



ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>11 математика і статистика</i>
Спеціальність	<i>113 прикладна математика</i>
Освітня програма	<i>Наука про дані та математичне моделювання</i>
Статус дисципліни	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>2 курс, весняний семестр, 3 курс, осінній семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>285 год.</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>екзамен, екзамен</i>
Розклад занять	
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: <i>доктор фіз.-мат. наук, доцент, Лось Валерій Миколайович, v_los@yahoo.com</i> Практичні / Семінарські: <i>кандидат фіз.-мат. наук, доцент, Андрусенко Олена Миколаївна</i>
Розміщення курсу	<i>Немає</i>

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Теорія диференціальних рівнянь є одним із центральних розділів математики. Поняття та методи цієї теорії дозволяють на строгому математичному рівні формувати постановки як класичних, так і сучасних математичних задач та будувати їх розв'язки. Звичайні диференціальні рівняння знаходять свої застосування практично в усіх областях математики.

Мета та завдання кредитного модуля

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів здатностей:

- до логічного мислення, формування особистості студентів, розвиток їх інтелекту і здібностей;
- до розв'язування диференціальних рівнянь і систем, задач Коші і крайових задач, дослідження систем на стійкість;
- використовувати методи диференціальних рівнянь в теоретичних і прикладних дослідженнях;
- доводити розв'язок задачі до зрозумілого результату — числа, формули, точного якісного висновку із застосуванням для цього адекватного математичного та алгоритмічного апаратів;
- уміти аналізувати отримані результати, здатності до узагальнення, постановки задачі та вибору шляхів її розв'язання.

Основні завдання навчальної дисципліни.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають продемонструвати такі результати навчання:

знання:

- загальну теорію звичайних диференціальних рівнянь
- постановку та єдність розв'язку задачі Коші для основних типів звичайних диференціальних рівнянь та її коректність

- теорію крайових задач другого порядку в тому числі задачу Штурма-Ліувіля в регулярному випадку
- геометричний підхід до теорій звичайних диференціальних рівнянь
- стійкість нерухомих точок в смислі Ляпунова та методи дослідження на стійкість
- теорію диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку та постановку задачі Коші до них ;

уміння:

- розв'язувати задачу Коші для основних типів звичайних диференціальних рівнянь першого та вищих порядків
- аналізувати нелінійні рівняння та досліджувати стійкість нерухомих точок, як безпосередньо через функцію Ляпунова так і через дослідження відповідної лінеаризованої системи;
- аналізувати глобальні фазові портрети на наявність граничних циклів;
- будувати лінійні та нелінійні моделі деяких природничо-наукових та соціальних явищ;
- розв'язувати задачу Коші для рівнянь з частинними похідними першого порядку

досвід:

- інтегрування звичайних диференціальних рівнянь першого та вищих порядків;
- знаходження функції Гріна для крайової задачі;
- дослідження нерухомих точок та розв'язків систем на стійкість;
- побудови фазових портретів.

Компетентності:

- здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями, генерувати нові ідеї,
- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу,
- знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності,
- здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем,
- здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі,
- здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

- дисципліні «Диференціальні рівняння» передують дисципліни «Математичний аналіз», «Алгебра та геометрія» навчального плану підготовки бакалаврів за спеціальністю 113 Прикладна математика;
- дисципліна «Диференціальні рівняння» забезпечує вивчення дисциплін «Рівняння математичної фізики» та «Основи нелінійного аналізу» навчального плану підготовки бакалаврів за спеціальністю 113 Прикладна математика а також дисциплін «Чисельні методи математичної фізики», «Моделювання складних систем» навчального плану підготовки магістрів за спеціальністю 113 Прикладна математика.

3. Зміст навчальної дисципліни

Кредитний модуль 1. Звичайні диференціальні рівняння

РОЗДІЛ 1 РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Тема 1.1 Інтегровані типи рівнянь першого порядку, що розв'язні відносно похідної.

Тема 1.2 Елементи теорії метричних просторів. Теореми існування та єдиності.

Тема 1.3 Рівняння першого порядку, що нерозв'язні відносно похідної

РОЗДІЛ 2 РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Тема 2.1 Диференціальні рівняння вищих порядків

Тема 2.2 Лінійні диференціальні рівняння n -ого порядку

Кредитний модуль 2. Системи диференціальних рівнянь

РОЗДІЛ 1 КРАЙОВІ ЗАДАЧІ.

Тема 1.1 Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку

Тема 1.2 Задача Штурма-Ліувілля

РОЗДІЛ 2 СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Тема 2.1 Системи лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Тема 2.2 Лінійні системи та експоненти операторів

Тема 2.3 Стійкість розв'язків за Ляпуновим

РОЗДІЛ 3 РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Тема 3.1 Основи теорії рівнянь в частинних похідних першого порядку

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова література

1. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1983. – 128 с.
2. А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк Диференціальні рівняння Київ, Либідь, 2003 - 600с.
3. А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ, В.Школа, 1994 - 455с.
4. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, Наука, 1984-271с.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 332 с.
6. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1988. – 256 с.

Допоміжна література

7. Hirsch M., Smale S. Differential equations. Dynamical systems and linear algebra. Academic press. N.Y., San Fr., Lond. 1974,-360p.
8. Эроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. Москва, Мир, 1986,-243с.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, Мир, 1970, 720с.
10. Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва, Наука, 1985,-128.
11. Свешников А.Г., Васильева А.Б., Тихонов А.И. Дифференциальные уравнения. Москва, Наука, 1985,-232с.
12. А.М.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функции и функционального анализа. Москва, Наука, 1989-624с.
13. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, Наука, 1970 - 270с
14. Степанов В.В. Курс дифференціальних рівнянь. Київ, Р.Школа, 1953-444с.

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекційні заняття

Кредитний модуль 1. Звичайні диференціальні рівняння

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Вступ до теорії диференціальних рівнянь. Поняття диференціального рівняння. Приклади задач, які зводяться до диференціальних рівнянь. Звичайне диференціальне рівняння.
2	Розв'язок диференційного рівняння. Розв'язок диференціального рівняння. Постановка задачі Коші для звичайного диференційного рівняння. Геометричний зміст розв'язку. Поле напрямків. Ізокліни.
3	Інтегровані типи рівнянь. Рівняння з відокремлюваними змінними Коректна задача. Найпростіше диференціальне рівняння. Рівняння з відокремлюваними змінними. Існування та єдиність розв'язку рівняння з відокремлюваними змінними.
4	Однорідні рівняння. Лінійні рівняння. Поняття однорідного рівняння. Існування та єдиність розв'язку однорідного рівняння. Геометричний зміст розв'язку однорідного рівняння. Лінійне рівняння першого порядку. Існування та єдиність розв'язку лінійного рівняння.
5	Рівняння Бернуллі. Рівняння Рікатті. Рівняння Бернуллі. Зведення його до лінійного рівняння. Поняття рівняння Рікатті. Властивості рівняння Рікатті. Інтегрування рівняння Рікатті.
6	Рівняння в повних диференціалах. Поняття рівняння в повних диференціалах. Необхідна та достатня умова. Інтегруючий множник. Властивості інтегруючого множника. Методи пошуку інтегруючого множника.
7	Метричні простори. Принцип стискаючих відображень. Поняття метричного простору. Метрика. Приклади метричних просторів. Збіжність в метричному просторі. Повнота метричного простору. Стискаюче відображення. Нерухома точка. Теорема Банаха.
8	Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференційного рівняння першого порядку. Поняття рівномірно обмеженості та рівностепенно неперервності. Теорема Арцела. Теорема Пеано. Теорема Коші-Пікара.
9	Рівняння, не розв'язані відносно похідної.

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
	Поняття рівняння, не розв'язаного відносно похідної. Існування розв'язку рівнянь, не розв'язаних відносно похідної. Поняття звичайної та особливої точок. Інтегрування рівнянь, не розв'язаних відносно похідної.
10	Загальний метод введення параметру. Рівняння Лагранжа та Клеро. Загальний метод введення параметра для рівнянь, не розв'язаних відносно похідної. Дискримінантна крива. Особливий розв'язок. Обвідна. Рівняння Лагранжа. Рівняння Клеро.
11	Інтегрування рівнянь вищих порядків. Поняття диференційного рівняння n -го порядку та розв'язку цього рівняння. Існування та єдиність його розв'язку. Рівняння вищих порядків, які інтегруються в квадратурах.
12	Рівняння вищих порядків, які припускають його зниження. Типи рівнянь вищих порядків, які припускають його зниження. Методи зниження порядку.
13	Загальні поняття теорії лінійних рівнянь. Однорідне та неоднорідне лінійне рівняння n -го порядку. Існування та єдиність розв'язку. Поняття лінійної незалежності системи функцій. Визначник Вронського та його зв'язок з лінійною незалежністю. Фундаментальна система розв'язків лінійного рівняння.
14	Пошук розв'язку лінійного рівняння. Загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння. Відтворення рівняння по фундаментальній системі розв'язків. Формула Ліувілля-Остроградського.
15	Неоднорідні лінійні рівняння. Загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння. Метод Лагранжа варіації сталих.
16	Однорідні лінійні диференційні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Знаходження фундаментальної системи для рівняння зі сталими коефіцієнтами.
17	Неоднорідні лінійні диференційні рівняння зі сталими коефіцієнтами Знаходження розв'язку неоднорідного лінійного рівняння. Метод варіації довільних сталих.
18	Неоднорідні лінійні диференційні рівняння зі сталими коефіцієнтами Метод підбору частинного розв'язку для рівнянь із спеціальною правою частиною. Принцип суперпозиції.

Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань
1	Рівняння з відокремлюваними змінними. Поняття рівняння з відокремлюваними змінними. Методи їх інтегування. Втрачені розв'язки.
2	Однорідні рівняння. Поняття однорідного рівняння. Методи інтегування. Рівняння, що зводяться до однорідних.
3	Лінійні рівняння. Лінійне рівняння першого порядку. Метод варіації довільної сталої. Рівняння, що зводяться до лінійних.
4	Рівняння в повних диференціалах. Рівняння в повних диференціалах. Необхідна та достатня умова. Інтегрування рівнянь у повних диференціалах. Інтегруючий множник та методи його пошуку.
5	Рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної. Рівняння, не розв'язані відносно похідної. Загальний метод введення параметру. Рівняння Лагранжа та Клеро.
6	Рівняння вищих порядків, які припускають його пониження. Класи рівнянь вищих порядків, що припускають його зниження. Методи їх інтегування.
7	Лінійні однорідні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний вигляд. Фундаментальна система розв'язків рівняння. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.
8	Лінійні неоднорідні рівняння n -го порядку. Метод варіації довільних сталих.
9	Лінійні неоднорідні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний вигляд. Загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння. Метод підбору частинного розв'язка.

Кредитний модуль 2. Системи диференціальних рівнянь

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Крайові задачі для рівнянь другого порядку. Самоспряжений вигляд ЛНДР. Зведення ЛНДР до самоспряженого вигляду. Формула Гріна. Поняття про крайову задачу. Різні типи крайових умов.

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
2	Функція Гріна, її побудова. Розв'язування крайової задачі з використанням функції Гріна.
3-4	Задача Штурма-Ліувілля. Деякі властивості власних чисел та власних функцій. Теорема Стеклова.
5	Поняття про системи диференціальних рівнянь. Нормальні системи. Основні поняття Лінійні однорідні і неоднорідні системи (ЛОС і ЛНС). ЛОС зі сталими коефіцієнтами (різні власні значення).
6	ЛОС зі сталими коефіцієнтами. Побудова ФСР ЛОС у випадку кратних власних значень.
7-8	Експонента матриці. Поняття про банахову алгебру. Означення $\exp(x)$, де x це елемент банахової алгебри. Множина квадратних матриць розміру n - приклад банахової алгебри. Означення $\exp(A)$, де A - квадратна матриця. Властивості $\exp(A)$. Обчислення $\exp(A)$. Розв'язування ЛОС за допомогою $\exp(A)$.
9	Метод варіації довільних сталих розв'язування лінійних неоднорідних систем (ЛНС).
10	Фазові портрети автономних систем (початок). Поняття автономної системи. Фазова крива, фазовий портрет. Розв'язок автономної системи, який називається положенням рівноваги. Поведінка розв'язків лінійної системи біля положення рівноваги (випадки різних дійсних власних чисел). Відповідні фазові портрети (стійкий і нестійкий вузол, седло).
11	Фазові портрети автономних систем (продовження). Дикритичний вузол, вироджений вузол, фокус, центр. Біфуркаційна діаграма.
12	Елементи теорії стійкості (початок). Означення стійкості за Ляпуновим Означення асимптотичної стійкості Геометрична інтерпретація стійкості та асимптотичної стійкості.
13	Стійкість лінійних систем. Еквівалентність стійкості будь-якого розв'язку лінійної однорідної системи і стійкості її нульового розв'язку. Умови стійкості (асимптотичної стійкості) ЛОС. Умови стійкості (асимптотичної стійкості) ЛОС зі сталими коефіцієнтами.

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
14	Критерій Рауса-Гурвіца. Приклади застосування. Лінеаризація автономної системи. Стійкість за першим наближенням.
15	Функції Ляпунова. Означення додатно(від'ємно)визначеної функції. Означення похідної в силу системи (повної похідної функції за часом). Означення функції Ляпунова. Теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість.
16	Умови нестійкості. Теорема Четаєва.
17	Перший інтеграл нормальної системи диф. рівнянь. Системи диф. рівнянь у симетричній формі.
18	Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку (ДРЧП першого порядку). Простіші ДРЧП. Квазілінійні ДРЧП першого порядку (зведення до симетричної системи диф. рівнянь).

Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань
1	Крайові задачі. Функція Гріна.
2	Задача Штурма-Ліувілля.
3	Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку (випадок простих власних значень).
4	Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку (випадок кратних власних значень).
5	Системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку.
6-7	Фазові портрети автономних систем.
8	Дослідження на стійкість систем ДР. Критерій Рауса-Гурвіца. Лінеаризація автономної системи. Стійкість за першим наближенням.
9	Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку.

6. Самостійна робота студента

Самостійна робота студента полягає:

- підготовка до лекційних та практичних занять – систематично до 2 год. на заняття,
- підготовка до модульних контрольних робіт - до 5 год на роботу,
- підготовка до колоквіуму - до 5 год.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

1. Систематичне відвідування лекційних і практичних занять.
2. Перескладання (переписування) модульної контрольної роботи не передбачене.
3. У випадку недостатньої кількості балів (менше 60) в кінці семестру може бути дано додаткові завдання, щоб добрати бали до 60.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Рейтинг студента з кредитного модуля складається з:

- 1) балів за виконання модульної контрольної роботи;
- 2) балів за активність на практичних заняттях
- 3) балів за відповідь на колоквіумі
- 4) заохочувальних балів

СИСТЕМА РЕЙТИНГОВИХ БАЛІВ

1. Бали за модульну контрольну роботу

Модульна контрольна робота поділяється на дві 45-хвилинні контрольні роботи, що проводяться у вигляді тестів. Завдання на тестові контрольні роботи містять по 5 типових практичних прикладів.

Кількість балів за розв'язання кожного прикладу: 3 бали.

Критерії оцінювання:

3 – правильна відповідь;

0 – неправильна відповідь;

Викладач має право після завершення тесту вибірково запросити фотокопії студентських робіт та поставити нуль балів за завдання, розв'язання яких буде відсутнє чи неправильне.

Максимальна кількість балів за модульний контроль:

3 бали × 5 завд. × 2 тест. контр. роб. = **30 балів**.

2. Бали за активність на практичних заняттях

Бали нараховуються за плідну роботу та відповіді на практичних заняттях. Але не більше ніж **10 балів** протягом усього семестру.

1 бал --- самостійно правильно розв'язане завдання і прокоментоване розв'язання

0.5 бала --- плідна робота на практичному занятті (ці бали нараховуються, якщо студент був присутній на занятті і виконував усі практичні завдання, які на ньому розв'язувалися)

0 балів --- пасивна робота на практичному занятті

3. Бали за відповідь на колоквіумі

Колоквіум відбувається у формі усної співбесіди викладача із студентом. Викладач задає студенту поступово декілька питань, на які студент відразу повинен надавати свою відповідь. Питання викладача можуть бути як продовженням опитування за попереднім питанням, так і бути на іншу тему.

За відповідь на кожне питання студент отримує певну кількість балів. Питання, в залежності від їх складності можуть вартувати від 1 до 5 балів.

Максимальна кількість балів за відповідь на колоквіумі дорівнює **10 балів**.

Під час відповіді на питання колоквіуму максимальну кількість балів студент отримує у випадку, якщо він надав повні та правильні відповіді на всі запитання викладача або припустився незначних похибок, які не вплинули на саму відповідь.

Нуль балів студент отримує у випадку, коли відповідь на запитання взагалі не була надана або містить грубі помилки. Якщо відповідь частково правильна, то студент за неї отримує, як правило, кількість балів, вдвічі меншу за максимально можливу за відповідне запитання.

4. Заохочувальні бали

Викладач має право заохотити студента певною додатковою кількістю балів (максимально – 5 балів за семестр) за надання оригінального розв'язання задачі чи розв'язання додаткового складного завдання.

5. Розрахунок шкали (R) рейтингу

Семестрова складова рейтингової шкали $R_c = 50$ балів, вона визначається як сума балів, отриманих за виконання модульної контрольної роботи, активність на практичних заняттях та відповідь на колоквіумі.

Рейтингова шкала з дисципліни дорівнює:

$$R = 60 + 40 * (R_{\max} - R_{\text{доп}}) / (R_c - R_{\text{доп}}) = 100 \text{ балів},$$

тут $R_{\max} = 50$ – максимальний можливий семестровий рейтинг студента,

$R_{\text{доп}} = 25$ – мінімальна кількість балів, необхідна для допуску.

6. Умова допуску до семестрової атестації та визначення оцінки

Необхідною умовою допуску студента до семестрової атестації є семестровий рейтинг студента ($R_{\text{ст}}$) не менше 50 % від R_c , тобто не менше **25 балів**. В іншому разі студент повинен виконати додаткову роботу та підвищити свій рейтинг.

Сумарний рейтинг студента R_d визначається за формулою

$$R_d = 60 + 40 * (R_{\text{ст}} - R_{\text{доп}}) / (R_c - R_{\text{доп}}) + 20 + 1,6 * R_{\text{ст}} + R_s,$$

тут R_s – сумарна кількість заохочувальних балів.

Оцінка виставляється відповідно до значення R_d :

Сумарний рейтинг R_d	Оцінка
95-100	Відмінно
85-94	Дуже добре
75-84	Добре
65-74	Задовільно
60-64	Достатньо
$25 \leq R_d \leq 59$	Незараховано
$R_{\text{ст}} < 25$	Не допущений

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено проф, д.ф.-м.н., доц. Лось Валерій Миколайович.

Ухвалено кафедрою ПМА (протокол № 12 від 02.06.2021р.)

Погоджено Методичною комісією факультету¹ (протокол № 7 від 24.06.2021р.)

¹ Методичною радою університету – для загальноуніверситетських дисциплін.