МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Веригіна І.В., Массалітіна Є.В.

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Практикум з вищої математики
для студентів теплоенергетичного
факультету денної та заочної форм навчання

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Практикум з вищої математики
для студентів теплоенергетичного
факультету денної та заочної форм навчання

Рекомендовано Науково-методичною радою з математики
фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

Кратні інтеграли. Практикум з вищої математики для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання / Уклад.: Веригіна І.В., Массалітіна. Є.В. К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 72 с.

Гриф надано Науково-методичною радою

з математики фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Протокол №4 від 28.05. 2016 р.

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Практикум з вищої математики для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання

Укладачі: *Веригіна Інга Вячеславівна, ст. викл.,*
Массалітіна Євгенія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор: *Дудкін М.Є., доктор фіз.-мат. наук, проф.*

Рецензент: *Диховичний О.О., канд. фіз.-мат. наук, доц.*

За редакцією укладачів

Надруковано з оригінал-макета замовника

ВСТУП

Практикум «Кратні інтеграли» укладено для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання з метою забезпечення якісного виконання та оформлення типового розрахунку з теми «Кратні інтеграли», передбаченого навчальною програмою дисципліни «Вища математика». Даний практикум може бути рекомендовано для використання викладачами вищої математики у якості збірника типових завдань з теми «Кратні інтеграли».

Дана методична розробка допоможе студентам опрацювати тему «Кратні інтеграли», виробити уміння та навички розв'язання задач, що у свою чергу забезпечить успішне засвоєння навчального матеріалу з даної теми.

Практикум містить 30 варіантів типового розрахунку «Кратні інтеграли». Кожний з варіантів складається з 9 типових завдань. Із урахуванням підпунктів кожен варіант містить 12 типових задач на обчислення та застосування подвійних та потрійних інтегралів. Наведено список теоретичних питань, що пропонуються для захисту даного типового розрахунку.

У практикумі містяться приклади детального розв'язання типових задач з чітким порядком дій та правильним оформленням виконаного завдання. Особливу увагу приділено методу переходу від декартової до полярної або узагальненої полярної (у подвійному інтегралі), циліндричної або сферичної (у потрійному інтегралі) систем координат. Зазначимо, що чітко виконані рисунки областей інтегрування, допоможуть студентам у розв'язуванні запропонованих задач.

Кратні інтеграли

Варіант 1

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x+y=3,\quad y=(x-1)^2$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 18xy\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad y=3x,\quad y=4-x$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2\cos\dfrac{xy}{2}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad x=\sqrt{2\pi},\quad x=2y$.

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 2y,\quad x^2+y^2\le 6y,\quad y\le\sqrt{3}x,\quad y\ge 0$;

б) $\rho\le 4,\quad \rho\ge 4(1-\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\quad \{y=4\sqrt{x},\quad y=\dfrac{4}{x^2},\quad x=2\}$, $\qquad \mu(x,y)=x^4y$;

б) $D:\quad \{1\le 4x^2+y^2\le 4,\quad y\ge 0,\quad x\le 0\}$, $\quad \mu(x,y)=\dfrac{2y}{4x^2+y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (16x+2)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=1$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2+y^2+z^2=2,\quad x^2+y^2=1,\quad z=0$ $(z\ge 0,$ всередині циліндра) та густина якого $\mu(x,y,z)=4z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y=2,\quad y=\sqrt{1-z}$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=9,\quad \sigma_2:\ z^2=3(x^2+y^2),\quad z\ge 0$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 2

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x = 3 - y, \quad x = 1 + \sqrt{y}, \quad y = 0$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 32xy\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y = 0, \quad y = 2x, \quad y = 3 - x$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x\cos 2xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x = \dfrac{\pi}{2}, \quad x = \dfrac{3\pi}{2}, \quad y = \dfrac{1}{2}, \quad y = 2.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2 + y^2 \ge 2x, \quad x^2 + y^2 \le 6x, \quad y \le \sqrt{3}x, \quad y \ge -\sqrt{3}x$;

б) $\rho \le -\sqrt{3}\cos\varphi, \quad \rho \ge 1 + \sin\varphi$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D: \{y = \sqrt[3]{x}, \quad y = x^2, \quad x = 2\}, \quad \mu(x,y) = 42y^2$;

б) $D: \{1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 4, \quad x \ge 0\}, \quad \mu(x,y) = \dfrac{6x}{9x^2 + 4y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 4(1+y)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x = 0, \quad y = x, \quad z = 0, \quad z = 1 - y$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad z = x^2 + y^2$ та густина якого $\mu(x,y,z) = 12z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = 0, \quad z = 1 - x^2, \quad y = 0, \quad y = 3 - x$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1: \ x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad \sigma_2: \ z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \ge 0)$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 3

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y = x^2, \quad y = -\sqrt{x}, \quad x = 1$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 8xy\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x = 1, \quad y = 3x, \quad y = 2x$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{e}^{-xy/8}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y = 0, \quad x = 4, \quad x = 2y.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2 + y^2 \geq 2x, \quad x^2 + y^2 \leq 6x, \quad y \leq \sqrt{3}x, \quad y \geq -x$;

б) $\rho \leq 2, \quad \rho \geq 2(1 - \sin\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D : \{y = x, \quad y = \dfrac{1}{x}, \quad x = 2\}$, $\qquad \mu(x,y) = 5x^2y$;

б) $D : \{4 \leq \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} \leq 9, \quad y \geq 0\}$, $\qquad \mu(x,y) = \dfrac{5y}{9x^2 + 25y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 2x + 3y + z = 6$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V: \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z = x^2 + y^2, \quad x \geq 0, \, y \geq 0$ та густина якого $\mu(x,y,z) = 20x$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = 0, \quad z = 2 - x, \quad x = y^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 36, \quad \sigma_2 : \; z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 4

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y-x=1,\quad x=1-\sqrt{y},\quad y=0$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 40x^2y\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=1,\quad y=x,\quad y=-\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 6x\,\mathrm{e}^{\frac{xy}{3}}\,dxdy$, якщо область V обмежена лініями: $x=\ln 2,\quad x=\ln 3,\quad y=3,\quad y=6$.

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4y,\quad x^2+y^2\ge 6y,\quad y\le\sqrt{3}x,\quad y\ge 0$;

б) $\rho\le 2\sqrt{3}\sin\varphi,\quad \rho\ge 2(1-\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=\sqrt{x},\quad y=x^2,\quad x=4\}$, $\qquad \mu(x,y)=2x^{-1}$;

б) $D:\{1\le\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 4,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{2x+3y}{4x^2+9y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 12x\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=1,\quad y=x,\quad z=0,\quad z=1+x$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad z^2=x^2+y^2,\quad x^2+y^2=1,\quad z=0\ \ (z\ge 0,$ всередині циліндра) та густина якого $\mu(x,y,z)=5(x^2+y^2)$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y=2,\quad z=3x^2+\dfrac{3y^2}{2}$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ z=\sqrt{4-x^2-y^2},\quad \sigma_2:\ z=\sqrt{x^2+y^2}$, використовуючи перехід:

а) до циліндричних координат; б) до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 5

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=2,\quad x=y,\quad y=\sqrt{1-x^2}+1$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 15xy^2\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=1,\quad y=x,\quad y=-x$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2\sin\frac{xy}{2}\,dxdy$, якщо область V обмежена лініями: $y=0,\quad x=\sqrt{\pi},\quad y=x.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\geq 2y,\quad x^2+y^2\leq 8y,\quad y\geq\sqrt{3}x,\quad x\geq 0$;

б) $\rho\leq 4,\quad \rho\geq 4(1+\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=\sqrt{x},\quad y=x,\quad x=4\}$, $\qquad \mu(x,y)=10\sqrt{x}$;

б) $D:\{1\leq\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 4,\quad y\geq 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=\frac{2y}{9x^2+4y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (1+y)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad 3x+3y+z=6$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2+y^2+z^2=5,\quad x^2+y^2=1,\quad z=0\quad (z\geq 0,$ всередині циліндра) та густина якого $\mu(x,y,z)=4z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+z=1,\quad y=x^2+1$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=9,\quad \sigma_2:\ 3z^2=x^2+y^2\quad (z\geq 0)$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;
б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 6

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=1+x, \quad y=(x-1)^2$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 36x\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=0, \quad y=3x^2, \quad y=3(2-x)$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 3x\sin xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x=\frac{\pi}{2}, \quad x=3\pi, \quad y=1, \quad y=3.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4x, \quad x^2+y^2\le 8x, \quad y\le\sqrt{3}x, \quad y\ge\frac{x}{\sqrt{3}}$;

б) $\rho\le\sqrt{3}\cos\varphi, \quad \rho\ge 1-\sin\varphi.$

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=2\sqrt{x}, \quad y=\frac{2}{x}, \quad x=4\}$, $\qquad \mu(x,y)=\sqrt{x}$;

б) $D:\{4\le\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 9, \quad y\ge 0, \quad x\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=\frac{4x+6y}{4x^2+9y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (x+1)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=2-x-y$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V: \quad x^2+y^2+z^2=3, \quad z=\frac{x^2+y^2}{2}$ та густина якого $\mu(x,y,z)=3z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=0, \quad z=4-x, \quad x=y^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1: \ x^2+y^2+z^2=3, \quad \sigma_2: \ z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 7

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=0,\quad x=1,\quad y=-1,\quad y=\sqrt{2x-x^2}$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 12x\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=0,\quad y=4-x,\quad y=x-4$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2\cos xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad x=\sqrt{\pi},\quad x=2y$.

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4y,\quad x^2+y^2\le 8y,\quad y\le x,\quad y\ge 0$;

б) $\rho\le 2,\quad \rho\ge 2(1+\sin\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=\sqrt{x},\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\quad x=2\}$, $\qquad \mu(x,y)=3xy$;

б) $D:\{1\le\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 9,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{3x+2y}{9x^2+4y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 6y\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=2-x-2y$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2+y^2=1,\quad z=(x^2+y^2)/3,\quad x=0,\ y=0,\ z=0$ ($x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0$) та густина якого $\mu(x,y,z)=15x$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=y,\quad z=0,\quad y=4-x^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=36,\quad \sigma_2:\ z^2=\dfrac{x^2+y^2}{3}\quad (z\ge 0)$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат; б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 8

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область обмежена лініями: $y=2x+6,\quad y=2(x+1)^2$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 16xy\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad y=2-x,\quad y=\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x\cos xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x=\pi,\quad x=3\pi,\quad y=\frac{1}{2},\quad y=1.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\geq 4y,\quad x^2+y^2\leq 8y,\quad y\geq x,\quad y\geq -x$;

б) $\rho\leq -2\sqrt{3}\sin\varphi,\quad \rho\geq 2(1+\cos\varphi).$

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=\sqrt{x},\quad y=\frac{1}{\sqrt{x}},\quad x=4\}$, $\qquad \mu(x,y)=5y^2$;

б) $D:\{1\leq \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 9,\quad y\geq 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=\frac{12y}{4x^2+9y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 24x\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad x+y=1,\quad z=1-y,\quad z=0$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad z=2-(x^2+y^2),\quad z^2=x^2+y^2$ $(z\geq 0)$ та густина якого $\mu(x,y,z)=12z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0,\quad z=0,\quad y=x,\quad y=1-z^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=4,\quad \sigma_2:\ z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, використовуючи перехід:

а) до циліндричних координат; б) до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 9

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=0,\quad x=-1,\quad y=2,\quad y=-\sqrt{1-x^2}+1$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 15(2x+1)\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=1,\quad y=-\sqrt{x},\quad y=\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{e}^{-xy/2}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad x=1,\quad y=2x$.

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 2y,\quad x^2+y^2\le 8y,\quad y\le\sqrt{3}x,\quad x\ge 0$;

б) $\rho\ge 5,\quad \rho\le 5(1-\sin\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y^2=4x,\quad x^2=4y\}$, $\qquad \mu(x,y)=5y$;

б) $D:\{1\le\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}\le 4,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{3x+4y}{9x^2+16y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 12y\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=1,\quad y=0,\quad y=x,\quad z=1-y,\quad z=0$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2+y^2+z^2=5,\quad x^2+y^2=4,\quad z=0$ ($z\ge 0$, всередині циліндра) та густина якого $\mu(x,y,z)=z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x+y=2,\quad z=0,\quad x=0,\quad z=y^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ z=\sqrt{81-x^2-y^2},\quad \sigma_2: z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 10

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y = x^2,\quad y = 0,\quad y = \sqrt{2x - x^2}$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 30x\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y = 0,\quad y = 4 - 2x,\quad y = 2\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 8x\,\mathrm{e}^{xy/3}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x = \ln 3,\quad x = \ln 4,\quad y = 3,\quad y = 6.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2 + y^2 \ge 2x,\quad x^2 + y^2 \le 6x,\quad y \le x,\quad y \ge -x$;

б) $\rho \le 2,\quad \rho \le 2(1 + \sin\varphi).$

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\ \{y = \sqrt{x},\quad y = \dfrac{1}{x^2},\quad x = 4\}$, $\qquad \mu(x,y) = 7x^2$;

б) $D: \{1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} \le 4,\quad x \ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y) = \dfrac{20x}{25x^2 + 4y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (4x+1)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad 2x + 4y + z - 4 = 0$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2 + y^2 + z^2 = 5,\quad z = (x^2 + y^2)/4$ та густина якого $\mu(x,y,z) = 27z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = 0,\quad z = 1 - x^2,\quad y = 0,\quad y = 3 - x$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ x^2 + y^2 + z^2 = 16,\quad \sigma_2: z^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{3},\quad z \ge 0$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 11

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=0,\quad x=1,\quad y=1,\quad y=-\sqrt{2x-x^2}$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 3xy\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=1,\quad y=2x,\quad y=-\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 3x^2\sin\frac{xy}{2}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad x=\sqrt{\frac{4\pi}{3}},\quad 2y=3x.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4x,\quad x^2+y^2\le 8x,\quad y\le x,\quad y\ge 0$;

б) $\rho\ge 3,\quad \rho\le 3(1+\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=2\sqrt{x},\quad y=\frac{2}{x^2},\quad x=9\}$, $\qquad \mu(x,y)=3\sqrt{x}$;

б) $D:\{4\le 4x^2+y^2\le 16,\quad y\ge 0,\quad x\le 0\}$, $\quad \mu(x,y)=4x^2+y^2$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 24y\,dxdy$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=1$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2+y^2+z^2=2,\quad x^2+y^2=1,\quad z=0$ (всередині циліндра) та густина якого $\mu(x,y,z)=12z^3$.

Завдання 8. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=0,\quad y=0,\quad x+y=4,\quad x=2\sqrt{z}$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=1,\quad \sigma_2:\ z^2=x^2+y^2,\quad z\ge 0$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат; б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 12

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $2x = y-6, \quad y=0, \quad x=-1-\sqrt{\frac{y}{2}}$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 8xy\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=0, \quad y=2x, \quad y=3-x$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x\sin 2xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x=\frac{\pi}{2}, \quad x=\frac{3\pi}{2}, \quad y=\frac{1}{2}, \quad y=2.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2 \geq 6x, \quad x^2+y^2 \leq 8x, \quad y \leq \sqrt{3}x, \quad y \geq -\sqrt{3}x$;

б) $\rho \leq 1, \quad \rho \leq 1-\cos\varphi$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=\sqrt[3]{x}, \quad y=\sqrt{x}, \quad x=4\}$, $\qquad \mu(x,y,z)=30y^2$;

б) $D:\{1 \leq \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leq 2, \quad x \geq 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=x(9x^2+4y^2)$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 4(1-y)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0, \quad y=1, \quad y=x, \quad z=0, \quad z=1+y$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V: \quad x^2+y^2+z^2=3, \quad 2z=x^2+y^2$ та густина якого $\mu(x,y,z)=3z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=9-x^2, \quad z=0, \quad x=0, \quad y=0, \quad 2x+y=6$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1: \ x^2+y^2+z^2=225, \quad \sigma_2: \ z=\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 13

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=x^2, \quad y=-x, \quad x=1$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 24xy^3\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=1, \quad y=x, \quad y=2x$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 3x^2\sin\dfrac{xy}{2}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0, \quad x=\sqrt{\dfrac{4\pi}{3}}, \quad 2y=3x.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4y, \quad x^2+y^2\le 8y, \quad y\ge -\sqrt{3}x, \quad y\ge 0$;

б) $\rho\ge 2, \quad \rho\le 2(1+\sin\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=x, \quad y=\dfrac{1}{x}, \quad x=2\}$, $\qquad \mu(x,y)=3\sqrt{\dfrac{y}{x}}$;

б) $D:\{1\le\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}\le 2, \quad y\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=4(9x^2+25y^2)$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad 2x+3y+z=6$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V: \quad z^2=x^2+y^2, \quad z=x^2+y^2, \quad x\ge 0,\ y\ge 0$ та густина якого $\mu(x,y,z)=20y$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0, \quad y=0, \quad z=1, \quad 4z=x^2+y^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1: \ x^2+y^2+z^2=81, \quad \sigma_2: \ 3z^2=x^2+y^2, \quad z\ge 0$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 14

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=2(x-1)^2,\quad y=2(x+1)^2,\quad y=0$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 60x^3y\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=1,\quad y=x,\quad y=-\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x\cos xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x=\pi/2,\quad x=\pi,\quad y=1,\quad y=2$.

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4x,\quad x^2+y^2\le 6x,\quad y\le\sqrt{3}x,\quad y\ge\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

б) $\rho\le 2,\quad \rho\le 2(1-\sin\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=\sqrt{x},\quad y=x^2,\quad x=4\}$, $\qquad \mu(x,y)=20x$;

б) $D:\{1\le\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}\le 2,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=4x^2+25y^2$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 12x\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=1,\quad y=x,\quad z=0,\quad z=1+x$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad z^2=x^2+y^2,\quad x^2+y^2=1,\quad z=0$ ($z\ge 0$, всередині циліндра) та густина якого $\mu(x,y,z)=15z^2$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y=3,\quad z=4x^2+2y^2+1$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ z=\sqrt{3-x^2-y^2},\quad \sigma_2:\ z=\sqrt{x^2+y^2}$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат; б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 15

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=-\sqrt{x}, \quad x-y=2, \quad y=0$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 15xy^2\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=1, \quad y=x, \quad y=-x$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{e}^{-xy/4}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0, \quad x=2, \quad x=y.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:
а) $x^2+y^2\ge 6x, \quad x^2+y^2\le 10x, \quad y\le x, \quad y\ge -x$;

б) $\rho\ge 4, \quad \rho\le 4(1-\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\ \{y=x^2, \quad y=4x\}$, $\qquad \mu(x,y)=27\sqrt{xy}$;

б) $D:\{1\le \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}\le 2, \quad y\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=x^2+4y^2$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 8(1+y)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=1, \quad y=0, \quad y=x, \quad z=0, \quad z=2-x$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad z=2-(x^2+y^2), \quad z=x^2+y^2$ та густина якого $\mu(x,y,z)=3z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $y=x^2, \quad z=0, \quad y+z=2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=225, \quad \sigma_2:\ z^2=\dfrac{9}{16}(x^2+y^2) \ (z\ge 0)$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 16

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=-\sqrt{4-y^2},\quad y=2,\quad x+y=-2$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 2y\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad y=3x,\quad y=3(2-x)$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x\,\mathrm{e}^{xy/2}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x=\ln 2,\quad x=\ln 3,\quad y=2,\quad y=4.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4x,\quad x^2+y^2\le 8x,\quad y\le\sqrt{3}x,\quad y\ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

б) $\rho\le 1,\quad \rho\le 1+\cos\varphi.$

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=\sqrt{2x},\quad y=\dfrac{4}{x},\quad x=1\}$, $\quad\mu(x,y)=2y$;

б) $D:\{4\le\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 9,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0\}$, $\quad\mu(x,y)=\dfrac{4x+6y}{4x^2+9y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 3x\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=2-x-y$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2+y^2+z^2=3,\quad z=(x^2+y^2)/2$ та густина якого $\mu(x,y,z)=24z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=0,\quad y=x^2,\quad z=1-y$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ z=\sqrt{4-x^2-y^2},\quad \sigma_2:\ 3z=\sqrt{x^2+y^2}$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 17

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $2y = 1 - x^2, \quad y = \sqrt{1-x^2}, \quad x \ge 0$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 3y\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y = 0, \quad y = 4 - x, \quad y = x + 4$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2 \sin\frac{xy}{2}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y = 0, \quad x = \sqrt{\pi}, \quad y = 2x.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2 + y^2 \ge 6y, \quad x^2 + y^2 \le 8y, \quad y \ge \sqrt{3}x, \quad y \ge -\sqrt{3}x$;

б) $\rho \ge -4\sin\varphi, \quad \rho \le 4(1-\sin\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D: \{y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad x = 2\}$, $\qquad \mu(x,y) = 8x^2y$;

б) $D: \ 4 \le x^2 + 4y^2 \le 36, \quad y \ge 0$, $\qquad \mu(x,y) = x^2 + 4y^2$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 6y\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = 2 - x - 2y$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V: \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 2 - (x^2 + y^2) \quad (x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0)$ та густина якого $\mu(x,y,z) = 12(x^2 + y^2)$.

Завдання 8. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad z = x^2 + 3y^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1: \ x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad \sigma_2: \ z^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2) \ \ (z \ge 0)$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 18

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=0,\quad x=e^y,\quad y=0,\quad y=1$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 24xy\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=0,\quad y=2-x,\quad y=\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x\sin xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x=\dfrac{\pi}{2},\quad x=\pi,\quad y=1,\quad y=2.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4y,\quad x^2+y^2\le 10y,\quad y\ge x,\quad y\ge -x$;

б) $\rho\le -2\sqrt{3}\cos\varphi,\quad \rho\le 2(1+\sin\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=2\sqrt{x},\quad y=\dfrac{2}{x^2},\quad x=4\},\qquad \mu(x,y)=\sqrt{x}$;

б) $D:\{1\le\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 9,\quad y\ge 0\},\qquad \mu(x,y)=\dfrac{6y}{4x^2+9y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 8y\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=3$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad z=2-(x^2+y^2),\quad z^2=x^2+y^2\ (z\ge 0)$ та густина якого $\mu(x,y,z)=12z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=0,\quad y=0,\quad z=2-x,\quad y^2=4x$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=25,\quad \sigma_2:\ z^2=\dfrac{3}{4}(x^2+y^2)\ \ (z\ge 0)$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 19

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=-x,\quad x=1,\quad y=\sqrt{2x-x^2}$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 60y\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=0,\quad y=2-x^2,\quad y=\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2\cos 2xy\;dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad x=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\quad y=2x.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 2x,\quad x^2+y^2\le 8x,\quad y\le\sqrt{3}x,\quad x\ge 0$;

б) $\rho\ge 2\cos\varphi,\quad \rho\le 2(1+\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y^2=2x,\quad x^2=2y\}$, $\qquad \mu(x,y)=3x+2y$;

б) $D:\{1\le\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}\le 2,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=9x^2+16y^2$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (12y+6)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=1,\quad y=x,\quad z=0,\quad z=y$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2+y^2+z^2=5,\quad x^2+y^2=4,\quad z=0$ ($z\ge 0,$ всередині циліндра) та густина якого $\mu(x,y,z)=4z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=0,\quad z=3-y,\quad x^2=9y$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ z=\sqrt{25-x^2-y^2},\quad \sigma_2:\ z=\dfrac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 20

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y^2 = 2 - x^2, \quad x = 0, \quad y = \sqrt{2x - x^2}$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 3y\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x = 0, \quad y = 4 - 2x, \quad y = 2\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 2x\cos 2xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x = \dfrac{\pi}{4}, \quad x = \dfrac{\pi}{2}, \quad y = 1, \quad y = 2.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2 + y^2 \geq 2x, \quad x^2 + y^2 \leq 6x, \quad y \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}x, \quad y \geq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$;

б) $\rho \leq \sqrt{3}\sin\varphi, \quad \rho \leq 1 - \cos\varphi$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D: \{y = 4\sqrt{x}, \quad y = \dfrac{4}{x^2}, \quad x = 4\}, \qquad \mu(x,y) = \dfrac{4}{y^2}$;

б) $D: \{1 \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} \leq 4, \quad x \geq 0\}, \qquad \mu(x,y) = \dfrac{5x}{25x^2 + 4y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 3x\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 2x + 4y + z - 4 = 0$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V: \; x^2 + y^2 + z^2 = 5, \quad z = (x^2 + y^2)/4$ та густина якого $\mu(x,y,z) = 24z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = 0, \quad x + z = 1, \quad x = y^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1: \; x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad \sigma_2: \; z^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{3}, \quad z \geq 0$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат; б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 21

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=x^2,\quad y=\sqrt{2-x^2}$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 18xy\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=0,\quad y=3x,\quad y=4-x$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{e}^{-xy/2}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad x=\sqrt{2},\quad x=y.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4y,\quad x^2+y^2\le 10y,\quad y\ge x,\quad y\ge 0$;

б) $\rho\ge 4\sin\varphi,\quad \rho\le 4(1+\sin\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\quad \{y=3\sqrt{x},\quad y=\dfrac{3}{x^2},\quad x=3\}$, $\qquad \mu(x,y)=15x^4y$;

б) $D:\quad \{1\le x^2+4y^2\le 4,\quad y\ge 0,\quad x\le 0\}$, $\mu(x,y)=\dfrac{16y}{x^2+4y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (x-2)\,dxdydz$, якщо область обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=2$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=3,\quad z=0\quad (z\ge 0,$ всередині циліндра) та густина якого $\mu(x,y,z)=12z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0,\quad z=0,\quad 2x+3y=6,\quad z=y^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=4,\quad \sigma_2:\ 3z^2=x^2+y^2,\quad z\ge 0$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 22

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y = x,\quad xy = 1,\quad y = 2$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 32xy\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x = 0,\quad y = 2x,\quad y = 3 - x$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D x\,\mathrm{e}^{xy/4}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x = \ln 2,\quad x = \ln 3,\quad y = 4,\quad y = 8$.

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2 + y^2 \geq 2x,\quad x^2 + y^2 \leq 8x,\quad y \leq \sqrt{3}x,\quad y \geq -\sqrt{3}x$;

б) $\rho \leq 2\sqrt{3}\cos\varphi,\quad \rho \leq 2(1 - \sin\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D: \{y = \sqrt[3]{x},\quad y = x^2,\quad x = 2\}$, $\qquad \mu(x,y) = 12y^2$;

б) $D: \ \{1 \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 2,\quad y \geq 0\}$, $\qquad \mu(x,y) = \dfrac{6y}{9x^2 + 4y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V 12(1 + y)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $y = 0,\quad x = 1,\quad y = x,\quad z = 0,\quad z = 1 - y$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3,\quad 2z = x^2 + y^2$ та густина якого $\mu(x,y,z) = 24z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad x + y = 1,\quad z = y^2 + 1$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1: \ x^2 + y^2 + z^2 = 5,\quad \sigma_2: \ z^2 = 4(x^2 + y^2)\quad (z \geq 0)$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 23

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=-x^2,\quad x=-1,\quad y=-\sqrt{1-x^2}+1$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 8xy\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=1,\quad y=-x,\quad y=2x$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2\sin 2xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad x=\sqrt{2\pi},\quad x=2y$.

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 2y,\quad x^2+y^2\le 4y,\quad y\ge 0,\quad y\ge -x$;

б) $\rho\ge -2\cos\varphi,\quad \rho\le 2(1-\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=x,\quad y=\dfrac{1}{x},\quad x=3\}$, $\qquad \mu(x,y)=xy$;

б) $D:\{4\le \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}\le 5,\quad y\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{1}{9x^2+25y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 2y\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad 3x+2y+z=6$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad z^2=x^2+y^2,\quad z=x^2+y^2,\quad x\ge 0,\ y\ge 0$ та густина якого $\mu(x,y,z)=20y$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad 3x+4y=12,\quad x^2=4-z$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1: x^2+y^2+z^2=16,\quad \sigma_2:\ 3z^2=x^2+y^2,\quad z\ge 0$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 24

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=1-x^2$, $y=-\sqrt{1-x^2}$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 40x^2y\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=1$, $y=-x$, $y=\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x\sin xy\,dxdy$, якщо область V обмежена лініями: $x=\pi$, $x=2\pi$, $y=\frac{1}{2}$, $y=1$.

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\geq 2y$, $x^2+y^2\leq 6y$, $y\geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y\geq \frac{x}{\sqrt{3}}$;

б) $\rho\leq 8$, $\rho\geq 4(1-\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=4\sqrt{x},\ \ y=4x^2,\ \ x=4\}$, $\mu(x,y)=3xy$;

б) $D:\{1\leq \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 2,\ \ y\geq 0,\ \ x\geq 0\}$, $\mu(x,y)=\frac{x+y}{4x^2+9y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 12x\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0$, $y=1$, $y=x$, $z=0$, $z=1-x$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:$ $z^2=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$, $z=0$ ($z\geq 0$, всередині циліндра) та густина якого $\mu(x,y,z)=10(x^2+y^2)$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0$, $z=0$, $x+y=2$, $z=4\sqrt{y}$. Зробити рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ z=\sqrt{5-x^2-y^2}$, $\sigma_2:\ z=2\sqrt{x^2+y^2}$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 25

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=x^2,\quad x=y^2,\quad 8xy=1$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 15xy^2\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=1,\quad y=2x,\quad y=-x$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2\cos xy\;\,dxdy$, якщо область V обмежена лініями: $y=0,\quad x=\sqrt{\pi},\quad x=y.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4x,\quad x^2+y^2\le 6x,\quad y\le\dfrac{x}{\sqrt{3}},\quad y\ge-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

б) $\rho\le 8,\quad \rho\ge 4(1-\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=x^2,\quad y=2x\}$, $\qquad \mu(x,y)=35x^2y$;

б) $D:\{1\le\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 2,\quad x\ge 0\}$, $\mu(x,y)=\dfrac{2x}{9x^2+4y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 3y\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=2-x-y$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad z=(x^2+y^2)/4,\quad x^2+y^2=4,\quad z=0,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\quad y\ge 0$, всередині циліндра) та густина якого $\mu(x,y,z)=5y$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad 2x+2y=1,\quad 4z=1-4x^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=4,\quad \sigma_2:\ z^2=x^2+y^2\quad (z\ge 0)$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 26

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $2y=1-x^2,\quad y=\sqrt{1-x^2},\quad x=0$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 36x\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad y=2-x,\quad y=\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x\cos 2xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x=\dfrac{\pi}{2},\quad x=\pi,\quad y=\dfrac{1}{2},\quad y=1$.

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4x,\quad x^2+y^2\le 10x,\quad y\le\sqrt{3}x,\quad y\ge\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

б) $\rho\cos\varphi\ge 3,\quad \rho\le 4(1+\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=2\sqrt{x},\quad y=\dfrac{2}{x},\quad x=4\}$, $\qquad \mu(x,y)=10x$;

б) $D:\{2\le\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 3,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{4x+6y}{4x^2+9y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 24x\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=1-x-y$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2+y^2+z^2=4,\quad z=(x^2+y^2)/3$ та густина якого $\mu(x,y,z)=12z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y=3,\quad z=9-y^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ z=\sqrt{25-x^2-y^2},\quad \sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2}$, використовуючи перехід:

а) до циліндричних координат; б) до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 27

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=x^2,\quad x=y^2,\quad x+y=6$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 3x\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=0,\quad y=2-x,\quad y=x-2$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{e}^{-xy/2}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad x=2,\quad 2x=y.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4y,\quad x^2+y^2\le 6y,\quad y\ge \dfrac{x}{\sqrt{3}},\quad y\ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

б) $\rho\le 8,\quad \rho\ge 4(1+\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=\sqrt{x},\quad y=\dfrac{1}{x},\quad x=2\}$, $\qquad \mu(x,y)=8x^2y$;

б) $D:\{1\le \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 2,\quad y\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{3x+2y}{9x^2+4y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 6y\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=2-2x-y$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2+y^2=1,\quad z=(x^2+y^2)/3,\quad x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$ $(x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0)$ та густина якого $\mu(x,y,z)=15y$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x=3,\quad y=2,\quad z=2x^2+3y^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=5,$, $\sigma_2:\ z^2=4(x^2+y^2)\quad (z\ge 0)$використовуючи перехід:

а) до циліндричних координат; б) до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 28

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область обмежена лініями: $x=\sqrt{y}, \quad x+2y=3, \quad y=0$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 8xy\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=0, \quad y=2-x, \quad y=\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 4x\,\mathrm{e}^{2xy}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x=\ln 3, \quad x=\ln 4, \quad y=\dfrac{1}{2}, \quad y=1$.

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 4y, \quad x^2+y^2\ge 6y, \quad y\ge x, \quad y\ge -x$;

б) $\rho\cos\varphi\le -3, \quad \rho\le 4(1-\cos\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y=3\sqrt{x}, \quad y=\dfrac{3}{x^2}, \quad x=2\}, \qquad \mu(x,y)=12x$;

б) $D:\{1\le \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 4, \quad y\ge 0\}, \qquad \mu(x,y)=\dfrac{12y}{4x^2+9y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 8y\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad 3x+y+z=3$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V: \quad z=2-(x^2+y^2), \quad z=x^2+y^2$ та густина якого $\mu(x,y)=12z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=0, \quad y=0, \quad x+y=2, \quad z=4-x^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1: \ x^2+y^2+z^2=36, \quad \sigma_2: \ z^2=3(x^2+y^2) \quad (z\ge 0)$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 29

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y=x^2,\quad x=y^2,\quad x=4$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 15x\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x=1,\quad y=-\sqrt{x},\quad y=\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 4x^2\sin xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\quad x=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\quad y=x.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2+y^2\ge 2x,\quad x^2+y^2\le 8x,\quad y\le 0,\quad y\ge -x/\sqrt{3}$;

б) $\rho\le 4,\quad \rho\ge 2(1+\sin\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D:\{y^2=2x,\quad x^2=2y\}$, $\qquad \mu(x,y)=5(x+y)$;

б) $D:\{1\le \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}\le 3,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0\}$, $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{3x+4y}{9x^2+16y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (y+2)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad 2x+2y+z=4$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V:\quad x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=3,\quad z=0$ ($z\ge 0$, всередині циліндра) та густина якого $\mu(x,y,z)=4z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y=2,\quad 2z=x^2+y^2$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$\sigma_1:\ z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, $\sigma_2:\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$, використовуючи перехід:

а) до циліндричних координат; б) до сферичних координат.

Кратні інтеграли

Варіант 30

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область D обмежена лініями: $y = x, \quad xy = 1, \quad x = 2$.

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 24x\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями: $x = 0, \quad y = 4 - 2x, \quad y = 2\sqrt{x}$.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 12x\sin xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $x = \dfrac{\pi}{4}, \quad x = 2, \quad y = 2, \quad y = 3.$

Завдання 4. Знайти площу області D, яка задана нерівностями:

а) $x^2 + y^2 \geq 2x, \quad x^2 + y^2 \leq 8x, \quad y \leq \sqrt{3}x, \quad y \geq -\sqrt{3}x$;

б) $\rho\sin\varphi \leq -3, \quad \rho \leq 4(1 - \sin\varphi)$.

Завдання 5. Знайти масу плоскої пластини D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$:

а) $D: \ \{y = 4\sqrt{x}, \quad y = \dfrac{4}{x^2}, \quad x = 4\}, \quad \mu(x,y) = 2xy$;

б) $D: \{1 \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} \leq 4, \quad y \geq 0\}, \qquad \mu(x,y) = \dfrac{20y}{25x^2 + 4y^2}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 4x\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 2x + y + z - 4 = 0$.

Завдання 7. Знайти масу тіла, яке займає область $V: \quad z = 5 - (x^2 + y^2), \quad z = (x^2 + y^2)/4$ та густина якого $\mu(x,y,z) = 4z$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $y = 0, \quad z = 0, \quad 3x + 2y = 6, \quad z = \dfrac{x^2}{2}$. Зробити схематичний рисунок.

Завдання 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $\sigma_1: \ x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad \sigma_2: \ z^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{3}, \quad z \geq 0$, використовуючи:

а) перехід до циліндричних координат;

б) перехід до сферичних координат.

Кратні інтеграли

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ, ЯКІ ВИНОСЯТЬСЯ НА ЗАХИСТ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ «КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ»

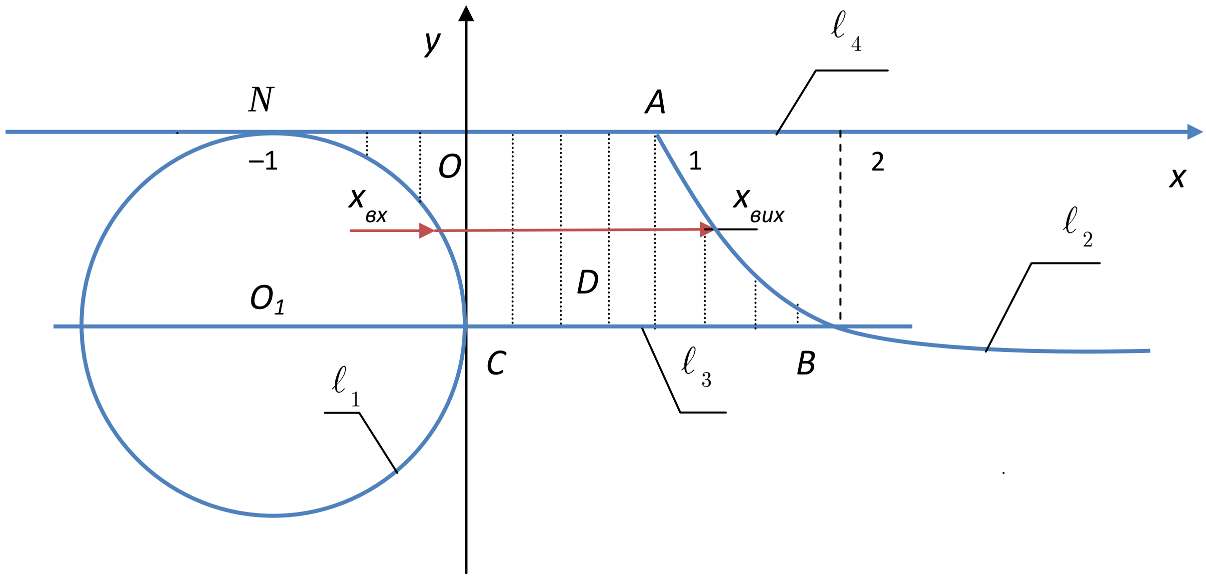
1. Задачі, які приводять до поняття подвійного інтегралу.
2. Означення подвійного інтеграла. Достатня умова існування подвійного інтеграла. Геометричний зміст подвійного інтеграла.
3. Основні властивості подвійного інтеграла.
4. Обчислення подвійного інтеграла у декартовій системі координат.
5. Заміна змінних у подвійному інтегралі.
6. Обчислення подвійного інтеграла у полярній системі координат.
7. Обчислення статичних моментів плоскої фігури. Координати центра мас.
8. Обчислення моментів інерції плоскої фігури.
9. Задача, яка приводить до поняття потрійного інтегралу.
10. Означення потрійного інтеграла. Достатня умова існування потрійного інтеграла.
11. Основні властивості потрійного інтеграла.
12. Обчислення потрійного інтеграла у декартовій системі координат.
13. Заміна змінних у потрійному інтегралі.
14. Обчислення потрійного інтеграла у циліндричній системі координат.
15. Обчислення потрійного інтеграла у сферичній системі координат.
16. Статичні моменти та моменти інерції просторової області. Координати центра мас.

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Завдання 1. Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до повторного двома способами, якщо область інтегрування D обмежена лініями $x=-1+\sqrt{-2y-y^2}$, $x=y^2+1$, $y=0$, $y=-1$.

Розв'язання. Визначимо вигляд кривої, яка обмежує область D:

$x=-1+\sqrt{-2y-y^2} \Rightarrow (x+1)^2=-2y-y^2 \Rightarrow (x+1)^2=1-(1+2y+y^2) \Rightarrow$
$(x+1)^2+(y+1)^2=1$ — коло з центром в точці $O_1(-1;-1)$ і радіусом $R=1$.



$x=-1+\sqrt{-2y-y^2}$ — права частина кола.

Прямі $y=0$, $y=-1$, парабола $x=y^2+1$ та коло $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ перетинаються в точках $A(1;0)$, $B(2;-1)$, $C(0;-1)$ та $N(-1;0)$. Зобразимо область D (рис. 1).

Область D правильна у напрямі осі Ox. В напрямі осі Oy (рис. 2) її треба розбити на три правильні області D_1, D_2 і D_3, оскільки межі цих областей задані різними рівняннями. Отже, інтегрування можна проводити як у напрямі осі Ox, так і у напрямі осі Oy.

1-й спосіб. Проведемо інтегрування у напрямі осі Ox (рис. 1). Область D у цьому напрямі обмежена лініями

$$\ell_1: \quad x_{вх} = -1 + \sqrt{-2y - y^2}, \qquad \ell_2: \quad x_{вих} = y^2 + 1, \qquad \ell_3: \quad y = -1, \qquad \ell_4: \quad y = 0,$$

отже, область $D = \{(x, y): \ -1 \le y \le 0, \ \ -1 + \sqrt{-2y - y^2} \le x \le y^2 + 1\}$.

Використовуючи формулу переходу від подвійного інтеграла до повторного по області $D,$ отримаємо

$$J \overset{У\ напрямі\ осі\ Ox}{=} \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-1+\sqrt{-2y-y^2}}^{y^2+1} f(x, y)\,dx.$$

2-й спосіб. Проведемо інтегрування у напрямі осі Oy (рис. 2).

У напрямі осі Oy область D треба розбити на три правильні області: D_1, D_2, D_3: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, які не мають спільних внутрішніх точок.

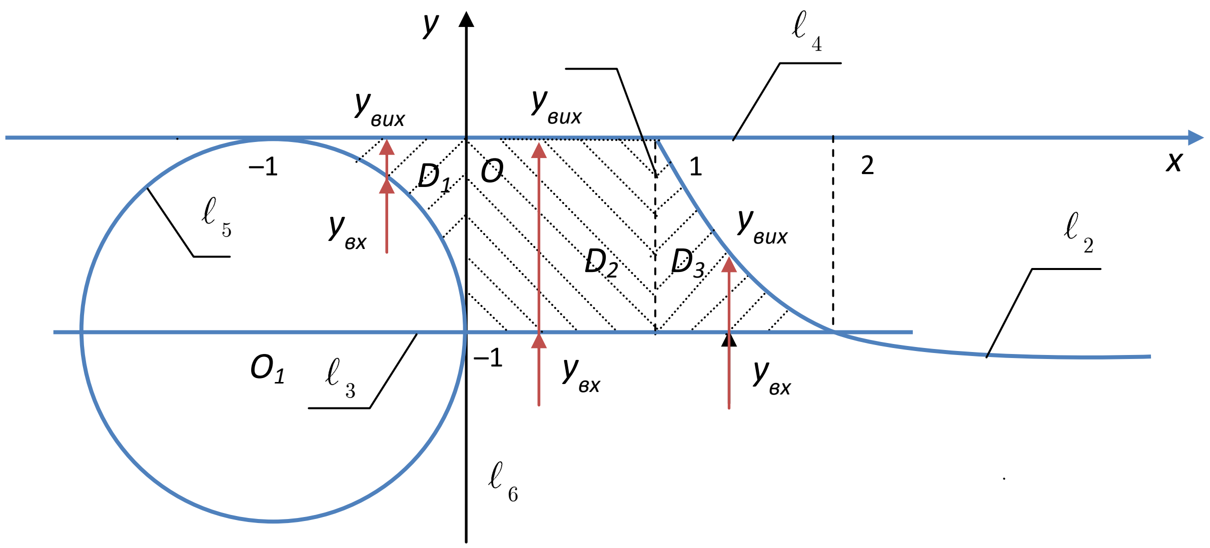


Рис. 2

Область D_1 обмежена лініями

$$\ell_5: \quad y_{вх} = -1 + \sqrt{-2x - x^2}, \qquad \ell_4: \quad y_{вих} = 0, \qquad \ell_6: \quad x = 0,$$

отже, $$D_1=\{(x,y):\quad -1\le x\le 0,\quad -1+\sqrt{-2x-x^2}\le y\le 0\}.$$

Область D_2 обмежена лініями

$$\ell_3:\quad y_{вх}=-1,\qquad \ell_4:\quad y_{вих}=0,\qquad \ell_6:\quad x=0,\qquad \ell_7:\quad x=1,$$

отже, $$D_2=\{(x,y):\quad 0\le x\le 1,\quad -1\le y\le 0\}.$$

Область D_3 обмежена лініями

$$\ell_3:\quad y_{вх}=-1,\quad \ell_2:\quad y_{вих}=-\sqrt{x-1},\qquad \ell_7:\quad x=1,$$

отже, $$D_3=\{(x,y):\quad 1\le x\le 2,\quad -1\le y\le -\sqrt{x-1}\}.$$

Використовуючи властивість адитивності подвійного інтеграла по області $D=D_1\cup D_2\cup D_3$ та формулу переходу від подвійного інтеграла до повторного, отримаємо

$$J\overset{\text{У напрямі осі } Oy}{=}\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-1+\sqrt{-2x-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-1}^{0} f(x,y)\,dy+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{-1}^{-\sqrt{x-1}} f(x,y)\,dy.$$

Відповідь: $$J\overset{\text{У напрямі осі } Ox}{=}\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-1+\sqrt{-2y-y^2}}^{y^2+1} f(x,y)dx=$$

$$\overset{\text{У напрямі осі } Oy}{=}\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-1+\sqrt{-2x-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-1}^{0} f(x,y)\,dy+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{-1}^{-\sqrt{x-1}} f(x,y)\,dy.$$

Завдання 2.1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \mathrm{e}^y\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями $x=1,\quad x=2\quad y=\ln x,\quad y=2x$. Область інтегрування D зобразити на рисунку.

Розв'язання. Зробимо рисунок області D (рис. 3, 4). Задані лінії перетинаються в чотирьох точках $A(1;0)$, $B(2;\ln 2)$, $C(2;4)$, $N(1;2)$. Область D правильна у напрямі осі Oy. У напрямі осі Ox її можна розбити на три правильні області D_1, D_2 і D_3 (рис. 4).

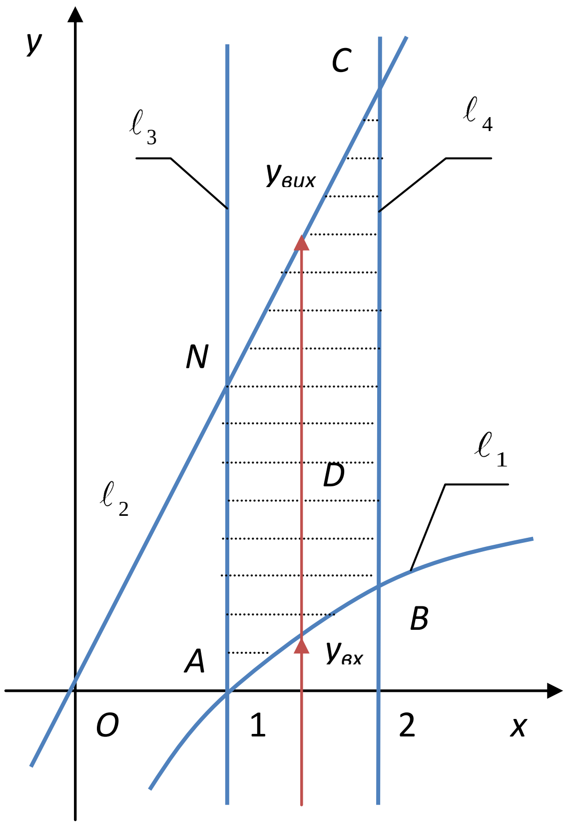


Рис. 3

Оскільки функція $f(x,y)=\mathrm{e}^y$ неперервна на всій площині Oxy і, зокрема в області D, то інтегрування можна проводити як у напрямі осі Ox, так і осі Oy.

1-й спосіб. Проведемо інтегрування у напрямі осі Oy. Область D (рис. 3) обмежена лініями

$$\ell_1:\ \ y_{вх}=\ln x,\qquad \ell_2:\ \ y_{вих}=2x,\qquad \ell_3:\ \ x=1,\qquad \ell_4:\ \ x=2$$

отже, $\quad D=\{(x,y):\ \ 1\le x\le 2,\ \ \ln x\le y\le 2x\}.$

За формулою переходу від подвійного інтеграла до повторного

$$J\overset{\text{У напрямі осі } Oy}{=}\iint\limits_D \mathrm{e}^y\,dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\ln x}^{2x}\mathrm{e}^y\,dy=\int\limits_1^2 \mathrm{e}^y\Big|_{\ln x}^{2x}dx=\int\limits_1^2(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{\ln x})\,dx=$$

$$=\int\limits_1^2(\mathrm{e}^{2x}-x)\,dx=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}-x^2)\Big|_1^2=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^2-3)=\left|\ \mathrm{sh}1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})\ \right|=\mathrm{e}^3\,\mathrm{sh}1-\frac{3}{2}.$$

2-й спосіб. Проведемо інтегрування у напрямі осі Ox. Оскільки межі області D в напрямі осі Ox задані різними рівняннями, то дану область треба розбити на три правильні області D_1, D_2, D_3, які не мають спільних внутрішніх точок (рис. 4). Область D_1 обмежена лініями

$\ell_3: \quad x_{вх}=1, \qquad \ell_1: \quad x_{вих}=e^y,$

$\ell_5: \quad y=\ln 2,$

тому

$$D_1=\{(x,y): \quad 0\le y\le \ln 2, \quad 1\le x\le e^y\}.$$

Область D_2 обмежена лініями

$\ell_3: \quad x_{вх}=1, \qquad \ell_4: \quad x_{вих}=2, \qquad \ell_5: \quad y=\ln 2,$

$\ell_6: \quad y=2,$

тому $\quad D_2=\{(x,y): \quad \ln 2\le y\le 2, \quad 1\le x\le 2\}.$

Область D_3 обмежена лініями

$\ell_3: \quad x_{вх}=\dfrac{y}{2}, \qquad \ell_4: \quad x_{вих}=2, \quad \ell_6: \quad y=2,$

тому $\quad D_3=\{(x,y): \quad 2\le y\le 4, \quad \dfrac{y}{2}\le x\le 2\}.$

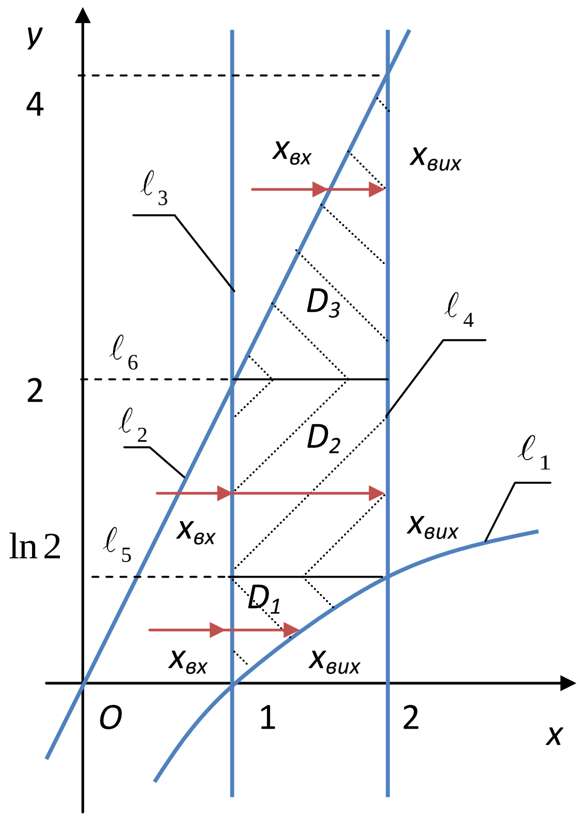


Рис. 4

Використовуючи властивість адитивності подвійного інтеграла по області $D=D_1\cup D_2\cup D_3$ та формулу переходу від подвійного інтеграла до повторного, отримаємо

$$J \overset{\text{У напрямі осі } Ox}{=} \iint\limits_{D} e^y\,dxdy=\iint\limits_{D_1} e^y\,dxdy+\iint\limits_{D_2} e^y\,dxdy+\iint\limits_{D_3} e^y\,dxdy=J_1+J_2+J_3.$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл:

$$J_1=\iint\limits_{D_1} e^y\,dxdy=\int\limits_0^{\ln 2} e^y\,dy\int\limits_1^{e^y} dx=\int\limits_0^{\ln 2} e^y\,x\Big|_1^{e^y}\,dy=\int\limits_0^{\ln 2}(e^{2y}-e^y)\,dy=\frac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^{\ln 2}-e^y\Big|_0^{\ln 2}=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2\ln 2}-1)-(e^{\ln 2}-1)=\frac{1}{2};$$

$$J_2=\iint\limits_{D_2} e^y\,dxdy=\int\limits_{\ln 2}^{2} e^y\,dy\int\limits_1^{2} dx=\int\limits_{\ln 2}^{2} e^y\,x\Big|_1^{2}\,dy=\int\limits_{\ln 2}^{2} e^y\,dy=e^y\Big|_{\ln 2}^{2}=e^2-e^{\ln 2}=e^2-2;$$

$$J_2=\iint\limits_{D_2} e^y\ dxdy=\int\limits_2^4 e^y\ dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} dx=\int\limits_2^4 e^y\ x\Big|_{\frac{y}{2}}^{2} dy=\int\limits_2^4 e^y\left(2-\frac{y}{2}\right)dy=2e^y\Big|_2^4-\frac{1}{2}\int\limits_2^4 y e^y\ dy=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\int udv=uv-\int vdu,\\ u=y,\quad du=dy,\\ dv=e^y\,dy,\quad v=e^y\end{array}\right|=2(e^4-e^2)-\frac{1}{2}\left(ye^y\Big|_2^4-\int\limits_2^4 e^y\ dy\right)=2(e^4-e^2)-$$

$$-\frac{1}{2}(4e^4-2e^2-e^y\Big|_2^4)=2e^4-2e^2-\frac{3}{2}e^4+\frac{1}{2}e^2=\frac{1}{2}e^4-\frac{3}{2}e^2.$$

Отже, $$J=J_1+J_2+J_3=\frac{1}{2}+e^2-2+\frac{1}{2}e^4-\frac{3}{2}e^2=$$

$$=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(e^4-e^2)-\frac{3}{2}=e^3\,\mathrm{sh}1-\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $J=e^3\,\mathrm{sh}1-\dfrac{3}{2}$.

Завдання 2.2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (18x^5y^5-2xy)\,dxdy$ двома способами, якщо область D обмежена лініями $y=-1$, $x=-y^2$, $x=-\sqrt[3]{y}$. Область інтегрування D зобразити на рисунку.

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 5, 6). Задані лінії перетинаються в трьох точках $O(0;0)$, $A(-1;-1)$, $B(1;-1)$. Область D правильна у напрямі осі Ox. У напрямі осі Oy її можна розбити на дві правильні області D_1 і D_2.

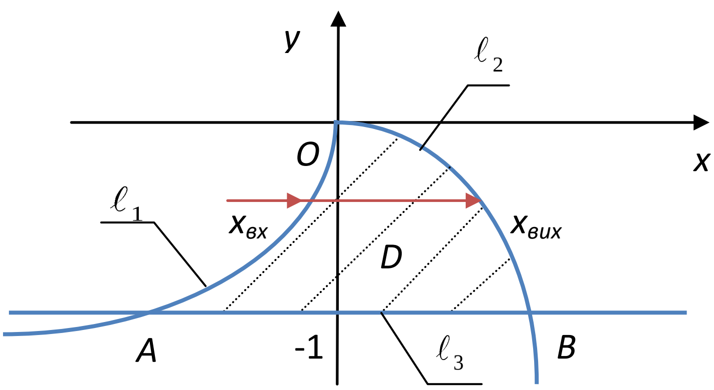


Рис. 5

Оскільки функція $f(x,y)=18x^5y^5-2xy$ неперервна на всій площині Oxy і, зокрема в області D, то інтегрування можна проводити як у напрямі осі Ox, так і осі Oy.

1-й спосіб. Проведемо інтегрування у напрямі осі Ox. Область D (рис. 5) обмежена лініями

$$\ell_1:\quad x_{вх}=-y^2,\qquad \ell_2:\quad x_{вих}=-\sqrt[3]{y},\qquad \ell_3:\quad y=-1,$$

отже, $$D=\{(x,y):\ \ -1\le y\le 0,\ \ -y^2\le x\le -\sqrt[3]{y}\,\}.$$

За формулою переходу від подвійного інтеграла до повторного

$$J\overset{\text{У напрямі осі } Ox}{=}\iint\limits_D(18x^5y^5-2xy)\,dxdy=\int\limits_{-1}^{0}dy\underbrace{\int\limits_{-y^2}^{-\sqrt[3]{y}}(18x^5y^5-2xy)\,dx}_{\text{Внутрішній інтеграл}}.$$

Обчислимо окремо внутрішній інтеграл:

$$\int\limits_{-y^2}^{-\sqrt[3]{y}}(18x^5y^5-2xy)\,dx=(3x^6y^5-x^2y)\Big|_{-y^2}^{-\sqrt[3]{y}}=3y^2y^5-y^{\frac{2}{3}}y-3y^{12}y^5+y^4y=$$

$$=3y^7-y^{\frac{5}{3}}-3y^{17}+y^5.$$

Тоді

$$J=\int\limits_{-1}^{0}(3y^7-y^{\frac{5}{3}}-3y^{17}+y^5)\,dy=\left(\frac{3y^8}{8}-\frac{3y^{\frac{8}{3}}}{8}-\frac{3y^{18}}{18}+\frac{y^6}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=0.$$

2-й спосіб. Проведемо інтегрування в напрямі осі Oy. Оскільки верхня нижня межа області D задана двома різними рівняннями, то дану область треба розбити на дві частини: $D=D_1\cup D_2$, $D_1\cap D_2=\varnothing$ (рис. 6). Область D_1 обмежена лініями

$$\ell_3:\quad y_{вх}=-1\ ,\qquad \ell_1:\quad y_{вих}=\sqrt{-x}\,,\qquad \ell_4:\quad x=0,$$

тому $$D_1=\{(x,y):\ \ -1\le x\le 0,\ \ -1\le y\le\sqrt{-x}\}.$$

Область D_2 обмежена лініями

$$\ell_3: \quad y_{вх} = -1, \quad \ell_2: \quad y_{вих} = -x^3,$$

$$\ell_4: \quad x = 0,$$

тому

$D_2 = \{(x, y): \quad 0 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le -x^3\}.$

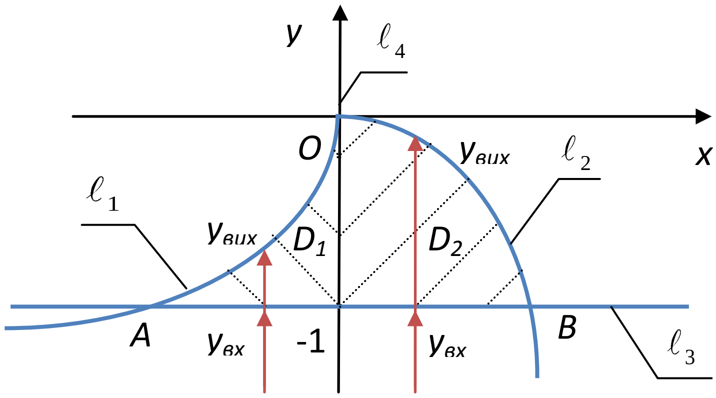


Рис. 6

Використовуючи властивість адитивності подвійного інтеграла по області $D = D_1 \cup D_2$ та формулу переходу від подвійного інтеграла до повторного, отримаємо

$$J \overset{\text{В напрямі осі } Oy}{=} \iint\limits_D (18x^5y^5 - 2xy)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} (18x^5y^5 - 2xy)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (18x^5y^5 - 2xy)\,dxdy = J_1 + J_2 .$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл:

$$J_1 = \iint\limits_{D_1} (18x^5y^5 - 2xy)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1}^{\sqrt{-x}} (18x^5y^5 - 2xy)\,dy = \int\limits_{-1}^{0} (3x^5y^6 - xy^2)\Big|_{-1}^{\sqrt{-x}} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (3x^5(-x)^3 - x(-x) - 3x^5 + x)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} (-3x^8 + x^2 - 3x^5 + x)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^9}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$J_2 = \iint\limits_{D_2} (18x^5y^5 - 2xy)\,dxdy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1}^{-x^3} (18x^5y^5 - 2xy)\,dy = \int\limits_{0}^{1} (3x^5y^6 - xy^2)\Big|_{-1}^{-x^3} dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} (3x^{23} - x^7 - 3x^5 + x)dx = \left(\frac{x^{24}}{8} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Отже, $J = J_1 + J_2 = 0$.

Відповідь: $J = 0$.

Кратні інтеграли

При обчисленні подвійного інтеграла важливо обирати той напрямок інтегрування, який дозволяє спростити обчислення.

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_D (2x+1)\dfrac{\sin\pi(x+y)}{\cos^3\pi(x+y)}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=-x$, $y=x^2+\dfrac{1}{4}$, $x=0$.

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 7), яка обмежена лініями ℓ_1: $y=-x$, ℓ_2: $y=x^2+\dfrac{1}{4}$, ℓ_3: $x=0$.

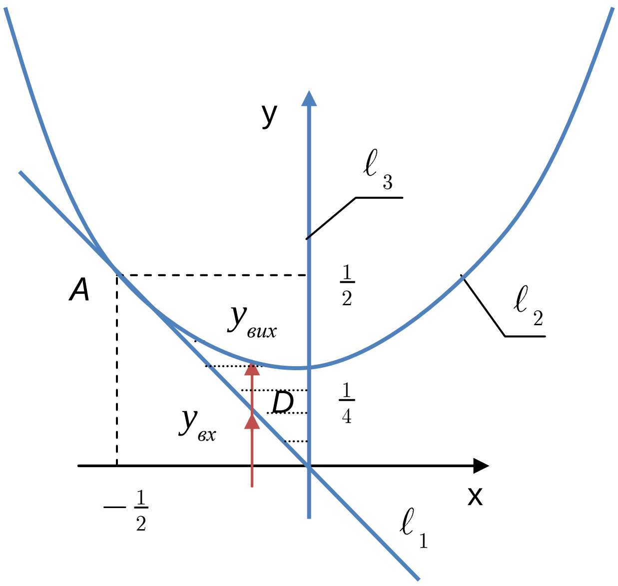


Рис. 7

Знайдемо координати точки A перетину ліній ℓ_1 та ℓ_2:

$$\begin{cases} y=-x, \\ y=x^2+\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x, \\ x^2+x+\dfrac{1}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x, \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

В даному випадку інтегрування доцільно проводити у напрямі осі Oy. Область D – правильна у напрямі осі Oy і має такий вигляд:

$$D=\left\{(x,y):\ -\frac{1}{2}\le x\le 0,\quad -x\le y\le x^2+\frac{1}{4}\right\}.$$

За формулою переходу від подвійного інтеграла до повторного

$$J=\iint\limits_D (2x+1)\frac{\sin\pi(x+y)}{\cos^3\pi(x+y)}\,dxdy=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}(2x+1)dx\int\limits_{-x}^{x^2+\frac{1}{4}}\frac{\sin\pi(x+y)}{\cos^3\pi(x+y)}\,dy=$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(2x+1)dx\int_{-x}^{x^2+\frac{1}{4}}\frac{d(\cos\pi(x+y))}{\cos^3\pi(x+y)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(2x+1)\frac{1}{\cos^2\pi(x+y)}\Bigg|_{-x}^{x^2+\frac{1}{4}}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(2x+1)\left(\frac{1}{\cos^2\pi(x^2+x+\frac{1}{4})}-1\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(2x+1)\left(\frac{1}{\cos^2\pi(x+\frac{1}{2})^2}-1\right)dx =$$

$$= \left| d\left(\pi(x+\tfrac{1}{2})^2\right) = \pi(2x+1)dx \right| = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{d\left(\pi(x+\frac{1}{2})^2\right)}{\cos^2\left(\pi(x+\frac{1}{2})^2\right)}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(2x+1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\operatorname{tg}\left(\pi(x+\tfrac{1}{2})^2\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} - \frac{1}{2\pi}(x^2+x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{1}{2\pi^2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8\pi} = \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{8\pi}.$$

Зауваження. Обчислення цього інтеграла у напрямі осі Ox пов′язане з труднощами і не приведе до бажаного результата (переконайтеся в цьому самостійно).

Відповідь: $J = \dfrac{4-\pi}{8\pi^2}$.

Завдання 4 а). Знайти площу області D, яка задана нерівностями $\rho \le 4(1+\sin\varphi)$, $\quad \rho \ge \dfrac{3}{\sin\varphi}$.

Розв'язання. Зробимо рисунок області D, яка обмежена заданими нерівностями. Крива ℓ_1: $\rho = 4(1+\sin\varphi)$ – кардіоїда. Для її побудови складемо таблицю значень для кута φ, надаючи йому значення через певні проміжки, наприклад через $\frac{\pi}{2}$:

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\rho = 4(1+\sin\varphi)$	4	8	4	0	4

;

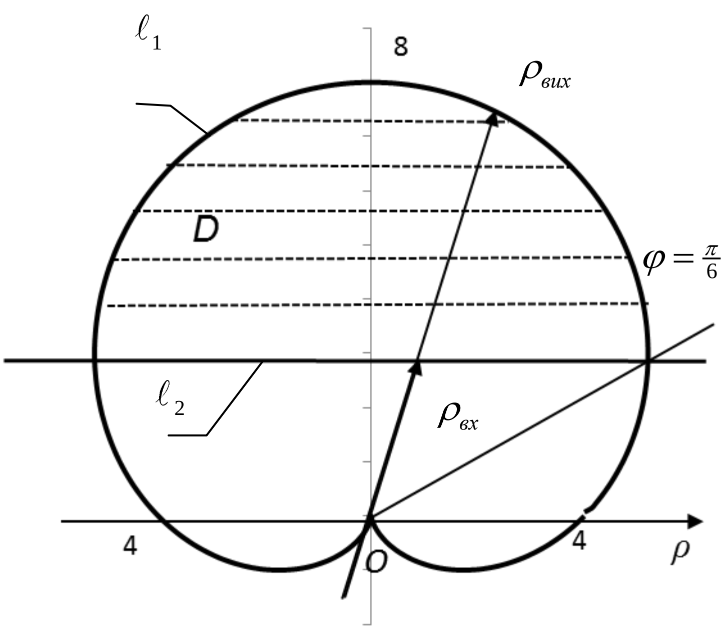


Рис. 8

Лінія ℓ_2: $\rho = \dfrac{3}{\sin\varphi} \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi = 3$ –

пряма, яка паралельна осі Op. Дійсно, оскільки в полярній системі координат $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases}$ то рівняння лінії ℓ_2 в декартових координатах має вигляд $\ell_2:\quad y=3$.

Знайдемо полярні кути точок, в яких перетинаються лінії ℓ_1 та ℓ_2:

$$\begin{cases} \rho=4(1+\sin\varphi), \\ \rho\sin\varphi=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{\sin\varphi}=4(1+\sin\varphi), \\ \rho\sin\varphi=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4\sin^2\varphi+4\sin\varphi-3=0, \\ \rho\sin\varphi=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi=\dfrac{1}{2}, \\ \rho=6. \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Опишемо область D^* в полярній системі координат:

$$D^*=\left\{(\rho,\varphi):\ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{5\pi}{6},\ \ \frac{3}{\sin\varphi}\le\rho\le 4(1+\sin\varphi)\right\}.$$

Площу області D будемо обчислювати за формулою

$$S_D=\iint\limits_D dxdy \overset{ПСК}{=} \iint\limits_{D^*}\rho\, d\rho d\varphi.$$

У силу симетрії області D^* можна записати

$$S_D=2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{\frac{3}{\sin\varphi}}^{4(1+\sin\varphi)}\rho\, d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\Big|_{\frac{3}{\sin\varphi}}^{4(1+\sin\varphi)}d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}16(1+\sin\varphi)^2d\varphi-9\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}=$$

$$=16\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+2\sin\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi+9\,\mathrm{ctg}\,\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=16\left(\frac{3}{2}-2\cos\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-9\sqrt{3}=$$

$$=16\left(\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right)-9\sqrt{3}=16\left(\frac{\pi}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)-9\sqrt{3}=8\pi+9\sqrt{3}\ \text{(од}^2\text{)}.$$

Відповідь: $S_D=8\pi+9\sqrt{3}$ (од^2).

Завдання 4 а). Знайти площу області D, яка задана нерівностями $\rho \le -\sqrt{3}\sin\varphi, \quad \rho \ge 1+\cos\varphi$.

Розв'язання. Зробимо рисунок області D (рис. 9). Для побудови кардіоїди $\rho = 1+\cos\varphi$ складемо таблицю значень для кута φ, надаючи йому значення через певні проміжки, наприклад через $\frac{\pi}{2}$:

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\rho = 1+\cos\varphi$	2	1	0	1	2

.

Знайдемо полярні кути точок перетину кардіоїди ℓ_1: $1+\cos\varphi$ та кола ℓ_2: $\rho = -\sqrt{3}\sin\varphi$.

$$\begin{cases} \rho = -\sqrt{3}\sin\varphi, \\ \rho = 1+\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2} + 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}} + 1 = 0$$

$$2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} + 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

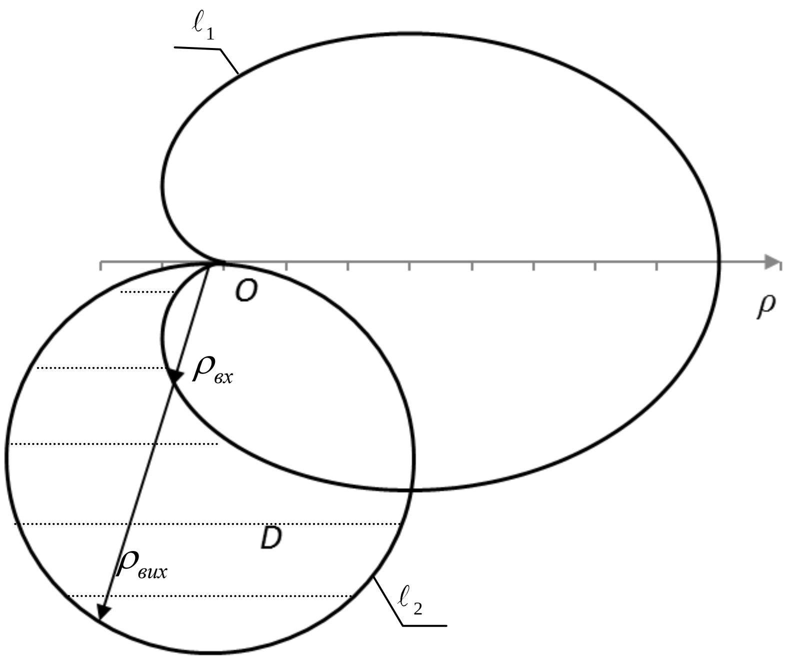


Рис. 9

Опишемо область D^* у полярній системі координат

$$D^* = \left\{(\rho,\varphi):\quad -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{3},\quad 1+\cos\varphi \le \rho \le -\sqrt{3}\sin\varphi\right\}.$$

Площу області D будемо обчислювати за формулою

$$S_D = \iint\limits_D dxdy \overset{ПСК}{=} \iint\limits_{D^*} \rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{1+\cos\varphi}^{-\sqrt{3}\sin\varphi} \rho\, d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} \rho^2 \Big|_{1+\cos\varphi}^{-\sqrt{3}\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} (3\sin^2\varphi - (1+\cos\varphi)^2)\,\Big| d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 2\varphi - 1 - 2\cos\varphi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} (-2\cos\varphi - 2\cos 2\varphi)\, d\varphi = -(\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ (од}^2\text{)}.$$

Відповідь: $S_D = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (од^2).

Завдання 4 б). Знайти площу області D, яка задана нерівностями $y^2 + 2y + x^2 \geq 0$, $y^2 + 6y + x^2 \leq 0$, $y \geq -x$, $y \leq 0$.

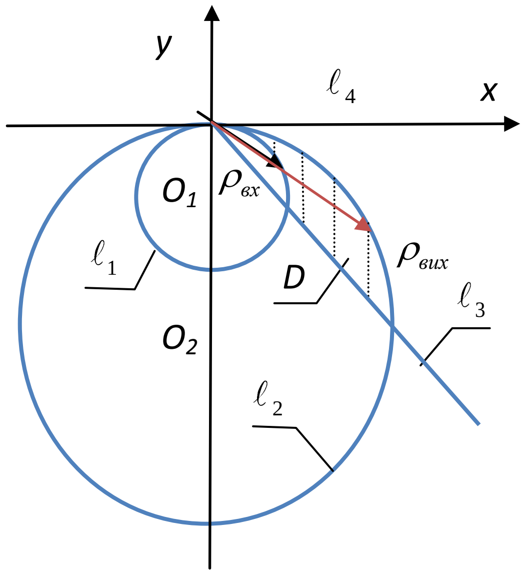


Рис. 10

Розв'язання. Визначимо тип ліній, якими обмежена область D:

$\ell_1: \quad y^2 + 2y + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y^2 + 2y + 1) = 1$

$\Rightarrow \quad x^2 + (y+1)^2 = 1$ – коло з центром в точці $O_1(0;-1)$ і радіусом $R_1 = 1$;

$\ell_2: \quad y^2 + 10y + x^2 = 0 \quad \Rightarrow$

$x^2 + (y^2 + 6y + 9) = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y+3)^2 = 9$ – коло з центром в точці $O_2(0;-3)$ і радіусом $R_2 = 3$.

Побудуємо область D (рис. 10). Перейдемо до полярної системи координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & x^2 + y^2 = \rho^2, \\ y = \rho\sin\varphi, & dxdy = \rho d\rho d\varphi. \end{cases}$$

У полярній системі координат рівняння заданих ліній та область D набувають вигляду:

$\ell_1: \quad y^2 + 2y + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 + 2\rho\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = -2\sin\varphi;$

$\ell_2: \quad y^2 + 6y + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 + 6\rho\sin\varphi = 0 \Rightarrow \quad \rho = -6\sin\varphi;$

$$\ell_3: \; y=-x \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi=-\rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\varphi=-1 \;\Rightarrow\; \varphi=-\frac{\pi}{4}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z};$$

$$\ell_4: \; y=0 \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi=0 \;\Rightarrow\; \varphi=\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$D^*=\left\{(\rho,\varphi): \; -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le 0, \; -2\sin\varphi\le\rho\le -6\sin\varphi\right\}.$$

Площу області D будемо обчислювати за формулою

$$S_D=\iint\limits_D dxdy \overset{ПСК}{=} \iint\limits_{D^*}\rho\, d\rho d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\varphi\int\limits_{-2\sin\varphi}^{-6\sin\varphi}\rho\, d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{-2\sin\varphi}^{-6\sin\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(36\sin^2\varphi-4\sin^2\varphi)\,d\varphi=16\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin^2\varphi\, d\varphi=8\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=8(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=8\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\pi-4 \text{ (од}^2).$$

Відповідь: $S_D=2\pi-4$ (од^2).

Завдання 5 а). Знайти масу плоскої пластини D: $\left\{x=-\sqrt{18-y^2}, \; x=-3\sqrt{2}+\sqrt{18-y^2}\right\}$ з поверхневою густиною $\mu(x,y)=12\sqrt{2}y$.

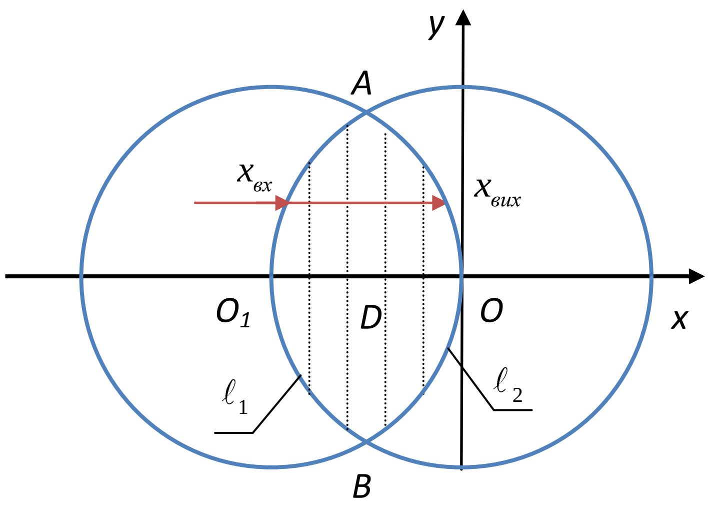


Рис. 11

Розв'язання. Визначимо тип ліній, якими обмежена область D:

$x=-\sqrt{18-y^2} \;\Rightarrow\; x^2+y^2=18$ – коло з центром в точці $O(0;0)$ і радіусом $R=3\sqrt{2}$, отже, крива $\ell_1: \; x=-\sqrt{18-y^2}$ – ліва половина цього кола.

$x=-3\sqrt{2}+\sqrt{18-y^2} \quad \Rightarrow \quad x+3\sqrt{2}=\sqrt{18-y^2} \quad \Rightarrow \quad (x+3\sqrt{2})^2+y^2=18$ – коло з центром в точці $O_1(-3\sqrt{2};0)$ і радіусом $R=3\sqrt{2}$, отже, крива $\ell_2: \quad x=-3\sqrt{2}+\sqrt{18-y^2}$ – права половина цього кола (рис. 11).

Знайдемо точки перетину ліній ℓ_1 та ℓ_2

$$\begin{cases} x=-\sqrt{18-y^2}, \\ x=-3\sqrt{2}+\sqrt{18-y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{18-x^2}, \\ x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Отже, лінії ℓ_1 та ℓ_2 перетинаються в точках $A\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), B\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};-\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

У даному випадку інтегрування доцільно проводити у напрямі осі Ox, оскільки для інтегрування в напрямі осі Oy область D потрібно буде розбити на дві області. Область D – правильна у напрямі осі Ox, тому

$$D=\left\{(x,y): \quad -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\le y\le\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad -\sqrt{18-y^2}\le x\le -3\sqrt{2}+\sqrt{18-y^2}\right\}.$$

Масу неоднорідної пластини, яка займає область D, будемо обчислювати за формулою $m_D=\iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy$. Використовуючи симетрію області D і формулу переходу від подвійного інтеграла до повторного, можна записати:

$$m_D=\iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D 12\sqrt{2}y\,dxdy=24\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} y\,dy\int\limits_{-\sqrt{18-y^2}}^{-3\sqrt{2}+\sqrt{18-y^2}} dx=$$

$$=24\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} y\,(-3\sqrt{2}+2\sqrt{18-y^2})\,dy=-72\,y^2\Big|_0^{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}-24\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\sqrt{18-y^2}\,d(18-y^2)=$$

$$=-972-16\sqrt{2}\,(18-y^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=-972-16\sqrt{2}\left(\frac{27}{2\sqrt{2}}-54\sqrt{2}\right)=540 \text{ (од. маси).}$$

Відповідь: $m_D = 540$ (од. маси).

Завдання 5 б). Знайти масу плоскої пластини D: $\left\{1 \le x^2 + \frac{y^2}{4} \le 4, \quad y \le 0, \quad y \ge 2x\right\}$, з поверхневою густиною $\mu(x,y) = \frac{32y}{x^3\sqrt{4x^2+y^2}}$.

Розв'язання. Область D (рис. 12) обмежена лініями:

ℓ_1: $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ – еліпс з півосями $a=1,\quad b=2$;

ℓ_2: $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$ – еліпс з півосями $a=2,\quad b=4$;

ℓ_3: $y = 2x$ – пряма, яка проходить через початок координат;

ℓ_4: $y = 0$ – вісь Ox.

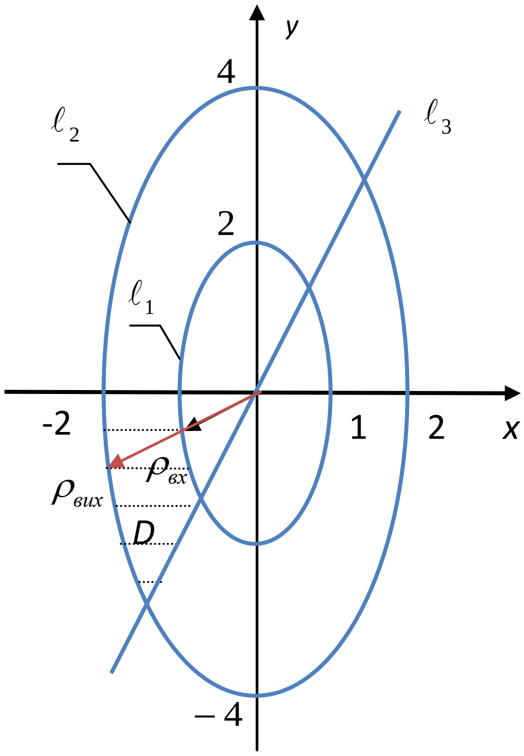


Рис. 12

Перейдемо до **узагальненої полярної системи координат:**

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi = \rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi = 2\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

В узагальненій полярній системі координат рівняння ліній матимуть вигляд:

$$\ell_1: \quad \rho^2\cos^2\varphi + \frac{4\rho^2\sin^2\varphi}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = 1;$$

$$\ell_2: \quad \rho^2\cos^2\varphi + \frac{4\rho^2\sin^2\varphi}{4} = 4 \quad \Rightarrow \quad \rho = 2;$$

$$\ell_3:\quad y=2x \quad\Rightarrow\quad 2\rho\sin\varphi=2\rho\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \mathrm{tg}\,\varphi=1 \quad\Rightarrow\qquad \varphi=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z};$$

$$\ell_4:\quad y=0\quad (y\le 0) \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi=0 \quad\Rightarrow\qquad \varphi=\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Опишемо область інтегрування D^* в узагальненій полярній системі координат:

$$D^*=\left\{(\rho,\varphi):\quad \pi\le\varphi\le\frac{5\pi}{4},\quad 1\le\rho\le 2\right\}.$$

Масу неоднорідної пластини, яка займає область D, будемо обчислювати за формулою

$$m_D=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*}\mu(a\rho\cos\varphi,b\rho\sin\varphi)\left|J(\rho,\varphi)\right|d\rho d\varphi\,.$$

Обчислимо визначник Якобі

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi\\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=ab\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=ab\rho=2\rho.$$

Поверхнева густина $\mu(x,y)=\dfrac{32y}{x^3\sqrt{4x^2+y^2}}$ після заміни змінних матиме вигляд

$$\mu(a\rho\cos\varphi,a\rho\sin\varphi)=\frac{64\rho\sin\varphi}{\rho^3\cos^3\varphi\sqrt{4\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}=\frac{32\sin\varphi}{\rho^3\cos^3\varphi}\,.$$

Отже, маса пластини D

$$m_D=\iint\limits_{D^*}\mu(a\rho\cos\varphi,b\rho\sin\varphi)\cdot\left|J(\rho,\varphi)\right|d\rho d\varphi=\iint\limits_{D^*}\frac{32\sin\varphi}{\rho^3\cos^3\varphi}\cdot 2\rho\, d\rho d\varphi=$$

$$=-64\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{d(\cos\varphi)}{\cos^3\varphi}\int\limits_1^2\frac{d\rho}{\rho^2}=-\frac{32}{\cos^2\varphi}\Bigg|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\rho}\Bigg|_1^2=16\left(\frac{1}{\cos^2\frac{5\pi}{4}}-\frac{1}{\cos^2\pi}\right)=16 \text{ (од. маси).}$$

Відповідь: 1. $m_D=16$ (од. маси);

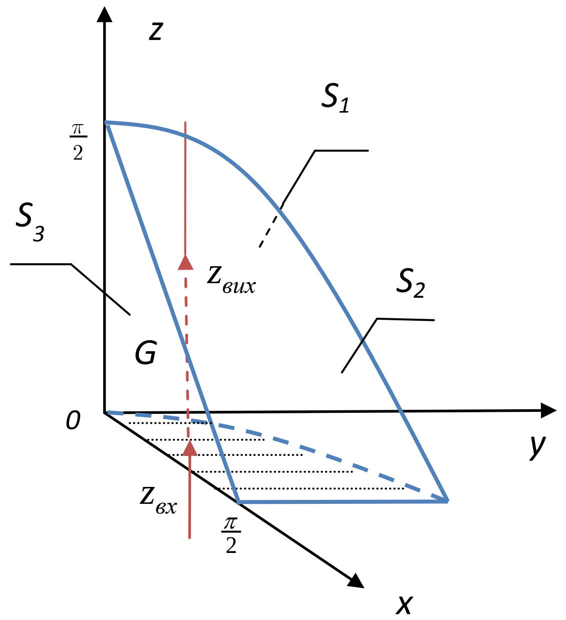


Рис. 13

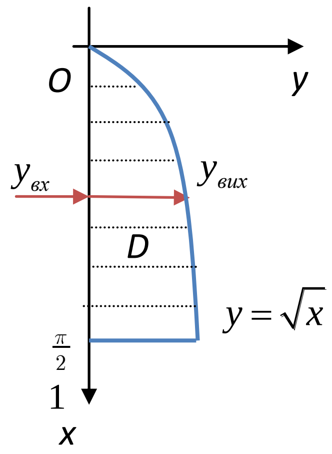


Рис. 14

Завдання 6.1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G y\cos(z+x)\,dxdydz$, якщо область G обмежена поверхнями $y=\sqrt{x}$, $x+z=\dfrac{\pi}{2}$, $y=0$, $z=0$.

Розв'язання. Побудуємо область G (рис. 13) та її проекцію на площину Oxy (рис. 14). Область G обмежена поверхнями:

S_1: $y=\sqrt{x}$ — циліндр, твірні якого паралельні осі Oz, а напрямною є парабола $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ z=0 \end{cases}$ в площині Oxy.

S_2: $x+z=\dfrac{\pi}{2}$ -– площина, яка паралельна осі Oy та відтинає осей Ox та Oz відрізки довжиною $\dfrac{\pi}{2}$;

S_3: $y=0$ — координатна площина Oxz;

S_4: $z=0$ — координатна площина Oxy.

Опишемо область інтегрування

$$G=\left\{(x,y,z):\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le y\le\sqrt{x},\quad 0\le z\le\frac{\pi}{2}-x\right\}$$

та розставимо межі інтегрування в потрійному інтегралі. За формулою переходу від потрійного інтеграла до повторного

$$J=\iiint\limits_G y\cos(z+x)\,dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}y\,dy\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(z+x)\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}y\sin(z+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}dy=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}y\,(1-\sin x)\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,(1-\sin x)\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\left|\begin{array}{l}\int udv=uv-\int vdu,\\ u=x,\quad du=dx,\\ dv=\sin xdx,\quad v=-\cos x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\left(\underbrace{-x\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right)=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $J=\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}$.

Завдання 6.2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,z\,dxdydz$, якщо область G обмежена поверхнями $z=\sqrt{10x}$, $x=y$, $y=2$ $z=0$.

Розв'язання. Побудуємо область G (рис. 15) та її проекцію на площину Oxy – область D (рис. 16). Область G обмежена поверхнями:

S_1: $z=\sqrt{10x}$ — параболічний циліндр, напрямною якого є парабола $\begin{cases}z=\sqrt{10x},\\ y=0\end{cases}$ в площині Oxz, а твірні паралельні осі Oy;

S_2: $x=y$ — площина, яка проходить через вісь Oz;

S_3: $y=2$ — площина, яка паралельна площині Oxz;

S_4: $z=0$ — координатна площина Oxy.

Опишемо область інтегрування

$$G=\{(x,y,z):\quad 0\le y\le 2,\quad 0\le x\le y,\quad 0\le z\le\sqrt{10x}\}.$$

Обчислимо інтеграл, використовуючи формулу переходу від потрійного

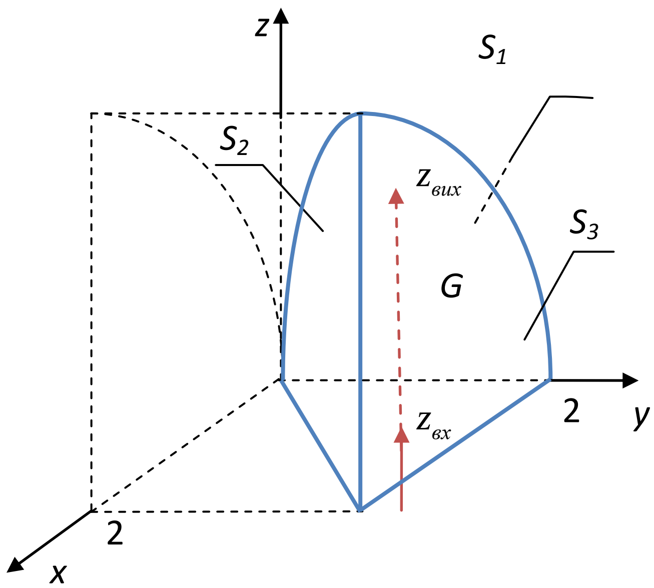


Рис. 15

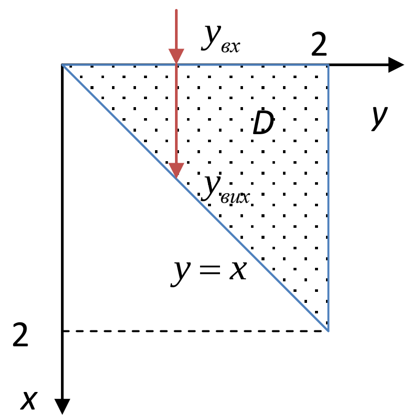


Рис. 16

інтеграла до повторного по правільній у напрямі осі Oz області G

$$J=\iiint\limits_G (x^2+y^2)\cdot z\,dxdydz=\int_0^2 dy\int_0^y (x^2+y^2)\,dx\int_0^{\sqrt{10x}} z\,dz=$$

$$=\int_0^2 dy\int_0^y (x^2+y^2)\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{\sqrt{10x}} dx=5\int_0^2 dy\int_0^y (x^3+y^2\,x)\,dx=3\int_0^2\left.\left(\frac{x^4}{4}+y^2\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^y dy=$$

$$=5\int_0^2\left(\frac{y^4}{4}+\frac{y^4}{2}\right)dy=\frac{15}{4}\int_0^2 y^5\,dy=\frac{3}{4}\left.y^5\right|_0^2=24.$$

Відповідь: $J=24$.

Завдання 7.1. Знайти масу тіла, яке займає область G: $z=\frac{7}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\frac{9}{2}-x^2-y^2$ та густина якого $\mu(x,y,z)=\dfrac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Розв'язання. Побудуємо область G (рис. 17). Область G — правильна у напрямі осі Oz та обмежена поверхнями:

S_1: $z=\frac{7}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ — коловий півконус з віссю симметрії Oz;

S_2: $z=\frac{9}{2}-x^2-y^2$ — параболоїд з віссю симметрії Oz та вершиною в точці $O_1\left(0;0;\frac{9}{2}\right)$.

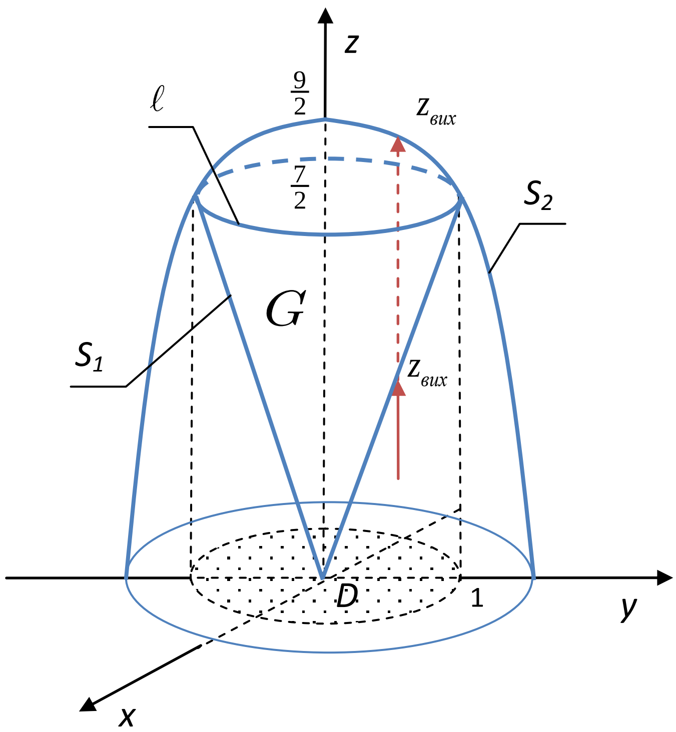


Рис. 17

Перейдемо до **циліндричної системи координат**

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x^2+y^2=\rho^2, \\ &dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz. \end{aligned}$$

Запишемо кожну поверхню в циліндричній системі координат:

$$S_1:\quad z=\frac{7}{2}\sqrt{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad z=\frac{7}{2}\rho;$$

$$S_2:\quad z=\frac{9}{2}-x^2-y^2 \quad\Rightarrow\quad z=\frac{9}{2}-\rho^2.$$

Знайдемо лінію ℓ перетину заданих поверхонь S_1 та S_2:

$$\begin{cases} z = \dfrac{7}{2}\rho, \\ z = \dfrac{9}{2} - \rho^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{7}{2}\rho, \\ \rho^2 + \dfrac{7}{2}\rho - \dfrac{9}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \ell: \begin{cases} z = \dfrac{7}{2}, \\ \rho = 1. \end{cases}$$

Отже, ℓ — коло радіуса $R=1$, яке лежить у площині $z = \frac{7}{2}$. Проекцією даного тіла на площину Oxy є область D.

Запишемо область інтегрування в ЦСК:

$$G^* = \left\{(\rho,\varphi,z):\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\quad 0 \le \rho \le 1,\quad \frac{7}{2}\rho \le z \le \frac{9}{2} - \rho^2\right\}.$$

Масу тіла будемо обчислювати за формулою

$$m_G = \iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_G \frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz \overset{ЦСК}{=} 6\iiint\limits_{G^*} \frac{1}{\rho}\cdot \rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{\frac{7}{2}\rho}^{\frac{9}{2}-\rho^2} dz = 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 z\Big|_{\frac{7}{2}\rho}^{\frac{9}{2}-\rho^2} d\rho = 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - \rho^2 - \frac{7}{2}\rho\right) d\rho =$$

$$= 12\pi\left(\frac{9}{2}\rho - \frac{\rho^3}{3} - \frac{7}{4}\rho^2\right)\Bigg|_0^1 = 12\pi\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{3} - \frac{7}{4}\right) = 29\pi \text{ (од. маси).}$$

Відповідь: $m_G = 29\pi$ (од. маси).

Завдання 7.2. Знайти масу тіла, яке займає область G: $y^2 + z^2 = a^2$, $ax = y^2 + z^2$ та густина якого $\mu(x,y,z) = \dfrac{5x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

Розв'язання. Побудуємо область G та її проекцію D на площину Oxy (рис. 18). Область G — правильна в напрямі осі Ox та обмежена поверхнями:

S_1: $y^2 + z^2 = a^2$ — коловий циліндр, напрямною якого є коло $\begin{cases} y^2 + z^2 = a^2, \\ x = 0, \end{cases}$ а твірні паралельні осі Ox;

$S_2: \quad x = \dfrac{1}{a}(y^2 + z^2)$ — параболоїд обертання з віссю симметрії Ox та вершиною в точці $O(0;0;0)$.

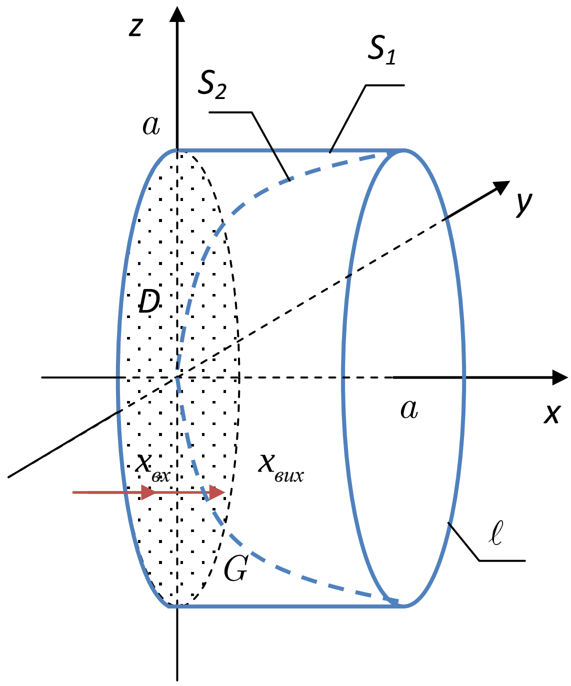


Рис. 18

Перейдемо до **циліндричної системи координат**

$$\begin{cases} y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \\ x = x, \end{cases} \qquad \begin{gathered} y^2 + z^2 = \rho^2, \\ dxdydz = \rho d\rho d\varphi dx. \end{gathered}$$

Запишемо рівняння кожної поверхні в циліндричній системі координат:

$$S_1: \quad y^2 + z^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = a;$$

$$S_2: \quad x = \frac{1}{a}(y^2 + z^2) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\rho^2}{a}.$$

Лінією ℓ перетину заданих поверхонь S_1 та S_2 є коло $\rho = a$, яке лежить в площині $x = a$. Область інтегрування в ЦСК буде мати такий вигляд

$$G^* = \left\{ (\rho, \varphi, z): \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le a, \quad 0 \le z \le \frac{\rho^2}{a} \right\}.$$

Масу тіла будемо обчислювати за формулою

$$m_G = \iiint\limits_G \mu(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_G \frac{5x}{\sqrt{y^2 + z^2}}\, dxdydz \overset{ЦСК}{=} 5 \iiint\limits_{G^*} \frac{x}{\rho} \cdot \rho\, d\rho d\varphi dx =$$

$$= 5\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \int_0^{\frac{\rho^2}{a}} x\, dx = 10\pi \int_0^a \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\frac{\rho^2}{a}} d\rho = \frac{5\pi}{a^2}\int_0^a \rho^4 d\rho = \frac{5\pi}{a^2} \left. \frac{\rho^5}{5} \right|_0^a = \pi a^3 \text{ (од. маси).}$$

Відповідь: $m_G = \pi a^3$ (од. маси).

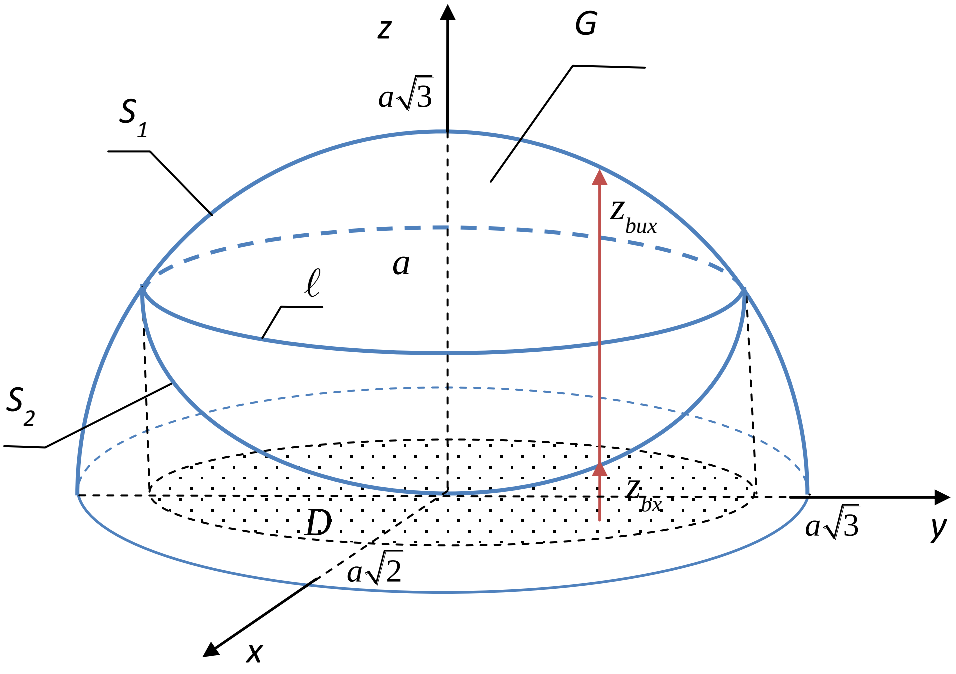


Рис. 19

Завдання 7.3. Знайти масу тіла, яке займає область G: $2az = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ та густина якого $\mu(x, y, z) = (x + y + z)^2$.

Розв'язання. Побудуємо область G (рис. 19). Область G — правильна у напрямі осі Oz та обмежена поверхнями:

S_1: $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ – півсфера з центром в точці $O(0;0;0)$ і радіусом $R = a\sqrt{3}$;

S_2: $2az = x^2 + y^2$ — коловий параболоїд з віссю симметрії Oz та вершиною в точці $O(0;0;0)$.

Перейдемо до **циліндричної системи координат:**

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \rho^2, \\ dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz. \end{array}$$

Запишемо рівняння кожної поверхні в циліндричній системі координат:

$$S_1: \quad z = \sqrt{3a^2 - (x^2 + y^2)} \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{3a^2 - \rho^2};$$

$$S_2: \quad z = \frac{x^2 + y^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\rho^2}{2a}.$$

Знайдемо лінію ℓ перетину заданих поверхонь S_1 та S_2:

$$\begin{cases} 2az = \rho^2, \\ z^2 + \rho^2 = 3a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2az = \rho^2, \\ z^2 + 2az - 3a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ell: \begin{cases} z = a, \\ \rho = a\sqrt{2}. \end{cases}$$

Отже, ℓ — коло радіуса $R = a\sqrt{2}$, яке лежить у площині $z = a$. Проекцією даного тіла на площину Oxy є область D.

Область інтегрування в ЦСК матиме такий вигляд:

$$G^* = \left\{ (\rho, \varphi, z): \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le a\sqrt{2}, \quad \frac{\rho^2}{2a} \le z \le \sqrt{3a^2 - \rho^2} \right\}.$$

Масу тіла будемо обчислювати за формулою

$$m_G = \iiint\limits_G \mu(x, y, z)\, dxdydz \overset{ЦСК}{=} \iiint\limits_{G^*} \mu(\rho, \varphi, z)\, \rho d\rho d\varphi dz\,.$$

Густина $\mu(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2(x + y)z$ після заміни змінних матиме вигляд $\mu(\rho, \varphi, z) = \rho^2 + z^2 + \rho^2 \sin 2\varphi + 2\rho(\cos\varphi + \sin\varphi)z$. Тоді за властивістю лінійності потрійного інтеграла, маса тіла

$$m_G = \iiint\limits_{G^*} \left(\rho^2 + z^2 + \rho^2 \sin 2\varphi + 2\rho(\cos\varphi + \sin\varphi)\, z \right) \rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= \iiint\limits_{G^*} (\rho^2 + z^2)\, \rho d\rho d\varphi dz + \iiint\limits_{G^*} \rho^3 \sin 2\varphi\, d\rho d\varphi dz + 2\iiint\limits_{G^*} \rho^2 (\cos\varphi + \sin\varphi) z\, d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \rho d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-\rho^2}} (\rho^2 + z^2)\, dz + \int\limits_0^{2\pi} \sin 2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-\rho^2}} dz +$$

$$+2\int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \rho^2 d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-\rho^2}} z\, dz = I_1 + I_2 + I_2.$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл. Два останніх інтеграла $I_2 = I_3 = 0$, оскільки

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin 2\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{та} \quad \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\, d\varphi = (\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 0, \text{ тому}$$

$$m_G = I_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \rho d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-\rho^2}} (\rho^2 + z^2)\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \rho \left(\rho^2 z + \frac{z^3}{3} \right)\Bigg|_{\frac{\rho^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-\rho^2}} d\rho =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \rho \left(\rho^2 (3a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(3a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\rho^4}{2a} - \frac{1}{24}\frac{\rho^6}{a^3} \right) d\rho =$$

$$= \pi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \left((3a^2 - \rho^2 - 3a^2)(3a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(3a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right) d(3a^2 - \rho^2) -$$

$$-2\pi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \left(\frac{\rho^5}{2a} + \frac{1}{24}\frac{\rho^7}{a^3} \right) d\rho = \pi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}(3a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - 3a^2 (3a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \right) d(3a^2 - \rho^2) -$$

$$-\frac{\pi}{6}\left(\frac{\rho^6}{a} + \frac{1}{16}\frac{\rho^8}{a^3} \right)\Bigg|_0^{a\sqrt{2}} = \pi \left[\frac{4}{15}(3a^2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} - 2a^2 (3a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a\sqrt{2}} - \frac{3\pi a^5}{2} =$$

$$= \frac{\pi a^5}{15}(54\sqrt{3} - 26) - \frac{3\pi a^5}{2} = \pi a^5 \left(\frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{97}{30} \right) \text{ (од. маси).}$$

Відповідь: $m_G = \dfrac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \dfrac{97}{6} \right)$ (од. маси).

Завдання 8.1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = 4 - y^2$, $y = 0$ $(y \ge 0)$, $z = 0$, $3x + 2y = 6$, $3x + 4y = 12$. Зробити схематичний рисунок.

Розв'язання. Побудуємо область G (рис. 20) та її проекцію – область D на площину Oxy (рис. 21).

Область G — правильна у напрямі осі Oz та обмежена поверхнями:

$S_1: \;\; z = 4 - y^2$ — параболічний циліндр, напрямною якого є парабола $\begin{cases} z = 4 - y^2, \\ x = 0 \end{cases}$ в площині Oyz, а твірні паралельні осі Ox;

$S_2: \;\; 3x + 2y = 6$ — площина, яка паралельна осі Oz та відтинає на осях Ox, Oy відрізки довжиною 2 та 3;

$S_3: \;\; 3x + 4y = 12$ — площина, яка паралельна осі Oz та відтинає на осях Ox, Oy відрізки довжиною 4 та 3;

$S_4: \;\; y = 0, \;\; (y \ge 0), \;\; S_5: \;\; z = 0$ – координатні площини Oxz, Oxy.

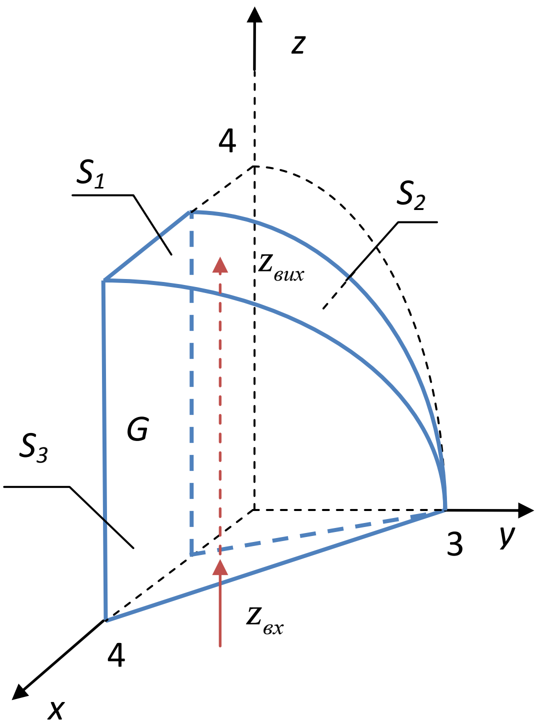


Рис. 20

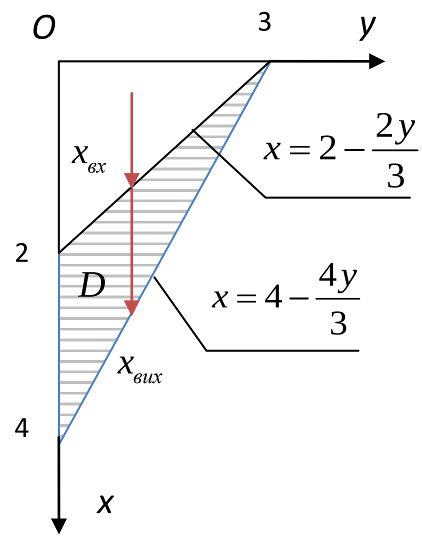


Рис. 21

Об’єм тіла будемо обчислювати за формулою

$$V = \iiint\limits_G dxdydz\,,$$

де область G має такий вигляд

$$G = \left\{ (x, y, z): \;\; 0 \le y \le 3, \;\; 2 - \frac{2y}{3} \le y \le 4 - \frac{4y}{3}, \;\; 0 \le z \le 4 - y^2 \right\}.$$

За формулою переходу від потрійного інтеграла до повторного

$$V=\iiint\limits_G dxdydz=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{2-\frac{2y}{3}}^{4-\frac{4y}{3}}dx\int\limits_0^{4-y^2}dz=\int\limits_0^3(4-y^2)dy\int\limits_{2-\frac{2y}{3}}^{4-\frac{4y}{3}}dx=\int\limits_0^3(4-y^2)\left(4-\frac{4y}{3}-2+\frac{2y}{3}\right)dy=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_0^3(4-y^2)(3-y)\,dy=\frac{2}{3}\int\limits_0^3(y^3-3y^2-4y+12)\,dy=\frac{2}{3}\left(\frac{y^4}{4}-y^3-2y^2+12y\right)\Bigg|_0^3=7{,}5\ (\text{од}^3).$$

Відповідь: $V=7{,}5$ (од^3).

Завдання 8.2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=a^2$, $x+y+z=2a$ $(a>0)$, $x+y+z=4a$.

Розв'язання. Побудуємо тіло G, яке обмежене поверхнями S_1, S_2 та S_3 (рис. 22).

$S_1:\ x^2+y^2=a^2$ — коловий циліндр, напрямною якого є коло $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=0\end{cases}$ в площині Oxy, а твірні паралельні осі Oz;

$S_2:\ x+y+z=2a$ — похила площина, яка відтинає від координатних осей відрізки довжиною $2a$;

$S_3:\ 2x+2y+z=4a$ — похила площина, яка відтинає від координатних осей Ox, Oy відрізки довжиною $2a$, а від осі Oz відрізок довжиною $4a$.

Оскільки, проекцією тіла G на

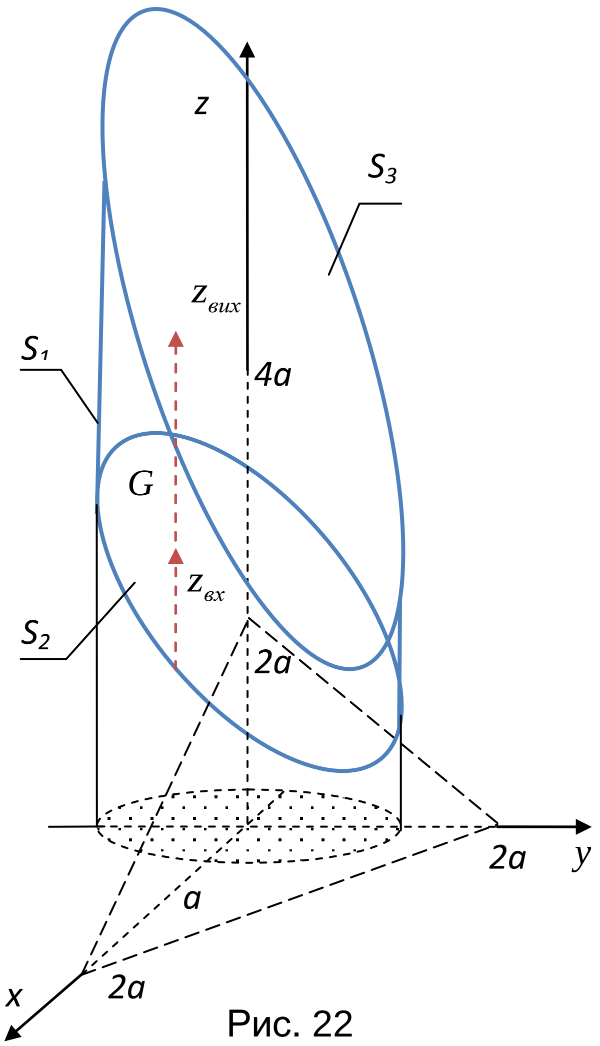


Рис. 22

площину Oxy є коло радіуса $R=a$, перейдемо до циліндричної системи координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x^2+y^2=\rho^2, \\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz. \end{array}$$

Рівняння поверхонь S_1 – S_3 в циліндричній системі координат будуть мати такий вигляд:

$$S_1: \quad x^2+y^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=a^2 \quad \Rightarrow \rho=a;$$

$$S_2: \quad z=2a-x-y \quad \Rightarrow \quad z=2a-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi;$$

$$S_3: \quad z=4a-x-y \quad \Rightarrow \quad z=4a-2\rho\cos\varphi-2\rho\sin\varphi.$$

Опишемо область G в циліндричній системі координат:

$$G=\{(\rho,\varphi,z): \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad 0\le\rho\le a, \quad 2a-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi\le z\le 4a-2\rho\cos\varphi-2\rho\sin\varphi\}.$$

Об’єм тіла G будемо обчислювати за формулою

$$V=\iiint\limits_G dxdydz \overset{ЦСК}{=} \iiint\limits_{G^*}\rho\, d\rho d\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a \rho d\rho \int_{2a-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi}^{4a-2\rho\cos\varphi-2\rho\sin\varphi} dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho(2a-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)\,d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a(2a\rho-\rho^2\cos\varphi-\rho^2\sin\varphi)\,d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}(a\rho^2-\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi-\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi)\Big|_0^a\,d\varphi=a^3\int_0^{2\pi}(1-\frac{1}{3}\cos\varphi-\frac{1}{3}\sin\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^3(\varphi-\frac{1}{3}\sin\varphi+\frac{1}{3}\cos\varphi)\Big|_0^{2\pi}=2\pi a^3\text{ (од}^3\text{)}.$$

Відповідь: $V=2\pi a^3$ (од^3).

Завдання 9.1. Обчислити об′єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{100-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}$, $y=x$ $(y\le x)$, $x=0$ $(x\ge 0)$, використовуючи:

а) перехід до сферичних координат;

б) перехід до циліндричних координат.

Розв'язання.

а) 1-й спосіб (в сферичній системі координат). Побудуємо тіло G (рис. 23), яке обмежене поверхнями:

$S_1:\quad z=\sqrt{100-x^2-y^2}$ – півсфера з центром в точці $O(0;0;0)$ і радіусом $R=10$;

$S_2:\quad z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}$ – півконус з вершиною в точці $O(0;0;0)$, вісь симетрії Oz;

$S_3:\quad y=x$ – площина, яка проходить через вісь Oz;

$S_4:\quad x=0$ – координатна площина Oyz.

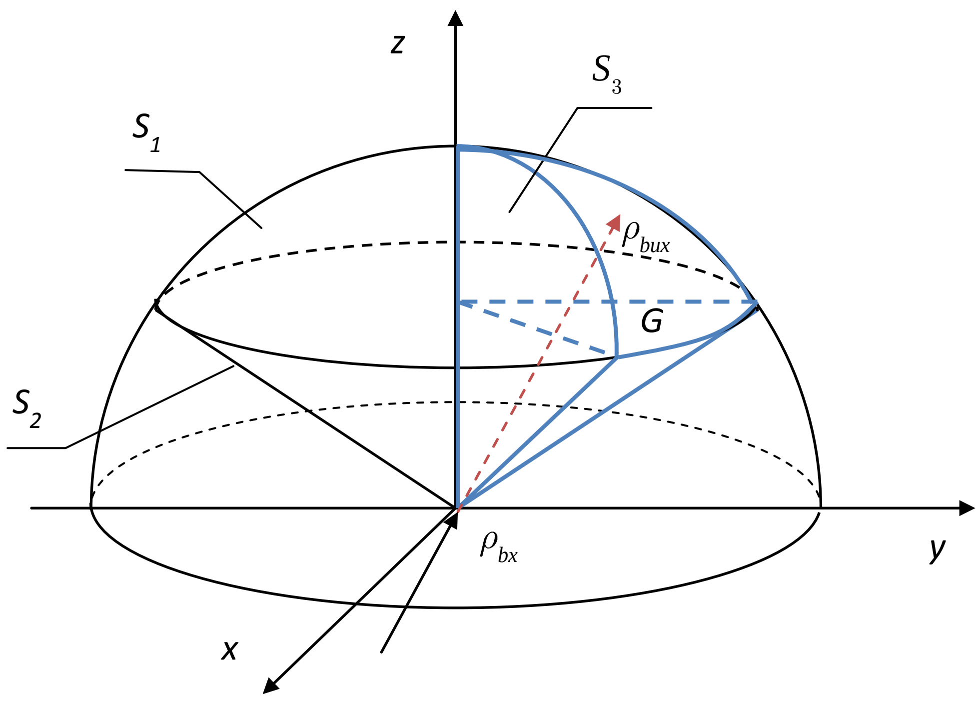


Рис. 23

Перейдемо в сферичну систему координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\theta, \end{cases} \qquad \begin{aligned} & x^2+y^2+z^2=\rho^2, \\ & dxdydz=\rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Рівняння поверхонь S_1 – S_4 у сферичній системі координат набувають такого вигляду:

$$S_1: \quad x^2+y^2+z^2=100 \quad \Rightarrow \quad \rho=10;$$

$$S_2: \quad x^2+y^2=35z^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=35\rho^2\cos^2\theta \quad \Rightarrow$$

$$\sin^2\theta=35\cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad 1-\cos^2\theta=35\cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta=\frac{1}{36} \quad \Rightarrow$$

$$S_2: \quad \theta=\arccos\frac{1}{6};$$

$$S_3: \quad y=x \quad \Rightarrow \quad \rho\sin\varphi\sin\theta=\rho\cos\varphi\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\varphi=1 \quad \Rightarrow \quad \varphi=\frac{\pi}{4};$$

$$S_4: \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad \rho\cos\varphi\sin\theta=0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Запишемо область інтегрування в сферичній системі координат:

$$G^*=\left\{(\rho,\varphi,\theta): \quad \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, \quad 0\le\theta\le\arccos\frac{1}{6}, \quad 0\le\rho\le 10\right\}.$$

Об′єм тіла G будемо обчислювати за формулою

$$V_G=\iiint\limits_G dxdydz \overset{CCK}{=} \iiint\limits_{G^*}\rho^2\sin\theta\, d\varphi d\theta d\rho=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\arccos\frac{1}{6}}\sin\theta\, d\theta\int\limits_0^{10}\rho^2 d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\arccos\frac{1}{6}}\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{10}\sin\theta\, d\theta=-\frac{1000}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\Big|_0^{\arccos\frac{1}{6}}d\varphi=$$

$$=-\frac{1000}{3}\left(\cos(\arccos\frac{1}{6})-\cos 0\right)\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1000}{3}\left(\frac{1}{6}-1\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{625\pi}{9}\text{ (од}^3\text{)}.$$

б) 2- й спосіб (в циліндричній системі координат).

Побудуємо тіло G (рис. 24), яке обмежене поверхнями S_1 – S_4. Перейдемо до **циліндричної системи координат**

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x^2+y^2=\rho^2, \\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz. \end{array}$$

Рівняння поверхонь S_1 – S_4 у циліндричній системі координат будуть мати такий вигляд:

$$S_1:\quad \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+z^2=100 \quad\Rightarrow\quad z=\sqrt{100-\rho^2};$$

$$S_2:\quad 35z^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi \quad\Rightarrow\quad z=\frac{\rho}{\sqrt{35}};$$

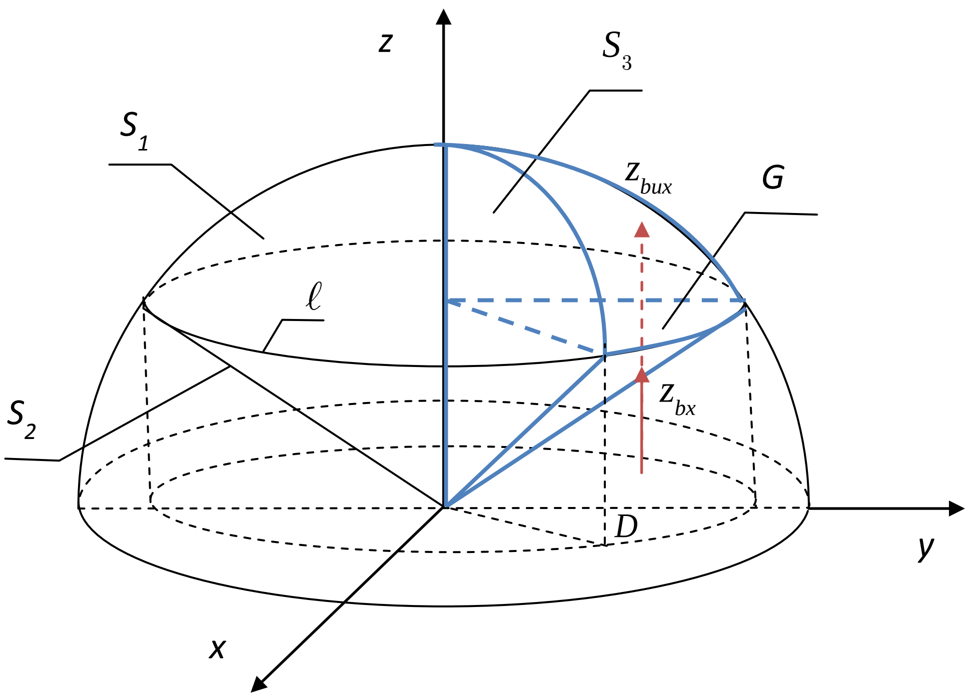


Рис. 24

$$S_3: \quad y=x \quad \Rightarrow \quad \rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\varphi=1 \quad \Rightarrow \quad \varphi=\frac{\pi}{4};$$

$$S_4: \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad \rho\cos\varphi=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Знайдемо лінію ℓ перетину поверхонь S_1 та S_2:

$$\begin{cases} z=\sqrt{100-\rho^2}, \\ z=\dfrac{\rho}{\sqrt{35}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho^2}{35}+\rho^2=100, \\ z=\dfrac{\rho}{\sqrt{35}} \end{cases} \Rightarrow \quad \ell: \begin{cases} \rho=\dfrac{5\sqrt{35}}{3}, \\ z=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Отже, ℓ — коло радіуса $\mathrm{R}=\dfrac{5\sqrt{35}}{3}$, яке лежить у площині $z=\dfrac{5}{3}$.

Запишемо область інтегрування в циліндричній системі координат:

$$G^*=\left\{(\rho,\varphi,z): \ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, \quad 0\le\rho\le\frac{5\sqrt{35}}{3}, \quad \frac{\rho}{\sqrt{35}}\le z\le\sqrt{100-\rho^2}\right\}.$$

Об′єм тіла G будемо обчислювати за формулою

$$V_G=\iiint\limits_G dxdydz \overset{ЦСК}{=} \iiint\limits_{G^*}\rho\, d\rho d\varphi dz=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{5\sqrt{35}}{3}}\rho\, d\rho\int\limits_{\frac{\rho}{\sqrt{35}}}^{\sqrt{100-\rho^2}}dz=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{5\sqrt{35}}{3}}\rho\, z\,\Big|_{\frac{\rho}{\sqrt{35}}}^{\sqrt{100-\rho^2}}d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{5\sqrt{35}}{3}}\rho\left(\sqrt{100-\rho^2}-\frac{\rho}{\sqrt{35}}\right)d\rho=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{\frac{5\sqrt{35}}{3}}\sqrt{100-\rho^2}\,\rho\, d\rho-\frac{\pi}{4\sqrt{35}}\int\limits_0^{\frac{5\sqrt{35}}{3}}\rho^2\, d\rho=-\frac{\pi}{8}\int\limits_0^{\frac{5\sqrt{35}}{3}}\sqrt{100-\rho^2}\, d(100-\rho^2)-$$

$$-\frac{\pi}{12\sqrt{35}}\rho^3\Big|_0^{\frac{5\sqrt{35}}{3}}=-\frac{\pi}{12}(100-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{5\sqrt{35}}{3}}-\frac{\pi}{12\sqrt{35}}\rho^3\Big|_0^{\frac{5\sqrt{35}}{3}}=-\frac{\pi}{12}\left(\frac{125}{27}-1000+\frac{125\cdot35}{27}\right)=$$

$$=-\frac{\pi}{12}\left(\frac{125\cdot36}{27}-1000\right)=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{22500}{27}=\frac{625\pi}{9}\ (\text{од}^3).$$

Відповідь: $V_G=\dfrac{625\pi}{9}$ (од^3).

Завдання 9.2. Знайти масу тіла, яке займає область $G:\ \ x^2+y^2+z^2\le 1$, густина якого $\mu(x,y,z)=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$.

Розв'язання. Область G обмежена сферою $S:\ \ x^2+y^2+z^2=1$ з центром в точці $O(0;0;0)$ і радіусом $R=1$ (рис. 25).

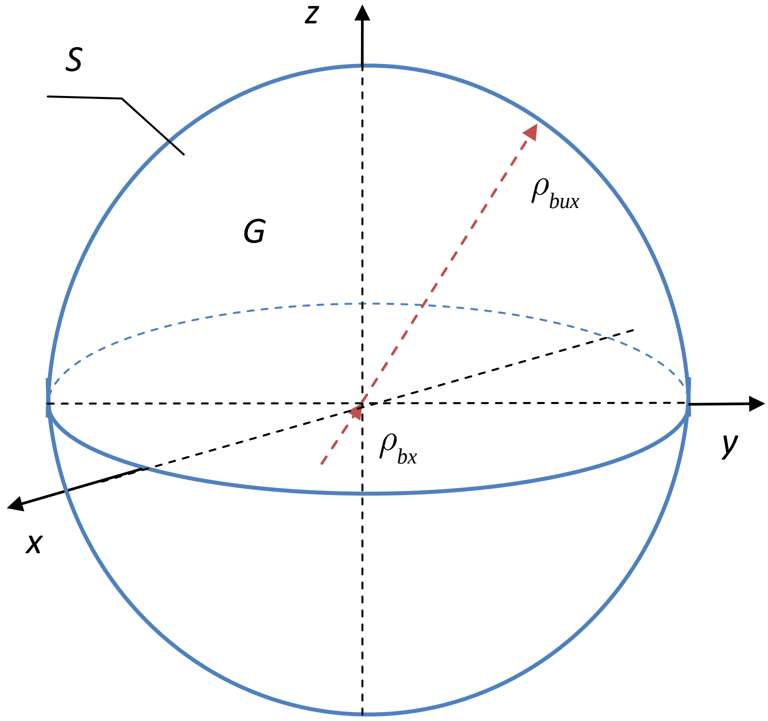


Рис. 25

Перейдемо в сферичну систему координат

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\theta, \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2,$$
$$dxdydz=\rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta.$$

Запишемо рівняння поверхні S та області інтегрування в сферичній системі координат:

$$S:\ \ x^2+y^2+z^2=1 \ \Rightarrow\ \rho=1,$$

$$G^*=\{(\rho,\varphi,\theta):\ \ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le\theta\le\pi,\ \ 0\le\rho\le 1\}.$$

Масу тіла будемо обчислювати за формулою

$$m_S=\iiint\limits_G \mu(x,y,z)\,dxdydz \overset{CCK}{=} \iiint\limits_{G^*}\mu(\rho,\varphi,\theta)\,\rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta.$$

Густина $\mu(x,y,z)=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4}}$ після заміни змінних матиме вигляд $\mu(\rho,\varphi,\theta)=\dfrac{3}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\theta+4}}$. Тоді маса тіла

$$m_S=\iiint\limits_{G^*}\mu(\rho,\varphi,\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho d\varphi d\theta=\iiint\limits_{G^*}\frac{3\rho^2\sin\theta}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\theta+4}}\,d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^{\pi}\frac{\rho\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\theta+4}}=\left|\;d(\rho^2-4\rho\cos\theta+4)=4\rho\sin\theta\,d\theta\;\right|=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot 2\pi\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^{\pi}\frac{d(\rho^2-4\rho\cos\theta+4)}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\theta+4}}=3\pi\int_0^1\rho\,\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\theta+4}\Big|_0^{\pi}\,d\rho=$$

$$=3\pi\int_0^1\rho\left(\sqrt{\rho^2+4\rho+4}-\sqrt{\rho^2-4\rho+4}\right)d\rho=3\pi\int_0^1\rho\left(\sqrt{(\rho+2)^2}-\sqrt{(\rho-2)^2}\right)d\rho=$$

$$=\left|\;\rho\le 1\;\right|=3\pi\int_0^1\rho\left(\rho+2-(2-\rho)\right)\,d\rho=6\pi\int_0^1\rho^2\,d\rho=2\pi\,\rho^3\Big|_0^1=2\pi\ \text{(од. маси).}$$

Відповідь: $m_S=2\pi$ (од. маси).

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник - К.: А.С.К., 2006. –648 с: ил.
2. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Части I,II. – М., Высшая школа, 1974.
3. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков. Издательство Харьковского университета, 1967. – 946 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. Том II. – М. Наука, 1972, 1978.
5. Кузнецов Л.А. Зборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учеб. пособие для втузов. – 2-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 1994. – 206 с.: ил.
6. Справочное пособие по математическому анализу. Ряды. Функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. – Киев, Вища школа, 1979.
7. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Рольф, 2002. – 256 с.

Кратні інтеграли

ЗМІСТ

Кратні інтеграли