

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ім. Ігоря Сікорського”

ДИНАМІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ
Оптимізація систем керування

Методичні вказівки
до виконання розрахунково-графічних робіт
для студентів спеціальності
„ Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”

Рекомендовано Вченою радою інженерно-хімічного факультету

Київ
НТУУ «КПІ»

2017

Динамічна оптимізація. Оптимізація систем керування. Методичні вказівки до розрахунково-графічних робіт для студентів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» /Укл.: Ладієва Л.Р..-К.: НТУУ, “КПІ ім. Ігоря Сікорського”, 2017.-33с.

Гриф надано Вченою радою ІХФ

(Протокол № від 24 квітня 2017 р.)

Навчальне видання

ДИНАМІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Оптимізація систем керування

Методичні вказівки

до виконання розрахунково-графічних робіт

для студентів спеціальності „ Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”

Укладач:

Ладієва Леся Ростиславівна к.т.н.,доц.

Відповідальний редактор

А.І.Жученко д.т.н.,проф.

Рецензент:

А.Р.Степанюк к.т.н.,доц.

Зміст

Вступ.....	4
1. Мінімізація функції з обмеженнями типу рівності.....	5
1.1. Метод множників Лагранжа.....	5
1.2. Оптимальний статичний процес керування.....	7
2. Методи нелінійного програмування при наявності обмежень.....	9
2.1. Методи штрафних функцій.....	9
2.1.1. Основні типи штрафів.....	11
2.1.2. Метод поступової безумовної мінімізації.....	14
3. Застосування градієнтних методів в одно крокових процедурах вибору рішень	16
Список рекомендованої літератури	25
Додаток . Приклад реалізації статичної оптимізації технологічним процесом	26

ВСТУП

Мета розрахунково-графічної роботи з статичної оптимізації технологічного процесу допомогти студентам освоїти методи статичної оптимізації і застосувати знання на прикладах процесів, представлених у формалізованому вигляді. Основна увага приділяється методам і алгоритмам, що використовуються при проектуванні і аналізі функціонування технологічних об'єктів. Розглядаються методи нелінійного програмування орієнтовані на вирішення задач з обмеженнями.

Завдання до статичної оптимізації:

- сформулювати критерій та систему обмежень задачі оптимізації технологічних режимів АСК ТП;
- вибрати прийнятний рівень моделювання, побудувати цільову функцію і модель у цілому, вибрати стратегію пошуку оптимального рішення;
- вирішити задачу статичної оптимізації при наявності обмежень у формі рівностей і нерівностей, перетворити задачу умовної оптимізації в безумовну;
- застосувати до ітераційної процедури пошуку оптимального рішення один з методів нелінійного програмування, що використовують похідні;
- програмно реалізувати задачу оптимізації;
- побудувати графіки зміни критерію оптимальності від кількості ітерацій пошуку, зміни керованих технологічних параметрів, зміни керуючого впливу.

-

1. МІНІМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЇ З ОБМЕЖЕННЯМИ ТИПУ РІВНОСТІ

1.1 МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

В задачах оптимізації одним з основних обмежень є математична модель процесу. Для того щоб позбутися у явному вигляді математичної моделі процесу застосовують метод множників Лагранжа.

Для більшості системних задач необхідно розрізняти вектор управління і вектор стану. Найбільш проста одно етапна процедура прийняття рішення з обмеженнями у формі рівностей повинна мінімізувати чи максимізувати скалярний показник характеристики

$$J = F[X, U] \quad (1.1)$$

при обмеженні

$$f(X, U) = 0 \quad (1.2)$$

де X – n -мірний вектор

$$X^T = [x_1, x_2, \dots, x_n],$$

U – m -мірний вектор

$$U^T = [u_1, u_2, \dots, u_m],$$

f – n -мірна векторна функція

$$f^T(X, U) = [f_1(X, U), f_2(X, U), \dots, f_n(X, U)].$$

Рішення знаходиться наступним чином. Об'єднуємо (1.1) і (1.2) множником Лагранжа, в результаті чого отримуємо скалярну величину

$$L(X, U, \Lambda) = F(X, U) + \Lambda^T f(X, U),$$

$$\Lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

Тепер знайдемо $\mathbf{x}$ та $\mathbf{u}$, для котрих L приймає максимальне чи мінімальне значення. Для цього

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial X} &= \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} f^T(X, U) \Lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial U} &= \frac{\partial F}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial U} f^T(X, U) \Lambda = 0\end{aligned}$$

де

$$\left[\frac{\partial L}{\partial U} \right]^T = \left[\frac{\partial L}{\partial u_1}, \frac{\partial L}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial u_m} \right].$$

Таким чином, $\frac{\partial L}{\partial U}$ можна інтерпретувати як градієнт L по u , що зазвичай позначається $\nabla_u L$. Також

$$\frac{\partial}{\partial X} f^T(X, U) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Для того щоб величина J досягла екстремуму, необхідно, щоб не тільки

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial U} = 0,$$

але також, щоб друга варіація L була більше нуля у випадку мінімуму чи менше нуля у випадку максимуму. Для того щоб показати, що означає це обмеження (використовуючи необхідні умови, котрі необхідно виконати для того, щоб $J(x, u)$ мала екстремум), знайдемо другу варіацію $L(x, u, \lambda)$. Перша варіація $L(x, u, \lambda)$ дорівнює

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \delta X + \left(\frac{\partial L}{\partial u} \right)^T \delta U,$$

що представляє собою лінійну частину приросту

$$\Delta L = L[X + \delta X, U + \delta U] - L[X, U]. \quad (1.4)$$

Друга варіація L дорівнює

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \delta X^T \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial L}{\partial X} \right] \delta X + \left[\frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \right] \delta U \right\} + \frac{1}{2} \delta U^T \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \right]^T \delta X + \left[\frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial U} \right] \delta U \right\}. \quad (1.5)$$

У компактній формі отримаємо

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \delta X^T \delta U^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial L}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \\ \left[\frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \right]^T & \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta U \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

1.2. ОПТИМАЛЬНИЙ СТАТИЧНИЙ ПРОЦЕС КЕРУВАННЯ

Застосуємо представлену в цьому розділі методологію для проблеми оптимального статичного процесу керування. Статична модель процесу має вигляд :

$$g(x, u, z) = 0. \quad (1.7)$$

Задача керування полягає в тому, щоб для відповідних збурюючих впливів z визначити також параметри керування u і стану x , щоб функція якості $f(x, u)$ з урахуванням (1.7) могла бути мінімізована. Це є постановкою задачі, яка точно відповідає загальній постановці питання цього розділу.

Особливо важливий випадок оптимального статичного процесу керування виникає при розгляді лінійної моделі системи і квадратичної функції якості, тобто

$$\tilde{A}X + \tilde{B}U + \tilde{Z} = 0, \quad (1.8)$$

$$f(X, U) = \frac{1}{2} \|X\|_Q^2 + \frac{1}{2} \|U\|_R^2, \quad (1.9)$$

де матриця $\tilde{A}$ припускається регулярною для того, щоб забезпечити однозначне обчислення параметрів стану; вагові матриці Q, R припускаються додатно визначеними. З урахуванням $B = \tilde{A}^{-1} \tilde{B}$ і $z = \tilde{A}^{-1} \tilde{Z}$, (1.8) описується наступним чином:

$$X + BU + z = 0. \quad (1.10)$$

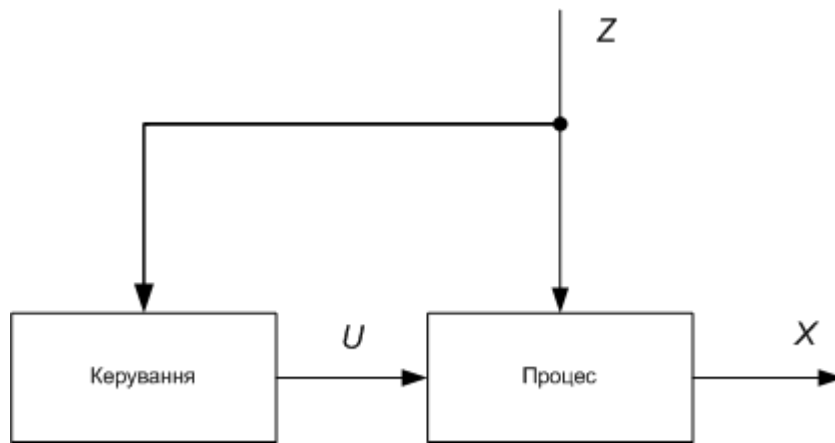


Рис.1.1. Статичний оптимальний процес керування

Для розв'язку цієї лінійно-квадратичної задачі можна скористатися методами цього розділу. Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(X, U, \Lambda) = \frac{1}{2} (X^T Q X + U^T R U) + \lambda^T (X + BU + z) \quad (1.11)$$

У підсумку отримуємо необхідні умови першого порядку:

$$L_x(X^*, U^*, \Lambda^*) = QX^* + \Lambda^* = 0, \quad (1.12)$$

$$L_u(X^*, U^*, \Lambda^*) = RU^* + B^T \Lambda^* = 0, \quad (1.13)$$

$$L_\lambda(X^*, U^*, \Lambda^*) = X^* + BU^* + z = 0. \quad (1.14)$$

При розв'язку цієї лінійної системи рівнянь обчислюється оптимальний вектор керування:

$$U^* = -(R + B^T Q B)^{-1} B^T Q z, \quad (1.15)$$

як функція, що залежить від вектора збурення z . При використанні достатніх умов можна упевнитись в тому, що при u^* мова йде про мінімум. Гранична ситуація $R \rightarrow 0$ (великі витрати на керування не враховуються) цікавим чином призводить до результату, оскільки матриця $B^T Q B$ інвертована. З іншого боку, гранична ситуація $Q \rightarrow 0$ призводить, як і треба було чекати, до безглузлого (з технічної точки зору) нульового керування $u^* = 0$.

2. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ

Ряд інженерних задач пов'язаний з оптимізацією при наявності обмежень на змінні. Такі обмеження суттєво зменшують розміри припустимої області, в якій проводиться пошук оптимуму. Універсальних алгоритмів рішень нелінійних задач не існує, і це в першу чергу пов'язане з виключним різноманіттям у поведінці нелінійних функцій. Найбільш загальний результат, що має відношення до задач нелінійного програмування представлений умовами Куна-Таккера.

При рішенні задач нелінійного програмування з обмеженнями зустрічаються більші труднощі, ніж при рішенні задач безумовної оптимізації за тієї причини, що установлені вище критерії оптимальності не можна використовувати при наявності обмежень. Для рішення задачі нелінійного програмування, що має обмеження, часто застосовують один з наступних підходів:

1) перебудова задачі нелінійного програмування з обмеженнями в еквівалентну їй послідовність задач безумовної оптимізації за допомогою штрафних функцій;

2) використання методів лінійного програмування для рішення задач нелінійного програмування з застосуванням процедури послідовної лінійної апроксимації [12].

3) використання методу ковзного допуску, що дозволяє покращити значення цільової функції [13].

2.1 МЕТОДИ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ

Загальна задача нелінійного програмування полягає у пошуку екстремуму цільової функції при заданих обмеженнях у вигляді рівностей і (або) нерівностей. Обмеження можуть бути лінійними і (або) нелінійними. Формально задача нелінійного програмування може бути сформульована таким чином:

мінімізувати

$$f(X) \rightarrow \min_{X \in E^n} \quad (2.1)$$

при m лінійних і (або) нелінійних обмеженнях у вигляді рівностей

$$h_j(X) \leq 0, j = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

та (p-m) лінійних і (або) нелінійних обмеженнях у вигляді нерівностей

$$g_j(X) \geq 0, j = m + 1, \dots, p \quad (2.3)$$

де $E^n - n$ - мірний евклідовий простір.

В основу методів штрафних функцій в області нелінійного програмування покладена ідея перебудови загальної нелінійної задачі (2.1)-(2.3) в послідовність задач без обмежень шляхом додавання до цільовій функції однієї або кількох функцій, які встановлюють обмеження для того, щоб обмеження, як такі, в задачі оптимізації не фігурували. В цьому випадку мінімізація може здійснюватись за допомогою більш простих алгоритмів. При використанні методів штрафних функцій отримується оптимальний ефект за рахунок постійного компромісу між необхідністю задоволення обмежень і процесом мінімізації $f(x)$, який досягається шляхом присвоєння належної ваги цільової функції і функціям, які визначають обмеження. Методи штрафних функцій можна поділити на 2 класи: параметричні і непараметричні методи. Параметричні методи характеризуються наявністю одного чи кількох певним чином підібраних параметрів, які входять у склад штрафної функції в якості вагових коефіцієнтів. Параметричні методи розпадаються на 3 категорії: методи внутрішньої точки; методи зовнішньої точки; комбіновані методи. При використанні методів внутрішньої точки рівень цільової функції утримується вдалині від межі припустимої області (тобто точка $X^{(k)}$ постійно знаходиться всередині припустимої області) за допомогою штрафної функції. Методи зовнішньої точки, навпаки, генерують послідовність точок, які виходять за межі припустимої області, але дають в межах припустимі рішення. Штрафна функція не дозволяє вектору X надто відходити від межі припустимої області. Формально перебудова задачі, яку представлено співвідношеннями (4.1)-(4.3), в задачу мінімізації обмежень проводиться шляхом переходу до задачі мінімізації:

$$P(X^{(k)}, \rho^{(k)}) = f(X^{(k)}) + \sum_{i=1}^m \rho_i^{(k)} H(h_i(X^{(k)})) + \sum_{i=m+1}^p \rho_i^{(k)} G(g_i(X^{(k)})) \quad (2.4)$$

де $P(X^{(k)}, \rho^{(k)})$ - узагальнена приєднана функція чи штрафна функція; $\rho_i^{(k)} \geq 0$ - вагові коефіцієнти; K - кількість завершених етапів обчислювального оптимізаційного процесу. При будь-якому виборі функціоналів $H(h_i(X))$ і $G(g_i(X))$ потрібно, щоб:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=m+1}^p \rho_i^{(k)} G(g_i(X^{(k)})) &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \rho_i^{(k)} H(h_i(X^{(k)})) &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |p(X^{(k)}, \rho^{(k)}) - f(X^{(k)})| &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

В міру розвитку процесу оптимізаційного пошуку вплив входячих в $P(X^{(k)}, \rho^{(k)})$ функцій обмежень на значення даної приєднаної функції постійно слабне, а в межі повністю зникає. Значить, екстремум $P(X)$ співпадає з екстремумом $f(X)$.

2.1.1 ОСНОВНІ ТИПИ ШТРАФІВ

Для обліку обмежень-рівностей часто використовують квадратичний штраф (Рис.2.1):

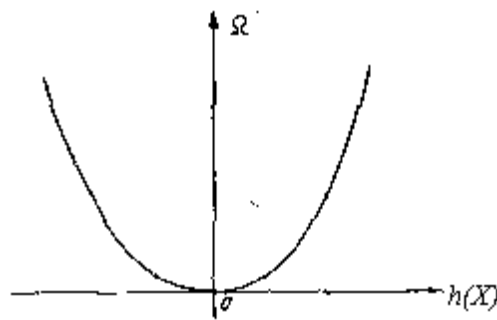


Рис.2.1. Квадратичний штраф

При мінімізації цей штраф запобігає відхиленню значення $h(X)$ від нуля. На Рис.2.2 графічно показана штрафна функція, отримана шляхом додавання до $f(X)$ квадратичним штрафом (з ваговим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці).

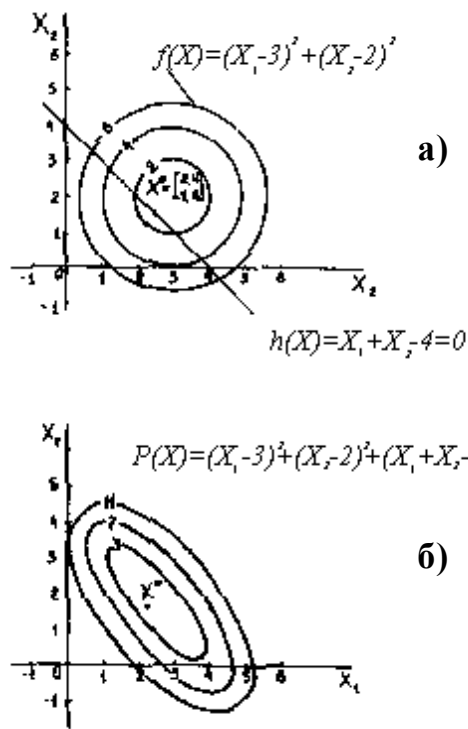


Рис.2.2. Лінії рівня цільової а) та штрафної функції б)

При врахуванні обмежень-нерівностей використовують різні типи штрафів. Простішим серед них є нескінченний бар'єр, показаний на рис.2.3.

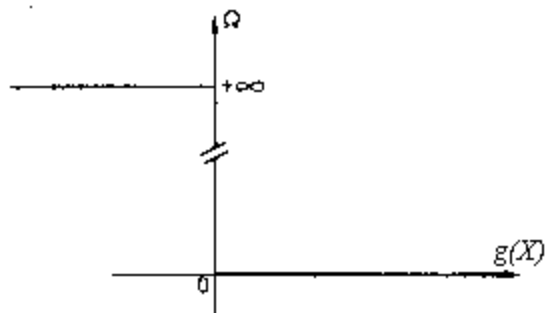


Рис.2.3. Нескінченний штраф

Відповідний вираз приймає нескінченно великі значення в неприпустимих точках і нульове значення - в припустимих. У даному випадку штрафна функція $P(X, \rho)$ - розривна на межі припустимої області. В машинній

реалізації нескінченних штрафів використовують велике додатне число. Наприклад, цей штраф використовується у формулі

$$\Omega = 10^{20} \sum_{j \in g} |g_j(X)| \quad (2.6)$$

де g - множина індексів порушень обмежень, $g_j(X) < 0$ при $j \in g$. Іншим широко використовуваним типом штрафу є логарифмічний центр (рис.2.4).

$$\Omega = -\rho \ln [g(X)]_- \quad (2.7)$$

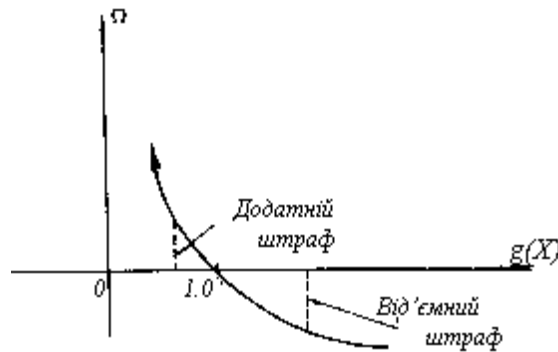


Рис.2.4. Логарифмічний штраф

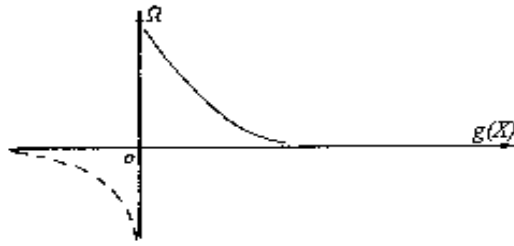
Цей штраф додатний при всіх X таких, що $0 < g(X) < 1$ і від'ємний при $g(X) > 1$. Логарифмічний штраф - бар'єрна функція, не визначена в неприпустимих точках (тобто для X таких, що $g(X) < 0$). Ітераційний процес починається з припустимої точки початкової при додатному значенні ρ . Після рішення кожної підзадачі безумовної мінімізації параметр ρ зменшується і в межах прагне до нуля. Штраф, заданий оберненою функцією рис.2.5.

$$\Omega = \rho \left[\frac{1}{g(X)} \right] \quad (2.8)$$

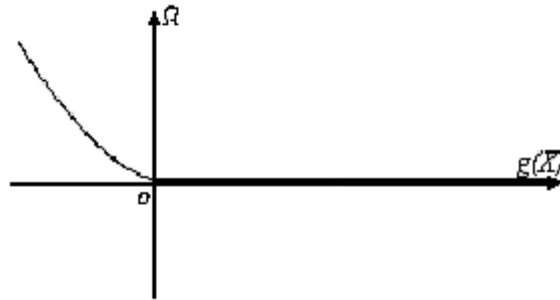
Штраф, заданий оберненою функцією, не має від'ємних значень в припустимій області. Цей штраф є бар'єром; можливі труднощі, які пов'язані з появою неприпустимих точок.

Для обмежень типу нерівностей також застосовують зовнішній штраф типу квадрату зрізки (рис. 2.5).

$$\Omega = \rho [g(X)]_+^2$$



а)



б)

Рис.2.5. Штраф, заданий оберненою функцією а) і штраф типу квадрата зрізки б)

Штраф типу квадрата зрізки зручний тим, що функція $P(x, \rho)$ визначена і неперервна усюди. Обчислення проводиться з додатними ρ ; після рішення чергової підзадачі безумовної оптимізації ρ збільшується.

2.1.2 МЕТОД ПОСТУПОВОЇ БЕЗУМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ

Алгоритм методу поступової безумовної мінімізації (МПБМ), розвинутий Фіакко і Мак-Корміком, який застосовується для рішення задачі нелінійного програмування вигляду (2.1)-(2.3), в якій $f(X)$ і $g(X)$ ($i=m+1, \dots, \rho$) можуть бути нелінійними функціями незалежних змінних, а $h_i(X)$ ($i=1, \dots, m$) повинні бути лінійними функціями незалежних змінних. При таких умовах гарантується збіжність послідовності проміжних рішень до оптимального рішення задачі нелінійного програмування. Метод МПБМ в основному приводиться до рішення деякої послідовності задач без обмежень, причому в межах знаходиться мінімум початкової вихідної задачі нелінійного програмування. В варіанті метода 1967 р. задачу перетворюють в послідовність задач без обмежень, використовуючи штраф, заданий оберненою функцією і шляхом побудови P - функції вигляду

$$P(X^{(k)}, r^{(k)}) = f(X^{(k)}) + (r^{(k)})^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^m h_i^2(X^{(k)}) + r^{(k)} \sum_{i=m+1}^p \frac{1}{g_i(X^{(k)})} \quad (2.10)$$

де значення вагових коефіцієнтів r додатні і утворюють монотонно зменшуючу послідовність $\{r \mid r^{(0)} > r^{(1)} > \dots > 0\}$.

У варіанті МПБМ 1970 р. застосовується логарифмічний штраф

$$P(X^{(k)}, r^{(k)}) = f(X^{(k)}) + \frac{1}{r^{(k)}} \sum_{i=1}^m h_i^2(X^{(k)}) - r^{(k)} \sum_{i=m+1}^p \ln g_i(X^{(k)}) \quad (2.11)$$

Як і у варіанті (2.10) тут використовується квадратичний штраф для урахування обмежень-рівностей. Процедура мінімізації функцій (2.10) і (2.11) починається з внутрішньої (або граничної) точки, тобто з точки $X^{(0)}$, в якій всі граничні умови у вигляді нерівностей задоволені. Після визначення $r^{(0)}$ точка $X^{(1)}$ розраховується мінімізацією $P(X, r^{(0)})$. Потім визначається $r^{(1)}$ і знаходиться $X^{(2)}$ і т.д. Швидкість збіжності залежить від початкового вибору $r^{(0)}$ і від способу редуцирування даного параметру. Одним з способів вибору початкового значення $r^{(0)}$, який було запропоновано Фіакко і Мак-Корміком, є $r^{(0)}=1$. При цьому вказано, що ефективність алгоритму не зміниться значно, якщо послідовність $r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(k)}$ індукуювати простим співвідношенням

$$r^{(k)} = \frac{r^{(k-1)}}{C}$$

де $C > 1$ є константою (завжди вважають $C=4$).

3. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАДІЄНТНИХ МЕТОДІВ В ОДНОКРОКОВИХ ПРОЦЕДУРАХ ВИБОРУ РІШЕНЬ

Розглянемо задачу мінімізації функції вартості

$$J = F(X, U) \quad (3.1)$$

шляхом підбору значення вектора u при обмеженні у формі наступної рівності:

$$f(X, U) = 0 \quad (3.2)$$

Тут X – вектор стану, f – n -вектор, U – m -вектор, а F – скалярна функція. Сформульована проблема є задачею нелінійного програмування чи задачею однокрокового рішення. Можна ввести

$$L(X, \lambda, U) = F(X, U) + \lambda^T f(X, U) \quad (3.3)$$

Розрахуємо та прирівняємо нульовому вектору градієнт виразу (3.3) відносно вектора U :

$$\frac{\partial L}{\partial U} = \frac{\partial F(X, U)}{\partial U} + \left[\frac{\partial f^T(X, U)}{\partial U} \right] \lambda = 0 \quad (3.4)$$

Таким самим чином можна отримати співвідношення

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial F(X, U)}{\partial X} + \frac{\partial f^T(X, U)}{\partial X} \lambda = 0 \quad (3.5)$$

Останні дві рівності є першою необхідною умовою мінімуму функції J. В доповнення до цього повинна виконуватись також і наступна умова:

матриця

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial L}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \\ \left[\frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \right]^T & \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial U} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

повинна бути невід’ємно визначеною впродовж “траєкторії” $f(X,U)=0$. В загальному випадку взагалі не вдається розв’язати систему нелінійних алгебраїчних рівнянь. Так як, при $f(X,U)=0$ маємо $J=L$, то поклавши $\partial L / \partial X = 0$, приблизно одержимо

$$\Delta J = \left[\frac{\partial L}{\partial U} \right]^T \Delta U \quad (3.7)$$

Якщо зараз необхідно забезпечити найбільшу зміну ΔJ значення функції J, то можна розрахувати градієнт $\partial L / \partial U$ та нове значення J знайти після введення приросту ΔU , напрямом якого протилежний одержаному градієнту:

$$\Delta U = -K \left[\frac{\partial L}{\partial U} \right] \quad (3.8)$$

В результаті маємо, що зміна значення функції визначається виразом

$$\Delta J = -K \left[\frac{\partial L}{\partial U} \right]^T \left[\frac{\partial L}{\partial U} \right] \quad (3.9)$$

Ця процедура розрахунку починається з неоптимального вектора керування U^N . Для цього вектора керування треба знайти значення x^N вектора X , яке задовольняє рівності, тобто

$$f(X^N, U^N) = 0 \quad (3.10)$$

Далі з (3.5) для забезпечення виконання умови $\partial J / \partial x^N = 0$ знаходимо значення невизначеного множника

$$\lambda^N = - \left[\frac{\partial f^T(X^N, U^N)}{\partial X^N} \right]^{-1} \frac{\partial F(X^N, U^N)}{\partial X^N} \quad (3.11)$$

Нарешті, на основі (3.3) розрахуємо градієнт

$$\frac{\partial L}{\partial U^N} = \frac{\partial f(X^N, U^N)}{\partial U^N} + \left[\frac{\partial f^T(X^N, U^N)}{\partial X^N} \right] \lambda^N \quad (3.12)$$

Цей вектор буде нульовий тільки в тому випадку, коли виконується відмічена вище умова мінімуму. Одержане значення градієнта зараз дозволяє знайти за формулою (3.8) такий приріст вектора U , при якому забезпечується найшвидший спуск, а саме

$$\Delta U^N = -K \left[\frac{\partial L(X^N, \lambda^N, U^N)}{\partial U^N} \right] \quad (3.13)$$

Нове значення вектора U , таким чином, визначається за формулою

$$U^{N+1} = U^N + \Delta U^N \quad (3.14)$$

В свою чергу дане значення дозволяє знайти нові значення X^{N+1} , λ^{N+1} векторів X , λ і так далі. Ці розрахунки повторюються до тих пір, доки зміни значення функції вартості

$$\Delta J^N = -K \left[\frac{\partial L(X^N, \lambda^N, U^N)}{\partial U^N} \right]^T \left[\frac{\partial L(X^N, \lambda^N, U^N)}{\partial U^N} \right] \quad (3.15)$$

на двох сусідніх кроках даного ітераційного процесу не буде менше деякої заданої малої величини.

Приклад 3.1

З метою ілюстрації послідовності розрахунків при використанні даного градієнтного методу розглянемо задачу мінімізації функції $J=X^2+U^2$ при обмеженні у формі рівності $XU=1$. Ця задача може бути легко вирішена аналітично. Вираз (3.3) тут має вигляд $L=X^2+U^2+\lambda(XU-1)$, а рівняння $\partial L/\partial U=\partial L/\partial X=0$ призводять до рішення $U=\pm 1$, $X=\pm 1$, $\lambda=-2$, $J_{\min}=2$. Припустимо, що рішення цієї задачі невідоме. Виберемо початкове значення $U=U^0$. Згадані вище рівняння з (3.10) по (3.15) для даного прикладу приймають наступний вигляд

$$f(X^N, U^N) = 0 = X^N U^N - 1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2X + \lambda U = 0; \quad \lambda^N = - \left[\frac{\partial f^T}{\partial X^N} \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial X^N} = - \frac{2X^N}{U^N},$$

$$\frac{\partial L}{\partial U^N} = \frac{\partial F}{\partial U^N} + \left[\frac{\partial f^T}{\partial U^N} \right] \lambda^N = 2U^N + X^N \lambda^N,$$

$$\Delta U^N = -K \frac{\partial L}{\partial U^N} = -K(2U^N + X^N \lambda^N) = -2K \left[U^N - \frac{1}{(U^N)^3} \right],$$

$$\Delta J^N = -K \left[\frac{\partial L}{\partial U^N} \right]^T \left[\frac{\partial L}{\partial U^N} \right] = -K(2U^N + X^N \lambda^N)^2,$$

$$U^{N+1} = U^N - \Delta U^N$$

Таким чином для даної задачі послідовні значення керування одержуються шляхом рішення різницевого рівняння

$$U^{N+1} = U^N - 2K \left[U^N - \frac{1}{(U^N)^3} \right]$$

Послідовні етапи обчислень при використанні приведеної вище градієнтної процедури “першого порядку” полягають в наступному:

1. Обчислити чергове значення вектора U^i .
2. З рівняння $f(X^i, U^i)=0$ знаходимо X^i .
3. Вектор λ^i визначаємо за формулою

$$\lambda^i = - \left[\frac{\partial f^T(X^i, U^i)}{\partial X^i} \right]^{-1} \frac{\partial F(X^i, U^i)}{\partial X^i}$$

4. Знаходимо похідні

$$\frac{\partial L(X^i, U^i, \lambda^i)}{\partial U^i} = \frac{\partial F(X^i, U^i)}{\partial U^i} + \frac{\partial f^T(X^i, U^i)}{\partial X^i} \lambda^i$$

5. Обчислюємо чергове значення вектора

$$U^{i+1} = U^{(i)} - K^i \left[\frac{\partial L(X^i, U^i, \lambda^i)}{\partial U^i} \right]$$

6. Ця послідовність обчислень повторюється, якщо значення керування U змінюється від ітерації до ітерації і обчислення припиняються, коли значення U практично не змінюється.

У деяких випадках виявляється можливим отримати явне рівняння (3.2) відносно n -вектора X , представивши тим самим його компоненти у вигляді функції від m – мірного вектора U . Підставивши знайдене рівняння у (3.1), прийдемо до виразу скалярного показника якості, що має тільки m компонент вектора керування. У цьому випадку немає необхідності звертатися до методу множників Лагранжу. Але такий спосіб часто є нереалізованим.

Розглянемо ще один підхід, відомий як метод проекції градієнта. В околі точки, що визначається деякими номінальними значеннями $\bar{X}$ і $\bar{U}$ векторів X і U , для функції (3.2) можна ввести лінійну апроксимацію і записати

$$f(X, U) \approx f(\bar{X}, \bar{U}) + \left[\frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right] (X - \bar{X}) + \left[\frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right] (U - \bar{U}) = 0 \quad (3.16)$$

Якщо припустити, що умова (3.2) виконується при $X = \bar{X}$ і $U = \bar{U}$, то складову $f(\bar{X}, \bar{U})$ в останньому виразі можна опустити. Це припущення приводить до наступної системи лінійних рівнянь відносно $\Delta \bar{X}$ і $\Delta \bar{U}$:

$$\left[\frac{\partial f(X, U)}{\partial \bar{X}} \right] \Delta \bar{X} + \left[\frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right] \Delta \bar{U} = 0 \quad (3.17)$$

де $\Delta \bar{X} = X - \bar{X}$, $\Delta \bar{U} = U - \bar{U}$. Цю систему можна вирішити відносно вектора приросту $\Delta \bar{X}$, оскільки матриця $\partial f / \partial X$ повинна мати обернену. Отримані рішення можна підставити у (3.1) і знайти градієнт функції вартості F чи J при указаних обмеженнях. У геометричній інтерпретації цей спосіб зведеться до обчислень проекції градієнта, обчисленого без урахування обмежень на m -мірному просторі значень вектора керування, що визначається як перетин n гіперплощин (3.17).

$$\Delta J = \left[\frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right]^T \Delta \bar{X} + \left[\frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right]^T \Delta \bar{U} \quad (3.18)$$

На підставі (3.17) цей вираз можна переписати:

$$\Delta J = \left\{ - \left[\frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right]^T \left[\frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right]^{-1} \left[\frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right] + \left[\frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right]^T \right\} \Delta \bar{U} \quad (3.19)$$

Матриці, що заключені у квадратні дужки у формулі (3.19), співпадають з відповідними матрицями в (3.4) і (3.5), що ілюструє еквівалентність двох розглянутих підходів.

При застосуванні метода градієнта другого порядку чи метода Ньютона, приріст вектора керування визначається співвідношенням

$$\Delta U^{-N} = - \left[\frac{d^2 F(U^N)}{(dU^N)^2} \right]^{-1} \frac{dF(U^N)}{dU^N} \quad (3.20)$$

Спряжений метод градієнту, що описаний вище, зберігає кращі якості методів градієнту першого і другого порядку і зменшує їх недоліки. Замість обчислення матриці $\left[\frac{d^2 F}{dU^2} \right]^{-1}$ він передбачає побудову послідовності векторів напрямків $S^1, S^2, \dots$, котрі є спряженими з ваговою матрицею $\frac{\partial^2 F(U)}{(\partial U)^2}$, тобто

$$(S^i)^T \left[\frac{d^2 F(U^i)}{(dU^i)^2} \right] S^j = 0, \quad i \neq j \quad (3.21)$$

Потім реалізується пошук вздовж кожного вектора S^N з метою знайти оптимальну довжину кроку у тому напрямку, в якому повинен продовжуватись рух. Таким чином, використовується співвідношення

$$U^{N+1} = U^N - K^N S^N \quad (3.22)$$

де K^N – додатна скалярна величина, що вибирається оптимально, таким чином щоб

$$K^N = \min_{K_n} F(U^N - K^N S^N) \quad (3.23)$$

В результаті реалізується оптимальний градієнтний метод. На практиці обчислення оптимального значення для скаляра K^N може виявитися складним. У цьому випадку можна виділити декілька передбачуваних значень для K^N в околі значення цієї величини на попередньому кроку і вибрати з них таке значення, котре забезпечує мінімум (3.23). Обчислення реалізується таким чином:

1. Вибираємо значення U^i .
2. Визначаємо $S^i = \frac{\partial F(U^i)}{\partial U^i}$
3. Знаходимо K^i , при якому функція $F(U^i - K^i S^i)$ має мінімальне значення.
4. Обчислюємо нове значення $U^{i+1} = U^i - K^i S^i$.
5. Вибираємо новий напрямок руху вздовж вектора

$$S^{i+1} = -\frac{\partial F(U^{i+1})}{\partial U^{i+1}} + S^i \frac{\left(\frac{\partial F(U^{i+1})}{\partial U^{i+1}} \right)^T \left(\frac{\partial F(U^{i+1})}{\partial U^{i+1}} \right)}{\left(\frac{\partial F(U^i)}{\partial U^i} \right)^T \left(\frac{\partial F(U^i)}{\partial U^i} \right)}$$

6. Повторюємо обчислення на новому кроці ітераційної процедури, починаючи з пункту 3, доки не виконаються умови збіжності алгоритму.

Розглянемо вирішення задачі мінімізації функції (3.1) при обмеженні (3.2) і додатковому обмеженні у формі q нерівностей $g(X)=0$, де $q \leq n-1$. Скориставшись методом множників Лагранжу, запишемо

$$L(X, \lambda, \Gamma, U) = F(X, U) + \lambda^T f(X, U) + \Gamma^T g(X)$$

Записавши умови $\partial L/\partial U=0$ і $\partial L/\partial X=0$, отримаємо нелінійні алгебраїчні вектори рівняння, котрі визначають необхідні умови мінімуму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(X,U)}{\partial U} + \left[\frac{\partial f(X,U)}{\partial U} \right]^T \lambda &= 0, & f(X,U) &= 0 \\ \frac{\partial F(X,U)}{\partial X} + \left[\frac{\partial f(X,U)}{\partial X} \right]^T \lambda + \left[\frac{\partial g(X)}{\partial X} \right]^T \Gamma &= 0; & g(X) &= 0 \end{aligned}$$

Використати градієнтну процедуру тут неможливо тому, що хоча при будь-якому заданому U можна знайти таке значення вектора X , котре буде задовольняти рівнянню $f(X,U)=0$, але це значення, як правило, не забезпечить виконання умови $g(X) \geq 0$.

Щоб уникнути цих труднощів, можна застосувати метод штрафних функцій.

Відповідно методу штрафних функцій, обмеження у формі рівності на значення вектора стану може бути введене у вихідну функцію вартості за допомогою квадратичного штрафу

$$J = F(X,U) + \lambda^T f(X,U) + g^T(X)Ng(X)$$

де N – додатно визначена діагональна вагова матриця.

Список рекомендованої літератури

1. Цирлин А.М. Оптимальное управление технологическими процессами. - М.: Энергоатомиздат, 1986 - 400с.
2. Ладієва Л.Р. Оптимальне керування системами.: Навчальний посібник. -К.НМЦ ВО, 2000- 187с.
3. Ладієва Л.Р. Оптимізація технологічних процесів: Навчальний посібник. – К: ІВЦ «видавництво «Політехніка»», 2004. – 192с
4. Остапенко Ю.О., Ладиева Л.Р. Оптимизация технологических процессов. Алгоритмы и программы (учебное пособие) - Киев: УМК ВО, 1988.- 191с.
5. Жученко А.І., Ладієва Л.Р., Дубік Р.М. Нелінійне програмування з використанням MATLAB.- Київ, НТУУ «КПІ», 2007.- 140 с.
6. Ладієва Л.Р. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт «Оптимізація систем керування».- Електронна публікація НТУУ «КПІ» ІХФ №А 12/12-85
7. Ладієва Л.Р. Методичні вказівки до виконання практичних робіт «Оптимізація систем керування».- Електронна публікація НТУУ «КПІ» ІХФ№А 04/14-21.
8. Ладієва Л.Р., Корнієнко Б.Я. Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Оптимізація технологічних процесів і систем керування». - К.: НТУУ, „КПІ“, 2000. - 56с.
9. Таха Х. Введение в исследование операций. В 2-х книгах - М.: МИР, 1985.-479с.
- 10.Реклейтис Г., Рейвиндран А., Регсдел К. Оптимизация в технике в 2-х книгах. - М.: МИР, 1986 - 666с.
11. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - М.: МИР, 1975.-532с.
12. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. - М.: Радио и связь, 1988.- 176с.

Приклад реалізації статичної оптимізації технологічним процесом

Оптимізація плівкового апарата роторного типу в режимі випаровування

Найбільш часто критерієм, що зустрічається для керування випарними апаратами є собівартість процесу випаровування, що пояснюється великою питомою вагою енерговитрат вартості готового продукту. При чому якщо процес розглядається як лінійна система, в якості критерію можна вибрати квадратичний критерій якості

$$I(X, U) = \frac{1}{2} U^T R U + \frac{1}{2} X^T Q X, \quad (1)$$

де R , Q – додатно визначені матриці вагових коефіцієнтів.

Друга складова функції якості може враховувати обмеження на якість вихідного продукту.

Але вибір критерію оптимальності диктується інтересами всієї технологічної лінії виробництва. Прикладом використання технологічного критерію є випадок, коли плівковий апарат роторного типу (ПАРТ) представляє “вузьке” місце в виробництві. Задача збільшення продуктивності апарату вирішується шляхом забезпечення умов, при яких в плівкових апаратах роторного типа можлива передача більшої кількості тепла через поверхню нагрівання від гріючої пари до плівки рідини.

Тому в якості критерію керування ПАРТ, коли це в інтересах оптимального керування процесами всієї технологічної лінії виробництва, доцільно вибрати технологічний критерій – продуктивність при заданій концентрації абсолютно сухих речовин у розчині вихідного продукту

$$I = S_K \rightarrow \max \quad (2)$$

при $b_K = b_{K30}$

де S'_K - витрати рідини на вихід з апарату, кг/с

b_K - концентрація кінцевого продукту, кг/кг.

Керуючими впливами вибрано число обертів ротора n і витрати охолоджуючої води G_b на конденсатор. Вибір числа обертів ротора пояснюється намаганням ефективно використовувати плівкові апарати роторного типу за рахунок забезпечення найкращих умов теплообміну в ПАРТ, що досягається при зануренні лопатей ротора у шар рідини. Збільшення числа обертів ротора викликає значну турбулізацію плівки рідини. Границі зміни швидкості обертання ротора вибрані 5,83-25 об/с. На витрати охолоджуючої води також накладені обмеження, що пов'язані з забезпеченням нормального функціонування ПАРТ в режимі випаровування з пропускною здатністю обладнання.

З урахуванням обмежень, що накладаються на керуючі впливами і пов'язаних з ефективним використанням і можливостями технологічного обладнання, задача оптимізації технологічного режиму роботи ПАРТ може бути представлена наступним чином:

$$I = S_K \rightarrow \max$$

$$b_K = b_{K3\partial}, \quad (3)$$

$$n_{\min} \leq n \leq n_{\max}, \quad G_{b\min} \leq G_b \leq G_{b\max}.$$

Визначення оптимальних технологічних режимів роботи ПАРТ ґрунтується на рівняннях математичної моделі статичного процесу випаровування.

Рівняння теплового балансу парової рубашки має вигляд

$$G_{II} i''_{II} - i'_K \rhd \alpha_{II} F_{CT.H} (\Theta_{II} - \Theta_{CT.K}) \rhd 0 \quad (4)$$

де $G_{II}, i''_{II}, \Theta_{II}$ - відповідно витрати гріючої пари, її ентальпія і температура, α_{II} - коефіцієнт тепловіддачі від гріючої пари до стінки корпусу апарату, $F_{CT.H}, \Theta_{CT.K}$ - відповідно площа зовнішньої поверхні і температура стінки корпусу.

Оскільки товщина стінки корпусу порівняна з товщиною плівки рідини, температура стінки і її теплоємність вважалися однаковими для будь-якої точки об'єму стінки і рівняння теплового балансу стінки представлена як

$$\alpha_{II} F_{CT.H} (\Theta_{II} - \Theta_{CT.K}) \rhd \alpha_{III} F_{CT.BH} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{III}) \rhd 0 \quad (5)$$

де $\alpha_{III}, \Theta_{III}$ - коефіцієнт тепловіддачі від стінки корпусу до плівки і температура плівки, $F_{CT.BH}$ - внутрішня поверхня стінки корпусу.

В рівнянні теплового балансу для плівки рідини, крім тепла, переданого від гріючої пари, враховувалось тепло підведене за рахунок

енергії дисипації, котра залежить від потужності, що витрачається на перемішування

$$S_0 c_0 \Theta_0 + \alpha_{\text{ПЛ}} F_{\text{СТ.ВН}} (\Theta_{\text{СТ.К}} - \Theta_{\text{ПЛ}}) + LN - Wr_{\text{П}} - S_K c_K \Theta_{\text{ПЛ}} = 0 \quad (6)$$

де S_0, c_0, Θ_0 – відповідно витрати вихідної рідини, її питома теплоємність і температура; L - розмірний коефіцієнт; $W, r_{\text{П}}$ - кількість вологи, що випаровується і схована теплота пароутворення, S_K, c_K - витрати рідини на виході з апарату і питома теплоємність.

Рівняння теплового балансу конденсатора представлені

$$Wr_{\text{П}} - K_T F_K (\Theta_2 - \Theta_{b_2}) = 0, \quad (7)$$

$$K_T F_K (\Theta_2 - \Theta_{b_2}) + G_b c_b (\Theta_{b_1} - \Theta_{b_2}) = 0,$$

де K_T, F_K – коефіцієнт теплопередачі від вторинної пари до охолоджуючої води і поверхня теплообміну; Θ_2 - температура вторинної пари; $\Theta_{b_1}, \Theta_{b_2}$ – температура охолоджуючої води на вході і виході з конденсатора, G_b, c_b – витрати охолоджуючої води і її теплоємність.

Рівняння матеріального балансу по абсолютно сухій речовині має вигляд

$$S_0 b_0 - S_K b_K = 0 \quad (8)$$

де $S_K = S_0 - W$.

Для перетворення задачі умовної оптимізації у безумовну введена функція

$$\begin{aligned} L = & -S_K + \lambda_1 [F_{\text{П}} - i_K] + \lambda_2 [\alpha_{\text{П}} F_{\text{СТ.ВН}} (\Theta_{\text{СТ.К}} - \Theta_{\text{ПЛ}}) + LN - \\ & - \alpha_{\text{ПЛ}} F_{\text{СТ.ВН}} (\Theta_{\text{СТ.К}} - \Theta_{\text{ПЛ}})] + \lambda_3 [S_0 c_0 \Theta_0 + \alpha_{\text{ПЛ}} F_{\text{СТ.ВН}} (\Theta_{\text{СТ.К}} - \Theta_{\text{ПЛ}}) + LN - \\ & - \beta F_M (\zeta_1 \Theta_{\text{ПЛ}} - \zeta_2 \Theta_2) r_{\text{П}} - S_K c_K \Theta_{\text{ПЛ}}] + \lambda_4 [\beta F_M (\zeta_1 \Theta_{\text{ПЛ}} - \zeta_2 \Theta_2) r_{\text{П}} - G_b c_b (\Theta_{b_2} - \Theta_{b_1})] + \\ & + \lambda_5 [S_0 b_0 - S_K b_K] + \frac{1}{r} (b_K - b_{K30})^2 + r \left(\frac{1}{n - n_{\min}} + \frac{1}{n_{\max} - n} \right) + r \left(\frac{1}{G_b - G_{b\min}} + \frac{1}{G_{b\max} - G_b} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

де λ - множники Лагранжа, r – вагові коефіцієнти.

Задача оптимізації (2) представлена як задача мінімізації. За допомогою штрафних функцій враховувались обмеження на кінцеву концентрацію і керуючі збурення.

Виходячи з необхідних умов оптимальності отримали систему рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \Theta_{\Pi}} &= \lambda_1(G_{\Pi}c_{\Pi} - \alpha_{\Pi}F_{CT.H}) + \lambda_2\alpha_2F_{CT.H} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_{\Pi}} &= \lambda_1\alpha_{\Pi}F_{CT.H} + \lambda_2(\alpha_{\Pi}F_{CT.H} - \alpha_{\Pi\Pi}F_{CT.BH}) + \lambda_3\alpha_{\Pi\Pi}F_{CT.BH} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_{\Pi\Pi}} &= \lambda_2\alpha_{\Pi\Pi}F_{CT.BH} + \lambda_3(-\alpha_{\Pi\Pi}F_{CT.BH} - \beta F_M\zeta_1r - S_Kc_K) + \lambda_4\beta F_M\zeta_1r_{\Pi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_2} &= (\lambda_3 - \lambda_4)\beta F_M\zeta_2r_{\Pi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b_K} &= \lambda_5S_K + \frac{2}{r}(b_K - b_{K30}) = 0\end{aligned}\tag{10}$$

Із зміною числа обертів ротора змінюється коефіцієнт тепловіддачі від стінки корпусу до плівки рідини в режимі випаровування, який з використанням критеріальної залежності для апарату з жорстко закріпленими лопатями [] представлений у емпіричному вигляді

$$\alpha_{\Pi\Pi} = K_1S_0^{0,59}n^{0,663}\tag{11}$$

Оскільки поставлена умова забезпечення найкращих умов теплообміну, складовою частиною математичної моделі задачі керування ПАРТ в режимі випаровування є гідродинаміка течії плівки рідини. Відомо, між числом обертів ротора і густиною зрошення існує взаємозв'язок. Тому витрати вихідної рідини повинні відслідковувати зміну швидкості обертання ротора. При зміні числа обертів в діапазоні від 11,6 об/с і вище витрати вихідної рідини можна обчислити за формулою []

$$S_0 = \frac{c_2}{n^{0,46}}\tag{12}$$

а при зміні швидкості обертів ротора у нижньому інтервалі (5,83-11,6) об/с S_0 обчислюється за формулою

$$S_0 = c_1 n^{1,2} \quad (13)$$

де c_1, c_2 - сталі коефіцієнти.

Для відповідних числа обертів ротора і витрат вихідної рідини обчислюється коефіцієнт тепловіддачі від стінки корпусу до плівки рідини в режимі випаровування по критеріальній залежності [], представлений у емпіричному вигляді

$$\alpha_{пл} = 1,4497 \cdot 10^{-7} \lambda \rho^{-0,59} \left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{-0,333} d_p^{0,775} \nu^{-0,853} \alpha^{-0,439} \rho_{пл}^{-0,039} r_{пл}^{-0,039} q^{0,039} S_0^{0,59} n^{0,663} \quad (14)$$

де $\nu, \rho, \rho_{пл}$ – кінематична в'язкість і густина рідини, густина пара;

λ, α – відповідно, коефіцієнт теплопровідності і температуропроводності;

d_p – діаметр ротора.

При постійних теплофізичних властивостях рідини і конструктивних параметрах коефіцієнт тепловіддачі може мати вигляд

$$\alpha_{пл} = K_1 S_0^{0,59} n^{0,663} \quad (15)$$

З урахуванням залежності (12) і (13) коефіцієнт тепловіддачі можна представити: при $n \geq 11,6$ об/с

$$\alpha_{пл} = K_{22} n^{0,393} \quad (16)$$

в діапазоні (5,83 – 11,6) об/с

$$\alpha_{пл} = K_{21} n^{1,371} \quad (17)$$

Потужність на перемішування, що витрачається на привід ротора з жорстко закріпленими лопатями за допомогою критеріальної залежності [] також може бути представлена емпіричними залежностями

для $Re_{\kappa} > 5 \cdot 10^3$

$$N_2 = 129 \nu^{0,42} \rho^{0,42} g^{-0,73} d_p^{3,15} \left(\frac{z}{3} \right)^{0,58} S_0^{0,58} n^{3,46} \quad (18)$$

$Re_{\kappa} < 5 \cdot 10^3$

$$N = 0,94 \cdot 10^6 \nu^{1,16} \rho^{0,42} g^{-0,73} d_p^{1,15} \left(\frac{z}{3} \right)^{0,58} S_0^{0,58} n^3 \quad (19)$$

де $Re_{\kappa} = \frac{nd_p^2}{\nu}$ – центробіжне число Рейнольдса.

З урахуванням залежностей (12) і (13) і при умові постійності теплофізичних властивостей рідини і конструктивних параметрів ПАРТ отримали

$$N_2 = K_3 S_0^{0,58} n^{3,46}, \quad (20)$$

при $n \geq 11,6$ об/с

$$N_2 = K_{32} n^{3,193} \quad (21)$$

при n у діапазоні (5,83–11,6) об/с

$$N_2 = K_{31} n^{4,15} \quad (22)$$

Підставивши залежності коефіцієнта тепловіддачі і потужності, що витрачається на перемішування від числа обертів ротора отримали для $n \geq 11,6$ об/с і $Re_{\kappa} > 5 \cdot 10^3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial n} = & 0,393 K_{22} n^{-0,607} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{ПЛ}) (\lambda_3 - \lambda_2) + L K_{32} 3,193 n^{2,193} \lambda_3 - \\ & - r \left[\frac{1}{(n - n_{\min})^2} - \frac{1}{(n_{\max} - n)^2} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial G_b} = -c_b (\Theta_{b_2} - \Theta_{b_1}) \lambda_4 - r \left[\frac{1}{(G_{b_2} - G_{b_{\min}})^2} - \frac{1}{(G_{b_{\max}} - G_b)^2} \right] \quad (24)$$

Для пошуку мінімуму цільової функції (9) реалізовано градієнтну процедуру першого порядку

$$n^{нов} = n^{стар} - k \frac{\partial L}{\partial n} \quad (25)$$

де k – крок градієнтного $G_b^{нов} = G_b^{стар} - k \frac{\partial L}{\partial G_b}$ пошуку.

Послідовні етапи обчислень при використанні приведеної вище градієнтної процедури полягають у наступному:

1. Обчислюємо чергові значення n^N, G_b^N .
2. Для цих значень розв'язуємо рівняння математичної моделі процесу (4) – (8).
3. Вектор λ^N знаходимо вирішивши систему (10).
4. Визначаємо похідні $\frac{\partial L}{\partial n^N}$ і $\frac{\partial L}{\partial G_b^N}$.
5. Обчислюємо чергове значення вектора керування

$$n^{N+1} = n^N - k^N \frac{\partial L}{\partial n^N}$$

$$G_b^{N+1} = G_b^N - k^N \frac{\partial L}{\partial G_b^N}$$

6. Ця послідовність обчислень повторюється до тих пір, поки значення n і G_b змінюються і поки не виконаються умови

$$|n^{N+1} - n^N| \leq \varepsilon_1,$$

$$|G_b^{N+1} - G_b^N| \leq \varepsilon_2.$$

В якості початкового значення вагового коефіцієнту використали одиницю $\mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{1}$. Для цього значення реалізувався пошук мінімуму (9) за допомогою градієнтної процедури.

Після рішення кожної підзадачі безумовної мінімізації вагові коефіцієнти зменшувались за допомогою співвідношення $r^{(k)} = r^{(k-1)} / 4$.

Для контролю за збіжністю алгоритму застосували умову

$$\left| S_k^{(k)} - S_k^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon_3 \quad (26)$$

Пошук починався з внутрішньої точки, тобто точки в якій всі обмежуючі умови у вигляді нерівностей виконувались ($n = 15$ об/с $G_b = 1,75$ кг/с). Задача оптимізації вирішувалась при різних значеннях конструктивних параметрів, результати яких представлені у табл. 1.

Таблиця .1

Кількість підзадач безумовної мінімізації	Кількість кроків на першій ітерації	d_p , м	z	n^{onm} , об/с	G_b^{onm} , кг/с	S_k , кг/с
3	7	0,6	3	13,763	1,9159	0,0446
3	7	0,6	5	11,5022	1,82915	0,22275
4	5	0,6	6	11,0262	1,2353	0,3705
5	5	0,6	7	10,7919	1,2501	0,36184
5	8	0,6	8	10,7881	1,9260	0,35877