МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО - ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ

Конспект лекцій

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра
за освітньою програмою «Економічна аналітика»
спеціальності 051 Економіка

Укладачі: Капустян В.О., Мажара Г.А., Черноусова Ж.Т.

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

УДК 330.4

Укладачі: *Капустян Володимир Омелянович*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Мажара Гліб Анатолійович, д-р філос. з екон., доц.
Черноусова Жанна Трохимівна, канд. фіз.-мат. наук.

Рецензент *Войтко С.В.*, д-р. екон. наук, проф., завідувач кафедри міжнародної економіки КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Фартушний І.Д.*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 09.05.2024 р.)
за поданням вченої ради факультету менеджменту та маркетингу
(протокол № 8 від 25.03.2024 р.)

330 **Моделювання соціально-економічних систем і процесів**. [Електронний ресурс] : конспект лекцій : навч. посіб. для здобувачів ступеня магістра за освіт. програмою «Економічна аналітика» спец. 051 Економіка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В. О. Капустян, Г. А. Мажара, Ж. Т. Черноусова. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 84 с.

В конспекті лекцій викладено теоретичний матеріал відносно економіко-математичного інструментарію дослідження соціально-економічних систем і процесів з різним горизонтом планування. Навчальний посібник містить нелінійні моделі мікроекономіки, моделі макроекономіи, малосекторні моделі економічного зростання, В конспекті приділено увагу застосуванню сучасних програмних продуктів для аналізу та прогнозуванню розвитку соціально-економічних систем. В ньому наведено відомості щодо побудови, дослідження, програмної реалізації та практичної імплементації економіко - математичних моделей для розв’язання економічних задач.
Конспект лекцій з дисципліни «Моделювання соціально-економічних систем і процесів» призначений для здобувачів ступеня магістра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 Економіка. Навчальний посібник буде також корисним для всіх, хто цікавиться моделюванням економіки.

УДК 330.4

Реєстр. № НП 23/24-410. Обсяг 4,0 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Розвиток економіки України в сучасних умовах формування ринкових відносин, військових викликів і невизначеності післявоєнної відбудови вимагає застосування сучасного теоретико-методичного базису для обгрунтування ефективних рішень як для функціонування підприємств різної форми власності, окремих її галузей, так і національної економіки в цілому.

За умов ускладнення та інтенсифікації глобальної конкуренції та виходу українських виробників на світові ринки зростає роль застосування точних кількісних моделей як для забезпечення іх конкурентоспроможності, так і у формуванні поведінки їх взаємодії із ринковими контрагентами в умовах ризиків щодо зовнішніх впливів.

Слід зазначити, що в економіці вкрай обмежене застосування локальних експериментів для з’ясування «правильності» прийнятих рішень. Тому метод економіко-математичного моделювання є чи не основним при прийнятті як економічних, так і управлінських рішень та прогнозуванні їх наслідків в майбутньому з урахуванням ризиків різної природи.

Задача цього навчального посібника – надати магістранту допомогу щодо впорядкування та засвоєння теоретичного матеріалу відносно економіко-математичного інструментарію дослідження соціально-економічних систем і процесів з різним горизонтом планування, вибору та обґрунтуванню конкретної моделі із існуючого арсеналу, потреби в її модифікації, або розробки нової моделі для вирішення проблемної економічної ситуації в напрямку теми досліджень при підготовці дисертації ОС «магістр».

Матеріал розділено на чотири частини, в яких відображено:

1) нелінійні моделі мікроекономіки: моделювання та аналіз поведінки виробників, споживачів, співробітництва та конкуренції в детермінованих умовах та умовах невизначеності;

2) моделі макроекономіки: моделі міжгалузевого балансу споживачів та рівноваги на різних ринках;

3) малосекторні моделі економічного зростання та їх застосування для аналізу оптимального збалансованого зростання економіки, мети суспільного розвитку, науково-технічного прогресу;

4) застосування сучасних програмних продуктів для аналізу та прогнозування розвитку соціально - економічних систем.

В межах дисципліни розглядається специфіка моделювання соціально - економічних систем і процесів явищ і процесів на мікро- та макро-рівнях з великим часовим горизонтом, виділення ключових екзогенних та ендогенних факторів, встановлення зв'язків між ними, формалізація цих факторів у вигляді деякої системи стаціонарних або динамічних співвідношень. Такі моделі мають ряд особливостей при визначенн і екзогенних параметрів: потрібно використовувати алгоритми передбачення та адаптації при дослідженні їх динаміки.

Визначається мета розв'язання проблемної економічної задачі та встановлюються шляхи її досягнення. При цьому враховується як поведінка виробників, так і споживачів на різних ринках. Обгрунтовується апарат дослідження економіко - математичної моделі та програмні засоби її реалізації.

Вивчення дисципліни дозволяє оволодіти методами створення економіко-математичних моделей, їх застосування для планування діяльності суб'єктів господарювання з великим горизонтом планування, аналізу та прогнозування траєкторій зростання показників.

Предметом навчальної дисципліни є методи та засоби створення економіко-математичних моделей для розв'язання економічних задач з великим горизонтом планування, їх обґрунтування, дослідження , програмна реалізація та практична імплементація.

Програму дисципліни «Моделювання соціально-економічних систем і процесів » складено відповідно до освітньо-професійної програми «Економічна аналітика» підготовки магістрів з економіки спеціальності 051 «Економіка». Навчальна дисципліна належить до циклу *професійної підготовки: обов'язкові освітні компоненти.*

Основне призначення дисципліни «Моделювання соціально-економічних систем і процесів» – надати магістрам знання щодо побудови, дослідження, програмної реалізації та практичної імплементації економіко – математичних моделей для розв'язання економічних задач (зокрема, довгострокового планування) при підготовці магістерської дисертації.

Вивчення дисципліни дозволяє сформувати у магістра комплексний підхід до вирішення економічних та управлінських завдань у сфері виробництва, споживання, поведінки економічних агентів на різних ринках та різним горизонтом планування.

Для цього потрібно вміти створювати математичні моделі проблемних ситуацій економічних процесів з великим горизонтом планування та проводити їх аналіз; формувати економічні і управлінські рішення щодо діяльності суб'єкту господарювання на основі результатів економіко-математичного моделювання; визначати числові та якісні характеристики поведінки економічних агентів для їх раціональної діяльності; формалізувати задачі теорії раціонального вибору та економічного зростання; розробляти та використовувати неокласичні моделі економічного зростання для різних економічних суб'єктів в умовах трансформаційної економіки; застосовувати програмні засоби реалізації моделей.

Лекція №1

Алгоритмічні моделі в економіці. Рейтингове оцінювання

У сучасних умовах побудова прогностичних моделей поведінки заснована на використанні методу імітаційного моделювання та висновків поведінкової економіки. Імітаційне моделювання – це комп'ютерна розробка моделей і постановка експериментів в режимі реального часу, де використовуються три основні підходи:

1) системна динаміка;

2) дискретно-подієве моделювання;

3) агентне моделювання.

Розглянемо ці підходи більш детально. Дискретно-подієве моделювання використовують для аналізу процесів різної природи, зокрема в ряді випадків, доцільним є розгляд їх як послідовності подій (окремих принципових моментів).

Дискретно-подієвим моделюванням (discrete-event modeling) називається такий підхід до побудови імітаційних моделей, який представляє реальні дії – подіями.

Найбільш часто поняття «дискретно-подієвого моделювання» використовується для позначення «процесно-орієнтованого» моделювання. У таких моделях динаміка системи представляється як послідовність операцій (прибуття, затримка, захоплення, посилання) над якимись сутностями (entities – транзакти, заявки), що представляють клієнтів, документи, дзвінки, пакети даних, транспортні засоби тощо. Самі ці сутності пасивні, не можуть контролювати свої дії, але мають такі атрибути, які впливають на процеси їх обробки (кількість одночасних сутностей на обробку, періодичність надходження, правило постановки в чергу і вибору з черги) і накопичують статистику (загальний час очікування, вартість).

Поведінкові дослідження показали необхідність глибоко розуміти мотиви та логіку діяльності споживачів, в тому числі ірраціональні аспекти їх поведінки, іншими словами – все те, що стоїть за ухваленням рішення споживачем при виборі певного товару або послуги. Поведінкова економіка багато в чому сформувала попит на новий інструмент економічного моделювання, який би дозволив врахувати індивідуальні особливості прийняття рішень, далекі від традиційно прийнятих в економіці понять раціональності. До недавнього часу було неможливо порівняно легко і наочно інтегрувати поведінкову економіку в реальну модель прийняття рішень. Відповіддю на цей виклик стала поява інструментарію «агентного» моделювання.

В основі агентного моделювання лежить спроба зрозуміти логіку прийняття рішення окремо взятим споживачем, формалізувати її та об'єднати в єдину модель поведінки споживачів, яка агрегує індивідуальний вибір мільйонів незалежно діючих споживачів. Це вид імітаційного моделювання, де суб'єкт автономно приймає рішення і називається агентом, який може бути як індивідуальним споживачем, так і цілими верствами або організаціями.

Агентне моделювання дозволяє виявляти, яким чином значні наслідки народжуються з невеликих і, на перший погляд, незначних чинників, що визначають поведінку і взаємодію кожного з агентів.

Даний вид моделювання заснований на описі процесів «знизу вгору»: в основі моделі лежить набір основних параметрів, що характеризують агентів і алгоритм прийняття індивідуальних рішень. Узагальнена поведінка системи виводиться із цих індивідуальних рішень, а також взаємодії між агентами.

Завдання

Задача 1. Час, упродовж якого інспектор податкової служби перевіряє квартальний звіт (t), є випадковою величиною, розподіленою відповідно дозакону Вейбула. Середній час, що витрачається на перевірку, дорівнює $\bar{t}$=20 хв. Коефіцієнт варіації величини t дорівнює CVt=0,52.

Необхідно змоделювати для заданих умов випадкове число t (кількість прогонів дорівнює 10).

Задача 2. Періодичність перевірки підприємств податковою інспекцією – випадкова величина (Δt), яка має закон гама-розподілу. Середній інтервал перевірки становить Δt =2,5 місяця. Коефіцієнт варіації величини Δt дорівнює CV=0,38. Треба змоделювати для заданих умов можливі моменти перевірок підприємства податковою інспекцією (число прогонів узяти рівним 10).

Природним способом зниження складності й трудомісткості управління, а отже, є зниження ступеня ризику щодо прийняття некоректних рішень, є факторизація набору показників, що дає змогу суттєво скоротити їх кількість. Така факторизація може бути здійснена в результаті заміни тієї чи іншої групи показників їх інтегрованою комплексною оцінкою. Основні критерії, що висуваються до такої оцінки:

1) загальновизнаність;

2) зрозумілість, тобто повинно бути ясно, які характеристики та в яких саме пропорціях зосереджені в ній.

Найповніше цим критеріям відповідає така широко використовувана у світовій практиці оцінка стану економічної системи (ЕС), як рейтинг. Рейтинг є комплексною інформацією, що подається в максимально згорнутому вигляді.

Під рейтинговим управлінням розуміють концепцію прийняття рішень потенційними користувачами на підставі використання рейтингів у процесі реалізації функцій управління.

Із цього означення випливає, що рейтингове управління є процесом, у якому рейтинг використовується для аналізу, контролю, обліку, прогнозування та регулювання діяльності ЕС. Суттєвою характеристикою процесу рейтингового управління є те, що рейтингова оцінка одночасно виступає як інструмент і як ціль управління.

Для конкретної ЕС можна виокремити:

- внутрішнє рейтингове управління;
- зовнішнє рейтингове управління.

Об'єктом внутрішнього рейтингового управління є ЕС та її конкуренти. Останні відіграють роль бази для порівняння. Мета внутрішнього рейтингового управління полягає у зміні іміджу ЕС у зовнішньому середовищі.

Об'єктом зовнішнього рейтингового управління є партнери (та контрагенти) ЕС.

Етап 1. Підготовка первинних даних.

Етап 2. Опрацювання первинних даних.

Вихід алгоритму – набір проміжних показників, що являють собою середні значення, коефіцієнти й зведені показники. Для оцінювання набору проміжних показників здійснюють порівняльний аналіз із аналогічним, за структурою, набором проміжних показників еталонної ЕС (чи з нормативами).

Етап 3. Статистичний аналіз.

Під час використання статистичного аналізу виникає проблема щодо порівнянності показників. Існують різні підходи залежно від змісту (семантики) інформації. Так, у фінансах використовують методологію й методи дисконтування та нарощування тощо. Цей етап припускає наявність бібліотек «стандартних» алгоритмів і програм.

Етап 4. Трендовий аналіз.

Підґрунтям трендового аналізу є моделювання прогнозного стану ЕС. Мета трендового аналізу – оцінка можливого критичного стану ЕС як сукупності критичних станів проміжних показників відповідно до обраного алгоритму.

Для побудови трендів зазвичай використовують методи згладжування, що ґрунтуються на обчисленні середніх (ковзних, зважених, адаптивних, експоненційних тощо).

Етап 5. Обчислення рейтингу.

Завдання

1. Знайти данні у відкритих джералах, підготовити та опрацювати їх, провести відповідний статистичний та трендовий аналіз, та обчислити рейтинг на основі одній з відомих моделей:

2. Самостійно скласти рейтингову оцінку розвитку сектору регіону, використовуючи при цьому показники стимулятори (п'ять показників) та де стимулятори (п'ять показників), які кожен здобувач визначає самостійно. 3.Обрати 10 районів, що мають детальний звіт по всім переліченим показникам. Знайти рішення за допомогою електронних таблиць «Excel».

1. Сформувати на робочому листі вихідні дані у вигляді стовпців масиву.

2. Провести стандартизацію показників.

3. Знайти середній ранг регіонів і розбити їх на інтервали.

4. Побудувати гістограму розсіювання.

5. Провести статистичний аналіз економічного розвитку аграрного сектору регіонів.

6. Прийняття управлінських рішень.

Література:

1. Москаленко В.В., Годлевський М.Д. Моделі та методи стратегічного управління розвитком підприємства. Харків, 2018. 208 с.
2. Капустян В.О., Мажара Г.А., Фартушний І.Д. Моделювання економіки: підручник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 051 Економіка. Електронне мережеве видання. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 207 с.

3. Капустян В. О. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 економіка / В. О. Капустян, Г. А. Мажара ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електроні текстові данні (1 файл: 679 Кб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 120 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62311

4. Мажара Г.А., Капустян В.О. Вплив смаків і пріоритетів купівлі на вибір споживача на прикладі задачі динамічного моделювання. Економічний журнал Одеського політехнічного університету. 2019. No 3 (9). С. 45-50.

5. Мажара Г.А., Капустян В.О. Ірраціональні стратегії в умовах часткової інформованості гравців на прикладі індивідуально-оптимальних рівноваг. Академічний огляд. 2019. No 2(51).

6. Мажара Г.А., Капустян В.О. Behavioral components in relationship sofeconomic agents in the automobile market. Eureka: social and humanities (2020) № 2. P.8-14.

Лекція №2

Поведінка виробників, споживачів і моделі їх взаємодії

Опишемо загальний підхід до задачі споживчого вибору і побудови функцій попиту споживача у термінах відношень переваги. Згідно з теорією економічної поведінки споживача вважається, що споживачі вибирають найкращий щодо порівняльних переваг набір товарів, який вони можуть собі дозволити. В зв’язку з чим далі важливим буде наступне означення.

Означення 2.1. *Нехай* $(X, \ )$ *– поле переваг і* $C \subseteq X$*. Елемент* $x \in C$ *називається найбільш (найменш) переважним в* C*, якщо* $x \ \ y$ $(y \ \ x)$ $\forall y \in C$ •

Далі нагадаємо означення *компактної множини (компакту)* C в $R = (R^n, \rho)$: це обмежена і замкнена множина. Вона має таку властивість: з довільноїсім’ївідкритих множин, які в сукупностімістятьC (утворюють покриття цієї множини) завжди можна вибрати скінченнукількістьмножин, які теж покривають C.

Теорема 2.3. *Якщо відношення в умовах означення 1.1. неперервне і множина* C *компактна, то* C *містить хоча б один найбільший (наймен ший) елемент, а множина* $M(C)$ $(m(C))$ *всіхнайбільш (найменш) пере важних елементів у* C *є компактною* •

Найбільш переважний елемент для поля переваг $(X, \ )$ називається точ кою *насичення*. Якщо ж простір X не має точки насичення, то маємо явище *ненасиченості*.

Множина векторів із R^n виду $z = \alpha x + (1 - \alpha) y$, $\forall x, y \in R^n$, а число α пробігаєвідрізок $[0, 1]$, називається *відрізком*в R^n. Цей відрізок сполучає точки x, y і позначається через $[x, y]$.

Множина $A \subseteq X$ називається *опуклою* , якщо із того, що $x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subseteq A$.

Означення 2.2. *Нехай множина* X *поля переваг* $(X, \ )$ *є опуклою. Тоді поле переваг* $(X, \ )$ *називається:*

I) опуклим, якщо із того, що $x \quad y\ \forall x, y \in X \Rightarrow \alpha x + \beta y \quad y \forall \alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1$;

II) підсилено опуклим, якщо із того, що $x \quad y\ \forall x, y \in X \Rightarrow \alpha x + \beta y \quad y \forall \alpha, \beta \geq 0,$ $\alpha + \beta = 1$;

III) строго опуклим, якщо із того, що $x \quad y$ *для різних* $x, y \in X \Rightarrow \alpha x + \beta y \quad y \forall$ $\alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1$ •

В економіці припущення щодо опуклості є традиційними: вони відображають як певніекономічнізакономірності, так і відіграють важливу роль в економіко - математичних моделях та їх аналізі.

Розглянемо економічний зміст опуклості поля переваг споживача. Покладемо в *I*) означення 1.2. $\alpha = \beta = 0.5,\ y \sim x$. Тоді споживач надає перевагу середньому набору $(x + y)/2$. Якщо покласти $x_i = 0, y_i = 6$; $x_j = 6, y_j = 0$, то $(x_k + y_k)/2 = 6,\ k = \cancel{i, j}$, тобто розподіл $(x + y)/2$ дає споживачеві деяку кількість товарів *i* та *j*, тоді як розподіли *x* та *y* дають йому тільки один із цих товарів. Отже, опуклість квазіпорядку переваги виражає прагнення споживача бути представленим на всіх ринках, робити свій вибір між усіма товарами.

Бінарні відношення, властивості яких були розглянуті вище, можна застосовувати до задачі раціонального вибору за допомого поверхонь байдужості, які неявно описують відношення переваги на векторах. Такий метод розв'язування задачі споживчого вибору має обмежене застосування в силу його геометричного змісту. Дебре довів теорему, згідно якої існують функції корисності, які описують відношення переваги. Це дає можливість звести задачу споживчого вибору до такої екстремальної задачі: максимізувати функцію корисності, яка визначена на невід'ємному споживчому кошику, при бюджетному обмежені. Проведено повний аналіз цієї моделі засобами нелінійного програмування. Для екзогенних параметрів оптимальної моделі розглянуто рівняння Слуцького, проведено класифікацію товарів.

В теорії виробництва в якості основної моделі для характеристики виробника виступає задача максимізації його прибутку при деяких ресурсних обмеженнях. Розглянемо більш детально моделі поведінки виробників в умовах олігополії.

Важливим випадком недосконалої конкуренції є *конкуренція серед небагатьох.* Це така ринкова ситуація та механізм, коли діє невелика кількість фірм і вони впливають на ціноутворення на продукцію і фактори виробництва. Таким чином, прибуток кожної фірми залежить від політики решти конкуруючих фірм. Тому, щоб визначити оптимальну політику, спрямовану на максимізацію прибутку, кожна фірма повинна враховувати не тільки свій безпосередній вплив на ринки товарів і факторів виробництва, але й побічний – через взаємодію своїх кокурентів.

Така ринкова структура, коли на ринку продукції пропозиції небагатьох фірм заповнюють весь ринок і кілька із них займають значну його частину, називається *олігополією.* Подібна ситуація на ринку ресурсів, коли попит на певні ресурси розподілений серед небагатьох фірм, а на окремі із них припадають значні частини попиту, називається *олігопсонією.*

Для побудови математичних моделей подібної недосконалої конкуренції застосовують різний математичний апарат, зокрема теорію ігор. Далі будемо розглядати варіант олігополії з двома конкурентами, тобто *дуополію.*

Нехай дві конкуруючі фірми виробляють однотипну продукцію, використовуючи технологічні процеси, які відображаться їхніми виробничими функціями

$$q_j = F_j(x_1^j, \ldots, x_m^j),\ j = \overline{1,2}, \tag{2.1}$$

де q_j – випуск продукції j - ю фірмою, $x^j = \{x_i^j\}_{i=1}^m$ – її витрати.

Тоді ціна на продукцію визначається обома рівнями випуску, тобто $p = p(q_1, q_2)$. При цьому будемо припускати, що

$$\frac{\partial p}{\partial q_i} < 0,\ i = \overline{1,2}. \tag{2.2}$$

Ціна будь-якого виду витрат залежить від їх закупівлі обома фірмами, тобто $\omega_i = \omega_i(x_i^1, x_i^2)$. При цьому будемо припускати, що

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i^j} > 0,\ j = \overline{1,2}. \quad (2.3)$$

Кожна фірма намагається діяти таким чином, щоб шляхом зміни своєї *стратегії* $q_i, x_1^i, \ldots, x_m^i,\ i = \overline{1,2}$ досягти найбільшого значення свого прибутку

$$\pi_j = p(q_1, q_2)q_j - \sum_{i=1}^m \omega_i(x_i^1, x_i^2)x_i^j, q_j = F_1(x_1^j, \ldots, x_m^j),\ j = \overline{1,2}. \quad (2.4)$$

Задача (2.4) є задачею векторної оптимізації в умовах конфлікту і для її розв’язання потрібно використати відповідний апарат теорії ігор. Це ми зробимо пізніше, а зараз для цієї задачі застосуємо міркування, характерні для однокритеріальної оптимізації.

Будемо вважати першу фірму оперуючою стороною, а дії другої фірми — неконтрольованими факторами для оперуючої сторони. Критерієм ефективності першої фірми є її прибуток π_1. Тоді завдання першої фірми полягає у визначені стратегії $q_1, x_1^1, \ldots, x_m^1$, яка максимізує її прибуток

$$\pi_1 = p(q_1, q_2)q_1 - \sum_{i=1}^m \omega_i(x_i^1, x_i^2)x_i^1, q_1 = F_1(x_1^1, \ldots, x_m^1). \quad (2.5)$$

Функція Лагранжа для цієї задачі має вигляд:

$$L = \pi_1 + \lambda\ (F_1(x^1) - q_1),$$

де λ – множник Лагранжа.

Тоді умови оптимальності для випадку $q_1 > 0, x_i^1 > 0,\ i = \overline{1,m}$, будуть мати вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = p(q_1, q_2) + q_1\frac{\partial p}{\partial q_1} + q_1\frac{\partial p}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial q_1} - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^1} = -\omega_i - x_i^1\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i^1} - x_i^1\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i^1}\frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1} + \lambda\frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} = 0,\ i = \overline{1,m},$$

$$q_1 = F_1(x_1^1, \ldots, x_m^1). \quad (2.6)$$

Виключаючи із (2.6) множник Лагранжа, отримаємо таку систему оптимальності

$$(p(q_1, q_2) + q_1(\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial p}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial q_1}))\frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} = \omega_i + x_i^1(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i^1} + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i^1}\frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1}),\ i = \overline{1,m},$$

$$q_1 = F_1(x_1^1, \ldots, x_m^1). \quad (2.7)$$

Умови оптимальності (2.7) будуть змістовними, якщо нам відома стратегія $q_2, x_1^2, \ldots, x_m^2$ другої фірми на товарному та ресурсному ринках. Крім того, нам потрібно знати величини

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1}, \frac{\partial \omega_i^2}{\partial \omega_i^1}, i = \overline{1, m}, \tag{2.8}$$

які називаються *гаданими варіаціями* і характеризують конкурента та його реакцію на обрану політику першої фірми. Подальший аналіз залежить від різних припущень щодо поведінки виразів (2.8). Тому спростимо вихідну задачу, поклавши: $p = a - b\ (q_1 + q_2),\ a, b > 0,$ = ціна одиниці продукції; $C_i = c\ q_i + d,\ c,\ d > 0,$ витрати i - ї фірми на випуск продукції. Тоді прибутки фірм задаються виразами

$$\pi_i = (a - b\ (q_1 + q_2))q_i - c\ q_i - d,\ i = \overline{1{,}2} \tag{2.9}$$

при додатковій умові

$$q_1 + q_2 \le \frac{a}{b}, \tag{2.10}$$

яка породжена невід’ємністю ціни на товари.

Кожна із фірм намагається максимізувати свій прибуток, змінюючи свої обсяги. Тоді умови оптимальності першого порядку для них будуть мати вигляд

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - b\ (q_1 + q_2) - b\ q_1(1 + \frac{\partial q_2}{\partial q_1}) - c = 0,$$
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a - b\ (q_1 + q_2) - b\ q_2(1 + \frac{\partial q_1}{\partial q_2}) - c = 0. \tag{2.11}$$

Дуополія Курно спирається на припущення

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0, \tag{2.12}$$

тобто кожний із дуополістів вважає, що зміни у випуску його продукції не впливають на конкурента. Тоді *рівновага Курно* – це пара (q_1, q_2) випусків, яка задовольняє умови

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}\Big|_{\frac{\partial q_2}{\partial q_1}} = 0, \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}\Big|_{\frac{\partial q_1}{\partial q_2}} = 0, \tag{2.13}$$

або

$$2\ b\ q_1\ +\ b\ q_2 =\ a\ -\ c,$$
$$b\ q_1\ +\ 2\ b\ q_2 =\ a\ -\ c. \qquad (2.14)$$

Розв’язок системи (2.14) задається формулами

$$q_1 = q_2 = \frac{a\ -\ c}{3b},\ a\ >\ c, \qquad (2.15)$$

для яких виконується умова (2.10).

При цьому

$$\pi_1 = \pi_2 = (a\ -\ 2\ b\ \frac{a\ -\ c}{3b})\frac{a\ -\ c}{3b}\ -\ c\ \frac{a\ -\ c}{3b}\ -\ d\ =$$
$$= \frac{(a\ -\ c)^2}{9b}\ -\ d. \qquad (2.16)$$

При більш складному аналізі припускаються ненульові гадані варіації. *Дуополія Стекельберга* спирається на припущення, коли одна або дві фірми вважають, що конкурент поводитиме себе як дуополіст Курно. Нехай перша фірма вважає, що друга фірма реагуватиме на її дії згідно з функцією Курно. Для цього із другого рівняння системи (2.14) знаходимо

$$q_2 = \frac{a\ -\ c\ -\ b\ q_1}{2\ b}. \qquad (2.17)$$

Тоді гадана варіація $\partial q_2/\partial q_1 =\ -\ 1/2$ і при цьому система оптимальності (2.14) набуде вигляду

$$3\ b\ q_1\ +\ 2\ b\ q_2 = 2(a\ -\ c),$$
$$b\ q_1\ +\ 2\ b\ q_2 =\ a\ -\ c. \qquad (2.18)$$

Розв’язок системи (2.18) задається формулами

$$q_1 = \frac{a\ -\ c}{2b}, q_2 = \frac{a\ -\ c}{4b}, \qquad (2.19)$$

для яких виконується умова (2.10).

Отже, результат для обох фірм буде залежати від поведінки другої фірми. Якщо вона обирає реакцію Курно, як вважає перша фірма, то рішенням є *рівновага Стекельберга*, яка задається парою випусків (2.19). При цьому

$$\pi_1 = (a\ -\ 3\ b\ \frac{a\ -\ c}{4b})\frac{a\ -\ c}{2b}\ -\ c\ \frac{a\ -\ c}{2b}\ -\ d\ = \frac{(a\ -\ c)^2}{8b}\ -\ d,$$
$$\pi_2 = (a\ -\ 3\ b\ \frac{a\ -\ c}{4b})\frac{a\ -\ c}{4b}\ -\ c\ \frac{a\ -\ c}{4b}\ -\ d\ =$$

$$= \frac{(a\ -\ c)^2}{16b}\ -\ d, \pi_1\ -\ 2\pi_2 =\ d, \tag{2.20}$$

тобто прибуток першої фірми більше ніж вдвічі перевищує прибуток другої фірми.

Проте коли друга фірма не використовує реакцію Карно, а діє згідно з реакцією Стекельберга, тобто кожна фірма неправильно вважає, що інша фірма використовує наївне припущення Курно, маємо *нерівновагу Стекельберга*. При цьому система оптимальності (2.18) набуде вигляду

$$3\ b\ q_1\ +\ 2\ b\ q_2 = 2(a\ -\ c),$$

$$2\ b\ q_1\ +\ 3\ b\ q_2 = 2(a\ -\ c). \tag{2.21}$$

Розв’язок системи (2.21) задається формулами

$$q_1 = q_2 = \frac{2(a\ -\ c)}{5b}. \tag{2.22}$$

для яких виконується умова (2.10).

Прибутки обох фірм в умовах нерівноваги Стекельберга співпадають і мають вигляд

$$\pi_1 = \pi_2 = (a\ -\ 4\ b\ \frac{a\ -\ c}{5b})\frac{2(a\ -\ c)}{5b}\ -\ c\ \frac{2(a\ -\ c)}{5b}\ -\ d\ =$$

$$= 2\frac{(a\ -\ c)^2}{25b}\ -\ d \tag{2.23}$$

і вони менші, ніж за рівноваги Курно.

Серед інших можливостей розглянемо ще *кооперативне рішення* обох фірм в дуополії, згідно якого вони хочуть разом максимізувати загальний прибуток. В цьому випадку ми маємо таку екстремальну задачу:

$$\pi(q_1, q_2) = \pi_1(q_1, q_2)\ +\ \pi_2(q_1, q_2) =$$

$$= \big(a\ -\ b\ (q_1\ +\ q_2)\big)(q_1\ +\ q_2)\ -\ c\ (q_1\ +\ q_2)\ -\ 2\ d\ \to\ \max. \tag{2.24}$$

Умови оптимальності для задачі (2.24) мають вигляд

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_1} = \frac{\partial\pi)}{\partial q_2} = (a\ -\ b\ (q_1\ +\ q_2))\ - b\ (q_1\ +\ q_2)\ -\ c\ = 0.$$

Звідси $q_1\ +\ q_2 = \frac{a\ -\ c}{2b}$,

$$\pi(q_1, q_2) = (a\ -\ b\ \frac{a\ -\ c}{2b})\frac{a\ -\ c}{2b}\ - c\ \frac{a\ -\ c}{2b}\ -\ 2\ d\ =$$

$$= \frac{(a\ -\ c)^2}{4b}\ -\ 2\ d.$$

Спільний прибуток при цьому буде більшим спільних прибутків для всіх наведених вище варіантів реалізації гаданих варіацій.

На завершення цього пункту застосуємо до вихідної задачі методологію безкоаліційних ігор [2], зокрема, найбільш поширену *рівновагу за Нешем* розв'язання таких задач.

Ситуація (q_1^N, q_2^N) в нашому випадку буде називатися рівноважною за Нешем, якщо одночасно буде виконуватись система нерівностей

$$\pi_1(q_1, q_2^N)\ \le\ \pi_1(q_1^N, q_2^N),$$

$$\pi_2(q_1^N, q_2)\ \le\ \pi_2(q_1^N, q_2^N), 0\ \le\ q_1\ +\ q_2\ \le\ \frac{a}{b}, q_1, q_2\ \ge\ 0. \quad (2.25)$$

Для визначення стратегій $q_i^N,\ i\ = \overline{1,2}$, які складають рівноважну за Нешем ситуацію (q_1^N, q_2^N) розв'яжемо систему оптимізаційних задач

$$\hat{\pi}_1(q_2^N) = \max_{q_1 \in [0, a/b - q_2^N]} [(a\ -\ b\ (q_1\ +\ q_2^N))q_1\ -\ c\ q_1\ -\ d],$$

$$\hat{\pi}_2(q_1^N) = \max_{q_2 \in [0, a/b - q_1^N]} [(a\ -\ b\ (q_1^N\ +\ q_2)q_2\ -\ c\ q_2\ -\ d]. \quad (2.26)$$

Для першої задачі знаходимо похідну

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2^N)}{\partial q_1} =\ a\ -\ 2\ b\ q_1\ -\ b\ q_2^N\ -\ c\ = 0. \quad (2.27)$$

Тоді із виразу для похідної витікає, що в області $0\ \le\ q_1\ +\ q_2\ \le\ \frac{a}{b}$ функція $\pi(q)$ не є монотонною і її максимум по q_1 при фіксованому q_2^N може досягатись у внутрішніх точках відрізку $[0, a/b - q_2^N]$. Стаціонарні точки задовольняють рівнянню: $a\ -\ 2\ b\ q_1\ -\ b\ q_2^N\ -\ c\ = 0$. В силу того, що в цих точках

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2} =\ -\ 2\ b\ < 0,$$

то вони утворюють множину глобальних максимумів функції $\pi_1(q)$ по q_1. При цьому пряма (2.27) перетинає координатні осі відповідно в точках $\hat{q}_1 = (a\ -)/(2b)\ \in\ (0, a/b), \hat{q}_2 = (a\ -)/b)\ \in\ (0, a/b)$. Таким чином, множина розв'язків першої задачі:

$$q_1 = (a - c - b\ q_2^N)/(2b), q_2^N \in [0,(a - c)/b].$$

В силу симетрії множина розв'язків другої задачі:

$$q_2 = (a - c - b\ q_1^N)/(2b), q_1^N \in [0,(a - c)/(2b)].$$

Таким чином, рівновага за Нешем досягається в точці, яка є розв'язком системи

$$2\ b\ q_1^N + b\ q_2^N = a - c,$$

$$b\ q_1^N + 2\ b\ q_2^N = a - c.$$

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$q_1^N = q_2^N = \frac{a - c}{3\ b}$$

і він співпадає з дуополією Курно, тобто розв'язок безкоаліційної гри з використанням рівноваги Неша не дав нових результатів порівняно з аналізом гаданих варіацій.

Завдання

Задача 1. Підприємець вирощує яблука та інші культури на площі 500 кв. га. Кожна яблуня займає 1,0 кв. га, а інші культури – по 4,0 кв. га. Функція корисності має вигляд $u(x_1, x_2) = x_1 + 100x_2 - x_2^2$, де x_1 – число яблунь, x_2 – число інших культур. Скільки яблунь та інших дерев посадить підприємець, щоб максимізувати корисність? Якщо площа саду збільшиться на 100 кв. га, наскільки зміняться посадки яблунь та інших культур?

Задача 2. Нехай крива попиту має вигляд $P = 200 - X^{*2}$. Потрібно обчислити еластичність попиту за ціною при зміні останньої від p1=136 до p2=119

Задача 3. Функція попиту на вино C = 0.02K - 2p, де K – дохід, p – ціна пляшки вина, C – кількість пляшок вина. Нехай K=7500, p=30. Якщо ціна вина зросте до 40, то яким має стати дохід, щоб попит на вино залишався попереднім? При цьому доході і новій ціні скільки пляшок буде куплено?

Задача 4. Робінзон, який мешкає на безлюдному острові, може споживати тільки те, що сам виробив. Склалося так, що Робінзон виробляє (і, відповідно, споживає) тільки товар *X*. Функція корисності Робінзона:

$$TU = \frac{x_c(1-x_в)}{2},$$

де Xc – споживання товару X, одиниць на день;

Xв – виробництво товару X, одиниць за день.

Чим більше значення функції корисності, тим краще живе Робінзон. Робінзон може виробити не більше ніж 30 одиниць товару *X* за день. Скільки одиниць товару *X* необхідно споживати Робінзону, щоб отримати максимальне задоволення?

Задача 5. Функція корисності споживача має вигляд $U = x + 2\sqrt{y}$. Споживач прагне максимізувати свою корисність, ціна товару *y* дорівнює 10 грош. од., бюджет споживача становить 80 грош. од. Знайдіть функцію попиту споживача на товар *x*.

Задача 6. Бюджет споживача, який він витрачає на товари х та у, становить 118 грн. Ціна товару х дорівнює 3 грн/од. Ціна товару у – 8 грн/од. Одна з кривих байдужості споживача описується рівнянням $x^{0.5} * y^{0.5} = 1$. Знайдіть, яку кількість товарів х та у повинен купити раціональний споживач.

Задача 7. Припустимо, що в разі, якщо фірма збільшує застосовуваний капітал з 100 до 150 одиниць, а використовувані трудові ресурси – з 500 до750 одиниць, випуск продукції збільшується з 200 до 300 одиниць. Який ефект зростання масштабу виробництва має місце в такому разі?

Задача 8. До реконструкції підприємство виробляло 5000 мопедів на рік. Після реконструкції протягом першого року обсяг виробництва зріс до 7500 мопедів, і при цьому кількість працівників на рік зменшилася на 1/3. Протягом наступного року обсяг виробництва через зменшення попиту зменшився на 10%, а кількість працівників не змінювалася. Як змінилася продуктивність праці за два роки.

Задача 9. Виробнича функція $Q = 4L^{0.5}K$, де L – витрати праці, K – витрати капіталу. Знайдіть граничний продукт капіталу, якщо витрати праці дорівнюють 4, а витрати капіталу – 8.

Задача 10. Виробнича функція $Q = 0{,}5L^{0.5}K$. Визначте граничну норму технологічного заміщення капіталу працею, якщо витрати ресурсів: L=4, K=8.

Література:

1. Капустян В.О., Мажара Г.А., Фартушний І.Д. Моделювання економіки: підручник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 051 Економіка. Електронне мережеве видання. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 207 с.
2. Капустян В. О. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 економіка / В. О. Капустян, Г. А. Мажара ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електроні текстові данні (1 файл: 679 Кб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 120 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62311
3. Замрій А.М., Капустян В.О. Моделювання процесу технологічного переозброєння київського регіону. Економічний вісник НТУУ "Київський політехнічний інститут". 2019. № 16. С. 431 - 442.

Лекція №3

Модель міжгалузевого балансу

Тут ми розглянемо модель міжгалузевого балансу В.В. Лєонтьєва (модель "витрати - випуск"), яка використовується для планування господарської діяльності країни, регіону або великої багатопродуктової корпорації *(економічної системи).* Крім того, ця модель пов’язує виробництво із споживанням в агрегованому вигляді.

Для формування моделі "витрати - випуск" використовують балансову таблицю (матрицю міжгалузевих потоків), яка містить відомості про діяльність господарства. Нехай виробничий сектор економічної системи поділено на n *чистих або технологічних галузей*, тобто виробничий сектор виробляє n продуктів. *Балансовий звіт* за певний період наведено у таблиці, в якій:

$\bar{a}_{ij},\ i,j = \overline{1,n},$ – обсяг продукції i - ї галузі, витраченої j - ю галуззю у виробничому процесі за певний період часу;

$\bar{v}_j,\ j = \overline{1,n}$ – *валовий випуск* j - ї галузі за той же період часу;

$\bar{c}_j,\ j = \overline{1,n},$ – обсяг продукції j - ї галузі, який витрачається у невиробничій сфері.

Співвідношення між параметрами таблиці має вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} = \bar{v}_i - \bar{c}_i,\ i = \overline{1,n}. \qquad (3.1)$$

Витрати	Розподіл випуску між галузями						Кінцеве споживання	Валовий випуск
Розподіл продукції i-ї галузі на потреби інших галузей	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$	…	$\bar{a}_{1j}$	…	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{C}_1$	$\bar{U}_1$
	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$	…	$\bar{a}_{2j}$	…	$\bar{a}_{2n}$	$\bar{C}_2$	$\bar{U}_2$
	…	…	…	…	…	…	…	…
	$\bar{a}_{i1}$	$\bar{a}_{i2}$	…	$\bar{a}_{ij}$	…	$\bar{a}_{in}$	$\bar{C}_i$	$\bar{U}_i$
	…	…	…	…	…	…	…	…
	…	…	…	…	…	…	…	…
	$\bar{a}_{n1}$	$\bar{a}_{n2}$	…	$\bar{a}_{nj}$	…	$\bar{a}_{nn}$	$\bar{C}_n$	$\bar{U}_n$

Зазначені показники можуть виражатися як у натуральних, так і у вартісних одиницях. Залежно від цього розрізняють *натуральний чи вартісний міжгалузевий баланс.*

Проведемо нормування елементів таблиці

$a_{ij} = \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{v}_j}$ – обсяг продукції i - ї галузі, витраченої на випуск одиниці j - го продукту;

$c_j = \frac{\bar{c}_j}{\bar{v}_j}$ – частка продукції j - ї галузі, яка витрачається у невиробничій сфері.

Тоді $c' = (c_1, \dots, c_n)$ – *вектор споживання.* Числа a_{ij}, $i = \overline{1, n}$ – *коефіцієнти прямих витрат* j - ї галузі; вони характеризують технології виробництва цієї галузі за певний період, оскільки визначають обсяг і структуру витрат, необхідних для випуску одиниці j - го продукту.

$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – *матриця прямих витрат (технологічна матриця).* Вона містить інформацію про структуру міжгалузевих зв’язків та існуючі в певній виробничій системі технології виробництва. В різні часові періоди ця матриця може змінюватись, тобто за її допомогою можна проаналізувати розвиток технологій у виробничій системі. Крім того, матриця A може використовуватись для планування та прогнозування виробництва.

Нехай відносно матриці A виконуються такі припущення:

i) вона є сталою протягом певного періоду (базового);

ii) для випуску x_j одиниць продукції j - ї галузі необхідні і достатні витрати інших галузей в тій же пропорції, тобто $a_{ij}x_j$, $i = \overline{1,n}$.

Вектор $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ будемо називати *вектором валового випуску.*

Частка валового випуску, яка витрачається на виробничі потреби економіки, описується *вектором виробничих витрат*

$$(Ax)' = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}). \tag{3.2}$$

Взаємозв'язок між ендогенним вектором валового випуску x, ендогенним вектором виробничих витрат Ax та екзогенним вектором споживання c описується балансовим рівнянням

$$x - Ax = c, \ x \in R_+^n, \tag{3.3}$$

де $c \geq 0$, $A \geq 0$.

З математичної точки зору питання про сумісність лінійної алгебраїчної системи із (101) зводиться до існування оберненої матриці $(E_n - A)^{-1}$, де E_n – одинична матриця розмірності $n \times n$. Звідси $x = (E_n - A)^{-1} c$. Умова невід'ємності вектора x ускладнює дослідження системи із (3.3) і для цього потрібен спеціальний апарат теорії невід'ємних матриць, який буде розглянуто в наступному пункті.

Задачу (3.3) називають *моделлю Леонтьєва.* Якщо для довільного вектора споживання $c \geq 0$ задача (3.3) має розв'язок, то модель Леонтьєва

В силу великої розмірності технологічної матриці A одним із основних питань є питання щодо продуктивності моделі Леонтьєва. Для з'ясування цього питання розглянемо деякі властивості невід'ємних матриць.

Нехай $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – квадратна матриця з невід'ємними елементами: $a_{ij} \geq 0, V_n = \{1,2,\ldots,n\}$.

Означення 3.1. *Нехай* $S \subseteq V_n$, *а* $S' = V_n \setminus S$. *Якщо* $a_{ij} = 0$, $i \in S'$, $j \in S$, *то множина* S *називається ізольованою* •

Наприклад,

a) якщо матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{21} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то $S = \{3\}, S' = \{1,2\}$;

b) якщо матриця має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix},$$

то $S = \{1\}, S' = \{2,3\}$ або $S = \{1,2\}, S' = \{3\}$:

c) якщо матриця має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

то $S = \{\emptyset\}$.

З економічної точки зору в рамках моделі Леонтьєва наявність ізольованої множини свідчить про те, що галузі з номерами із S не використовують у виробничому процесі продукцію галузей з номерами із S', тобто група галузей з номерами із S може функціонувати незалежно від інших галузей. Так у прикладі a) третя галузь може функціонувати незалежно від інших галузей. У випадку моделі обміну наявність непорожньої ізольованої мнжини S означає, що країни з намерами із S не імпортують товарів з країн із номерами, які належать S'. При цьому експорт у ці країни можливий.

Перенумеруємо індекси так, щоб $S = \{1, \dots, k\}, S' = \{k + 1, \dots, n\}$. Для матрицы A із прикладу a) це означає одночасну перестановку рядків і стовпців, після чого вона прийме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad (3.4)$$

де A_{11}, A_2 – квадратні блоки розірностей $k \times k$ та $(n - k) \times (n - k)$ відповідно.

Так, якщо у матриці A виконати перестановку 1 - го і 3 - го стовпців, а потім 1 - го і 3 - го рядків, то будемо мати

$$A = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{21} \\ 0 & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, A_{11} = \{a_{33}\}, A_{22} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad k = 1,$$

$$n - k = 2.$$

Матриця B із прикладу $b)$ вже має вигляд (3.4), а блок A_{11} можемо вибирати по різному:

$$A_{11} = b_{11} \text{ або } A_{11} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця C із прикладу $c)$ жодною одночасною перестановкою рядків і стовпців не можна звести до вигляду (3.4).

Означення 3.2. *Якщо для деякої матриці A розмірності* $n \times n$ *у множині* V_n *відсутні ізольовані підмножини, то таку матрицю називають нерозкладною* •

Нерозкладну матрицю A одночасною перестановкою рядків і стовпців не можна звести до вигляду (108). Зокрема, матриця C із прикладу $c)$ є нерозкладною. Матриця $A > 0$ – нерозкладна. Якщо в матриці при $n \geq 3$ лише один елемент дорівнює нулю, то така матриця - нерозкладна.

Теорема 3.1. (Перрона – Фробеніуса про спектр невід'ємної нерозладної матриці). *Нехай матриця A розмірністю* $n \times n$ *невід'ємна і нерозладна, а* $\Lambda(A)$ *– множина її власних чисел:* $(\Lambda(A))' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $m \leq n$. *Тоді у множині* $\Lambda(A)$ *є додатє число* $\lambda_A > 0$ *таке, що*

$$|\lambda_k| \leq \lambda_A, \ k = \overline{1, m}.$$

Крім того, власному числу λ_A відповідає додатній власний вектор x_A •

При цьому число λ_A називають *числом Фробеніуса*, а вектор x_A - *вектором Фробеніуса*.

Приклад 3.1. Знайти λ_A, x_A для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння $|A - \lambda E_2| = 0$ для цієї матриці має вигляд $\lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5 = 0$. Тоді $(\Lambda(A))' = (0.5,1)$. Тому $\lambda_A = 1$, а вектор x_A визначається із системи

$$\begin{pmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

і може дорівнювати $(x_A)' = (3, 2)$.

Наступна теорема дає можливість оцінити фробеніусове число λ_A матриці $A \geq 0$. Для цього введемо позначення

$$r = \min_{\underline{i=1,n}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, R = \max_{\underline{i=1,n}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, s = \min_{\underline{j=1,n}} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, S = \max_{\underline{j=1,n}} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Теорема 3.2. *Нехай матриця А розмірністю $n \times n$ невід'ємна. Тоді для її фробеніусового число λ_A справедливі такі нерівності:*

$$r \leq \lambda_A \leq R, \; s \leq \lambda_A \leq S. \tag{3.5}$$

Якщо до того ж матриця A ще й нерозкладна, то нерівності (3.5) - строгі, крім випадку $r = R$, $s = S$ •

Приклад 3.2. Для прикладу 3.1 маємо: $r = 0.9$, $R = 1.1$, $s = S = 1$. Тому $0.9 \leq \lambda_A \leq 1.1$ або навіть $\lambda_A = 1$.

Виявилось, що продуктивність моделі Леонтьєва повністю визначається числом Фробеніуса λ_A.

Теорема 3.3. *Для продуктивності моделі Леонтьєва*

$$x - Ax = c, \; x \geq 0 \tag{3.6}$$

необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність $\lambda_A < 1$.

Таким чином, перевірка моделі Леонтьєва на продуктивність зводиться до чисто математичної задачі щодо спектру матриці A. Ця задача по складності рівнозначна розв'язності системи рівнянь із (3.6). Тому наведемо достатні умови продуктивності моделі "витрати - випуск."

Теорема 3.7. *Нехай:*

(i) матриця A невід'ємна і нерозкладна;

(ii) виконуються умови

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le 1, \; i = \overline{1,n}; \tag{3.7}$$

(iii) хоч би для одного рядка i_0 виконується умова $r_{i_0} < 1$.

Тоді модель Леонтьєва, яка відповідає цій матриці, є продуктивною •

Зауважимо, що розв'язок моделі Леонтьєва у випадку її продуктивності має вигляд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} A^k c. \tag{3.8}$$

Формула (3.8) є зручною для наближених обчислень.

Повернемось до моделі Леонтьєва (3.6). З'ясуємо як будуть змінюватись її розв'язки при малій зміні екзогенних параметрів (порівняльна статика). В силу того, що (3.6) є системою рівнянь і нерівностей, тут не вдається отримати рівнянь порівняльної статики, як це було у випадку, коли в якості моделі виступала тільки система рівнянь.

Будемо вважати, що технологічна матриця не змінюється, а змінюєся вектор c. Тоді $x = x(c)$, тобто йдеться про реакцію системи на зміну координат вектора попиту.

Теорема 3.8. (про додатність вектора валового випуску.) *Нехай в моделі (110) матриця* $A \ge 0$ *нерозкладна і продуктивна, вектор попиту* $c \ge 0$, $c \ne 0$. *Тоді* $x(c) > 0$, *тобто в нерозкладній продуктивній виробничій системі для задоволення ненульового кінцевого попиту потрібен валовий випуск кожного із товарів в додатній кількості* •

Нехай в моделі (3.6) у векторі попиту c збільшилась перша координата c_1, а інші координати не змінились. Як прореагує на такі зміни наша система?

Теорема 3.9. *Нехай в моделі (3.6) матриця* $A \geq 0$ *нерозкладна і продуктивна. Якщо* $c' = (c_1, \ldots, c_n)$ *і* $\hat{c}' = (\hat{c}_1, \ldots, c_n)$*, причому* $\hat{c}_1 > c_1$*, то*

$$\max_{j=\overline{1,n}} \frac{x_j(\hat{c})}{x_j(c)} = \frac{x_1(\hat{c})}{x_1(c)}. \tag{3.9}$$

Якщо максимум в (3.9) досягається крім $j = 1$ ще для якогось $j = i \neq 1$, тобто

$$\frac{x_i(\hat{c})}{x_i(c)} = \frac{x_1(\hat{c})}{x_1(c)},$$

то потрібно, щоб $c_i = 0$.

Нехай

$$E_{ij} = \frac{c_j}{x_i(c)} \frac{\partial x_i(c)}{\partial c_j} \; -$$

це еластичність i - го товару щодо попиту c_j на j - й товар.

Теорема 3.10. *Якщо в моделі (110) матриця* $A \geq 0$ *нерозкладна і продуктивна, то* $E_{ij} \leq 1, i, j = \overline{1,n}$*. Якщо* $c_i > 0$*, то* $E_{ij} < 1,\ i \neq j$ •

Література:

1. Капустян В.О., Мажара Г.А., Фартушний І.Д. Моделювання економіки: підручник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 051 Економіка. Електронне мережеве видання. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 207 с.
2. Капустян В. О. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 економіка / В. О. Капустян, Г. А. Мажара ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електроні текстові данні (1 файл: 679 Кб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 120 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62311

3. Замрій А.М., Капустян В.О. Моделювання процесу технологічного переозброєння київського регіону. Економічний вісник НТУУ "Київський політехнічний інститут". 2019. № 16. С. 431 - 442.

Лекція №4
Моделі ринків і теорія загальної рівноваги

При моделюванні ринків та ринкової взаємодії економічних агентів використовують дві основні концепсії. Одна із пов'язана з агрегуванням окремих типів агентів у відповідні сектора економіки. Згідно іншої концепції економіка розглядається як дезагрегована система, компонентами якої виступають економічні агенти. З аналітичної точки зору, агреговані моделі є більш простими і доступними для вивчення та аналізу.

Обидва типи моделювання використовують моделі виробництва та споживання, які були розглянуті в двох попередніх розділах.

Далі на концептуальному рівні розлянемо два найпростіших варіанти гранично агрегований моделей: класичну модель та модель Кейнса.

Класична модель ринкової економіки грунтується на описі економіки з досконалою конкуренцією та охоплює опис взаємодії трьох ринків: ринок робочої сили (праці), грошей та товарів.

Ринок праці, як і інші ринки, описується за допомогою функцій попиту і пропозиції цього агрегованого фактору та умов рівноваги між ними. Функція попиту будується за таких припущень:

1) фірми є повністю конкурентними при пропозиції товарів та найму праці;

2) за інших рівних умов граничний продукт праці спадає зі зростанням кількості праці.

Розглядаючи весь виробничий сектор економіки як одне велике підприємство і позначаючи через π його прибуток та вважаючи, що всі фактори виробництва фіксовані, крім праці L, можемо записати

$$\pi(L) = p\ F(K,L) - \omega\ L, \tag{4.1}$$

де p – ціновий індекс агрегованої продукції;

F – виробнича функція економіки;

ω – індекс ціни агрегованої праці;

K – агреговані виробничі фонди економіки.

Тоді необхідна умова оптимальності першого порядку для максимуму прибутку (4.1) має вигляд

$$\frac{\partial \pi(L)}{\partial L} = p\ \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} - \omega = 0 \tag{4.2}$$

є і достатньою, оскільки за припущенням 2):

$$\frac{\partial^2 \pi(L)}{\partial L^2} = p\ \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0.$$

Подавши (4.2) у вигляді

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \frac{\omega}{p}$$

та продиференціювавши його за параметром ω/p (індексом реальної зарплати), отримаємо

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \frac{\partial L}{\partial(\omega/p)} = 1. \tag{4.3}$$

Оскільки $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$, то із (3) будемо мати

$$\frac{\partial L}{\partial(\omega/p)} < 0,$$

тобто попит на працю $L_D = L_D(\omega/p)$ є спадною функцією реальної зарплати.

Припустимо, що функція пропозиції праці $L_S = L_S(\omega/p)$ є зростаючою відносно ω/p.

Взаємодію функцій L_D та L_S на ринку праці зображує модель Маршала. Рівноважний рівень реальної зарплати $(\omega/p)^*$ визначається збігом $L_D((\omega/p)^*)$ та $L_S((\omega/p)^*)$, що встановлює рівноважний рівень використання праці L_* (або рівень зайнятості). При $\omega/p > (\omega/p)^*$ виникає надлишок пропозиції над попитом $L_S(\omega/p) > L_D(\omega/p)$, що призводить до падіння реальної зарплати ω/p під впливом безробіття. Якщо ж $\omega/p \ < (\omega/p)^*$, то $L_S(\omega/p) < L_D(\omega/p)$, тобто попит на працю перевищує пропозицію праці, що змушує підприємців збільшувати реальну зарплату.

Розглянемо ринок грошей. Функція попиту на гроші $M_D(p)$ визначається формулою Пігу

$$M_D(p) = \ k \ Y \ p, \tag{4.4}$$

де Y – індекс валового внутрішнього продукту; p – середній індекс цін; k - коефіцієнт пропорційності ("кембриджський" коефіцієнт).

Пропозиція грошей задається екзогенно M_S. Для кожного Y маємо свою лінію попиту і нехай p_* рівноважний ціновий індекс. Якщо при заданому $\tilde{Y}$ ціна $\tilde{p}_* < p_*$, то спостерігається надлишок пропозиції грошей

$$M_S \ - \ M_D(\tilde{p}_*) > 0,$$

і ціни починають зростати до рівня p_*.

На ринку товарів розглядаються два типи товарів: споживчі і інвестиційні. Попит на ці товари задається функціями $C(r)$ та $I(r)$, які залежить від норми відсотка r і вважаються спадними, тобто при зростанні ставки r стають більш вигідними заощадження. Загальний попит на товари (планові видатки) $E_D(r) = \ C(r) \ + \ I(r)$, а пропозиція товірів є функцією рівня зайнятості $E_S(L) = \ Y(L)$. Отже, рівноважні рівні використання праці L_*, ставки r_* та ВВП Y_* визначаються рівністю

$$C(r_*) \ + \ I(r_*) = \ Y(L_*) = Y_*.$$

Об'єднавши рівняння та умови, що описують ринки праці, грошей та товарів, отримаємо повну класичну модель ринкової економіки в гранично агрегованому вигляді

$$L_S = L_S(\frac{\omega}{p}), L_D = L_D(\frac{\omega}{p}),$$

$$L_S((\frac{\omega}{p})_*) = L_D((\frac{\omega}{p})_*),$$

$$M_D(p) = \ k \ Y \ p,$$

$$M_S = k\ Y_* p_*,$$
$$E_D(r) = C(r) + I(r), E_S(L) = Y(L),$$
$$C(r_*) + I(r_*) = Y(L_*) = Y_*. \qquad (4.5)$$

Розв’язки системи (5) $((\frac{\omega}{p})_*, p_*, r_*, L_*, Y_*)$ характеризують стан *загальної рівноваги економіки*.

Модель (4.5) дає змогу розв’язувати задачу пошуку рівноваги в економіці в умовах повної зайнятості.

Модель Кейнса, яка була розроблена в 1936 році, давала відповіді на проблеми, що виникли в світі у зв’язку з кризою перевиробництва та масового безробіття в період Великої депресії 1929 – 1933 рр. Головне питання питання полягало в тому, як досягти рівноваги, коли економіка далеко відійшла від рівноважного стану і сталося масове безробіття. Відповідь полягала в особливій регуляриторній економічній політиці держави, оскільки автоматично діючі ринкові сили не в змозі були гарантувати досягнення рівноваги.

Розглянемо найпростіший варіант моделі Кейнса і порівняємо його із класичною моделлю. В моделі Кейнса діють три типи активів: гроші, облігації та фізичний капітал. Тут відносну ціну грошей, виражену в облігаціях, характеризує ставка відсотка за облігаціями, і припускається, що в умовах рівноваги норма прибутку на K дорівнює ставці доходу за облігаціями. Таким чином, модель дає змогу простежити, як грошово - кредитна політика впливає на виробництво. Наприклад, емісія грошей зумовлює збільшення грошової маси, що змінює пропорції обміну між грошима і облігаціями. При збільшенні маси грошей їх зберігатимуть тільки за умови зниження норми відсотка на облігації, при цьому норма прибутку теж має спадати через зв’язок між облігаціями та капіталом.

Умова максимуму прибутку $\pi(K) = p\ F(K,L) - r\ K$ має вигляд:

$$\frac{\partial \pi(K)}{\partial K} = p\ \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} - r = 0 (\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0).$$

Отже, гранична продуктивність капіталу у вартісному вимірі дорівнює нормі прибутку r. Зниження r веде до спаду $\partial F/\partial K$, а оскільки $\partial F/\partial K$ зменшується при зростанні K, спад r веде до збільшення попиту на інвестиційні товари, а отже, і на всі товари в цілому. Це означає, що помірне збільшення грошової маси зумовлює зростання попиту на товари і відповідно збільшення пропозиції товарів, тобто зростання кінцевого продукту.

Якщо з якихось причин загальний попит E на продукцію виявився менше від пропозиції Y_* при повній зайнятості, то згідно Кейнсу, фактично вироблений кінцевий продукт Y дорівнюватиме попиту E, тобто $Y < Y_*$, що негайно вплине на обсяг використаної праці L, який буде меншим за L_* в класичній моделі і при цьому різниця $L_* - L$ визначить рівень безробіття.

Отже, основні особливості моделі Кейнса порівняно з класичною моделлю такі:

1) рівновага на ринку товарів досягається при рівності попиту та фактичної пропозиції;

2) фактичний попит на працю визначається фактично затребуваним продуктом, і рівновага на ринку праці може бути досягнута тоді, коли ринок товарів перебуватиме в рівновазі.

У класичній моделі рівновага на ринку праці встановлювалась при повній зайнятості та реальній зарплаті $(\omega/p)_*$, яка визначалась із умови $L_S(\omega/p) = L_D(\omega/p) = L_*$, де L_* – обсяг праці при повній зайнятості.
При цьому рівноважний обсяг кінцевого продукту Y_* визначався рівністю $Y_* = F(K, L_*)$.

Якщо позначити через $Lq(r)$ функцію попиту на облігації в залежності від відсоткової ставки, то найпростіший варіант моделі Кейнса можна подвти у вигляді:

$$L_S = L_S(\frac{\omega}{p}), L_D = L_D(Y); \tag{4.6}$$

$$M_D = k\ p\ Y + Lq(r), \frac{dLq(r)}{dr} < 0, M_S = M_D; \tag{4.7}$$

$$E_D = \; C(Y) \; + \; I(r), \frac{dC(Y)}{dY} > 0, \frac{dI(r)}{dr} < 0,$$

$$E_S = \; Y(L), E_D = E_S. \tag{4.8}$$

Для подальшого аналізу спростимо нашу модель. Нехай функції $C(Y)$ та $I(r)$ є афінними, тобто

$$C(Y) = \bar{C} \; + \; \hat{c} \; Y, \; I(r) = \bar{I} \; - \; \hat{f} \; r, \tag{4.9}$$

де $\bar{C}$ – автономне споживання;

$\hat{c}$ – гранична схильність до споживання, тобто $\hat{c} = \frac{dC}{dY}$ $(0,1)$; $\bar{I}$ – автономні інвестиційні видатки;

$\hat{f}$ – чутливість інвестиційних видатків до норми відсотка r,

тобто $\hat{f} = \; - \; dI/dr \; > 0$.

На фазовій площині станів економіки (Y, r) умова рівноваги (4.9) на ринку товарів буде мати вигляд

$$Y \; = \bar{C} \; + \; \hat{c} \; Y \; + \; \bar{I} \; - \; \hat{f} \; r,$$

тобто лінія рівноваги на ринку товарів (на Рис.3.3. це лінія IS – *лінія інвестицій та заощаджень*) є прямою, яка описується афінною функцією

$$Y \; = \frac{\bar{C} \; + \; \bar{I}}{1 \; - \; \hat{c}} \; - \; \frac{\hat{f}}{1 \; - \; \hat{c}} \; r, \tag{4.10}$$

яка є спадною за r, а отже при фіксованому r існує єдине рівноважне значення $Y^*(r)$.

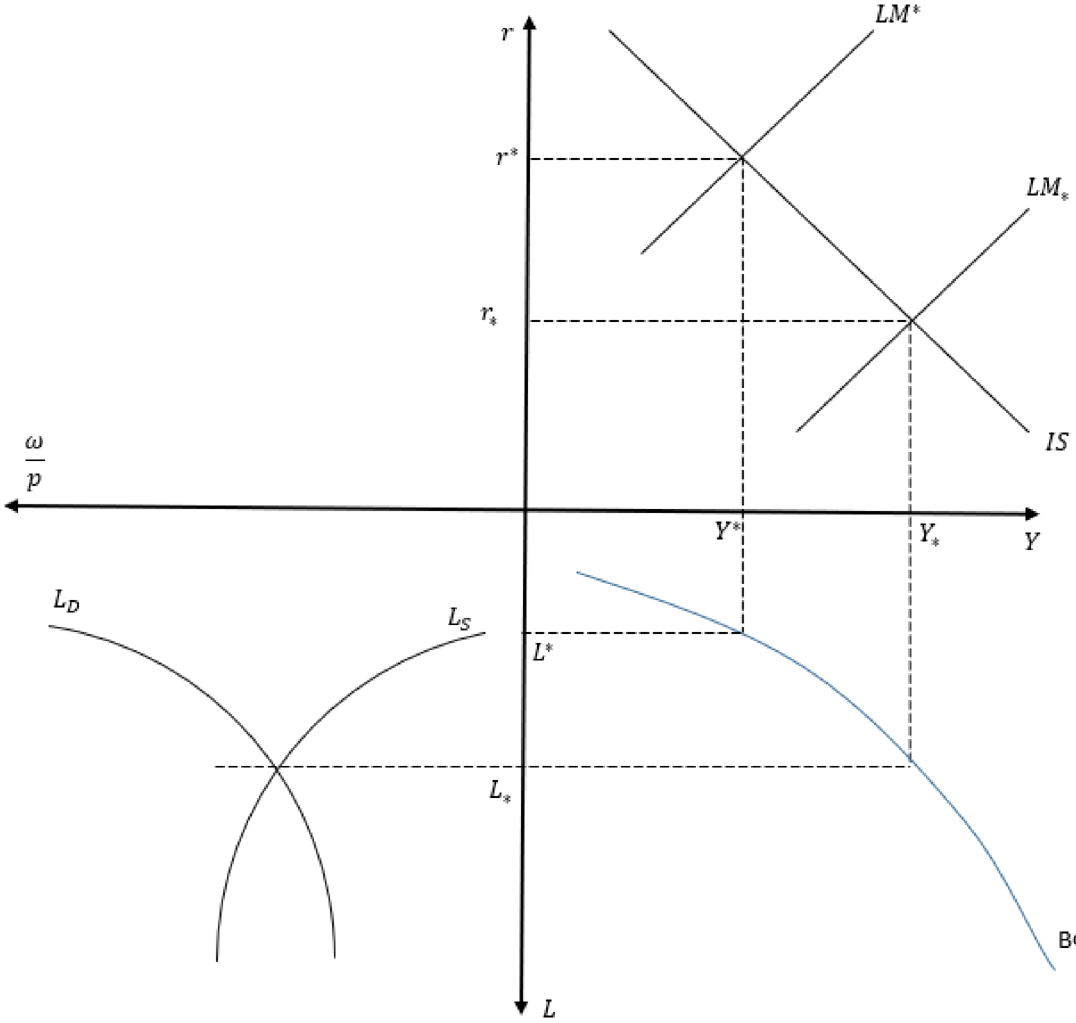

Рис. 3.3.

Розглянемо тепер рівновагу на ринку грошей припускаючи, що

$$Lq(r) = \bar{h} \ - \ \hat{j}\ r, \tag{4.11}$$

де $\bar{h}$ – автономний рівень видатків на облігації;

$\hat{j}$ – чутливість Lq до r, причому $\hat{j} = \ - \ dLq/dr \ > 0$.

Тоді умова рівноваги (4.8) буде мати вигляд

$$Y \ = \frac{M_S \ - \ \bar{h}}{k \ p} \ + \ \frac{\hat{j}}{k \ p}\ r, \tag{4.12}$$

тобто лінія рівноваги на ринку грошей (*лінія грошей* LM) є зростаючою афінною функцією r, а отже, при фіксованому r існує єдине рівноважне значення $Y^*_M(r)$.

Таким чином, *загальна рівновага* на ринку товарів та грошей досягається при $Y^*(r^*) = Y_M^*(r) = Y^*$, причому точка рівноваги (Y^*, r^*) єдина. Ця рівновага на ринках грошей та товарів однозначно визначає фактичну потребу у праці L^*

$$Y^* = \ F(K(r^*, L^*), L^*),\ p\ \frac{\partial F(K, L^*)}{\partial K} = r^*.$$

Загальну графічну ілюстрацію встановлення рівноваги у моделі Кейнса показано на Рис.3.3. У першому квадранті зображено лінії IS та LM, в четвертому квадранті – виробничу функцію економіки ВФ як функцію праці L, у третьому квадранті – криві попиту та пропозиції на працю.

Якщо класична модель припускає автоматичну тенденцію до повної зайнятості, то в моделі Кейнса вона відсутня, і рівновага може встановлюватись при неповній зайнятості. Для зменшення цієї диспропорції потрібна спеціальна політика держави.

Розглянемо економіку в дезагрегованому вигляді. Її складовими виступають окремі виробники та споживачі. Модель поведінки економічних агентів на такому ринку була запропонована в середині 19 - го сторіччя швейцарським економістом *Леоном Вальрасом.*

Нехай економіка складається із H споживачів і E підприємств. Підприємства являються багатопродуктовими і випускають n типів продукції, витрачаючи при цьому m типів ресурсів. Нехай при цьому p_i – ціна одиниці продукції i - го виду; ω_j – ціна одиниці витрат j - го виду. Вважається, що економіка є *конкурентною.*

Споживачі, діючи в межах своїх бюджетних обмежень, намагаються отримати максимум задоволення своїх потреб від придбання продукції, а виробники прагнуть до максимізації прибутків від виробництва.

Нехай r_j^e – кількість первинних ресурсів виду j, які закуповуються фірмою e; q_i^e – обсяг продукції виду i, який продається фірмою e.
Тоді прибуток фірми e має вигляд

$$\pi^e = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^e \ - \ \sum_{j=1}^{m} \omega_j r_j^e, e \ = \overline{1, E}. \tag{4.13}$$

Кожна фірма максимізує свій прибуток при додатковому обмеженні

$$\Phi^e(q^e, r^e) = 0, \ e \ = \overline{1, E}, \tag{4.14}$$

де $\Phi^e(q^e, r^e)$ – виробнича функція фірми в неявному вигляді.

Умови оптимальності для задачі максимізації прибутку (4.13) при обмеженнях (4.14) приймають вигляд

$$\lambda^e \frac{\partial \Phi^e}{\partial q_i^e} = \ - \ p_i, \lambda^e \frac{\partial \Phi^e}{\partial r_j^e} = \omega_j, \lambda^e > 0,$$

$$\Phi^e(q^e, r^e) = 0, \ i \ = \overline{1, n}, \ j \ = \overline{1, m}, \ e \ = \overline{1, E}. \tag{4.15}$$

Таким чином, умови оптимальності (4.15) складаються із $E \ (n \ + \ m \ + \ 1)$ рівнянь, які містять стільки ж невідомих, включаючи множник Лагранжа λ^e.

Тепер охарактеризуєм поведінку споживачів. Кожен із них володіє певним набором виробничих факторів (наприклад, робочою силою), які він може продати а ринку факторів виробництва та отримати дохід. Крім того, кожен споживач може мати свою частку у фірмі та отрмувати відповідну частку її прибутків. Загальний дохід від продажу факторів виробництва й участі у справах фірм споживач використовує для закупівлі товарів і послуг на ринку продукції.

Нехай x_i^h – кількість i - ої продукції, закупленої споживачем $h; y_j^h$ – кількість j - го фактора, проданого споживачем h.

Тоді корисність, отриману споживачем h від товарів та послуг, а також від продажу факторів, можна охарактеризувати функцією корисності

$$U^h(x^h, y^h), \ h \ = \overline{1, H}, \tag{4.16}$$

де $(x^h)' = (x_1^h, \ldots, x_n^h), (y^h)' = (y_1^h, \ldots, y_m^h)$.

Бюджетне обмеження для споживача h має вигляд

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j y_j^h \ + \ \sum_{e=1}^{E} s^{h,e} \pi^e = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h, \ h \ = \overline{1, H}, \tag{4.17}$$

де $s^{h,e}$ – частка участі споживача h у справах фірми e.

Споживач намагається максимувати свою корисність (4.16) при бюджетному обмеженні (4.17).

Поведінка споживача описується системою рівнянь, які виражають умови оптимальності в оптимізаційній задачі (4.16) - (4.17),

$$\frac{\partial U^h}{\partial x_i^h} = \mu^h p_i, \frac{\partial U^h}{\partial y_j^h} = -\mu^h \omega_j, \mu^h > 0,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j y_j^h + \sum_{e=1}^{E} s^{h,e} \pi^e = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}, \ h = \overline{1,H}. \quad (4.18)$$

Таким чином, умови оптимальності (4.18) складаються із $H\ (n + m + 1)$ рівнянь, які містять стільки ж невідомих, включаючи множник Лагранжа μ^h.

Системи рівнянь (4.15) та (4.18) описують рівновагу виробників та споживачів окремо. До цих рівнянь слід додати балансові рівняння на товарному та ресурсному ринках, тобто

$$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{e=1}^{E} q_i^e, \ i = \overline{1,n}, \quad (4.19)$$

$$\sum_{h=1}^{H} y_j^h = \sum_{e=1}^{E} r_j^e, \ j = \overline{1,m}. \quad (4.20)$$

Таким чином, системи рівнянь (4.15), (4.18), (4.19) та (4.20) описують рівноважний стан ринкової економіки і складаються із $(H + E)(n + m + 1) + n + m$ скалярних рівнянь.

Згідно з **законом Вальраса,** загальний попит має дорівнювати загальній пропозиції за будь - якої системи цін.

Із цього витікає, що в системі рівноваги (4.15), (4.18), (4.19), (4.20) одне із рівнянь є наслідком інших рівнянь. Кількість невідомих також можна зменшити на одиницю, використовуючи відносні ціни. Таким чином, система рівнянь загальної рівноваги є замкнутою: кількість рівнянь співпадає з кількістю невідомих. Основним питанням для системи загальної рівноваги є встановлення її продуктивності.

Спростимо модель загальної рівноваги наступним чином. У неокласичній моделі економіки, що розглядалася вище, споживачі та виробники однозначно встановлюють свої плани споживання

$$x^h = (x_i^h(p))_{i=1}^n, \qquad h \ = \overline{1, H}$$

і плани виробництва $q^e \ = (q_i^e(p))_{i=1}^n$, $e \ \ = \overline{1, E}$ за будь - яких цін p.

Векторна функція

$$\Sigma'(p) = (\Sigma_1(p), \ldots, \Sigma_n(p)),$$

де

$$\Sigma_i(p) = \sum_{h=1}^H x_i^h(p) \ - \ \sum_{e=1}^E q_i^e,$$

називається *функцією надмірного попиту.*

Нехай для цієї функції виконуються припущення.

I. Функція $\Sigma(p)$ однорідна нульового ступеня відносно цін, тобто $\Sigma'(\alpha \ p) \ = \Sigma'(p)$, $\alpha \ > \ 0$.

Ця властивість дає змогу обирати ціни із стандартного цінового симплексу

$$S_n = \{p\colon \ p \ \geq \ 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

II. Функція $\Sigma(p)$ однозначна та неперервна відносно цін.

III. Функція $\Sigma(p)$ задовольняє закон Вальраса у вартістному сенсі:

$$p'\Sigma(p) = \sum_{i=1}^n p_i \Sigma_i(p) = 0.$$

Означення 4.1. *Система цін p^* в даній моделі називається рівноважною якщо виконуються умови*

$$p^* \ \geq \ 0, \Sigma(p^*) \ \leq \ 0. \tag{421}$$

Теорема 4.1. *Якщо в неокласичній моделі ринкової економіки функція надмірного попиту $\Sigma(p)$ задовольняє умовам $I - III$, то система рівноважних цін p^* існує.*

Задачі для самостійного розв'язання

Виділити основне, скласти модель, навести приклад з поясненням.

Завдання 1. Класична модель ринкової економіки

Завдання 2. Модель Кейнса

Завдання 3. Модель Вальраса

Завдання 4. Схильність до ризику

Завдання 5. Формування умов прийняття або відхилення задачі інвестування/ гри/ виробництва/ лотереї

Література:

1. Капустян В.О., Мажара Г.А., Фартушний І.Д. Моделювання економіки: підручник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 051 Економіка. Електронне мережеве видання. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 207 с.
2. Капустян В. О. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 економіка / В. О. Капустян, Г. А. Мажара ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електроні текстові данні (1 файл: 679 Кб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 120 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62311
3. Замрій А.М., Капустян В.О. Моделювання процесу технологічного переозброєння київського регіону. Економічний вісник НТУУ "Київський політехнічний інститут". 2019. № 16. С. 431 - 442.

Лекція №5

Теорія сподіваної корисності та її застосування в моделюванні при невизначеності.

У звичайній теорії економічного вибору в детермінованих умовах не припускається принципової відмінності між окремими актами вибору. Проте в умовах невизначеності акти вибору та їх наслідки залежать від зовнішніх обставин, які трактуються як *стани природи.*

Множина альтернатив, з якої робиться вибір, називається *проспектом* або *лотереєю.*

Розглянемо випадок скінченної множини станів, яка складається із s елементів, так що кожний проспект має s наслідків вибору: $x^1, x^2, \ldots, x^s$ в деякій множині $X \subseteq R^n$. Вважається, що кожен наслідок x^i може бути отриманий з деякою ймовірністю p_i. Множина всіх подібних ймовірностей утворює дискретний ймовірнісний розподіл $\{p \in R_+^n : \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$. Таким чином, під *проспектом* або *лотереєю* будемо розуміти таблицю

$$y = \oplus_{i=1}^{s} p_i \circ x^i = p_1 \circ x^1 \oplus \ldots \oplus p_s \circ x^s. \qquad (5.1)$$

Позначимо через Y множину всіх проспектів для окремого агента, який стоїть перед проблемою вибору в умовах описаної вище невизначеності. Припусвається, що агент може робити вибір із Y за допомогою деякого відношення переваги $\succeq$. Крім того, вважається можливим утворення *складних проспектів*. Нехай

$$y_j = \oplus_{i=1}^{s} p_i^j \circ x^i, \; j = \overline{1, m}.$$

Тоді складний проспект

$$y = \oplus_{j=1}^{m} q_j \circ y_j, \; q \in R_+^m, \sum_{j=1}^m q_j = 1.$$

До найпростіших відносяться проспекти з двома та одним наслідком, тобто проспекти вигляду

$$y = p \circ x^1 \oplus (1 - p)x^2 = (p; x^1, x^2),$$

$$y = 1 \circ x = 1 \circ x \oplus 0 \circ z = (1; x, x) = x.$$

Сформулюємо основні припущення сподіваної корисності у вигляді аксіом.

Аксіома 5.1. Агент має на множині Y усіх проспектів відношення нестрогої переваги $\succeq$, *яке є повним квазіпорядком, тобто* $(X, \succeq)$ *- поле переваг у задачі вибору рішення агентом.*

Аксіома 5.2. (неперервність.) *Для всіх* $y^1,\ y^2,\ y^3 \in Y$ *таких, що* $y^1 \succeq y^2 \succeq y^3$ *існує таке* $\alpha \in [0,1]$, *що* $\alpha \circ y^1 \oplus (1 - \alpha) \circ y^3 = (\alpha; y^1, y^3) \sim y^2$.

Інакше кажучи, для середнього проспекту існує можливість його інтерполяції імовірносною сумішшю крайніх проспектів.

Аксіома 5.3. (редукція складного проспекту.) *Для складного проспекту*

$$y = \oplus_{i=1}^{m} q_i \circ y_i,\ q \in R_+^m, \sum_{i=1}^{m} q_i = 1,$$

де

$$y_i = \oplus_{j=1}^{s} p_j^i \circ x^j, p^i \in R_+^s, \sum_{j=1}^{s} p_j^i = 1,\ i = \overline{1,m},$$

існує звичайний проспект

$$\hat{y} = \oplus_{j=1}^{s} \hat{p}_j \circ x^j, \hat{p}_j = \sum_{k=1}^{m} q_k p_j^k,$$

еквівалентний y, тобто $\hat{y} \sim y$.

Розглянемо приклад. Нехай складний проспект має вигляд

$$y = (\alpha; x^2, (\pi; x^1, x^2)).$$

Покажемо що $y \sim ((1 - \alpha)\ \pi; x^1, x^2)$.

Дійсно, для складного проспекту маємо $q_1 = \alpha, q_2 = 1 - \alpha; p_1^1 = 0, p_2^1 = 1; p_1^2 = \pi, p_2^2 = 1 - \pi$. Тоді

$$\hat{p}_1 = \sum_{k=1}^{m} q_k p_1^k = \pi\ (1 - \alpha), \hat{p}_2 = \sum_{k=1}^{m} q_k p_2^k = \alpha + (1 - \alpha)(1 - \pi)$$
$$= 1 - \pi\ (1 - \alpha),$$

тобто $y \sim \hat{y}$.

Аксіома 5.4. (незалежність.) *(1) Для всіх* $y^1,\ y^2 \in Y$ *таких, що* $y^1 \succ$

y^2 *існує таке* $\alpha \in (0,1)$, *що для довільного* $y \in Y: \alpha \circ y^1 \oplus (1-\alpha) \circ y \succ \alpha \circ y^2 \oplus (1-\alpha) \circ y$. *(2) Для всіх* $y^1, y^2 \in Y$ *таких, що* $y^1 \sim y^2$ *існує таке* $\alpha \in (0,1)$, *що для довільного* $y \in Y: \alpha \circ y^1 \oplus (1-\alpha) \circ y \sim \alpha \circ y^2 \oplus (1-\alpha) \circ y$, тобто будь - яка третя альтернатива не порушує строгу перевагу або еквівалентність двох альтернатив.

Аксіома 5.5. (монотонність.) *Нехай* $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \succeq x^2, 0 < \pi, \pi' < 1$. *Тоді*

$$(\pi; x^1, x^2) \succ (\pi'; x^1, x^2) \Leftrightarrow \pi > \pi', \tag{5.2}$$

$$(\pi; x^1, x^2) \sim (\pi'; x^1, x^2) \Leftrightarrow \pi = \pi', \tag{5.3}$$

тобто перевага віддається лотереї з більшою ймовірністю отримання більш переважної альтернативи.

Теорема 5.1. (фон Неймана - Моргенштерна.) *Якщо виконані аксіоми 5.1 – 5.5, то існує така дійснозначна функція* u *на* Y, *що*

1) для $y^1, y^2 \in Y$ виконується відношення $y^1 \succ y^2$ тоді і тільки тоді, коли $u(y^1) > u(y^2)$;

2) для будь - якого проспекту $y = \oplus_{i=1}^{s} p_i \circ x^i$ маємо

$$u(\oplus_{i=1}^{s} p_i \circ x^i) = \sum_{i=1}^{s} p_i \, u(x^i) \quad \bullet$$

При цьому функція корисності із теореми 4.1 називається NM - *функцією корисності.*

Теорема 5.2. (про єдиність NM – функції корисності.) *Якщо* $u: Y \to R^1$ *є* NM – *функцією корисності, то вона визначена з точністю до довільного афінного перетворення з додатнім коефіцієнтом однорідності, тобто: 1) для довільного* $a > 0$ *та* $c \in R^1$ *функція* $v(y) = a\, u(y) + c, y \in Y$ *також є* NM – *функцією корисності, що зображує те саме відношення переваги на* Y; *2) для* NM – *функції корисності* u *будь-яке монотонне перетворення, яке зберігає властивість сподіваної корисності 2)* *теореми 5.1, є афінним перетворенням* •

Розглянемо основні заперечення проти наведених припущень сподіваної корисності. Більшість контрприкладів відносно припущень сподіваної корисності були висунуті М. Алле.

1) Заперечення щодо аксіоми 5.2 (неперервність). Нехай є лотерея з наслідками: $x^1 = 100$ у.о., $x^2 = 1$ у.о., x^3 – отримати смертельний постріл. Тоді очевидні строгі переваги: $x^1 \succ x^2 \succ x^3$. Чи можна в цьому випадку постулювати існування додатньої ймовірності $p \in (0,1)$, для якої $p \circ x^1 \oplus (1 - p) \circ x^3 \sim x^2$? Навряд чи найдеться раціональний індивідуум, який погодиться на такі правила гри. Подібні заперечення можна усунути, якщо з простору Y виключити екстремальні ситуації і лишити в ньому лише "нормальні" події.

2) заперечення проти аксіоми 5.4. (незалежності). Розглянемо лотереї: $y^1 = (1; 3000{,}0), y^2 = (4/5; 4000{,}0)$. Припустимо, що індивідуум віддає перевагу y^1 перед y^2, тобто $y^1 \succ y^2$. Нехай $y = (1; 0{,}0)$. Тоді не зрозуміло, чи можна стверджувати, що при всіх $\alpha \in (0,1)(\alpha; y^1, y) \succ (\alpha; y^2, y)$. Наприклад, при $\alpha = 1/4$ маємо $y^3 = (1/4; y^1, y) \sim (1/4; 3000{,}0), y^4 = (1/4; y^2, y) \sim (1/5; 4000{,}0)$. Тут індивідуум може віддати перевагу y^4 перед y^3, оскільки при багаторазовій грі у середньому він вигравати ме при лотереї y^3: $1/43000 = 750$, при лотереї y^4: $1/54000 = 800$.

Нехай $y = \bigoplus_{i=1}^{s} p_i \circ x^i$ – лотерея з виплатами грошей x^i, $i = \overline{1, s}$. Тоді сподіване значення y (сподіваний виграш) буде мати вигляд

$$E(y) = \sum_{i=1}^{s} p_i x^i.$$

Нехай економічний агент має індивідуальну фунуцію корисності u яка визначена на множині y з невизначеним ефектом Y. Тоді він називається *нейтральним до ризику,* якщо

$$u(\textstyle\sum_{i=1}^{s} p_i x^i) = \sum_{i=1}^{s} p_i \; u(x^i), \tag{5.4}$$

де припускається, що u є строго монотонно зростаюча функція. Якщо агент є нейтральним до ризику, то він має таку функцію корисності

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \; + \; c, \alpha_j > 0, \; j \; = \overline{1, n}. \tag{5.5}$$

Агент називається *не схильним до ризику,* якщо його NM – функція корисності строго угнута, тобто

$$u(\sum_{i=1}^{s} p_i x^i) > \sum_{i=1}^{s} p_i \; u(x^i). \tag{5.6}$$

Навпаки, агент буде *схильним до ризику,* якщо його NM – функція корисності строго опукла.

NM – функцію корисності ухильника ризику наведено на Рис.4.1., де сподіване значення проспекту $y = (\pi; x_1, x_2)$, що визначається виразом $E(y) = \pi \; x_1 \; + \; (1 \; - \; \pi)x_2$, зображено відрізком OA, сподівану корисність $Eu(y) = \pi \; u(x_1) \; + \; (1 \; - \; \pi) \; u(x_2)$ – відрізком AB, а корисність сподіваного виграшу $u(E(y))$ – відрізком AC.

Для ілюстрації таких важливих понять, що характеризують поведінку агента в умовах ризику, як *еквівалент визначеності та ризикова премія,* розглянемо приклад.

Нехай агент стоїть перед вибором однієї із альтернатив:

(i) отримати суму $x_0 \; + \; h$ з ймовірністю $1/2$, або отримати суму $x_0 \; - \; h$ з ймовірністю $1/2$, де $h \in (0, x_0)$.

Нехай агент стоїть перед вибором однієї із альтернатив:

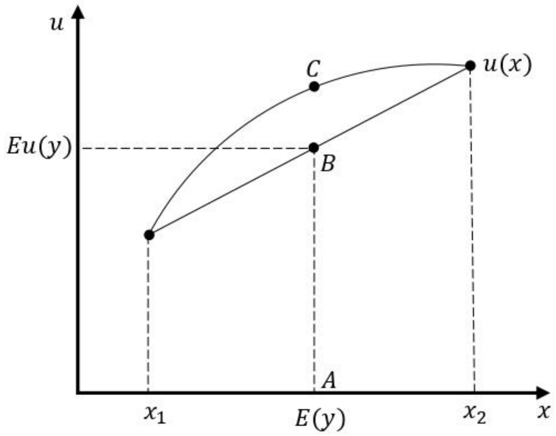

Рис. 4.1.

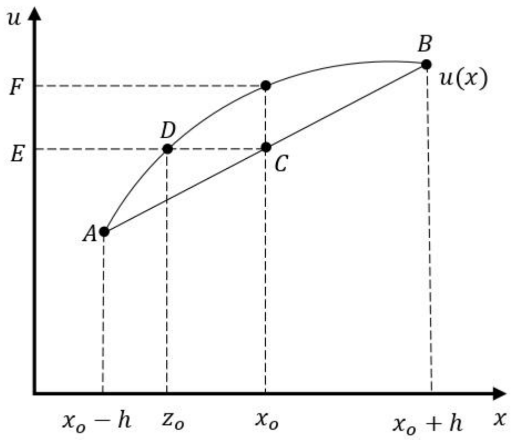

Рис. 4.2.

(ii) отримати суму x_0 з ймовірністю 1.

Не схильний до ризику агент віддасть перевагу альтернативі (ii) перед альтернативою (i), хоча в останній мав шанс отримати більшу суму $x_0 + h$. Для його функції корисності виконується нерівність

$$0.5\ u(x_0 + h) + 0.5\ u(x_0 - h) < u(x_0). \quad (5.7)$$

Це ілюструє Рис.4.2., де строга угнутість функції $u(x)$ означає, що дуга ADB, що сполучає точки $u(x_0 + h)$ та $u(x_0 - h)$ на графіку u, лежить вище хорди ACB, яка сполучає тіж точки. В силу того, що функція u строго угнута та зростаюча, існує єдина точка z_0, для якої виконується рівність

$$0.5\ u(x_0 + h) + 0.5\ u(x_0 - h) = u(z_0). \quad (5.8)$$

Величина z_0 називається *еквівалентом визначеності* для випадкової величини x_0. При цьому величину $\rho = x_0 - z_0$ називають *ризиковою премією.* Таким чином, *ризикова преміяр* є максимальною сумою грошей, яку не схильний до ризику агент готовий сплатити, щоб мати вірогідний дохід на відміну від сподіваного доходу від невизначеного проспекту. На Рис.4.2. ρ дорівнює довжині відрізка DC. Із означення ρ випливає, що $\rho = \rho(x_0, h)$.

Отримаємо наближене значення ризикової премії $\rho(x, h)$ у випадку, коли альтернатива (i) виражається загальним проспектом

$$y = (\pi; x + h, x - h).$$

Тоді для еквівалента визначеності маємо тотожність

$$u(x - \rho(x,h)) = \pi\, u(x + h) + (1 - \pi)\, u(x - h). \qquad (5.9)$$

Застосуємо формулу Тейлора до кожного члена тотожності (9). Тоді будемо мати

$$u(x - \rho(x,h)) = u(x) - \rho(x,h)u'(x) + O_1(\rho(x,h)), \qquad (5.10)$$

$$u(x + h) = u(x) + u'(x)\, h + 0.5h^2u''(x) + O_2(h), \qquad (5.11)$$

$$u(x - h) = u(x) - u'(x)\, h + 0.5h^2u''(x) + O_3(h), \qquad (5.12)$$

де

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{O_1(\rho(x,h))}{\rho(x,h)} = 0, \lim_{h\to 0}\frac{O_2(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{O_3(h)}{h} = 0.$$

Підставляючи (5.10) – (5.12) в (5.9) при $\pi = 0.5$, отримаємо

$$\rho(x,h) \cong -\frac{h^2}{2}\frac{u''(x)}{u'(x)} > 0. \qquad (5.13)$$

Виходячи із формули (5.13), уведемо два показники, які характеризують поведінку агента, не схильного до риику:

$$R_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} > 0 \; - \qquad (5.14)$$

коефіцієнт абсолютного уникання ризику або міра Ерроу - Пратта абсолютного уникання ризику;

$$R_r(x) = \quad -\ \frac{x\ u''(x)}{u'(x)} > 0 \quad - \tag{5.15}$$

коефіцієнт відносного уникання ризику.

Зв'язок між введеними показниками наведено в наступних теоремах.

Теорема 5.3. *Якщо функції корисності $u_i(x)$, $i = \overline{1,2}$ є двічі неперервно диференційовними, монотонно зростаючими та строго угнутими, то наступні три умови є еквівалентними:*

$$(a) R_{a1}(x) > R_{a2}(x);$$

$(b) \rho_1(x,h) > \rho_2(x,h)$ для всіх h;

(c) функція $u_1(x)$ є більш угнутою, ніж $u_2(x)$, тобто існує монотонно зростаюча строго угнута функція φ, така що $u_1(x) = \varphi(u_2(x))$ •

Теорема 5.4. *Міри уникання ризику $R_a(x)$ та $R_r(x)$ є інваріантними щодо афінних перетворень функції корисності $u(x)$, тобто якщо $u_1(x)$ – двічі неперервно диференційовна, строго угнута і зростаюча функція корисності, $u_2(x) = a\ u_1(x) + b$, $a > 0$, $b \in R^1$ – її афінне перетворення. Тоді*

$$R_{a1}(x) = R_{a2}(x), R_{r1}(x) = R_{r2}(x) \quad \bullet$$

К. Ерроу та Дж. В. Пратт постулювали такі гіпотези про індивідуальну поведінку агента щодо ризику.

Гіпотеза 5.1. *Коефіцієнт абсолютного уникання ризику є монотонно спадною функцією, тобто $R_a'(x) < 0$ для всіх x.*

Ця гіпотеза свідчить про те, що багаті агенти є більш толерантними до ризику, ніж бідні.

Гіпотеза 5.2. *Коефіцієнт відносного уникання ризику є монотонно зростаючою функцією, тобто $R_r'(x) > 0$ для всіх x.*

Підсумовуючи викладене вище, констатуємо, що типові NM – функції корисності $u(x)$ для не схильного до ризику агента мають такі властивості:

$(i) u'(x) > 0, u''(x) < 0$ для всіх $x \in X \subseteq R^1$;

$(ii) R_a'(x) < 0$;

$$(iii) R_r'(x) > 0.$$

Розглянемо деякі приклади щодо властивостей типових NM - функцій корисності $u(x)$.

Приклад 5.1. (квадратична функція.) Нехай

$$u(x) = a + b\ x - c\ x^2,\ b,\ c > 0.$$

Тоді $u'(x) = b - 2\ c\ x > 0, 0 < x < b/2c; u''(x) = -2\ c < 0.$

$$R_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{2\ c}{b - 2\ c\ x}, R_r(x) = \frac{2\ c\ x}{b - 2\ c\ x}.$$

Далі

$$R_a'(x) = -\left(\frac{u''(x)}{u'(x)}\right)' = -\frac{u'''(x)u'(x) - (u''(x))^2}{(u'(x))^2} = \frac{4c^2}{(b - 2\ c\ x)^2} > 0,$$

$$R_r'(x) = \left(\frac{2\ c\ x}{b - 2\ c\ x}\right)' = \frac{2\ b\ c}{(b - 2\ c\ x)^2} > 0.$$

Через нерівність $R_a'(x) > 0$, згідно якої більш багаті агенти є менше толерантними до ризику, ніж бідні, квадратичні функції не використовуються для опису поведінки економічних агентів в умовах ризику.

Приклад 5.2. (логарифмічна функція корисності.) Нехай

$$u(x) = a + b\ \ln(x + c), x^2,\ b > 0,\ c \geq 0, x + c > 0.$$

Тоді $$u'(x) = \frac{b}{x + c} > 0; u''(x) = -\frac{b}{(x + c)^2} < 0,$$

$$R_a(x) = \frac{1}{x + c}, R_a'(x) = -\frac{1}{(x + c)^2} < 0;$$

$$R_r(x) = \frac{x}{x + c}, R_r'(x) = \frac{c}{(x + c)^2} > 0,$$

тобто виконуються умови $(i) - (iii)$.

Приклад 5.3. Знайти вигляд функції корисності зі сталою мірою уникання ризику. Нехай $R_a(x) = \alpha = const$. Інтегруючи рівняння $-u''(x) = \alpha\ u'(x)$, знаходимо $u(x) = -\exp(-\alpha\ x), \alpha > 0.$

Розглянемо агента, який володіє деяким активом вартістю a грошових одиниць. Наприклад, це може бути будинок. Припустимо, що агент стоїть перед ризиком утратити частину вартості b через деяку випадкову подію (наприклад, через пожежу будинку).

У рамках загальної формальної схеми, викладеної вище, маємо два стани природи: S_1, коли відбулася несприятлива подія, та S_2, коли такої події не було. При S_1 вартість активу дорівнюватиме $a - b$, а при S_2 вона залишається тією ж самою. Це еквівалентно лотереї $(\pi; a - b, a)$, де π - ймовірність несприятливої події.

Якщо агент діє раціонально, тобто дотримується результатів формальної теорії, то максимальною сумою, яку він погоджується сплатити за уникнення втрат через ризик, є його ризикова премія ρ, яка визначається із співвідношення

$$u(a - \rho) = \pi \, u(a - b) + (1 - \pi) \, u(a), \tag{5.16}$$

де u – функція корисності агента.

Виникає пироднє питання: кому не схильний до ризику агент готовий сплачувати ризикову премію для уникнення ризику ?

Припустимо, що агент може купити у деякій страховій компанії страховий поліс як захист від несприятливої події. Нехай x - сума, яку страхова компанія зобов'язується сплатити агентові, якщо настав стан S_1, а P – премія за страхування. Тоді очікуваний дохід агента виражається сумою:

$a_1 = a - b - P + x$, якщо відбувся стан S_1;

$a_2 = a - P$, якщо відбувся стан S_2.

Це еквівалентно лотереї $(\pi; a_1, a_2) = (\pi; a - b - P + x, a - P)$. Сподівана корисність такої лотереї має вигляд $\pi \, u(a - b - P + x) + (1 - \pi) \, u(a - P)$. Він буде страхуватися, коли ця величина перевищуватиме сподівану корисність без страхування, тобто значення $\pi \, u(a - b) + (1 - \pi) \, u(a)$.

Припустимо, що

$$0 < a - b < a_1 < a_2, \tag{5.17}$$

або

$$0 < a - b < a - b - P + x < a - P.$$

Зауважимо, що нерівність $a - b < a_1$ означає $P < x$, тобто страхова премія P менше страхового покриття x; нерівність $a_1 < a_2$ – що $x < b$, тобто виплата, яка надається страховою компанією, не повністю відшкодовує втрати b.

Для не схильного до ризику агента (u – строго угнута функція) будемо мати (див. Рис.4.3)

$$\pi\, u(a - b - P + x) + (1 - \pi)\, u(a - P) > \pi\, u(a - b) + \\ + (1 - \pi)\, u(a), \qquad (5.18)$$

що ілюструє попит на страхові послуги.

Спростимо модель (5.18), поклавши $q = \frac{P}{x}$ – ціна страхування за одиницю страхового покриття x. Припустимо, що P – стала ціна для різних значень x та q, екзогенно задана для кожного, хто страхується. Тоді економічний агент обиратиме x так, щоб максимізувати свою сподівану корисність

$$\varphi(x) = \pi\, u(a - b - q\, x + x) + (1 - \pi)\, u(a - q\, x). \qquad (5.19)$$

Припускаючи, що оптимальне значення $x^* > 0$, із умов оптимальності першого порядку отримаємо

$$\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{u'(a_1^*)}{u'(a_2^*)} = \frac{q}{1 - q}. \qquad (5.20)$$

Обчислимо значення другої похідної функції φ в точці x^*

$$\varphi''(x^*) = \pi\, u''(a_1^*)(1 - q)^2 + (1 - \pi) u''(a_2^*) q^2 < 0 \qquad (5.21)$$

в силу строгої угнутості функції u, тобто умови оптимальності (5.20) є не лише необхідними, але і достатніми.

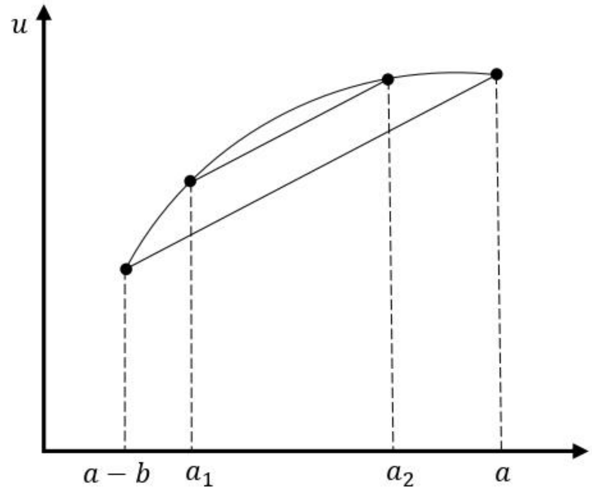

Рис. 4.3.

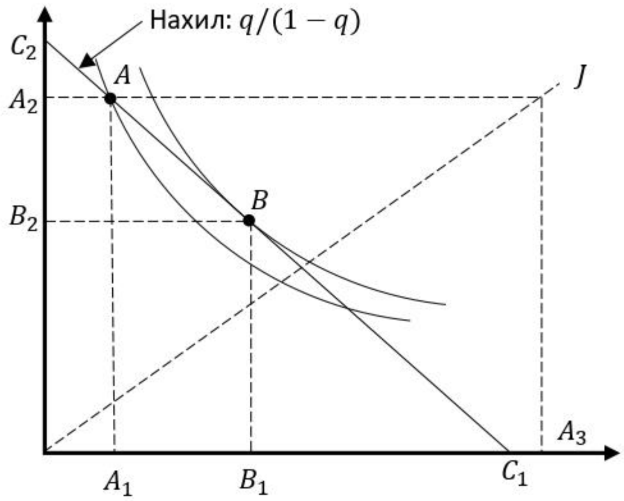

Рис. 4.4.

Надамо геометричну ілюстрацію умовам оптимальності (5.20). З означень величин q, a_1 та a_2 випливає рівність

$$q = \frac{a - a_2}{a_1 - a_2 + b},$$

або

$$q\ a_1 + (1 - q)a_2 = a - q\ b. \qquad (5.22)$$

Зазначимо, що ті величини a_1^*, a_2^*, які задовольняють (5.20), також задовольняють (5.22). Дійсно, a_1^*, a_2^* можуть бути знайдені вибором a_1, a_2, що максимізує $\pi\ u(a_1) + (1 - \pi)\ u(a_2)$ за умови (5.22). Для цього розглянемо функцію Лагранжа

$$L = \pi\ u(a_1) + (1 - \pi)\ u(a_2) + \lambda\ (q\ a_1 + (1 - q)a_2 -$$

$- a \ + \ q \ b)$.

Умови оптимальності для неї мають вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = \ \pi \ u'(a_1) \ + \ \lambda \ q \ \ = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = (1 \ - \ \pi \ u'(a_2) \ + \ \lambda \ (1 \ - \ q) = 0,$$

звідки і отримаємо (5.20).

Нехай $A \ = (a \ - \ b, a)$ або $OA_1 = \ a \ - \ b$, $OA_2 = \ a$. Лінія C_1C_2 проходить через точку A з нахилом $- \ q/(1 \ - \ q)$. Вона зображує положення тих величин (a_1, a_2), які задовольняють (5.22), і тому ЇЇ називають *лінією можливостей.*

Координатами точки B є (a_1^*, a_2^*) і вона є оптимальною точкою для агента. Оскільки нахил кривої байдужості
$\{(a_1, a_2)): \ \pi \ u(a_1) \ + \ (1 \ - \ \pi) \ u(a_2) = \pi \ u(a_1^*) \ + \ (1 \ - \ \pi) \ u(a_2^*)\}$
визначається виразом

$$\frac{da_2}{da_1} = \ - \ \frac{\pi}{1 \ - \ \pi} \frac{u'(a_1)}{u'(a_2)},$$

умова (5.20) вимагає, щоб крива байдужості була дотичною до лінії можливостей у точці B. Оскільки агент не схильний до ризику, то для нього криві байдужості - опуклі. Зауважимо, що

$$OB_1 = a_1^* = \ a \ - \ b \ - \ q \ x^* \ + \ x^*, \ OB_2 = a_2^* = \ a \ - \ q \ x^*.$$

Таким чином,

$$B_1A_1 = \ OB_1 \ - \ OA_1 = x^* \ - \ q \ x^*, B_2A_2 = \ OA_2 \ - \ OB_2 = \ q \ x^*.$$

Повернемось до умов оптимальності (5.20) і рзглянемо поведінку страхової компанії. Коли відбувся страховий випадок, то компанія сплачує страхувальнику суму $x \ - \ P \ = (1 \ - \ q) \ x$. Якщо страховий випадок не відбувся, то компанія отримує премію $P \ = \ q \ x$ як вартість страхового полісу. Сподіваний прибуток компанії дорівнює $- \ \pi \ (1 \ - \ q) \ x \ + \ (1 \ - \ \pi)q \ x$. При конкуренції у страховій галузі загальні прибутки страхових компаній нульові і тому

$$\pi\ (1\ -\ q)\ x\ = (1\ -\ \pi)q\ x\ \Rightarrow\ \pi\ =\ q. \qquad (5.23)$$

Підставляючи рівність із (523) в умови (5.20), будемо мати

$$u'(a\ -\ b\ -\ q\ x^*\ +\ x^*) = u'(a\ -\ q\ x^*).$$

Оскільки $u'' < 0$, то $x^* =\ b$, тобто страхове покриття x^* дорівнює витратам b. Таким чином, клієнт буде повністю захищений від утрат.

Література:

1. Капустян В.О., Мажара Г.А., Фартушний І.Д. Моделювання економіки: підручник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 051 Економіка. Електронне мережеве видання. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 207 с.
2. Капустян В. О. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 економіка / В. О. Капустян, Г. А. Мажара ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електроні текстові данні (1 файл: 679 Кб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 120 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62311
3. Замрій А.М., Капустян В.О. Моделювання процесу технологічного переозброєння київського регіону. Економічний вісник НТУУ "Київський політехнічний інститут". 2019. № 16. С. 431 - 442.

Лекція №6

Аналіз односекторних моделей економічного зростання

Творцями сучасної теорії економічного розвитку є: Р. Солоу, В. Леонтьєв, Р. Свен, Р. Ф. Харрод, Е. Д. Домар, Д. Робінсон, Дж. фон Нейман, В. Фелпс, Р. Дорфман, П. Самуэльсона, Я. Тинберген, Колемаєв В.О. та ін. Математичні моделі, які описують розвиток економічних систем, таких як підприємство, країна, регіон, світова економіка, тобто микро-, макро- та мегаекономіка, базуються на різних підходах. Розглянемо деякі з них.

Модель Солоу досліджує вплив на економічне зростання накопичень, росту населення та технологічного прогресу. Ця модель є "відправною точкою" практично всіх досліджень економічного зростання. За її допомогою з'ясовуються причини тимчасового і постійного стійкого росту економіки і існування різниці у рівнях життя різних країн.

Розглянемо спочатку загальні припущення щодо побудови моделі Солоу.

В моделі розглядаються чотири змінних: випуск продукції Y, капітал K, праця L та E – рівень "знань," накопичених у суспільстві. Випуск Y може змінюватись по часу тільки тоді, коли будуть змінюватись по часу фактори виробництва: K, L, E.

Якщо науково-технічний прогрес сприяє удосконаленню технології вцілому, не змінюючи співвідношення граничних продуктивностей капіталу та праці, тобто $Y = E\,F(K,L)$, де $F(K,L)$ – виробнича функція, то такий прогрес називають *нейтральним по Хіксу*. Якщо ж він сприяє збільшенню продуктивності капіталу, тобто $Y = F(E\,K,\ L)$, то він називається капіталозберігаючим *(прогрес по Харроду.*)

В моделі Солоу змінна E відображає ефективність праці одного працівника, яка залежить від стану його здоров'я, освіти та кваліфікації. Зміна чисельності працівників і ефективності праці завжди розглядаються спільно: в кожний момент часу t в економіці приймають участь $L(t)$ працівників зі збільшеною ефективністю праці або збільшена кількість працівників з постійною ефективністю праці – $L(t)\ E(t)$, тобто випуск описується виробничою функцією виду: $Y(t) = F(K(t), L(t)\ E(t))$. Це означає, що в моделі Солоу припускається працезберігаючий тип науково-технічного прогресу, під впливом якого підвищується ефективність праці одного працівника.

Розглядаються неокласичні виробничі функції, тобто вони мають такі властивості:

1) вони неперервно диференційовані за сукупністю аргументів;

2) за відсутності одного із ресурсів K або L виробництво стає неможливим, тобто $F(0, L) = F(K,0) = F(0,0) = 0$;

3*) граничні продукти мають бути додатніми, тобто*

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} > 0;$$

4) виконується закон спадної віддачі

$$\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) < 0, \qquad \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) < 0;$$

5) при необмеженому збільшенні одного із ресурсів випуск продукції необмежено зростає, тобто $F(\infty, L) = F(K, \infty) = \infty$;

6) виробнича функція повинна бути однорідною першого ступеня за аргументами, тобто $F(\alpha K, \alpha L) = \alpha\ F(K, L)$ для всіх $\alpha, K, L > 0$;

7) умова Інада: якщо капітал (або праця) нескінченно малі, то його гранична продуктивність нескінченно велика; якщо капітал (або праця) нескінченно великі, то його гранична продуктивність нескінченно мала.

Припущення 6) дає змогу перейти від абсолютних показників до нормованих або питомих. Дісно,

$$y = \frac{Y}{L\,E} = F\left(\frac{K}{L\,E}, 1\right) = f(k),$$

де $k = \frac{K}{L\,E}$ – рівень капітало- або фондооснащенності одного працівника з постійною ефективністю праці;

$y = \frac{Y}{L\,E}$ – продуктивність праці одного працівника з постійною ефективністю праці.

Для виробничої функції в нормованій формі зберігаються всі властивості вихідної виробничої функції.

Зауважимо, що виробнича функція Кобба - Дугласа F = $K^{\alpha}(L\,E)^{1-\alpha}$, 0 <α<1, задовольняє цим властивостям.

Випуск в економіці витрачається на інвестиції і споживання, держава відсутня, закрита агрегована економіка випускає один однорідний продукт, так що основна тотожність національних рахунків має вигляд

$$y = c + i, \qquad (6.1)$$

де c, i – споживання та інвестиції на одиницю праці з постійною фективністю.

Все, що зберігається, інвестується: інвестиції дорівнюють накопиченню. Одна одиниця інвестицій без додаткових витрат перетворюється в одиницю нового капіталу. Збереження пропорційні доходу. Норма збережень задається екзогенно і постійна за часом: s ϵ (0,1). Таким чином,

$$i = s\ y = s\ f(k). \qquad (6.2)$$

Поняття робочої сили і населення співпадають.

Існуючий капітал зношується (вибуває) з постійною нормою δ. Тоді зміна запасів капіталу визначається різницею між загальною величиною інвестицій $s\,Y$ та зносом капіталу $\delta\,K$, тобто

$$\dot{K} = s\,Y - \delta\,K. \qquad (6.3)$$

В розрахунку на одиницю праці з постійною ефективністю рівень капіталооснащеності буде мати вигляд

$$\dot{k} = s\,f(k) - (n + g + \delta)\,k, \qquad (6.4)$$

де n – темп зростання чисельності населення,

g – темп зростання технологічного прогресу.

Рівняння Солоу (6.4) стверджує, що величина зміни рівня капіталооснащеності одного працівника з постійною ефективністю праці визначається співвідношенням двох величин в розрахунку на одного працівника – інвестицій s $f(k)$, фактично вироблених в економіці, та величиною інвестицій, необхідних для того, щоб зберігати досягнутий рівень k в умовах зростання населення з темпом n, зростання ефективності праці з темпом g і вибуттям капіталу з нормою δ.

Для визначення рівня $k(t)$ в любий момент часу $t \geq t_0$ до рівняння (6.4) слід додати початкові умови

$$k(t_0) = k_0, \tag{6.5}$$

де k_0 – початковий рівень капіталооснащенності одного працівника.

В загальному випадку задача Коші (6.4) – (6.5), крім частинних випадків, в квадратурах розв'язків не має. Але рівняння (6.4) має стаціонарний стан, коли

$\dot{k}(t) = 0$, тобто величини фактичних і необхідних інвестицій співпадають

$$s\,f(k) = (n + g + \delta)\,k. \tag{6.6}$$

В силу властивостей виробничої функції рівняння (6.4) має два розв'язки: $k = 0$, $k = k^* > 0$. Згідно теореми Ляпунова про характеристичні числа лінеаризованої системи, перший розв’язок буде нестійким, а другий – асимптотично стійким.

У стійкому стані $k = k^*$:

- постійна продуктивність праці працівника з постійною ефективністю

$$y^* = f(k^*);$$

- загальний об'єм виробництва $Y = y^*\,(L\,E)$, $L\,E = C\,e^{(n+g)t}$, $C = \text{const} > 0$, зростає з темпом $n + g$;

- продуктивність праці $\frac{Y}{L} = y^*$ E як і рівень фондооснащеності праці $\frac{K}{L} = k^*\,E$ зростають з темпом g.

З'ясуємо інші властивості моделі Солоу.

Вплив зміни на положення рівноваги екзогенних параметрів.

Нехай $\theta(s,n,g,\delta) = k^*(s, n, g, \delta) -$ розв'язок рівняння (6.4). Позначимо через

$\frac{\partial\theta}{\partial s}$ – функцію чутливості для функції рівноваги θ щодо зміни норми накопичення s.

Диференцюючи по s тотожність (4.4) при $\theta(s, n, g, \delta) = k^*(s, n, g, \delta)$, отримаємо рівняння відносно уведеної функції чутливості

$$f + s\, f'\, \frac{\partial\theta}{\partial s} = (n + g + \delta)\, \frac{\partial\theta}{\partial s},$$

яке має розв'язок

$$\frac{\partial\theta}{\partial s} = -\, \frac{f}{\Delta(\theta)} > 0, \qquad (6.7)$$

де $\Delta(\theta)$ = s f' - $(n + g + \delta)$.
Із (6.7) витікає, що збільшення норми накопичення веде до збільшення фондооснащенності.

Нехай нормі накопичення s = s_1 відповідає асимптотично стійкий стан рівноваги у моделі Солоу $k^* = k_1^*$. Тоді нормі накопичення $s = s_2 > s_1$ буде відповідати асимптотично стійкий стан рівноваги $k^* = k_2^* > k_1^*$. При цьому буде зростати і продуктивність праці $\frac{Y}{L} = E\, f(k)$ в зв'язку із ростом кожного множника. Оцінимо темп такого зростання в перехідному періоді:

$$\frac{1}{E\, f(k)} \frac{d}{dt} (E\, f(k)) = g + \frac{1}{f(k)} (f'(\mathrm{k})\, (s_2\, f(k) - (n + g + \delta)\, k) > g$$

в силу додатності другого доданку.

Як тільки k досягне рівня k_2^* темп зростання продуктивності праці знову спаде до g. Таким чином, збільшення норми накопиченняведе до тимчасового збільшення темпу зростання продуктивності праці, що буде впливати на рівень фондооснащенності та продуктивності, а не на їх темпи росту в стійкому стані.

Для інших екзогенних параметрів моделі Солоу будемо мати рівняння відносно відповідних функцій впливу, із яких витікає, що збільшення одного із них веде до зменшення фондооснаженності і навпаки.

Порівняння стійких станів та золоте правило накопичення.

Вище ми з'ясували, що збільшення s приводить до збільшення k^* та випуску, але його вплив на споживання може бути двояким. Знайдемо такі рівні k^*, при яких споживання буде найбільшим. Іншими словами, потрібно знайти

$$\max_s c(k), \tag{6.8}$$

де

$$c(k(s)) = (1 - s)\, y = f(k(s)) - (n + g + \delta))\ k(s).$$

Використовуючи умови оптимальності для задачі (4.8), отримаємо норму накопичення

$$s = \frac{f'(k)\,k}{f(k)},$$

яка забезпечує досяжність стійкого стану по золотому правилу k^{**}.

Виникає питання щодо розвитку економіки, яка здійснює перехід від початкового стійкого стану k^*, яке не відповідає золотому правилу, до стійкого стану k^{**} з максимально можливим споживанням. Тут можливі два випадки.

1. Економіка виходить із стійкого стану, тому що фактичні інвестиції $i = s^{**} f(k)$ стають меншими, ніж необхідні $(n + g + \delta)\, k$. Тому k і випуск спадають до тих пір, поки не досягнуть нового стійкого стану золотого правила.
2. Економіка виходить із стійкого стану, тому що фактичні інвестиції $i = s^{**} f(k)$ стають більшими, ніж необхідні $(n + g + \delta)\, k$. Тому k і випуск зростають до тих пір, поки не досягнуть нового стійкого стану золотого правила.

Розрахунок джерел економічного зростання. Залишок Солоу.

Для оцінки вкладу факторів виробництва в економічне зростання Р. Солоу запропонував використовувати виробничу функцію з постійною віддачею від масштабу $Y = A\ F(K,L)$, де A відображає рівень розвитку технологій. З'ясуємо вплив факторів виробництва K, L, A на зміну випуску продукції:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y}\frac{\dot{K}}{K} + \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y}\frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{A}. \qquad (6.9)$$

Співвідношення (6.9) означає, що темп приросту продукції дорівнює сумі трьох складових:

- темпу приросту капіталу, помноженому на долю капіталу в загальному доході;
- темпу приросту праці, помноженому на долю праці в загальному доході;
- темпу приросту сукупної продуктивності факторів (рівня розвитку технологій).

Оцінка темпів зростання при переході до стійкого стану.

Вище було показано (див. формулу (4.9)), що в стійкому стані темпи зростання не залежать від норми накопичення та типу виробничої функції. З'ясуємо, від яких параметрів будуть залежати темпи зростання фондооснащенності та продуктивності праці при переході від деякого початкового стану до стійкого стану. Для цього рівняння (4.4) перепишемо у вигляді

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\partial s\, f'(k)}{\partial k} - (n + g + \delta). \qquad (6.10)$$

Формула (6.10) описує темпи зростання фондооснащенності одного працівника з постійною ефективністю праці. Перший доданок в цій формулі є додатньою спадною функцією. Таким чином, при любому початковому рівні фондооснащенності система приходить до стійкого стану k^*.

Із проведеного аналізу витікає, що при інших рівних більш низький початковий рівень фондооснащенності припускає більш високі темпи економічного зростання, які затухають при наближенні до стійкого стану. З'ясуємо, чи означає це, що з часом повинно відбуватись зближення рівнів життя бідних і багатих країн, тобто спостерігаються процеси *конвергенції.*

Абсолютна та умовна конвергенція.

Формула (6.10) демонструє той факт, що якщо у двох країнах структурні параметри s, n, g, δ і виробничі функції приблизно одинакові, стійкі стани співпадають, але вони відрізняються по початковому рівню загального капіталу (у бідній країні він менший), то бідна країна буде буде зростати швидше і в кінці кінців досягне рівня розвинутої країни.

Концепція абсолютної конвергенції – бідні країни зростають швидше від багатих і різниця в рівнях середньодушового доходу постійно зменшується незалежно від характеристик економіки.

Концепція умовної конвергенції – бідні країни зростають швидше від багатих при умові подібності структурних параметрів та виробничої функції та єдиного стійкого стану. Якщо стійкі стани в них відрізняються, то умовна конвергенція означає, що країна зростає тим швидше, чим далі вона знаходиться від власного стійкого стану.

Існуючі емпіричні дослідження не підтверджують наявності абсолютної конвергенції.

Література:

1. Москаленко В.В., Годлевський М.Д. Моделі та методи стратегічного управління розвитком підприємства. Харків, 2018. 208 с.
2. Капустян В.О., Мажара Г.А., Фартушний І.Д. Моделювання економіки: підручник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 051 Економіка. Електронне мережеве видання. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 207 с.
3. Капустян В. О. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 економіка / В. О. Капустян, Г. А. Мажара ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електроні текстові данні (1 файл: 679 Кб). – Київ :

КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 120 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62311

4. Замрій А.М., Капустян В.О. Моделювання процесу технологічного переозброєння київського регіону. Економічний вісник НТУУ "Київський політехнічний інститут". 2019. № 16. С. 431 - 442.
5. Мажара Г.А., Капустян В.О. Вплив смаків і пріоритетів купівлі на вибір споживача на прикладі задачі динамічного моделювання. Економічний журнал Одеського політехнічного університету. 2019. No 3 (9). С. 45-50.
6. Мажара Г.А., Капустян В.О. Ірраціональні стратегії в умовах часткової інформованості гравців на прикладі індивідуально-оптимальних рівноваг. Академічний огляд. 2019. No 2(51).
7. Мажара Г.А., Капустян В.О. Behavioral components in relationship sofeconomic agents in the automobile market. Eureka: social and humanities (2020) № 2. P.8-14.
8. Замрій А.М., Капустян В.О. Аналіз галузевої структури Київської області та визначення головних факторів виробництва у галузі за допомогою виробничих функцій. Економічний вісник НТУУ "Київський політехнічний інститут". 2020. № 17. С. 465-478.
9. Замрій А. М., Капустян В. О. Аналіз динаміки та факторів впливу на трудові ресурси Київської області. Проблеми економіки. 2021. №4. С. 92-100.

Лекція №7

Трьохсекторна модель економічного зростання. Стагнація. Умови збалансованого економічного зростання.

Для аналізу виробничого процесу та здійснення структурної політики недостатньо розглядати економіку, яка складається із одного чи двох секторів – виробничого і споживчого. Адже засоби виробництва, які є продуктом першого сектора, включають дві принципово різні складові: предмети праці, що використовуються в одному виробничому циклі, і засоби праці, які приймають участь у багатьох виробничих циклах. Таким чином, розділивши перший сектор на два матеріальний і фондоутворюючий, приходимо до моделі трьохсекторної економіки:

1) матеріальний (нулевий) сектор – предмети праці (пальне, електроенергія, сировина та інші матеріали);

2) фондоутворюючий (перший) сектор – засоби праці (машини, обладнання, виробнича інфраструктура та інше);

3) споживчий (другий) сектор – предмети споживання.

Припускається, що за кожним сектором закріплені основні виробничі фонди (ОВФ), а в той же час трудові ресурси та інвестиції можуть вільно переміщатись між секторами. Крім того, мають місце припущення, характерні для односекторної моделі Солоу (див. попередню тему), яка є базовою.

1. Технологічний уклад вважається незмінним и задається за допомогою лінійно - однорідних неокласичних виробничих функцій

$$X_i = F_i(K_i, L_i),\ \text{i} = 0, 1, 2, \qquad (7.1)$$

де $X_i = X_i(t)$, $K_i = K_i(t)$, $L_i = L_i(t)$ – випуск, ОВФ і кількість зайнятих у і - му секторі.

2. Загальне число зайнятих у виробничій сфері L змінюється з постійним темпом приросту n.

3. Лаг капіталовкладень відсутній.

4. Коефіцієнти амортизації ОВФ α_i, і прямих матеріальних затрат a_i секторів постійні.

5. Економіка замкнута, тобто зовнішня торгівля напряму не розглядається.

6. Час t змінюється неперервно.

Із припущення 2 витікає, що кількість зайнятих в економіці працівників задається формулою

$$L(t) = L(0)\,e^{nt},\; L(0) = L^0, \qquad (7.2)$$

де L^0 – початкова кількість зайнятих в економіці працівників.

Із припущень 3, 4 витікає, що зміна в часі ОВФ секторів задовольняє рівнянню Солоу

$$\dot{K}_i = I_i - \alpha_i K_i,$$

де I_i – прямі інвестиції в сектор i.

Таким чином, при виконанні наведених припущень трьохсекторна модель економіки в абсолютних показниках набуде вигляду:

$L(t) = L(0)\,e^{nt}$ – кількість зайнятих в економіці працівників,

$L_0(t) + L_1(t) + L_2(t) = L(t)$ – кількість зайнятих в економіці працівників,

$\dot{K}_i = I_i - \alpha_i K_i,\; i = 0, 1, 2$ – динаміка ОВФ по секторам, (7.3)

$X_i = F_i(K_i, L_i)$ – об'єми випусків по секторам,

$X_1 = I_0 + I_1 + I_2$ – розподіл продукції фондоутворюючого сектора,

$X_0 = a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$ – розподіл продукції матеріального сектора.

Як бачимо, трьохсекторна модель є: динамічною (має три динамічних елементи – диференціальні рівнння першого порядку); нелінійною (задана нелінійними виробничими функціями); багатозв'язною (її стан описується трьома фазовими змінним, які пов'язані балансами. В цих балансах проявляється *емерджентність* економічної системи, тобто наявність у неї таких загальних властивостей, які не притаманні її окремим елементам. Ці загальні властивості проявляються у взаємозв'язку фазових змінних: кожен сектор випускає не довільний об'єм продукції, а стільки, скільки потрібно іншим секторам і споживачам, і стільки, на скільки вистачить ресурсів.

Керування здійснюється шляхом розподілу трудових

$$L(t) = L_0(\mathrm{t}) + L_1(\mathrm{t}) + L_2(\mathrm{t}) \text{ та}$$

інвестиційних $X_1 = I_0 + I_1 + I_2$ ресурсів.

Ці розподіли реалізуються опосередковано за допомогою цін, тарифів, податків та інших економічних інструментів.

Для аналізу фінансових потоків до моделі (7.3) необхідно додати баланси доходів і видатків секторів, в яких p_j, t_j, ω_j відповідно ціни, ставки податків та річні ставки заробітної плати.

Баланс доходів і видатків матеріального сектора

$$p_0(1 - a_0)\,X_0 = p_1\,I_0 + X_0\,t_0 + L_0\,\omega_0. \qquad (7.4)$$

Баланс доходів і видатків фондоутворюючого сектора

$$p_1\,X_1 = p_0\ a_0\ X_1 + p_1\,I_1 + X_1\,t_1 + L_1\,\omega_1. \qquad (7.5)$$

Баланс доходів і видатків споживчого сектора

$$p_2\,X_2 = p_0\ a_2\ X_2 + p_1\,I_2 + X_2\,t_2 + L_2\,\omega_2. \qquad (7.6)$$

Склавши рівняння (7.4) – (7.6), отримаємо баланс пропозиції предметів споживання та платіжеспроможного попиту

$$p_2\,X_2 = \sum_{i=0}^{2} L_i\,\omega_i + \sum_{i=0}^{2} X_i\,t_i. \qquad (7.7)$$

Дійсно, в рівнянні (7.7) зліва – вартість вироблених товарів споживання, а праворуч – сумарний дохід працівників виробничої сфери і сумарний дохід працівників невиробничої сфери та пенсіонерів (доходи від податків). Оскільки останнє рівняння є наслідком рівнянь (7.4) – (7.6), то незалежних вартістних балансів тільки три. Для зручності в якості незалежних балансів обиремо баланси (7.4) – (7.5), (7.7). Очевидно, що вартістні баланси будуть виконані, якщо ціни, ставки податків та заробітної плати виростуть пропорційно.

Стагнація (застій в економіці).

Покажемо на моделі, як фіксація надходжень ресурсів у фондоутворюючий сектор приводить до стагнації і падінню виробництва на одного зайнятого.

Нехай надходження інвестицій та праці у фондоутворюючий сектор фіксовані: I_1^0 = const, L_1^0 = const. Тоді паралельно будуть протікати три взаємопов'язані перехідні процеси:

1) перехід до стаціонарного значення ОВФ фондоутворюючого сектора і тим самим до фіксованого випуску інвестиційних товарів;

2) перехід до сталих значень ОВФ матеріального та споживчого секторів;

3) поступове падіння питомого випуску товарів споживання в розрахунку на одного зайнятого.

Розглянемо більш детально кожен із етапів, припускаючи, що вони проходять послідовно, не накладаючись один на одного.

Наслідки фіксації надходжень у фондоутворюючий сектор.

При фіксації інвестицій в перший сектор (I_1^0 = const) його ОВФ будуть вести себе згідно

$$\dot{K}_1 + \alpha_1 K_1 = I_1^0,$$

тобто фонди будуть вести себе як його розв'язок

$$K_1(t) = K_1^0 e^{-t\,\alpha_1} + (1 - e^{-t\,\alpha_1}) \frac{I_1^0}{\alpha_1^0}, \lim_{t\to\infty} K_1(t) = \frac{I_1^0}{\alpha_1^0}.$$

Тому випуск інвестиційних товарів при фіксованомій кількості зайнятих в першому секторі буде зростати у відповідності з виробничою функцією

$$X_1(t) = F_1 (K_1 (t), L_1^0).$$

По завершенні перехідного процесу ОВФ першого сектора і його випуск перейдуть до своїх стаціонарних значень K_1^0, $X_1^0 = F_1 (K_1^0, L_1^0)$.

Наслідки фіксації випуску інвестиційних товарів.

По завершенню першого перехідного періоду економіка буде характеруватись постійністю ресурсів і випуску першого сектору. Тоді показники, які характеризують поведінку двох інших секторів, будуть пов'язані співвідношеннями

$$L_0 + L_2 = L - L_1^0,\ I_0 + I_2 = X_2^0 - I_1^0,$$
$$X_0\,(1 - a_0) = a_1\,X_1^0 + a_2\,X_2, \tag{7.8}$$
$$\dot{K}_0 + \alpha_0\,K_0 = I_0,\ \dot{K}_2 + \alpha_2\,K_2 = I_2.$$

Друге рівняння (7.8) показує, що сумарні інвестиції в матеріальний і споживчий сектора постійні. Розподілимо їх постійними частинами між секторами

$$I_0^0 + I_2^0 = X_2^0 - I_1^0.$$

Тоді ОВФ цих секторів будуть вести себе таким чином

$$K_i(t) = K_i^0\,e^{-t\,\alpha_i} + (1 - e^{-t\,\alpha_i})\,\frac{I_i}{\alpha_i^0},\ \lim_{t\to\infty} K_i(t) = \frac{I_i^0}{\alpha_i^0},\ i = 0,\,2.$$

Перевіримо, чи можливо досягти виконання матеріального балансу шляхом відповідного розподілу праці між цими секторами. Для цього розглянемо систему рівнянь

$$F_0\,(K_0^0, L_0)\,(1 - a_0) = a_1\,X_1^0 + a_2\,F_2\,(K_2^0, L_2),$$
$$L_0 + L_2 = L - L_1^0. \tag{7.9}$$

Нехай система (7.9) має розв'язок. Доводиться, що тоді питомий випуск споживчого сектора буде спадати, що свідчить про стагнацію і необхідність переходу до активної економічної політики зі збільшенням інвестицій у всі сектори економіки, зокрема у фондоутворюючий сектор.

Умови збалансованого економічного зростання.

Збалансоване економічне зростання розглядається при фіксованому технологічному укладі і розуміється як виконання на траєкторії росту трудового, інвестиційного та матеріального балансів.

Нехай $\theta_j = \frac{L_j}{L}$, $s_j = \frac{I_j}{X_1}$ – частки секторів в розподілі трудових та інвестиційних ресурсів.

Під структурною політокою будемо розуміти вибір конкретної структури розподілу ресурсів (можливо, залежної від часу), яка задовольняє збалансованості по праці та інвестиціям. Доведено існування такого розподілу ресурсів в трьохсекторній економіці.

Література:

1. Москаленко В.В., Годлевський М.Д. Моделі та методи стратегічного управління розвитком підприємства. Харків, 2018. 208 с.
2. Капустян В.О., Мажара Г.А., Фартушний І.Д. Моделювання економіки: підручник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 051 Економіка. Електронне мережеве видання. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 207 с.
1. Капустян В. О. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 економіка / В. О. Капустян, Г. А. Мажара ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електроні текстові данні (1 файл: 679 Кб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 120 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62311
2. Замрій А.М., Капустян В.О. Моделювання процесу технологічного переозброєння київського регіону. Економічний вісник НТУУ "Київський політехнічний інститут". 2019. № 16. С. 431-442.
3. Мажара Г.А., Капустян В.О. Вплив смаків і пріоритетів купівлі на вибір споживача на прикладі задачі динамічного моделювання. Економічний журнал Одеського політехнічного університету. 2019. No 3 (9). С. 45-50.
4. Мажара Г.А., Капустян В.О. Behavioral components in relationship sofeconomic agents in the automobile market. Eureka: social and humanities (2020) № 2. P.8-14.

7. Замрій А. М., Капустян В. О. Аналіз динаміки та факторів впливу на трудові ресурси Київської області. Проблеми економіки. 2021. №4. С. 92-100.

Лекція №8
Оптимальні трьохсекторні моделі стратегічного розвитку. Застосування принципу максимума

Перед тим, як розглядати модель оптимального економічного зростання трьохсекторної економіки, розглянемо аналогічну задачу для моделі односекторної економіки. Це дасть можливість, з одного боку, визначити основні властивості оптимального керування в більш простій моделі односекторної економіки, а з іншого боку, з'ясути чи переносяться ці властивості оптимального керування на оптимальну модель трьохсекторної економіки.

Розглянемо таку модель оптимального зростання в односекторній економіці: потрібно знайти траєкторію оптимального питомого споживання $c^*(t)$, $t \in [0, \infty)$, для якої функціонал

$$J(c) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} c(t)\, dt \qquad (8.1)$$

приймав найбільше можливе значення, де питоме фондоозброєння $k(t)$ замкнутої однорідної економіки задовольняє задачі Коші

$$\dot{k}(\mathrm{t}) = f(k(t)) - \lambda\, k(t) - c(t),\ \lambda = \mu + \vartheta, \qquad (8.2)$$

$$k(0) = k^0 > 0, \qquad (8.3)$$

при виконанні

$$\bar{c} \geq c(t) \geq f(k(t)). \qquad (8.4)$$

В задачі оптимального керування (8.1) – (8.4): функціонал (8.1) – інтегральне дисконтоване (величина дисконту $\delta > 0$) питоме споживання за великий інтервал часу; $f(k)$ – питома неокласична виробнича функція; ϑ – темп приросту числа зайнятих у виробництві; μ – коефіцієнт зносу (вибуття) основних виробничих фондів; $\bar{c}$ – мінімально допустиме з соціальної точки зору питоме споживання.

Будемо вважати, що задача оптимального керування (8.1) – (8.4) має розв'язок $c^*(t)$. Йому відповідає оптимальна траєкторія фондоозброєності $k^*(t)$ та оптимальний питомий випуск продукції $y^*(t) = f(k^*(t))$.
Разом вектор ($c^*(t)$, $k^*(t)$, $y^*(t)$) складає траєкторію оптимального економічного зростання.

Застосуємо для пошуку траєкторії оптимального економічного зростання в задачі (8.1) – (8.4) принцип максимума Понтрягіна. Для цього спочатку складемо функцію Гамільтона

$$H(k,c,\psi,t) = e^{-\delta t}\, c(t) + \psi(t)\, (f(k(t)) - \lambda\, k(t) - c(t)), \qquad (8.5)$$

де спряжена змінна $\psi(t)$ задовольняє умовам

$$\dot{\psi} = -\,(f'(k(t)) - \lambda)\ \psi, \quad \psi(\infty) = 0. \qquad (8.6)$$

Спряжену змінну зручніше подати у вигляді $\psi(t) = e^{-\delta t}\, q(t)$. Тоді функція $q(t)$ буде задовольняти задачі

$$\dot{q} = -\,(f'(k(t)) - (\lambda + \delta))\ q,\ q(\infty) = C > 0. \qquad (8.7)$$

Тоді гамільтоніан (8.5) набуде вигляду

$$H(k,c,\psi,t) = e^{-\delta t}\, (c(t)\,(1 - q(t)) + q(t)\,(f(k(t)) - \lambda\, k(t))). \qquad (8.8)$$

Функція $H(.)$ буде досягати поточкового максимуму по змінній c, якщо остання має вигляд

$$c^*(t) = \bar{c},\ q > 1;\ c(t),\ q = 1;\ f(k(t)),\ q < 1, \qquad (8.9)$$

де $c(t)$ – довільна точка із множини $(\bar{c}, f(k(t))$.

Розв’язуючи, лінійну задачу (8.7), отримаємо, що $q(t) > 0$.
Система рівнянь двоточкової крайової задачі принципу максимума буде мати вигляд

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \lambda\, k(t) - c^*(t),$$
$$\dot{q} = -\,(f'(k(t)) - (\lambda + \delta))\ q. \qquad (8.10)$$

Координати точки рівноваги $(k^E, q^E$ $(\dot{k}^E = 0,\ \dot{q}^E = 0)$, яка відповідає збалансованому економічному зростанню, згідно (8.10), будемо визначати із співвідношень

$$f'(k^E) = \lambda + \delta,\ c^E = f(k^E) - \lambda\, k^E. \tag{8.11}$$

Слід зазначити, що при $q = 1\ \forall\ t \geq 0$ виконується друге рівняння системи (8.10), тобто в цьому випадку будуть виконуватись співвідношення (8.11). Тоді оптимальна траєкторія питомого споживання (оптимальне керування) (8.9) може бути конкретизована

$$c^*(t) = \bar{c},\ q > 1;\ f(k^E) - \lambda\, k^E,\ q = 1;\ f(k(t)),\ q < 1. \tag{8.12}$$

У зв'язку з рівноважним станом (8.11) системи оптимальності (8.10), (8.12) для розв'язків останньої повинні виконуватись граничні рівності при $t \to \infty$

$$k^*(t) = k^E,\ q^*(t) = 1,\ c^*(t) = c^E. \tag{8.13}$$

Дослідимо далі оптимальні траєкторії фазової та спряженої змінних $k^*(t)$, $q^*(t)$ в припущенні, що c < c^E.

1. Розглянемо спочатку область $q > 1$. В цій області $c^*(t) = \bar{c}$ і функція $k^*(t)$ буде задовольняти задачі Коші

$$\dot{k}^*(t) = f(k^*(t)) - \lambda\, k^* - \bar{c},$$
$$k(0) = k^0 > 0. \tag{8.14}$$

Нехай k_L, k_R – лівий та правий корені рівняння

$$f(k) - \lambda\, k - \bar{c} = 0.$$

Оскільки $\bar{c} < c^E$, то $f(k^E) - \lambda\, k^E - \bar{c} > 0$ і тим самим, $k_L < k^E$. Тому при $k^0 < k_L$ буде виконуватись нерівність $\dot{k}(t) < 0$, тобто фондоозброєність буде зменшуватись і віддалятись від стаціонарного значення.

Якщо ж, $k_L < k^0 < k^E$, то $\dot{k}(t) > 0$, і фондоозброєність буде зростати, лишаючись лівіше стаціонарного значення. При цьому буде виконуватись нерівність $\dot{q}(t) < 0$, тобто $q < 1$ і значення q буде неперервно зменшуватись. Тому настане такий момент часу

$t = t_1^*$, що $q(t_1^*) = q^E = 1$. Тоді $k(t_1^*) = k^E$, а споживання слід взяти у вигляді

$c^E = f(k^E) - \lambda \ k^E$. Якщо $k^0 > k^E$, то значення q буде віддалятись від стаціонарного $q^E = 1$.

2. Тепер розглянемо область $q < 1$. В цьому випадку $c^*(t) = f(k(t))$, тобто на споживання "працюють" всі фонди (не має ні розширення, ні відновлення фондів), тому рівняння для фондоозброєння наує вигляду $\dot{k}(t) = -\lambda\, k(t)$.

Тому при $k^0 < k^E$ буде відсутня збіжність до k^E, а при $k^0 > k^E$така збіжність буде мати місце.

Таким чином, отримуємо наступну картину оптимального керування. При $q > 1$, $k_L < k^0 < k^E$ фондоозброєність неперервно зростає за рахунок того, що питоме споживання підтримується на гранично низькому рівні. Як тільки в момент часу t_1^* фондоозброєність досягає стаціонарного значення, то система переходить на стаціонарний режим: має місце таке відтворення виробництва, яке дозволяє підтримувати фондоозброєність на стаціонарному рівні k^E, питоме споживання постійне і дорівнює $f(k^E) - \lambda\, k^E, q^E = 1$.

При $q < 1$, $k^0 > k^E$ у фонди не поступає ніяких вкладень, тому фондоозброєність скорочується за рахунок збільшення числа зайнятих
по закону

$$k^*(\mathrm{t}) = k^0\, e^{-t\,\lambda}, \lambda = \mu + \vartheta,$$

споживання скорочується по закону

$$c^*(t) = f(k^0\, e^{-t\,\lambda})$$

доки фондоозброєність не досягне в деякий момент t_2^* стаціонарного значення k^E, після чого система виходить на стаціонаний режим.

В усіх інших випадках система не досягає стаціонарного режиму, тобто вихідна задача оптимального керування розв'язків мати не буде.

Тепер розглянемо аналогічну задачу для моделі трьохсекторної економіки. В ній під оптимальним будемо розуміти такий динамічний розподіл трудових та інвестиційних ресурсів, при якому за достатньо довгий час дисконтоване питоме споживання буде максимальним. Отримані результати є узагальненням на випадок трьохсекторної економіки результатів

Erроу по оптимальному росту в односекторній економіці і результатів Удзави по оптимальному росту в двохсекторній економіці. Задача розв'язана за допомогою принципа максимума Понтрягіна.

Нагадаємо призначення секторів трьохсекторної економіки (див. тему 7): матеріальний (нулевий) сектор створює предмети праці (пальне, електроенергію, сировину та інші матеріали); фондоутворюючий (перший) сектор – засоби праці (машини, обладнання, силові агрегати, виробничі будівлі та споруди та інше); споживчий (другий) сектор – предмети споживанн (продовольчі та непродовольчі товари, невиробничі будівлі та споруди, озброєння та інші предмети кінечного невиробничого призначення).

Далі під *економічним зростанням* будемо розуміти монотонне зростання по часу фондоозброєності секторів, тобто $\dot{k_i} > 0$, i = 0, 1, 2;
під *збалансованістю* – виконання в кожен момент часу t матеріального, трудового та інвестиційного балансів.

Для спрощення аналізу припустимо, що пропорції розподілу трудових і інвестиційних ресурсів по секторам одинакові, тобто $\theta_i = s_i$, i = 0, 1, 2. Тоді основні співвідношення трьохсекторної моделі збалансованого економічного зростання (див. тему 7) набудуть вигляду

$$\dot{k_i} = -\lambda k_i + s_1 f_1(k_1),\ i = 0, 1, 2, \tag{8.15}$$

$$(1 - a_0)\, s_0\, f_0(k_0) = a_1\, s_1\, f_1(k_1) + a_2\, s_2\, f_2(k_2), \tag{8.16}$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1. \tag{8.17}$$

Далі припускаємо, що виробничі функції секторів є лінійнооднорідними неокласичними функціями

$$X_i = F_i\,(K_i, L_i\,),\ i = 0, 1, 2 \tag{8.18}$$

В якості критерію оптимального керування трьохсекторною економікою оберемо максимум інтегрального дисконтованого питомого споживання

$$\max_s \int_0^\infty e^{-t\delta}\, s_2\, f_2(k_2(t))\, dt, \tag{8.19}$$

де керуючими параметрами будуть виступати параметри розподілу ресурсів $s' = (s_0,\ s_1,\ s_2)$, які задовольняють співвідношенням (8.16) – (8.17), а фазовими змінними буде фондоозброєність секторів, яка задовольняє рівнянням (8.15).

Оскільки три керуючих параметра зв'язані двома співвідношеннями (8.16) – (8.17), то один параметр буде вільним. Оберемо в якості такого параметра s_1. Тоді із системи (8.16) – (8.17) знаходимо

$$s_0 = \frac{b_2(k_0,k_2) + (b_1(k_0,k_1) - b_2(k_0,k_2))s_1}{1+b_2(k_0,k_2)},$$

$$s_2 = \frac{1-(1+(b_1(k_0,k_1))s_1}{1+b_2(k_0,k_2)}, \qquad (8.20)$$

$$s_2 = 1 - s_0 - s_1,$$

де $b_j(k_0,k_j) = \frac{a_j f_j(k_j)}{(1-a_0)\ f_0(k_0)}$, $j = 1, 2$.

Якщо обране кусково-неперервне керуюче правило s_1, то по рівнянням (8.15) однозначно визначаються траєкторії фазових змінних, а по цим траєкторіям і рівнянням (8.20) – траєкторії допоміжних керуючих змінних s_0, s_2.

Сформулюємо остаточно задачу оптимального керування: потрібно знайти кусково-неперервне керування s_1^*, при якому критерій

$$J(s_1) = \int_0^\infty e^{-t\delta} \frac{1-(1+(b_1(k_0,k_1))s_1}{1+b_2(k_0,k_2)} f_2(k_2)\, dt \qquad (8.21)$$

приймав найбільше можливе значення,

де функції k_iзадовольняють системі диференціальних рівнянь (8.15), а незалежний керуючий параметр s_1задовольняє нерівності

$$\bar{s_1} \le s_1 \le \bar{\bar{s_1}}, \qquad (8.22)$$

де $\bar{s_1}$, $\bar{\bar{s_1}}$ – найменше і найбільше значення параметра.

Для дослідження задачі оптимального керування застосовується принцип максимума. Результати тут по структурі близькі до аналогічних результатів в односекторній моделі оптимального економічного зростання (див. вище).

При деяких умовах на спряжені змінні і початкові дані фондоозброєність фондоутворюючого сектора буде неперервно зрости за рахунок того, що питоме споживання та споживання підтримується на гранично низькому рівні. В деякий момент часу фондоозброєність досягає стаціонарного значення і виходить на стаціонарний режим, на якому і лишається.

Коли початкові дані перевищують стаціонарний рівень, то у фонди не поступає ніяких вкладень, тому фондоозброєність фондоутворюючого сектора скорочується за рахунок збільшення числа фондоозброєності інших секторів до моменту часу, коли вона виходить на стаціонарний режим.

Література:

1. Москаленко В.В., Годлевський М.Д. Моделі та методи стратегічного управління розвитком підприємства. Харків, 2018. 208 с.
2. Капустян В.О., Мажара Г.А., Фартушний І.Д. Моделювання економіки: підручник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 051 Економіка. Електронне мережеве видання. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 207 с
3. Капустян В. О. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 економіка / В. О. Капустян, Г. А. Мажара ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електроні текстові данні (1 файл: 679 Кб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 120 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62311
4. Замрій А.М., Капустян В.О. Моделювання процесу технологічного переозброєння київського регіону. Економічний вісник НТУУ "Київський політехнічний інститут". 2019. № 16. С. 431 - 442.

5. Мажара Г.А., Капустян В.О. Вплив смаків і пріоритетів купівлі на вибір споживача на прикладі задачі динамічного моделювання. Економічний журнал Одеського політехнічного університету. 2019. No 3 (9). С. 45 - 50.
6. Мажара Г.А., Капустян В.О. Ірраціональні стратегії в умовах часткової інформованості гравців на прикладі індивідуально-оптимальних рівноваг. Академічний огляд. 2019. No 2(51).
7. Мажара Г.А., Капустян В.О. Behavioral components in relationship sofeconomic agents in the automobile market. Eureka: social and humanities (2020) № 2. P.8-14.
8. Замрій А.М., Капустян В.О. Аналіз галузевої структури Київської області та визначення головних факторів виробництва у галузі за допомогою виробничих функцій. Економічний вісник НТУУ " Київський політехнічний інститут ". 2020. № 17. С. 465-478.
9. Замрій А. М., Капустян В. О. Аналіз динаміки та факторів впливу на трудові ресурси Київської області. Проблеми економіки. 2021. №4. С. 92-100.

Лекція №9

Застосування сучасних програмних продуктів для аналізу та прогнозування розвитку соціально - економічних систем.

Microsoft Visual Studio – Python – Денвер – MySQL – MATLAB – TIMES – BigData

Сучасний бум інформаційних технологій, особливо рішення пов'язані із обробкою великих обсягів даних, приводять до виникнення швидких та високопродуктивних систем та моделей бізнесу у різних галузях. Завдяки розвитку методів швидкої обробки даних стало можливим проведення такого моделювання.

В основу сучасних спеціалізованих пакетів обробки економічної інформації покладено такі технології: **Cloud technologies** (Хмарні обчислення), **data science**(наука про дані), **machine learning**(Машинне навчання – це підгалузь штучного інтелекту в галузі інформатики), **artificial intelligence** (штучний інтелект), **розподілені обчислення** (розподілена обробка даних – спосіб розв'язання трудомістких обчислювальних завдань з використанням двох і більше комп'ютерів, об'єднаних в мережу), **високо - навантажені системи**.

При цьому використовуються пакети програмного забезпечення:

Microsoft Visual Studio – серія продуктів фірми Майкрософт, які містять інтегроване середовище розробки програмного забезпечення та низку інших інструментальних засобів. Ці продукти дають змогу розробляти як консольні програми, так і програми з графічним інтерфейсом, включно з підтримкою технології Windows Forms, а також веб-сайти, веб-застосунки, веб-служби як в рідному, так і в керованому кодах для всіх платформ, що підтримуються Microsoft Windows, Windows Mobile, Windows Phone, Windows CE, NET

Framework, NET CompactFramework та Microsoft Silverlight.

Python (найчастіше вживане прочитання – «Па́йтон», запозичено назву з британського шоу МонтіПайтон) – інтерпретована об'єктно-орієнтована мова програмування високого рівня зі строгою динамічною типізацією. Розроблена в 1990 році Гвідо ван Россумом. Структури даних високого рівня разом із динамічною семантикою та динамічним зв'язуванням роблять її привабливою для швидкої розробки програм, а також як засіб поєднування наявних компонентів. Python підтримує модулі та пакети модулів, що сприяє модульності та повторному використанню коду. Інтерпретатор Python та стандартні бібліотеки доступні як у скомпільованій, так і у вихідній формі на всіх основних платформах. В мові програмування Python підтримується кілька парадигм програмування, зокрема: об'єктно-орієнтована, процедурна, функціональна та аспектно-орієнтована.

Денвер – набір дистрибутивів (локальний сервер WAMP) [2] і програмна оболонка, призначені для створення і налагодження сайтів (веб-додатків, іншого динамічного вмісту інтернет-сторінок) на локальному ПК (без необхідності підключення до мережі Інтернет) під керуванням ОС Windows.(Веб-сервер Apache,Інтерпретатор PHP, Mysql)

MySQL – вільна система керування реляційними базами даних(SQL)

MATLAB – пакет прикладних програм для розв’язку технічних та економічних задач.

TIMES – пакет для створення моделей загальної рівноваги в різних галузях економіки.

Слід відзначити, що моделювання процесів із високою швидкістю потоків даних відносить до складу інструментів “BigData”. Оскільки потрібно спроектувати відповідну інформаційну інфраструктуру та будувати моделі, які можуть навчатися на даних великих обсягів та високої частотності.

Інструмент «BigData», а саме – онлайнові алгоритми машинного навчання, для прогнозування ефективності інтернет реклами в умовах роботи аукціону в реальному часі. Також буде досліджено питання про традиційні методи машинного навчання, границі їх застосування та порівняння із онлайновими методами.

BigData в інформаційних технологіях – серія підходів, інструментів та методів обробки структурованих та неструктурованих даних великих обсягів і різноманітності для отримання результатів, які:

1) легко сприймаються людиною,

2) ефективні в умовах неперервного приросту, розподілення по численним вузлам обчислювальної мережі.

В якості характеристик, які визначають поняття великих даних, відзначають «три V»:

1) Volume – об'єм;

2) Velocity – швидкість, як у розумінні швидкості приросту, так і необхідності швидкої обробки та отримання результату;

3) Variety – різноманітність, у розумінні можливості одночасної обробки різних типів даних.

Традиційно для розв'язання таких задач використовують методи машинного навчання основані на певному фіксованому наборі даних – це так званий пакетний (batch) підхід. При цьому усі дані доступні одразу і можуть бути оброблені на одному обчислювальному вузлі. Також пакетний підхід означає, що модель спочатку була навчена на певному наборі даних – trainingdataset, а потім тестується на тестовому наборі даних – testdataset та використовується для прогнозування на практиці. В основі такого підходу лежить гіпотеза про те, що структура даних та статистичні співвідношення між параметрами моделі не змінюються в часі.

Завдання. Підібрати дані для моделювання, обробити їх та дослідити за допомогою онлайнових алгоритмів машинного навчання.

Література:

1. Gilles Gasso. BatchandonlinelearningalgorithmsfornonconvexNeyman-Pearsonclassification/ GillesGasso, Aristidis Pappaioannou, Marina Spivak, Leon Bottou. ACM Transactionon Intelligent Systemand Technologies, 201, 2(3).
2. H Brendan Mc Mahan. Follow-the-regularized-leaderandmirrordescent: Equivalence theorems and l1 regularization. In International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, 201, pages 525–533.
3. Замрій А.М., Капустян В.О. Моделювання процесу технологічного переозброєння київського регіону. Економічний вісник НТУУ "Київський політехнічний інститут". 2019. № 16. С. 431 - 442.
4. Мажара Г.А., Капустян В.О. Вплив смаків і пріоритетів купівлі на вибір споживача на прикладі задачі динамічного моделювання. Економічний журнал Одеського політехнічного університету. 2019. No 3 (9). С. 45 - 50.
5. Мажара Г.А., Капустян В.О. Ірраціональні стратегії в умовах часткової інформованості гравців на прикладі індивідуально-оптимальних рівноваг. Академічний огляд. 2019. No 2(51).
6. Мажара Г.А., Капустян В.О. Behavioral components in relationship sofeconomic agents in the automobile market. Eureka: social and humanities (2020) № 2. P.8-14.