 , що дає змогу застосувати еквівалентне перетворення (1.8) вказаних джерел в незалежні джерела струму [В:5]. Схема, отримана в результаті такого

перетворення, має лише 2 вузли, окрім базисного вузла, та зображена на рис. 3.10.

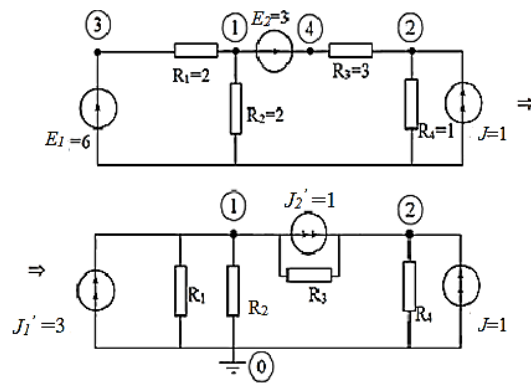


Рисунок 3.10 – Схема з незалежними джерелами напруги та струму та результат її перетворення в схему з незалежними джерелами струму

Сформуємо систему вузових рівнянь у матричному вигляді із застосуванням правил, розглянутих вище. В результаті маємо два рівняння відносно вузових напруг V_1, V_2 :

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1' - J_2' \\ J_2' + J \end{bmatrix}.$$

З урахуванням параметрів елементів, система вузових рівнянь має вигляд:

$$\begin{bmatrix} 4/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок системи вузових рівнянь дає значення вузових напруг:

$$V_1 = 2 ; V_2 = 2.$$

За законом Ома визначаємо струми i_2, i_4 відповідно в резисторах R_2 та R_4 .

$$i_2 = V_1 / R_2 = 1; i_4 = V_2 / R_4 = 2.$$

Для визначення струму i_1 в оригінальному резисторі R_1 , скористаємось другим законом Кірхгофа в неперетвореній схемі:

$$E_1 - u_1 - u_2 = 0 ,$$

звідки

$$u_1 = E_1 - u_2 = 6 - 2 = 4 ,$$

$$i_1 = u_1 / R_1 = 2 ,$$

де u_1 та u_2 (дорівнює V_1) – напруги на резисторах відповідно R_1 та R_2 .

Для визначення струму i_3 в оригінальному резисторі R_3 , скористаємось першим законом Кірхгофа для вузла 2 в неперетвореній схемі:

$$i_3 - i_4 + J = 0 ,$$

звідки

$$i_3 = i_4 - J = 2 - 1 = 1 .$$

Зауважимо, що напрямки струмів i_1 (до вузла 1) та i_3 (до вузла 2) визначаються потенціалами вузлів, відповідно 3, 1 (потенціал вузла 3, що дорівнює E_1 , переважає потенціал вузла 1, що дорівнює V_1) та 4, 2 (потенціал вузла 4, що дорівнює $V_1 + E_2$, переважає потенціал вузла 2, що дорівнює V_2), а напрямки струмів i_2 (від вузла 1) та i_4 (від вузла 2) визначаються потенціалами вузлів, відповідно 1 (дорівнює V_1) та 2 (дорівнює V_2), по відношенню до потенціалу базисного вузла (дорівнює 0).

У разі неможливості перетворення незалежного джерела напруги в джерело струму, застосовується правило, яке розглянемо далі.

3.3.3. Правило врахування параметра незалежного джерела напруги

Для врахування параметра ЕРС (рис. 3.11) система вузлових рівнянь доповнюється рівнянням, що пов'язує параметр E з напругами вузлів, до яких підключено джерело напруги:

$$V_i - V_j = E. \tag{3.36}$$

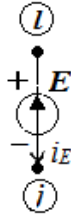


Рисунок 3.11– Незалежне джерело напруги E зі струмом i_E

Рівняння (3.36) повністю визначає останній (додатковий) рядок матриці вузлових провідностей Y та останній елемент вектора J , як видно з фрагменту системи вузлових рівнянь у матричному вигляді (3.37). Також вектор вузлових напруг V доповнюється додатковою незалежною змінною – струмом незалежного джерела напруги i_E . Наявність вказаного струму призводить до необхідності його врахування в системі рівнянь шляхом коригування балансів струмів у вузлах j та l . Відповідно до правила формування матриці інцидентії (3.1), яка визначає баланси струмів у вузлах схеми, в рівнянні з номером j (рядок j матриці Y , що пов'язаний з вузлом j), струм i_E враховується зі знаком «-» (-1 в рядку j останнього стовпця матриці), а в рівнянні з номером l (рядок l матриці Y , що пов'язаний з вузлом l) струм i_E джерела напруги враховується зі знаком «+» ($+1$ в рядку l останнього стовпця матриці).

	j		l	(i_E)
j				-1
l				$+1$
	-1		$+1$	

×

V_j
V_l
i_E

=

E

.
(3.37)

Таким чином, врахування кожного незалежного джерела напруги в системі вузлових рівнянь призводить до збільшення кількості рівнянь на одиницю.

Приклад 3.5. На рис. 3.12 зображена схема з незалежними джерелами напруги E та струму J . Сформуємо систему вузлових рівнянь у матричному вигляді, застосувавши правила, розглянуті вище.

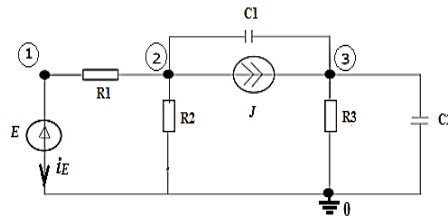


Рисунок 3.12 – Схема з незалежними джерелами напруги E та струму J

Система вузлових рівнянь у матричному вигляді:

G_1	$-G_1$	0	+1
$-G_1$	$G_1 + G_2 + pC_1$	$-pC_1$	0
0	$-pC_1$	$G_3 + pC_1 + pC_2$	0
+1	0	0	0

×

V_1
V_2
V_3
i_E

=

0
$-J$
J
E

Еквівалентний запис системи вузлових рівнянь:

$$\begin{cases} G_1 V_1 - G_1 V_2 + i_E = 0; \\ -G_1 V_1 + (G_1 + G_2 + pC_1) V_2 - pC_1 V_3 = -J; \\ -pC_1 V_2 + (G_3 + pC_1 + pC_2) V_3 = J; \\ V_1 = E. \end{cases}$$

В той же час, в наведеному прикладі можливо застосувати еквівалентне перетворення незалежного джерела напруги E в незалежне джерело струму, що дає змогу зменшити вдвічі кількість рівнянь в системі.

Приклад 3.6. Застосуємо правила врахування параметрів незалежних джерел напруги та струму для схеми, зображеної на рис. 3.10. Для порівняння з системою, сформованою для цієї схеми у прикладі 3.4, не здійснюємо еквівалентні перетворення джерел.

$G_1 + G_2$	0	$-G_1$	0	0	-1
0	$G_3 + G_4$	0	$-G_3$	0	0
$-G_1$	0	G_1	0	1	0
0	$-G_3$	0	G_3	0	1
0	0	1	0	0	0
-1	0	0	1	0	0

 $\times$

V_1
V_2
V_3
V_4
i_{E1}
i_{E2}

 $=$

0
J
0
0
E_1
E_2

 $.$

Кількість рівнянь в системі збільшилася втричі порівняно із системою, отриманою у прикладі 3.4.

3.3.4. Правило врахування параметра джерела струму, керованого напругою

Систему вузлових рівнянь у матричному вигляді формують шляхом накладання на матрицю, створену для схеми із звичайних двополюсних елементів без залежного джерела, матриці залежного джерела з врахованим параметром g . Покажемо, як формується матриця залежного джерела, підключеного до відповідних вузлів схеми (рис. 3.13).

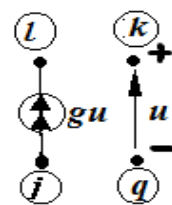


Рисунок 3.13 – ДСКН, підключене до вузлів схеми

Припустимо, що дане джерело струму є незалежним. В цьому випадку його струм gu враховується в клітинах j та l правої частини системи вузлових рівнянь, відповідно до правила (3.35), як показано на рис. 3.14. Виражаємо керуючу напругу u джерела через різницю потенціалів:

$$u = V_k - V_q.$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc|cc}
 & k & & q \\
 j & g & & -g \\
 & & & \\
 l & -g & & g
 \end{array} \\
 Y
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 V_k \\
 \\
 V_q
 \end{array} \\
 V
 \end{array}
 \leq
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 -gu \\
 \\
 gu
 \end{array} \\
 \text{Права частина системи рівнянь}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 -g(V_k - V_q) \\
 \\
 g(V_k - V_q)
 \end{array} \\
 \end{array}$$

Рисунок 3.14 – Фрагмент системи вузлових рівнянь з врахованим параметром g

Переносимо параметр g з правої частини системи в ліву її частину, враховуючи зміну знаку та наявність вузлових напруг V_k, V_q у векторі V . Таким чином, компактно матрицю залежного джерела з врахованим параметром g можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 k & q \\
 j & \begin{array}{|c|c|} \hline g & -g \\ \hline \end{array} \\
 l & \begin{array}{|c|c|} \hline -g & g \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 . \quad (3.38)$$

Наведена матриця показує, в які клітини створеної матриці Y схеми та з яким знаком необхідно внести параметр g залежного джерела. В загальному випадку параметр ДСКН входить в чотири клітини матриці Y . В окремих випадках параметр g може входити в дві клітини (один з пари вузлів k, q або j, l є базисним вузлом), а також в одну клітину (в кожній з вказаних пар один з вузлів є базисним).

Приклад 3.7. Застосуємо розглянуті вище правила до формування системи вузлових рівнянь схеми, зображеної на рис. 3.15.

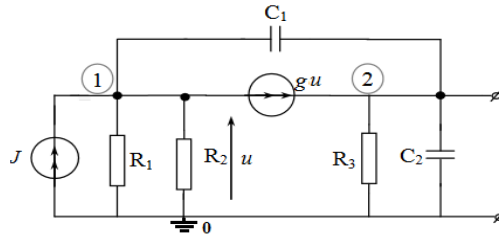


Рисунок 3.15 – Схема з ДСКН

Матриця залежного джерела, відповідно до (3.38), має наступний вигляд:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 0 \\ \begin{array}{cc} 1 & \begin{array}{|c|c|} \hline g & -g \\ \hline \end{array} \\ 2 & \begin{array}{|c|c|} \hline -g & g \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array} \cdot$$

Система вузлових рівнянь у матричному вигляді з врахуванням параметра g :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline G_1 + G_2 + pC_1 + g & -pC_1 \\ \hline -pC_1 - g & G_3 + pC_1 + pC_2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline J \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \cdot$$

3.3.5. Правило врахування параметра джерела напруги, керованого напругою

Виразимо напруги u , μu залежного джерела (рис. 3.16) через вузлові напруги:

$$\mu u = V_l - V_j;$$

$$u = V_k - V_q.$$

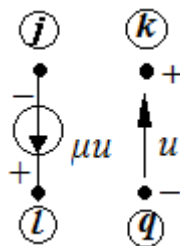


Рисунок 3.16 – ДНKN, підключене до вузлів схеми

Наведені вище рівняння дають змогу записати рівняння ДНКН, яке встановлює зв'язок між чотирма вузловими напругами:

$$\mu (V_k - V_q) = V_l - V_j,$$

або

$$\mu (V_k - V_q) - V_l + V_j = 0. \quad (3.39)$$

Врахування параметра джерела напруги, керованого напругою, здійснюється шляхом додавання рівняння (3.39) в систему вузлових рівнянь. При цьому в останній рядок матриці вузлових провідностей Y вносяться коефіцієнти рівняння (3.39) при відповідних вузлових напругах, як показано на рис. 3.17. Оскільки кожне з вузлових рівнянь системи фактично пов'язує вузлові напруги, додатковий зв'язок між ними (3.39) призводить до необхідності об'єднання двох вузлових рівнянь, записаних для вузлів j, l підключення джерела.

		k	q	l	j	$\times$		$=$	
k							V_k		
q							V_q		
l, j							V_l		
		μ	$-\mu$	-1	1		V_j		0

Рисунок 3.17 – Фрагмент системи вузлових рівнянь з врахованим параметром μ

Таким чином, два рядки j, l матриці Y об'єднуються в один рядок (позначений l, j на рис. 3.17), що порушує симетрію цієї матриці, але її розмірність не збільшується, оскільки кількість рівнянь в системі залишається незмінною.

Приклад 3.8. Застосуємо розглянуті вище правила до формування системи вузлових рівнянь схеми, зображеної на рис. 3.18. Керуючою для ДНКН є напруга u , прикладена між вузлами 2, 0. На вході схеми діє незалежне джерело напруги E .

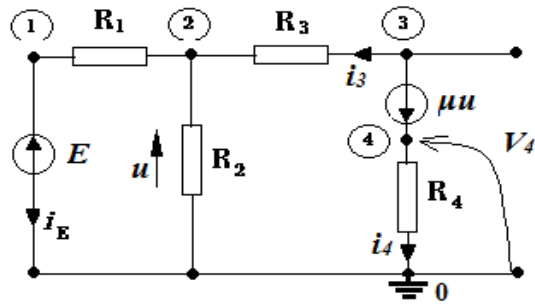


Рисунок 3.18 – Схема з ДНKN

Система вузлових рівнянь в матричному вигляді:

1	G_1	$-G_1$	0	0	1
2	$-G_1$	$G_1+G_2+G_3$	$-G_3$	0	0
3,	0	$-G_3$	G_3	G_4	0
4					
4	0	μ	1	-1	0
5	1	0	0	0	0

 $\times$

V_1
V_2
V_3
V_4
i_E

 $=$

0
0
0
0
E

 $.$

Збільшення кількості рівнянь з чотирьох до п'яти відбулося завдяки незалежному джерелу напруги, якому відповідає останнє рівняння системи (рядок 5). Джерелу напруги, керованому напругою, відповідає четверте рівняння (рядок 4), представлене у вигляді:

$$\mu V_2 - V_4 + V_3 = 0,$$

оскільки

$$\mu u = V_4 - V_3;$$

$$u = V_2.$$

Об'єднання вузлових рівнянь для вузлів 3, 4, між якими підключено ДНKN, призвело до того, що власна провідність вузла 4 (G_4) увійшла до недіагональної клітини матриці Y . Відповідне рівняння (3,4) системи має вигляд:

$$-G_3 V_2 + G_3 V_3 + G_4 V_4 = 0,$$

або

$$G_3(V_3 - V_2) + G_4 V_4 = 0,$$

що є балансом струмів $i_3 + i_4 = 0$ (рис. 3.18), утвореним для вузлів 3, 4.

Приклад 3.9. Для схеми, зображеної на рис. 3.19, обмежимося лише формуванням матриці вузлових провідностей Y . В наступному розділі покажемо, що ця матриця має самостійне значення для отримання певних характеристик схем.

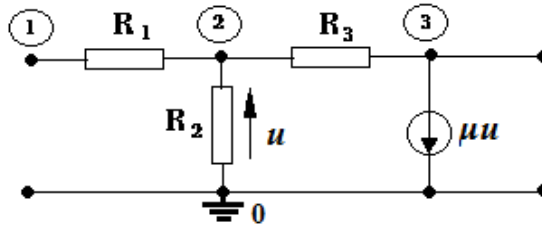


Рисунок 3.19 – Схема з ДНКН без незалежного джерела напруги

Матриця Y представлена у вигляді:

$$Y = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & G_1 & -G_1 & 0 \\ 2 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ 3,0 & 0 & \mu & +1 \end{array} . \quad (3.40)$$

В даному прикладі ДНКН підключено до вузлів 3, 0 і врахування параметра джерела в матриці Y не призвело до об'єднання вузлових рівнянь, оскільки незалежні рівняння формуються для всіх вузлів, окрім базисного (0). Рівняння джерела напруги, керованого напругою, має вигляд

$$\mu V_2 = 0 - V_3,$$

або

$$\mu V_2 + V_3 = 0.$$

Коефіцієнти при напругах останнього рівняння замінили собою елементи рядка 3 матриці, який за відсутності ДНКН, мав наступний вигляд:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & -G_3 & G_3 \end{array} .$$

3.3.6. Правило врахування параметра джерела напруги, керованого струмом

Виразимо напругу ri залежного джерела, зображеного на рис. 3.20, через вузлові напруги:

$$ri = V_l - V_j, \quad (3.41)$$

при цьому

$$V_k = V_q = V_{kq}.$$

Останнє рівняння означає, що один з вузлів k, q є штучним і застосовується в схемі лише для визначення керуючого струму i залежного джерела.

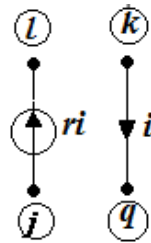


Рисунок 3.20 – ДНКС, підключене до вузлів схеми

Врахування параметра даного джерела здійснюється шляхом додавання керуючого струму, вираженого із (3.41)

$$i = (V_l - V_j) / r, \quad (3.42)$$

до вузлових рівнянь, які відповідають балансам струмів у вузлах k, q (рядки матриці k, q). Як показано на рис. 3.21, коефіцієнти рівняння (3.42) при вузлових напругах враховуються в рядку k матриці Y без зміни знаку, оскільки струм i спрямований від вузла k , а в рядку q – враховуються з протилежними знаками, оскільки струм i спрямований до вузла q (рис. 3.20). Додавання до вузлових рівнянь керуючого струму (3.42), вираженого із напруги залежного джерела, дає змогу об'єднати рівняння вузлових напруг, які відповідають вузлам підключення самого джерела. В результаті, рядки l та j матриці Y об'єднані в один рядок lj . Вузловим напругам V_k, V_q відповідає один стовпець k, q матриці Y , оскільки зазначені напруги співпадають.

	k, q	l	j	
k		$1/r$	$-1/r$	
q		$-1/r$	$1/r$	
l, j				

 $\times$

$V_{k,q}$
V_l
V_j

Рисунок 3.21 – Фрагмент системи вузлових рівнянь з врахованим параметром r

Приклад 3.10. Застосуємо розглянуті вище правила до формування системи вузлових рівнянь схеми, зображеної на рис. 3.22. Керуючим для ДНКС є струм i , спрямований від штучного вузла 3 до «землі» (0). Очевидно, що потенціал штучного вузла співпадає з нульовим потенціалом: $V_3 = V_{3,0} = 0$. Рівняння залежного джерела має вигляд: $ri = 0 - V_4 = -V_4$.

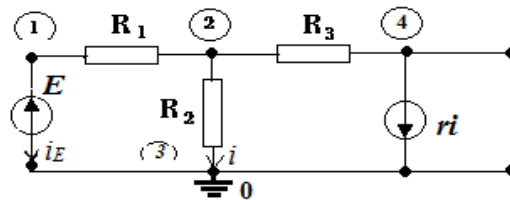


Рисунок 3.22 – Схема з ДНКС

Отже, в системі вузлових рівнянь враховуємо керуючий струм залежного джерела:

$$i = -V_4/r. \quad (3.43)$$

Відповідно до рис. 3.21, коефіцієнт $(-1/r)$ необхідно врахувати лише в рядку 3 ($k=3, q=0$), стовпці 4 ($j=4, l=0$) матриці Y .

Система вузлових рівнянь, сформована для схеми, зображеної на рис. 3.22, має наступний вигляд:

	1	2	4	(i_E)
1	G_1	$-G_1$	0	1
2	$-G_1$	$G_1 + G_2 + G_3$	$-G_3$	0
3	0	$-G_2$	$-1/r$	0
(4)	1	0	0	0

 $\times$

V_1
V_2
V_4
i_E

 $=$

0
0
0
E

 $.$

Рядок 4,0 не представлений в матриці Y , оскільки рядка, відповідного вузлу 0, не існує. Останнє рівняння (4) системи встановлює зв'язок між напругою V_1 і ЕРС:

$$V_1 = E.$$

Як зазначено вище, вузлова напруга $V_{3,0} = 0$, тому відповідний стовпець 3,0 також не представлений в матриці Y .

Вузлове рівняння 3 має вигляд:

$$-G_2 V_2 - (1/r) V_4 = 0$$

або

$$-i - V_4/r = 0,$$

що співпадає з рівнянням (3.43) для керуючого струму залежного джерела.

3.3.7. Правило врахування параметра джерела струму, керованого струмом

Включення в схему залежного джерела, зображеного на рис. 3.23, змінює баланси струмів у вузлах k, q, j, l , що, в свою чергу, призводить до зміни відповідних вузлових рівнянь. Для врахування таких змін необхідно розширити склад вектора вузлових напруг шляхом додавання в нього керуючого струму i .

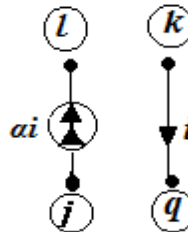


Рисунок 3.23 – ДСКС, підключене до вузлів схеми

В той же час, для вузлових напруг V_k, V_q справедливе рівняння:

$$V_k = V_q = V_{k,q},$$

аналогічне наведеному вище для ДНКС.

Врахування струмів i та ai у відповідних рівняннях для вузлів k, q та j, l здійснюється шляхом внесення в матрицю Y коефіцієнтів $+1$ (-1) та $+\alpha$ ($-\alpha$) у рядки k, q та j, l стовпця, що відповідає керуючому струму i , залежного джерела, як показано на рис. 3.24.

	k, q	j	l	(i)
k				$+1$
q				-1
j				α
l				$-\alpha$

 $\times$

$V_{k,q}$
V_j
V_l
i

 $.$

Рисунок 3.24 – Фрагмент системи вузлових рівнянь з врахованим параметром α

Приклад 3.11. Застосуємо розглянуті вище правила до формування системи вузлових рівнянь схеми, зображеної на рис. 3.25. Керуючим для ДСКС є струм i , спрямований від «землі» (0) до штучного вузла 4. Очевидно, що потенціал штучного вузла співпадає з нульовим потенціалом: $V_4 = V_{4,0} = 0$. Відповідно до правила (рис. 3.24), перші чотири рядки матриці Y мають номери, які відповідають нумерації вузлів схеми, включаючи штучний вузол 4, а серед стовпців матриці Y відсутній стовпець, який відповідає нульовій вузловій напрузі V_4 (система вузлових рівнянь зображена на рис. 3.26).

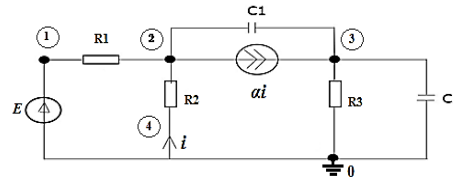


Рисунок 3.25 – Схема з ДСКС

	1	2	3	(i)	(i_E)
1	G_1	$-G_1$	0	0	1
2	$-G_1$	$G_1 + G_2 + pC_1$	$-pC_1$	α	0
3	0	$-pC_1$	$G_3 + pC_1 + pC_2$	$-\alpha$	0
4	0	$-G_2$	0	-1	0
(5)	1	0	0	0	0

 $\times$

V_1
V_2
V_3
i
i_E

 $=$

0
0
0
0
E

Рисунок 3.26 – Система вузлових рівнянь, сформована для схеми з ДСКС

В наведеній системі рівнянь виділена частина, яка відповідає схемі без незалежного та залежного джерел. Четверте рівняння системи має вигляд:

$$-G_2 V_2 - i = 0 ,$$

або

$$-i_{R2} - i = 0$$

і фактично є рівнянням балансу струмів у штучному вузлі 4. Таким чином, це рівняння пов'язує керуючий струм залежного джерела зі струмом через резистор R_2 .

Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Яку напругу називають вузловою?
2. Як вибирають базисний вузол?
3. В чому полягають переваги методу вузлових напруг?
4. Що називають направленим графом схеми?
5. Як формують матрицю інцидентії?
6. Від чого залежить розмірність матриці інцидентії?
7. Чому застосовують редуковану матрицю інцидентії та як її отримують?
8. Загальна кількість вузлів дорівнює 5, кількість елементів: 12. Визначити розмірність редукованої матриці інцидентії.
9. Чим визначається кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа?
10. Загальна кількість вузлів дорівнює 3, кількість елементів: 10. Визначити кількість незалежних рівнянь за першим законом Кірхгофа.
11. Який зв'язок між напругою на елементі та вузовими напругами?
12. Загальна кількість вузлів дорівнює 7, кількість елементів: 15. Визначити кількість незалежних рівнянь, що пов'язують напруги на елементах з вузовими напругами за другим законом Кірхгофа.
13. Елемент включений між вузлами з вузовими напругами 10 В, 4 В. Визначити напругу на елементі.

14. Як формують матрицю параметрів пасивних елементів?
15. Яку розмірність має матриця вузлових провідностей?
16. Загальна кількість вузлів дорівнює 5, кількість елементів: 12. Визначити розмірність матриці вузлових провідностей.
17. Чим визначається кількість рівнянь в системі вузлових рівнянь?
18. Загальна кількість вузлів дорівнює 6, кількість елементів: 14. Визначити кількість рівнянь в системі вузлових рівнянь.
19. Що є результатом розв'язання системи вузлових рівнянь?
20. Що називають власною провідністю вузла схеми?
21. До вузла під'єднано три резистори з однаковими опорами 2 Ом. Визначити власну провідність вузла.
22. Що називають взаємною провідністю вузлів схеми?
23. Між вузлами включено два резистори з опорами 1 Ом, 2 Ом. Визначити взаємну провідність вузлів.
24. До вузла приєднано два джерела струму. Струм першого джерела дорівнює 3 А і спрямований до вузла, струм другого джерела дорівнює 1 А і спрямований від вузла. Визначити сумарний вузловий струм даного вузла.
25. За яких умов матриця вузлових провідностей симетрична відносно головної діагоналі?
26. Як врахування параметра незалежного джерела напруги впливає на кількість рівнянь в системі вузлових рівнянь?
27. Як врахування параметра джерела струму, керованого напругою, впливає на розмірність матриці вузлових провідностей?
28. Як врахування параметра джерела напруги, керованого напругою, впливає на розмірність матриці вузлових провідностей?
29. Як врахування параметра джерела напруги, керованого струмом, впливає на розмірність матриці вузлових провідностей?
30. Як врахування параметра джерела струму, керованого струмом, впливає на розмірність матриці вузлових провідностей?

4. СХЕМНІ ФУНКЦІЇ (ФУНКЦІЇ КОЛА)

4.1. Визначення схемних функцій для двополюсника та чотириполюсника

Схемна функція (функція кола) є відношенням реакції схеми до сигналу, який подається на її вхід [Р:1, В:1, 5, 6, 7]:

$$\text{Схемна функція} = \text{Реакція} / \text{Сигнал} .$$

Найчастіше реакція та сигнал представлені у вигляді функцій комплексної частоти p . Схемні функції поділяють на два типи:

- вхідні (вихідні);
- функції передачі.

Для двополюсників, зображених на рис. 4.1, маємо наступні вхідні схемні функції:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{U_{\text{вх}}(p)}{I_{\text{вх}}(p)} - \text{вхідний опір двополюсника (а);} \quad (4.1)$$

$$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{I_{\text{вх}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} - \text{вхідна провідність двополюсника (б),} \quad (4.2)$$

при цьому, очевидно:

$$Y_{\text{вх}}(p) = 1 / Z_{\text{вх}}(p) . \quad (4.3)$$

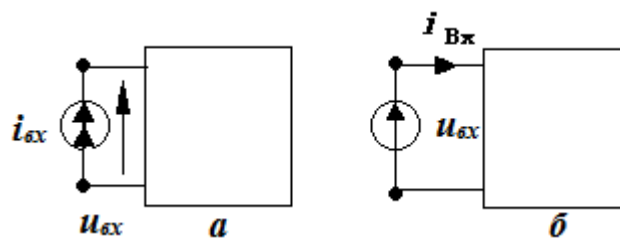


Рисунок 4.1 – Двополюсники під дією: а – струму; б – напруги

Для чотириполюсника, зображеного на рис. 4.2, додатково до визначених схемних функцій, маємо наступні вихідні:

$$Z_{\text{вих}}(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{I_{\text{вих}}(p)} - \text{вихідний опір чотириполюсника;} \quad (4.4)$$

$$Y_{\text{вих}}(p) = \frac{I_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вих}}(p)} - \text{вихідна провідність чотириполюсника,} \quad (4.5)$$

$$Y_{\text{вих}}(p) = 1 / Z_{\text{вих}}(p) . \quad (4.6)$$



Рисунок 4.2 – Чотириполюсник (Вх – вхід; Вих – вихід)

Для чотириполюсника також визначені функції передачі, які пов'язують між собою вхідні напруги (струми) та вихідні напруги (струми) схеми:

$$H_U(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} - \text{коефіцієнт передачі напруги}; \quad (4.7)$$

$$H_Z(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{I_{\text{вх}}(p)} - \text{опір передачі}; \quad (4.8)$$

$$H_I(p) = \frac{I_{\text{вих}}(p)}{I_{\text{вх}}(p)} - \text{коефіцієнт передачі струму}; \quad (4.9)$$

$$H_Y(p) = \frac{I_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} - \text{провідність передачі}. \quad (4.10)$$

Дві останні схемні функції визначаються лише за наявності навантаження (струму) на виході схеми.

Вибір схемних функцій, необхідних для аналізу схеми, залежить від типу заданого сигналу (напруга або струм) та реакції, яка нас цікавить (напруга або струм). Наприклад, у випадку заданого струму на вході чотириполюсника та відсутності навантаження, вибір функції передачі обмежений лише опором передачі (4.8).

Приклад 4.1. Визначимо всі можливі схемні функції для схеми із n послідовно з'єднаних резисторів, зображеної на рис. 4.3.

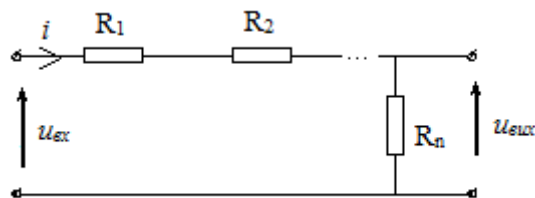


Рисунок 4.3 – Схема із n послідовно з'єднаних резисторів

Для визначення схемних функцій застосовуємо вирази (4.1) – (4.10):

$$Z_{\text{вх}} = [i(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)] / i = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n;$$

$$Y_{\text{вх}} = 1 / (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n);$$

$$Z_{\text{вих}} = (i R_n) / i = R_n;$$

$$Y_{\text{вих}} = 1 / R_n;$$

$$H_U = (i R_n) / [i(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)] = R_n / (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n);$$

$$H_Z = (i R_n) / i = R_n;$$

$$H_I = 1;$$

$$H_Y = i / [i(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)] = 1 / (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n).$$

Приклад 4.2. Визначимо вхідний опір та коефіцієнт передачі напруги для *RC*-кола, зображеного на рис. 4.4.

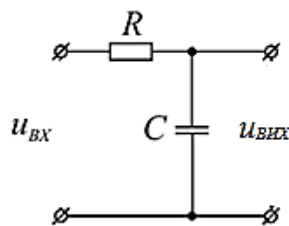


Рисунок 4.4 – *RC*-коло

Вхідний опір знаходимо з виразу (4.1):

$$Z_{\text{вх}}(p) = [(R + 1/pC) i] / i = R + 1/pC;$$

коефіцієнт передачі напруги – з виразу (4.7):

$$H_U(p) = i / [pC(R + 1/pC) i] = 1 / (pCR + 1).$$

Приклад 4.3. Визначимо вхідну провідність та коефіцієнт передачі напруги для *RL*-кола, зображеного на рис. 4.5.

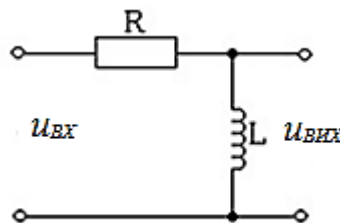


Рисунок 4.5 – *RL*-коло

Вхідну провідність знаходимо з виразів (4.1), (4.3):

$$Y_{\text{вх}}(p) = i / [(R + pL) i] = 1 / (R + pL);$$

коефіцієнт передачі напруги – з виразу (4.7):

$$H_U(p) = i p L / [(R + p L) i] = p L / (p L + R).$$

4.2. Визначення схемних функцій для схем із багатьма входами (виходами)

Уявимо, що до виводів схеми (n – загальна кількість її вузлів) з багатьма входами (виходами) або **багатополюсника** [Р:1, 2, В:5] підключені джерела сигналів, наприклад джерела струму (рис. 4.6).



Рисунок 4.6 – Схема із незалежними джерелами струму

Запишемо для такого багатополюсника матрицю вузлових провідностей в загальному вигляді:

$$\mathbf{Y} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1,j} & \dots & y_{1,k} & \dots & y_{1,v} \\ \hline y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2,j} & \dots & y_{2,k} & \dots & y_{2,v} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline y_{v,1} & y_{v,2} & \dots & y_{v,j} & \dots & y_{v,k} & \dots & y_{v,v} \\ \hline \end{array} . \quad (4.11)$$

В якості реакції багатополюсника виберемо вузлову напругу V_k його виводу k . Скористаємося для визначення цієї напруги правилом Крамера [Р:1, В: 5]:

$$V_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} , \quad (4.12)$$

де Δ – визначник матриці $\mathbf{Y}$, Δ_k – визначник матриці, отриманої з $\mathbf{Y}$ заміною її k -го стовпця вектором-стовпцем, побудованим із незалежних джерел струму:

y_{11}	y_{12}	...	$y_{1,j}$	...	J_1	...	$y_{1,\nu}$
y_{21}	y_{22}	...	$y_{2,j}$	...	J_2	...	$y_{2,\nu}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$y_{\nu,1}$	$y_{\nu,2}$	...	$y_{\nu,j}$	...	J_ν	...	$y_{\nu,\nu}$

$$\cdot \quad (4.13)$$

Розкладемо визначник Δ_k матриці (4.13) за елементами k -го стовпця:

$$V_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} J_1 + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} J_2 + \dots + \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} J_j + \dots + \frac{\Delta_{kk}}{\Delta} J_k + \dots + \frac{\Delta_{\nu k}}{\Delta} J_\nu, \quad (4.14)$$

де Δ_{jk} ($j, k = 1, 2, \dots, \nu$) – алгебраїчні доповнення матриці (4.13), знаки яких враховуються при обчисленнях (відповідне значення визначника множиться на $(-1)^{j+k}$).

Вираз (4.14) можна записати наступним чином:

$$V_k = V_{k1} + V_{k2} + \dots + V_{kj} + \dots + V_{kk} + \dots + V_{k\nu}, \quad (4.15)$$

де V_{kj} – напруга у вузлі k ($k = 1, 2, \dots, \nu$), що виникла під дією незалежного джерела, під'єданого до вузла j ($j = 1, 2, \dots, \nu$). Таким чином, реакція багатополюсника у довільному вузлі k представлена у вигляді суми впливів окремих джерел сигналів, під'єднаних до його входів, пов'язаних з вузлами $1, 2, \dots, \nu$. Вирази (4.14), (4.15) можна вважати такими, що доводять теорему накладання (принцип суперпозиції).

У виразі (4.14) кожен коефіцієнт при струмі J_j ($j = 1, 2, \dots, \nu$) має розмірність опору, тому цей вираз можна записати у вигляді:

$$V_k = Z_{k1} J_1 + Z_{k2} J_2 + \dots + Z_{kj} J_j + \dots + Z_{kk} J_k + \dots + Z_{k\nu} J_\nu. \quad (4.16)$$

Кожен доданок виду $V_{kj} = Z_{kj} J_j$ представляє напругу k -го ($k = 1, 2, \dots, \nu$) вузла, викликану дією тільки одного джерела струму у вузлі j ($j = 1, 2, \dots, \nu$). Сума напруг від дії кожного з джерел дає реакцію (потрібну вузлову напругу) схеми при одночасній дії всіх джерел, що становить суть принципу суперпозиції.

Уявимо, що сигнал подається на один з входів багатополюсника. Як результат, реакція у вузлі k від дії j -го джерела представляється у вигляді:

$$V_{kj} = Z_{kj} J_j, \quad (4.17)$$

за умови вимкнення (розриву виводів) інших незалежних джерел струму. Тоді Z_{kj} має вигляд відношення реакції у вузлі k до сигналу у вузлі j та є, за визначенням, схемною функцією, а саме: опором передачі багатополюсника від вузла j до вузла k :

$$Z_{kj} = \frac{V_{kj}}{J_j}. \quad (4.18)$$

З іншого боку, порівняння (4.14) і (4.16) показує, що для обчислення цієї схемної функції можна користуватися математичним виразом:

$$Z_{kj} = \frac{\Delta_{jk}}{\Delta}. \quad (4.19)$$

Якщо уявити, що реакція та сигнал пов'язані з однією й тією ж парою виводів багатополюсника, наприклад $j, 0$:

$$V_{jj} = Z_{jj} J_j.$$

В такому випадку схемна функція Z_{jj} є вхідним опором багатополюсника по відношенню до вузлів $j, 0$.

$$Z_{jj} = \frac{V_{jj}}{J_j} = \frac{\Delta_{jj}}{\Delta}. \quad (4.20)$$

Якщо розглянути чотиріполюсник (рис. 4.7) як окремий випадок багатополюсника, отримаємо наступні вирази схемних функцій вхідного опору та опору передачі, відповідно до (4.1), (4.8):

$$Z_{ex} = \frac{U_{ex}}{I_{ex}} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}; \quad (4.21)$$

$$H_z = \frac{U_{ex}}{I_{ex}} = \frac{\Delta_{1v}}{\Delta}. \quad (4.22)$$

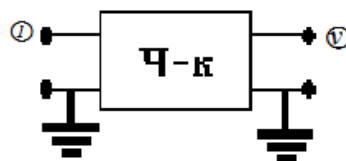


Рисунок 4.7 – Чотиріполюсник як окремий випадок багатополюсника

З виразів (4.21), (4.22) випливає, що відношення опору передачі до вхідного опору, дає коефіцієнт передачі напруги чотириполусника:

$$H_U = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{\Delta_{1v}}{\Delta_{11}}. \quad (4.23)$$

4.3. Властивості схемних функцій

4.3.1. Нулі та полюси схемних функцій

З одного боку, як зазначено на початку даного розділу, будь-яка схемна функція є відношенням реакції схеми (P) до сигналу (C) на її вході

$$H(p) = \frac{P}{C}. \quad (4.24)$$

З іншого боку, оскільки схемні функції можна представити у вигляді відношення алгебраїчного доповнення до визначника (доповнення) матриці вузлових провідностей, їх властивості значною мірою визначаються структурою самої матриці Y .

В загальному вигляді для схеми з пасивних елементів структуру клітини цієї матриці можна представити як $[P:1, V:5]$:

$$G + pC + (1/pL) = \frac{1}{p} (p^2C + pG + \frac{1}{L}),$$

де в дужках наведено поліном другого порядку відносно комплексної частоти.

При обчисленні визначника (доповнення) матриці Y такі поліноми перемножуються, а далі результати складаються або віднімаються, що дає в загальному випадку поліном вищого ступеня. Таким чином, довільну схемну функцію можна представити у вигляді дробово-раціональної функції комплексної частоти p $[P:1, V:1, 5, 6]$:

$$H(p) = \frac{a_m p^m + \dots + a_1 p^1 + a_0}{b_n p^n + \dots + b_1 p^1 + b_0} = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (4.25)$$

де $A(p)$, $B(p)$ – поліноми, відповідно, чисельника та знаменника, а також, зазвичай, виконуються умови:

$$m \leq n;$$

$$n \leq n_C + n_L,$$

n_C, n_L – відповідно, кількість конденсаторів та індуктивних котушок у колі.

Для чисельника та знаменника схемної функції можна визначити корені відповідних рівнянь:

$$\begin{aligned} A(p) &= 0, & p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0 \\ B(p) &= 0, & p_1^\Pi, p_2^\Pi, \dots, p_n^\Pi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Корені рівняння $A(p) = 0$ називають **нулями** схемної функції, а корені рівняння $B(p) = 0$ – **полюсами** схемної функції [Р:1, В:1, 5, 6].

Другий спосіб подання схемної функції із використанням нулів і полюсів:

$$H(p) = K_0 \frac{(p - p_1^0)(p - p_2^0) \dots (p - p_m^0)}{(p - p_1^\Pi)(p - p_2^\Pi) \dots (p - p_n^\Pi)}, \quad (4.27)$$

де

$$K_0 = a_m / b_n. \quad (4.28)$$

В загальному випадку, нулі та полюси – це комплексні числа. Їх зображення на комплексній площині (рис. 4.8) називають картою нулів і полюсів.

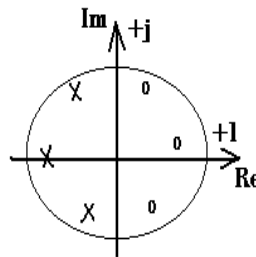


Рисунок 4.8 – Карта нулів і полюсів

Фізичний зміст нулів і полюсів схемної функції. Нулі – це значення комплексної частоти p , за яких схемна функція перетворюється на нуль. У випадку функції передачі, нулі дають такі значення p , за яких відсутня передача сигналу від входу на вихід схеми. Прикладом може бути схема, зображена на рис. 4.9, для якої неможлива передача сигналу від входу на вихід ($u_{вих} = 0$) за умови $p = 0$, оскільки індуктивний опір котушки прямує до нуля (індуктивна котушка перетворюється на закорочену ділянку кола).

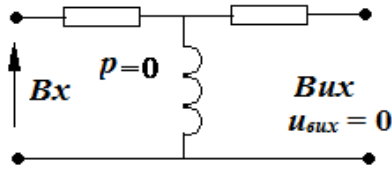


Рисунок 4.9 – Схема, в якій відсутня передача сигналу від входу на вихід ($p=0$)

По полюсах схемної функції судять про **асимптотичну стійкість** схеми [Р:1, В:1, 5, 6]. Схему називають асимптотично стійкою, якщо перехідні процеси в ній при відключенні вхідного сигналу згасають з часом. Для пояснення процесів, що відбуваються у часі, необхідно встановити зв'язок поміж схемною функцією, яка є функцією комплексної частоти, та диференціальним рівнянням, яке описує поведінку схеми у часовому вимірі.

4.3.2. Зв'язок схемної функції з диференціальним рівнянням кола

Розглянемо конкретну схемну функцію, а саме опір передачі (4.8):

$$H_Z = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{I_{\text{вх}}(p)} = \frac{A(p)}{B(p)},$$

звідки маємо

$$B(p) U_{\text{вих}}(p) = A(p) I_{\text{вх}}(p). \quad (4.29)$$

Застосовуючи властивість диференціювання перетворення Лапласа, можна перевести останнє співвідношення у часовий вимір [Р:1, В:5, 6]:

$$b_n \frac{d^n u_{\text{вух}}}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{du_{\text{вух}}}{dt} + b_0 u_{\text{вух}} = a_m \frac{d^m i_{\text{вх}}}{dt^m} + \dots + a_1 \frac{di_{\text{вх}}}{dt} + a_0 i_{\text{вх}}. \quad (4.30)$$

При цьому порядок n полінома знаменника $B(p)$ схемної функції пов'язаний з числом реактивних елементів в схемі

$$n \leq n_C + n_L.$$

Для дослідження асимптотичної стійкості обнуляємо вхідний вплив

$$b_n \frac{d^n u_{\text{вух}}}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{du_{\text{вух}}}{dt} + b_0 u_{\text{вух}} = 0. \quad (4.31)$$

В результаті отримаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння порядку n . Про властивості розв'язання такого рівняння (або відповідного перехідного

процесу) можна судити з коренів характеристичного рівняння, яке співпадає з рівнянням $B(p) = 0$ для отримання полюсів схемної функції. Отже, аналіз полюсів (коренів характеристичного рівняння) дає змогу зробити висновки про властивості перехідного процесу в схемі (у т.ч. про постійні часу схеми).

Розглянемо окремі випадки.

1. Всі полюси є дійсними числами.

$p_i^{\Pi} = \sigma_i$ – дійсні числа ($i = 1, 2, \dots, n$), а розв'язок диференційного рівняння є лінійною комбінацією експонентних функцій $K_i e^{t\sigma_i}$. В цьому випадку, для забезпечення асимптотичної стійкості схеми, значення полюсів повинні мати негативні значення ($\sigma_i < 0$). **Постійні часу** визначаються як $\tau_i = 1 / |\sigma_i|$.

2. Серед полюсів є комплексно-спряжені числа.

$p_i^{\Pi} = \sigma_i \pm j\omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а розв'язок диференційного рівняння є лінійною комбінацією функцій $f_i(t) = K_i e^{t\sigma_i} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ (рис. 4.10). В такому випадку, для забезпечення асимптотичної стійкості схеми, дійсні частини комплексних значень полюсів повинні мати негативні значення ($\sigma_i < 0$).

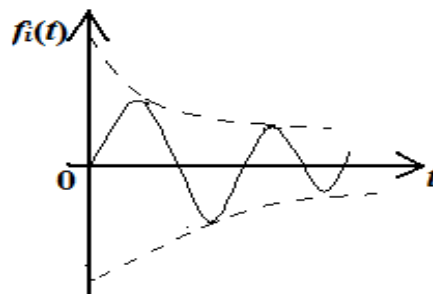


Рисунок 4.10 – Функція $f_i(t)$

Отже, схема вважається асимптотично стійкою (або фізично реалізуємою), якщо полюси її схемної функції перебувають в лівій комплексній напівплощині [Р:1, В:1, 5, 6].

Таким чином, схемна функція є символічним записом диференційного рівняння відносно реакції, яка нас цікавить. Полюси схемної функції визначають характеристики перехідного процесу в схемі.

4.4. Частотні характеристики

4.4.1. Частотні характеристики на базі схемних функцій

Частотні характеристики кола є характеристиками **сталого** (перехідні процеси відсутні) **синусоїдального режиму** або **режиму змінного струму** (англ. *Alternating Current* – AC). В даному режимі комплексна частота набуває значення $p=j\omega$, тобто її дійсна частина σ , пов'язана з перехідними процесами, прямує до нуля [Р:1, В:5, 7]. Схемні функції стають функціями уявної змінної $j\omega$, де ω – кутова частота гармонічного сигналу (вимірюється в радіанах за секунду або рад/с), який діє на вході кола. Для того, щоб отримати реакцію кола в сталому режимі під дією синусоїдального сигналу будь-якої частоти f (вимірюється в герц або Гц), необхідно мати вираз схемної функції кола у вигляді явної функції кутової частоти $\omega = 2\pi f$ прикладеного сигналу. Так, у випадку схемної функції опору:

$$Z(p) \big|_{p=j\omega} = |Z(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}, \quad (4.32)$$

де $|Z(j\omega)|$, $\varphi(\omega)$ – модуль та фаза опору, відповідно.

У випадку довільної функції передачі:

$$H(j\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) = |H(j\omega)|e^{j\alpha(\omega)}, \quad (4.33)$$

де $H_R(\omega)$ і $H_I(\omega)$ – дійсна та уявна частини схемної функції.

Модуль та аргумент (фаза) схемної функції:

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)}, \quad (4.34)$$

$$\alpha(\omega) = \arg H(j\omega) = \arctg[H_I(\omega) / H_R(\omega)] (\pm 180^\circ, \text{ якщо } H_R(\omega) < 0), \quad (4.35)$$

а також її дійсна $H_R(\omega)$ та уявна $H_I(\omega)$ частини є функціями дійсної кутової частоти ω та можуть бути представлені у графічному вигляді. Ці функції називають частотними характеристиками кола. Залежність модуля (4.34) від частоти називають амплітудно-частотною, а залежність фази (4.35) від частоти – фазо-частотною характеристиками, або скорочено АЧХ та ФЧХ. Залежність дійсної $H_R(\omega)$ та уявної $H_I(\omega)$ частин схемної функції від частоти називають

дійсною та уявною частотними характеристиками (ДЧХ і УЧХ). Кожна пара характеристик визначає залежність схемної функції від частоти.

Корегування фази у виразі (4.35) на $\pm 180^\circ$ виконується в тому випадку, коли для конкретного значення частоти ω відповідний $H_I(\omega)$, $H_R(\omega)$ вектор знаходиться на комплексній площині у другому або третьому квадрантах ($H_R(\omega) < 0$). Знак вибирають так, щоб отриманий в результаті кут не перевищував за абсолютною величиною 180° .

Окрім вказаних характеристик, які зображують в дійсній декартовій системі координат, застосовують амплітудно-фазову характеристику, яку будують на комплексній площині [В:5]. При побудові, для ряду значень частоти складові $H(j\omega)$ зображують у вигляді точок на комплексній площині. На отриманій шляхом з'єднання цих точок кривій вказують значення частоти ω . Отже, амплітудно-фазова характеристика є геометричним місцем кінців векторів, що зображують комплексну схемну функцію. Кожна точка цієї характеристики для відповідної частоти дає значення обох складових: модуля та фази або дійсної та уявної частин.

Схемну функцію для отримання частотних характеристик обирають виходячи із конкретної задачі: вибір функції опору, провідності, передачі напруги, передачі струму визначається видом джерела сигналу та реакцією, що нас цікавить. Якщо цікавить струм на вході кола під дією джерела напруги, тоді варто розглядати вхідну провідність $Y_{вх}(p)$; якщо ж цікавить напруга на виході кола під дією джерела струму, тоді розглядають опір передачі $H_Z(p)$.

Приклад 4.4. Отримаємо частотні характеристики послідовного RL -кола, зображеного на рис. 4.5 [Р:1, В:5]. Припустимо, що потрібна реакція кола у вигляді струму під дією напруги на вході, тоді розглядаємо залежності від частоти складових провідності:

$$Y_{вх}(p) = 1/Z_{вх}(p) = H_I(p) = \frac{1}{R+pL}, \quad (4.36)$$

оскільки в цьому випадку маємо єдиний струм на вході і виході кола. Комплексна схемна функція має вигляд:

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) = H_Y(j\omega) = \frac{1}{R+j\omega L} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega L}{R}} = \frac{R}{R^2+\omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}.$$

З останнього виразу отримаємо амплітудно-частотну та фазо-частотну характеристики, зображені на рис. 4.11:

$$\text{АЧХ: } Y_{\text{вх}}(\omega) = H_Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}};$$

$$\text{ФЧХ: } \alpha(\omega) = - \arctg \frac{\omega L}{R},$$

а також дійсну та уявну частотну характеристики:

$$\text{ДЧХ: } \text{Re}[Y_{\text{вх}}(j\omega)] = \frac{R}{R^2+\omega^2 L^2} > 0;$$

$$\text{УЧХ: } \text{Im}[Y_{\text{вх}}(j\omega)] = - \frac{\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}.$$

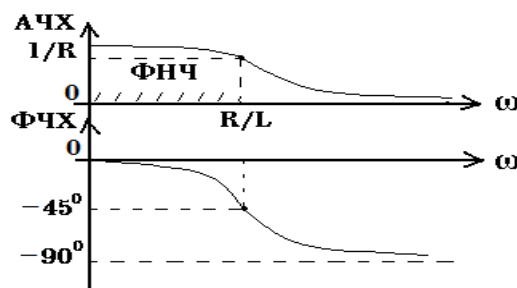


Рисунок 4.11 – АЧХ і ФЧХ фільтра низьких частот

АЧХ розглянутого в даному прикладі кола має вигляд, характерний для фільтра низьких частот (ФНЧ), який в цьому випадку ω забезпечує протікання у колі гармонічних струмів з кутовими частотами з діапазону $(0 - R/L)$ рад/с, за умови дії гармонічної напруги на вході кола. Нескладно переконатися, що вибір для цього ж кола функції коефіцієнта передачі напруги $H_U(p) = \frac{pL}{R+pL}$, отриманого в прикладі 4.3, призведе до зміни частотних характеристик: АЧХ набуде вигляду, характерного для фільтра високих частот (ФВЧ). Таким чином, вибір схемної функції має принципове значення для отримання відповідних частотних характеристик кола, що розглядається.

4.4.2. Аналітичний спосіб обчислення частотних характеристик

При обчисленні частотних характеристик більш складних схем, на першому етапі визначають ДЧХ і УЧХ. Отримаємо вирази для формалізованого обчислення цих характеристик [Р:1, В:5, 7].

Представимо схемну функцію, при $p = j\omega$, як:

$$H(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} = \frac{A_R(\omega) + jA_I(\omega)}{B_R(\omega) + jB_I(\omega)} = H_R(\omega) + jH_I(\omega), \quad (4.37)$$

де $A_R(\omega)$, $B_R(\omega)$ – дійсні частини поліномів чисельника та знаменника, відповідно,

$$A_R(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \dots;$$

$$B_R(\omega) = b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - b_6\omega^6 + \dots,$$

$A_I(\omega)$, $B_I(\omega)$ – уявні частини поліномів чисельника та знаменника, відповідно,

$$A_I(\omega) = a_1 - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - a_7\omega^7 + \dots;$$

$$B_I(\omega) = b_1 - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - b_7\omega^7 + \dots,$$

що отримано прямою підстановкою $p = j\omega$ у вираз (4.25) та зведенням у ступінь з подальшим групуванням уявних і дійсних складових. Тепер маємо можливість розрахувати ДЧХ і УЧХ наступним чином:

$$H_R(\omega) = \frac{A_R(\omega)B_R(\omega) + A_I(\omega)B_I(\omega)}{B_R^2(\omega) + B_I^2(\omega)}; \quad (4.38)$$

$$H_I(\omega) = \frac{A_I(\omega)B_R(\omega) - A_R(\omega)B_I(\omega)}{B_R^2(\omega) + B_I^2(\omega)}. \quad (4.39)$$

Представлений спосіб розрахунку можна застосовувати в тих випадках, коли схемна функція задана у вигляді відношення двох поліномів комплексної частоти p з числовими коефіцієнтами. В результаті розрахунку отримаємо частотні характеристики, справедливі для довільного діапазону частот. Обмеження, властиві цьому способу, пов'язані з труднощами отримання виразу схемної функції для складного кола. В такому випадку значення точок частотних характеристик визначають з чисельного аналізу кола – для кожного значення частоти ω діючого на вході сигналу виконують розрахунок сталого синусоїдального режиму методом комплексних амплітуд [Р:2, 3, В:5].

Приклад 4.5. Отримаємо частотні характеристики (АЧХ, ФЧХ) аналітичним способом на базі заданої схемної функції:

$$H(p) = \frac{-3p}{p^2+4p+5}.$$

Даний вираз при $p = j\omega$ має наступний вигляд:

$$H(j\omega) = \frac{-3j\omega}{-\omega^2+4j\omega+5}.$$

Визначаємо дійсні та уявні частини поліномів чисельника $A(j\omega)$ та знаменника $B(j\omega)$ схемної функції:

$$A_R(\omega) = 0; \quad B_R(\omega) = 5 - \omega^2;$$

$$A_I(\omega) = -3\omega; \quad B_I(\omega) = 4\omega.$$

Розраховуємо ДЧХ і УЧХ відповідно до виразів (4.38) і (4.39):

$$H_R(\omega) = \frac{-12\omega^2}{25+6\omega^2+\omega^4};$$

$$H_I(\omega) = \frac{3\omega^3-15\omega}{25+6\omega^2+\omega^4}$$

і, відповідно до (4.34), отримаємо АЧХ

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{9\omega^6+54\omega^4+225\omega^2}}{\omega^4+6\omega^2+25}$$

та, відповідно до (4.35), отримаємо ФЧХ

$$\alpha(\omega) = \arctg\left(-\frac{3\omega^2-15}{12\omega}\right) = -\arctg\left(\frac{\omega^2-5}{4\omega}\right) \pm 180^\circ, \text{ якщо } H_R(\omega) < 0.$$

Розрахуємо значення отриманих характеристик на частоті $\omega = 1$ рад/с:

$$H(1) = \frac{\sqrt{288}}{32} = \frac{6\sqrt{8}}{32} = \frac{3\sqrt{8}}{16}.$$

Перевіряємо знак $H_R(\omega)$ на частоті $\omega = 1$ рад/с:

$$H_R(1) = -\frac{12}{32} < 0.$$

Корегуємо значення фазового кута так, щоб виконати умову $|\alpha(1)| \leq 180^\circ$:

$$\alpha(1) = -\arctg(-1)-180^\circ = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ.$$

4.4.3. Геометрична інтерпретація частотних характеристик

Розглянемо геометричне подання частотних характеристик, використовуючи зображення нулів і полюсів схемної функції на площині

комплексної частоти (карта нулів і полюсів). Перевага такого подання полягає в можливості виявлення для кожного діапазону частот найбільш впливових нулів і полюсів і приблизної побудови за ними найважливіших ділянок частотних характеристик [Р:1, В:1, 5, 7].

Принцип геометричного подання продемонструємо на прикладі послідовного **RL**-кола (рис. 4.5) зі схемною функцією (4.36):

$$Y_{BX}(p) = H_Y(p) = \frac{1}{R + pL} = \frac{1}{L(p - p_1^П)},$$

де єдиний полюс схемної функції має значення:

$$p_1^П = -\frac{R}{L},$$

а нулі відсутні.

В такому випадку карта нулів і полюсів має вигляд, показаний на рис. 4.12, де також побудований вектор, який проходить від полюса $p_1^П$ до точки, що відповідає фіксованій кутовій частоті ω_ϕ .

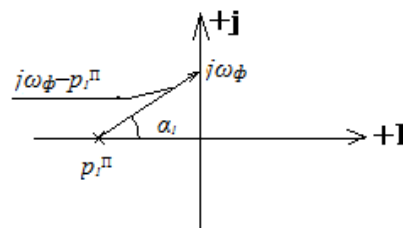


Рисунок 4.12 – Карта нулів і полюсів з побудованим вектором

В сталому синусоїдальному режимі, зі зміною частоти ω вхідного сигналу, змінна $p = j\omega$ переміщатиметься уздовж уявної осі. Підстановка значення ω_ϕ у комплексну схемну функцію $Y_{BX}(j\omega)$ дає змогу представити її знаменник у вигляді вектору $j\omega_\phi - p_1^П$, зображеного на рис. 4.12. Оскільки чисельник даної схемної функції не залежить від частоти, вказаний вектор визначає частотну залежність схемної функції та може бути представлений у вигляді:

$$j\omega_\phi - p_1^П = |j\omega_\phi - p_1^П| e^{j\alpha_1}.$$

Зі зміною частоти ω , кінець вектору переміщується вздовж уявної осі, при цьому змінюється його довжина $|j\omega_\phi - p_1^П|$ та кут α_1 , які визначають частотні характеристики, а саме значення АЧХ:

$$|Y(j\omega_\phi)| = 1 / (L |j\omega_\phi - p_I^\Pi|)$$

і ФЧХ:

$$\alpha(\omega_\phi) = -\alpha_1.$$

Звідси виходить, що значення частотних характеристик можна отримати виключно з геометричних побудов на площині комплексної частоти – за довжиною та кутом вектору, який визначається полюсом схемної функції та заданою частотою [В:5, 7].

Цей спосіб отримання значень частотних характеристик можна узагальнити на випадок схемної функції, яка має ряд нулів p_k^0 і полюсів p_k^Π . Так, якщо схемна функція представлена у вигляді (4.27) [Р:1, В:5, 7]:

$$H(p) = K_0 \frac{\prod_{k=1}^m (p - p_k^0)}{\prod_{k=1}^n (p - p_k^\Pi)},$$

то справедливий наступний вираз для довільної частоти ω :

$$H(j\omega) = K_0 \frac{\prod_{k=1}^m (j\omega - p_k^0)}{\prod_{k=1}^n (j\omega - p_k^\Pi)}. \quad (4.40)$$

Звідси модуль (АЧХ):

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = |K_0| \frac{\prod_{k=1}^m |j\omega - p_k^0|}{\prod_{k=1}^n |j\omega - p_k^\Pi|}, \quad (4.41)$$

і аргумент (ФЧХ):

$$\alpha(\omega) = \arg H(j\omega) = [\sum_{k=1}^m \arg(j\omega - p_k^0) - \sum_{k=1}^n \arg(j\omega - p_k^\Pi)] (\pm 180^\circ, K_0 < 0). \quad (4.42)$$

Таким чином, модуль комплексної схемної функції дорівнює відношенню добутків довжин векторів, які виходять з нулів, та довжин векторів, які виходять з полюсів, із множенням результату на абсолютну величину коефіцієнта K_0 . Аргумент схемної функції дорівнює різниці сум кутів векторів, які виходять з нулів, та кутів векторів, які виходять з полюсів, із корегуванням результату на $\pm 180^\circ$, якщо $K_0 < 0$. Залежності модуля (АЧХ) та аргументу (ФЧХ) від частоти ω розраховують для різних положень точки $j\omega_\phi$ на уявній осі [В:5, 7].

Приклад 4.6. Отримаємо значення частотних характеристик (АЧХ, ФЧХ) на частоті $\omega_\phi = 1$ рад/с геометричним способом на базі заданої схемної функції:

$$H(p) = \frac{-3p}{p^2 + 4p + 5}.$$

Визначимо коефіцієнт K_0 , нулі та полюси схемної функції:

$$K_0 = -\frac{3}{1} = -3 < 0;$$

$$3p=0; \rightarrow p_1^0=0;$$

$$p^2 + 4p + 5=0; \rightarrow p_{1,2}^n = -2 \pm j.$$

Побудуємо карту нулів і полюсів, а також відповідні вектори, що проходять від нулів і полюсів у точку $j\omega_\phi = j$ (рис. 4.13).

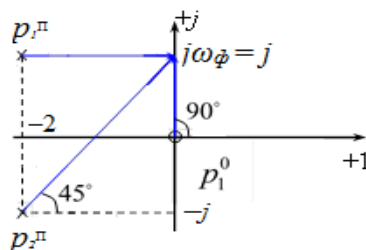


Рисунок 4.13 – Карта нулів і полюсів з побудованими векторами

Розраховуємо довжини векторів (кутова частота $\omega_\phi=1$):

$$|j\omega_\phi - p_1^0| = 1; |j\omega_\phi - p_1^n| = 2; |j\omega_\phi - p_2^n| = \sqrt{8}.$$

Значення АЧХ на заданій частоті відповідно до виразу (4.41):

$$H(1) = |-3| \frac{1}{2\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{8}}{16}.$$

Значення ФЧХ на заданій частоті відповідно до виразу (4.42):

$$\alpha(1) = 90^\circ - (0 + 45^\circ) = 45^\circ \pm 180^\circ = -135^\circ.$$

Отримані значення АЧХ і ФЧХ збігаються з розрахованими у прикладі 4.5.

4.5. Часові характеристики

Припустимо, що до двополюсника (рис. 4.1 б) підключається незалежне джерело напруги $E_{\text{вх}}(t)$. Для струму $i(t)$, що виникає після підключення джерела в момент $t=0$, вираз в області комплексної частоти має наступний вигляд:

$$I(p) = Y_{\text{вх}}(p) E(p), \quad (4.43)$$

де $E(p)$ – зображення вхідної напруги $E_{\text{вх}}(t)$, а $Y_{\text{вх}}(p)$ – схемна функція (вхідна провідність двополюсника), яка є дробово-раціональною функцією комплексної

частоти p . Отже, зображення струму дорівнює добутку двох функцій, а характер зміни струму у часі визначається коренями знаменників цих функцій.

В двополюснику без джерел енергії не можуть виникнути струми, які необмежено зростають з плином часу. Тому складові $i(t)$, які відповідають кореням знаменника провідності $Y_{\text{вх}}(p)$, мають згасаючий характер, а самі корені мають від'ємні дійсні частини, відповідно до умов асимптотичної стійкості. Ці складові визначають **режим перехідних процесів** [Р:1, В:5, 6].

Складові $i(t)$, які відповідають кореням знаменника зображення вхідної напруги $E(p)$, повторюють вигляд оригіналу $E_{\text{вх}}(t)$ та визначають **вимушений режим**. Якщо функція $E_{\text{вх}}(t)$ є періодичною [В:3] (в окремому випадку – постійною величиною або гармонічною функцією), то через деякий час вимушені складові $i(t)$ переважатимуть згасаючі складові настільки, що останніми нехтують. Такий стан схеми називають **сталим режимом** [Р:3, В:6]. Режими постійного (**DC**) та змінного струму (**AC**) є різновидами сталого режиму.

Перехідні процеси можуть виникати внаслідок зміни вхідних сигналів, раптових змін параметрів елементів схеми, короткого замикання ділянок схеми і т.д. Іноді тривалість перехідного процесу мала порівняно з часом, коли схема перебуває у сталому режимі, а сам перехідний процес не становить інтересу. В подібних випадках розглядаються тільки характеристики сталого режиму. Але в електронних пристроях перехідні процеси мають ключову роль. Тому аналіз перехідних процесів (часових характеристик) є одним з важливих завдань, яке можна вирішити із застосуванням перетворення Лапласа.

4.5.1. Елементарні сигнали для отримання часових характеристик

Розглянемо два важливих сигнали із сімейства розривних функцій, які мають велике значення в теорії кіл: одиничний стрибок (функція Хевісайда) та дельта-імпульс (функція Дірака) [Р:1,2, В:5]. Дані функції є ідеалізаціями (моделями), які спрощують наближений математичний опис реальних сигналів;

їх використання є наслідком наявності у схемах ідеальних джерел та ідеальних перемикачів.

Одиничний стрибок (функція Хевісайда). Напруга у вигляді подібної функції (рис. 1.24) утворюється, наприклад, при підключенні кола до ідеального джерела постійної напруги із застосуванням ідеального перемикача, опір якого в момент $t=0$ миттєво обертається в нуль, при цьому напруга на вході кола від нуля стрибком зростає до фіксованого значення [В:5]. Одиничний стрибок, який має одиничну амплітуду, позначаємо $1(t)$.

Аналітично цей сигнал описується наступним чином:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

В області комплексної частоти (приклад 1.1) маємо:

$$1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}. \quad (4.45)$$

Якщо сигнал подається в момент часу $t=\tau$, отримаємо одиничний стрибок, затриманий на час τ (рис. 4.14):

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t \geq \tau \end{cases} \quad (4.46)$$

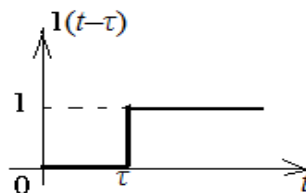


Рисунок 4.14 – Одиничний стрибок, затриманий на час τ

Множення будь-якої напруги джерела $E(t)$ на $1(t-\tau)$ подібно дії перемикача, який вмикає джерело сигналу в момент $t=\tau$.

Оскільки реактивні елементи інтегрують та диференціюють струми та напруги, виникає необхідність виконання цих операцій для одиничного стрибка. В результаті інтегрування одиничного стрибка отримаємо безперервну лінійно зростаючу функцію, а в результаті його диференціювання – дельта-імпульс [В:5].

Дельта-імпульс (функція Дірака). Для визначення дельта-імпульсу розглянемо дві допоміжні функції (рис. 4.15) [В:5]. Функція $f_2(t)$

$$f_2(t) = \frac{df_1}{dt} \quad (4.47)$$

є першою похідною функції $f_1(t)$, яка лінійно змінюється від 0 до 1 впродовж часу τ_1 . Функція $f_2(t)$ виглядає як прямокутний імпульс тривалістю τ_1 з амплітудою $\frac{1}{\tau_1}$. Площа вказаного імпульсу дорівнює одиниці незалежно від значення τ_1 .

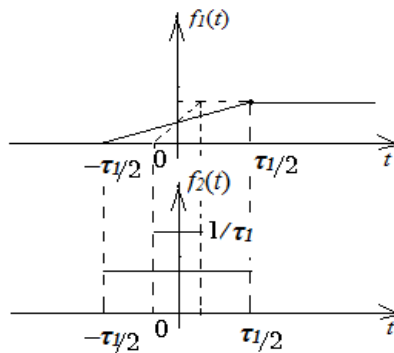


Рисунок 4.15 – Допоміжні функції для визначення дельта-імпульсу

Якщо зменшити тривалість зростання τ_1 функції f_1 , зменшиться тривалість функції f_2 ; одночасно збільшиться її амплітуда – прямокутний імпульс прийме форму вузького піку. Якщо $\tau_1 \rightarrow 0$, тривалість піку обернеться в нуль, а амплітуда прямуватиме до нескінченності:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} f_2(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \infty, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}, \quad (4.48)$$

де $\delta(t)$ – дельта-імпульс (рис.4.16) [В:5].

Площа, що обмежена дельта-імпульсом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1.$$

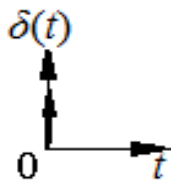


Рисунок 4.16 – Дельта-імпульс

В свою чергу, функція $f_I(t)$ за умови $\tau_I \rightarrow 0$ перетворюється на одиничний стрибок:

$$\lim_{\tau_I \rightarrow 0} f_I(t) = 1(t).$$

Тоді, враховуючи співвідношення (4.47), (4.48), отримаємо:

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}, \quad (4.49)$$

або

$$1(t) = \int \delta(t) dt.$$

В області комплексної частоти p зображення дельта-імпульсу не залежить від p :

$$\delta(t) \leftrightarrow 1. \quad (4.50)$$

Дельта-імпульс, затриманий на час τ , визначається наступним чином:

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases}.$$

Співвідношення вибірки або дискретизації функції $f(t)$ [В:5]:

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

демонструє, що дельта-імпульс виконує вибірку окремих значень функції $f(t)$.

Імпульсна функція є ідеалізованим поданням імпульсних сигналів, тривалість яких мала порівняно з постійною часу кола, при цьому форма сигналу неважлива – важлива його площа. Постійною часу кола вважаємо постійну часу накопичення енергії найбільш інерційного реактивного елемента кола [В:6].

4.5.2. Перехідна та імпульсна характеристики

Перехідною характеристикою $h(t)$ називають реакцію кола на дію одиничного стрибка $1(t)$ напруги або струму. Імпульсною характеристикою $g(t)$ називають реакцію кола на дію дельта-імпульсу $\delta(t)$. Обидві характеристики визначаються за нульових початкових умов, тобто за відсутності запасу енергії в реактивних елементах кола [Р:1, 4, В:5]. Оскільки дельта-імпульс виражається через похідну від одиничного стрибка (4.49),

імпульсна характеристика є похідною від перехідної характеристики завдяки лінійності кола:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (4.51)$$

Як зазначено на початку даного розділу, інформацію про реакцію кола на дію вхідного сигналу дають схемні функції. Для довільної функції передачі $H(p)$ маємо перетворення Лапласа від реакції $h(t)$, поділеної на сигнал $1(t)$:

$$H(p) = \mathcal{L}[h(t)/1(t)] = \mathcal{L}[h(t)]/(1/p), \quad (4.52)$$

що отримано з врахуванням (4.45).

Тоді перехідну характеристику, яка є реакцією кола у часі на сигнал в формі одиничного стрибка, можна виразити через зворотне перетворення Лапласа схемної функції $H(p)$, помноженої на зображення вказаного сигналу

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p) \frac{1}{p}]. \quad (4.53)$$

По аналогії з (4.52) і з врахуванням виразу (4.50):

$$H(p) = \mathcal{L}[g(t)/\delta(t)] = \mathcal{L}[g(t)]/(1). \quad (4.54)$$

Тоді імпульсну характеристику можна представити у вигляді:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)]. \quad (4.55)$$

Визначивши полюси (корені знаменника) схемної функції $H(p)$ з рівняння

$$B(p) = 0,$$

можна розкласти цю функцію на елементарні складові (доданки) [Р:1, 4, В:5, 6, 7]. Так, якщо полюси схемної функції p_i^{Π} ($i=1,2,...,n$) різні, запишемо:

$$H(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = K_0 \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{p - p_i^{\Pi}} = K_0 \frac{A_1(p)}{B_1(p)}, \quad (4.56)$$

де коефіцієнти розкладу K_i ($i=1,2,...,n$) визначаються з виразу:

$$K_i = \left[(p - p_i^{\Pi}) \frac{A_1(p)}{B_1(p)} \right]_{p=p_i^{\Pi}}, \quad (4.57)$$

$$A_1(p) = \frac{1}{a_m} A(p); \quad B_1(p) = \frac{1}{b_n} B(p); \quad (4.58)$$

K_0 визначається виразом (4.28). Наведені вирази справедливі за умови $m < n$, тобто коли ступінь полінома чисельника схемної функції менше ступеня полінома знаменника.

У випадку **дійсних полюсів** схемної функції кожна складова $K_i \frac{1}{p-p_i^\Pi}$ розкладання (4.56) зумовлює наявність у часовій характеристиці експоненційної функції $K_i e^{p_i^\Pi t}$ (приклад 1.2), а часова (імпульсна) характеристика, що відповідає виразу (4.56), має вигляд:

$$g(t) = K_0 \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i^\Pi t}. \quad (4.59)$$

Приклад 4.7. Отримаємо перехідну характеристику $h(t)$ на базі заданої схемної функції

$$H(p) = \frac{p+1}{3p^2+21p+30};$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p) \frac{1}{p}].$$

Визначимо коефіцієнт K_0 та полюси функції $H(p) \frac{1}{p}$:

$$K_0 = \frac{1}{3};$$

$$(p^2 + 7p + 10)p=0; \rightarrow p_1^\Pi = -5; p_2^\Pi = -2; p_3^\Pi = 0.$$

Розрахуємо коефіцієнти розкладання:

$$K_1 = [(p+5) \frac{p+1}{(p+5)(p+2)p}]|_{p=-5} = -4/15;$$

$$K_2 = [(p+2) \frac{p+1}{(p+5)(p+2)p}]|_{p=-2} = 1/6;$$

$$K_3 = [p \frac{p+1}{(p+5)(p+2)p}]|_{p=0} = 1/10.$$

Перехідна характеристика з врахуванням визначених коефіцієнтів розкладання:

$$h(t) = \frac{1}{3} (-\frac{4}{15} e^{-5t} + \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{10}).$$

Постійні часу: $\tau_1 = 1/5$ с, $\tau_2 = 1/2$ с. Імпульсну характеристику можна отримати шляхом диференціювання $h(t)$ відповідно до виразу (4.51).

Коли серед полюсів схемної функції є пара **комплексно-спряжених полюсів** [Р:1, В:6, 7]

$$p_{1,2}^\Pi = \alpha \pm j\beta;$$

відповідні коефіцієнти розкладання виходять також комплексно-спряженими

$$K_{1,2} = K_R \pm jK_I = \sqrt{K_R^2 + K_I^2} e^{\pm j\varphi} = Ke^{\pm j\varphi},$$

де $\varphi = \arctg \left(\frac{K_I}{K_R} \right)$.

Після розкладання на елементарні складові та отримання зворотного перетворення Лапласа, комплексні члени розкладання можна об'єднати:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_R + jK_I}{p - \alpha - j\beta} + \frac{K_R - jK_I}{p - \alpha + j\beta} \right] &= (K_R + jK_I) e^{(\alpha + j\beta)t} + (K_R - jK_I) e^{(\alpha - j\beta)t} = \\ &= e^{\alpha t} [(K_R + jK_I)(\cos\beta t + j\sin\beta t) + (K_R - jK_I)(\cos\beta t - j\sin\beta t)] = \\ &= 2 e^{\alpha t} [K_R \cos\beta t - K_I \sin\beta t] = 2K e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi), \end{aligned} \quad (4.60)$$

якщо $K_R = K \cos\varphi$, $K_I = K \sin\varphi$. Також зауважимо, що отриманий результат відповідає розрахунку коефіцієнтів розкладання за виразом (4.57), в якому для полюса $p_1^\Pi = \alpha + j\beta$ маємо $K_R + jK_I$, а для комплексно-спряженого полюса $p_2^\Pi = \alpha - j\beta$ маємо $K_R - jK_I$. У іншому випадку, функція часу (4.60) має вигляд:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_R - jK_I}{p - \alpha - j\beta} + \frac{K_R + jK_I}{p - \alpha + j\beta} \right] = 2K e^{\alpha t} \cos(\beta t - \varphi). \quad (4.61)$$

Приклад 4.8. Отримаємо перехідну характеристику $h(t)$ на базі заданої схемної функції

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{-3p}{p^2 + 4p + 5}; \\ h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[H(p) \frac{1}{p} \right] = \frac{-3p}{p^2 + 4p + 5} \frac{1}{p} = \frac{-3}{p^2 + 4p + 5}. \end{aligned}$$

Визначимо коефіцієнт K_0 та полюси функції $H(p) \frac{1}{p}$:

$$\begin{aligned} K_0 &= -3; \\ p^2 + 4p + 5 &= 0; \rightarrow p_1^\Pi = -2 + j; \quad p_2^\Pi = -2 - j. \end{aligned}$$

Розрахуємо коефіцієнти розкладання:

$$\begin{aligned} K_I &= [(p + 2 - j) \frac{1}{(p + 2 - j)(p + 2 + j)}] \Big|_{p = -2 + j} = 1/2j = -j/2; \\ K_2 &= j/2. \end{aligned}$$

Отже, $K_R = 0$; $K_I = 1/2$. Тоді, відповідно до виразу (4.61), перехідна характеристика має вигляд:

$$\begin{aligned} h(t) &= K_0 2K e^{\alpha t} \cos(\beta t - \varphi) = -6 (1/2) e^{-2t} \cos(t - \varphi), \\ \varphi &= 90^\circ; \\ h(t) &= -3 e^{-2t} \cos(t - 90^\circ) = -3 e^{-2t} \sin t. \end{aligned}$$

Припустимо, що серед полюсів схемної функції (коренів її знаменника $B(p)$) є **кратні полюси** [Р:1, В:6, 7]. У випадку двох однакових полюсів $p_1^{\Pi} = p_2^{\Pi}$, розкладання схемної функції на елементарні складові має вигляд:

$$H(p) = K_0 \frac{A_1(p)}{B_1(p)} = K_0 \left[\frac{K_{11}}{p-p_1^{\Pi}} + \frac{K_{12}}{(p-p_1^{\Pi})^2} \right]. \quad (4.62)$$

Застосувавши зворотне перетворення Лапласа (4.55) до (4.62), маємо:

$$g(t) = K_0(K_{11} e^{p_1^{\Pi} t} + K_{12} t e^{p_1^{\Pi} t}).$$

Помноживши обидві частини виразу (4.62) на $(p - p_1^{\Pi})^2$, та поклавши $p = p_1^{\Pi}$, отримаємо:

$$K_{12} = [(p-p_1^{\Pi})^2 \frac{A_1(p)}{B_1(p)}] |_{p=p_1^{\Pi}}.$$

Продиференціювавши по змінній p отриманий після множення на $(p - p_1^{\Pi})^2$ вираз (4.62) та поклавши $p = p_1^{\Pi}$, маємо:

$$K_{11} = \left\{ \frac{d}{dp} [(p-p_1^{\Pi})^2 \frac{A_1(p)}{B_1(p)}] |_{p=p_1^{\Pi}} \right\}.$$

Приклад 4.9. Отримаємо перехідну характеристику $h(t)$ на базі заданої схемної функції

$$H(p) = \frac{2p^2}{3(p+1)^2};$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p) \frac{1}{p}] = \frac{2p^2}{3(p+1)^2} \frac{1}{p} = \frac{2p}{3(p+1)^2}.$$

Визначимо коефіцієнт K_0 та полюси функції $H(p) \frac{1}{p}$:

$$K_0 = 2/3;$$

$$(p+1)^2=0; \rightarrow p_1^{\Pi} = p_2^{\Pi} = -1.$$

Розрахуємо коефіцієнти розкладання:

$$K_{11} = \left\{ \frac{d}{dp} [(p+1)^2 \frac{p}{(p+1)^2}] |_{p=-1} \right\} = 1;$$

$$K_{12} = [(p+1)^2 \frac{p}{(p+1)^2}] |_{p=-1} = -1.$$

Перехідна характеристика має вигляд:

$$h(t) = \frac{2}{3} (e^{-t} - t e^{-t}).$$

Таким чином, частотні та часові характеристики схеми описують її реакцію на прості сигнали – синусоїдальний та одиничний стрибок або дельта-імпульс. Маючи ці реакції, можна робити висновки про основні характеристики схеми в цілому. Тому завдання аналізу схеми, крім визначення схемних функцій, полягає також у розрахунку частотних та часових характеристик і оцінці асимптотичної стійкості схеми. При цьому схема вважається асимптотично стійкою, якщо її імпульсна характеристика з плином часу прагне до нуля.

Матрично-векторні параметри – матриця вузлових провідностей схеми Y і вектор сумарних вузлових струмів J – визначаються елементами, з яких складено схему(4.56) (значеннями їх опорів або провідностей, параметрами джерел струмів та напруг). Крім того, вони залежать від характеру незалежних змінних (системи координат). Для того, щоб підкреслити цю обставину, матрицю Y і вектор J називають **первинними параметрами** схеми [В:6, 7].

Залежно від функціонального призначення схеми впливи, прикладені до її входів, розглядаються як носії інформації (сигнали) або як джерела енергії, при цьому перетворення, здійснювані схемою над вхідними впливами, визначаються схемними функціями. Схемні функції залежать лише від параметрів елементів схеми, способу їх з'єднання та для даної сукупності входів і виходів не залежать від вибору системи координат. Через це їх можна назвати **вторинними параметрами** [В:6, 7] схеми. Розглянемо ще одну характеристику, яка важлива для оцінки впливу параметрів елементів на схемні функції.

4.6. Основи теорії чутливості

Якщо відомі параметри моделей елементів схеми, можна сформулювати та розв'язати математичну модель схеми для отримання необхідних характеристик. Проте, на практиці неможливо реалізувати схему, параметри елементів якої точно відповідатимуть параметрам моделі, застосованої для

аналізу схеми. В цьому випадку реальні характеристики схеми відрізняються від отриманих в результаті аналізу.

Відхилення параметрів елементів схеми від розрахункових виникають з кількох причин:

- в процесі проектування зміна параметрів елементів пов'язана з необхідністю приведення у відповідність характеристик схеми заданим;
- в процесі виготовлення – через неможливість точної реалізації параметрів елементів схеми внаслідок реальних обмежень виробництва;
- в процесі експлуатації – під впливом умов експлуатації.

Застосовуючи апарат теорії чутливості, можна оцінити ступінь впливу вказаних відхилень параметрів на характеристики схеми та врахувати їх на етапі проектування. **Чутливістю** називають властивість схеми реагувати відхиленням вихідних характеристик на відхилення параметрів її елементів.

В загальному випадку схемна функція $H(p)$ є також функцією параметрів елементів схеми [Р:1, В:7]:

$$H = H(p, x_1, \dots, x_l) = H(p, \mathbf{x}), \quad (4.63)$$

де $\mathbf{x}$ – вектор параметрів елементів, l – кількість елементів схеми.

Функцію однієї змінної $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора за умови існування відповідних похідних:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x - x_0)^2 + \dots \quad (4.64)$$

Відхилення функції $f(x)$ від її значення $f(x_0)$ при $x = x_0$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0). \quad (4.65)$$

Застосовуючи розкладання схемної функції у ряд Тейлора в околі номінальних значень параметрів елементів (обмежимося лише першою похідною), запишемо відхилення схемної функції:

$$\Delta H \approx \sum_{i=1}^l \frac{\partial H}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^l (x_i \frac{\partial H}{\partial x_i}) \frac{\Delta x_i}{x_i}, \quad (4.66)$$

де $\Delta x_i = x - x_{i0}$ – відхилення параметра i -го елемента від номінального значення.

Розглянемо відносні відхилення схемної функції $\frac{\Delta H}{H}$ та параметрів елементів $\frac{\Delta x_i}{x_i}$ (безрозмірні величини):

$$\frac{\Delta H}{H} \approx \sum_{i=1}^l \frac{x_i}{H} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{x_i} = \sum_{i=1}^l S_{x_i}^H \frac{\Delta x_i}{x_i}, \quad (4.67)$$

де відносна чутливість першого порядку функції $H = H(p, \mathbf{x})$ до відхилення параметра елемента x_i

$$S_{x_i}^H = \frac{x_i}{H} \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (4.68)$$

визначає ступінь впливу відносного відхилення параметра елемента x_i на відносне відхилення схемної функції.

При визначенні відносної чутливості другого порядку у розкладанні $\frac{\Delta H}{H}$ враховуються перша та друга похідні:

$$\frac{\Delta H}{H} \approx \sum_{i=1}^l S_{x_i}^H \frac{\Delta x_i}{x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \left(\frac{x_i x_j}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\Delta x_i}{x_i} \frac{\Delta x_j}{x_j}, \quad (4.69)$$

де відносна чутливість другого порядку функції $H = H(p, \mathbf{x})$ до одночасного відхилення параметрів елементів x_i та x_j

$$S_{x_i x_j}^H = \frac{x_i x_j}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.70)$$

визначає ступінь впливу одночасного відносного відхилення параметрів елементів x_i, x_j на відносне відхилення схемної функції.

Розглянемо окремий випадок, коли схемна функція представлена у вигляді

$$H = \frac{\Delta A}{\Delta B}, \quad (4.71)$$

де $\Delta A, \Delta B$ – визначники (алгебраїчні доповнення) чисельника та знаменника схемної функції відповідно.

У цьому випадку відносну чутливість першого порядку (4.68) можна подати у вигляді:

$$S_{x_i}^H = x_i \frac{\Delta B}{\Delta A} \left(\frac{\partial \Delta A}{\partial x_i} \frac{1}{\Delta B} - \frac{\partial \Delta B}{\partial x_i} \frac{\Delta A}{\Delta^2 B} \right) = x_i \left(\frac{1}{\Delta A} \frac{\partial \Delta A}{\partial x_i} - \frac{1}{\Delta B} \frac{\partial \Delta B}{\partial x_i} \right). \quad (4.72)$$

Розкладання в ряд Маклорена визначника (алгебраїчного доповнення) з урахуванням лише першої похідної має вигляд:

$$\Delta(x) \approx \Delta^0 + \frac{\partial \Delta}{\partial x} x, \quad (4.73)$$

де

$$\Delta^0 = \Delta(x)|_{x=0}. \quad (4.74)$$

Тоді справедливий вираз

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} \approx \frac{\Delta - \Delta^0}{x}. \quad (4.75)$$

Застосуємо (4.75) для спрощення виразу (4.72):

$$S_{x_i}^H \approx \left(\frac{\Delta A - \Delta^0 A}{\Delta A} - \frac{\Delta B - \Delta^0 B}{\Delta B} \right) = \frac{\Delta^0 B}{\Delta B} - \frac{\Delta^0 A}{\Delta A}. \quad (4.76)$$

Приклад 4.10. Скористаємося виразом (4.76) для розрахунку відносної чутливості першого порядку коефіцієнта передачі напруги схеми дільника напруги, зображеної на рис. 4.17.

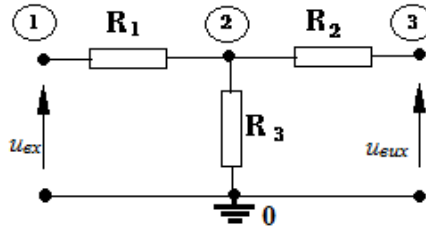


Рисунок 4.17 – Схема дільника напруги

Відповідно до виразу (4.23), коефіцієнт передачі напруги схеми має вигляд:

$$H_U = \frac{U_{вих}}{U_{вх}} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \frac{\Delta A}{\Delta B}.$$

Відносну чутливість першого порядку в цьому випадку можна розрахувати за формулою (4.76), яка набуває вигляду:

$$S_{x_i}^H \approx \frac{\Delta^0_{11}}{\Delta_{11}} - \frac{\Delta^0_{13}}{\Delta_{13}}.$$

Сформуємо матрицю вузлових провідностей для даної схеми:

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline G_1 & -G_1 & 0 \\ \hline -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 \\ \hline 0 & -G_2 & G_2 \\ \hline \end{array}$$

і розрахуємо алгебраїчні доповнення Δ_{11} , Δ_{13}

$$\Delta_{11} = (G_1 + G_3) G_2;$$

$$\Delta_{13} = G_1 G_2.$$

Відносна чутливість H_U до відхилення параметра G_1 з урахуванням того, що $\Delta^0_{11}=G_2 G_3$, $\Delta^0_{13}=0$:

$$S_{G_1}^H = G_3 / (G_1 + G_3) .$$

Відносна чутливість H_U до відхилення параметра G_2 з урахуванням того, що $\Delta^0_{11}=0$, $\Delta^0_{13}=0$:

$$S_{G_2}^H = 0 .$$

Відносна чутливість H_U до відхилення параметра G_3 з урахуванням того, що $\Delta^0_{11}=G_1 G_2$, $\Delta^0_{13}=G_1 G_2$:

$$S_{G_3}^H = [G_1 / (G_1 + G_3)] - 1 = -G_3 / (G_1 + G_3) .$$

Значення чутливості H_U до відхилення параметра G_2 показує, що цей параметр не впливає на коефіцієнт передачі напруги (за відсутності навантаження, струм через R_2 відсутній). Значення чутливостей H_U до відхилення параметрів G_1 і G_3 за абсолютною величиною однакові, тобто ступінь впливу параметрів однакова. Знак показує, що у випадку G_1 зростання цього параметра призводить до зростання коефіцієнта передачі напруги, а у випадку G_3 зростання цього параметра призводить до зменшення коефіцієнта передачі напруги.

Чутливість є однією із важливих характеристик схеми, а вираз (4.69) – основним співвідношенням у сучасній теорії чутливості. На його основі побудовано різні методи, які застосовують апарат теорії чутливості в процесі проектування схем. На практиці застосовують саме відносну чутливість, оскільки в цьому випадку усі величини безрозмірні та їх можна порівнювати. Очевидно, що чим більше членів враховано у розкладанні в ряд Тейлора, тим точніше апроксимується залежність між відхиленням схемної функції та відхиленнями параметрів елементів і тим для більших величин відхилень вона справедлива.

Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Що називають схемною функцією?
2. Які існують типи схемних функцій?
3. Які існують вхідні (вихідні) схемні функції?
4. Які існують функції передачі?
5. Чим відрізняються вхідні (вихідні) схемні функції від функцій передачі?
6. Від чого залежить вибір конкретної схемної функції для аналізу?
7. Визначити функцію передачі, якщо на вході чотириполюсника діє джерело напруги, а на його виході необхідно отримати напругу.
8. Визначити функцію передачі, якщо на вході чотириполюсника діє джерело напруги, а на його виході необхідно отримати струм у навантаженні.
9. Визначити функцію передачі, якщо на вході чотириполюсника діє джерело струму, а на його виході необхідно отримати напругу.
10. Визначити функцію передачі, якщо на вході чотириполюсника діє джерело струму, а на його виході необхідно отримати струм у навантаженні.
11. Що називають нулями схемної функції?
12. В чому полягає фізичний зміст нулів схемної функції?
13. Що називають полюсами схемної функції?
14. Яку схему називають асимптотично стійкою?
15. Чи задовольняє схема вимогам асимптотичної стійкості, якщо нулі схемної функції: $-1, +4$; полюси: $-2, -3+j, -3-j$? На основі яких чисел і як зроблено висновок?
16. Чи задовольняє схема вимогам асимптотичної стійкості, якщо нулі схемної функції: $-1+j, -1-j$; полюси схемної функції: $-4, -2+j, -2-j$. На основі яких чисел і як зроблено висновок?
17. Який режим роботи кола описують частотні характеристики?
18. В яких одиницях вимірюється кутова частота гармонічного сигналу?
19. Як пов'язані циклічна (Гц) та кутова частоти гармонічного сигналу?

20. Що називають амплітудно-частотною характеристикою?
21. Що називають фазо-частотною характеристикою?
22. Що називають амплітудно-фазовою характеристикою?
23. Схемна функція має: полюс, який дорівнює -1 ; нуль, який дорівнює 0 ; коефіцієнт $K_0=1$. Знайти значення АЧХ, якщо кутова частота дорівнює 1 рад/с.
24. Схемна функція має полюс, який дорівнює -2 , та не має нулів. Коефіцієнт $K_0=1$. Знайти значення АЧХ, якщо кутова частота дорівнює 1 рад/с.
25. Схемна функція має полюс, який дорівнює -1 , та нуль, який дорівнює 0 . Коефіцієнт $K_0=1$. Знайти значення ФЧХ в градусах, якщо кутова частота дорівнює 1 рад/с.
26. Схемна функція має полюс, який дорівнює -1 , та не має нулів. Коефіцієнт $K_0=1$. Знайти значення ФЧХ в градусах, якщо кутова частота дорівнює 1 рад/с.
27. Який режим роботи кола описують часові характеристики?
28. Що називають перехідною характеристикою кола?
29. Що називають імпульсною характеристикою кола?
30. Визначити найбільшу постійну часу схеми в секундах, якщо нулі схемної функції: $-1, +4$; полюси схемної функції: $-3, -2$.
31. Визначити найбільшу постійну часу схеми в секундах, якщо нулі схемної функції: $-2, +2$; полюси схемної функції: $-1, -4+j, -4-j$.
32. Які причини відхилень параметрів елементів від номінальних значень?
33. Що називають чутливістю схеми?
34. Чим відрізняються чутливості першого та другого порядків?
35. Яку чутливість застосовують на практиці?
36. В чому перевага відносної чутливості?

5. ТЕОРІЯ ЧОТИРИПОЛЮСНИКА

Як зазначено у другому розділі, чотириполіусник представляє схему, яка має дві пари виводів: вхідну, до якої прикладено сигнал, та вихідну – з реакцією, яка нас цікавить. Розрізняють наступні типи чотириполіусників [Р:1, В:5]:

1. Пасивні та активні. Пасивним вважають чотириполіусник, який не містить незалежних і залежних джерел. Також такий чотириполіусник є оборотним. У разі наявності лише залежних джерел і пасивних елементів, чотириполіусник є активним необоротним.

2. Симетричні та несиметричні. Симетричний чотириполіусник працює однаково, незалежно від подачі сигналу на вхід або вихід.

3. Прохідний – чотириполіусник, у якого до однієї пари виводів приєднане незалежне джерело, а до іншої пари – навантаження.

4. Важливий окремий випадок: чотириполіусник з короткозамкненою стороною, який має спільний вузол між входом та виходом.

5.1. Схемні функції чотириполіусника з навантаженням

Розглянемо пасивний чотириполіусник з короткозамкненою стороною, на вхід якого підключено незалежне джерело струму I_1 , на вихід – незалежне джерело струму I_ν ($\nu = n - 1$, n – загальна кількість вузлів чотириполіусника) або навантаження з провідністю y_n (рис. 5.1). У разі підключення навантаження, діє закон Ома з урахуванням напрямку струму I_ν по відношенню до вузлової напруги V_ν .

$$I_\nu = -V_\nu y_n. \quad (5.1)$$

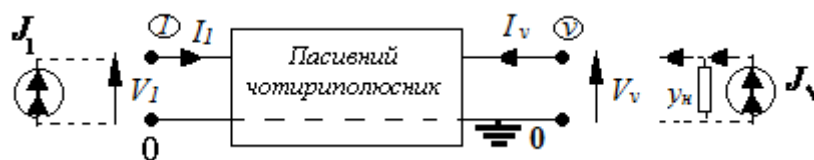


Рисунок 5.1 – Чотириполюсник з короткозамкненою стороною

Для отримання виразів схемних функцій, запишемо систему вузлових рівнянь чотириполюсника у матричному вигляді [Р:1, В:5, 7]:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k} & \dots & y_{1v} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k} & \dots & y_{2v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{v1} & y_{v2} & \dots & y_{vk} & \dots & y_{vv} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ \vdots \\ I_v \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Застосуємо правило Крамера для встановлення співвідношень між вхідними, вихідними напругами та струмами чотириполюсника:

$$V_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad (5.3)$$

$$V_v = \frac{\Delta_v}{\Delta}, \quad (5.4)$$

де Δ_1 – визначник матриці, отриманої з матриці Y системи (5.2) шляхом заміни першого стовпця на вектор правої частини системи, Δ_v – визначник матриці, отриманої з матриці Y системи (5.2) шляхом заміни останнього стовпця на вектор правої частини системи.

Виконаємо розкладання визначників Δ_1 , Δ_v за елементами першого та останнього стовпців відповідно, що дає змогу подати вирази (5.3), (5.4) у вигляді:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{11}I_1 + \Delta_{v1}I_v) \\ V_v = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{1v}I_1 + \Delta_{vv}I_v) \end{cases}. \quad (5.5)$$

Система рівнянь (5.5) отримала назву системи рівнянь чотириполюсника в z -параметрах [Р:1, 2, В:5, 7]. З урахуванням того, що $V_I = V_{\text{BX}}$, $V_v = V_{\text{ВІХ}}$, $I_I = I_{\text{BX}}$, $I_v = I_{\text{ВІХ}}$, ця система запишеться наступним чином:

$$\begin{cases} V_{\text{BX}} = z_{11}I_{\text{BX}} + z_{12}I_{\text{ВІХ}} \\ V_{\text{ВІХ}} = z_{21}I_{\text{BX}} + z_{22}I_{\text{ВІХ}} \end{cases}, \quad (5.6)$$

де коефіцієнти при струмах $z_{11} = \Delta_{11}/\Delta$, $z_{12} = \Delta_{v1}/\Delta$, $z_{21} = \Delta_{1v}/\Delta$, $z_{22} = \Delta_{vv}/\Delta$ мають розмірність опорів.

Скористаємося другим рівнянням системи (5.5). Замінімо в ньому вихідну напругу виразом, отриманим з рівняння (5.1):

$$V_v = -I_v / y_n. \quad (5.7)$$

Тоді маємо:

$$-\frac{I_v}{y_n} = \frac{\Delta_{1v}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{vv}}{\Delta} I_v,$$

або

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{y_n} + \frac{\Delta_{vv}}{\Delta}\right) I_v &= \frac{\Delta_{1v}}{\Delta} I_1 \\ -\left(\frac{\Delta + y_n \Delta_{vv}}{y_n \Delta}\right) I_v &= \frac{\Delta_{1v}}{\Delta} I_1, \end{aligned} \quad (5.8)$$

що дає змогу отримати вираз **коефіцієнта передачі струму** чотириполюсника:

$$H_I = -\frac{\Delta_{1v} y_n}{\Delta + y_n \Delta_{vv}}. \quad (5.9)$$

Знак H_I пов'язаний з вибраним умовним напрямком струму I_v .

Замінімо вихідну напругу у виразі H_U відповідно до (5.7), а також скористаємося першим рівнянням системи (5.5), при цьому вхідний струм I_I виразимо з (5.8):

$$\begin{aligned} H_U = \frac{V_v}{V_1} &= \frac{-I_v \Delta}{y_n(\Delta_{11}I_1 + \Delta_{v1}I_v)} = \frac{-I_v \Delta}{y_n[-\frac{\Delta_{11}(\Delta + y_n \Delta_{vv})}{y_n \Delta_{1v}} I_v + \Delta_{v1}I_v]} = \\ &= \frac{-\Delta}{-\frac{\Delta_{11}\Delta + y_n \Delta_{vv} \Delta_{11}}{\Delta_{1v}} + \Delta_{v1} y_n} = \frac{\Delta_{1v}}{\Delta_{11} + y_n(\frac{\Delta_{11}\Delta_{vv} - \Delta_{1v}\Delta_{v1}}{\Delta})}. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо вираз для **коефіцієнта передачі напруги** чотириполюсника:

$$H_U = \frac{\Delta_{1v}}{\Delta_{11} + y_H \Delta_{11,vv}}, \quad (5.10)$$

де $\Delta_{11,vv}$ – подвійне алгебраїчне доповнення, яке розраховується шляхом видалення з матриці перших рядка та стовпця, останніх рядка та стовпця, обчислення визначника залишку матриці [P:1, B:7]. У випадку холостого ходу на виході чотириполюсника, тобто $y_H = 0$:

$$H_U^{xx} = \frac{\Delta_{1v}}{\Delta_{11}}. \quad (5.11)$$

Опір передачі чотириполюсника, з урахуванням виразу (5.7), можна виразити через коефіцієнт передачі струму (5.9):

$$H_Z = \frac{V_v}{I_1} = -\frac{I_v}{I_1 y_H} = -\frac{H_I}{y_H},$$

тоді **опір передачі** чотириполюсника має вигляд:

$$H_Z = \frac{\Delta_{1v}}{\Delta + y_H \Delta_{vv}}. \quad (5.12)$$

Провідність передачі чотириполюсника можна виразити через коефіцієнт передачі напруги, застосувавши вираз (5.1) для струму на виході:

$$H_Y = \frac{I_v}{V_1} = -\frac{V_v y_H}{V_1} = -H_U y_H,$$

тоді **провідність передачі** чотириполюсника має вигляд:

$$H_Y = -\frac{\Delta_{1v} y_H}{\Delta_{11} + y_H \Delta_{11,vv}}. \quad (5.13)$$

Вхідну провідність чотириполюсника можна виразити через провідність передачі та коефіцієнт передачі струму

$$Y_{bx} = \frac{I_1}{V_1} \frac{I_v}{I_v} = \frac{H_Y}{H_I},$$

тоді отримаємо наступний вираз для **вхідної провідності** чотириполюсника:

$$Y_{bx} = \frac{\Delta + y_H \Delta_{vv}}{\Delta_{11} + y_H \Delta_{11,vv}}. \quad (5.14)$$

У випадку холостого ходу на виході чотириполюсника, тобто $y_n=0$, маємо:

$$Y_{BX}^{xx} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}, \quad (5.15)$$

а також вхідний опір для цього випадку

$$Z_{BX}^{xx} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}. \quad (5.16)$$

Вираз для **вихідної провідності** чотириполюсника можна отримати з формули (5.14) для Y_{BX} , якщо провідність навантаження y_n замінити на внутрішню провідність незалежного джерела струму y_0 та поміняти місцями індекси алгебраїчних доповнень, які відповідають вузлам входу та виходу

$$Y_{\text{вих}} = \frac{\Delta + y_0 \Delta_{11}}{\Delta_{vv} + y_0 \Delta_{11, vv}}. \quad (5.17)$$

У випадку відсутності внутрішньої провідності незалежного джерела, тобто $y_0=0$, вихідна провідність має вигляд:

$$Y_{\text{вих}}^0 = \frac{\Delta}{\Delta_{vv}}, \quad (5.18)$$

а вихідний опір для цього випадку визначається виразом:

$$Z_{\text{вих}}^0 = \frac{\Delta_{vv}}{\Delta}. \quad (5.19)$$

5.2. Системи параметрів чотириполюсника

Властивості чотириполюсника, внутрішня структура якого невідома, визначаються коефіцієнтами рівнянь (параметрами), які пов'язують струми $i_{\text{вх}}$, $i_{\text{вих}}$ та напруги $u_{\text{вх}}$, $u_{\text{вих}}$ зовнішніх виводів (рис. 5.2) [Р:1, 2, В:5, 7].

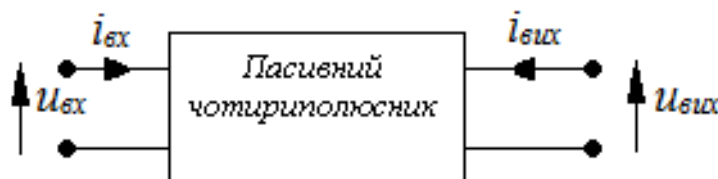


Рисунок 5.2 – Пасивний чотириполюсник

Практично застосовують три системи параметрів:

1. Система параметрів опорів холостого ходу (**z-параметрів**). Струми входу $i_{\text{вх}}$ та виходу $i_{\text{вих}}$ чотириполюсника в цьому випадку можна розглядати як струми двох незалежних джерел струму (рис. 5.1). Напруги входу та виходу чотириполюсника представимо у вигляді накладання напруг від дії кожного джерела окремо:

$$\begin{cases} u_{\text{вх}} = z_{11}i_{\text{вх}} + z_{12}i_{\text{вих}} \\ u_{\text{вих}} = z_{21}i_{\text{вх}} + z_{22}i_{\text{вих}} \end{cases} \quad (5.20)$$

Зміст z-параметрів встановлюється за визначенням схемних функцій, виходячи з режиму холостого ходу на виході ($i_{\text{вих}} = 0$) та вході ($i_{\text{вх}} = 0$) чотириполюсника:

якщо $i_{\text{вих}} = 0$, маємо

$$z_{11} = \frac{u_{\text{вх}}}{i_{\text{вх}}} - \text{вхідний опір};$$

$$z_{21} = \frac{u_{\text{вих}}}{i_{\text{вх}}} - \text{опір передачі з входу на вихід};$$

якщо $i_{\text{вх}} = 0$, маємо

$$z_{12} = \frac{u_{\text{вх}}}{i_{\text{вих}}} - \text{опір передачі з виходу на вхід};$$

$$z_{22} = \frac{u_{\text{вих}}}{i_{\text{вих}}} - \text{вихідний опір}.$$

У матричній формі система рівнянь (5.20) має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} u_{\text{вх}} \\ u_{\text{вих}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_{\text{вх}} \\ i_{\text{вих}} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Для отримання наступної системи параметрів, виразимо з системи рівнянь (5.21) вхідний та вихідний струми чотириполюсника:

$$\begin{bmatrix} i_{\text{вх}} \\ i_{\text{вих}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{\text{вх}} \\ u_{\text{вих}} \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

де Δ_Z – визначник матриці z-параметрів.

2. Система параметрів провідностей короткого замикання (**y-параметрів**).

$$\begin{cases} i_{\text{вх}} = y_{11}u_{\text{вх}} + y_{12}u_{\text{вих}} \\ i_{\text{вих}} = y_{21}u_{\text{вх}} + y_{22}u_{\text{вих}} \end{cases} \quad (5.23)$$

Зміст y -параметрів встановлюється за визначенням схемних функцій, виходячи з режиму короткого замикання на виході ($u_{\text{вих}}=0$) та вході ($u_{\text{вх}}=0$) чотириполіюсника:

якщо $u_{\text{вих}} = 0$, маємо

$$y_{11} = \frac{i_{\text{вх}}}{u_{\text{вх}}} - \text{вхідна провідність};$$

$$y_{21} = \frac{i_{\text{вих}}}{u_{\text{вх}}} - \text{провідність передачі з входу на вихід};$$

якщо $u_{\text{вх}} = 0$, маємо

$$y_{12} = \frac{i_{\text{вх}}}{u_{\text{вих}}} - \text{провідність передачі з виходу на вхід};$$

$$y_{22} = \frac{i_{\text{вих}}}{u_{\text{вих}}} - \text{вихідна провідність}.$$

У матричній формі система рівнянь (5.23) має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} i_{\text{вх}} \\ i_{\text{вих}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{\text{вх}} \\ u_{\text{вих}} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Розв'язання даної системи щодо напруг дає змогу встановити зв'язок між z -параметрами та y -параметрами:

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta_y}; \quad z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta_y}; \quad z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta_y}; \quad z_{21} = -\frac{y_{21}}{\Delta_y}, \quad (5.25)$$

де визначник матриці y -параметрів: $\Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$.

Зауважимо, що для симетричного чотириполіюсника:

$$z_{11}=z_{22}; \quad y_{11}=y_{22},$$

а для оборотного чотириполіюсника:

$$z_{12}=z_{21}; \quad y_{12}=y_{21}.$$

3. Система гібридних параметрів (**h -параметрів**).

$$\begin{cases} u_{\text{вх}} = h_{11}i_{\text{вх}} + h_{12}u_{\text{вих}} \\ i_{\text{вих}} = h_{21}i_{\text{вх}} + h_{22}u_{\text{вих}} \end{cases}. \quad (5.26)$$

Зміст h -параметрів встановлюється за визначенням схемних функцій, виходячи з режиму короткого замикання на виході ($u_{\text{вих}}=0$) та холостого ходу на вході ($i_{\text{вх}}=0$) чотириполіюсника:

якщо $u_{\text{вих}}=0$, маємо

$$h_{11} = z_{11} = \frac{u_{\text{ВХ}}}{i_{\text{ВХ}}} - \text{вхідний опір};$$

$$h_{21} = \frac{i_{\text{ВІХ}}}{i_{\text{ВХ}}} - \text{коефіцієнт передачі струму};$$

якщо $i_{\text{ВХ}} = 0$, маємо

$$h_{12} = \frac{u_{\text{ВХ}}}{u_{\text{ВІХ}}} - \text{коефіцієнт зворотного зв'язку};$$

$$h_{22} = y_{22} = \frac{i_{\text{ВІХ}}}{u_{\text{ВІХ}}} - \text{вихідна провідність}.$$

Взагалі, для чотиріполюсника можна додатково записати три системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} i_{\text{ВХ}} \\ u_{\text{ВІХ}} \end{bmatrix} = [f] \begin{bmatrix} u_{\text{ВХ}} \\ i_{\text{ВІХ}} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{\text{ВХ}} \\ i_{\text{ВХ}} \end{bmatrix} = [a] \begin{bmatrix} u_{\text{ВІХ}} \\ i_{\text{ВІХ}} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{\text{ВІХ}} \\ i_{\text{ВІХ}} \end{bmatrix} = [b] \begin{bmatrix} u_{\text{ВХ}} \\ i_{\text{ВХ}} \end{bmatrix},$$

які не мають практичного застосування [Р:1].

5.3. Схеми заміщення чотиріполюсника

Застосування схем заміщення полягає в тому, щоб шляхом заміни чотиріполюсника спростити розрахунок схеми, яка містить велику кількість чотиріполюсників. Схеми заміщення будують на основі трьох систем параметрів чотиріполюсника.

Так можна розглядати кожне з рівнянь системи (5.20) як рівняння балансу напруг в деякому контурі, тоді отримаємо схему заміщення, зображену на рис. 5.3. В якості залежних джерел застосовані джерела напруги, керовані струмами [Р:1, В:5].

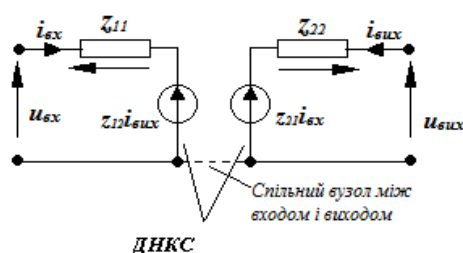


Рисунок 5.3 – Схема заміщення в z-параметрах

В системі рівнянь (5.23) кожне рівняння можна розглядати як рівняння балансу струмів у деякому вузлі, тоді отримаємо схему заміщення, зображену на рис. 5.4. В якості залежних джерел застосовані джерела струму, керовані напругами.

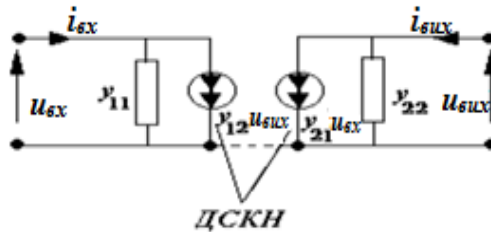


Рисунок 5.4 – Схема заміщення в y -параметрах

В системі рівнянь (5.26) перше рівняння можна розглядати як рівняння балансу напруг в деякому контурі, а друге – як рівняння балансу струмів в деякому вузлі. Відповідна схема заміщення зображена на рис. 5.5.

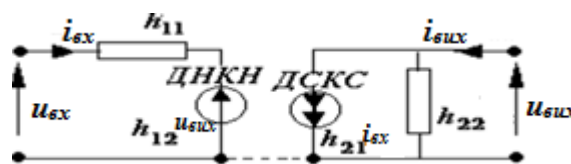


Рисунок 5.5 – Схема заміщення в h -параметрах

5.4. Чотириполюсник з індуктивним зв'язком

Розглянемо різновид чотириполюсника, що відноситься до пасивних оборотних кіл [Р:1, В:5, 6]. Це чотириполюсник з індуктивним зв'язком, що містить два індуктивних елементи з індуктивностями L_1 та L_2 , пов'язані між собою через спільний потік взаємної індукції (рис. 5.6). Для врахування магнітного зв'язку індуктивних елементів застосовують коефіцієнт взаємної індукції $L_{12}=L_{21}=M$, який вимірюється в Гн.

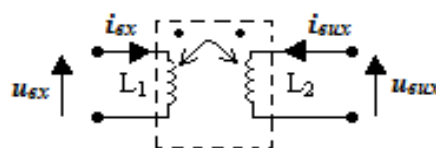


Рисунок 5.6 – Індуктивно-зв'язані елементи

В залежності від взаємного розташування та напрямку обмотки котушок, полярність наведеної напруги може співпадати (не співпадати) з прийнятою позитивною полярністю напруги іншої котушки. Орієнтації полярності наведеної напруги u_{21} (u_{12}) по відношенню до прийнятої позитивної полярності напруги $u_2 = u_{\text{вих}}$ ($u_1 = u_{\text{вх}}$) розрізняють, приписуючи знак коефіцієнту взаємної індукції M : позитивний знак при збігу та негативний – при розбіжності полярності напруг. У разі позитивного знаку маємо $u_2 + u_{21}$ ($u_1 + u_{12}$), у протилежному випадку маємо $u_2 - u_{21}$ ($u_1 - u_{12}$). Для визначення знаку M без отримання даних про геометричні співвідношення та напрямки намотки котушок, їх однополярні виводи прийнято позначати зірочками або крапками [В:5, 6]. Якщо прийняті позитивні напрямки струмів, узгоджені з полярністю напруг виводів, орієнтовані однаково по відношенню до однополярних виводів (обидва струми спрямовані до позначених виводів або обидва струми спрямовані від них), тоді $M > 0$, в протилежному випадку $M < 0$.

При одночасному протіканні струмів по обох котушках маємо рівняння для напруг $u_{\text{вх}}$, $u_{\text{вих}}$, що складаються з напруг, наведених власним потоком та потоком взаємної індукції:

$$\begin{cases} u_{\text{вх}} = u_1 + u_{12} = L_1 \frac{di_{\text{вх}}}{dt} + L_{12} \frac{di_{\text{вих}}}{dt}; \\ u_{\text{вих}} = u_{21} + u_2 = L_{21} \frac{di_{\text{вх}}}{dt} + L_2 \frac{di_{\text{вих}}}{dt}. \end{cases} \quad (5.27)$$

В області комплексної частоти (із застосуванням перетворення Лапласа):

$$\begin{cases} U_{\text{вх}} = pL_1 I_{\text{вх}} + pMI_{\text{вих}} \\ U_{\text{вих}} = pMI_{\text{вх}} + pL_2 I_{\text{вих}} \end{cases} \quad (5.28)$$

Виразимо струми через напруги із системи (5.28):

$$\begin{cases} I_{\text{вх}} = y_{11} U_{\text{вх}} + y_{12} U_{\text{вих}} \\ I_{\text{вих}} = y_{21} U_{\text{вх}} + y_{22} U_{\text{вих}} \end{cases}, \quad (5.29)$$

де y -параметри є елементами оберненої матриці z -параметрів

$$y = z^{-1} = \frac{1}{p(L_1 L_2 - M^2)} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} pL_1 & pM \\ pM & pL_2 \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці $\mathbf{y}$ -параметрів (5.30) є параметрами схеми заміщення, зображеної на рис. 5.7.

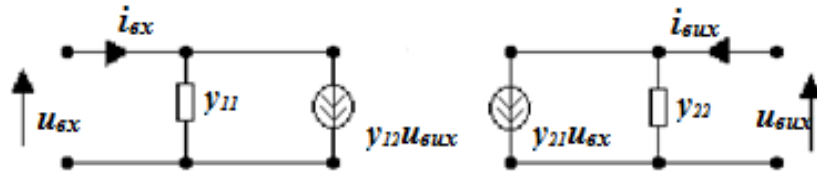


Рисунок 5.7 – Схема заміщення індуктивно-зв'язаних елементів

Приклад 5.1. Розглянемо схему з індуктивно-зв'язаними елементами (рис. 5.8), для якої сформуємо систему вузлових рівнянь [В:5]. Застосуємо схему заміщення, зображену на рис. 5.7.

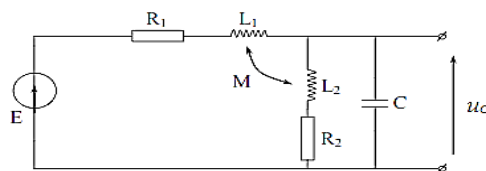


Рисунок 5.8 – Схема з індуктивно-зв'язаними елементами

В результаті отримаємо еквівалентну схему (рис. 5.9), для якої можна сформулювати систему вузлових рівнянь відповідно до правил, наведених у розділі 3.

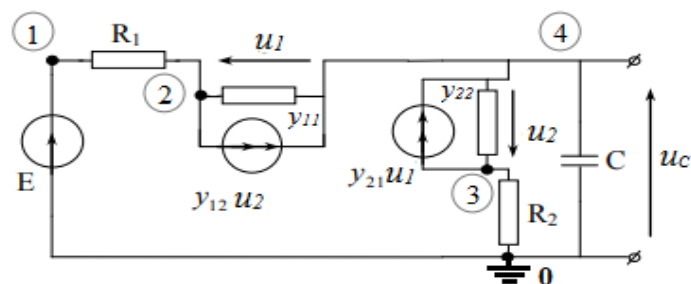


Рисунок 5.9 – Еквівалентна схема з вбудованою схемою заміщення

Система вузлових рівнянь для еквівалентної схеми рис. 5.9 має наступний вигляд:

	1	2	3	4	5				
1	G_1	$-G_1$	0	0	1	$\times$	V_1	$=$	0
2	$-G_1$	G_1+y_{11}	y_{12}	$-y_{11}-y_{12}$	0		V_2		0
3	0	y_{21}	G_2+y_{22}	$-y_{22}-y_{21}$	0		V_3		0
4	0	$-y_{11}-y_{21}$	$-y_{22}-y_{12}$	$pC+y_{11}+y_{22}+y_{12}+y_{21}$	0		V_4		0
5	1	0	0	0	0		i_E		E

Параметри y_{12} , y_{21} джерел струму, керованих напругами u_1 , u_2 , враховано із застосуванням правила (3.38), а саме

– для параметра y_{12} матриця залежного джерела має вигляд

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline y_{12} & -y_{12} \\ \hline -y_{12} & y_{12} \\ \hline \end{array} \end{array} ;$$

– для параметра y_{21} матриця залежного джерела має вигляд

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline y_{21} & -y_{21} \\ \hline -y_{21} & y_{21} \\ \hline \end{array} \end{array} .$$

Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Який чотириполіусник називають оборотним?
2. Який чотириполіусник називають активним необоротним?
3. Який чотириполіусник називають симетричним?
4. Який чотириполіусник називають прохідним?
5. Що називають чотириполіусником з короткозамкненою стороною?

6. Визначити напругу на навантаженні, якщо коефіцієнт передачі струму чотириполюсника дорівнює 0.8, на вхід подається струм силою 0.5 А, а опір навантаження 50 Ом.
7. Визначити напругу на навантаженні, якщо коефіцієнт передачі струму чотириполюсника дорівнює 0.5, на вхід подається струм силою 0.4 А, а опір навантаження 50 Ом.
8. Визначити струм у навантаженні, якщо коефіцієнт передачі напруги чотириполюсника дорівнює 0.5, на вхід подається напруга 4 В, а опір навантаження 2 Ом.
9. Визначити струм в навантаженні, якщо коефіцієнт передачі напруги чотириполюсника дорівнює 0.2, на вхід подається напруга 10 В, а опір навантаження 4 Ом.
10. Визначити струм у навантаженні, якщо опір передачі чотириполюсника дорівнює 200 Ом, на вхід подається струм силою 0.5 А, а опір навантаження 50 Ом.
11. Визначити струм у навантаженні, якщо опір передачі чотириполюсника дорівнює 100 Ом, на вхід подається струм силою 0.2 А, а опір навантаження 4 Ом.
12. Визначити напругу на навантаженні, якщо провідність передачі чотириполюсника дорівнює 0.1 См, на вхід подається напруга 10 В, а опір навантаження 50 Ом.
13. Визначити напругу на навантаженні, якщо провідність передачі чотириполюсника дорівнює 0.2 См, на вхід подається напруга 5 В, а опір навантаження 2 Ом.
14. Визначити вхідну напругу чотириполюсника, якщо його вхідний опір дорівнює 50 Ом, а вхідний струм: 0.1 А.
15. Визначити вхідний струм чотириполюсника, якщо його вхідний опір дорівнює 10 Ом, а вхідна напруга: 5 В.
16. З яких параметрів складається система z-параметрів чотириполюсника?
17. З яких параметрів складається система у-параметрів чотириполюсника?

18. З яких параметрів складається система h -параметрів чотириполюсника?
19. В чому полягає застосування схем заміщення чотириполюсника?
20. До яких чотириполюсників відноситься чотириполюсник з індуктивним зв'язком?
21. З яких елементів складається чотириполюсник з індуктивним зв'язком?
22. Який параметр характеризує магнітний зв'язок в чотириполюснику з індуктивним зв'язком?
23. Як враховується взаємне розташування та напрямки обмотки котушок, пов'язаних між собою через спільний потік взаємної індукції?
24. Як визначають знак коефіцієнта взаємної індукції без отримання даних про геометричні співвідношення та напрямки намотки котушок?

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Рекомендована (Р) література

1. Бондаренко В.М. Основи радіоелектроніки. Розділ: «Основи теорії електронних схем» : навч. посіб. [для студентів напряму підготовки 6.050902 «Радіоелектронні апарати»] [Електронний ресурс] / В.М. Бондаренко. – Київ : НТУУ «КПІ», 2009. – 72 с. – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/241> (дата звернення: 30.10.2024). – Назва з екрана.
2. Основи теорії електронних кіл : підручник / Ю.Я. Бобало, Б.А. Мандзій, П. Г. Стахів, Л.Д. Писаренко, Ю.І. Якименко; ред. д.т.н., проф. П.Г. Стахів. – Львів : Магнолія 2006, 2017. – 296 с.
3. Основи теорії кіл. Розділи: «Аналіз кіл у сталому синусоїдальному режимі», «Аналіз кіл у часі» : навч. посіб. [для студентів спец. 172 «Телекомунікації та радіотехніка»] [Електронний ресурс] / уклад.: В.М. Бондаренко, Н.О. Бондаренко. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 70 с. – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/51553> (дата звернення: 30.10.2024). – Назва з екрана.
4. Bondarenko V. Circuit Design for Beginners. Fundamentals of circuit theory. Ukrainian edition [Electronic resource] / V. Bondarenko // YouTube. – 2020. – Access mode: <https://youtube.com/playlist?list=PLJMLgV-58fkGOZI7BAJkGeRF8l-HghDOp&feature=shared> (date of access: 30.10.2024). – Title from screen.

Використана (В) література

1. Siebert, William McC. Circuits, Signals, and Systems / William McC. Siebert. – London, England: The MIT Press, 1998. – [Electronic resource]. – Access mode: https://books.google.com.ua/books?id=zBTUiIrb2WIC&printsec=copyright&redir_esc=y&hl=en#v=onepage&q&f=false (date of access: 30.10.2024). – Title from screen.

2. Horowitz, Paul. The Art of Electronics / Paul Horowitz, Winfield Hill. – New York, USA: Cambridge University Press, 2016. – [Electronic resource]. – Access mode:
<https://eclass.uniwa.gr/modules/document/index.php?course=EEE265&download=/6218412aGLbn/5e6db8cd5KNP.pdf> (date of access: 30.10.2024). – Title from screen.
3. Бондаренко В. М. Основи електродинаміки: основи теорії сигналів : навч. посіб. [Електронний ресурс] / В.М. Бондаренко, В.Г. Губар. – Київ : НТУУ «КПІ», 2012. – 90 с. – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/2217> (дата звернення: 30.10.2024). – Назва з екрана.
4. Байдак Ю.В. Основи теорії кіл: навч. посіб. / Ю. В. Байдак. – Київ : Вища школа: Слово, 2009. – 271 с.
5. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. : учебник [для электротехн. и радиотехн. спец. вузов] / П.Н. Матханов. – 3-е изд., перераб. и дополнен. – Москва : Высшая шк., 1990. – 400 с.
6. Гумен М. Б. Основи теорії електричних кіл: У 3 кн. Кн. 1. Аналіз лінійних електричних кіл. Часова область : підручник / М.Б. Гумен, А.М. Гуржій, В.М. Співак. – Київ : Вища школа, 2003. – 399 с.
7. Сигорский В. П. Алгоритмы анализа электронных схем / В.П. Сигорский, А.И. Петренко. – 2-е изд., перераб. и дополнен. – Москва : Советское радио, 1976. – 608 с.

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

АС	Alternating Current – змінний струм
DC	Direct Current – постійний струм
АЧХ	Амплітудно-частотна характеристика
ВАХ	Вольт-амперна характеристика
ДННН	Джерело напруги, кероване напругою
ДНКС	Джерело напруги, кероване струмом
ДСНН	Джерело струму, кероване напругою
ДСКС	Джерело струму, кероване струмом
ДЧХ	Дійсна частотна характеристика
ЕРС	Електрорушійна сила
УЧХ	Уявна частотна характеристика
ФВЧ	Фільтр високих частот
ФНЧ	Фільтр низьких частот
ФЧХ	Фазо-частотна характеристика