

АНАЛІЗ ТОПОЛОГІЇ БАГАТОРАНГОВИХ МЕРЕЖ НА ОСНОВІ ТОРЦЕВОГО ДОБУТКУ МАТРИЦЬ

Слюсар В.І.¹, д.т.н., професор; Перепеліцин С.О.²

¹Центральний науково-дослідний інститут озброєння та військової техніки Збройних Сил України; ²ТОВ “Institute of Netcentric”, Київ, Україна

Як відомо, для аналізу тактичних мереж зв'язку можуть бути використані математичні моделі у вигляді графів, що являють собою сукупність вершин (вузлів мережі зв'язку) і з'єднувальних ребер (ліній зв'язку). Класичний апарат теорії графів [1] дозволяє охопити багато аспектів розподілу навантаження при розв'язку завдань маршрутизації в мережі. Прикладом тому є використання матриць інцидентності й матриць суміжності в комбінації із традиційним матричними операціями [1].

Разом з тим, в останні роки додатковий імпульс розвитку теорії графів надали дослідження в області штучного інтелекту й обробки природньої мови. Зокрема, в [2] для аналізу тексту поряд з матрицею інцидентності задіяно торцевий добуток матриць інцидентності, запропонований в 1996 р. Слюсарем В.І. [3, 4]. Даний приклад свідчить про можливість застосування торцевого добутку матриць і для аналізу топології графа мультирангової мережі в теорії зв'язку.

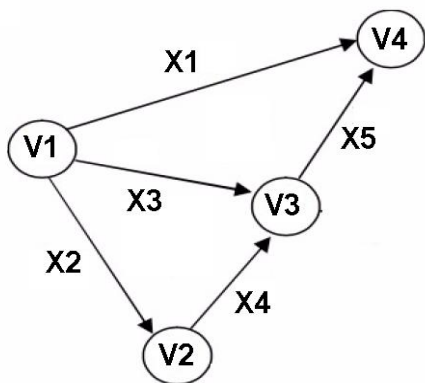


Рис. 1. Граф фрагмента тактичної мережі зв'язку

Розглянемо варіант відповідного використання вказаної матричної операції для випадку аналізу фрагмента мобільного компонента перспективної системи зв'язку, представленої на рис. 1 вершинами 1 - 4. Складемо для цього фрагмента так звану матрицю інцидентності. Її рядки будуть відповідати вершинам графа топології мережі, а стовпці - його ребрам. При цьому ненульове значення елемента матриці вказує на зв'язок між вершиною й ребром (їх інцидентність).

Для наведеного на рис. 1 фрагмента мережі вказана матриця інцидентності має запис:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Як видно, кожна з вершин $V_1 - V_4$ контактує з ребрами графа $X_1 - X_5$ не більше одного разу, тоді як усі ребра з'єднують по дві вершини, оскільки кожний стовпець матриці (1) містить пари одиниць.

Для аналізу парних комбінацій елементів графа на рис. 1 відправним пунктом має стати матриця інцидентності, що сформована з вихідної матриці G за допомогою торцевого добутку матриць [3, 4]:

$$G_2 = G \square G,$$

де $\square$ – символ торцевого добутку матриць (зводиться до кронекерівського множення рядка лівої матриці на рядок правої [3, 4]). Для розглянутого випадку одержимо:

$$G_2 = G \wedge G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Для пояснення змісту елементів отриманої матриці, яку будемо йменувати вторинною матрицею інцидентності, звернемося до табличної форми подання даних (див. табл. 1).

Таблиця 1

№ вершин	Комбінації ребер																								
	X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
V_1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V_2	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
V_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
V_4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

Отже, рядок табл. 1, а відповідно й вторинної матриці інцидентності, показує у цьому випадку, скільки раз та або інша пара ребер зустрічається у конкретній вершині графа. При цьому за парою, утвореною дублюванням того самого ребра ($X_m X_m$, $m = 1; 2; 3; 4$), можна судити про те, скільки раз таке ребро включене у різні вершини. По-іншому результат можна трактувати як кількість вершин, що зустрічаються на маршруті, утвореному конкретною комбінацією пар ребер.

Можливий також варіант формування вторинної матриці інцидентності за допомогою торцевого добутку на основі транспонованої матриці G^T . У цьому випадку можна аналізувати статистику зустрічності пари вершин за допомогою тих або інших ребер. Зазначена альтернативна версія матриці інцидентності має вигляд:

$$T = G^T \square G^T. \quad (3)$$

Її елементи представлені у табл. 2, у якій рядки відповідають ребрам, а стовпці – вершинам.

Таблиця 2

№ ребра	V_1				V_2				V_3				V_4			
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_1	V_2	V_3	V_4	V_1	V_2	V_3	V_4	V_1	V_2	V_3	V_4
X_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
X_2	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
X_4	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
X_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1

З табл. 2 легко одержати повне уявлення про те, якими ребрами з'єднана конкретна пара вершин. Нульовий стовпець означає відсутність ребра, що з'єднує конкретні вершини, наприклад, цей випадок має місце у відношенні другої і четвертої вершин (V_2V_4 , V_4V_2). При цьому пара, що утворена дублюванням однієї й тієї ж вершини (V_mV_m), дозволяє судити про те, скільки ребер підключено до цієї вершини.

Таким чином, використання торцевого добутку матриць дозволяє розширити можливості аналізу топології тактичної мережі, автоматизувати окремі його етапи за рахунок формування матриць інцидентності другого й більш високих порядків. При цьому у порівнянні з використанням кронекерівського добутку матриць торцевий добуток дозволяє скоротити обсяги обчислювальних витрат і спростити вимоги до засобів зберігання даних. Особливо це важливо для мультирангових мереж, чия топологія описується графами з великою кількістю вершин і ребер.

Перелік посилань

1. Ф. Харари. Теория графов. М.: Мир, 1973, 300 с.
2. Bryan Bischof. Higher order co-occurrence tensors for hypergraphs via face-splitting. Published 15 February, 2020, Mathematics, Computer Science, - <https://arxiv.org/abs/2002.06285> ArXiv.
3. Слюсар В.И. Торцевые произведения матриц в радиолокационных приложениях// Изв-я высших учебн. Завед.. Радиоэлектроника.- 1998. - Том 41, № 3.- С. 71 - 75.
4. Слюсар В.И. Семейство торцевых произведений матриц и его свойства// Кибернетика и системный анализ. – 1999.- Том 35; № 3.- С. 379-384.- DOI: 10.1007/BF02733426

Анотація

Запропоновано удосконалений метод аналізу мультирангових мереж зв'язку на основі теорії графів, який відрізняється формуванням торцевих добутків матриць інцидентності.

Ключові слова: мультирангова мережа, торцевий добуток матриць, матриці інцидентності.

Abstract

The improved method for the analysis of multi-rank communication networks based on graph theory is proposed, which differs in the formation of face-splitting products of incidence matrices.

Keywords: multi-rank communication network, face-splitting products, incidence matrices.