

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Радіотехнічний факультет
Кафедра радіотехнічних систем

«На правах рукопису»
УДК _____

До захисту допущено:
В.о.завідувача кафедри
_____ Сергій ЖУК
«___» _____ 2022 р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-професійною програмою
«Радіотехнічні інформаційні технології»
зі спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка»
на тему: «Метод оцінки параметрів авторегресійного процесу по
наявній випадковій послідовності»

Виконав :
студент II курсу, групи РТ-01мн
Задорожний Гліб Сергійович
Керівник:
Ст.викладач, к.т.н.
Шпилька Олександр Олександрович

Рецензент:
Доцент, к.т.н.

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.
Студент _____

Київ – 2022 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Радіотехнічний факультет
Кафедра радіотехнічних систем

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)
Спеціальність – 172 Телекомунікації та радіотехніка
Освітньо-наукова програма – Радіотехнічні інформаційні технології

ЗАТВЕРДЖУЮ
В.о. завідувача кафедри
_____ Сергій ЖУК
«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Задорожному Глібу Сергійовичу

1. Тема дисертації: «Метод оцінки параметрів авторегресійного процесу по наявній випадковій послідовності»,
науковий керівник дисертації Шпилька Олександр Олександрович, к.т.н.,
Доцент., затверджені наказом по університету від «29» квітня 2022 р. №
НС/136/2022
2. Термін подання студентом дисертації 14 червня 2022 р.
3. Об'єкт дослідження випадковий процес побудований на базі авторегресійної моделі.
4. Предмет дослідження методи оцінювання параметрів авторегресійних моделей та методи статистичного аналізу
5. Перелік завдань, які потрібно розробити
 - Провести моделювання авторегресійного процесу
 - Провести статистичне моделювання метода Юла-Уокера
 - Провести статистичне моделювання метода Найменших Квадратів
 - Провести статистичне моделювання метода Максимальної Правдоподібності
 - Синтезувати метод на базі Фільтра Калмана

- Провести статистичне моделювання метода Фільтра Калмана

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу. Презентація результатів дослідження.

7. Орієнтовний перелік публікацій

8. Дата видачі завдання 10 січня 2022 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Провести моделювання авторегресійного процесу	20.02.2022	
2	Провести статистичне моделювання метода Юла-Уокера	12.03.2022	
3	Провести статистичне моделювання метода Найменших Квадратів	18.03.2022	
4	Провести статистичне моделювання метода Максимальної Правдоподібності	05.04.2022	
5	Синтезувати метод на базі Фільтра Калмана	10.05.2022	
6	Провести статистичне моделювання метода Фільтра Калмана	20.05.2022	

Студент

Гліб ЗАДОРЖНИЙ

Науковий керівник

Олександр ШПИЛЬКА

АНОТАЦІЯ

Обсяг роботи даної дисертації становить 79 сторінки, 27 ілюстрації, 19 таблиць та 33 джерела.

Темою магістерської дисертації є «Метод оцінки параметрів авторегресійного процесу по наявній випадковій послідовності».

Актуальність теми: нещодавні наукові дослідження показали актуальність апроксимації випадкового процесу авторегресійною послідовністю, знаючи коефіцієнти.

Мета дисертації: оцінка характеристик авторегресійних моделей на основі однієї послідовності випадкового процесу.

Об'єкт дослідження: випадковий процес побудований на базі авторегресійної моделі.

Предмет дослідження: методи оцінки коефіцієнтів авторегресійного процесу.

Методи дослідження: у даній роботі використано теоретичний аналіз, огляд статей та написання коду розробленого за допомогою програмного пакета MathWorks Matlab.

Практичне значення: полягає в тому, що синтезований метод можна використовувати в системах де немає великої обчислювальної потужності.

Ключові слова: авторегресійний процес, Фільтр Калмана.

АНОТАЦИЯ

Объем работы данной диссертации составляет 79 страниц, 27 иллюстрации, 19 таблиц и 33 источника.

Темой магистерской диссертации является «Метод оценки параметров авторегрессионного процесса по имеющейся случайной последовательности».

Актуальность темы: недавние научные исследования показали актуальность аппроксимации случайного процесса авторегрессионной последовательностью, зная коэффициенты.

Цель диссертации: оценка характеристик авторегрессионных моделей на основе одной последовательности случайного процесса.

Объект исследования: случайный процесс построен на основе авторегрессионной модели.

Предмет исследования: методы оценки параметров авторегрессионных моделей и методы статистического анализа.

Методы исследования: в данной работе использован теоретический анализ, обзор статей и написание кода разработанного с помощью программного пакета MathWorks Matlab.

Практическое значение: заключается в том, что синтезированный метод можно использовать в системах, где нет большой вычислительной мощности.

Ключевые слова: авторегрессионный процесс, Фильтр Калмана.

ANNOTATION

The volume of this dissertation is 79 pages, 27 illustrations, 19 tables and 33 sources.

The topic of the master's dissertation is "Method of estimating the parameters of the autoregressive process according to the available random sequence".

Relevance of the topic: recent scientific studies have shown the relevance of approximating a random process by autoregressive sequence, knowing the coefficients.

The purpose of the dissertation: estimation of characteristics of autoregressive models on the basis of one sequence of random process.

Object of research: the random process is based on the autoregressive model.

Subject of research: methods for estimating the parameters of autoregressive models and methods of statistical analysis.

Research methods: this paper uses theoretical analysis, review of articles and writing code developed using the software package MathWorks Matlab.

Practical significance: is that the synthesized method can be used in systems where there is no large computing power.

Keywords: autoregressive process, Kalman filter.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ	9
ВСТУП	10
РОЗДІЛ 1. СТАЦІОНАРНІ РЕГРЕСІЙНІ ПРОЦЕСИ	13
1.1 Процес ковзного середнього порядку q $MA(q)$	13
1.2 Процес авторегресії порядку p $AR(p)$	15
1.3 Змішаний процес авторегресії та ковзного середнього $ARMA(p,q)$	16
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ АВТОРЕГРЕСІЙНОГО ПРОЦЕСУ ПОРЯДКУ p $AR(p)$	20
2.1 Метод Юла-Уокера (YW, Yule-Walker).	20
2.2 Метод Найменших Квадратів (LS, Least-Squares).	22
2.3 Метод Максимальної Правдоподібності (ML, Maximum Likelihood).	23
2.4 Метод по фільтру Калмана (KF, Kalman Filter).	33
РОЗДІЛ 3. РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДІВ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ АВТОРЕГРЕСІЙНОГО ПРОЦЕСУ ПОРЯДКУ p $AR(p)$	39
3.1 Стаціонарна авторегресійна послідовність	39
3.2 Метод Юла-Уокера.	44
3.3 Метод Найменших Квадратів.	49
3.4 Метод Максимальної Правдоподібності.	54
3.5 Метод Фільтра Калмана.	60
3.6 Порівняння розглянутих методів між собою.	68
РОЗДІЛ 4. РОЗРОБКА СТАРТАП ПРОЕКТУ	71

4.1 Опис ідеї проекту	71
4.2 Технологічний аудит ідеї проекту	73
4.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту	74
ВИСНОВКИ	76
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	77

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

AR - autoregression

MA - moving-average

ARMA – autoregressive-moving average

LS – least-squares

KF – Kalman filter

YW – yule-walker

ML – maximum likelihood

МО – математичне очікування

СКВ – середньоквадратичне відхилення

ВСТУП

Важливою частиною радіотехніки є обробка даних. Обробка даних неможлива без обчислювальних потужностей. За останні десятиліття розвиток цифрової електроніки дав змогу моделювати складні математичні моделі, за допомогою яких можна оцінювати фізичні процеси. Розрізняють два види оцінки параметрів моделі.

Перший – це математичний розрахунок за один крок, за умови що модель має точний математичний опис. Але для складної моделі (n -вимірної функції) такий розрахунок потребує великої обчислювальної потужності, яку можуть видавати персональні комп'ютери або сервери. Перевагою таких обчислень є висока точність розрахунку.

Другий – це ітераційні методи розв'язання задачі, які можна застосовувати будь де, особливо вони гарно себе показують на пристроях із обмеженими обчислювальними можливостями. Наприклад, IoT пристроїв на мікроконтроллерах. Перевагою таких методів є невелика кількість операцій, що у свою чергу дає недолік – гіршу точність у порівнянні із першим видом оцінки параметрів моделі.

Гарним прикладом розглянутих видів є розв'язання задачі застосування адаптивного фільтра для оцінки параметрів невідомої системи. Можна застосувати фільтр Вінера, розв'язок якого є однією дією із N^3 -обчислень, а можна застосувати ітераційні методи як LMS чи RLS, які дають розв'язок за N -обчислень.

Дана робота присвячена порівнянню класичних математичних методів оцінки параметрів випадкових процесів, що описуються авторегресійною лінійною моделлю (часто називають авторегресійний процес) порядку p $AR(p)$ із

запропонованим застосуванням фільтра Калмана, який являє собою ітераційний метод оцінки параметрів, і є дуже гнучким у налаштуванні швидкодії під конкретну задачу.

Із математики відомі такі моделі як $AR(p)$, $MA(q)$, $ARMA(p,q)$.

$AR(p)$ – це авторегресійна (Autoregressive) модель порядку p , яка передбачає регресування змінної за її власними запізнюваними (тобто, минулими) значеннями.

$MA(p)$ – це модель ковзного середнього (Moving Average) порядку q , яка передбачає моделювання члену похибки як лінійної комбінації членів похибки, що стаються в поточний момент та в різні моменти часу в минулому.

$ARMA(p,q)$ – це модель авторегресії та ковзного середнього (Autoregressive–Moving-Average) порядку p та q відповідно, яка об'єднує властивості двох попередніх моделей.

Нещодавні наукові дослідження показали, що найбільш вживаним у радіотехніці є авторегресійний процес $AR(p)$. Ця модель найкраще підходить для опису таких процесів як, наприклад:

- апроксимація матриці передачі у каналі зв'язку MIMO [7]
- використання у якості фільтру в програмному забезпеченні CST, що використовується для зменшення розрахунків коливальних контурів [33]
- прибирання радіочастотної інтерференції у каналі зв'язку за допомогою авторегресійної інтерполяції [9]
- авторегресійна спектральна оцінка для ослаблення ультразвуку в характеристиці тканин [11]

- апроксимація радіочастотного каналу зв'язку за допомогою авторегресії [8]

Тому основною **метою** магістерської дисертації є оцінка характеристик авторегресійних моделей на основі однієї послідовності випадкового процесу.

Для вирішення поставленої мети необхідно виконати наступні **завдання**:

1. Розглянути відомі методи оцінки параметрів авторегресійних моделей.
2. Провести дослідження точнісних характеристик відомих методів та оцінку їх обчислювальної складності.
3. Розробити метод оцінки параметрів авторегресійної моделі на базі фільтру Калмана.
4. Порівняти точнісні характеристики розробленого методу за допомогою статистичного моделювання та оцінити його обчислювальну складність.

Об'єктом дослідження являється випадковий процес побудований на базі авторегресійної моделі.

Предметом дослідження являються методи оцінювання параметрів авторегресійних моделей та методи статистичного аналізу.

РОЗДІЛ 1. СТАЦІОНАРНІ РЕГРЕСІЙНІ ПРОЦЕСИ

1.1 Процес ковзного середнього порядку q МА(q).

Матеріали для даного розділу взяті із літератури [2].

Процес ковзного середнього (Moving Average Process) записується у вигляді (1.1, 1.2)

$$y_t = u_t - \alpha_1 u_{t-1} - \alpha_2 u_{t-2} - \dots - \alpha_q u_{t-q} \quad (1.1)$$

$$y_t = u_t - \sum_{k=1}^q \alpha_k u_{t-k} \quad (1.2)$$

u_t - це АДБГШ (адитивний білий гаусівський шум) із нульовим математичним очікуванням і дисперсією σ_u^2 , $N(0, \sigma_u^2)$.

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ - скінченна кількість коефіцієнтів МА(q).

Використовуючи оператор зсуву у часі (backshift operator) $B^k u_t = u_{t-k}$, де k – це номер залежності у часі, процес МА(q) можна записати у еквівалентній формі (1.3), або більш скорочено у формі (1.4)

$$y_t = (1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_q B^q) u_t \quad (1.3)$$

$$y_t = \alpha(B) u_t \quad (1.4)$$

Отже, процес рухомого середнього можна отримати із лінійного фільтру із перехідною характеристикою $\alpha(B)$, коли на його вході маємо АДБГШ u_t .

Автоковаріаційна функція процесу МА(q) записується у вигляді (1.5)

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E\left[\left(u_t - \alpha_1 u_{t-1} - \dots - \alpha_q u_{t-q}\right)\left(u_{t-k} - \alpha_1 u_{t-k-1} - \dots - \alpha_q u_{t-k-q}\right)\right] \\ &= -\alpha_k E\left[\alpha_{t-k}^2\right] + \alpha_1 \alpha_{k+1} E\left[\alpha_{t-k-1}^2\right] + \dots + \alpha_{q-k} \alpha_q E\left[\alpha_{t-q}^2\right]\end{aligned}\quad (1.5)$$

Оскільки шум неколерльований тоді варіацію процесу можна записати (1.6)

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \left(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_q^2\right) \sigma_u^2 \\ \gamma_k &= \begin{cases} \left(-\alpha_k + \alpha_1 \alpha_{k+1} + \alpha_2 \alpha_{k+2} + \dots + \alpha_{q-k} \alpha_q\right) \sigma_u^2 & \text{для } k=1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{для } k > q \end{cases}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Тоді автокореляційна функція має вигляд ()

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\alpha_k + \alpha_1 \alpha_{k+1} + \alpha_2 \alpha_{k+2} + \dots + \alpha_{q-k} \alpha_q}{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_q^2} & \text{для } k=1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{для } k > q \end{cases}\quad (1.7)$$

Видно, що автокореляційна функція МА(q) має зріз на лагу q. Якщо $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q)$ відомі, то рівняння (1.7) можна розв'язати для параметрів $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$. Однак, на відміну від рівняння Юла-Уокера для авторегресивного процесу (1.16), рівняння (1.7) є нелінійними. Отже, за винятком простого випадку, коли $q = 1$, ці рівняння потрібно розв'язувати ітераційно. Отримані оцінки ковзного середнього можуть не мати високої статистичної ефективності.

Спектр має вигляд (1.8)

$$p(f) = 2\sigma_u^2 \left| 1 - \alpha_1 e^{-j2\pi f} - \alpha_2 e^{-j4\pi f} - \dots - \alpha_q e^{-j2q\pi f} \right|^2 \quad \text{для } 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \quad (1.8)$$

1.2 Процес авторегресії порядку р AR(p).

Такий процес записується у вигляді (1.9, 1.10)

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + u_t \quad (1.9)$$

$$y_t = \sum_{k=1}^p \varphi_k y_{t-k} + u_t \quad (1.10)$$

u_t - це АДБГШ (адитивний білий гаусівський шум) із нульовим математичним очікуванням і дисперсією σ_u^2 , $N(0, \sigma_u^2)$.

$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ - скінченна кількість коефіцієнтів AR(p).

Використовуючи оператор зсуву у часі (backshift operator) $B^k y_t = y_{t-k}$, де k – це номер залежності у часі, процес AR(p) можна записати у еквівалентній формі (1.11), або більш скорочено у формі (1.12)

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p) y_t = u_t \quad (1.11)$$

$$\varphi(B) y_t = u_t \quad (1.12)$$

Скорочений запис можна перезаписати у формі (1.13)

$$y_t = \frac{1}{\varphi(B)} u_t = \varphi^{-1}(B) u_t \equiv \psi(B) u_t \quad (1.13)$$

Отже, авторегресійний процес можна отримати із лінійного фільтру із перехідною характеристикою $\varphi^{-1}(B) = \psi(B)$, коли на його вході маємо АДБГШ u_t .

Щоб отримати автокореляційну функцію домножимо обидві частини рівняння (1.9) на y_{t-k} для $k \geq 0$, тоді отримаємо (1.14)

$$y_{t-k}y_t = \varphi_1 y_{t-k}y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-k}y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-k}y_{t-p} + u_t \quad (1.14)$$

Тоді, взявши математичне очікування двох частин рівняння (1.14), отримуємо автоковаріаційна функцію процесу AR(p) (1.15)

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \varphi_p \gamma_{k-p} \quad \text{для } k > 0 \quad (1.15)$$

Математичне очікування $E[y_{t-k} \cdot u_t] = 0$ для $k > 0$, отже y_{t-k} може впливати тільки на шум u_j до часу $t - k$, і цей шум некорельований з u_t .

Поділивши (1.15) на γ_0 , автокореляційна функція має вигляд (1.16)

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \quad \text{для } k > 0 \quad (1.16)$$

Якщо $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q)$ відомі, то з рівняння (1.16) можна скласти лінійну систему рівнянь Юла-Уокера, з якої і будуть знайдені коефіцієнти $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

Спектр має вигляд (1.17)

$$p(f) = \frac{2\sigma_u^2}{\left| 1 - \varphi_1 e^{-j2\pi f} - \varphi_2 e^{-j4\pi f} - \dots - \varphi_p e^{-j2p\pi f} \right|^2} \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \quad (1.17)$$

1.3 Змішаний процес авторегресії та ковзного середнього ARMA(p,q).

Такий процес записується у вигляді (1.18, 1.19)

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + u_t - \alpha_1 u_{t-1} - \alpha_2 u_{t-2} - \dots - \alpha_q u_{t-q} \quad (1.18)$$

$$y_t = \sum_{k=1}^p \varphi_k y_{t-k} + u_t - \sum_{k=1}^q \alpha_k u_{t-k} \quad (1.19)$$

u_t - це АДБГШ (адитивний білий гаусівський шум) із нульовим математичним очікуванням і дисперсією σ_u^2 , $N(0, \sigma_u^2)$.

$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ - скінченна кількість коефіцієнтів AR(p).

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ - скінченна кількість коефіцієнтів MA(q).

Такий процес об'єднує у собі особливості AR(p) та MA(q).

Використовуючи оператор зсуву у часі (backshift operator) $B^k y_t = y_{t-k}$, де k – це номер залежності у часі, процес ARMA(p,q) можна записати у еквівалентній скороченій формі (1.20)

$$\varphi(B)y_t = \alpha(B)u_t \quad (1.20)$$

Рівняння (1.20) можна перезаписати у вигляді (1.21)

$$y_t = \varphi^{-1}(B)\alpha(B)u_t = \frac{\alpha(B)}{\varphi(B)}u_t = \frac{1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_q B}{1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B} \quad (1.21)$$

Отже, процес ARMA(p,q) можна отримати із лінійного фільтру, перехідна характеристика якого має вигляд (1.21), коли на його вході маємо АДБГШ u_t .

Функція автоковаріації шукається за таким алгоритмом, як і у авторигресії AR(p). Тобто, рівняння (1.18) помножуємо на y_{t-k} , а потім беремо математичне очікування обох частин рівняння, отримуємо рівняння (1.22)

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \varphi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{yu}(k) - \alpha_1 \gamma_{yu}(k-1) - \dots - \alpha_q \gamma_{yu}(k-q) \quad (1.22)$$

Де $\gamma_{yu}(k)$ - це крос-коваріаційна функція між сигналом та шумом. Якщо y_{t-k} залежить тільки від відліків, які уже виникли до часу $t-k$ нескінченного процесу ковзного середнього, яке має вигляд (1.23), тоді $\gamma_{yu}(k)$ буде мати вигляд (1.24)

$$y_{t-k} = \psi(B)u_{t-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-k-j} \quad (1.23)$$

$$\gamma_{yu}(k) = \begin{cases} 0 & \text{для } k > 0 \\ \psi_{-k} \sigma_u^2 & \text{для } k \leq 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Тоді рівняння (1.22) приймає вигляд (1.25)

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \varphi_p \gamma_{k-p} - \sigma_u^2 \left(\alpha_k \psi_0 + \alpha_{k-1} \psi_1 + \dots + \alpha_q \psi_{q-k} \right) \quad (1.25)$$

Враховуючи, що $\alpha_0 = -1$ рівняння (1.25) можна переписати у вигляді (1.26) для $k \geq q+1$, відповідно автокореляційна функція має вигляд (1.27), або скорочений вигляд (1.28)

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \varphi_p \gamma_{k-p} \quad (1.26)$$

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \quad (1.27)$$

$$\varphi(B)\rho_k = 0 \quad (1.28)$$

Таким чином, для процесу ARMA(p,q) будуть перші q автокореляцій $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q)$ чийі значення залежать напряму від порядку MA(q) та його параметрів $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$, та AR(p) та його параметрів $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$. У той же час, p-кількість значень $(\rho_{q-p+1}, \rho_{q-p+2}, \dots, \rho_q)$ є необхідними значеннями для рішення рівняння (1.28).

Спектр має вигляд (1.29)

$$p(f) = 2\sigma_u^2 \frac{\left| \alpha(e^{-j2\pi f}) \right|^2}{\left| \varphi(e^{-j2\pi f}) \right|^2} \quad (1.29)$$

$$\frac{\left| 1 - \alpha_1 e^{-j2\pi f} - \alpha_2 e^{-j4\pi f} - \dots - \alpha_q e^{-j2q\pi f} \right|^2}{\left| 1 - \varphi_1 e^{-j2\pi f} - \varphi_2 e^{-j4\pi f} - \dots - \varphi_p e^{-j2p\pi f} \right|^2} \quad \text{для} \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2}$$

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ АВТОРЕГРЕСІЙНОГО ПРОЦЕСУ ПОРЯДКУ p AR(p)

2.1 Метод Юла-Уокера (YW, Yule-Walker).

Даний метод добре описаний у літературі [2].

Запишемо рівняння авторегресії у вигляді (2.1)

$$y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \varphi_2 y_{t-2} - \dots - \varphi_p y_{t-p} = u_t \quad (2.1)$$

Перепозначимо коефіцієнти, та запишемо рівняння (2.1) наступним чином (2.2, 2.3)

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -\varphi_1 \\ &\vdots \\ a_p &= -\varphi_p \end{aligned}$$
$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} = u_t \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=0}^p a_k y_{t-k} = u_t \quad (2.3)$$

Домножимо обидві частини рівняння (2.3) на y_{t-l} та візьмемо математичне очікування.

$$\left(\sum_{k=0}^p a_k y_{t-k} \right) y_{t-l} = u_t y_{t-l} \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=0}^p a_k \underbrace{E[y_{t-k}y_{t-l}]}_{r_{yy}[l-k]} = \underbrace{E[u_t y_{t-l}]}_{\substack{0 \quad l > 0 \\ \sigma_u^2 \quad l = 0}} \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=0}^p a_k r_{yy}[l-k] = \begin{cases} 0 & l > 0 \\ \sigma_u^2 & l = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Тобто, у лівій частині рівняння (2.6) ми отримуємо сумму коефіцієнтів автокореляційної функції.

Запишемо два відповідні рівняння, для двох випадків (2.7, 2.8)

$$\sum_{k=1}^p a_k r_{yy}[l-k] = -a_0 r_{yy}[l] \quad l > 0 \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=0}^p a_k r_{yy}[-k] = \sigma_u^2 \quad l = 0 \quad (2.8)$$

Рівняння (2.7) дає можливість обчислити коефіцієнти авторегресії. Запишемо його у більш детальному матричному вигляді (рівняння Юла-Уокера):

$$\begin{matrix} l=1 \\ l=2 \\ \vdots \\ l=p \end{matrix} \gg \begin{bmatrix} r_{yy}[0] & r_{yy}[-1] & \cdots & r_{yy}[1-p] \\ r_{yy}[-1] & r_{yy}[0] & \cdots & r_{yy}[2-p] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{yy}[p-1] & r_{yy}[p-2] & \cdots & r_{yy}[0] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{yy}[1] \\ r_{yy}[2] \\ \vdots \\ r_{yy}[p] \end{bmatrix}$$

Запишемо відповідні матриці:

$$R = \begin{bmatrix} r_{yy}[0] & r_{yy}[-1] & \cdots & r_{yy}[1-p] \\ r_{yy}[-1] & r_{yy}[0] & \cdots & r_{yy}[2-p] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{yy}[p-1] & r_{yy}[p-2] & \cdots & r_{yy}[0] \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} r_{yy}[1] \\ r_{yy}[2] \\ \vdots \\ r_{yy}[p] \end{bmatrix}$$

Таким чином, рівняння зводяться до вигляду (2.9), та рішення системи рівнянь записано у рівнянні (2.10)

$$R \cdot a = -r \quad (2.9)$$

$$a = -R^{-1}r \quad (2.10)$$

Дисперсію шуму можна отримати з рівняння (2.8), після того, як була визначена матриця коефіцієнтів a (2.10)

$$\sigma_u^2 = \sum_{k=0}^p a_k r_{yy}[-k] \quad (2.11)$$

2.2 Метод Найменших Квадратів (LS, Least-Squares).

Даний метод добре описаний у літературі [4].

Перезапишемо рівняння (1.10) у формі (2.12)

$$u_t = y_t - \sum_{k=1}^p \phi_k y_{t-k} \quad (2.12)$$

Необхідно знайти мінімум квадрату шуму по усім k -тим спосереженням (2.13)

$$\sum_{k=p+1}^N u_t^2 = \sum_{k=p+1}^N \left(y_t - \sum_{k=1}^p \phi_k y_{t-k} \right)^2 \quad (2.13)$$

Запишемо рівняння (1.2) у матричній формі для N-спостережень авторегресії, для простоти розглянемо AR(p=3)

$$\begin{matrix} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4 \\ \vdots \\ n=N \end{matrix} \gg \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} NaN & NaN & NaN \\ y_1 & NaN & NaN \\ y_2 & y_1 & NaN \\ y_3 & y_2 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & y_{N-3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

Виділимо матриці:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} NaN & NaN & NaN \\ y_1 & NaN & NaN \\ y_2 & y_1 & NaN \\ y_3 & y_2 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_N & y_{N-1} & y_{N-2} \end{bmatrix} \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

Для N-спосетержень можна записати рівняння (1.10) у матричній формі рівняння (2.14)

$$y = Y\varphi + u \quad (2.14)$$

Приводячи рівняння (2.14) до вигляду рівняння (2.13) можна розв'язати квадратне рівняння, мінімум якого записується рівнянням (2.15)

$$\hat{\varphi} = (Y \cdot Y^T)^{-1} Y^T y \quad (2.15)$$

2.3 Метод Максимальної Правдоподібності (ML, Maximum Likelihood).

Даний метод добре описаний у літературі [3,4].

Базовий принцип на якому будується розрахунок – максимальна правдоподібність. З рівняння (1.9) маємо вектор параметрів авторегресії $\theta = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \sigma_u^2]'$, а також вектор N-спостережень $[y_1, y_2, \dots, y_N]'$.

Завданням є розрахунок густини ймовірності (2.16)

$$f_{y_N, y_{N-1}, \dots, y_1}(y_N, y_{N-1}, \dots, y_1; \theta) \quad (2.16)$$

Значення θ має бути таким, за якого функція (2.16) приймає своє максимальне значення.

Розв'язок даної задачі зводиться до двох кроків: перший – знаходження функції правдоподібності, другий – знаходження значення аргументу за якого функція приймає своє максимальне значення.

Крок перший.

Перші р-спостережень $[y_1, y_2, \dots, y_p]'$ можна записати у вектор розмірністю $(p \times 1)$, який можна розглядати як реалізацію Гаусівського р-мірного процесу. Математичне очікування такого процесу теж є вектором розмірності $(p \times 1)$, кожен елемент якого нуль.

Запишемо коваріаційну матрицю р-спостережень (2.17)

$$\sigma_u^2 V_p = \begin{bmatrix} E[(y_1 - \mu)^2] & E[(y_1 - \mu)(y_2 - \mu)] & \cdots & E[(y_1 - \mu)(y_p - \mu)] \\ E[(y_2 - \mu)(y_1 - \mu)] & E[(y_2 - \mu)^2] & \cdots & E[(y_2 - \mu)(y_p - \mu)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E[(y_p - \mu)(y_2 - \mu)] & E[(y_p - \mu)(y_2 - \mu)] & \cdots & E[(y_p - \mu)^2] \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Для прикладу, для авторегресії першого порядку V_p це просто скаляр $\frac{1}{1-\phi_1^2}$,

а для авторегресії порядку p записується (2.18)

$$\sigma_u^2 V_p = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2} & \gamma_{p-3} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Тоді, густина ймовірності перших p -спостережень гайсівського процесу $N(\mu_p, \sigma_u^2 V_p)$ записується (2.19)

$$\begin{aligned} f_{y_p|y_{p-1}, \dots, y_1}(y_p | y_{p-1}, \dots, y_1; \theta) & \quad (2.19) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} |\sigma_u^{-2} V_p^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_u^2} (y_p - \mu_p)' V_p^{-1} (y_p - \mu_p) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \left(\sigma_u^{-2} \right)^{\frac{p}{2}} |V_p^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_u^2} (y_p - \mu_p)' V_p^{-1} (y_p - \mu_p) \right] \end{aligned}$$

Для останніх $(N-p)$ -спостережень $[y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_N]'$ можна використати декомпозицію передбачення похибки. Залежно від першого $t-1$ спостереження, наступне спостереження t є гаусівським із математичним очікуванням $\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p}$ та дисперсією σ_u^2 . На цю густину ймовірності впливають тільки перші p -спостереження, тоді для $t > p$ (2.20)

$$\begin{aligned}
& f_{y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1}(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1; \theta) \\
&= f_{y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}}(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}; \theta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp \left[-\frac{(y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots - \phi_p y_{t-p})^2}{2\sigma_u^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Тоді функція правдоподібності для повного набору N-спостережень має вигляд (2.21)

$$\begin{aligned}
& f_{y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1}(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1; \theta) \\
& \quad - \frac{p}{2} \log_e [2\pi] - \frac{p}{2} \log_e [\sigma_u^2] + \frac{1}{2} \log_e [V_p^{-1}] \\
& \quad - \frac{1}{2\sigma_u^2} (y_p - \mu_p)' V_p^{-1} (y_p - \mu_p) \\
&= -\frac{T-p}{2} \log_e [2\pi] - \frac{T-p}{2} \log_e [\sigma_u^2] \\
& \quad - \sum_{t=p+1}^N \frac{(y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots - \phi_p y_{t-p})^2}{2\sigma_u^2} \\
& f_{y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1}(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1; \theta) \\
& \quad - \frac{T}{2} \log_e [2\pi] - \frac{T}{2} \log_e [\sigma_u^2] + \frac{1}{2} \log_e [V_p^{-1}] \\
&= -\frac{1}{2\sigma_u^2} (y_p - \mu_p)' V_p^{-1} (y_p - \mu_p) \\
& \quad - \sum_{t=p+1}^N \frac{(y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots - \phi_p y_{t-p})^2}{2\sigma_u^2}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Очислення рівняння (2.21) потребує інвертування матриці $(p \times p)$ V_p .

Запишемо елемент інвертованої матриці і-того дряка j-тої колонки як $v^{ij}(p)$

Галбрайт та Галбрайт (1974, рівняння 16 на 70 сторінці) показав, що (2.22)

$$v^{ij}(p) = \left[\sum_{k=0}^{i-1} \varphi_k \varphi_{k-1} - \sum_{k=p+1-j}^{p+i-1} \varphi_k \varphi_{k+j-i} \right] \quad (2.22)$$

для $1 \leq i \leq j \leq p$

Де $\varphi_0 = -1$. Значення $v^{ij}(p)$ коли $i > j$ можна визначити з факту, що матриця V_p^{-1} симетрична $v^{ij}(p) = v^{ji}(p)$. Наприклад, для AR(1) матриця V_p^{-1} це просто скаляр, значення якого може бути знайдене (2.23) $i=j=p=1$

$$V_1^{-1} = \left[\sum_{k=0}^0 \varphi_k \varphi_k - \sum_{k=1}^1 \varphi_k \varphi_k \right] = \varphi_0^2 - \varphi_1^2 = 1 - \varphi_1^2 \quad (2.23)$$

Тоді $\sigma_u^2 V_1 = \frac{\sigma_u^2}{1 - \varphi_1^2}$, що насправді є наслідком з формули варіації AR(1). Для

авторегресії другого порядку AR(2) матриця V_p^{-1} приймає вигляд (2.24), модуль якої записується (2.25)

$$V_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \varphi_2^2 & -(\varphi_1 + \varphi_1 \varphi_2) \\ -(\varphi_1 + \varphi_1 \varphi_2) & 1 - \varphi_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$|V_2^{-1}| = \left| (1 + \varphi_2) \begin{bmatrix} 1 - \varphi_2 & -\varphi_1 \\ -\varphi_1 & 1 - \varphi_2 \end{bmatrix} \right| = (1 + \varphi_2)^2 \left[(1 - \varphi_2)^2 - \varphi_1^2 \right] \quad (2.25)$$

Тоді для авторегресії другого порядку можна записати другий доданок другого запису рівняння (2.21) у вигляді (2.26)

$$\begin{aligned}
& (y_2 - \mu_2)' V_2^{-1} (y_2 - \mu_2) \\
&= \left[(y_1 - \mu)(y_2 - \mu) \right] (1 + \varphi_2) \begin{bmatrix} (1 - \varphi_2) & -\varphi_1 \\ -\varphi_1 & (1 - \varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_1 - \mu) \\ (y_2 - \mu) \end{bmatrix} \\
&= (1 + \varphi_2) \left\{ (1 - \varphi_2)(y_1 - \mu)^2 \right. \\
&\quad \left. - 2\varphi_1(y_1 - \mu)(y_2 - \mu) + (1 - \varphi_2)(y_2 - \mu)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Тоді прямий розрахунок логарифмічної функції правдоподібності авторегресійного процесу другого порядку AR(2) має вигляд (2.27)

$$\begin{aligned}
L(\theta) = & -\frac{N}{2} \log_e [2\pi] - \frac{N}{2} \log_e [\sigma_u^2] + \frac{1}{2} \log_e \left[(1 + \varphi_2)^2 \left[(1 - \varphi_2)^2 - \varphi_1^2 \right] \right] \\
& - \left\{ \frac{1 + \varphi_2}{2\sigma_u^2} \right\} \times \left\{ (1 - \varphi_2)(y_1 - \mu)^2 \right. \\
& \quad \left. - 2\varphi_1(y_1 - \mu)(y_2 - \mu) + (1 - \varphi_2)(y_2 - \mu)^2 \right\} \\
& - \sum_{t=3}^N \frac{(y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \varphi_2 y_{t-2})^2}{2\sigma_u^2}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Умовна логарифмічна функція максимальної правдоподібності для авторегресійного процесу порядку p AR(p)

Максимізація прямого розрахунку логарифмічної функції правдоподібності авторегресійного процесу порядку p AR(p) рівняння (2.21) має бути вирішена чисельно. Для контрасту, умовна функція вірогідності приймає простішу форму (2.28)

$$\begin{aligned} \log_e \left[f_{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{p+1} | y_p, \dots, y_1} (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{p+1} | y_p, \dots, y_1; \theta) \right] \\ = -\frac{T-p}{2} \log_e [2\pi] - \frac{T-p}{2} \log_e [\sigma_u^2] + \\ - \sum_{t=p+1}^N \frac{(y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \varphi_2 y_{t-2} - \dots - \varphi_p y_{t-p})^2}{2\sigma_u^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Значення $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, які максимізують (2.28) у той же час мінімізують вираз (2.29)

$$\sum_{t=p+1}^N (y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \varphi_2 y_{t-2} - \dots - \varphi_p y_{t-p})^2 \quad (2.29)$$

Тому задача знаходження розв'язку зводиться до мінімізації простого виразу (2.29).

Значення θ - це такий вектор, за якого ми отримуємо максимальне значення функції (2.28). У строгому математичному розв'язку це потребує диференціювання, та прирівняння результату до нуля. На практиці, потрібно намагатися обходити це, бо в результаті доводиться знаходити рішення нелінійної системи рівняння, для якої немає простого рішення. Максимізація (2.28) потребує ітераційної числової процедури, яку вирішують математичні методи оптимізації.

Крок другий.

Оскільки, у даній роботі розглядаються стаціонарний авторегресійний процес, то функцію (2.29) можна вважати унімодальною, з одним мінімумом. Наприклад, можна використати метод Нелдера-Міда (Nelder-Mead Method).

Цей метод є удосконаленим симплексним методом, який не використовує градієнт функції, тобто є методом нульового порядку.

Симплекс (рис. 2.1) - геометрична фігура, що є багатовимірним узагальненням трикутника і тетраедра. Визначається як опукла оболонка $n+1$ точок, що не лежать в одній $n-1$ -вимірній гіперплощині. Ці точки називаються вершинами симплексу.

Метод у n -вимірах зберігає набір $n+1$ тестових точок, розташованих як симплекс. Потім він екстраполює поведінку цільової функції, виміряної в кожній тестовій точці, щоб знайти нову тестову точку і замінити одну зі старих тестових точок на нову, це складає основний цикл методу.

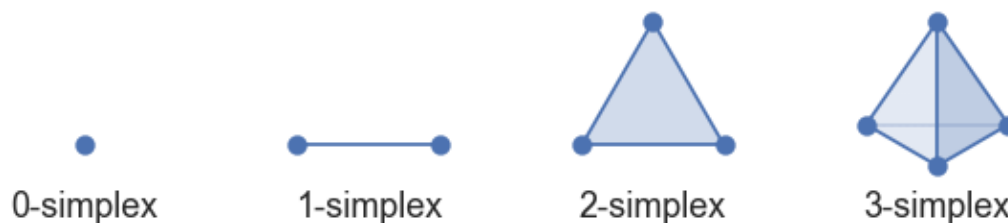


Рис. 2.1 Приклади симплексу

Найпростіший підхід полягає в тому, щоб замінити найгіршу точку точкою, відбитою через центроїд решти n точок. Якщо ця точка краща, ніж краща поточна точка, то ми можемо спробувати розтягнути експоненціально по цій лінії. З іншого боку, якщо ця нова точка не є набагато кращою, ніж попередня величина, то ми переходимо до наступного значення, тому ми стягуємо симплекс у кращу точку.

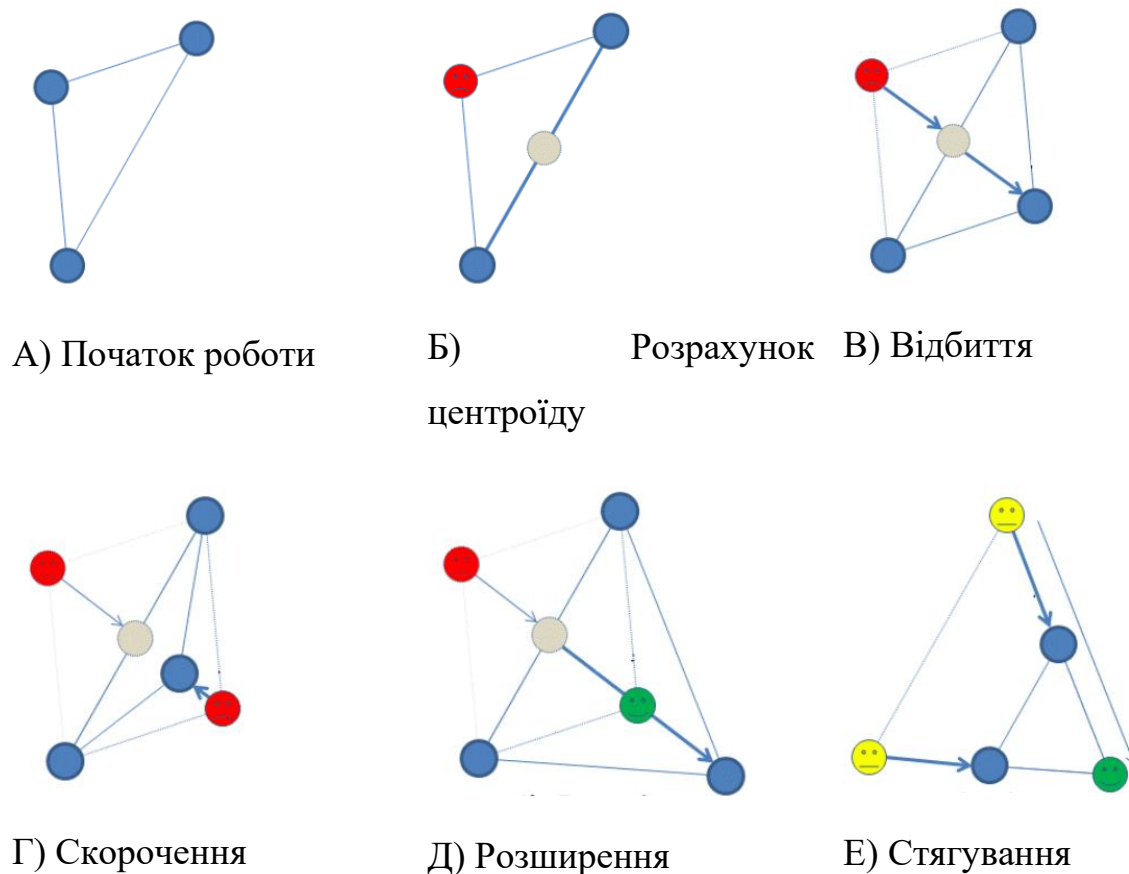


Рис. 2.2 Кроки роботи

Кроки роботи методу Нелдера-Міда (Рис. 2.2):

1) Початок роботи (Initial Simplex).

Порядок точок по зростанню значення цільової функції $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1})$ Перевірте, чи слід зупинити метод.

2) Розрахунок центроїду (Center of gravity) $x_0, f(x_0)$

3) Відбиття (Reflection).

Обчислити симетрично віддзеркалену або, як будемо казати далі, відбиту точку. Якщо відбита краща, ніж друга найгірша, але не краща, ніж краща,

тобто $x_r = x_0 + \alpha(x_0 - x_{n+1})$ $\alpha > 0$, тоді отримуємо новий симплекс, замінивши найгіршу точку x_{n+1} симетрично віддзеркаленою точкою x_r .

3.1) Розширення (Expansion).

Якщо відбита точка є найкращою точкою досі, $f(x_r) < f(x_1)$, то потім обчислюється розширена точка $x_e = x_0 + \gamma(x_r - x_0)$ $\gamma > 0$. Якщо розширена точка краще відбитої точки, $f(x_e) < f(x_r)$, отримуємо новий симплекс, замінюючи найгіршу точку x_{n+1} розширеною точкою x_e . Перехід до кроку 4. Інакше, перехід до пункту 3.2.

3.2) Скорочення (Contraction)

Якщо значення функції у розширеній точці стало більше ніж було у відбитій, $f(x_e) \geq f(x_r)$, то це означає, що пошук у даному напрямку не буде успішним. Тоді розраховується скорочена точка $x_c = x_0 + \rho(x_{n+1} - x_0)$ $0 < \rho \leq 0.5$. Таким чином, отримуємо новий симплекс. Перехід до кроку 4.

4. Стягування (Shrinkage)

Замініть всі точки, крім кращих x_1 з $x_i = x_1 + \delta(x_i - x_1)$ $\delta = 0.5$

Відбувається стягування усіх точок у напрямку найкращої.

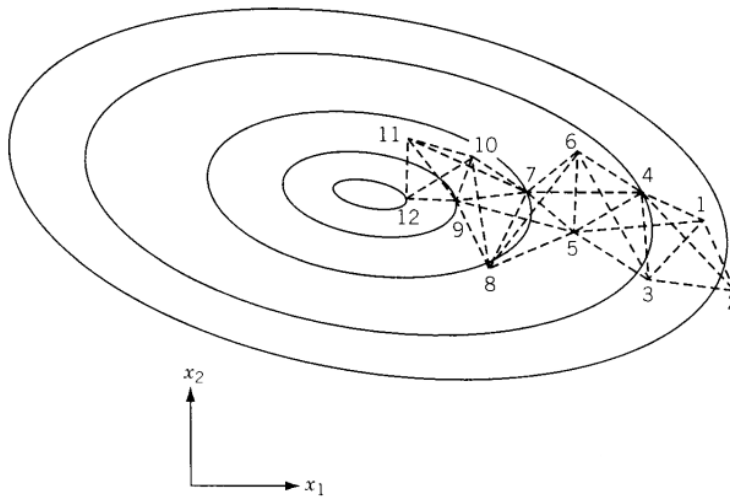


Рис. 2.1 Приклад роботи метода Нелдера-Міда.

2.4 Метод по фільтру Калмана (KF, Kalman Filter)

Даний метод добре описаний у літературі [6].

Фільтр Калмана дає змогу оцінити значення коефіцієнтів ітераційно. У попередніх методах можна виділити наступні недоліки:

- метод найменших квадратів потребує обрахунку зворотної матриці розміром $[N \times N]$, що означає N^3 ітерацій тільки на цьому етапі. При великій кількості спостережень необхідна велика обчислювальна здатність.
- метод моментів, рішення рівнянь Юла-Уокера, потребує розрахунку коваріаційної матриці. Усі разом розрахунки потребують N^2 обчислень.
- метод максимальної правдоподібності потребує наявності математичного запису функції правдоподібності на першому етапі (вона не завжди відома), а на другому етапі необхідно використати метод оптимізації функції який не завжди знаходить оптимум функції.

Для цього методу актуальне число викликів функції під час оптимізації, яке залежить від вибраного методу.

Загальна інформація про фільтр Калмана:

Розглянемо стохастичну лінійну динамічну систему у дискретному час, яка представлена моделлю простору станів (2.30, 2.31)

$$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1} \quad (2.30)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (2.31)$$

Рівняння (2.30), яке називають рівнянням стану, описує динаміку системи, вектор x_k (невідомий) - це вектор значення системи у момент часу t_k , матриця Φ_{k-1} описує взаємозв'язок між станами системи у момент часу t_{k-1} та t_k .

Рівняння (2.31), яке називають рівнянням вимірювання, вектор z_k - це вектор вихідного значення системи, вектор вимірювань або вектор спостережень, матриця H_k описує взаємозв'язок між станами системи та вимірювань. Оскільки йдеться про стохастичну систему, то вектори x_k та z_k це випадкові величини, тоді набори цих векторів – це випадкові процеси.

w_k та v_k - це адитивні білі гаусівські шуми із нульовими математичними очікуваннями та відповідними дисперсіями.

Матриця G_k описує внутрішній шум системи при обчисленнях.

Зазначемо, що x_0 - це випадкова величина із гаусівським (нормальним) розподілом із відомим математичним очікуванням x_0 та матрицею коваріації P_0 . Тоді для кожного моменту часу t_k виконується наступне:

$$E[w_k] = 0$$

$$E[v_k] = 0$$

$$E[w_{k1}w_{k2}^T] = Q_{k1}\Delta(k2 - k1)$$

$$E[v_{k1}v_{k2}^T] = R_{k1}\Delta(k2 - k1)$$

$$E[w_{k1}v_{k2}^T] = 0$$

$$E[x_0w_k^T] = 0$$

$$E[x_0v_k^T] = 0$$

Де символ Δ - це оператор Кронекера

$$\Delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Цілью фільтра Калмана є обрахунок вектора x_k у момент часу t_k , який позначається $\hat{x}_k$ який є оптимальним значенням.

Алгоритм фільтра Калмана є рекурсивним, момент часу t_k складається із двох етапів. Перший етап – обрахунок апіорного значення $\hat{x}_{k(-)}$ у момент часу t_k виконується через відоме апостеріорне значення попереднього часу t_{k-1} у рівнянні стану моделі; цей етап називається передбаченням. Потім ця оцінка покращується за допомогою вимірювання, проведеного в момент t_k , що призводить до отримання апостеріорної оцінки $\hat{x}_{k(+)}$ у момент t_k ; це крок корекції.

$$\hat{x}_{k(-)} = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1(+)}$$

$$P_{k(-)} = \Phi_{k-1}P_{k-1(+)}\Phi_{k-1}^T + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^T$$

Потім, після отримання вимірювання z_k , поєднання апіорної оцінки та різниці між фактичним значенням і прогнозованим значенням вимірювання, зваженим матрицею K_k , ми приходимо до апостеріорної оцінки вектора стану $\hat{x}_{k(+)}$; його невизначеність виражається апостеріорною коваріаційною матрицею помилок $P_{k(+)}$.

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k(+)} &= \hat{x}_{k(-)} + K_k \left[z_k - H_k \hat{x}_{k(-)} \right] \\ P_{k(+)} &= P_{k(-)} - K_k H_k P_{k(-)} \\ K_k &= P_{k(-)} H_k^T \left[H_k P_{k(-)} H_k^T + R_k \right]^{-1}\end{aligned}$$

Пристосування фільтра Калмана для розрахунку коефіцієнтів AR(p)

Запишемо вектор значень та вектор коефіцієнтів AR(p).

$$\begin{aligned}\Phi_t &= [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_p]_t^T \\ Y_t &= [y_{t-1} \quad y_{t-2} \quad \cdots \quad y_{t-p}]_t^T\end{aligned}$$

Рівняння стану AR(p) записується (2.32, 2.33), описує отримане значення цього процесу при коефіцієнтах у поточний момент часу.

$$y_t = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_p]_t \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} + u_t \quad (2.32)$$

$$y_t = \Phi_t^T Y_t + u_t \quad (2.33)$$

Шум стану значення є АДБГШ $N(0, \sigma_u^2)$, як було зазначено у розділі 1.1

Рівняння вимірювання коефіцієнтів записується у вигляді (2.34, 2.35)

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_p \end{bmatrix}_t \quad (2.34)$$

$$\varphi_{t+1} = \varphi_t + \eta_t \quad (2.35)$$

Тобто, маємо ітераційну зміну коефіцієнтів із вектором шуму оцінки $\eta_t = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p]^T$, який є АДБГШ $N(0, Q)$ із нульовим математичним оцінюванням і дисперсією (2.36), де Q – це квадратна матриця автоковаріації шуму розміром p .

$$E[\eta_{t_1} \eta_{t_2}] = \begin{cases} Q & t_1 = t_2 \\ 0 & t_1 \neq t_2 \end{cases} \quad (2.36)$$

$$Q = \begin{bmatrix} E[\eta_1 \eta_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E[\eta_2 \eta_2] & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E[\eta_p \eta_p] \end{bmatrix}$$

Для простоти, вважаємо, що автоковаріація шуму кожного коефіцієнта однакова $E[\eta_1 \eta_1] = E[\eta_2 \eta_2] = \dots = E[\eta_p \eta_p] = \sigma_\eta^2$.

Тоді можна рівняння ітераційної оцінки коефіцієнтів за допомогою фільтра Калмана (2.37)

1. Передбачаємо наступне значення $AR(p)$ послідовності (2.37), та значення матриці коваріації шуму оцінки (2.38)

$$\tilde{y}_t = Y_t^T \hat{\Phi}_{t-1} \quad (2.37)$$

$$\tilde{P}_t = \hat{P}_{t-1} + Q \quad (2.38)$$

2. Обрахуємо коефіцієнт підсилення Калмана (2.39)

$$K_t = \frac{\tilde{P}_t Y_t^T}{Y_t^T \tilde{P}_t Y_t + \sigma_u^2} \quad (2.39)$$

3. Корегуємо передбачене значення коефіцієнтів AR(p) (2.40) та матриці коваріації шуму оцінки (2.41), відповідно до коефіцієнта підсилення (2.39)

$$\hat{\Phi}_t = \hat{\Phi}_{t-1} + K_t (y_t - \tilde{y}_t) \quad (2.40)$$

$$\hat{P}_t = (I - K_t Y_t^T) \tilde{P}_t \quad (2.41)$$

РОЗДІЛ 3. РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДІВ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ АВТОРЕГРЕСІЙНОГО ПРОЦЕСУ ПОРЯДКУ p AR(p)

3.1 Стаціонарна авторегресійна послідовність

Для моделювання використано програмне середовище MATLAB.

Сворена функція $[z] = \text{ar_model_manualCoeff}(\text{ar}, N, \text{noise}, \text{init_ar})$. Додаток А.

Вхідні/Вихідні параметри:

- ar , коефіцієнти авторегресії
- N , розмір вибірки яка генерується
- noise , шум який додається до вибірки із параметрами $N(0, \sigma_u^2)$
- init_ar , перші значення авторегресії з яких починається вибірка
- z , послідовність яка була згенерована

Приклад програми для використання цієї функції знаходиться у файлі “AR_z.m”. Користовачу достатньо внести початкові данні. Почасткові значення вибірки генеруються як випадкова величина із параметрами $N(0, \sigma_0^2)$. Приклад параметрів представлений у таблицях 3.1, 3.2.

Таблиця 3.1 Параметри тестової послідовності 1 AR(4)

$[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4]$	[1 -0.9 0.8 -0.7]
N	200
σ_u^2	0.01
σ_0^2	10

$[z_1, z_2, z_3, z_4]$

[1.4542 4.1656 5.5744 2.1268]

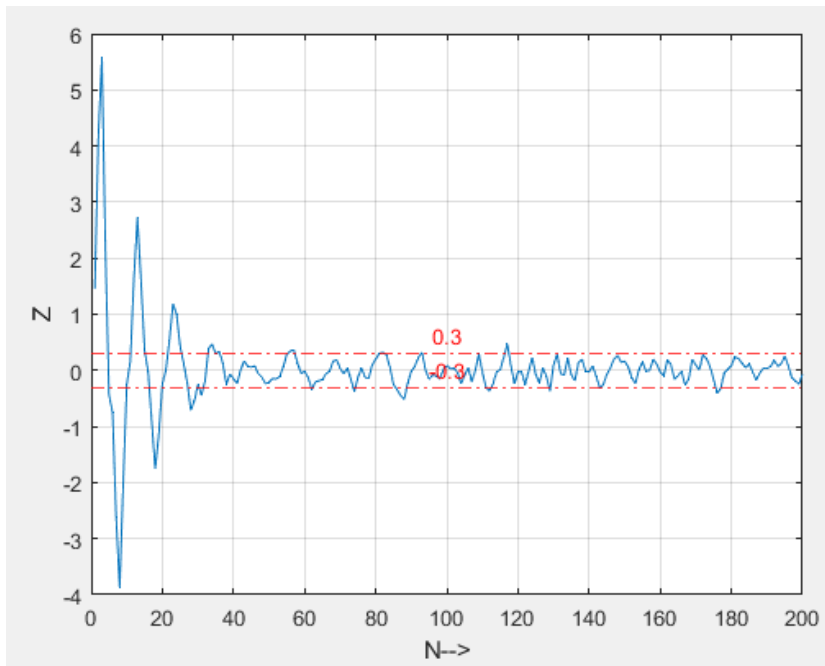


Рис. 3.1 Згенерована послідовність 1

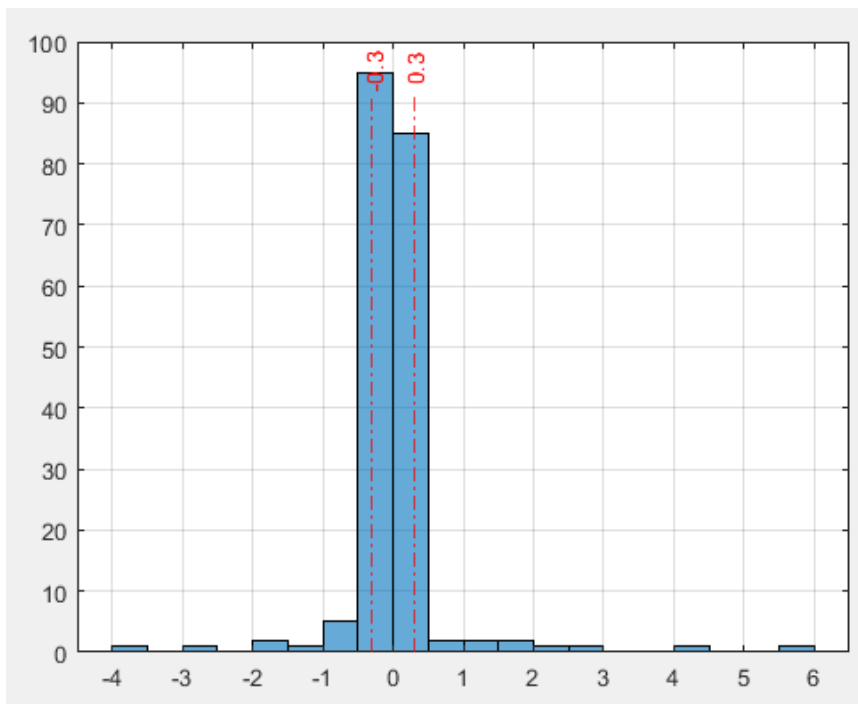


Рис. 3.2 Гістограма послідовності 1

Таблиця 3.2 Параметри тестової послідовності 2 AR(2)

$[\varphi_1, \varphi_2]$	[1 -0.9]
N	500
σ_u^2	0.01
σ_0^2	5
$[z_1, z_2]$	[1.4084 1.9099]

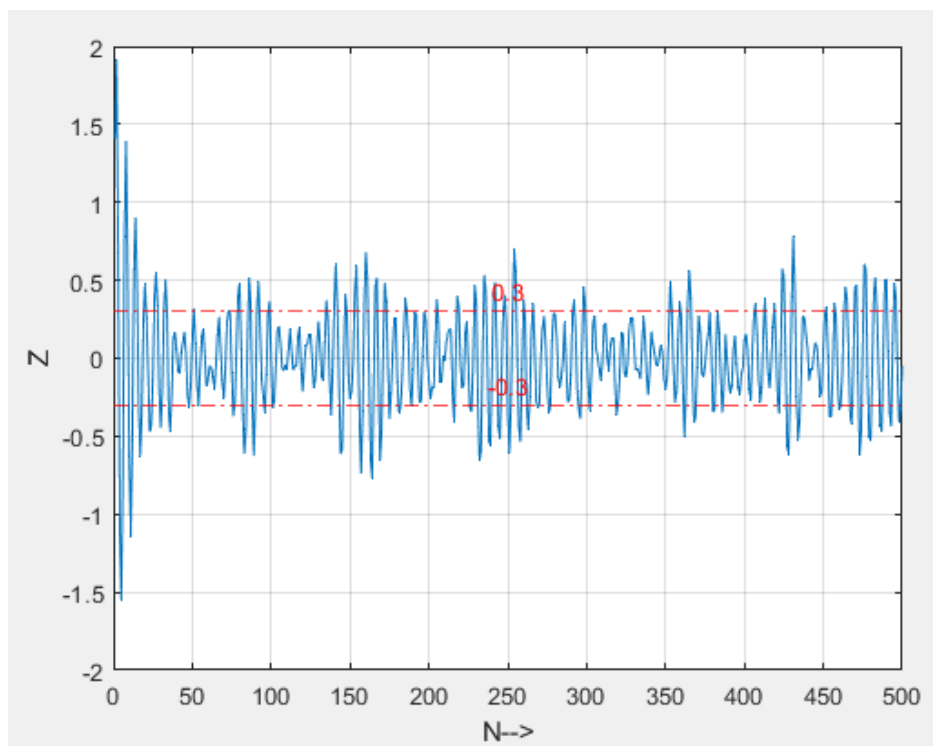


Рис.3.3 Згенерована послідовність 2

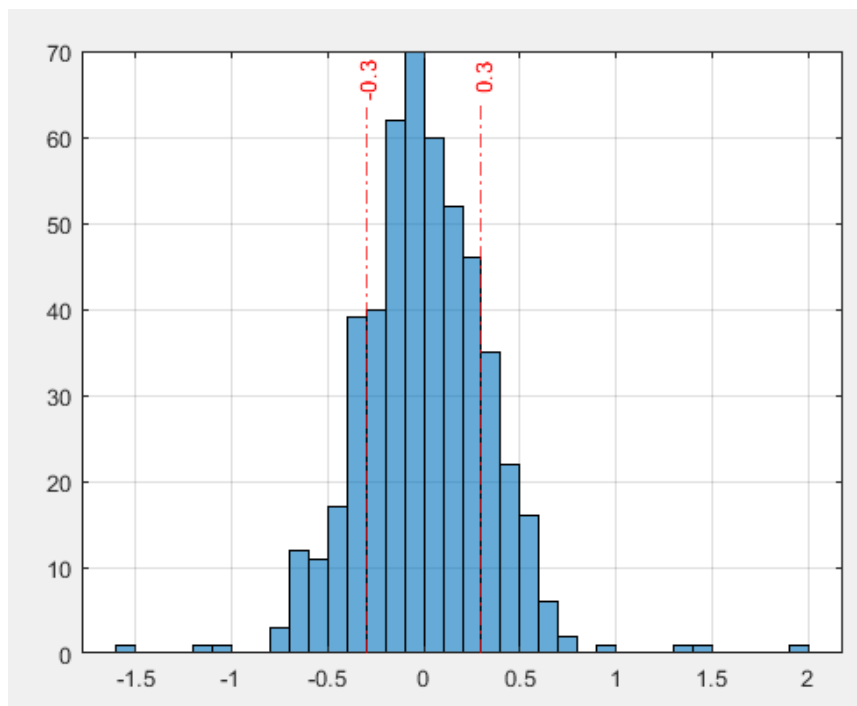


Рис. 3.4 Гістограма послідовності 2

Таблиця 3.3 Параметри тестової послідовності 3 AR(3)

$[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$	[1 -0.9 0.8]
N	1000
σ_u^2	0.1
σ_0^2	5
$[z_1, z_2, z_3]$	[0.2691 2.5409 -1.5357]

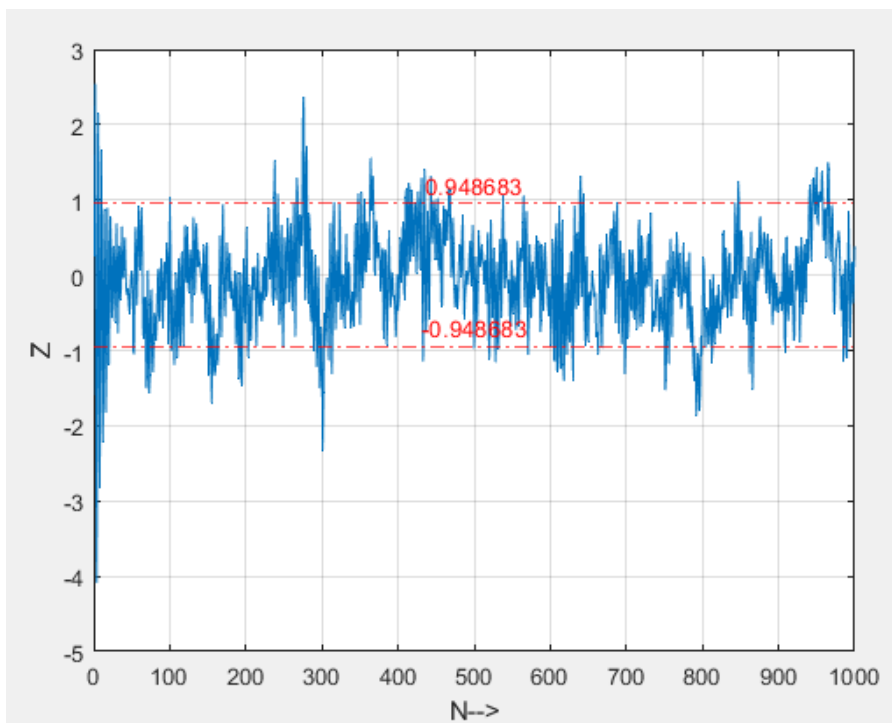


Рис.3.5 Згенерована послідовність Z

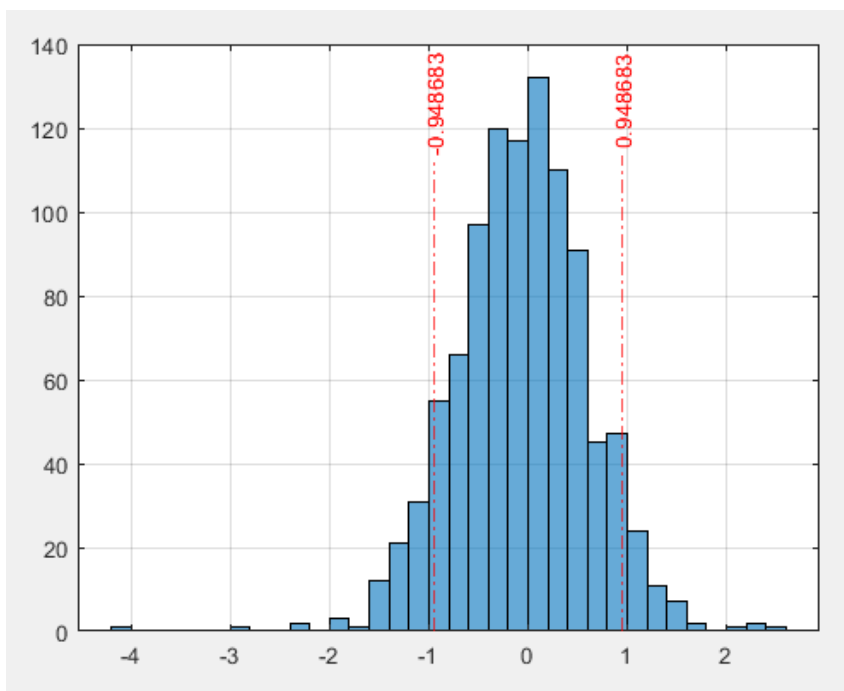


Рис. 3.6 Гістограма послідовності Z

Як видно із представлених прикладів, не зважаючи на початкові значення, авторегресійна послідовність стає схожа на Білий Гаусівський Шум, параметри якого збігаються із параметрами АДБГШ автогрегресії $N(0, \sigma_u^2)$.

3.2 Метод Юла-Уокера

У програмному середовищі MATLAB уже є готова функція яка виконує рішення системи рівнянь Юла-Уокера для цього методую

$a = \text{aryule}(x,p)$

Вхідні/Вихідні дані:

- x , послідовність
- p , порядок послідовності
- a , масив обрахованих коефіцієнтів

Приклад роботи програми знаходиться у файлі “AR_YW.m”

Таблиця 3.4 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 1

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	1.31	0.31
φ_2	-0.9	-1.24	0.34
φ_3	0.8	0.94	0.14
φ_4	-0.7	-0.67	0.03
		1.32	0.32
		-1.25	0.35
		0.96	0.16

		-0.68	0.02
		1.28	0.28
		-1.17	0.27
		0.90	0.1
		-0.66	0.04

Таблиця 3.5 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 2

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	1.004	0.004
φ_2	-0.9	-0.910	0.010
		1.010	0.010
		-0.894	0.006
		1.015	0.015
		-0.889	0.011

Таблиця 3.6 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 3

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	1.02	0.02
φ_2	-0.9	-0.92	0.02
φ_2	0.8	0.78	0.02
		0.96	0.04

		0.86	0.04
		0.75	0.05
		0.96	0.04
		0.83	0.07
		0.76	0.06

На рис. 3.7 зображений час розрахунку методом Юла-Уорека при різних порядках послідовності p , як функція від кількості спостережень взятих для обрахунку.

На рис. 3.8 та рис. 3.9 зображені значення МО та СКВ відповідно, при різних кількості спостережень N як функції від дисперсії шуму послідовності.

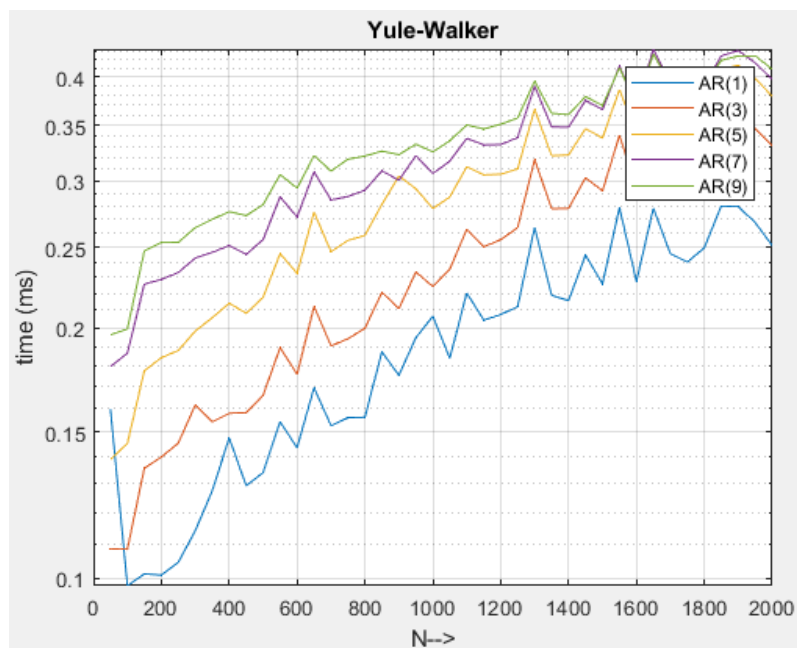


Рис. 3.7 Час обрахунку Юла-Уокера

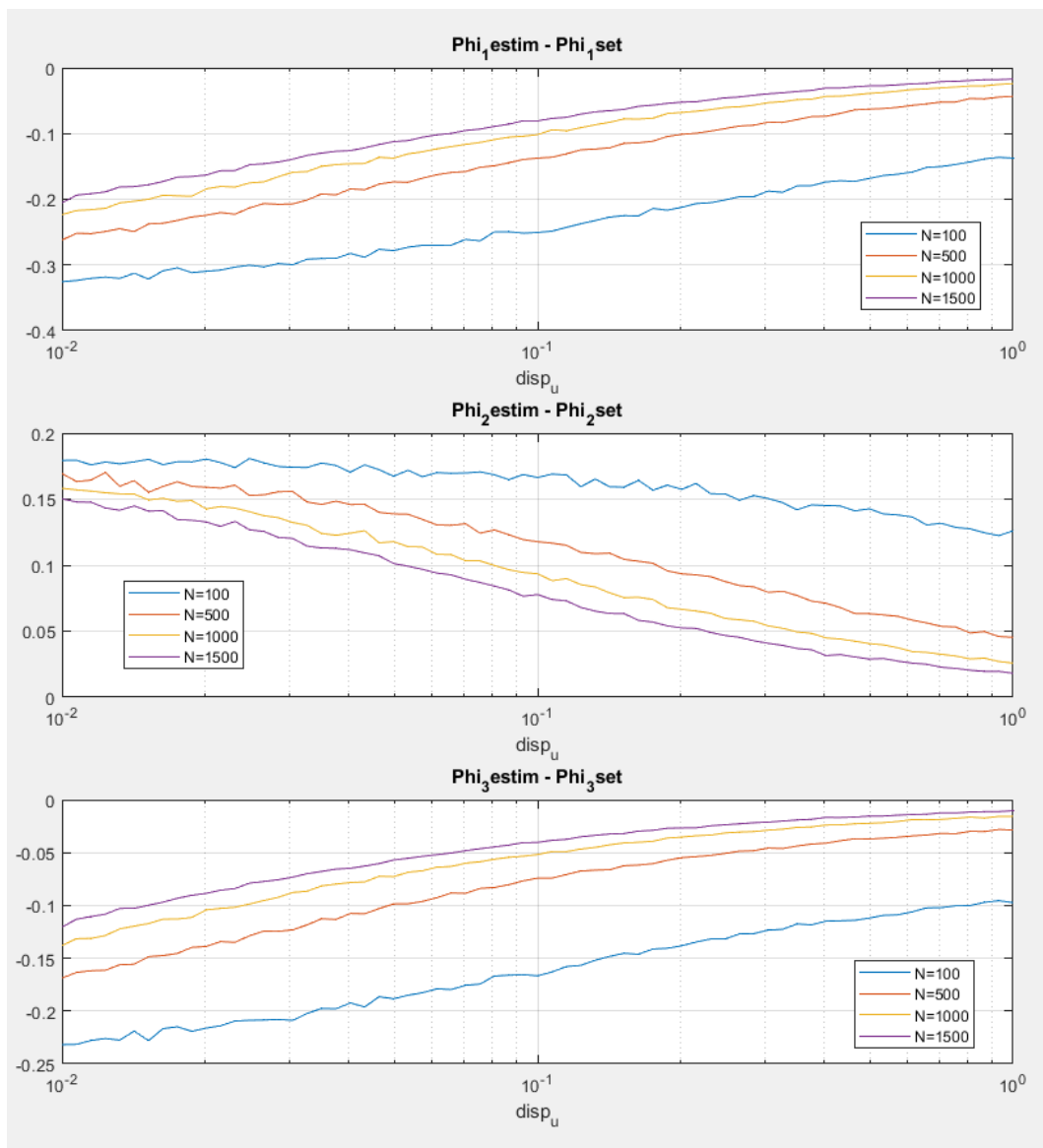


Рис. 3.8 МО похибки Юла-Уокера

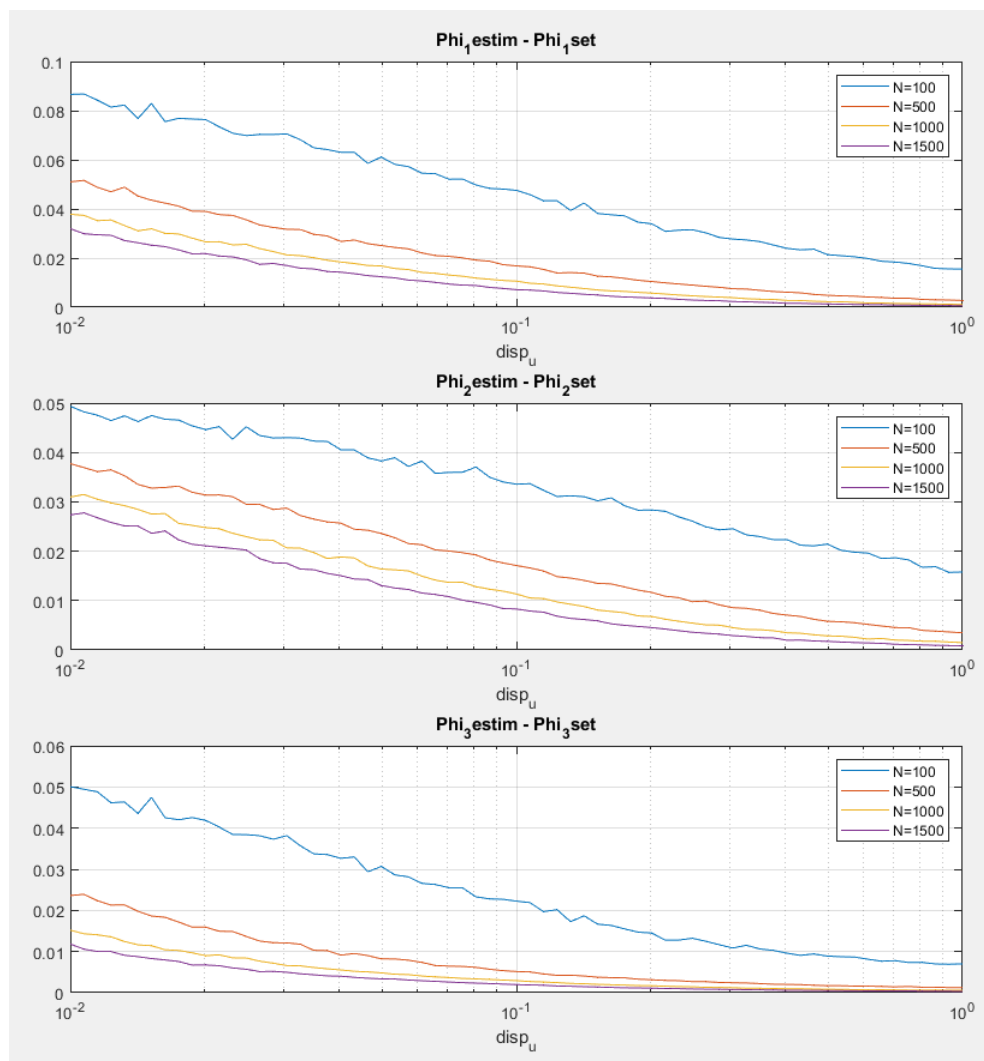


Рис. 3.9 СКВ похибки Юла-Уокера

При невеликій кількості спостережень, даний метод має погану точність, але дуже швидко працює.

Наприклад, якщо взяти послідовність AR(3) $p=3$ із дисперсією шуму $\sigma_u^2 = 0.1$, то при кількості спостережень $N=100$ отримуємо похибки обчислення коефіцієнтів із гаусівським розподілом $N_{\varphi_1}(-0.25, 2.5 \cdot 10^{-3})$, $N_{\varphi_2}(0.17, 1.2 \cdot 10^{-3})$, $N_{\varphi_3}(-0.16, 0.5 \cdot 10^{-3})$, а час обрахунку буде складати 0.14 мс.

3.3 Метод Найменших Квадратів

Створена функція $LS = ARpLS(y,p)$. Файл із назвою “ARpSL.m”.

Вхідні/Вихідні параметри:

- y , послідовність
- p , порядок послідовності
- OLS, масив обрахованих коефіцієнтів

Приклад роботи програми знаходиться у файлі “AR_LS.m”

Таблиця 3.7 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 1

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	1.0005	0.0005
φ_2	-0.9	-0.88	0.02
φ_3	0.8	0.79	0.01
φ_4	-0.7	-0.68	0.02
		0.98	0.02
		-0.89	0.01
		0.79	0.01
		-0.69	0.01
		1.02	0.2
		-0.93	0.3
		0.8006	0.0006
		-0.68	0.02

Таблиця 3.8 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 2

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	0.994	0.006
φ_2	-0.9	-0.885	0.015
		1.01	0.01
		-0.89	0.01
		1.02	0.02
		0.92	0.02

Таблиця 3.9 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 3

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	0.99	0.01
φ_2	-0.9	-0.91	0.01
		0.81	0.01
φ_3	0.8	1.01	0.01
		-0.93	0.03
		0.79	0.01
		0.98	0.02
		-0.88	0.02
		0.76	0.04

На рис. 3.10 зображений час розрахунку методом Найменших Квадратів при різних порядках послідовності p , як функція від кількості спостережень взятих для обрахунку.

На рис. 3.11 та рис. 3.12 зображені значення МО та СКВ відповідно, при різній кількості спостережень N як функції від дисперсії шуму послідовності.

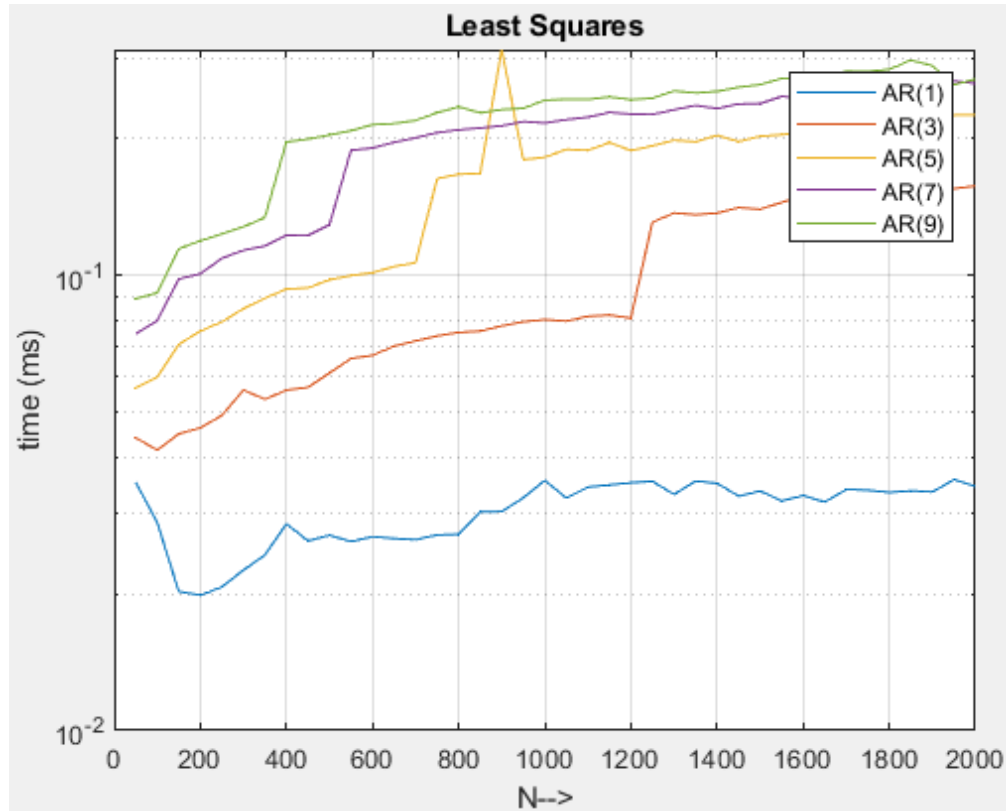


Рис. 3.10 Час обрахунку Найменших Квадратів

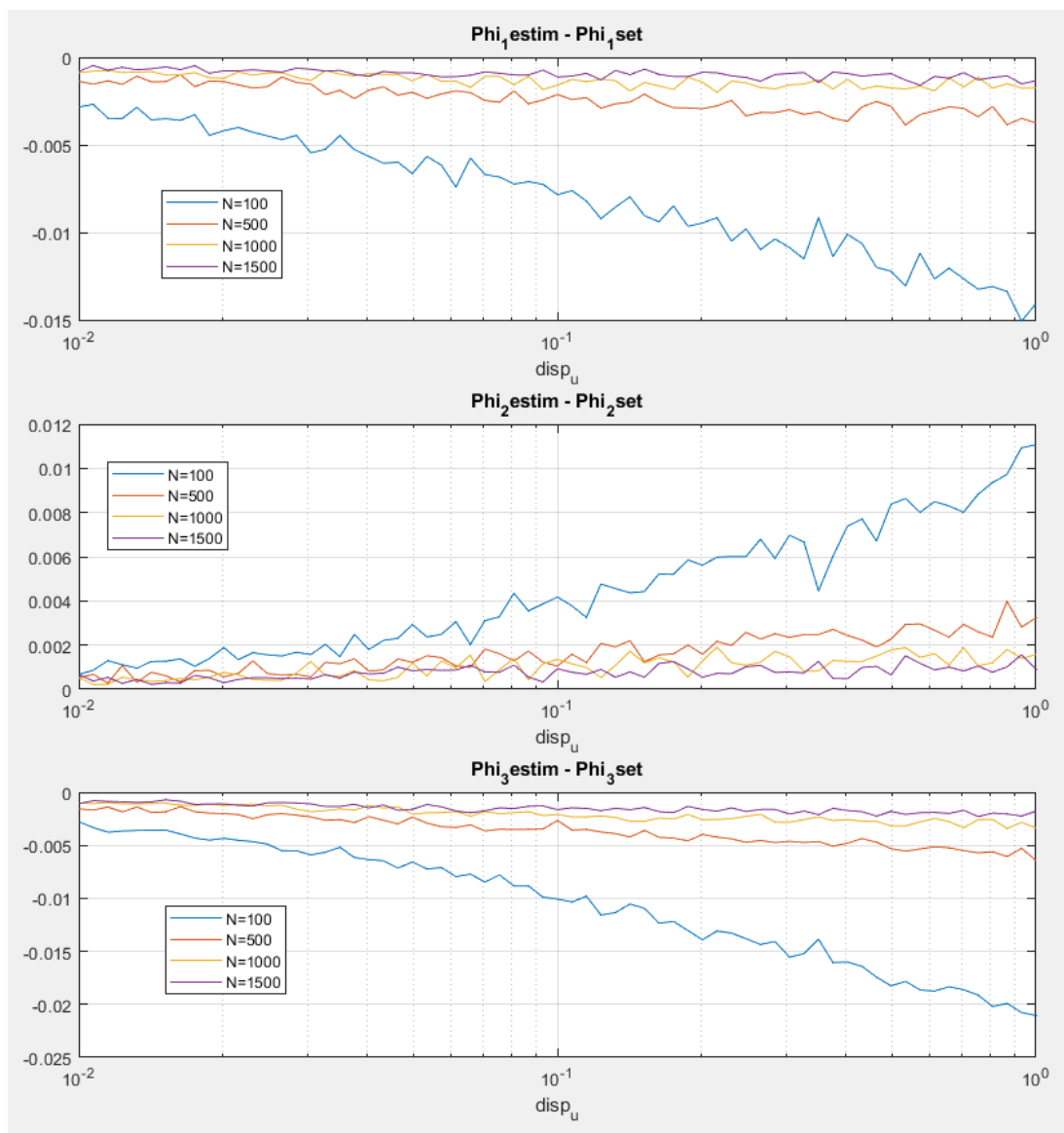


Рис. 3.11 МО похибки Найменших Квадратів

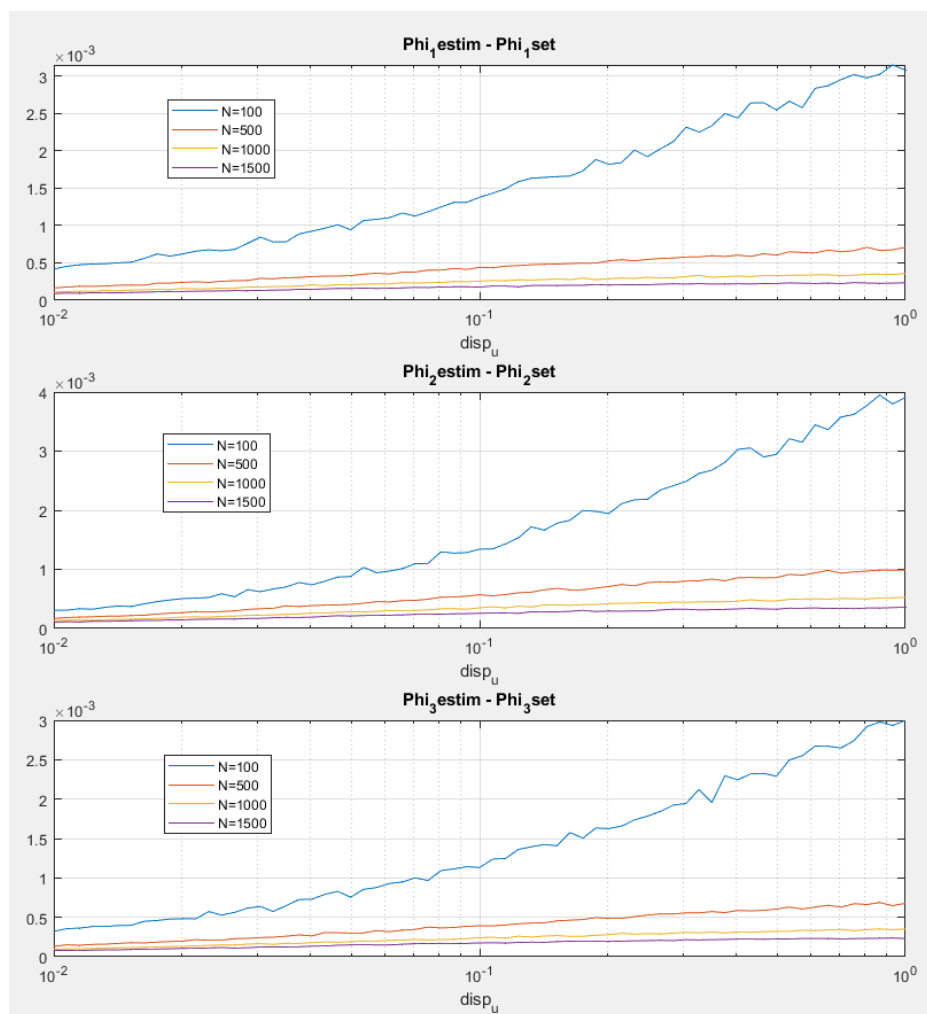


Рис. 3.12 СКВ похибки Найменших Квадратів

При невеликій кількості спостережень, даний метод має погану точність, але дуже швидко працює.

Наприклад, якщо взяти послідовність AR(3) $p=3$ із дисперсією шуму $\sigma_u^2 = 0.1$, то при кількості спостережень $N=100$ отримуємо похибки обчислення коефіцієнтів із гаусівським розподілом $N_{\varphi_1}(-7.5 \cdot 10^{-3}, 1.9 \cdot 10^{-6})$, $N_{\varphi_2}(4 \cdot 10^{-3}, 1.9 \cdot 10^{-6})$, $N_{\varphi_3}(-10 \cdot 10^{-3}, 1.7 \cdot 10^{-6})$, а час обрахуку буде складати 0.05 мс.

3.4 Метод Максимальної Правдоподібності

Створена функція $OLS = ARpML(y,p)$ із внутрішньою підфункцією $loglik = LogLikeARp(x,y,p)$ Файли із назвою “ARpML.m” та “LogLikeARp.m” відповідно.

У функції LogLikeARp реалізована функція правдоподібності, мінімум якої знаходить функція ARpML.

Вхідні/вихідні параметри LogLikeARp:

- x , тестовий вектор значень коефіцієнтів $AR(p)$
- y , вектор спостережень
- p , порядок послідовності
- $loglike$, значення функції правдоподібності

Вхідні/вихідні параметри ARpML

- y , послідовність
- p , порядок послідовності
- ML , масив обрахованих коефіцієнтів

Приклад роботи програми знаходиться у файлі “AR_ML.m”

Таблиця 3.10 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 1

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	1.04	0.04
φ_2	-0.9	-0.95	0.05
φ_3	0.8	0.806	0.006
	-0.7	-0.68	0.02

φ_4		1.03	0.03
		-0.91	0.01
		0.77	0.03
		-0.68	0.02
		0.99	0.01
		-0.86	0.04
		0.77	0.03
		-0.67	0.03

Таблиця 3.11 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 2

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	1.002	0.002
φ_2	-0.9	-0.907	0.007
		1.03	0.03
		-0.91	0.01
		1.02	0.02
		-0.92	0.02

Таблиця 3.12 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 3

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	0.98	0.02

φ_2	-0.9	-0.86	0.04
φ_3	0.8	0.76	0.04
		1.007	0.007
		-0.91	0.01
		0.79	0.01
		1.02	0.02
		-0.901	0.001
		0.77	0.03

На рис. 3.13 зображений час розрахунку методом Максимальної Правдоподібності при різних порядках послідовності p , як функція від кількості спостережень взятих для обрахунку.

На рис. 3.14 та рис. 3.15 зображені значення МО та СКВ відповідно, при різній кількості спостережень N як функції від дисперсії шуму послідовності.

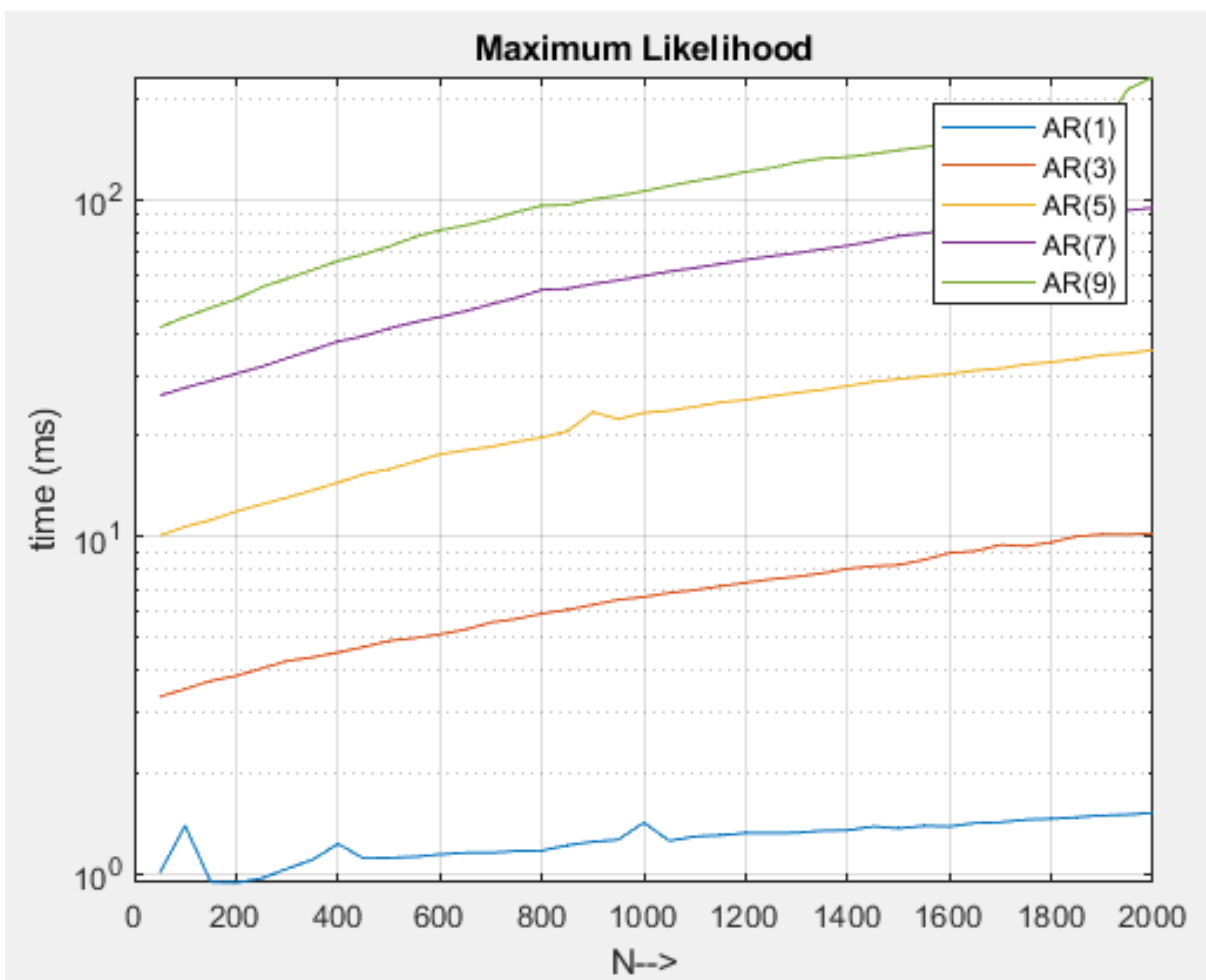


Рис. 3.13 Час обрахунку Максимальної Правдоподібності

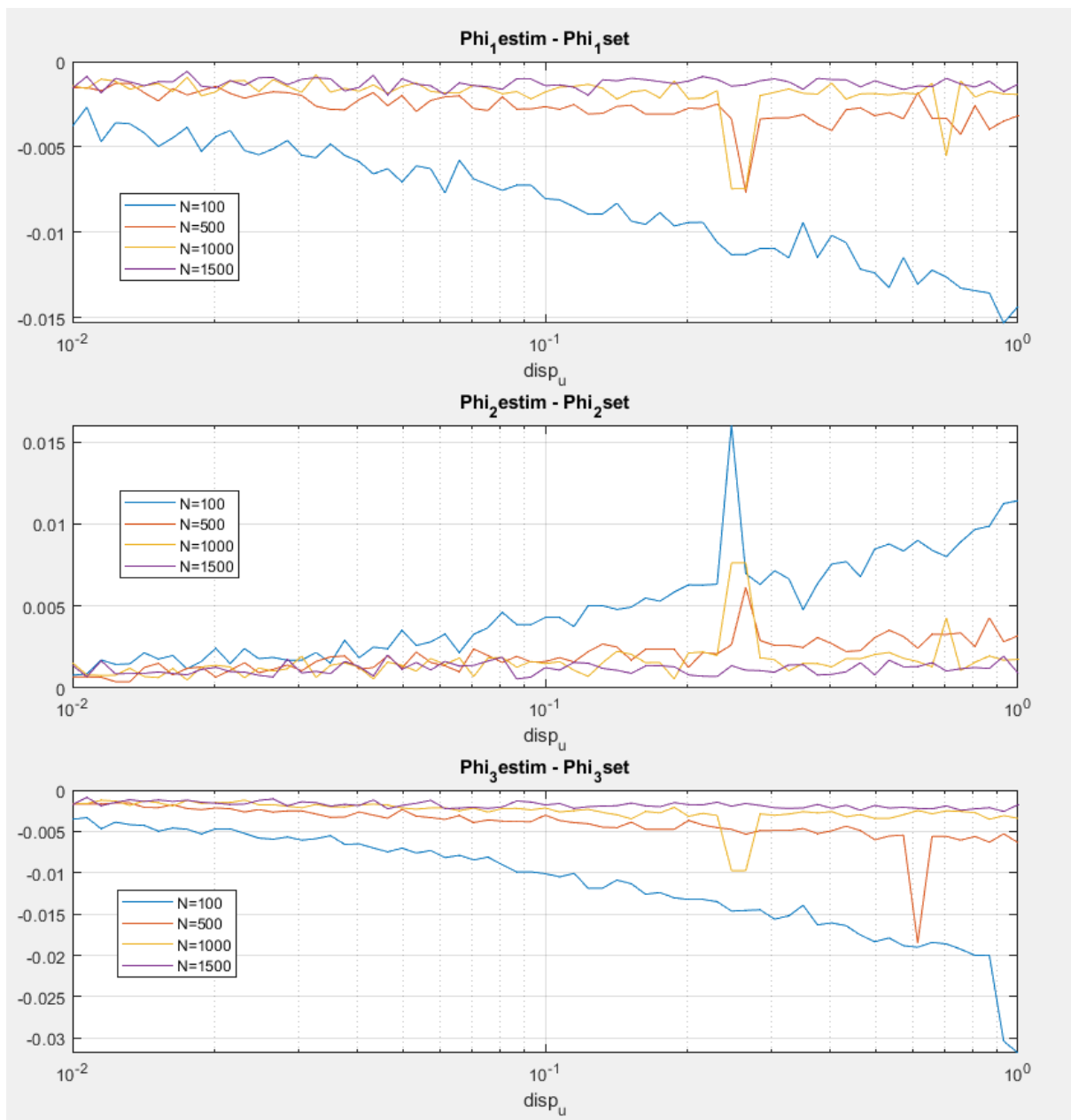


Рис. 3.14 МО похибки Максимальної Правдоподібності

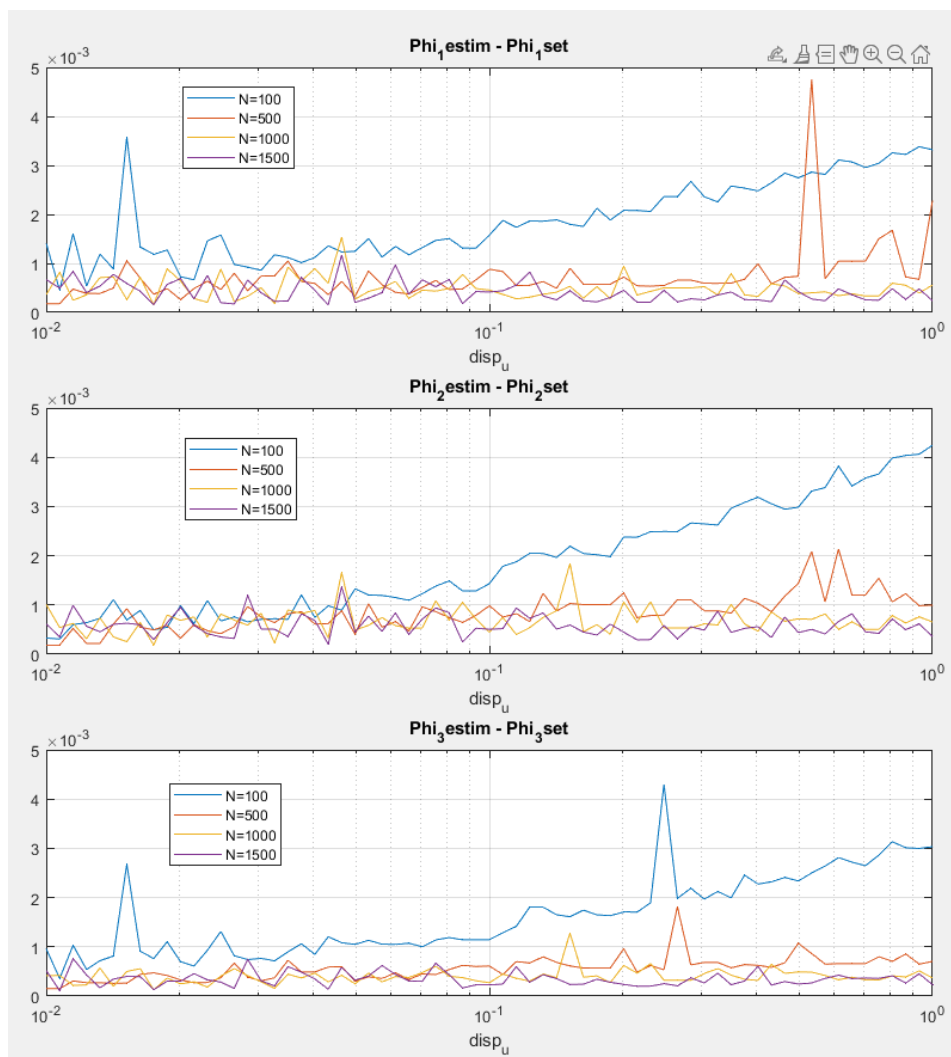


Рис. 3.15 СКВ похибки Максимальної Правдоподібності

При невеликій кількості спостережень, даний метод має погану точність, але дуже швидко працює.

Наприклад, якщо взяти послідовність AR(3) $p=3$ із дисперсією шуму $\sigma_u^2 = 0.1$, то при кількості спостережень $N=100$ отримуємо похибки обчислення коефіцієнтів із гаусівським розподілом $N_{\varphi_1}(-7.5 \cdot 10^{-3}, 1.9 \cdot 10^{-6})$,

$N_{\varphi_2}(4 \cdot 10^{-3}, 2.2 \cdot 10^{-6})$, $N_{\varphi_3}(-10 \cdot 10^{-3}, 1.4 \cdot 10^{-6})$, а час обрахунку буде складати 1 мс.

Результати дуже схожі на метож Найменших Квадратів, але час обрахунку набагато більше.

3.5 Метод Фільтра Калмана

Створена функція $KF = ARpKF(z, p, \sigma_u, \sigma_q)$. Файл із назвою “ARpKF.m”.

Вхідні/вихідні дані:

- z , послідовність
- p , порядок послідовності
- σ_u , дисперсія шуму послідовності
- σ_q , дисперсія шуму матриці взаємної кореляції шуму оцінки коефіцієнтів

Приклад роботи програми знаходиться у файлі “AR_KF.m”

Таблиця 3.13 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 1

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	1.03	0.03
φ_2	-0.9	-0.81	0.09
φ_3	0.8	0.84	0.04
φ_4	-0.7	-0.7001	0.0001
		0.99	0.01

		-0.97	0.07
		0.87	0.07
		-0.62	0.08
		1.009	0.009
		-0.80	0.10
		0.82	0.08
		-0.68	0.02

Таблиця 3.14 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 2

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	1.01	0.01
φ_2	-0.9	-0.82	0.08
		0.96	0.04
		-0.84	0.06
		0.92	0.08
		-0.83	0.07

Таблиця 3.15 Результат обрахунку коефіцієнтів послідовності 3

Коефіцієнти	задані	обраховані	різниця
φ_1	1	1.07	0.07
	-0.9	-0.83	0.07

φ_2	0.8	0.75	0.05
φ_3		0.96	0.04
		-0.83	0.07
		0.76	0.04
		0.97	0.03
		-0.96	0.06
		0.79	0.01

На рис. 3.16 зображений час розрахунку методом Фільтра Калмана при різних порядках послідовності p , як функція від кількості спостережень взятих для обрахунку.

На рис. 3.17 та рис. 3.18 зображені значення МО та СКВ відповідно, при різній кількості спостережень N як функції від дисперсії шуму послідовності.

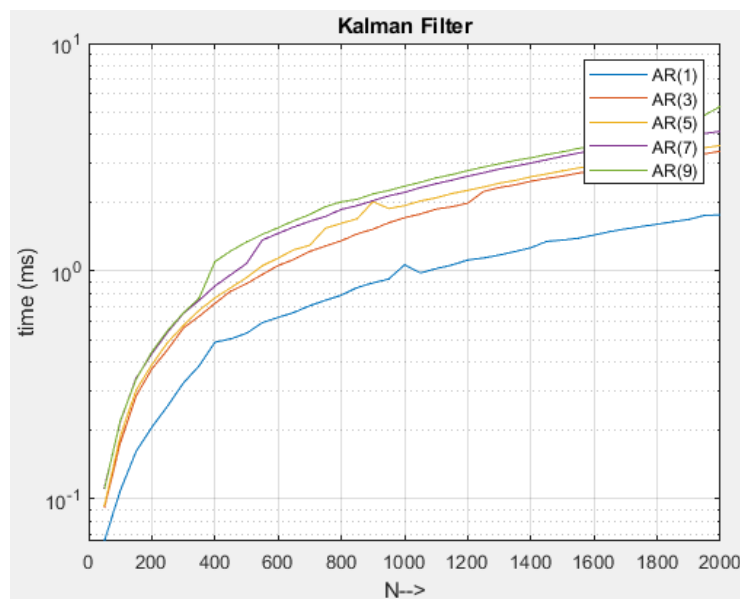


Рис. 3.16 Час обрахунку Фільтра Калмана

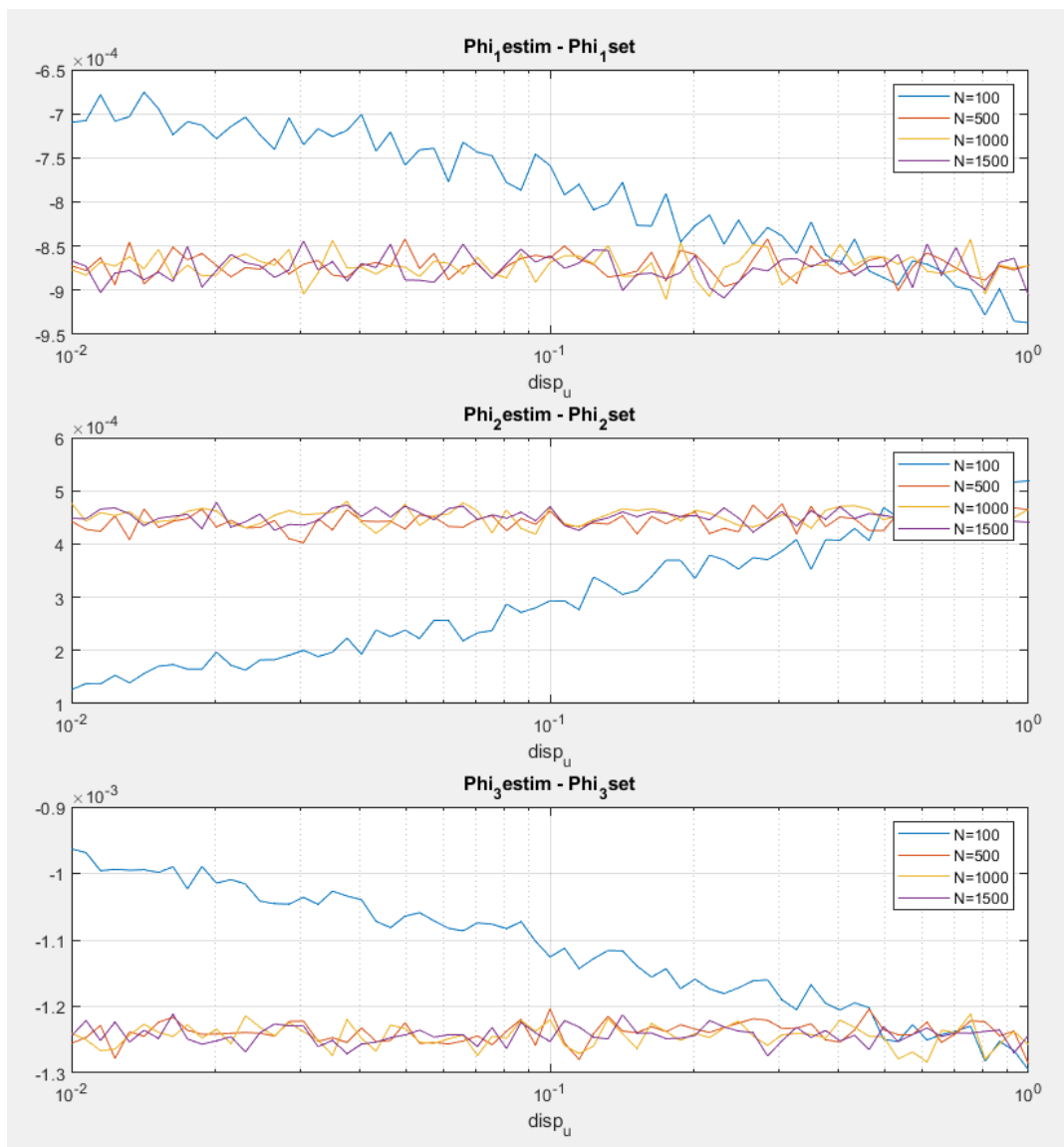


Рис. 3.17 МО похибки Фільтра Калмана

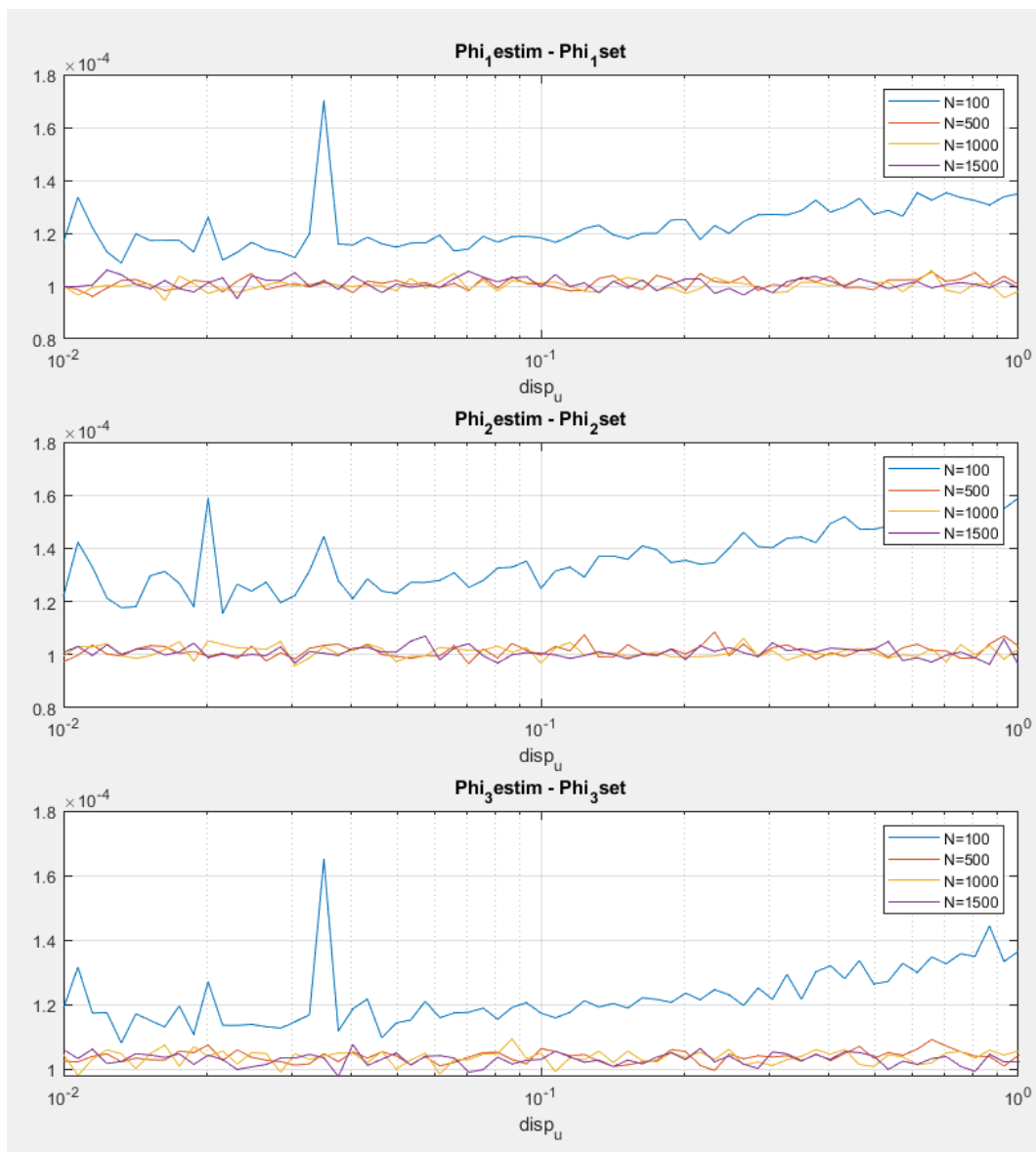


Рис. 3.18 СКВ похибки Фільтра Калмана

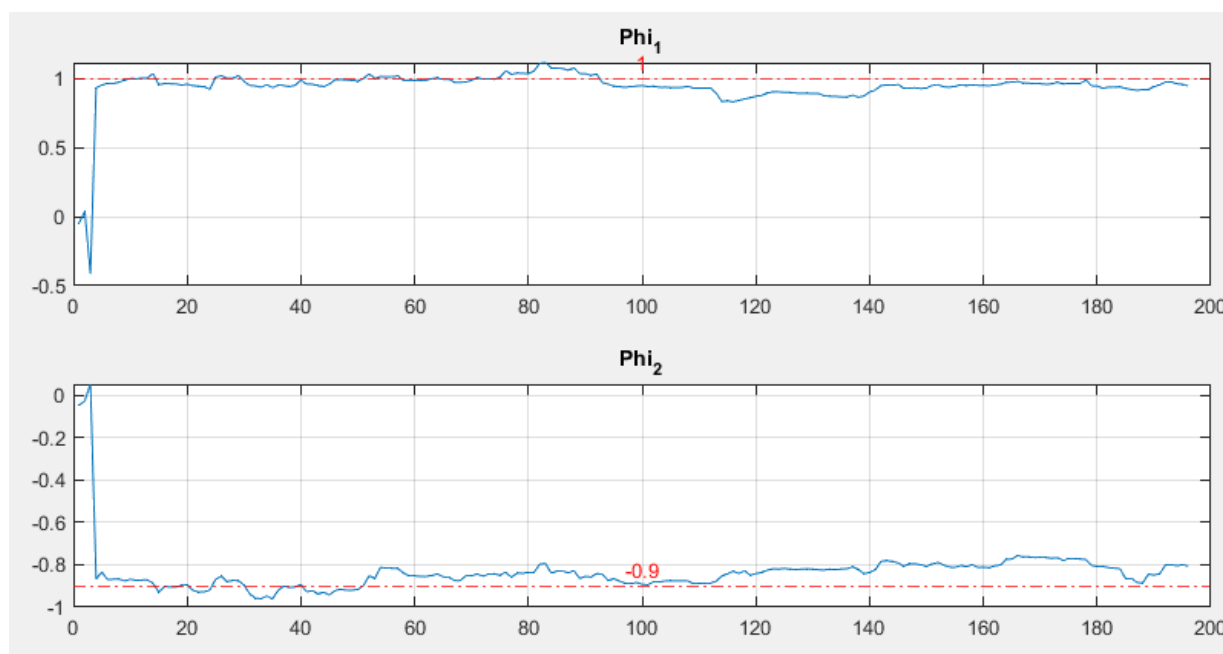
При невеликій кількості спостережень, даний метод має погану точність, але дуже швидко працює.

Наприклад, якщо взяти послідовність AR(3) $p=3$ із дисперсією шуму $\sigma_u^2 = 0.1$, то при кількості спостережень $N=100$ отримуємо похибки обчислення коефіцієнтів із гаусівським розподілом $N_{\varphi_1}(-7.4 \cdot 10^{-3}, 1.4 \cdot 10^{-8})$,

$N_{\varphi_2}(3 \cdot 10^{-3}, 1.7 \cdot 10^{-8})$, $N_{\varphi_3}(-10 \cdot 10^{-3}, 1.4 \cdot 10^{-8})$, а час обчислення буде складати 0.06 мс.

Час обчислення порівняний із методом Найменших квадратів, а точність найкраща серед розглянутих методів.

Для фільтра Калмана можна побудувати графіки як із кожною ітерацією змінюються коефіцієнти, що дає розуміння яка кількість ітерацій може бути корисна. Файл “AR_KF_coeff.m”



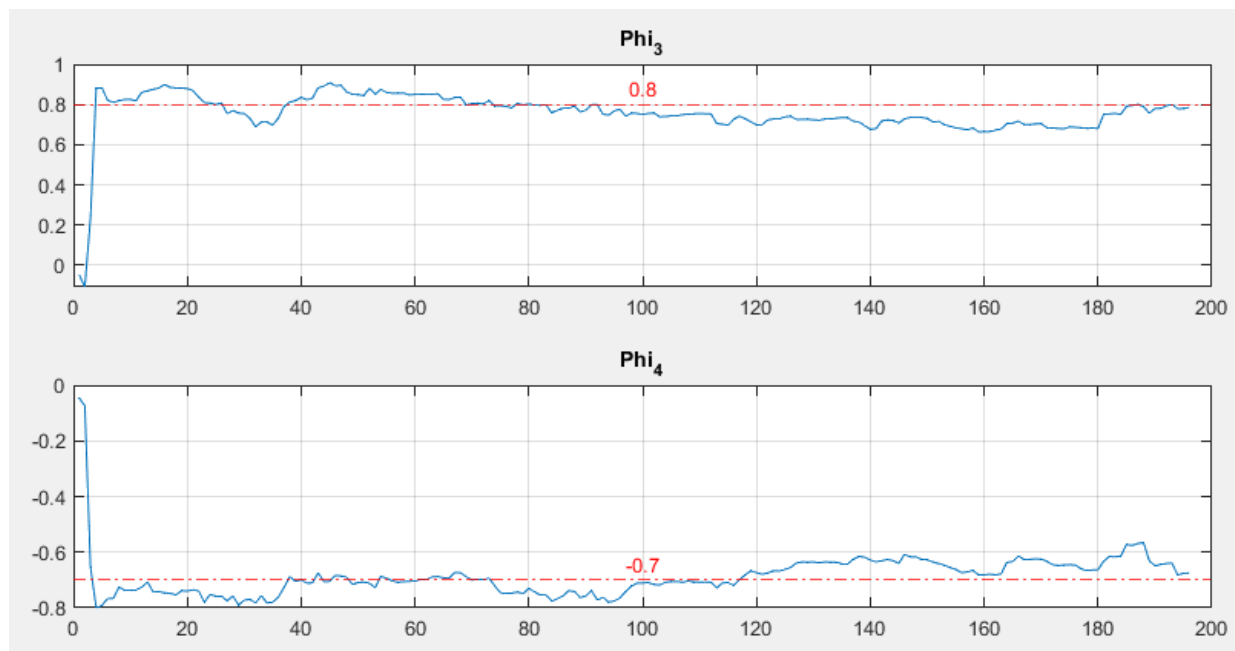
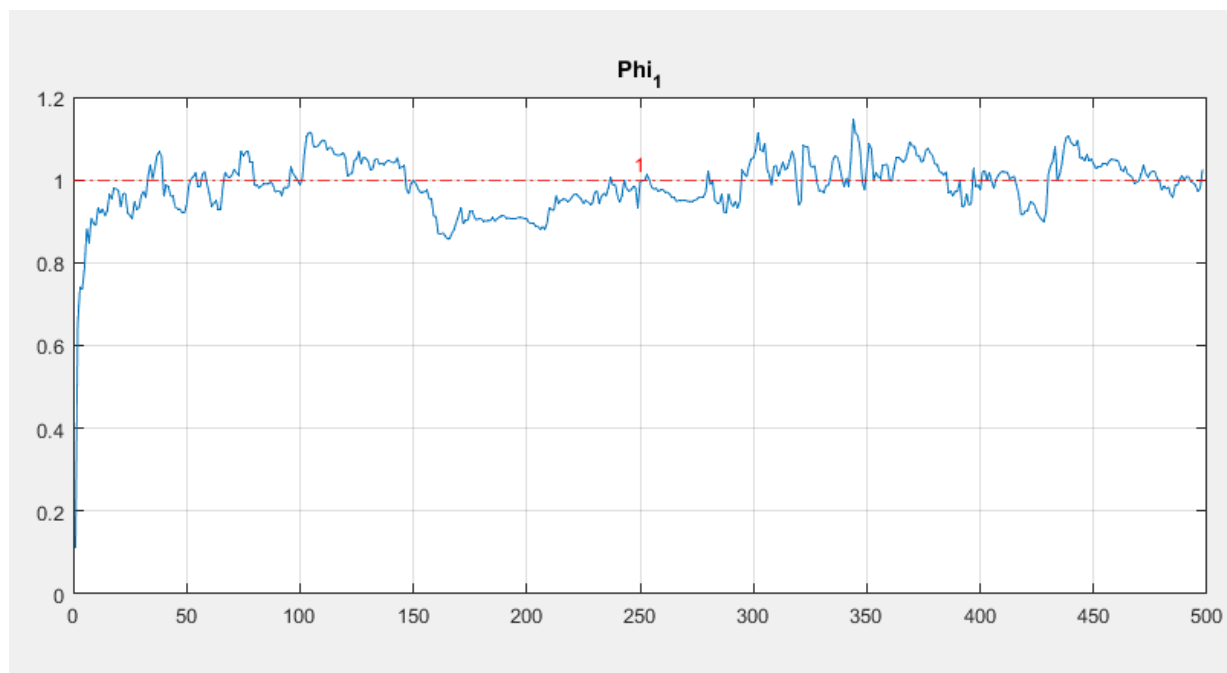


Рис. 3.19 Коефіцієнти послідовності 1 оцінені фільтром Калмана



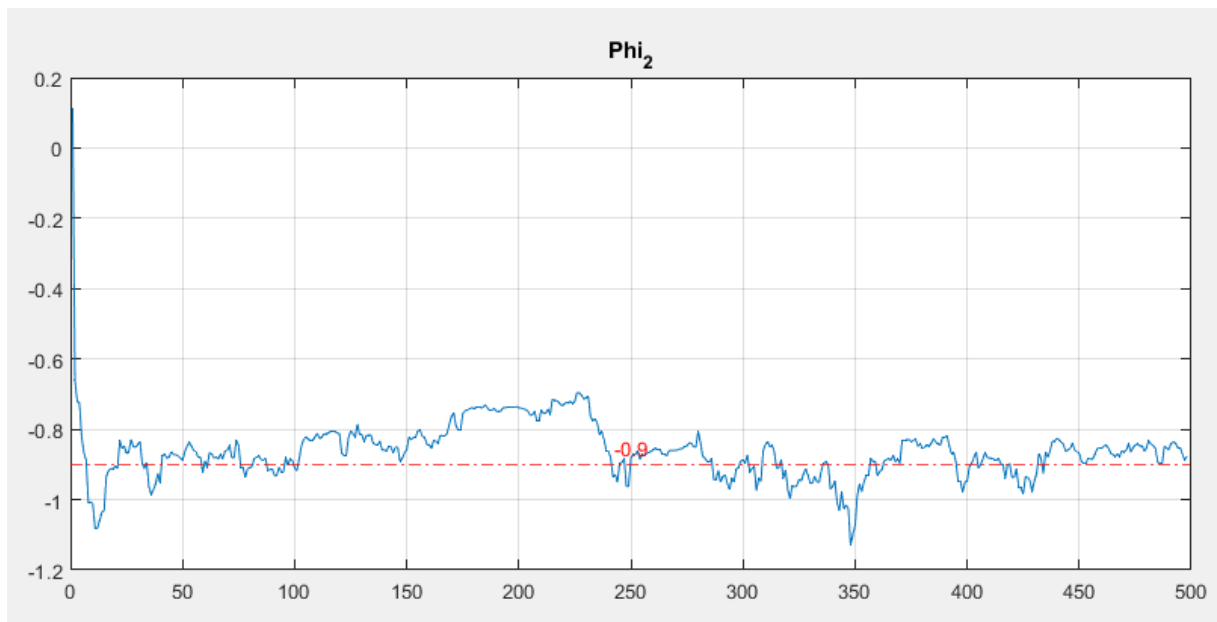
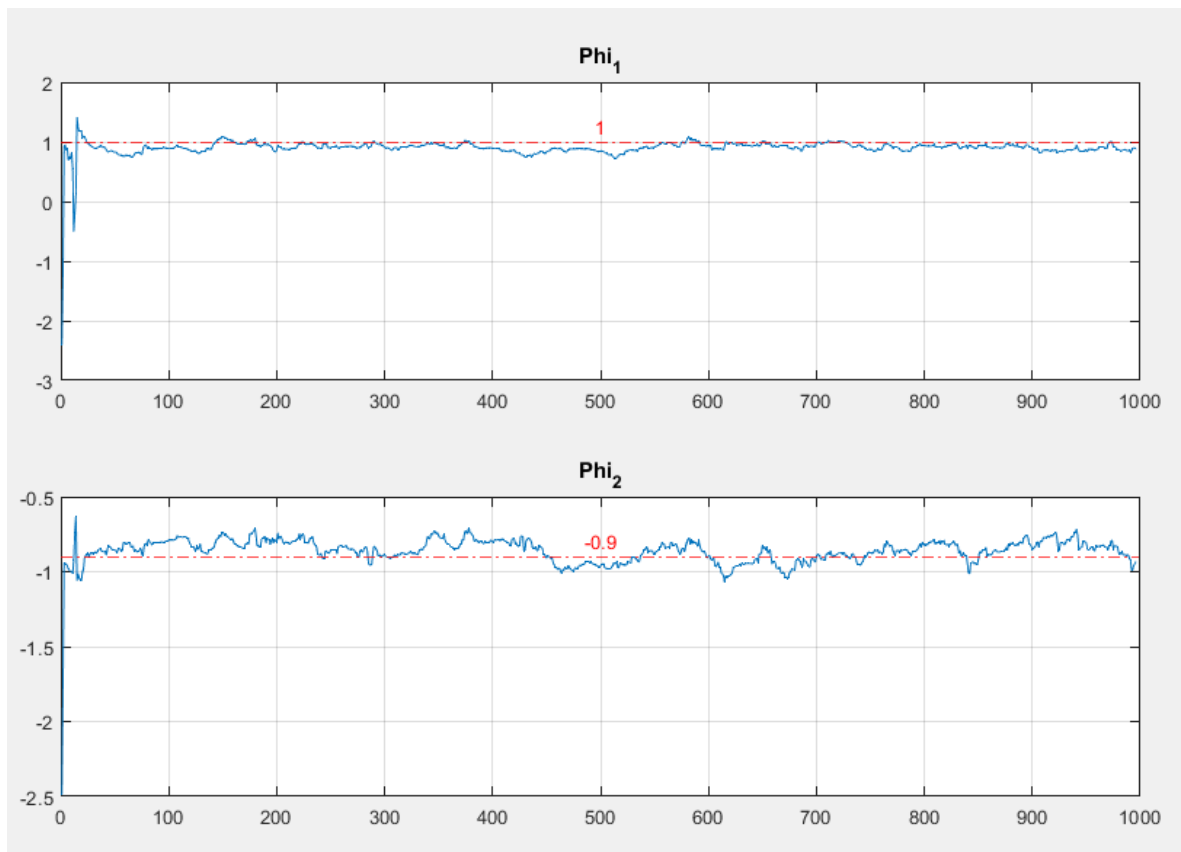


Рис. 3.20 Коефіцієнти послідовності 2 оцінені фільтром Калмана



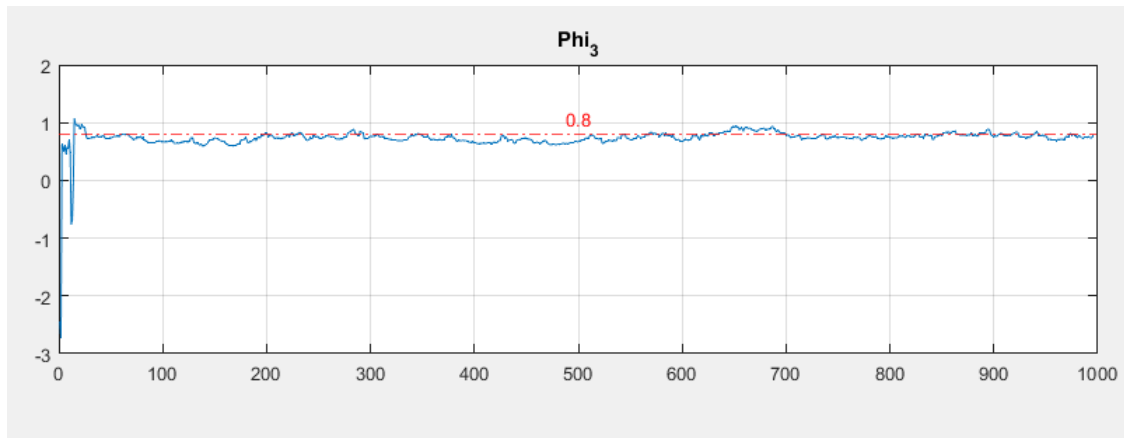


Рис. 3.21 Коефіцієнти послідовності 3 оцінені фільтром Калмана

Ці графіки показують, що час розрахунку можна зменшити за умови досягнутої точності, якщо нею можна знехтувати.

3.6 Порівняння розглянутих методів між собою

Для порівняння взято порядок послідовності $p=3$, та кількість спостережень $N=1500$.

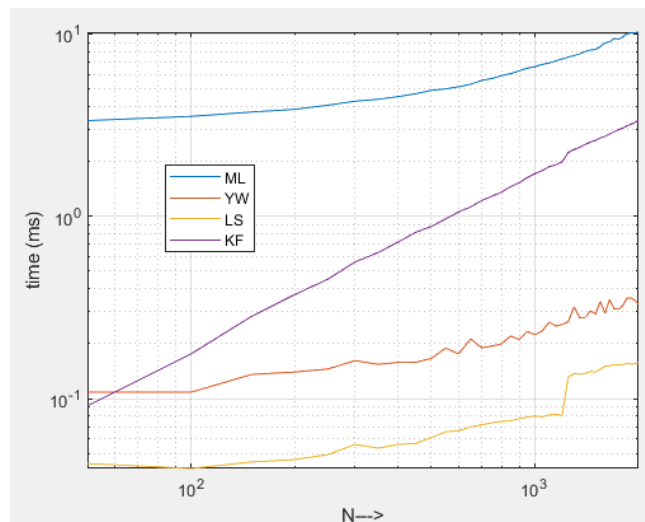


Рис. 3.22 Час обрахунку методів

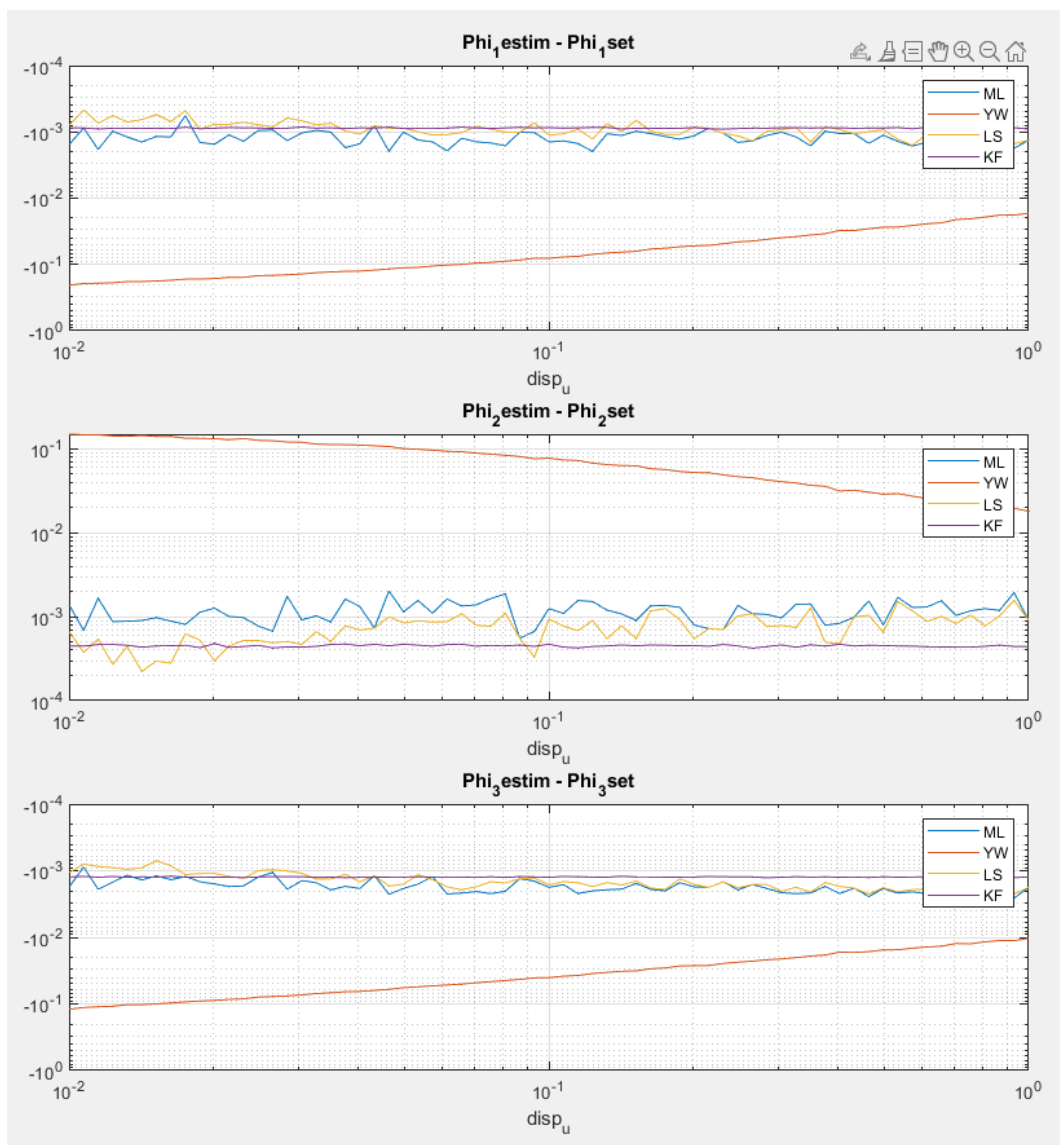


Рис. 3.23 МО методів

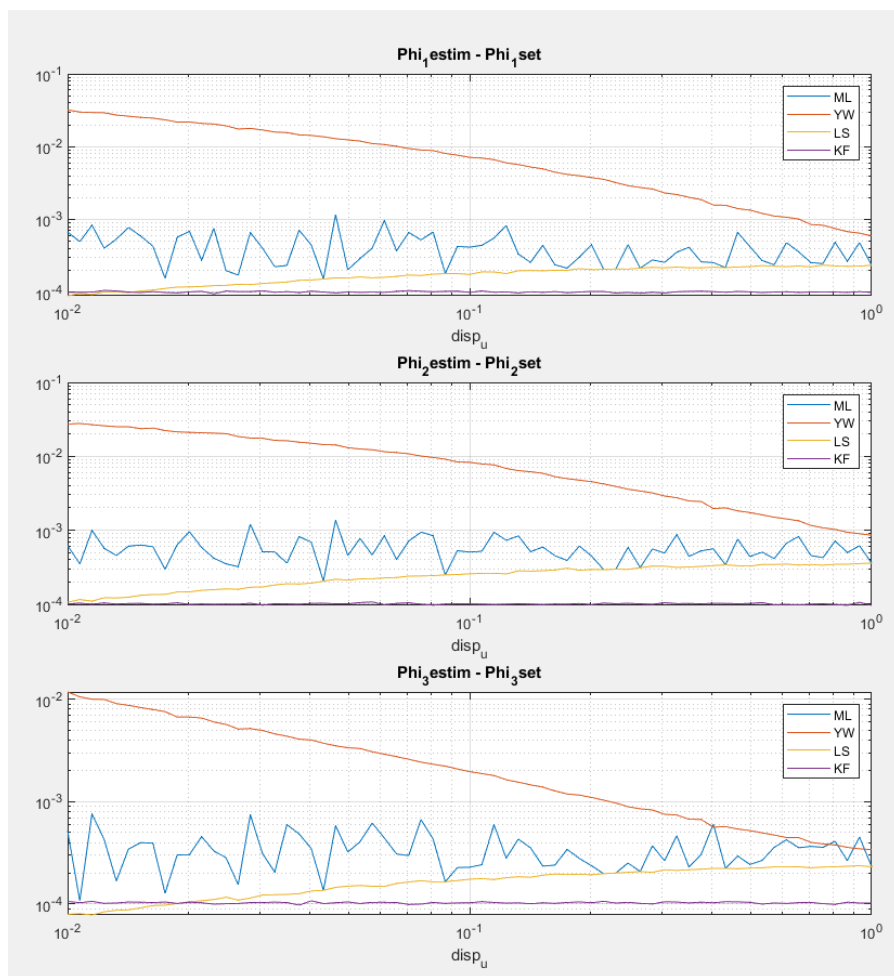


Рис. 3.24 СКВ методів

На рис. 3.22 зображений час розрахунків при певному порядку послідовності $p=3$, як функція від кількості спостережень. Видно, що методи Юла-Уоркера та Найменших Квадратів загалом швидше працюють ніж метод Фільтра Калмана.

На рис. 3.32 та рис. 3.24 зображені значення МО та СКВ відповідно, при різній кількості спостережень N як функції від дисперсії шуму послідовності розглянутих методів. Гарно видно, що Фільтр Калмана має стабільні малі значення МО та СКВ незалежно від дисперсії шуму авторегресійної послідовності.

РОЗІДЛ 4. РОЗРОБКА СТАРТАП ПРОЕКТУ

У даному розділі буде розглянуто питання реалізації «Метод оцінки параметрів авторегресійного процесу по наявній випадковій послідовності» у якості стартап-проекту. Процес поділяється на наступні етапи:

1. Маркетинговий аналіз стартового проекту, включаючи опис ідеї, визначення сфери використання, аналіз ринкових можливостей.
2. Організація стартап-проекту в якому встановлюється календарний графік, розраховуються потреби проекту, розраховуються планові кількості, розраховуються потреби в матеріалах і людських ресурсах, розраховуються початкові витрати.
3. Фінансово-економічний аналіз та оцінка ризиків проекту, що передбачає визначення можливих інвестиційних витрат, обрахування фінансово-економічних показників (обсяг, ціна реалізації, тощо), визначається рівень ризику проекту, шляхи запобігання провалу та заходи комерціалізації проекту.

4.1 Опис ідеї проекту

Назва проекту: Метод оцінки параметрів авторегресійного процесу по наявній випадковій послідовності

Автори проекту: Задорожний Г.С.

Коротка анотація: Під час роботи над магістерською роботою було розроблено Метод оцінки параметрів авторегресійного процесу по наявній випадковій послідовності. Під час розробки було проведено декілька етапів моделювання та оптимізації системи за допомогою програмного середовища Matlab.

Термін реалізації проекту: 2 місяці

Необхідні ресурси:

Інтелектуальні: робота інженера – розробника (50000-60000 грн.), робота менеджера (30000 грн.),

Матеріальні: ПК (50000 грн), ліцензія програмного забезпечення (65000 грн).

Опис проблеми, яку вирішує проект:

Важливою частиною радіотехніки є обробка даних. Обробка даних неможлива без обчислювальних потужностей. За останні десятиліття розвиток цифрової електроніки дав змогу моделювати складні математичні моделі, за допомогою яких можна оцінювати фізичні процеси. Розрізняють два види оцінки параметрів моделі. Останні наукові дослідження показали актуальність використання авторегресійної послідовності для апроксимації деяких фізичних процесів, оцінювання параметрів якої є досить непростим завданням.

Головні цілі та завдання проекту: Цілями та завданнями є: розробити метод оцінки параметрів авторегресійної послідовності на базі Фільтра Калмана, та порівняти його обчислювальні вимоги та точність із уже відомими методами.

Очікувані результати: Використання Фільтра Калмана дає можливість проводити ітераційну оцінку коефіцієнтів авторегресії, що зменшує обчислювальні вимоги до обладнання, і може використовуватися у невеликих пристроях.

- апроксимація матриці передачі у каналі зв'язку MIMO [1]

- використання у якості фільтру в програмному забезпеченні CST, що використовується для зменшення розрахунків коливальних контурів [2]
- прибирання радіочастотної інтерференції у каналі зв'язку за допомогою авторегресійної інтерполяції [3]
- авторегресійна спектральна оцінка для ослаблення ультразвуку в характеристиці тканин [4]
- апроксимація радіочастотного каналу зв'язку за допомогою авторегресії [5]

Таблиця 4.1.1 – Опис ідеї стартап-проекту

Зміст ідеї	Напрямки застосування	Вигоди для користувача
Розробка алгоритму	1. У галузях різного роду, де використовуються методи передачі інформації	Зменшені технічні вимоги до обладнання, більша швидкодія, точніший результат.

4.2 Технологічний аудит ідеї проекту

В межах даного підрозділу необхідно провести аудит технології, за допомогою якої можна реалізувати ідею проекту

Таблиця 4.2.1– Технологічна здійсненність ідеї проекту

№ п/п	Ідея проекту	Технології її реалізації	Наявність технологій	Доступність технологій
----------	-----------------	--------------------------	----------------------	---------------------------

1	Розробка алгоритму у вигляді кода Matlab	Використовуємо програму Matlab	Технології розроблені	Доступні технології
Обрана технологія реалізації ідеї проекту: Проект можливо реалізувати				

4.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Визначення ринкових можливостей, які можна використати під час ринкового впровадження проекту, та ринкових загроз, які можуть перешкодити реалізації проекту, дозволяє планувати напрями розвитку проекту з урахуванням стану ринкового середовища, потреб потенційних клієнтів та пропозицій проектів-конкурентів.

Даний продукт можна використовувати у всіх галузях, де мають справу з передачею радіосигналів. Так як, якісна передача даних, одна із головних задач радіотехніки. Продукт дозволяє передавати інформацію ефективніше, що в свою чергу знизить додаткові витрати

Таблиця 4.3.1 Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

№ п/п	Потреба, що формує ринок	Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)	Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів	Вимоги споживачів до товару
1	Якісно новий рівень обробки даних	Компанії, що в своїй роботі використовують	Кожна компанія хоче витратити менше коштів з бюджету, на	Якісна робота алгоритму

		обробку даних.	якісну обробку даних.	
--	--	----------------	-----------------------	--

Таблиця 4.3.2– Фактори можливості

№ п/п	Фактор	Зміст можливості	Можлива реакція компанії
1	Вихід на міжнародний ринок	Запропонувати алгоритм світовим компаніям, які працюють з передавальними та приймальними системами та планують покращити обробку даних	Успішне використання різними компаніями алгоритму, передавальних пристроїв та систем, які будуть мати попит на ринку.

За результатами аналізу таблиці 4.3.2, можна сформулювати висновок, що стартап-проект є конкурентоспроможним та вартий вкладу у його реалізацію не тільки на ринку України, а і для іноземних компаній

ВИСНОВКИ

Було розроблено метод оцінки параметрів випадкового процесу авторигресії на базі Фільтра Калмана. Порівняно із іншим класичними методами, Фільтр Калмана добре себе зарекомендував, оскільки він має порівняно гарну точність обчислень, із порівняно невеликому часі обчислень та використанні ресурсів компютера.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Henrik Madsen Time Series Analysis // Chapman and Hall/CRC 2007.
2. George E.P. Box Gwilym M. Jenkins Gregory C. Reinsel Greta M. Ljung Time Series Analysis Forecasting and Control // Wiley 2016
3. James D. Hamilton Time Series Analysis // Princeton University Press 1994
4. Willi Mutschler [Електронний ресурс]: Willi Mutschler // Режим доступу: <https://mutschler.eu/> — Назва за екрану.
5. Time Series Analysis [Електронний ресурс]: Time Series Analysis // Режим доступу: https://youtube.com/playlist?list=PLtiTxFJ4k6TZ0g496fVcQpt_-XJRNkbi — Назва за екрану.
6. Autoregressive model with Kalman filter for estimation of physiological tremor in surgical robotic applications // ResearchGate 2011
7. Two-Dimensional Autoregressive Model for MIMO Wideband Mobile Radio Channels // IEEE 2008
8. Autoregressive Modeling of Wide-Band Indoor Radio Propagation // IEEE 1992
9. Ionogram RFI Rejection Using an Autoregressive Interpolation Process // AGU100 Advancing Earth and Space Science 2019
10. Time Series-based Model and Validation for Prediction of Exposure to Wide-Band Radio-Frequency Electromagnetic Radiation // IEEE 2019
11. Time-varying autoregressive spectral estimation for ultrasound attenuation in tissue characterization // ResearchGate 1998
12. Aileen Nielsen, Practical Time Series Analysis: Prediction with Statistics and Machine Learning / 2019 – 504 с.
13. Садовникова Н.А. , Шмойлова Р.А., Анализ временных рядов и прогнозирование / 2009 – 152 с.

14. Qiang Zhan, Ben De Wang, Bin He, Yong Peng, Ming Lei Ren. Singular Spectrum Analysis and ARIMA Hybrid Model for Annual Runnoff Forecasting // Water Resource Manag. 2011.
15. Hassani H., Heravi S., Zhigljavsky A. Forecasting European industrial production with singular spectrum analysis // Int. J. Forecast. 2009. Vol. 25, No. 1. P. 103-118.
16. Patton A. J., Timmermann A. Properties of optimal forecasts under asymmetric loss and nonlinearity / 2007 – 918 с.
17. de Souza R.M. Streamflow Forecasting Using Singular Spectrum Analysis, ARIMA Model And Artificial Neural Network // The 32nd Annual International Symposium on Forecasting ISF – 2012. Boston, 24-27 June 2012. P. 33-47.
18. Кильдишев Г.С., Френкель А.А., Анализ временных рядов и прогнозирование / 1973 – 104 с.
19. Kurbatskii V.G., Sidorov D.N., Spiryaev V.A., Tomin N.V. On the Neural Network Approach for Forecasting of Nonstationary Time Series on The Basis of the Hilbert-Huang Transform // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, No. 7. P. 1405-1414.
20. Lawrance A.J., Kottegoda N. T. Stochasting modelling of riverflow time series // J. R. Stat. Soc. A. 1977. Vol. 140, No. 1. P. 1-47. 10. Fernando D.A.K., Jayawardena W.A. Generation and forecasting of monsoon rainfall data // In: Proc. of the 20th WEDC conference. Colombo, Sri Lanka, 1994
21. Broomhead D. S., King G. P. Extracting qualitative dynamics from experimental data // Physica D. 1986. Vol. 20. P. 217-236.
22. Feng Kong, Xiaojuan Wu. Time Series Forecasting Model with Error Correction by Structure Adaptive Support Vector Machine // In: International Conference on Computer Science and Software Engineering. 2008. P. 1067-1070.
23. Бідюк П.І. Системний підхід до побудови математичних моделей на основі часових рядів / Системні дослідження та інформаційні технології, №3, 2002. 114-131 с.
24. Бідюк П.І. Часові ряди: моделювання та прогнозування / Київ: ЕКМО, 2004. 144 с.

25. Пашин В.П. Функционально-стоимостный анализ конструкторско-технологических решений. - К.: РДЭНТП «Знание» УССР, 1989. - 22с.
 26. Пашін В.П. Оцінка конкурентоспроможності електронних пристроїв на стадії проектування. - К. Економічний вісник НТУУ „КПІ”, 2006. - №3. с. 252-255.
 27. Пашин В.П. Управление качеством изделий на основе функционально-стоимостного анализа. - К.: «Технология и организация производства», 1989. - №1. с. 17-19.
 28. Бідюк П.І. Аналіз часових рядів: навчальний посібник / Бідюк П.І., Романенко В.Д., Тимощук О.Л. – К: Політехніка, 2010. – 317 с.
 29. Жоголев, Е. А. Технология программирования. М.: Научный мир, 2004. 216 с.
 30. Боэм, Б. Инженерное проектирование программного обеспечения. М.: Радио и связь, 1985. 512 с.
 31. Зелковец, А. Принципы разработки программного обеспечения. М.: Мир, 1982. 368 с.
 32. Gradinaru M. Milstein's type schemes for fractional SDEs / Gradinaru M., Nourdin I. // Ann. Inst H. Poincaré Probab Statist. — V. 45. — 2009. — № 4.— PP. 1085—1098.
 33. AR-Filter Overview (mit.edu) [Електронний ресурс]: AR-Filter Overview (mit.edu) //
- Режим доступа :
- https://space.mit.edu/RADIO/CST_online/mergedProjects/3D/special_overview/special_overview_arfilterover.htm - Назва з екрану.