
КИНЕТИКА РОСТА УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ПРИ АСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

Рішення задачі про розповсюдження тріщини втомі в тонкій пластині кінцевих розмірів при однобічному асиметричному циклічному навантаженні отримано на основі теоретичної моделі зростання тріщини втомі та критерію еквівалентних напружень, що зводить асиметричний цикл навантаження до симетричного.

The problem of fatigue crack growth in thin finite plate under uniaxial asymmetrical cyclic loading is solved on basis of fatigue crack theoretical model and equivalent stresses criterion reduced asymmetrical loading to symmetrical.

Введение.

Накопление усталостных повреждений и развитие усталостных трещин – наиболее частая причина отказов многих конструкций, находящихся в условиях циклического нагружения. Особенно актуальна эта проблема для авиастроения, судостроения, энергомашиностроения и других отраслей, где при эксплуатации детали и элементы конструкций испытывают переменные нагрузки с различной степенью асимметрии цикла нагружения. Степень асимметрии оказывает существенное влияние на скорость роста усталостных трещин, что подтверждено экспериментальными данными [1-3]. Теоретический и практический интерес представляют задачи разрушения при плоском напряженном состоянии. В частности для авиастроения, где широко используются тонколистовые конструкции, такие как, обшивка фюзеляжа, крылья самолета и т.п.

Исследования, связанные с прогнозированием долговечности конструкций в условиях многоциклового усталости, в основном, требуют проведения сложных экспериментов и получения на их основе эмпирических зависимостей [4]. Получение статистических данных о развитии усталостных трещин на основе стендовых испытаний конструкций связано с большими трудностями как технического, так и материального характера. Поэтому для оценки кинетики усталостного разрушения наиболее перспективными являются расчетные методы, построенные на теоретических моделях. Построение моделей, адекватно описывающих процессы, происходящие в материале конструкций в условиях циклического нагружения с различной асимметрией, является актуальной проблемой многих отраслей техники.

Настоящая работа является развитием теоретического подхода к решению задач кинетики усталостного разрушения, основанного на совместном рассмотрении концепций линейной механики разрушения и механики непрерывной поврежденности [5]. Получены аналитические зависимости, описывающие длительность инкубационного периода и стадии роста трещины при асимметричном нагружении. Учет асимметрии цикла получен при помощи введения в рассмотрение эквивалентных напряжений при симметричном цикле нагружения. Учет ограниченных размеров пластины осуществлен с помощью корректирующей функции. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с данными экспериментов, проведенных на листовых образцах с центральной трещиной, изготовленных из алюминиевых сплавов 2024-Т3 и 7075-Т6.

Постановка задачи.

Рассмотрим (Рис. 1.) тонкую пластину длиной L и шириной w из изотропного линейно-упругого материала с центральной трещиной начальной полудлины ℓ_0 . Берега трещины свободны от нагрузки, а

на краях пластины перпендикулярно направлению трещины приложено равномерно-распределенное одноосное асимметричное циклическое нагружение, изменяющееся за один цикл по закону

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a g(t) \leq \sigma_Y, \quad (1)$$

где σ_m – среднее статическое напряжение; σ_a – амплитуда циклического напряжения; σ_Y – предел текучести материала; $g(\cdot)$ – известная периодическая функция изменения нагрузки от физического времени t .

Задача заключается в установлении зависимости изменения длины трещины ℓ от числа циклов нагружения $n = ft$ ($f > 10\text{Гц}$ – частота нагружения) с учетом асимметрии цикла нагружения.

Основные гипотезы и исходные соотношения модели.

Усталостное разрушение рассматривается как процесс постепенного накопления повреждений под действием переменного нагружения. Уровень повреждений в произвольной точке x определяется скалярной функцией поврежденности $\omega(x, n)$.

Предполагается, что любое асимметричное циклическое нагружение можно свести к эквивалентному по числу циклов разрушения $n = n_R$ симметричному циклическому нагружению

$$\tilde{\sigma} = F(\sigma_a, \sigma_m, t) \Big|_{n=n_R} = \tilde{\sigma}_a \Big|_{n=n_R}, \quad (2)$$

$\tilde{\sigma}_a$ – амплитудное напряжение эквивалентного симметричного цикла

Согласно модели роста усталостной трещины в бесконечной пластине [5], построенной на основе концепций механики непрерывной поврежденности и механики разрушения при симметричном цикле, процесс накопления макроповреждений можно описать эволюционным уравнением вида

$$\frac{d\omega(x, n)}{dn} = D \left[\frac{\Delta\sigma_{yy}(x, n)}{1 - \omega(x, n)} \right]^q, \quad (3)$$

где $\Delta\sigma_{yy}$ – размах напряжений отрыва; D, q – экспериментально определяемые материальные константы, характеризующие сопротивление материала усталостному разрушению.

Процесс усталостного разрушения включает инкубационный период $0 \leq n \leq n_*$, в течение которого происходит накопление повреждений без роста трещины, и стадии роста трещины $n > n_*$. Проинтегрируем уравнение (2) с учетом, что в начальный момент времени $\omega(x, 0) = 0$, а в момент разрушения $\omega(x, n_R) = 1$. Получим интегральное уравнение движения фронта разрушения

$$\int_0^1 [1 - \omega(x, n)]^q d\omega = D \left[\int_0^{n_*} [\Delta\sigma_{yy}(x, n)]^q dn + \int_{n_*}^n [\Delta\sigma_{yy}(x, n)]^q dn \right] \quad (4)$$

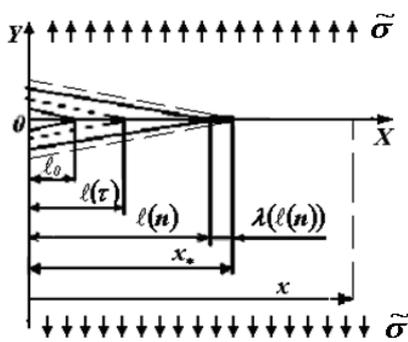


Рис. 2 Движение фронта разрушения.

Усталостную трещину рассматриваем как узкую щель (рис. 2). Начальную полудлину трещины обозначим ℓ_0 , а текущую – $\ell(n)$. Трещина движется вдоль оси Ox . На продолжении фронта трещины ($|x| \geq \ell, y=0$) образуется тонкая концевая зона длиной $\lambda(\ell)$, где сосредоточены все неупругие эффекты. Вне концевой зоны материал считается линейно-упругим. Принимая, что накопление усталостных повреждений происходит только в полуциклах растяжения, распределение напряжений у вершины трещины по фронту разрушения имеет вид

$$\Delta\sigma_{yy}(x, n) = \frac{\tilde{\sigma}_a}{\sqrt{2}} \left[\frac{\ell(n)}{x + \lambda(\ell(n)) - \ell(n)} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Учитывая, что на фронте разрушения $\omega(\ell(n) + \lambda(\ell(n)), n) = 1$ уравнение (4) принимает вид

$$1 - (1 + q)D \left(\frac{\tilde{\sigma}_a}{\sqrt{2}} \right)^q \int_0^{n_*} \left[\frac{\ell_0}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell_0} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau = (1 + q)D \left(\frac{\tilde{\sigma}_a}{\sqrt{2}} \right)^q \int_{n_*}^n \left[\frac{\ell(\tau)}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell(\tau)} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau \quad (6)$$

Решая уравнение (6) с использованием преобразования Лапласа, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = \left(1 + \frac{1}{q} \right) D \frac{1}{[2\lambda(\ell)]^{\frac{q}{2}-1}} \cdot (\tilde{\sigma}_a \sqrt{\ell})^q \\ n_* = \frac{1}{(1+q)D} \left[\frac{\sqrt{2}}{\tilde{\sigma}_a} \right]^q \left[\frac{\lambda(\ell_0)}{\ell_0} \right]^{\frac{q}{2}}, \end{cases} \quad (7)$$

где первое уравнение описывает стадию роста трещины, а второе длительность инкубационного периода.

Критерий эквивалентных напряжений.

Для определения амплитудного напряжения эквивалентного симметричного цикла нагружения $\tilde{\sigma}_a$, воспользуемся моделью предельного состояния при асимметричном нагружении [6]. Модель отражает форму взаимосвязи статических и циклических напряжений и построена на основе гипотезы единой предельной диаграммы, инвариантной числу циклов до разрушения. Единая диаграмма задается степенной трансцендентной функцией в виде

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_n} = \left[\cos \left(\frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right) \right]^\eta \quad (8)$$

удовлетворяющей граничным условиям $\sigma_a = \sigma_n$ при $\sigma_m = 0$ и $\sigma_m = \sigma_B$ при $\sigma_a = 0$. Здесь σ_B – предел прочности материала, σ_n – ограниченный предел усталости при симметричном цикле, η – коэффициент определяющий форму диаграммы предельных амплитуд напряжений и характеризующий чувствительность материала к асимметрии цикла нагружения. Раскладывая функцию $\cos(\cdot)$ в ряд и ограничиваясь двумя членами разложения, выражение (8) запишем следующим образом

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_n} = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right)^2 \right]^\eta \quad (9)$$

Принимая $\tilde{\sigma}_a = \sigma_n$, получим критерий для определения эквивалентных напряжений, который позволяет свести компоненты асимметричного цикла σ_a и σ_m к одному напряжению $\tilde{\sigma}_a$ при симметричном цикле.

$$\tilde{\sigma}_a = \sigma_a \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right)^2 \right]^{-\eta} \quad (10)$$

Пластическая зона при циклическом нагружении.

При плоском напряженном состоянии у вершины трещины, вследствие циклического нагружения формируются две тонкие пластические зоны [3]. Первая – в течение полупериода нагружения, ее длина зависит от максимального напряжения в цикле σ_{\max} и предела текучести σ_Y .

$$\lambda_c(\ell) = \left[\sec\left(\frac{\pi \tilde{\sigma}_a}{2 \sigma_Y}\right) - 1 \right] \ell \approx \frac{1}{8} \left(\frac{\pi \tilde{\sigma}_a}{\sigma_Y} \right)^2 \ell \quad (11)$$

Вторая – циклическая пластическая зона, образуется в полциклах разгрузки. Ее длина определяется изменением напряжения $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ и пределом текучести $2\sigma_Y$. В условиях симметричного цикла нагружения, принимая во внимание, что сжимающие напряжения не оказывают существенного влияния на скорость роста трещины [2], длину циклической пластической зоны найдем из выражения

$$\lambda(\ell) = \left[\sec\left(\frac{\pi \tilde{\sigma}_a}{4 \sigma_Y}\right) - 1 \right] \ell \approx \frac{1}{8} \left(\frac{\pi \tilde{\sigma}_a}{2 \sigma_Y} \right)^2 \ell \quad (12)$$

Как показывают исследования [3] именно эта область и определяет поведение усталостной трещины.

Учет ограниченности размеров пластины.

Определяющие соотношения модели (7), полученные для бесконечной пластины, можно применить для пластин ограниченных размеров, используя корректирующую функцию $f\left(\frac{L}{W}, \frac{\ell}{W}\right)$.

Аналитическое выражение которой можно получить аппроксимацией результатов численного решения краевой задачи о напряженном состоянии пластины ограниченных размеров с трещиной при помощи сплайнов или полиномов в виде

$$f\left(\frac{L}{W}, \frac{\ell}{W}\right) = A\left(\frac{\ell}{W}\right)^k + B\left(\frac{\ell}{W}\right)^{k-1} + \dots + C \quad (13)$$

где k – степень аппроксимации, A , B , C – коэффициенты, зависящие от соотношения между длиной L и шириной пластины W .

Из системы (7), с учетом (8) и (9), получаем уравнение для определения скорости роста усталостной трещины в пластинах ограниченных размеров

$$\frac{d\ell}{dn} = \left(1 + \frac{1}{q}\right) D \cdot \left[\frac{4\sigma_Y}{\pi}\right]^{q-2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\sigma_m}{2\sigma_B}\right)^2\right]^{-2\eta} \left(\tilde{\sigma}_a \cdot f\left(\frac{H}{W}, \frac{\ell}{W}\right)\right)^2 \cdot \ell \quad (14)$$

Интегрируя уравнение (11), с учетом системы (7), можно определить длительность двух стадий усталостного разрушения – инкубационного периода и стадию роста трещины.

$$\left\{ \begin{aligned} n &= n_* + \left(\frac{\pi}{4}\right)^{q-2} \frac{\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\sigma_m}{2\sigma_B}\right)^2\right]^{2\eta}}{\left(1 + \frac{1}{q}\right) D (\sigma_Y)^{q-2}} \int_{\ell_0}^{\ell(n)} \frac{1}{\left(\tilde{\sigma}_a \cdot f\left(\frac{H}{W}, \frac{\ell}{W}\right)\right)^2 \cdot \ell} d\ell \\ n_* &= \frac{1}{(1+q) D \left[\frac{4\sigma_Y}{\pi}\right]^q} \end{aligned} \right. \quad (15)$$

где интеграл вычисляем численно по методу Симпсона.

Заметим, что длительность инкубационного периода, полученная в выражении (7) – постоянная величина, зависящая от свойств материала. Однако, это характерно лишь для частного случая, при использовании упрощенного выражения для длины пластической зоны (12).

Определение коэффициентов уравнений и материальных констант. Для решения задачи по соотношениям (11) необходимо определить σ_Y , σ_B , а также коэффициенты D , q и λ .

Величины σ_Y, σ_B определяются по результатам стандартных испытаний гладких цилиндрических образцов на кратковременную прочность, непосредственно по диаграмме растяжения « $\sigma - \varepsilon$ ».

Для нахождения коэффициентов D, q необходимо провести базовый эксперимент по усталостному разрушению гладких цилиндрических образцов в условиях симметричного растяжения-сжатия. Значения коэффициентов определяются по результатам аппроксимации экспериментальных данных уравнением кривой усталости в виде

$$n_R = [C(\sigma_a)^q]^{-1} \quad (16)$$

и уравнения, полученного по модели

$$n_R = [(1+q)D(\sigma_a)^q]^{-1} \quad (17)$$

где n_R – число циклов до разрушения гладкого цилиндрического образца.

Коэффициент η – характеризует чувствительность материала к асимметрии цикла нагружения и определяется из экспериментов на усталость гладких цилиндрических образцов в условиях растяжения-сжатия при различных степенях асимметрии цикла путем минимизации функционала

$$\Phi\left(\psi\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right), \eta\right) = \sum_{i=1}^k \left[\psi\left(\frac{\sigma_{m_i}}{\sigma_B}\right) - \left(\frac{\sigma_{a_i}}{\sigma_n}\right) \right]^2 = \min, \quad i=1, k, \quad (18)$$

где

$$\psi\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right) \right]^\eta \quad (19)$$

σ_{a_i} и σ_{m_i} – амплитудное и среднее напряжения i того асимметричного цикла, σ_n – предел усталости симметричного цикла нагружения соответствующие одинаковой долговечности n

Полученные значения используемых в модели коэффициентов для алюминиевых сплавов 2024-Т3 и 7075-Т6 [7] сведены в табл. 1.

Таблица 1

Механические свойства и материальные константы алюминиевых сплавов 2024-Т3 и 7075-Т6

Сплав	σ_Y , МПа	σ_B , МПа	D , (МПа ^q ·цикл) ⁻¹	q	η
2024-Т3	353	489	$1,24 \cdot 10^{-25}$	8,28	2.37
7075-Т6	523	571	$3,41 \cdot 10^{-28}$	9,23	3.57

Кинетика роста трещины. Рассмотрим пластину (рис. 1.) шириной $W=0,305$ м, длиной $L=0,891$ м с центральной трещиной начальной полудлины $\ell_0 = 0,0025$ м. Пластина находится в условиях многоциклового (частота нагружения 13÷20Гц) асимметричного одноосного растяжения-сжатия. Определим кинетику роста усталостной трещины в пластинах, изготовленных из алюминиевых сплавов 2024-Т3 и 7075-Т6 при различных степенях асимметрии цикла

$$R = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a} \quad (20)$$

Аналитическое выражение функции $f\left(\frac{H}{W}, \frac{\ell}{W}\right)$ при $\frac{H}{W} \approx 3$ получаем аппроксимацией численного решения, полученного методом граничных коллокаций [9], полиномами 3й степени при $\frac{H}{W}=3$

$$f\left(\frac{H}{W}; \frac{\ell}{W}\right) = 0,9741 + 0,3781\left(\frac{2\ell}{W}\right) - 0,953\left(\frac{2\ell}{W}\right)^2 + 2,0833\left(\frac{2\ell}{W}\right)^3 \quad (21)$$

Результаты расчета при симметричном цикле нагружения $R = -1$ ($\sigma_m = 0$) для алюминиевого сплава 2024-Т3 (рис. 3.а.) и сплава 7075-Т3 (рис. 3.б.) показывают, что относительная погрешность по числу циклов при сравнении с результатами экспериментов не превышает $\delta \leq 1,2$.

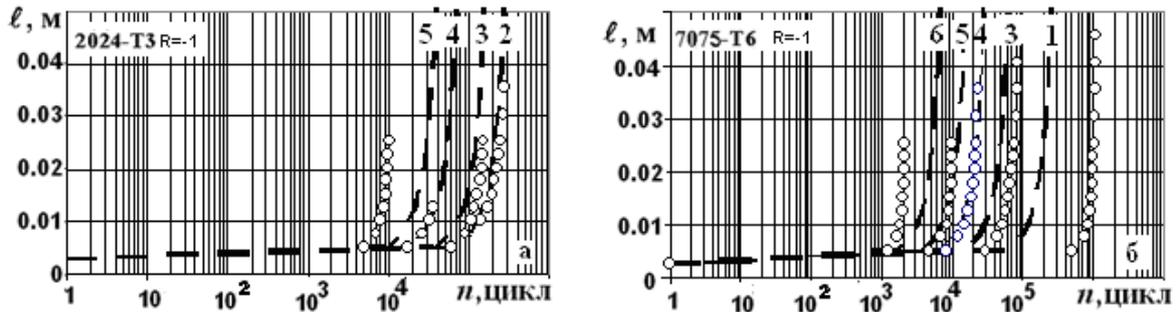


Рис. 3. Зависимость длины трещины от числа циклов нагружения в алюминиевых сплавах (а) – 2024-T3 ($\sigma_a = 52$ МПа (1), 69 МПа (2), 103 МПа (3), 138 МПа (4)); (б) – 7075-T6 ($\sigma_a = 34$ МПа (1), 69 МПа (2), 103 МПа (3), 138 МПа (4), 207 МПа (5))

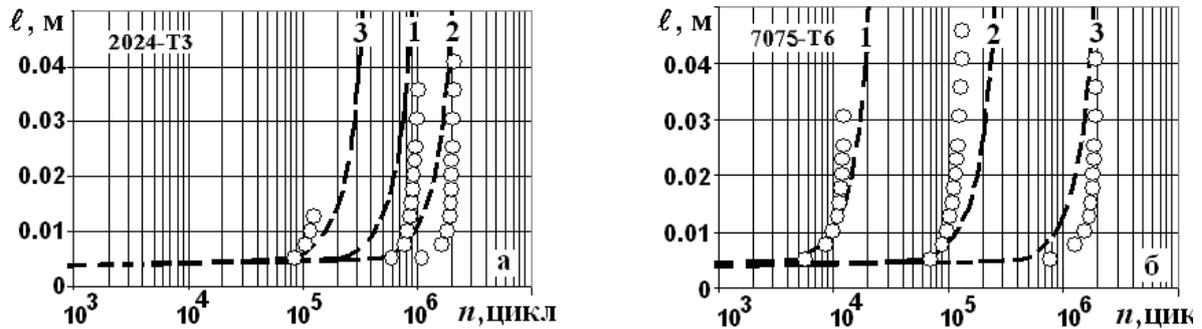


Рис. 4. Зависимость длины трещины от числа циклов нагружения в алюминиевых сплавах при различных видах асимметрии (а) – 2024-T3 ($R = 0$ (1), 0,5 (2), 0,7 (3)), (б) – 7075-T6 ($R = -0,8$ (1), 0 (2), 0,7(3))

Результаты расчета при различных степенях асимметрии цикла для алюминиевого сплава 2024-T3 ($R=0; 0,5; 0,7$) приведены на (рис. 4.а), для сплава 7075-T6 ($R=-0,8; 0; 0,7$) на (рис. 4.б). Относительная погрешность δ результатов расчета и результатов экспериментов находится в диапазоне 1,1÷3,5 раза по долговечности, что вполне приемлемо при усталостном разрушении [9].

Выводы.

Результаты расчета скорости роста усталостной трещины в тонкой пластине ограниченных размеров подтверждают приемлемость предложенного подхода для оценки кинетики усталостного разрушения при асимметричном циклическом нагружении.

Список литературы

1. Hudson C.M. Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 and 2024-T3 aluminum-alloy specimens // NASA TN D-5390, 1969- P.34.
2. Hudson C.M., Scardina J.T. Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 aluminum-alloy sheet // NASA TMX- 60125, 1967- P.24.
3. Newman J.C., Jr., Wu X.R., Venneri S.L., Li C.G. Small-crack effects in high-strength aluminum alloys // NASA RP 1309, 1994, P.118.
4. Коцаньда С. Усталостное разрушение металлов.- М.: Металлургия 1976.- 456 с.
5. Голуб В.П., Плащинская А.В. Феноменологическая модель роста усталостной трещины в идеально-пластических бесконечных пластинках при одноосном симметричном знакопеременном нагружении.// Прикл. механика.- 2005.-Том 41(51), №12 с. 116-127.
6. Голуб В.П., Крижановский В.И., Погребняк А.Д., Кочеткова Е.С. Усталостная прочность металлических и композитных материалов при асимметричном растяжении-сжатии // Прикл. Механика.-2006.-Том 42(52), №1 с.48-58.
7. Grover,H.J., Hyler, W.S., Kuhn,P., Landers, C.B. and Howell, F.M. Axial-Load Fatigue Properties of 24S-T and 75S-T Aluminum Alloy as Determined in Several Laboratories, NACA TN-2928, 1953, P.64.
8. Tada H. A note on the finite width correction to the stress intensity factor// Eng.Fract.Mech.–1971-3, N3.P345-347
9. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М, Машиностроение,1977 232с