

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧАСТИНА 1

Аналітична геометрія та диференціальне числення

Курс лекцій

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Комп'ютеризовані технології поліграфічних систем»
спеціальності *133 Галузеве машинобудування*

Укладачі: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензенти	<i>Ю. В. Ловейкін, канд. фіз.-мат. наук, доцент, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Н. П. Селезньова, канд. фіз.-мат. наук, доцент, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»</i>
Відповідальний редактор	<i>В. М. Горбачук, доктор фіз.-мат. наук, професор, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»</i>

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 01.12.2022 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 6 від 12.10.2022 р.)*

Розглянуто основні поняття та теореми лінійної, векторної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення функції однієї змінної. Теоретичний матеріал відповідає силабусу кредитного модуля «Аналітична геометрія та диференціальне числення» спеціальності 133 Галузеве машинобудування. Наведені деякі приклади розв'язання типових задач.

Для студентів технічних спеціальностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» імені Ігоря Сікорського».

Реєстр. № НП 22/23-213. Обсяг 10,0 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056

<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

ЗМІСТ

Передмова	8
Лекція 1. Визначники 2 та 3-го порядку. Формули Крамера	9
1.1. Визначники, їх властивості	9
1.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера	11
Лекція 2. Матриці, дії над матрицями	13
2.1. Матриці, види матриць	13
2.2. Операції над матрицями	14
2.3. Обернена матриця	16
Лекція 3. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь	18
3.1. Матричний метод	18
3.2. Дослідження систем на сумісність. Метод Гаусса	18
3.2.1. Поняття рангу матриці, його обчислення	18
3.2.2. Критерій сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь, теорема Кронекера-Капеллі	19
3.2.3. Метод Гаусса	20
Лекція 4. Вектори, лінійні операції над векторами	23
4.1. Вектори в просторі	23
4.2. Лінійні операції з векторами	23
4.3. Вектори в прямокутній системі координат	26
Лекція 5. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів	29
5.1. Скалярний добуток векторів та його властивості	29
5.2. Векторний добуток векторів	30
5.3. Мішаний добуток векторів	32
Лекція 6. Площина в просторі	35
6.1. Рівняння площини в просторі	35
6.1.1. Загальне рівняння площини	35
6.1.2. Рівняння площини в відрізках на осях	36
6.1.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки	37
6.1.4. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини	37

6.2. Кут між двома площинами	39
Лекція 7. Пряма в просторі, кут між прямими	41
7.1. Пряма в просторі	41
7.1.1. Види рівнянь прямої в просторі	41
7.1.2. Взаємне розміщення двох прямих в просторі	42
7.2. Розміщення прямої відносно площини	43
Лекція 8. Пряма на площині	46
8.1. Пряма на площині	46
8.2. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Кут між прямими	49
Лекція 9. Криві другого порядку на площині. Коло, еліпс	53
9.1. Коло, його рівняння	53
9.2. Еліпс, його канонічне рівняння	53
Лекція 10. Гіпербола, парабола, їх канонічні рівняння	56
10.1. Гіпербола, її канонічне рівняння	56
10.2. Парабола, її канонічні рівняння	58
Лекція 11. Поверхні другого порядку та їх канонічні рівняння	61
11.1. Поняття поверхні другого порядку	61
11.2. Еліпсоїди	61
11.3. Гіперболоїди	63
11.4. Параболоїди	65
11.5. Циліндричні поверхні	67
11.6. Поверхня обертання	70
11.7. Конічна поверхня	71
Лекція 12. Вступ до математичного аналізу. Множини чисел. Числові послідовності	74
12.1. Числові множини	74
12.2. Поняття числової послідовності, її границя	75
12.2.1. Поняття послідовності	75
12.2.2. Границя послідовності	76
12.3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності	78

Лекція 13. Функція. Границя функції в точці	80
13.1. Функція. Основні поняття і означення. Основні елементарні функції	80
13.2. Границя функції в точці	86
13.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Важливі границі	87
Лекція 14. Важливі границі. Неперервність функції	90
14.1. Границя функції при $x \rightarrow \infty$.	90
14.2. Важливі границі	91
14.2.1. Перша важлива границя	91
14.2.2. Друга важлива границя	91
14.3. Порівняння нескінченно малих функцій	93
14.4. Неперервність функції у точці. Точки розриву	96
14.5. Основні теореми про неперервні функції	99
Лекція 15. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Похідна функції однієї змінної	101
15.1. Поняття похідної. Геометричний зміст похідної	101
15.2. Неперервність та диференційованість функції	104
15.3. Правила диференціювання. Похідні від основних елементарних функцій	104
15.4. Диференціювання складеної функції	107
15.5. Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій	108
15.6. Таблиця похідних	110
15.7. Диференціювання функцій, заданих у параметричній та неявній формах	111
Лекція 16. Похідна та диференціал функції	114
16.1. Похідні вищих порядків	114
16.2. Диференціал функції та його властивості	116
16.3. Диференціали вищих порядків	118
Лекція 17. Основні теореми диференціального числення	121
17.1. Диференціальні теореми про середні значення	121

17.2. Правило Лопітала	123
17.3. Формула Тейлора	125
Лекція 18. Застосування диференціального числення до дослідження функції	128
18.1. Застосування похідної до дослідження функцій на монотонність	128
18.2. Знаходження екстремумів функцій	129
18.3. Найбільше та найменше значення функції на відрізьку	133
Лекція 19. Застосування диференціального числення до дослідження функції	134
19.1. Опуклість графіка функції. Точки перегину	134
19.2. Знаходження асимптот графіка функції	135
19.3. Загальна схема дослідження функції і побудова її графіку	136
Лекція 20. Функція багатьох змінних	138
20.1. Означення функції багатьох змінних, область визначення	138
20.2. Границя, неперервність ФБЗ	139
20.3. Частинні похідні	141
20.4. Диференціали функцій багатьох змінних	143
Лекція 21. Частинні похідні та диференціал функції	146
21.1. Похідні та диференціали вищих порядків	146
21.2. Диференціювання складеної функції	148
Лекція 22. Диференціювання неявних функцій	150
22.1. Неявні функції, їх диференціювання	150
22.2. Дотична площина та нормаль до поверхні	151
22.3. Похідна за напрямом, градієнт	152
Лекція 23. Дослідження на екстремум функції двох змінних	157
23.1. Поняття екстремуму функції двох змінних. Необхідна та достатня умови екстремуму	157
23.2. Найбільше і найменше значення функції 2-х змінних в замкненій області	160

Лекція 24. Первісна функція, невизначений інтеграл, властивості інтеграла. Основні методи інтегрування	162
24.1. Первісна функції, її властивості	162
24.2. Означення невизначеного інтеграла, його основні властивості	163
24.3. Таблиця основних інтегралів	164
24.4. Основні методи інтегрування: а) метод безпосереднього інтегрування та внесення під знак диференціала; б) метод заміни змінної	166
Лекція 25. Інтегрування частинами. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен. Прості раціональні дроби	168
25.1. Формула інтегрування частинами, основні випадки її використання	168
25.2. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен	169
25.3. Інтегрування простих раціональних дробів	171
Лекція 26. Деякі відомості з теорії раціональних дробів	174
26.1. Многочлени з дійсними коефіцієнтами	174
26.2. Раціональні дроби. Розклад правильних раціональних дробів на прості	175
Лекція 27. Інтегрування деяких ірраціональних та тригонометричних функцій	180
27.1. Інтеграли типу $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx$	180
27.2. Інтеграли від диференціального бінома. Підстановки Чебишова	182
27.3. Універсальна тригонометрична підстановка	182
27.4. Деякі інші тригонометричні підстановки	183
Література	185
Додаток	187

Передмова

Курс вищої математики є базовим для математичної та інженерної освіти спеціаліста, це основа багатьох загальноосвітніх та інженерних дисциплін. Даний посібник складено за програмою курсу вищої математики для студентів 1-го семестру спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» освітньо-професійної програми «Комп'ютеризовані технології поліграфічних систем» НН Видавничо-поліграфічного інституту. Посібник може бути використаний для студентів очної та заочної форми навчання НН ВПІ, також для інших інженерних спеціальностей.

Навчальне видання містить всі основні поняття, теореми, формули за темами «Елементи лінійної алгебри» [4,7], «Елементи векторної алгебри» [4,7], «Аналітична геометрія» [4,7,9], «Вступ до математичного аналізу» [2,7,9], «Диференціальне числення» [4,7], «Функції багатьох змінних» [3,4,10], «Невизначений інтеграл» [1,10,11]. Основною метою цього курсу лекцій є надання необхідного теоретичного матеріалу з зазначених тем. До кожної теми подано контрольні питання для перевірки знань студента та приклади застосування теоретичного матеріалу.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 1. Визначники 2 та 3-го порядку. Формули Крамера

1.1. Визначники, їх властивості.

1.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера.

1.1. Визначники, їх властивості

Означення. *Визначником другого порядку* називається число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.1)$$

Означення. *Визначником третього порядку* називається число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.2)$$

Для обчислення визначників третього порядку існує правило трикутника, яке схематично можна зобразити так:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

Означення. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який дістають з визначника викреслюванням i -го рядка та j -го стовпця.

Означення. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Визначник вищого порядку можна обчислити за допомогою визначників нижчого порядку розкладом за елементами одного із рядків або стовпців. Зокрема, для визначників третього порядку маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Основні властивості визначників

1. Значення визначника не змінюється при **транспонуванні** визначника, тобто при заміні рядків відповідними стовпцями, а стовпці – рядками.
2. Перестановка двох рядків (стовпців) визначника змінює його знак на протилежний.
3. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.
6. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Якщо кожний елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких один у згаданому рядку (стовпцю) має перші з заданих доданків, а інший – другі; елементи, що знаходяться на решті місць, у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Записується ця властивість для визначника третього порядку таким чином:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться.

1.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера

Означення. Системою m лінійних рівнянь із n змінними $x_1, x_2, \dots, x_n$

називається система, яка має наступний вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де a_{ij} – коефіцієнти при змінних; b_i – вільні члени, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Означення. Упорядкована сукупність чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, називається **розв'язком** системи, якщо при заміні x_1 на a_1 , x_2 на a_2 , ..., x_n на a_n у кожному рівнянні системи дістанемо m правильних числових рівностей.

Означення. Система, що має розв'язок, називається **сумісною**.

Означення. Система, яка не має жодного розв'язку, називається **несумісною**.

Означення. Система з єдиним розв'язком називається **визначеною**, яка має безліч розв'язків – **невизначеною**.

Система двох лінійних рівнянь з двома змінними має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.3)$$

а систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.4)$$

Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь зводиться до обчислення визначників.

Теорема. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.3) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли її головний визначник $\Delta \neq 0$, причому невідомі можна знайти за **формулами Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \text{ за умови, що } \Delta \neq 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \text{називається головним визначником системи (1.3), а}$$

$\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ – допоміжні визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Зауваження. Формули Крамера мають зміст і для систем більшого розміру. Так, для системи (1.4) мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 - \text{головний визначник системи (1.4), а}$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} -$$

також є допоміжними визначниками, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Наслідок формул Крамера. Системи (1.3) і (1.4) мають:

а) єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$;

б) безліч розв'язків, коли $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$ ($\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$);

в) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ відмінний від нуля.

Контрольні питання

1. Дати означення визначників 2, 3-го порядку.
2. Сформулювати основні властивості визначників.
3. Записати системи лінійних алгебраїчних рівнянь 2, 3-го порядку.
4. Записати формули Крамера для систем 2, 3-го порядку.

Лекція 2. Матриці, дії над матрицями

2.1. Матриці, види матриць.

2.2. Операції над матрицями.

2.3. Обернена матриця.

2.1. Матриці, види матриць

Означення. *Матрицею* розміру $m \times n$ називається сукупність елементів a_{ij} , розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|. \quad (2.1)$$

Перший індекс кожного елемента вказує на номер рядка, в якому цей елемент розміщений, другий – на номер стовпця. Матриці позначають прописними буквами латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$. Вживають також більш компактний запис $a_{ij(m \times n)}$.

Матриця називається **числовою**, якщо її елементи a_{ij} – числа; **функціональною**, якщо елементи – функції. Ми будемо розглядати, в основному, числові матриці.

Матриці A і B мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців. Матриці A і B вважаються рівними між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їхні елементи, що знаходяться на однакових місцях, рівні між собою.

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців, тобто $m = n$, називається **квадратною** матрицею. Квадратна матриця порядку n має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці, а елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – побічну.

Деякі квадратні матриці мають назви. Зокрема, до них відносяться нульова, діагональна та одинична матриці.

Нульовою називається матриця, всі елементи якої нулі.

Якщо всі елементи матриці, окрім розташованих на головній діагоналі, дорівнюють нулю, то в цьому випадку матриця називається **діагональною**.

Якщо всі елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то вона називається **одиничною** матрицею. Одинична матриця має вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, яку одержують із матриці A заміною її рядків відповідними стовпцями, називають **транспонованою** і позначають A^T . Транспонована матриця має вигляд:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2.2. Операції над матрицями

До лінійних операцій відносяться операції додавання, віднімання матриць та множення матриці на число.

Означення. **Сумою (різницею)** матриць A і B називається матриця C , елементи якої

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}),$$

де a_{ij} та b_{ij} – відповідно елементи матриць A і B . При цьому записують

$$C = A + B.$$

Додавати або віднімати можна тільки матриці однакових розмірів.

Означення. *Добутком* матриці A на число α називається матриця C такого ж розміру, елементи якої

$$c_{ij} = \alpha a_{ij},$$

де a_{ij} – елементи матриці A , тобто при множенні матриці на число (числа на матрицю) треба всі елементи матриці помножити на це число, тобто

$$C = \alpha A.$$

Для довільних матриць A, B, C однакових розмірів і довільних чисел α та β справджуються рівності:

$$A + B = B + A;$$

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

Означення. *Добутком* матриці $A_{m \times n}$ на матрицю $B_{n \times p}$ називається матриця $C_{m \times p} = AB$, елементи якої

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

де a_{ik}, b_{kj} – елементи матриць A і B . З існування добутку AB не означає, що існує добуток BA .

Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються **комутативними**.

Зауваження. При множенні матриць треба пам'ятати два правила:

1. Перемножувати можна тільки ті матриці, в яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої: $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$.
2. Множення відбувається за правилом: скалярний добуток i -го рядка матриці A на j -тий стовпець матриці B .

Для довільних матриць A, B, C відповідних розмірів і довільних чисел α та β справджуються рівності:

$$AB \neq BA,$$

$$(AB)C = A(BC),$$

$$(A+B)C = AC + BC,$$

$$A(B+C) = AB + AC.$$

2.3. Обернена матриця, її побудова

Означення. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A , якщо добуток цих матриць дорівнює одиничній матриці, тобто $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Обернена матриця існує для всякої квадратної матриці A , яка є *невиродженою*, тобто, коли визначник матриці $\det A \neq 0$.

Теорема (Необхідні і достатні умови існування оберненої матриці). Для матриці A існує обернена матриця A^{-1} тоді і тільки тоді, коли A – невивроджена матриця, її можна знайти за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення до відповідних елементів матриці A .

Алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Обчислити визначник матриці A . Якщо $\det A \neq 0$, то матриця A має обернену, в іншому випадку оберненої матриці не існує.
2. Обчислити алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} матриці A .
3. Кожен елемент матриці замінити його алгебраїчним доповненням і транспонувати матрицю.

Контрольні питання

1. Дати означення матриці, розміру матриці.

2. Які існують матриці?
3. Як виконуються операції додавання, віднімання, множення матриці на число?
4. Як перемножуються матриці? Запишіть властивості множення матриць.
5. Дати означення оберненої матриці. Як вона обчислюється?

Лекція 3. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

3.1. Матричний метод.

3.2. Дослідження систем на сумісність. Метод Гаусса.

3.2.1. Поняття рангу матриці, його обчислення.

3.2.2. Критерій сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь, теорема Кронекера-Капеллі.

3.2.3. Метод Гаусса.

3.1. Матричний метод

Нехай дано систему:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Розглянемо три матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Перша матриця називається основною матрицею системи, друга – матрицею змінних, третя – матрицею вільних членів. Тоді систему можна записати у матричному вигляді: $A \cdot X = B$. Якщо матриця системи рівнянь невинроджена ($\Delta \neq 0$), то розв'язок системи знаходимо у вигляді $X = A^{-1}B$ або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

3.2. Дослідження систем на сумісність. Метод Гаусса

3.2.1. Поняття рангу матриці, його обчислення

Розглянемо матрицю A (2.1). Зафіксуємо два рядки (наприклад, 1-й і 2-й) і два стовпці матриці A (наприклад, 1-й і останній). На перетині маємо чотири елементи, які запишемо у визначник 2-го порядку:

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник будемо називати **мінором 2-го порядку** матриці A .

Аналогічно, зафіксувавши три рядки і три стовпці, матимемо визначник 3-го порядку – **мінор 3-го порядку**, і т.д.

Означення. Рангом матриці A називають порядок найбільшого ненульового мінора цієї матриці.

Позначають ранг матриці $\text{Rang}(A)$ або $r(A)$.

Якщо матриця містить хоча б один ненульовий елемент, то її $r(A) \geq 1$.

На практиці для матриць більшого розміру зручно обчислювати ранг за допомогою елементарних перетворень над рядками (стовпцями), які її рангу не змінюють.

Елементарні перетворення

1. Перестановка рядків (стовпців) місцями.
2. Множення рядка (стовпця) на деяке ненульове число.
3. Викреслювання одного із пропорційних рядків (стовпців).
4. Викреслювання нульового рядка (стовпця).
5. Додавання до одного із рядків (стовпців) іншого рядка (стовпця), помноженого на деяке число.

3.2.2. Критерій сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь, теорема Кронекера-Капеллі

Розглянемо систему m лінійних рівнянь із невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (3.2)$$

У відповідність до системи обчислюють ранг основної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

та розширеної матриці $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$

Має місце теорема.

Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (3.2) сумісна тоді і тільки тоді, коли $r(A) = r(B)$.

Наслідок 1. Якщо $r(A) = r(B) = n$, тобто кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок; якщо $r(A) = r(B) = k < n$ – система невизначена (має безліч розв'язків), причому $(n - k)$ змінних називають **вільними**, через них виражають **базові** k змінних.

Наслідок 2. Якщо $r(A) < r(B)$, тоді система несумісна.

3.2.3. Метод Гаусса

Нехай нам дана система лінійних рівнянь (3.2). Вважаємо, що в заданій системі коефіцієнт $a_{11} \neq 0$.

Утворимо множник $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$. Помножимо на дане число перше рівняння і додамо до другого. Побудуємо число $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ і виконаємо перетворення для третього рівняння і т.д. Врешті, перетворимо останнє рівняння із множником $\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$. В результаті цих дій утворилася нова система

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \dots\dots\dots \\ a^{(k-1)}_{kn}x_n = b^{(k-1)}_k, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

в останньому рівнянні якої залишиться тільки одне невідоме. Така система називається **системою трикутного виду**. Вона буде мати єдиний розв'язок і буде визначеною.

2) $k < n$, система називається системою **трапецієвидною**, кількість рівнянь k буде меншою за кількість невідомих n . В цьому випадку система має безліч розв'язків – **система невизначена**. Отже:

- Метод Гаусса дозволяє знайти всі розв'язки системи (3.2), якщо вони існують або довести, що система несумісна.
- Якщо в системі з'являться рівняння виду $0 \cdot X = b$, то це означає, що задана система несумісна.
- Якщо система зводиться до трикутного виду, вона сумісна і визначена.
- Якщо система зводиться до виду трапеції, то така система буде сумісна, але невизначена.
- Метод Гаусса дає можливість дослідити питання про існування ненульових розв'язків систем лінійних однорідних рівнянь.

Контрольні питання

1. Дати означення матриці. Які є види матриць?
2. Яким чином додаються, віднімаються матриці?
3. Сформулювати алгоритм множення матриць.
4. Що таке ранг матриці, як його обчислити?
5. Сформулювати теорему Кронекера-Капеллі.
6. Що таке базисні, вільні змінні?

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 4. Вектори, лінійні операції над векторами

4.1. Вектори в просторі.

4.2. Лінійні операції з векторами.

4.3. Вектори в прямокутній системі координат.

4.1. Вектори в просторі

Величина, яка повністю характеризується своїм числовим значенням в обраній системі одиниць, називається *скалярною* або *скаляром*. Такими, наприклад, є маса тіла, об'єм тіла, температура середовища й т.п. Скаляр визначається числом, додатним чи від'ємним, або рівним нулю. Величина, яка крім числового значення характеризується напрямком, називається *векторною* або *вектором*. До їх числа відноситься сила, переміщення, швидкість і т.д.

Під *модулем (довжиною)* вектора $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$ розуміють числове значення його, без зазначення напрямку. ($|\overrightarrow{AB}|$ позначає модуль вектора $\overrightarrow{AB}$).

Вектор $\vec{0}$, модуль якого дорівнює нулю, називається *нульовим* або *нуль-вектором* (напрямок нульового вектора довільний).

Означення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Вектори будемо називати *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Нульовий вектор напрямлений однакою з будь-яким вектором; довжина його дорівнює нулю, тобто $|\vec{0}| = 0$.

Означення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, однакою напрямлені та їх модулі рівні.

4.2. Лінійні операції з векторами

Додавання векторів

Щоб побудувати суму даних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки та побудувати на них паралелограм. Сумою векторів буде

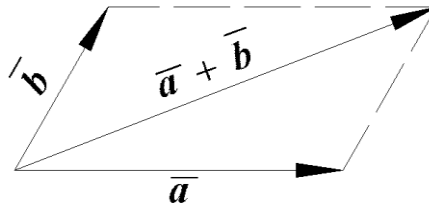


Рис. 4.1. Правило парпаралелограма

діагональ, що виходить з початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 4.1).

Цей спосіб побудови називається *правилом паралелограма*.

Суму двох векторів можна побудувати також за *правилом трикутника*.

Відкласти вектор $\vec{b}$ від кінця вектора $\vec{a}$. Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ буде

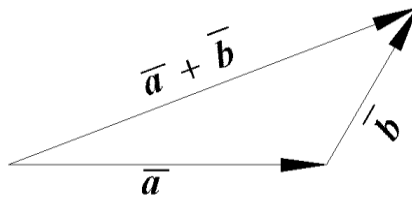


Рис. 4.2. Правило трикутника

вектор, що з'єднує початок $\vec{a}$ з кінцем $\vec{b}$ (рис. 4.2).

Щоб побудувати суму n даних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, треба від довільної точки відкласти $\vec{a}_1$, потім від його кінця відкласти $\vec{a}_2$ і т.д., нарешті від кінця $\vec{a}_{n-1}$ відкласти $\vec{a}_n$. Сумою векторів буде вектор, напрямлений від початку $\vec{a}_1$ до

кінця $\vec{a}_n$ (рис. 4.3).

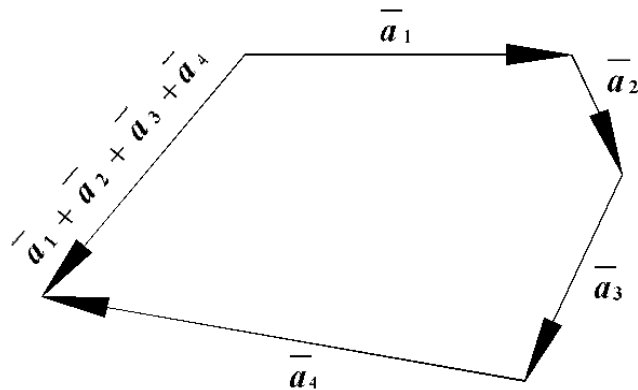


Рис. 4.3. Правило багатокутника

Віднімання векторів

Щоб побудувати різницю векторів $\vec{a} - \vec{b}$, треба відкласти ці вектори від

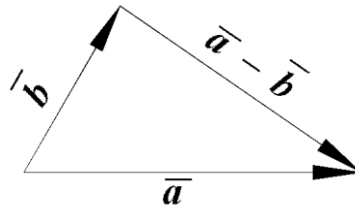


Рис. 4.4. Віднімання векторів

довільної точки, з'єднати їх кінці та вибрати на цьому відрізку напрямок від кінця вектора $\vec{b}$ до кінця $\vec{a}$. (рис. 4.4).

Щоб відняти вектори, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Множення вектора на число

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ на число k називається вектор, який має напрям вектора $\vec{a}$, якщо $k > 0$; має протилежний напрям, якщо $k < 0$ ($k = 0$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$); модуль вектора $k\vec{a}$ визначається формулою $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$.

Вектори $\vec{a}$ та $k\vec{a}$ є колінеарні.

Вектор $-\vec{a}$ будемо називати протилежним до вектора $\vec{a}$. Ці вектори колінеарні, протилежно напрямлені, мають рівні модулі.

Описані три операції називаються лінійними операціями з векторами.

Проекція вектора на вісь

Числовою проекцією вектора на вісь називається довжина напрямленого

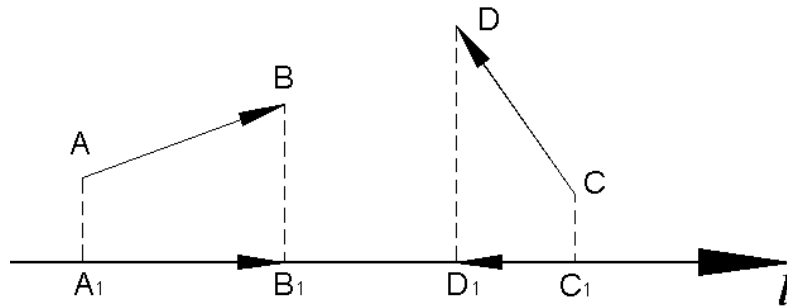


Рис. 4.5. Проекція вектора на вісь

відрезка, початок якого є проекція початку вектора і кінець – проекція його кінця, яка береться із знаком плюс, якщо напрямки відрезка і осі збігаються, і зі знаком мінус, якщо їх напрямки протилежні (рис.4.5):

$$np_i \overline{AB} = |\overline{A_1B_1}|, \quad np_l \overline{CD} = -|\overline{C_1D_1}|.$$

Властивості проекції

$$a) \quad np_i \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi;$$

$$б) \quad np_i (\vec{a} + \vec{b}) = np_i \vec{a} + np_i \vec{b};$$

$$в) \quad np_i (k \cdot \vec{a}) = k \cdot np_i \vec{a}.$$

4.3. Вектори в прямокутній системі координат

Нехай у просторі задано три попарно перпендикулярні осі Ox, Oy, Oz . Координатами вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ називаються проекції вектора на координатні осі: $a_x = np_{ox} \vec{a}$, $a_y = np_{oy} \vec{a}$, $a_z = np_{oz} \vec{a}$.

Якщо $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, що лежать на осях координат і співнаправлені з ними, то $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

Якщо точки мають координати: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Правила дій над векторами, заданими своїми координатами

Якщо $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$;
 $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$; $k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z)$.

Колінеарність векторів

Два вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарні тоді і лише тоді, коли їх координати пропорційні:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

(Колінеарні вектори можна записати $\vec{a} = \alpha \vec{b}$. Переходячи до координатної форми, маємо дане співвідношення.)

Довжина вектора. Напрямні косинуси вектора

Позначимо α , β , γ кути між додатними напрямками осей координат Ox, Oy, Oz та вектором $\vec{a}$. Ці кути називаються **напрямними кутами**. Проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі подаються так (рис. 4.6):

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha, a_y = |\vec{a}| \cos \beta, a_z = |\vec{a}| \cos \gamma,$$

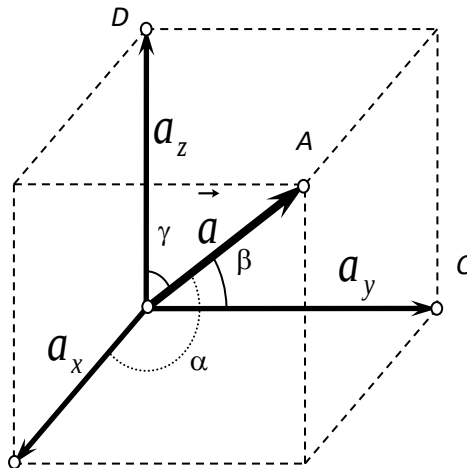


Рис. 4.6. Напрямні косинуси вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

де α, β, γ – кути між $\vec{a}$ та осями Ox, Oy, Oz .

Для напрямних конусів справедливе співвідношення

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

яке називають *основною тригонометричною тотожністю в просторі*.

Поділ відрізка в даному відношенні

Нехай точки A, B мають координати $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$. Якщо відрізок AB поділимо точкою M у відношенні $AM : MB = \lambda$, то координати точки M знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо $\lambda = 1$, то отримуємо формули для знаходження координат середини відрізка.

Контрольні питання

1. Дати означення вектора, його модуля.
2. Як додаються, віднімаються вектори?
3. Як записати вектор в координатній формі?
4. Що таке напрямні косинуси вектора, як їх обчислити?
5. Навести приклад обчислення координат вектора, його довжини та напрямних косинусів.

Лекція 5. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

5.1. Скалярний добуток векторів та його властивості.

5.2. Векторний добуток векторів.

5.3. Мішаний добуток векторів.

5.1. Скалярний добуток векторів та його властивості

Означення. *Скалярним добутком векторів* називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}). \quad (5.1)$$

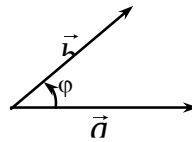


Рис. 5.1. Вектори

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ гострий, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$; якщо тупий, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$; якщо прямий, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Коли один із векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ є нульовим, то його можна вважати ортогональним до будь-якого іншого вектора.

Механічний зміст скалярного добутку. Якщо точка здійснює переміщення $\vec{s}$ під дією сили $\vec{F}$, то робота цієї сили дорівнює

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \varphi.$$

Властивості скалярного добутку, що випливають із його означення.

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$2) \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b});$$

$$3) \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2;$$

$$4) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

$$5) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Рівність 4) є наслідком формули б) лекції 4:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= |\vec{a}| np_{\vec{a}} (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| (np_{\vec{a}} \vec{b} + np_{\vec{a}} \vec{c}) = \\ &= |\vec{a}| np_{\vec{a}} \vec{b} + |\vec{a}| np_{\vec{a}} \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

Отже, у разі скалярного множення суми векторів на вектор можна розкривати дужки. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ подано через їх проекції на координатні осі

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Записавши таблицю скалярного множення для одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – ортів декартової системи координат: $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0; \vec{j} \cdot \vec{i} = 0, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0; \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \vec{k} \cdot \vec{j} = 0, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, скалярний добуток обчислюють за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (5.2)$$

Скалярний квадрат вектора дорівнює:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0) = |\vec{a}|^2.$$

Геометричний зміст скалярного добутку – обчислення проекції вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$:

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Кут між векторами обчислюють за формулою:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (5.3)$$

Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має вигляд:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

5.2. Векторний добуток векторів

Означення. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, який задовольняє умові:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b});$
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b};$
- 3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів (рис. 5.2), тобто третій

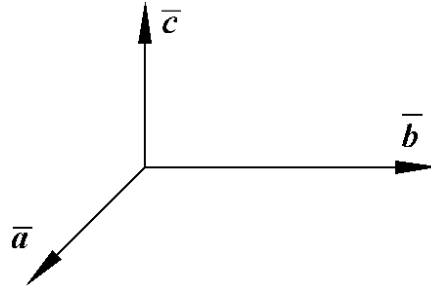


Рис. 5.2. Права трійка векторів

вектор має такий напрям, що при спостереженні з його кінця найближчий поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ виконується проти годинникової стрілки. Векторний добуток позначається символом $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$.

Механічний зміст векторного добутку

Якщо в точці P прикладена сила $\vec{F}$, то момент сили відносно точки O дорівнює

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \text{ де } \vec{r} = \overrightarrow{OP}.$$

Основні властивості векторного добутку:

- 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a});$
- 2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi;$
- 3) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b});$
- 4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$

Таблиця векторного множення для одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – ортів декартової системи координат: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$

Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$

Виконавши відповідні перетворення, дістанемо:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\
&= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} + a_y b_z \vec{i} - a_y b_x \vec{k} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} = \\
&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.
\end{aligned}$$

Отже, координати вектора векторного добутку векторів, які задані координатами, обчислюються за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (5.4)$$

Умова колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має вигляд через векторний добуток:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0},$$

що є рівносильним умові $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

Геометричний зміст векторного добутку – модуль вектора векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

5.3. Мішаний добуток векторів

Означення. *Мішаним добутком трьох векторів* називається векторно-скалярний добуток $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Частіше мішаний добуток позначається $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, то мішаний добуток знаходять за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (5.5)$$

Геометричний зміст мішаного добутку – обчислення об'єму паралелепіпеда, який побудований на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, як на сторонах, рис. 5.3:

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

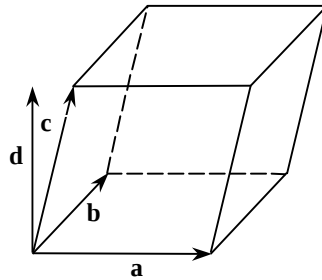


Рис. 5.3. Паралелепіпед

Для об'єму піраміди маємо наступну формулу:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Мішаний добуток змінює знак на протилежний при переставлянні двох векторів (що відповідає властивості визначника), і не змінює при циклічній перестановці:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то трійку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будемо називати *правою*; якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, трійка векторів – *ліва*.

Умова компланарності трьох векторів має вигляд: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, яка є рівносильною умові

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Контрольні питання

1. Дати означення скалярного добутку векторів, навести його геометричний зміст.
2. Записати формулу скалярного добутку через координати.
3. Визначити векторний добуток векторів, його механічний зміст.
4. Записати вираз векторного добутку через координати.
5. Що таке мішаний добуток векторів, його геометричний зміст?
6. Як мішаний добуток можна виразити через координати?
7. Навести приклади двох векторів, заданих координатами. Обчислити скалярний, векторний добуток, кут між векторами, напрямні косинуси векторів.

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Лекція 6. Площина в просторі

6.1. Рівняння площини в просторі.

6.1.1. Загальне рівняння площини.

6.1.2. Рівняння площини в відрізках на осях.

6.1.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.

6.1.4. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини.

6.2. Кут між двома площинами.

6.1. Рівняння площини в просторі

6.1.1. Загальне рівняння площини

Теорема. *Кожна площина може бути виражена лінійним рівнянням відносно декартової системи координат у просторі і навпаки, кожне лінійне рівняння відносно декартової системи координат у просторі виражає площину.*

Рівняння площини, що проходить через дану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в заданому напрямі $\vec{n} = (A, B, C)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (6.1)$$

Рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (6.2)$$

називається **загальним рівнянням** площини, якщо коефіцієнти A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

Ненульовий вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярний до площини, називається **нормальним вектором площини**.

Розглянемо окремі випадки загального рівняння площини.

1. Нехай $D = 0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax + By + Cz = 0$ і площина проходить через початок координат.

2. Нехай $C = 0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax + By + D = 0$ і площина паралельна осі Oz . Аналогічно, для $A = 0, B = 0$ дістанемо площини $By + Cz + D = 0$ і $Ax + Cz + D = 0$, паралельні відповідно осям Ox і Oy .

3. Нехай $C = D = 0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax + By = 0$ і площина проходить через початок координат та вісь Oz . Аналогічно, для $A = D = 0, B = D = 0$ дістанемо відповідно площини $By + Cz = 0$ та $Ax + Cz = 0$, які проходять відповідно до заданих записів через осі Ox та Oy .

4. Нехай $B = C = 0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax + D = 0$, паралельна до осей Oy і Oz , перпендикулярна до осі Ox , тобто паралельна координатній площині Oyz . Аналогічно, для $A = B = 0$ і $A = C = 0$ дістанемо площини $Cz + D = 0$ та $By + D = 0$, які є паралельні відповідно до координатних площин Oxy , Oxz .

5. Нехай $B = C = D = 0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax = 0$, площина збігається з площиною Oyz .

Аналогічно, для $A = B = D = 0$ і $A = C = D = 0$ дістанемо площини $Cz = 0$ і $By = 0$, які збігаються відповідно з координатними площинами Oxy і Oxz .

6.1.2. Рівняння площини в відрізках на осях

Нехай рівняння (6.2) повне ($A, B, C, D \neq 0$), тоді маємо $Ax + By + Cz = -D$,

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Якщо позначити $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$, то маємо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (6.3)$$

Рівняння (6.3) називають рівнянням *площини у відрізках* на осях.

Точки перетину площини з відповідними осями координат є такими: $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, модулі чисел a , b , c є довжинами відрізків, які відтинає площина на відповідних координатних осях.

6.1.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай площина (α) задана в просторі своїми трьома точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$. Нехай точка $M(x; y; z)$ – довільна точка простору. Очевидно, $M \in (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ – компланарні ((α) – позначення площини).

Запишемо умову компланарності векторів (мішаний добуток дорівнює 0)

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0.$$

Виразимо мішаний добуток трьох векторів через координати векторів, маємо:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.4)$$

Отже, координати кожної точки, яка лежить у площині (α) , задовольняють рівняння (6.4).

Умову, що чотири точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ лежать в одній площині, можна записати так:

$$\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.1.4. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини

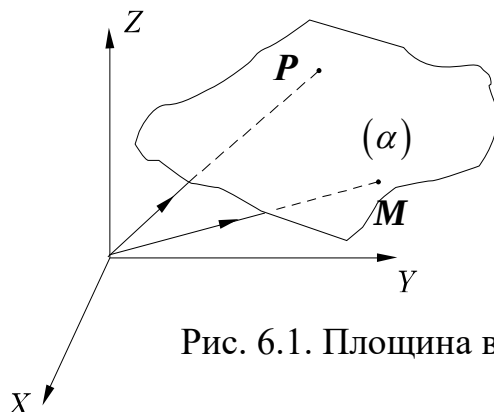


Рис. 6.1. Площина в просторі

Нехай в просторі задана площина (α) . Через початок координат проведемо перпендикуляр до площини (α) і позначимо точку його перетину з площиною через P . Довжину відрізка OP позначимо через p . За додатній напрям нормалі до площини прийнемо напрям від початку координат до точки P .

Кути, які утворює вектор нормалі з координатними осями Ox, Oy, Oz , позначимо відповідно через α, β, γ . Отже, координати орта нормалі будуть $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Візьмемо точку $M(x; y; z)$ і спроектуємо її радіус-вектор $\vec{r}$ на нормаль:

$$np_{\vec{n}} \vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{n} = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma.$$

З другого боку, точка $M \in (\alpha) \Leftrightarrow np_{\vec{n}} \vec{r} = p$.

Таким чином, маємо

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0. \quad (6.5)$$

Рівняння (6. 5) називають **нормальним рівнянням площини**.

Загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ зводять до нормального рівняння, помноживши його на нормуючий множник

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

знак якого треба брати протилежним знаку вільного члена, $\mu D < 0$.

Відстань d точки від площини обчислюють через нормальне рівняння площини.

Означення. Відхиленням точки M від площини називається число $\delta = d$, якщо точка M і початок координат лежать по різні сторони від площини, і число $\delta = -d$, якщо вони лежать по одну сторону від неї.

Нехай відома точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і площина задана нормальним рівнянням

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Тоді справедлива формула

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p| = |\delta|.$$

Якщо площина задана загальним рівнянням, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (6.6)$$

Таким чином, відхилення точки від площини дорівнює результату підстановки координат точки в ліву частину нормального рівняння площини.

6.2. Кут між двома площинами

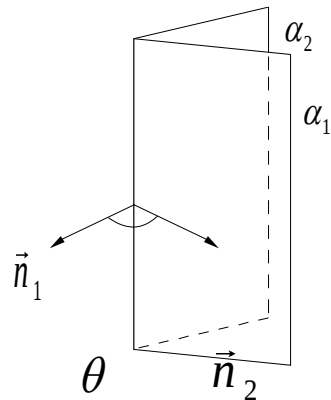


Рис. 6.2. Кут між площинами

Двогранний кут між двома площинами вимірюється лінійним кутом. Лінійний кут дорівнює куту між векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ (теорема про кути із взаємно перпендикулярними сторонами).

Кут між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, які перетинаються, дорівнює куту між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ і обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (6.6)$$

Дві площини будуть паралельні, їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ повинні бути колінеарними, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Площини перпендикулярні, їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ також повинні бути перпендикулярні, тобто

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Контрольні питання

1. Записати різні види рівнянь площини: загальне, у відрізках на осях, нормальне. Визначити координати нормального вектора площини.
2. Визначити кут між двома площинами. Записати формулу для його обчислення.
3. Записати умови перпендикулярності та паралельності двох площин.

Лекція 7. Пряма в просторі, кут між прямими

7.1. Пряма в просторі.

7.1.1. Види рівнянь прямої в просторі.

7.1.2. Взаємне розміщення двох прямих в просторі.

7.2. Розміщення прямої відносно площини.

7.1. Пряма в просторі

7.1.1. Види рівнянь прямої в просторі

– Векторне рівняння прямої просторі

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{l}, \quad (7.1)$$

$t \in \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, яка належить прямій, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – її радіус-вектор, $\vec{l} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ – напрямний вектор прямої (тобто вектор $\parallel$ прямій).

– Параметричні рівняння прямої

Якщо в рівнянні (7.1) перейти до координатної форми, то будемо мати рівняння

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad (7.2)$$

$t \in \mathbb{R}$, t – параметр, $\vec{l} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ – напрямний вектор.

– Канонічні рівняння прямої

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad (7.3)$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, яка належить прямій, $\vec{l} = (m, n, p)$ – напрямний вектор. В рівнянні (7.3) деякі з чисел m, n, p можуть дорівнювати 0. Наприклад, коли $m = 0$, то пряма (7.3) перпендикулярна до осі Ox :

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \\ x - x_0 = 0. \end{cases}$$

– *Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки*

Нехай точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ належать прямій L . Тоді, як і у випадку прямої на площині (відоме рівняння зі шкільного курсу), маємо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (7.4)$$

– *Загальні рівняння прямої*

Пряму в просторі можна задати рівняннями площин, які по ній перетинаються, тобто двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Ці рівняння прямої в просторі дещо відрізняються від відповідних рівнянь прямої на площині.

Це і є загальні рівняння прямої. Оскільки ці рівняння не дуже зручні, то часто систему (7.5) зводять до канонічного виду. Для цього потрібно:

1) визначити координати однієї з точок прямої (покласти, наприклад, $z = 0$ і знайти x та y).

2) визначити координати напрямного вектора $\vec{l} = (m, n, p)$.

Очевидно, що $\vec{l} \perp \vec{n}_1, \vec{l} \perp \vec{n}_2$, де $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ – нормальні вектори площин, заданих рівняннями (7.5). Тоді можна обрати напрямний вектор, як векторний добуток нормальних векторів площин або колінеарний йому:

$$\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

7.1.2. Взаємне розміщення двох прямих в просторі

Нехай дві прямі в просторі задані своїми канонічними рівняннями

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Кут між прямими L_1 і L_2 співпадає з одним із вертикальних кутів між прямими, якщо прямі лежать в одній площині і перетинаються. Якщо прямі

мимобіжні, то цей кут співпадає з кутом між прямою і проекцією іншої прямої на площину, в якій лежить перша пряма.

З означення скалярного добутку для напрямних векторів маємо $\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = |\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2| \cos \varphi$. Оскільки $\vec{l}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{l}_2 = (m_2, n_2, p_2)$, тоді

$$\cos \varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (7.6)$$

Дві прямі в просторі можуть перетинатися, бути мимобіжними, паралельними і можуть суміщатися.

– **Прямі L_1 і L_2 паралельні**, якщо $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$, із умови паралельності двох векторів, маємо

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (7.7)$$

(7.7) – умова паралельності двох прямих.

– **Умова перпендикулярності** двох прямих рівносильна умові перпендикулярності напрямних векторів, тобто $\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = 0$ або в координатній формі

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (7.8)$$

– Умова, за якої **дві прямі перетинаються** (належать одній площині).

Очевидно, що дві прямі в просторі перетинаються тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{l}_1, \vec{l}_2$ компланарні. З необхідної і достатньої умови компланарності маємо:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.9)$$

7.2. Розміщення прямої відносно площини

Пряма в просторі може перетинати задану площину, бути до неї паралельною або лежати на ній. Нехай пряма задана канонічними рівняннями (7.3):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

а площина (α) – загальним рівнянням (6.2):

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

а) Перетин прямої з площиною

Якщо пряма перетинає площину, то система рівнянь

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{cases}$$

має єдиний розв'язок. Перейшовши в (7.3) до рівнянь (7.2) (в параметричній формі)

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

після підстановки в загальне рівняння площини, знаходять єдине значення t , за якого визначають точку перетину.

б) Кут між прямою і площиною

Кут між прямою і площиною в просторі визначають як кут між прямою та її проекцією на площину.

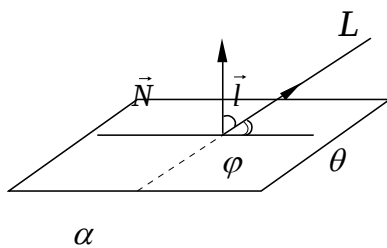


Рис. 7.1. Кут між прямою і площиною

Очевидно, що $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, кут φ як кут між двома векторами $\vec{n}$ і $\vec{l}$ можна

визначити за формулою $\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{l}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{l}|}$. Оскільки $\cos \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$,

виражаючи скалярний добуток через координати, маємо

$$\sin \theta = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (7.10)$$

в) Умова паралельності прямої і площини

Якщо пряма паралельна площині, то кут $\theta = 0$. Отже, співвідношення

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad (7.11)$$

є умова паралельності прямої і площини.

г) Умова перпендикулярності прямої і площини

Якщо пряма перпендикулярна площині, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{l}$ – колінеарні:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (7.12)$$

г) Пряма належить площині

Пряма задана канонічними рівняннями лежить в площині, якщо виконується умова (7.11), точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ теж належить площині:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Am + Bn + Cp = 0, \end{cases} \quad (7.13)$$

д) Рівняння пучка площин, які проходять через пряму

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases},$$

має вигляд

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0, \quad (7.14)$$

де λ – будь-яке дійсне число.

Контрольні питання

1. Записати різні види рівнянь прямої в просторі: векторне, канонічні, параметричні, через дві точки.
2. Визначити кут між двома прямими.
3. Визначити кут між прямою і площиною.
4. Навести умови належності прямої площині.

Лекція 8. Пряма на площині

8.1. Пряма на площині.

8.2. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Кут між прямими.

8.1. Пряма на площині

– Загальне рівняння прямої

Теорема. Кожну пряму на площині можна визначити лінійним рівнянням відносно декартової системи координат, і, навпаки, кожне лінійне рівняння визначає пряму в цій координатній системі.

Доведення.

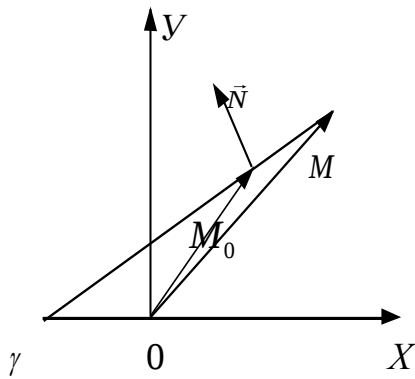


Рис. 8.1. Пряма на площині

Нехай на площині задана пряма γ . Складемо її рівняння відносно системи координат. Нехай задано точку $M_0(x_0; y_0) \in \gamma$, вектор $\vec{N} = (A, B) \perp \gamma$. Нехай $M(x; y)$ – довільна точка прямої γ . Тоді $M \in \gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$, або в координатах

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (8.1)$$

Це рівняння прямої, яке є лінійним.

Розкривши дужки і позначивши $C = -Ax_0 - By_0$, маємо загальне рівняння прямої на площині

$$Ax + By + C = 0. \quad (8.2)$$

Вектор $\vec{N} = (A, B)$ – нормальний вектор прямої.

Неповні рівняння прямої (деякі його коефіцієнти дорівнюють нулю)

- 1) $C = 0$, початок координат $O(0;0)$ належить прямій;
- 2) $B = 0$, то пряма $Ax + C = 0 \parallel Oy$, $\vec{N} = (A, 0) \perp Ox$;
- 3) $A = 0$, то $Bx + C = 0 \parallel Ox$, $\vec{N} = (0, B) \perp Oy$;
- 4) $B = C = 0$, то пряма $Ax = 0$ співпадає з віссю Oy ;
- 5) $A = C = 0$, то пряма $Bx = 0$ є віссю Ox .

– Пряма у відрізках на осях

Якщо $C \neq 0$, то з рівняння (8.2) маємо $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$. Якщо позначити $a = -\frac{C}{A}$,

$b = -\frac{C}{B}$, тоді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (8.3)$$

(8.3) – рівняння прямої у відрізках, з якого легко визначити, що точки $A(a;0), B(0;b) \in$ прямій γ , модулі чисел a та b є довжинами відрізків, які відтинає пряма на координатних осях Ox, Oy відповідно.

– Векторне рівняння прямої

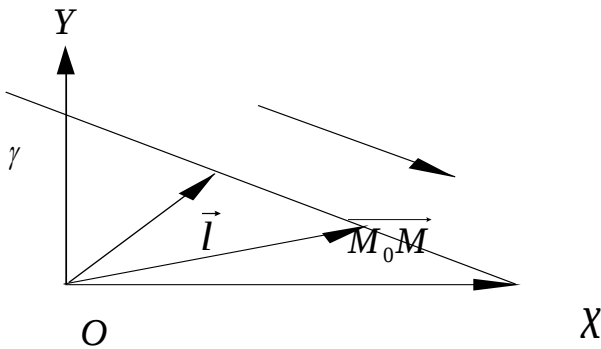


Рис. 8.2. Пряма з напрямним вектором

Задана точка $M_0(x_0; y_0)$ і напрямний вектор $\vec{l}(m, n)$ (вектор, паралельний до прямої, називають її напрямним вектором). Розглядається задача: записати рівняння прямої, яка проходить паралельно напрямному вектору через вказану точку M_0 . Очевидно, що точка M_0 і вектор $\vec{l}(m, n)$ цілком визначають пряму.

Нехай $\vec{r}_0$ – радіус-вектор точки M_0 , $\vec{r}$ – точки M . Точка $M(x; y)$ належить шуканій прямій $\gamma \Leftrightarrow$ вектори $\overrightarrow{M_0M}, \vec{l}$ – колінеарні, тобто $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{l}$, або

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{l}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8.4)$$

– Канонічне рівняння прямої

Якщо записати умову колінеарності векторів $\vec{r} - \vec{r}_0$ і $\vec{l}$, то будемо мати рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad (8.5)$$

яке називають **канонічним рівнянням** прямої.

– Параметричні рівняння прямої

Якщо в рівнянні (8.5) перейти до координат, будемо мати

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \end{cases} \quad (8.6)$$

t – параметр, $t \in \mathbb{R}$, $M_0(x_0; y_0) \in \gamma$, $\vec{l} = (m, n) \parallel \gamma$ – напрямний вектор (вектор, паралельний до прямої).

– Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2) \in \gamma$. Очевидно, точка $M(x; y) \in \gamma$, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ колінеарні. Якщо записати умову колінеарності, то маємо рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (8.7)$$

де напрямний вектор $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

– Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма γ задана точкою $M_0(x_0; y_0)$ та кутом φ між прямою і додатним напрямом осі Ox . Позначимо $\operatorname{tg} \varphi = k$.

Тангенс кута φ нахилу прямої γ до осі Ox називається **кутовим коефіцієнтом** прямої. Якщо напрямний вектор $\vec{l} = (m, n)$, то $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{n}{m}$.

Таким чином, із (8.5) маємо

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

або, розкривши дужки, $y = kx - kx_0 + y_0$, $y = kx + b$.

– Нормальне рівняння прямої

Рівняння вигляду

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0,$$

де $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$ – орт нормалі, p – відстань від точки $O(0;0)$ до прямої, називають **нормальним рівнянням** прямої.

Оскільки $\cos \beta = \sin \alpha$, то рівняння (8.8) має вигляд

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (8.8)$$

Щоб звести загальне рівняння прямої (8.1) до нормального вигляду, треба помножити його на число – нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак якого вибирають протилежним знакові числа C , $\mu C < 0$.

Означення. Відхиленням точки M від прямої γ називається число $\delta = d$, якщо точка M і початок координат лежать по різні сторони від прямої, і число $\delta = -d$, якщо вони лежать по одну сторону від неї, де d – відстань від точки до прямої.

Якщо пряма γ задана нормальним рівнянням, тоді відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої обчислюють за формулою

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p| = |\delta|. \quad (8.9)$$

Відхилення точки $M_0(x_0; y_0)$ від прямої дорівнює результату підставлення її координат в нормальне рівняння прямої (8.8).

8.2. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Кут між прямими

Дві прямі на площині можуть перетинатися (зокрема, бути перпендикулярними), бути паралельними і співпадати.

1) Нехай прямі задані своїми загальними рівняннями:

$$\gamma_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \vec{N}_1 = (A_1, B_1),$$

$$\gamma_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0, \vec{N}_2 = (A_2, B_2).$$

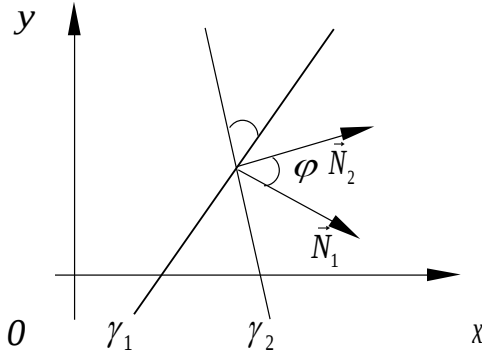


Рис. 8.3. Кут між прямими в загальних рівняннях

Кут між прямими є кутом між нормальними векторами прямих, тобто

$$\vec{N}_1 \vec{N}_2 = \angle \varphi, \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = |\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2| \cos \varphi; \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}.$$

Отже,

$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad (8.10)$$

знаки «+» або «-» у формулі (8.10) дають можливість визначити кожні з суміжних кутів, утворених перетином прямих.

Прямі γ_1 та γ_2

• **перпендикулярні** $\Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0: A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0;$

• **паралельні** $\Leftrightarrow \vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ колінеарні: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$

2) Для прямих, заданих канонічними рівняннями, а саме, для прямої $\gamma_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$, $\vec{l}_1 = (m_1, n_1)$, $\vec{l}_1 \parallel \gamma_1$ — напрямний вектор та прямої $\gamma_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$, $\vec{l}_2 = (m_2, n_2)$, $\vec{l}_2 \parallel \gamma_2$, аналогічно п. 1) кут між прямими є кутом між відповідними напрямними векторами прямих:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|} = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

3) Для прямих, записаних із кутовими коефіцієнтами, тобто для γ_1 : $y = k_1 x + b_1$; $\varphi_1 = \angle(\gamma_1, Ox)$; $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ та прямої γ_2 : $y = k_2 x + b_2$; $\varphi_2 = \angle(\gamma_2, Ox)$; $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$.

Із рис. 8.4 видно, що $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, відповідно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

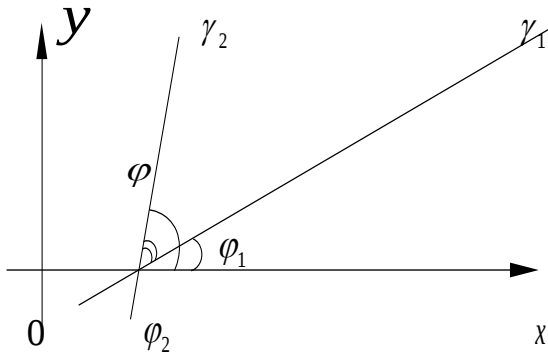


Рис. 8.4. Кут між прямими із кутовими коефіцієнтами

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|. \quad (8.11)$$

Прямі γ_1 та γ_2

- **перпендикулярні:** $\gamma_1 \perp \gamma_2 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \varphi$ не існує, $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, $k_1 = -\frac{1}{k_2}$;
- **паралельні:** $\gamma_1 \parallel \gamma_2 \Leftrightarrow \varphi = 0$, $\operatorname{tg} \varphi = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

Контрольні питання

1. Записати загальне рівняння прямої на площині, записати нормальний вектор прямої.
2. Отримати рівняння прямої у відрізках на осях, пояснити його назву.
3. Записати канонічне рівняння прямої, перейти до параметричних рівнянь.

4. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, в канонічному та параметричному вигляді (на прикладі).
5. Записати та пояснити рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
6. Записати умови паралельності двох прямих на площині для прямих, заданих загальними, канонічними рівняннями, рівняннями з кутовим коефіцієнтом.
7. Записати умови перпендикулярності, паралельності двох прямих.

Лекція 9. Криві другого порядку на площині. Коло, еліпс

9.1. Коло, його рівняння.

9.2. Еліпс, його канонічне рівняння.

9.1. Коло, його рівняння

Означення. *Колом* називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається центром.

Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (9.1)$$

Рівняння кола з центром у точці $C(x_0; y_0)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (9.2)$$

Рівняння кола у загальному вигляді записують так:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

де A, B, C, D – сталі коефіцієнти; A, B одночасно не дорівнюють нулю.

Зауваження. Рівняння кола (9.1) в параметричній формі має вид:

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (9.3)$$

9.2. Еліпс, його канонічне рівняння

Означення. *Еліпсом* називається множина точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала, більша за відстань між фокусами.

Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox , має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b), \quad (9.4)$$

де a – довжина великої півосі; b – довжина малої півосі (рис 9.1).

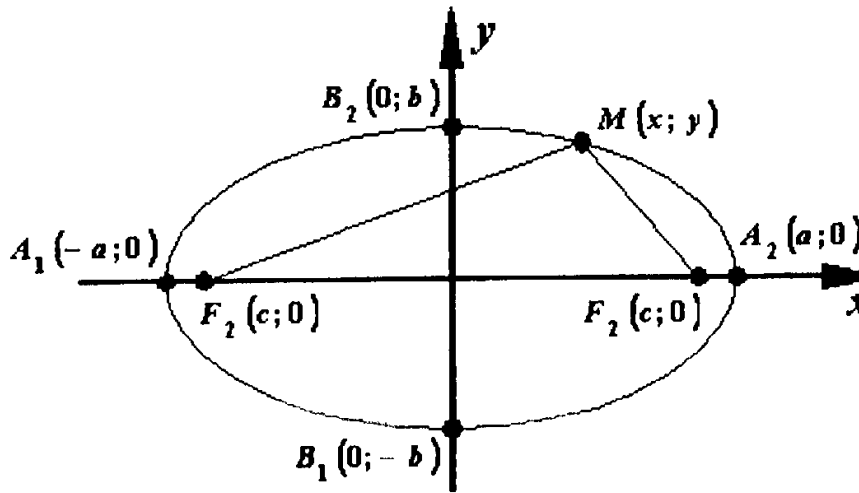


Рис. 9.1. Еліпс

Залежність між параметрами a , b , c виражається співвідношенням:

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані $2c$ до великої осі $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1.$$

Директриси еліпса мають рівняння $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Якщо центр симетрії еліпса знаходиться у точці $C(x_0; y_0)$, а осі симетрії паралельні осям Ox, Oy , то рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (9.5)$$

Зауваження. Рівняння еліпса (9.4) в параметричній формі має вид:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (9.6)$$

Контрольні питання

1. Дати означення кола.
2. Записати рівняння кола з центром в точках $O(0,0)$ і $C(x_0; y_0)$.

3. Дати означення еліпса.
4. Записати канонічне рівняння еліпса з центрами в точках $O(0,0)$ і $C(x_0; y_0)$.
5. Дати означення директриси і ексцентриситету еліпса.
6. Записати рівняння директрис.
7. За яких умов рівняння еліпса стає рівнянням кола?

Лекція 10. Гіпербола, парабола, їх канонічні рівняння

10.1. Гіпербола, її канонічне рівняння.

10.2. Парабола, її канонічні рівняння.

10.1. Гіпербола, її канонічне рівняння

Означення. *Гіперболою* називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала ($2a$), менша за відстань між фокусами ($2c$).

Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox , має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (10.1)$$

де a – довжина дійсної півосі; b – довжина уявної півосі (рис. 10.1).

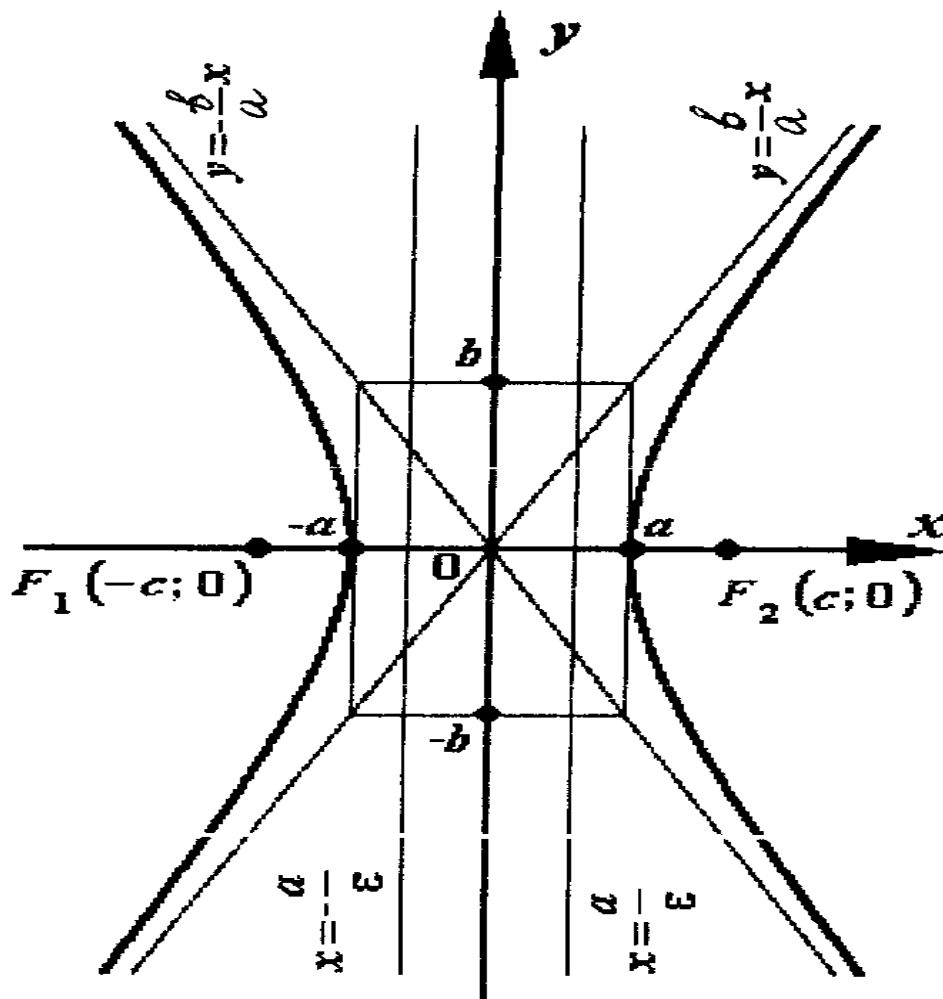


Рис. 10.1. Гіпербола

Залежність між параметрами a, b, c виражається співвідношенням

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення півфокусної відстані до її дійсної півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

Фокуси гіперболи знаходяться у точках $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y = \pm \frac{b}{a}x$, а також дві директриси, рівняння яких $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Якщо дійсна та уявна півосі рівні ($a = b$), то гіпербола називається рівносторонньою. Рівняння рівносторонньої гіперболи має вигляд:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

а рівняння її асимптот $y = \pm x$.

Якщо фокуси гіперболи лежать на осі Oy в точках $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, то її рівняння має вигляд:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (10.2)$$

Рівняння асимптот такої гіперболи $y = \pm \frac{b}{a}x$, а рівняння директрис $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ (рис. 10.2).

Гіперболи (10.1) і (10.2) називається спряженими. Рівняння *рівносторонньої гіперболи* з фокусами на осі Oy має вигляд $y^2 - x^2 = a^2$.

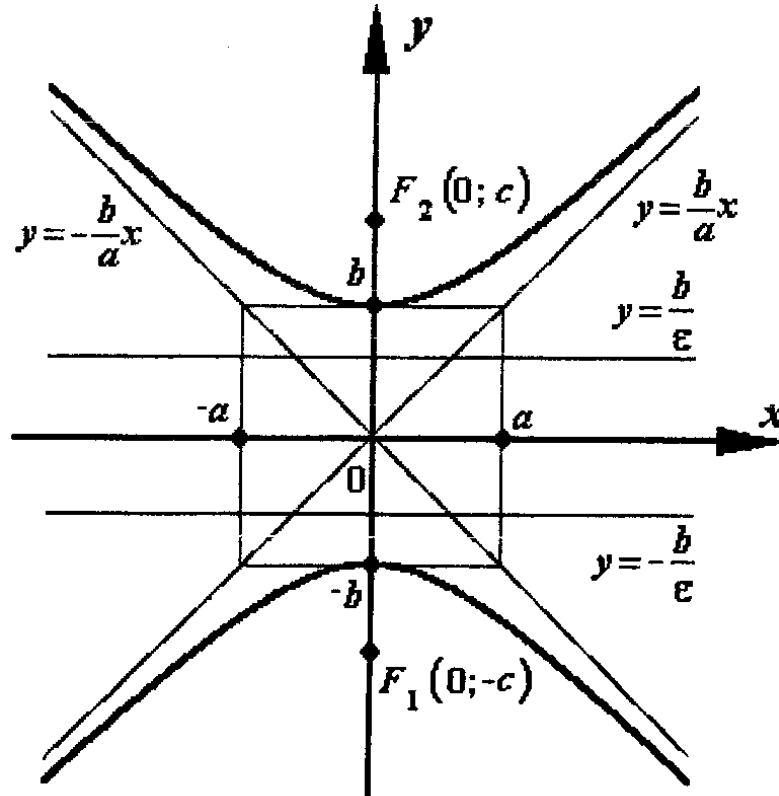


Рис. 10.2. Спряжена гіпербола

Якщо центр симетрії гіперболи знаходиться в точці $C(x_0; y_0)$, а осі симетрії паралельні осям Ox , Oy , то рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1; \quad (10.3)$$

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1. \quad (10.4)$$

10.2. Парабола, її канонічні рівняння

Означення. *Параболою* називають множину точок на площині, рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і від даної прямої, яка називається директрисою.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox , має вигляд:

$$y^2 = 2px, \quad (10.5)$$

де p – параметр параболи.

Якщо $p > 0$, то гілки параболи напрямлені вправо (рис. 10.3), якщо $p < 0$,

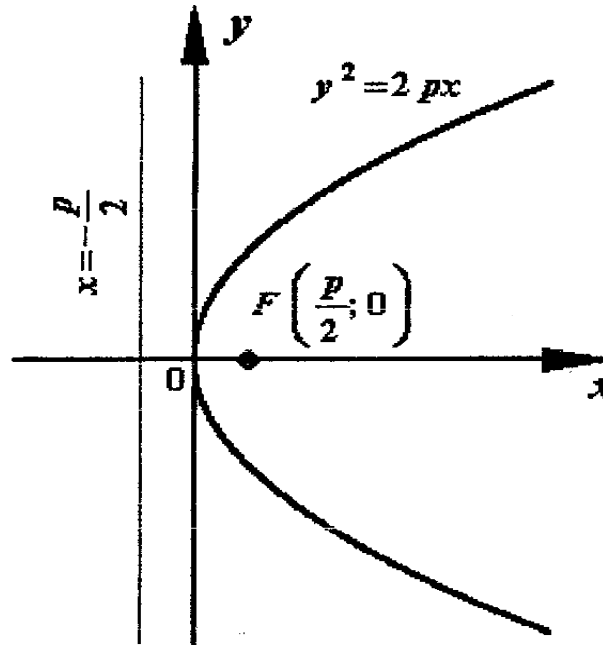


Рис. 10.3. Парабола $y^2 = 2px$
то гілки напрямлені вліво.

Фокус параболи знаходиться у точці $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Рівняння директриси

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy , має вигляд:

$$x^2 = 2py. \quad (10.6)$$

Якщо $p > 0$, то гілки направлені вгору (рис. 10.4), якщо $p < 0$, то гілки направлені вниз. Фокус такої параболи є точка $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси

$$y = -\frac{p}{2}.$$

Якщо вершина параболи – у точці $C(x_0; y_0)$, а вісь симетрії паралельна осі Oy , то рівняння має вигляд:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \quad (10.7)$$

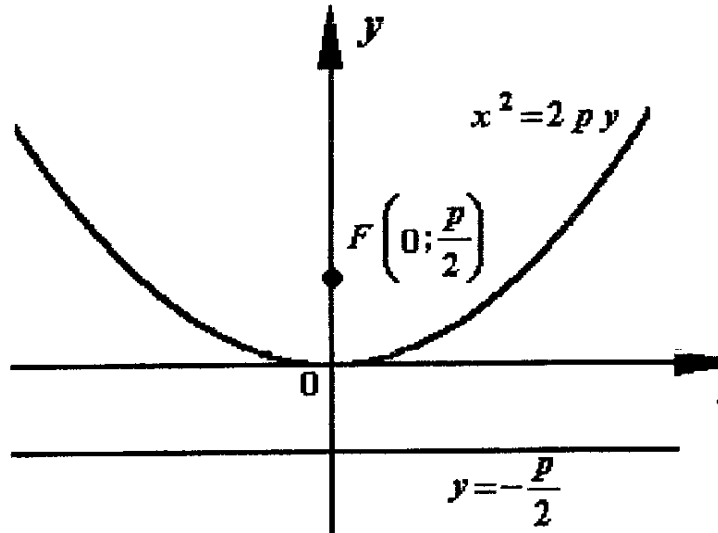


Рис. 10.4. Парабола $x^2 = 2py$

Фокус цієї параболи $F(x_0; y_0 + \frac{p}{2})$, рівняння директриси $y = y_0 - \frac{p}{2}$.

Якщо вершина параболи знаходиться у точці $C(x_0; y_0)$, а вісь симетрії паралельна осі Ox , то рівняння параболи має вигляд:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \quad (10.8)$$

Фокус такої параболи $F(x_0 + \frac{p}{2}; y_0)$, рівняння директриси $x = x_0 - \frac{p}{2}$.

Контрольні питання

1. Дати означення гіперболи, сформулювати її основні характеристики.
2. Що таке спряжена гіпербола? Навести приклад побудови її.
3. Записати канонічне рівняння параболи, рівняння її директриси, координати фокуса.

Лекція 11. Поверхні другого порядку та їх канонічні рівняння

11.1. Поняття поверхні другого порядку.

11.2. Еліпсоїди.

11.3. Гіперболоїди.

11.4. Параболоїди.

11.5. Циліндричні поверхні.

11.6. Поверхня обертання.

11.7. Конічна поверхня.

11.1. Поняття поверхні другого порядку

Поверхні другого порядку визначаються загальним рівнянням вигляду

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0, \quad (11.1)$$

де коефіцієнти – дійсні числа й, принаймні, одне із чисел A, B, C, D, E, F не дорівнює нулеві. Можна показати, що шляхом повороту й паралельного переносу осей координат, рівняння (11.1) прийме найбільш простий або *канонічний* вигляд. Рівняння, які визначають уявні поверхні, називатимемо виродженими. Рівняння, які задають поверхні другого порядку, – не виродженими. Нижче наведено й досліджені канонічні рівняння поверхонь другого порядку. Для цього використовується *метод перетинів*, за яким дослідження виду поверхні виконується за допомогою вивчення ліній перетину даної поверхні з координатними площинами або площинами, їм паралельними.

11.2. Еліпсоїди

Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (11.2)$$

називається *еліпсоїдом*.

Дослідження форми еліпсоїда

1. Рівняння (11.2) містить змінні x, y і z тільки в парних степенях, тому Ox, Oy, Oz – осі симетрії, а точка O – центр симетрії.

2. $A_1(a, 0, 0), A_2(-a, 0, 0)$ – точки перетину еліпсоїда з віссю Ox , які визначаються, якщо покласти $y=0$ та $z=0$. Аналогічно визначаються точки $B_1(0, b, 0), B_2(0, -b, 0), C_1(0, 0, c), C_2(0, 0, -c)$.

Прийнято називати:

- точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ *вершинами еліпсоїда*;
- відрізки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 , а також їх довжини $2a, 2b, 2c$ – *осями еліпсоїда* відповідно;
- числа a, b, c – *півосями еліпсоїда* відповідно.

3. Для встановлення геометричного образу рівняння (11.2) скористаємось перерізами, паралельними площині Oxy . Рівняння таких площин: $z=h$, де h – будь-яке число.

Лінія, яка утворюється в перерізі, визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \quad (11.3)$$

Досліджуємо систему (11.3). Якщо $|h| > c, c > 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$. В такому разі система рівнянь визначає уявний еліпс, тобто точок перетину еліпсоїда (11.2) з площиною $z=h$ не існує.

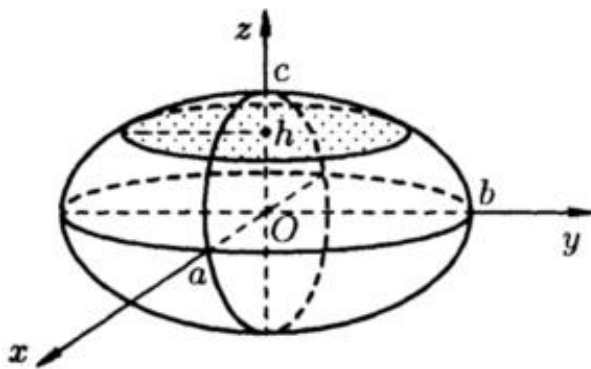
2. Якщо $|h|=c$, тобто $h=\pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Лінія перетину (11.3) вироджується у дві точки $(0, 0, c)$ і $(0, 0, -c)$. Площини $z=\pm c$ дотикаються даної поверхні.

3. Якщо $|h| < c$, то рівняння (11.3) можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Перше рівняння визначає еліпс, півосі якого змінюються залежно від h . При $h = 0$ в перетині еліпсоїда площиною $z = 0$ маємо найбільший еліпс.

Аналогічні результати одержуємо, якщо розглянемо перетин еліпсоїда



площинами $x = h$ та $y = h$. Таким чином, проведений аналіз дозволяє зобразити геометричний образ еліпсоїда як замкненої овальної поверхні.

Зауваження. Якщо в рівнянні (11.2)

$a = b = c$, то одержимо рівняння **сфери**

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (R = a).$$

Рис. 11.1. Еліпсоїд

11.3. Гіперболоїди

Однопорожнинний гіперболоїд. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

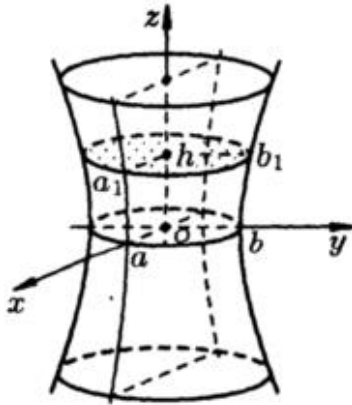
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (11.4)$$

називається **однопорожнинним гіперболоїдом**.

Дослідження форми однопорожнинного гіперболоїда

1. Рівняння (11.4) містить змінні x , y і z тільки в парних степенях, тому Ox , Oy , Oz – осі симетрії, а точка O – центр симетрії.
2. При перетині гіперболоїда площиною $z = h$ отримаємо лінії, що

визначають еліпси
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$



Якщо $h = 0$, маємо найменший еліпс при перетині гіперboloїда площиною $z = 0$, якщо h необмежено зростає, то півосі еліпса зростають до нескінченності.

Рис. 11.2. Однопорожнинний гіперboloїд

При перетині гіперboloїда площинами $y = 0$, $x = 0$, отримаємо дві системи

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

з яких випливає, що в перерізі маємо гіперболи.

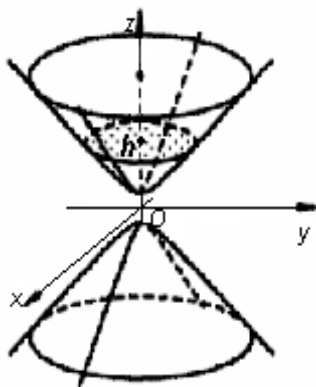
Двопорожнинний гіперboloїд. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (11.5)$$

називається **двопорожнинним гіперboloїдом**.

Дослідження форми двопорожнинного гіперboloїда

Розглянемо переріз площиною $z = h$. Отримаємо систему



$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Рис. 11.3. Двопорожнинний гіперboloїд

Дослідимо її.

1. Якщо $|h| < c$, то лінії перетину немає (маємо уявний еліпс).
2. Якщо $|h| = c$, то площина дотикається до гіперболоїда (маємо точки $(0,0,c)$, $(0,0,-c)$).
3. Якщо $|h| > c$, то лінією перетину буде еліпс.

При перетині гіперболоїда площинами $y = 0$ і $x = 0$, отримаємо дві системи

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0, \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0, \end{cases}$$

з яких випливає, що в перерізі маємо гіперболи. В обох гіпербол дійсною віссю є вісь Oz . Метод перетину дозволяє зобразити поверхню, описану рівнянням (11.5), як поверхню, що складається із двох порожнин, які мають форму опуклих необмежених чаш.

11.4. Параболоїди

Еліптичний параболоїд. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = z, \text{ де } p > 0, q > 0, \quad (11.6)$$

називається **еліптичним параболоїдом**.

Дослідження форми еліптичного параболоїда

При перерізах параболоїда площинами $z = h$ маємо систему:

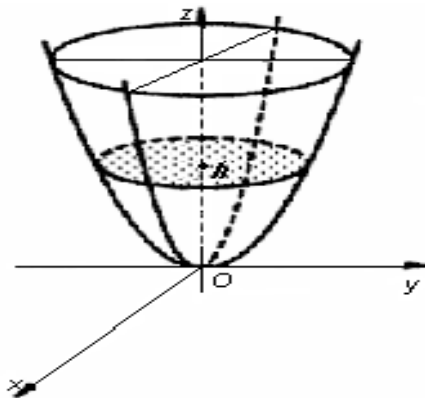


Рис. 11.4. Еліптичний параболоїд

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

Дослідимо її.

1. Якщо $h < 0$, то лінії перетину немає (маємо уявний еліпс).
2. Якщо $h = 0$, то площина $z = 0$ дотикається до поверхні в точці $(0,0,0)$.
3. Якщо $h > 0$, то лінією перетину буде еліпс.

При перетині еліптичного параболоїда координатними площинами Oxz і Oyz отримаємо лінії, що записуються рівняннями

$$\begin{cases} x^2 = p^2 z, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y = q^2 z, \\ x = 0, \end{cases}$$

з яких випливає, що ці лінії – параболі.

Гіперболічний параболоїд. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z, \text{ де } p > 0, q > 0, \quad (11.7)$$

називається **гіперболічним параболоїдом**.

Дослідження форми гіперболічного параболоїда

При перерізах параболоїда площинами $z = h$ маємо систему:

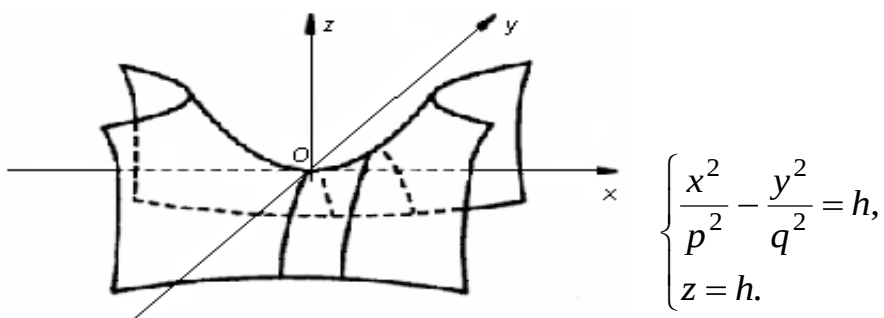


Рис. 11.5. Гіперболічний параболоїд

Дослідимо її.

1. При $h > 0$ у перетині отримаємо гіперболи, що перетинають площину Oxz .
2. При $h < 0$ у перетині отримаємо гіперболи, що перетинають площину Oyz .

3. При $h = 0$ лінія перетину $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 0$ розпадається на дві прямі

$$\frac{x}{p} - \frac{y}{q} = 0 \text{ та } \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 0.$$

При перетині гіперболічного параболоїда площинами $y = h$ і $x = h$ отримаємо лінії, що записуються рівняннями

$$\begin{cases} x^2 = p^2 \left(z + \frac{h^2}{q^2} \right), \\ y = h \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y^2 = q^2 \left(\frac{h^2}{p^2} - z \right), \\ x = h, \end{cases}$$

з яких випливає, що ці лінії – параболі.

При перетині еліптичного параболоїда координатними площинами Oxz і Oyz отримаємо лінії, що записуються рівняннями

$$\begin{cases} x^2 = p^2 z, \\ y = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y^2 = -q^2 z, \\ x = 0, \end{cases}$$

з яких випливає, що ці лінії – параболі. В першому випадку її гілки напрямлені вгору, вона симетрична відносно осі Oz ; в другому – гілки парабол перетину площини з параболоїдом напрямлені вниз.

11.5. Циліндричні поверхні

Поверхня, що утворена рухом прямої, яка переміщається в просторі паралельно деякій даній прямій L , і перетинає деяку криву K , називається *циліндричною поверхнею* або *циліндром*. При цьому крива K називається *напрямною* циліндра, а пряма L – його *твірною*.

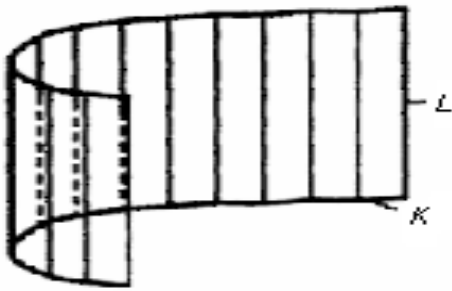


Рис. 11.6. Утворення циліндричної поверхні

Розглядатимемо циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в одній з координатних площин, а твірні L є паралельні координатній осі, яка перпендикулярна цій площині.

Нехай у площині Oxy лежить деяка лінія K , рівняння якої

$$F(x, y) = 0. \quad (11.8)$$

Побудуємо циліндр із твірними, які паралельні осі Oz і напрямною K .

Теорема. Рівняння циліндричної поверхні з твірними, паралельними осі Oz , не містить змінної z і має вигляд (11.8).

Доведення. Візьмемо на циліндричній поверхні будь-яку точку $M(x, y, z)$.

Вона лежить на одній із твірних. Нехай N – точка перетину цієї твірної із

площиною Oxy . Отже, точка N

лежить на кривій K і її координати

задовольняють рівняння (11.8). Але

точка M має ті ж значення абсциси

x і ординати y , що й точка N . Отже,

координати точки $M(x, y, z)$

задовольняють рівняння (11.8). А,

оскільки $M(x, y, z)$ – це будь-яка

точка циліндра, то рівняння

$F(x, y) = 0$ буде рівнянням цього

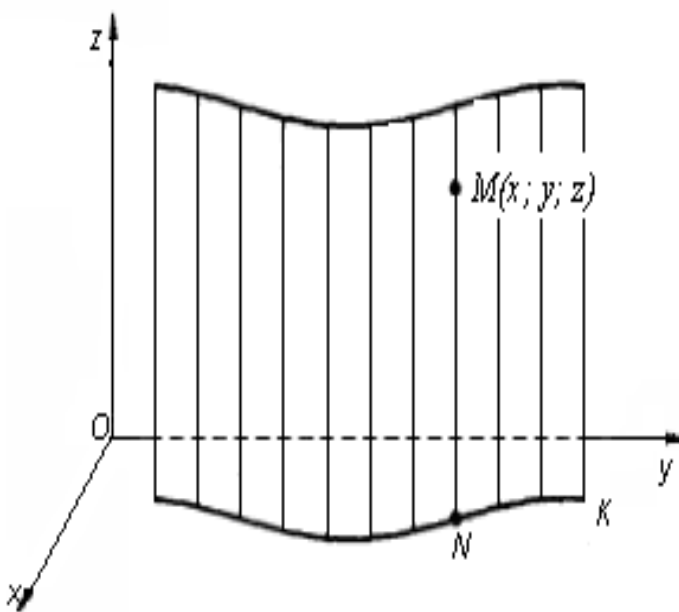
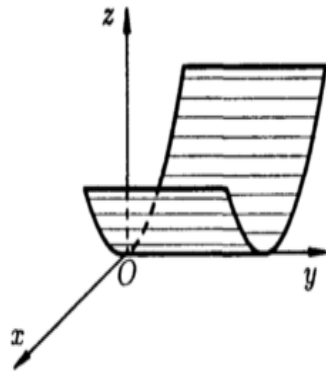


Рис. 11.7. Циліндрична поверхня

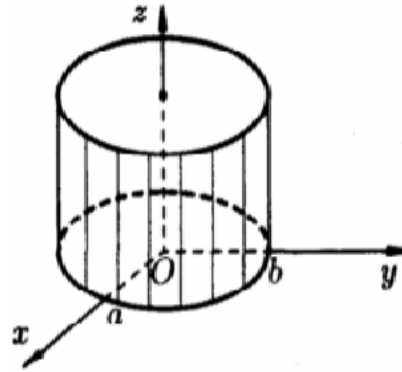
циліндра. Терему доведено.

Поверхні називаються *циліндрами другого порядку*, якщо їхнім рівнянням є рівняння другого степеня щодо поточних координат x , y та z .

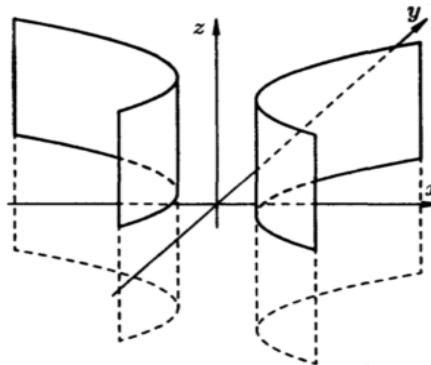
На рисунку 11.8 зображені *параболічний, еліптичний, гіперболічний циліндри*, які задані своїми відповідними канонічними рівняннями.



$$x^2 = 2pz$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Рис. 11.8. Циліндри

Якщо рівняння (11.8) розпадається на два лінійних множники, то циліндр складатиметься з пари площин, які паралельні осі Oz .

11.6. Поверхня обертання

Поверхня, утворена обертанням деякої плоскої кривої навколо осі, що лежить у її площині, називається *поверхнею обертання*. Нехай деяка крива L лежить у площині Oyz . Рівняння кривої L запишуться у вигляді

$$\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \quad (11.9)$$

Тоді рівняння поверхні, утвореної обертанням цієї кривої навколо осі Oz , матиме вигляд:

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

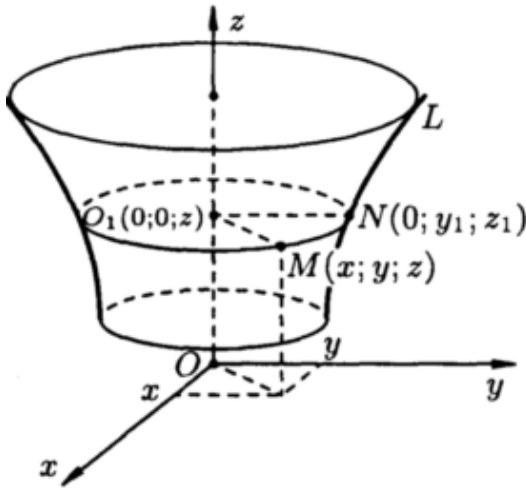


Рис. 11.9. Поверхня обертання

Доведення. Візьмемо на поверхні довільну точку $M(x, y, z)$. Проведемо через точку M площину, перпендикулярну осі Oz , і позначимо точки перетину її з віссю Oz й кривою L відповідно через O_1 і N , де $N = N(0, y_1, z_1)$. Відрізки O_1M і O_1N є радіусами одного кола, тому $O_1M = O_1N$. Оскільки $O_1M = \sqrt{x^2 + y^2}$, $O_1N = |y_1|$, $z_1 = z$, то $|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$ або $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Оскільки точка N лежить на кривій L , то її координати задовольняють рівняння (11.9), тому $F(y_1, z_1) = 0$. Підставивши допоміжні координати y_1 й z_1 точки N , приходимо до рівняння $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$, що й потрібно було довести.

Як видно, рівняння $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ отримується із рівняння $F(y, z) = 0$ простою заміною y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, а координата z , що відповідає осі обертання Oz , зберігається.

Аналогічно записують рівняння поверхонь, коли відбувається обертання лінії, що лежить у площинах Oxy і Oxz . Результати можна звести в таблицю 1.

Таблиця 1 – Рівняння поверхонь обертання

Обертається крива	Навколо осі	Рівняння поверхні обертання
$F(y, z) = 0, x = 0$	Oz	$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$F(y, z) = 0, x = 0$	Oy	$F(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$
$F(x, z) = 0, y = 0$	Ox	$F(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
$F(x, z) = 0, y = 0$	Oz	$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$F(x, y) = 0, z = 0$	Ox	$F(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
$F(x, y) = 0, z = 0$	Oy	$F(\pm \sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$

11.7. Конічна поверхня

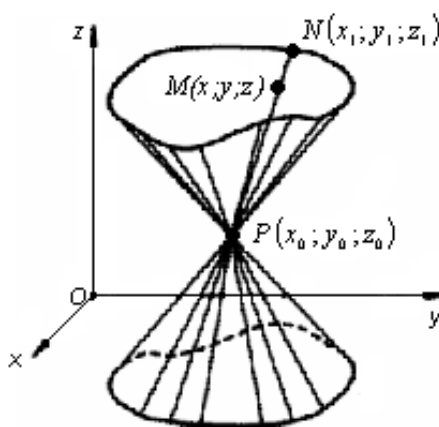


Рис. 11.10. Конічна поверхня

Поверхня, утворена прямими лініями l , що проходять через дану точку P й перетинають деяку плоску лінію L , називається *конічною поверхнею* або **конусом**. При цьому прийнято називати: лінію L *напрямною* конуса; точку P її *вершиною*; пряму l *твірною*.

Нехай напрямна L задана рівняннями

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (11.10)$$

а точка $P(x_0, y_0, z_0)$ – вершина конуса.

Знайдемо рівняння конуса. Візьмемо на поверхні конуса довільну точку $M(x, y, z)$. Твірна l , яка не проходить через точки P й M , перетне напрямну L у деякій точці $N(x_1, y_1, z_1)$. Координати точки N задовольняють рівняння (11.10) напрямної:

$$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ F_2(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{cases} \quad (11.11)$$

Канонічні рівняння твірних l , що проходять через точки P і N , мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (11.12)$$

Виключаючи x_1, y_1 та z_1 з рівнянь (11.11) і (11.12), одержимо рівняння конічної поверхні, що зв'язує поточні координати x, y і z .

Конус другого порядку. Поверхня, яка в прямокутній системі координат описується канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (11.13)$$

називається **конусом другого порядку**.

Дослідження форми конуса

У перетині поверхні площинами $x=0$ та $y=0$ одержуємо пари прямих, які є твірними конічної поверхні. При перерізах конуса площинами $z=h$ маємо систему:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

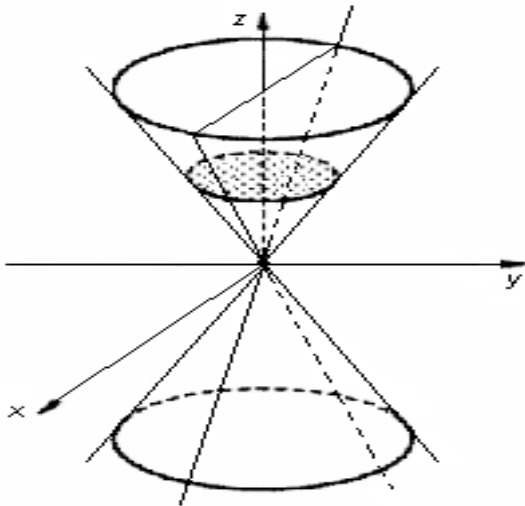


Рис. 11.11. Конус

З цієї системи випливає, що

$$1) \text{ при } h \neq 0 \text{ в перерізі є еліпси, рівняння яких } \frac{x^2}{a^2 \frac{h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2 \frac{h^2}{c^2}} = 1;$$

$$2) \text{ при } h = 0 \text{ маємо точку } O(0,0,0).$$

Аналіз перетинів дає змогу побудувати поверхню.

Поверхні, складені із прямих ліній, називаються *лінійчатими*. Такими поверхнями є циліндричні, конічні поверхні, а також однопорожнинний гіперболоїд і гіперболічний параболоїд.

Приклад. Скласти рівняння конуса з вершиною в точці $O(0,0,0)$, якщо напрямним є коло $x^2 + y^2 = R^2$, що лежить у площині $z = b$.

Розв'язування. Нехай $M(x, y, z)$ – будь-яка точка конуса. Канонічні рівняння твірних, що проходять через точку $O(0,0,0)$ й точку $N(x_1, y_1, z_1)$ перетину твірної ON з колом, будуть $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$. Виключимо x_1, y_1 і z_1 із цих

рівнянь та рівняння $x_1^2 + y_1^2 = R^2$ (точка (x_1, y_1, z_1) лежить на колі), при цьому

$z_1 = b$. Маємо: $\frac{x}{x_1} = \frac{z}{b}, \frac{y}{y_1} = \frac{z}{b}$, звідси $x_1 = b \cdot \frac{x}{z}$ й $y_1 = b \cdot \frac{y}{z}$. Підставляючи

значення x_1 й y_1 в рівняння кола $x_1^2 + y_1^2 = R^2$, одержимо

$$\left(b \cdot \frac{x}{z}\right)^2 + \left(b \cdot \frac{y}{z}\right)^2 = R^2 \text{ або } x^2 + y^2 = \frac{R^2}{b^2} z^2. \text{ Це і є шукане рівняння конуса.}$$

Контрольні питання

1. Напишіть канонічне рівняння еліпсоїда.
2. Напишіть канонічні рівняння гіперболоїдів.
3. Напишіть канонічні рівняння параболоїдів.
4. Що називається циліндричною поверхнею? Що називається утворюючою й напрямною циліндричної поверхні?
5. Напишіть рівняння гіперболічного циліндра, еліптичного циліндра.
6. Яка поверхня називається поверхнею обертання? Запишіть рівняння поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі Oz .
7. Яка поверхня називається конусом? Що називається твірною й напрямною конуса?
8. Напишіть канонічне рівняння конуса.

Лекція 12. Вступ до математичного аналізу. Множини чисел. Числові послідовності

12.1. Числові множини.

12.2. Поняття числової послідовності, її границя.

12.2.1. Поняття послідовності.

12.2.2. Границя послідовності.

12.3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.

12.1. Числові множини

Множину чисел, які використовують для рахування $\mathbb{N}$, $n \geq 1$ називають *натуральними* числами. Вона є нескінченною: після кожного натурального числа є якесь наступне число, а за ним ще одне і так далі.

Найменшим натуральним числом є 1, число 0 не належить множині натуральних чисел, найбільшого числа не існує. Натуральні числа та числа, протилежні до них, разом із числом 0 утворюють множину *цілих чисел*, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$. Отже, множина натуральних чисел є підмножиною цілих чисел, тобто $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Слід зауважити, що множина цілих чисел є *зліченною*.

Не всі цілі числа діляться на інші цілі числа без остачі. Появилися дробі і разом з ними поняття раціональних чисел. Отже, *раціональні числа* – це цілі та дробові (додатні і від’ємні). Їх позначають буквою $\mathbb{Q}$. З означення раціональних чисел випливає, що $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Раціональні числа записують у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, n – натуральне.

Числа, які зображуються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають *ірраціональними*. Раціональні та ірраціональні числа утворюють *множину дійсних чисел*, їх позначають $\mathbb{R}$, вона є *незліченною* множиною.

Уявна одиниця. Комплексні числа. Розширення множини всіх чисел до континууму вирішило багато проблем. Дійсні числа придатні для точного опису різного роду явищ і їхній зв'язок з реальністю очевидний для багатьох. Однак в цієї множини чисел є одна проблема щодо повноти відносно піднесення до степенів. Найпростіший приклад – це відсутність квадратних коренів у від'ємних чисел. Вводять тоді таке число i , якого немає на числовій прямій та квадрат якого дорівнює -1 , воно називається *уявною одиницею*. Квадратні корені від'ємних дійсних чисел становитимуть інші *уявні числа*, що виражаються через i ($\sqrt{-100} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{-1} = 10i$).

Упроваджуючи можливість додавати і віднімати дійсні та уявні числа, ми розширюємо наше «поле діяльності» до множини *комплексних чисел* (позначають як $\mathbb{C}$), яку можна представити у вигляді площини.

12.2. Поняття числової послідовності, її границя

12.2.1. Поняття послідовності

Якщо задана закономірність, згідно з якою кожному натуральному числу $1, 2, 3, \dots$, відповідає деяке дійсне число, то говорять, що задана **числова послідовність**: $\forall n \rightarrow a_n, n = 1, 2, 3, \dots$.

Послідовність можна розглядати як функцію, областю визначення якої є множина натуральних чисел. Послідовність визначається формулою, тобто законом, згідно з яким устанавлюється спосіб відповідності заданих чисел послідовним натуральним числам. Послідовність із загальним членом a_n позначається $\{a_n, n \geq 1\}$.

Послідовності бувають **скінченними** і **нескінченними**. Наприклад, послідовність парних натуральних чисел – це нескінченна послідовність, а послідовність двоцифрових чисел, кратних 19, – це скінченна послідовність.

Послідовність вважають заданою, якщо кожний її член можна визначити за його номером.

Основні способи задання послідовності: описовий, табличний, за допомогою формул, також рекурентний спосіб задання послідовності.

Означення. Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається **монотонно зростаючою (спадною)**, якщо $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$), $\forall n$.

Означення. Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається **монотонно неспадною (незростаючою)**, якщо $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$), $\forall n$.

Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається **обмеженою зверху**, якщо існує число m , таке, що для всіх $n \geq 1$ виконується нерівність $a_n \leq m$.

Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається **обмеженою знизу**, якщо існує число m , таке, що для всіх $n \geq 1$ виконується нерівність $a_n \geq m$.

Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ не обмежена зверху або знизу, називається **необмеженою**.

12.2.2. Границя послідовності

Означення. Число a називається **границею послідовності** $\{a_n, n \geq 1\}$, якщо для кожного як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число N , що при всіх $n > N$ виконується нерівність: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Той факт, що число a є границею послідовності $\{a_n, n \geq 1\}$ записується у вигляді:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ або } a_n \rightarrow a, \text{ якщо } n \rightarrow \infty.$$

Зауважимо, що нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівностям:

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon, \text{ або } a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Це означає, що число a_n належить інтервалу $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Такий інтервал називається ε -околом точки a .

Означення границі послідовності можна перефразувати наступним чином, надавши йому геометричну наочність: *число a називається границею послідовності $\{a_n, n \geq 1\}$, якщо в будь-який ε -окіл числа a потраплять всі члени*

послідовності, починаючи з деякого номера, яким би вузьким цей окіл не був. Поза ε -околом є скінченне число членів даної послідовності.

Означення. Послідовність, що має границю, називається **збіжною**, а яка не має границі, називається **розбіжною**.

Отже, послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ має своєю границею число a , тобто збіжна, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, що для $\forall n > N$ виконується нерівність:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Властивості збіжних послідовностей

1. Границя сталої дорівнює цій сталій.
2. Якщо послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ має границю, то ця границя єдина.
3. Послідовність, яка має границю, є обмеженою.
4. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$. Тоді існує число N , таке, що при будь-якому $n > N$ справджуватиметься нерівність $a_n < b$.
5. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Якщо для всіх елементів послідовності $\{a_n, n \geq 1\}$ виконується нерівність $a_n \leq b$, то $a \leq b$.
6. Про три послідовності.
Нехай виконується нерівність $x_n \leq u_n \leq y_n$. Якщо послідовності $\{x_n, n \geq 1\}$ і $\{y_n, n \geq 1\}$ збіжні, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, то послідовність $\{u_n, n \geq 1\}$ також буде збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.
7. Будь-яка монотонна обмежена послідовність має границю (теорема Больцано-Вейерштрасса).

8. Основні теореми про границі послідовності. Якщо послідовності $\{x_n, n \geq 1\}$ і $\{y_n, n \geq 1\}$ збіжні, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c a;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}, \text{ якщо } b \neq 0.$$

12.3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

Означення. Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається *нескінченно малою*, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Зауваження. Для того, щоб послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ мала границю a , необхідно і достатньо, щоб $a_n = a + \alpha_n$, де $\{\alpha_n, n \geq 1\}$ – нескінченно мала послідовність.

Означення. Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається *нескінченно великою*, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Запис $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ означає, що $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, такий що $|a_n| > \varepsilon$ при $\forall n > N$.

Властивості нескінченно малих (великих) послідовностей

1. Сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

2. Добуток нескінченно малої послідовності і обмеженої є нескінченно мала послідовність.

3. Якщо $\{a_n, n \geq 1\}$ – нескінченно мала послідовність і $a_n \neq 0$, то послідовність $\left\{ b_n = \frac{1}{a_n}, n \geq 1 \right\}$ є нескінченно великою. Якщо $\{b_n, n \geq 1\}$ нескінченно велика послідовність, то послідовність $\left\{ a_n = \frac{1}{b_n}, n \geq 1 \right\}$ є нескінченно малою послідовністю.

Контрольні питання

1. Множини чисел, навести приклади чисел, які належать до вказаних множин.
2. Означити числову послідовність, навести приклади її задання.
3. Поняття монотонно неспадної (незростаючої) послідовності, монотонно спадної (зростаючої) послідовності.
4. Обмежені та необмежені числові послідовності.
5. Означити границю числової послідовності, пояснити її.
6. Користуючись означенням границі послідовності, довести, що:
а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{2n+1} = \frac{5}{2}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$.
7. Основні властивості збіжних послідовностей.
8. Поняття нескінченно малої та нескінченно великої послідовності, властивості.

Лекція 13. Функція. Границя функції в точці

13.1. Функція. Основні поняття і означення. Основні елементарні функції.

13.2. Границя функції в точці.

13.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Важливі границі.

13.1. Функція. Основні поняття і означення

Означення. *Функцією* $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E , за якої кожному значенню змінної x , $x \in D$ відповідає одне й тільки одне значення змінної y , $y \in E$.

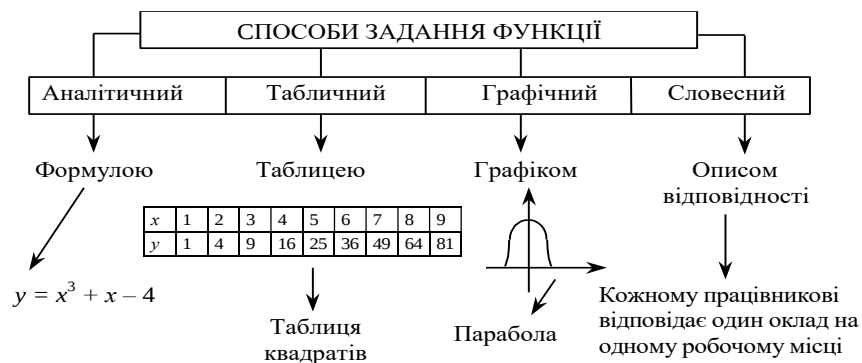
При цьому вважають, що x – незалежна змінна, або аргумент; y – залежна змінна, або функція; f – символ закону відповідності; E – область визначення функції; D – множина значень функції.

Означення. *Областю визначення* функції $y = f(x)$ називається множина значень, які набуває незалежна змінна x . Позначається D .

Означення. *Областю значень* функції $y = f(x)$ називається множина значень, яких набуває залежна змінна y при всіх значеннях x з області визначення функції. Позначається E .

Означення. Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок $M(x, f(x))$ координатної площини, абсциси яких належать області визначення функції, а ординати є відповідними значеннями цієї функції.

Отже, поняття функції означається за допомогою трьох понять: «область визначення», «область значень» і закономірність, згідно з якою кожному елементу з множини X відповідає єдине значення з множини Y .



Класифікація функцій за їхніми властивостями

1. Обмежені та необмежені функції

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на множині X , називається **обмеженою зверху (знизу)** на цій множині, якщо множина її значень обмежена зверху (знизу). Іншими словами:

$$\exists M \in \mathbb{R}, \text{ що } \forall x \in X \text{ виконується нерівність } f(x) \leq M \text{ (} f(x) \geq M \text{)}.$$

Означення. Функція $y = f(x)$, обмежена зверху і знизу на множині D , називається **обмеженою** на цій множині.

Функція $y = f(x)$, визначена на множині D , і така, що не є обмеженою зверху (знизу) на цій множині, називається **необмеженою** зверху (знизу) на цій множині.

Приклад. Функція $y = \sin x$ обмежена на $\mathbb{R}$, функція $y = x^2$ обмежена знизу на $\mathbb{R}$ і необмежена зверху на $\mathbb{R}$, функція $y = x^3$ – необмежена на $\mathbb{R}$.

2. Парні та непарні функції

Означення. Функція $y = f(x)$, називається **парною (непарною)**:

$$y(-x) = y(x) \text{ – функція парна;}$$

$$y(-x) = -y(x) \text{ – функція непарна.}$$

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат ($y = x^2$), а графік непарної функції симетричний відносно початку координат ($y = x^3$).

3. Монотонні функції

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на множині D , називається:

– **зростаючою (спадною)** – якщо на цій множині більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції:

$$\forall x \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

– **незростаючою (неспадною)** – якщо на цій множині меншому значенню аргументу відповідає не менше (не більше) значення функції:

$$\forall x \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Зростаюча, спадна, незростаюча, неспадна функції називаються **монотонними**.

4. Періодичні функції

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на множині D , називається *періодичною*, якщо $\exists T \neq 0: f(x+T) = f(x), \forall x \in D$.

Приклад. Періодичними є тригонометричні функції $y = \sin x, y = \cos x, T = 2\pi$, також $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, T = \pi$.

Складена функція, обернена, неявно і параметрично задані функції

Означення. Функція $y = F(u), u = v(x)$ називається *складеною функцією*, або *суперпозицією* функцій $F(u)$ та $v(x)$, і позначається $y = F(v(x))$.

Приклад. Функція $y = 3\cos(2x+1)$ – складена, вона є суперпозицією функцій: $y = 3(u(v(x))), u = \cos v, v = 2x+1$.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ встановлює відповідність між множинами D та E . Якщо обернена відповідність між множинами E та D буде функцією, то вона називається *оберненою* до даної $y = f(x)$, її позначають $y = f^{-1}(x)$.

Приклад. Функції $y = x^3$ та $y = \sqrt[3]{x}$ взаємно обернені.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

Отже, функція $x = \varphi(y)$ є оберненою до $y = f(x)$, якщо:

- 1) область визначення функції φ є множиною значень функції f ;
- 2) множина значень функції φ є областю визначення функції f ;
- 3) кожному значенню змінної $y \in E$ відповідає єдине значення змінної $x \in D$.

3)-й пункт дає визначення оберненої функції тільки для строго монотонних функцій. При цьому, якщо пряма функція строго зростає (спадає), то обернена їй функція також строго зростає (спадає).

Означення. Функція називається *неявно заданою*, якщо її задано рівнянням $F(x, y) = 0$, яке не розв'язане відносно змінної y .

Довільну явно задану функцію можна записати як неявно задану відповідним рівнянням, але не навпаки.

Означення. Система рівнянь $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in T \end{cases}$ виражає змінну x та її функцію $y = f(x)$ як функції від параметру $t \in T$ **параметричним заданням** функції.

Приклад. Система рівнянь

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

визначає коло радіуса R з центром у початку прямокутної декартової системи координат.

Основні елементарні функції, їх властивості та графіки

Означення. *Основними елементарними функціями* називають такі функції:

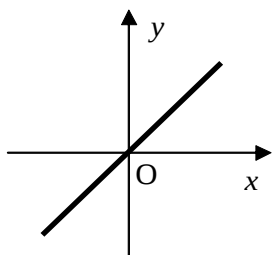
1. *Степенева функція* $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Область визначення і графік цієї функції залежать від значення α .
2. *Показникова функція* $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.
3. *Логарифмічна функція* $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$.
4. *Тригонометричні функції:* $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$.
5. *Обернені тригонометричні функції:*
 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$.

Означення. Функції, отримані з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) та скінченного числа утворень складеної функції, називають *елементарними*.

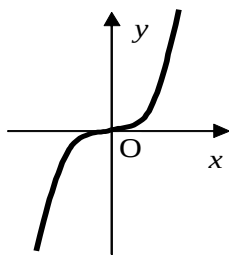
Елементарні функції поділяються на алгебраїчні й неалгебраїчні (трансцендентні), причому до *алгебраїчних* функцій належать: цілі раціональні, дробово-раціональні, ірраціональні; до *неалгебраїчних* належать: показникові, логарифмічні, тригонометричні, обернені тригонометричні.

Графіки основних елементарних функцій

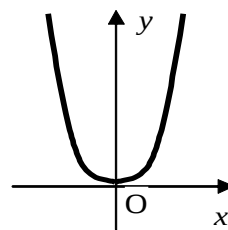
Алгебраїчні функції



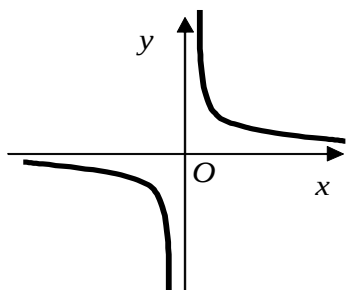
$$y = x$$



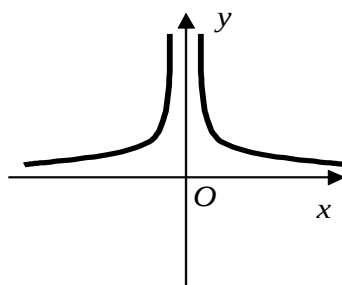
$$y = x^3, \quad y = x^{2n+1}$$



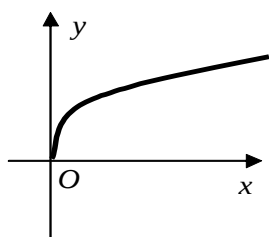
$$y = x^2, \quad y = x^{2n}$$



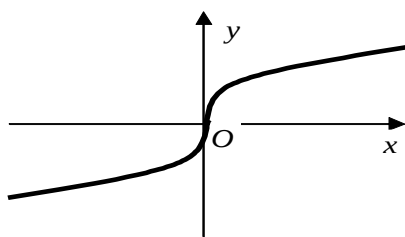
$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x^{2n+1}}$$



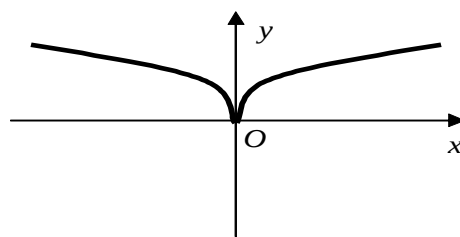
$$y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{1}{x^{2n}}$$



$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt[2n]{x}$$

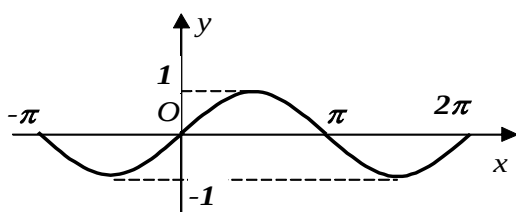


$$y = \sqrt[3]{x}, \quad y = \sqrt[2n+1]{x}$$

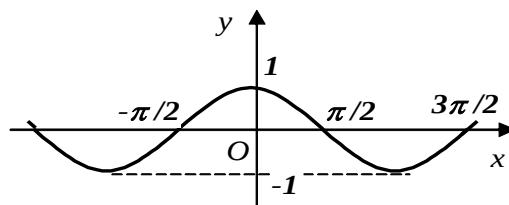


$$y^3 = x^2, \quad y^{2n+1} = x^{2m} \\ (2n+1 > 2m)$$

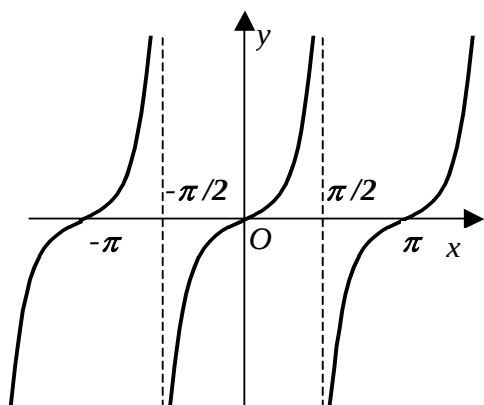
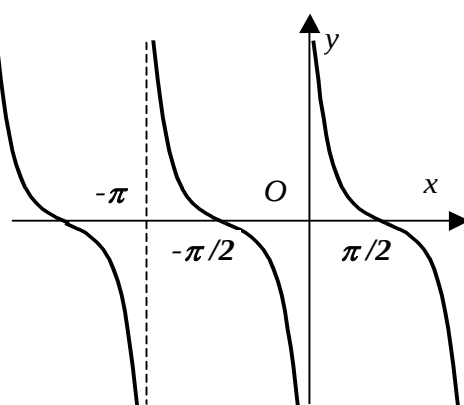
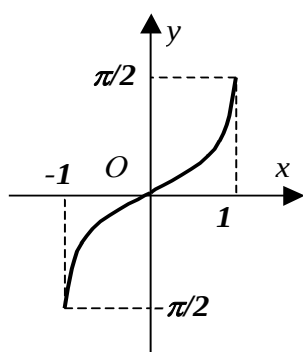
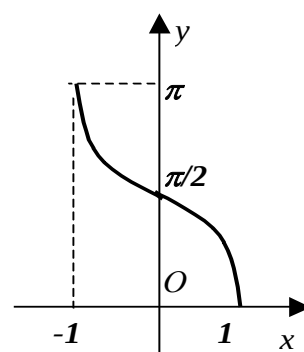
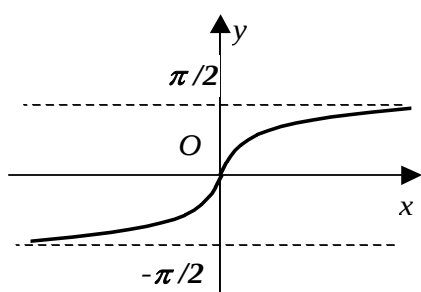
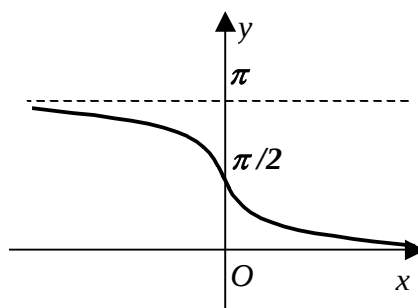
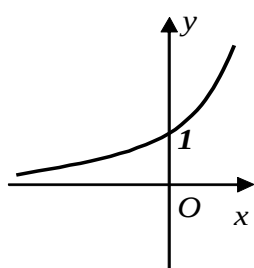
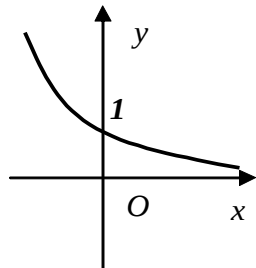
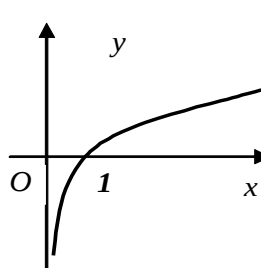
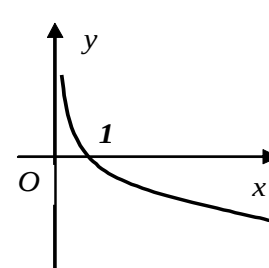
Трансцендентні функції



$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$

 $y = \operatorname{tg} x$  $y = \operatorname{ctg} x$  $y = \arcsin x$  $y = \arccos x$  $y = \operatorname{arctg} x$  $y = \operatorname{arcctg} x$  $y = a^x, a > 1$  $y = a^x, 0 < a < 1$  $y = \log_a x, a > 1$  $y = \log_a x, 0 < a < 1$

Елементарні функції поділяють на:

1. Цілі алгебраїчні многочлени

$$y = A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \dots + A_{n+1}.$$

2. Дробово-раціональні вирази

$$y = \frac{Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Cx + D}{A_1 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + C_1 x + D_1}.$$

Зауваження. Сукупність многочленів та раціональних дробів утворює клас *раціональних функцій*.

3. Функція, утворена за допомогою скінченного числа суперпозицій та арифметичних операцій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показниками і яка не є раціональною, називається *ірраціональною функцією*.

4. Елементарна функція, яка не є раціональною або ірраціональною, називається *трансцендентною функцією*.

13.2. Границя функції в точці

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай $x \in (a, b)$ і функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) , крім, можливо,

точки $x = x_0 \in (a, b)$.

Означення. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх x із δ -околу точки x_0 , тобто таких, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$ виконується нерівність:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x: \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий δ -окіл точки x_0 , що для всіх $x \neq x_0$ із δ -околу точки x_0 відповідні ординати графіка функції $y = f(x)$ лежать в інтервалі $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, яким би вузьким він є.

Означення. Число A називають *правою (лівою) границею функції* $y = f(x)$ в т. x_0 , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх x , таких, що $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$) виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записують: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A \right)$.

Теорема. Функція $y = f(x)$ має границю в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в цій точці існують права й ліва границі і вони рівні між собою

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A.$$

13.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення. Функцію $y = \alpha(x)$ називають *нескінченно малою* при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Означення. Функцію $y = g(x)$ називають *нескінченно великою* при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

Теорема. Якщо при $x \rightarrow x_0$ функція $y = \alpha(x)$ нескінченно мала, то функція

$$y = \frac{1}{\alpha(x)} = g(x) \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ нескінченно велика, і навпаки, якщо при } x \rightarrow x_0$$

функція $y = g(x)$ нескінченно велика, то функція $y = \alpha(x) = \frac{1}{g(x)}$ при $x \rightarrow x_0$

нескінченно мала.

Теорема. Для функції $y = f(x)$ існує скінчена границя $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ тоді й лише тоді, коли цю функцію можна подати у вигляді суми

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ де } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Властивості нескінченно малих функцій

– Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

– Добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є нескінченно малою функцією.

– Добуток нескінченно малої функції на константу є нескінченно малою функцією.

– Добуток скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

– Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, границя якої не дорівнює нулю, є нескінченно малою функцією.

Означення. Нехай $y = \varphi(x)$ і $y = g(x)$ – нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$. Тоді справедливі твердження порівняння нескінченно малих функцій.

- якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = A$, де $A \neq 0$, то функції $y = \varphi(x)$ і $y = g(x)$ називають нескінченно малими *одного порядку*;

- якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = 1$, то функції $y = \varphi(x)$ і $y = g(x)$ називають *еквівалентними* нескінченно малими: $\varphi(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow x_0$;

- якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = 0$, то функцію $y = \varphi(x)$ називають *нескінченно малою вищого порядку* порівняно з функцією $y = g(x)$.

Основні теореми про границі

Теорема (Єдиність границі). Якщо функція $y = f(x)$ має границю A при $x \rightarrow x_0$, то ця границя єдина.

Теорема. Якщо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ мають границі в точці $x = x_0$, тобто $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, тоді

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

Наслідки теореми

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (Cf(x)) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^m = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^m ;$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} ;$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} ;$
6. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \ln(f(x))} .$

Теорема (Про границю трьох функцій). Якщо в деякому околі точки $x = x_0$, крім, можливо самої точки, виконується нерівність для заданих функцій $y = \varphi(x)$, $y = f(x)$, $y = g(x)$:

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x),$$

причому $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, то

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Контрольні питання

1. Функція однієї змінної, основні поняття.
2. Основні елементарні функції, їх задання та опис.
3. Навести приклади параметричного задання функції.
4. Означення границі функції в точці, пояснення.
5. Основні теореми про границі функції.
6. Навести приклади нескінченно малої та нескінченно великої функції в точці. Дати загальне означення.

Лекція 14. Важливі границі. Неперервність функції

14.1. Границя функції при $x \rightarrow \infty$.

14.2. Важливі границі.

14.2.1. Перша важлива границя.

14.2.2. Друга важлива границя.

14.3. Порівняння нескінченно малих функцій.

14.4. Неперервність функції у точці. Точки розриву.

14.5. Основні теореми про неперервні функції.

14.1. Границя функції при $x \rightarrow \infty$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на всій числовій прямій.

Означення. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0: \forall |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Використовують позначення: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

З геометричної точки зору рівність $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ означає, що для довільного додатного ε існує додатне число M , таке, що при $x \in (-\infty; M) \cup (M; +\infty)$ точки графіка функції $y = f(x)$ знаходяться в інтервалі з шириною 2ε : $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$.

Означення. Число A_1 називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_1(\varepsilon) > 0: \forall x > M_1 \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon.$$

Означення. Число A_2 називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_2(\varepsilon) < 0: \forall x < M_2 \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Наприклад, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

14.2. Важливі границі

14.2.1. Перша важлива границя

При обчисленні границь, що містять тригонометричні функції та зводяться до невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, часто використовують *першу важливу границю*:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (14.1)$$

Приклад. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$, $k \neq 0$.

Розв'язування. Помножимо чисельник та знаменник дробу під знаком границі на число $k \neq 0$. Отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{kx} = k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx}.$$

Зробимо заміну змінної $t = kx$. При $x \rightarrow 0$ $t \rightarrow 0$. Тому, з врахуванням формули, отримуємо: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = k \cdot 1 = k$.

Таким чином, отримано формулу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k. \quad (14.2)$$

14.2.2. Друга важлива границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e. \quad (14.3)$$

Формулу (14.3) називають *другою важливою границею*.

Виконавши у границі $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ заміну змінної $\frac{1}{x} = t$, отримаємо, що

при $x \rightarrow \infty$ $t \rightarrow 0$. Маємо: $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

Другу важливу границю використовують, коли при обчисленні границі мають справу з невизначеністю виду (1^∞) . При обчисленні границь, пов'язаних з другою важливою границею, часто застосовують наступне твердження:

Якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, то існує також границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, яка обчислюється за формулою:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}. \quad (14.4)$$

Приклад. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x$.

Розв'язування. Оскільки при $x \rightarrow \infty$ $\frac{k}{x} \rightarrow 0$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = (1^\infty)$, тому для обчислення заданої границі використаємо другу важливу границю. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k} \cdot k} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}} \right)^k = e^k.$$

Деякі важливі границі

Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Розв'язування. Запишемо вираз під знаком границі у вигляді

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

За основною логарифмічною тотожністю, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$. Використовуючи формулу (14.3), маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^1.$$

Звідси отримуємо, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Таким чином, ми отримали важливу формулу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (14.5)$$

У формулі (14.5) виконаємо заміну $\ln(1+x) = t$. При $x \rightarrow 0$ $t \rightarrow 0$. Тоді $x = e^t - 1$. Вираз набуває вигляду:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^t - 1}{t}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t}}.$$

Звідси знаходимо формулу, що часто використовується при обчисленні границь від виразів, що містять показникові функції:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (14.6)$$

Використовуючи (14.5), знайдемо границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$. Для цього у виразі під

знаком границі перейдемо до натурального логарифму. Отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln a \cdot x} = \frac{1}{\ln a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot 1 = \frac{1}{\ln a}.$$

Отже, доведено формулу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}. \quad (14.7)$$

Застосування границі (14.7) дозволяє обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \ln a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a}.$$

У останній границі виконаємо заміну $x \ln a = t$. Якщо $x \rightarrow 0$, то $t \rightarrow 0$.

Отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \ln a \cdot 1 = \ln a.$$

Таким чином, маємо формулу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad (14.8)$$

14.3. Порівняння нескінченно малих функцій

Дві нескінченно малі функції порівнюють між собою за допомогою дослідження їх відношення. Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$, тобто виконуються рівності:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0.$$

Означення. Функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *нескінченно малими одного порядку* при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}.$

Означення. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою вищого порядку*, ніж $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$

Означення. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою нижчого порядку*, ніж $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty.$

Означення. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою k -го порядку* відносно $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}.$

Означення. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *непорівняними* при $x \rightarrow x_0$, якщо у точці x_0 не існує границі їх відношення.

Зауваження. У означеннях замість $x \rightarrow x_0$ може розглядатися $x \rightarrow \pm\infty.$

Означення. Функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, що є нескінченно малими при $x \rightarrow x_0$, називають *еквівалентними нескінченно малими*, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$

Використовують позначення: $\alpha(x) \sim \beta(x).$

Розглянемо основні властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема. Нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні при $x \rightarrow x_0$ тоді і лише тоді, коли їх різниця $\alpha(x) - \beta(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж жодна з функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x).$

Теорема. Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$, $\beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Тоді, якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то існує і границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$, причому ці границі рівні між собою.

Наведена теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій замінювати нескінченно малу функцію на еквівалентну їй нескінченно малу. При цьому часто використовуються наступні еквівалентні нескінченно малі величини.

1. $\sin \alpha \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0$	6. $e^\alpha - 1 \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0$
2. $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0$	7. $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a, \alpha \rightarrow 0$
3. $\arcsin \alpha \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0$	8. $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0$
4. $\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0$	9. $\log_a(1 + \alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln a}, \alpha \rightarrow 0$
5. $1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}, \alpha \rightarrow 0$	10. $(1 + \alpha)^k - 1 \sim k\alpha, \alpha \rightarrow 0$

Ці формули досить легко отримати, використовуючи правило Лопітала, яке буде розглянуте при вивченні диференціального числення функцій однієї змінної.

Наслідки першої важливої границі

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arsin} x}{x} = 1;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}.$$

Друга важлива границя $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ та її наслідки

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Наведемо ще кілька важливих границь:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{a^x} = 0, m \in \mathbb{Z}, a > 1. \quad (14.9)$$

14.4. Неперервність функції у точці. Точки розриву

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у точці x_0 і у деякому околі цієї точки.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною у точці x_0* , якщо границя функції $f(x)$ у цій точці дорівнює значенню функції у ній:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (14.10)$$

З означення випливає, що для неперервності функції у точці x_0 необхідними та достатніми є виконання наступних умов:

1) $f(x)$ визначена у точці x_0 , тобто $\exists f(x_0)$;

2) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$;

3) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$;

4) $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Позначимо $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Величину Δx називають *приростом аргументу* у точці x_0 , Δy – *приростом функції* у цій точці. Умова $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ є рівносильною умові $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. З цієї рівності випливає інше означення неперервності функції у точці.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною у точці x_0* , якщо нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$ у цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (14.11)$$

Зауваження. Можна довести, що всі основні елементарні функції є неперервними у своїх областях визначення.

Для функції $y = f(x)$, неперервної в точці x_0 , виконується рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right). \quad (14.12)$$

З рівності (14.12) випливає, що при знаходженні границі неперервної функції $f(x)$ можна перейти до границі під знаком функції, тобто у функції $f(x)$ замість аргументу x можна підставити його граничне значення.

Приклад. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x}\right)$.

Розв'язування. Оскільки функція $y = \sin x$ є неперервною у кожній точці числової прямої, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(g(x)) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right)$, тому отримуємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x}\right) &= \sin\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

Поняття односторонньої неперервності функції у точці (неперервності зліва або справа)

Означення. Функцію $f(x)$ називають *неперервною у точці x_0 зліва*, якщо вона визначена на проміжку $(x_0 - \varepsilon; x_0]$, де $\varepsilon > 0$, і $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$. Якщо ця функція визначена на проміжку $[x_0; x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, і $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функцію $f(x)$ називають *неперервною у цій точці справа*.

Якщо функція є неперервною у деякій точці, то вона неперервна у цій точці і зліва, і справа.

Означення. Точки, у яких порушується неперервність функції, називають *точками розриву* цієї функції.

Якщо $x = x_0$ – точка розриву функції $y = f(x)$, то у ній не виконується хоча б одна з умов 1) – 4), що впливають з означення неперервності функції у точці. У залежності від того, яка з цих умов не виконується, розрізняють наступні типи точок розриву.

1. Якщо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = \text{const}$, проте $A \neq f(x_0)$, або функція $f(x)$ не визначена у точці x_0 , то точку x_0 називають *точкою усувного розриву*. У цьому випадку досить довизначити функцію у цій точці, поклавши $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, щоб отримати функцію, неперервну у точці x_0 .

2. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A_1 = \text{const}$, $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A_2 = \text{const}$, проте $A_1 \neq A_2$. У цьому випадку точку x_0 називають *точкою розриву першого роду* або *точкою розриву типу стрибка*. При цьому величину $\delta = A_2 - A_1$ називають *стрибком функції $f(x)$ у точці x_0* .

3. Хоча б одна з границь $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ чи $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ не існує або дорівнює ∞ . Точка x_0 у цьому випадку називається *точкою розриву другого роду*.

Приклад. Знайти точки розриву вказаних функцій та визначити їх тип:

$$1) f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 2; \\ x^2+3, & x \geq 2. \end{cases} \quad 2) f(x) = \frac{1}{x^2-4}.$$

Розв'язування. 1) Знайдемо ліву та праву границі функції $f(x)$ в точці $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (2x-1) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+3) = 7.$$

Односторонні границі функції $f(x)$ у точці $x = 2$ існують, вони скінченні, але не співпадають, тому $x = 2$ – точка розриву першого роду (типу стрибка). При цьому стрибок функції у цій точці $\delta = 7 - 3 = 4$.

2) При $x = \pm 2$ функція $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ не визначена. При цьому односторонні границі функції у цій точці є нескінченними.

Точки $x = \pm 2$ є точками розриву другого роду.

14.5. Основні теореми про неперервні функції

Теореми про властивості функцій, неперервних у точці, безпосередньо впливають з відповідних теорем про границі функцій.

Теорема. Сума, різниця, частка та добуток неперервних функцій є неперервними функціями (для частки: за виключенням значень аргументу, для яких дільник дорівнює нулю).

Теорема. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна у точці x_0 , а функція $y = f(u)$ є неперервною у точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ є неперервною у точці x_0 .

Зауваження. 1. Многочлен є функція, неперервна на всій числовій прямій.

2. Будь-яка дробово-раціональна функція неперервна в кожній точці своєї області визначення.

Означення. Якщо функція неперервна у кожній точці інтервалу $(a; b)$, то її називають *неперервною на цьому інтервалі*.

Означення. Функцію називають *неперервною на відрізку $[a; b]$* , якщо вона є неперервною на інтервалі $(a; b)$, неперервною справа у точці $x = a$ та неперервною зліва у точці $x = b$.

Неперервні на відрізку функції мають ряд важливих властивостей.

Сформулюємо деякі з них без доведення.

Теорема 1 (Перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набуває значень різних знаків, то всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка $x = c$, у якій $f(x)$ дорівнює нулю.

Геометричний зміст цієї теореми полягає у тому, що неперервна крива при переході з однієї півплощини в другу, межею між якими є вісь Ox , перетинає цю вісь.

Теорема 2 (Друга теорема Больцано-Коші). Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набуває різних значень $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$. Тоді для довільного числа $C \in (A; B)$ знайдеться точка $x = c \in (a; b)$, що $f(c) = C$.

Дана теорема стверджує, що при переході від одного значення до іншого неперервна функція набуває всіх проміжних значень.

Теорема (Теорема Вейєрштрасса). Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найбільше і найменше значення, тобто функція $f(x) \in C[a, b]$ обмежена на $[a; b]$.

Теорема стверджує, що неперервна на $[a; b]$ функція досягає на цьому відрізку найбільшого значення $M = \max_{[a; b]} f(x)$ та найменшого значення $m = \min_{[a; b]} f(x)$.

Наслідок. Нехай $y = f(x)$ строго монотонна та неперервна на деякому проміжку $[a; b]$ і нехай $Y = [m; M]$ – множина її значень. Тоді на множині Y обернена функція $x = f^{-1}(y)$ однозначна, строго монотонна та неперервна.

Контрольні питання

1. Перша важлива границя, її наслідки. Навести приклади використання
2. Друга важлива границя та її наслідки.
3. Порівняння нескінченно малих функцій. Основні еквівалентні величини, їх використання при обчисленні границь.
4. Означення неперервної функції в точці, на відрізку.
5. Класифікувати точки розриву функції, навести приклади.
6. Властивості неперервних функцій на відрізку, пояснення теорем.

Лекція 15. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Похідна функції однієї змінної

15.1. Поняття похідної. Геометричний зміст похідної.

15.2. Неперервність та диференційованість функції.

15.3. Правила диференціювання. Похідні від основних елементарних функцій.

15.4. Диференціювання складеної функції.

15.5. Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій.

15.6. Таблиця похідних.

15.7. Диференціювання функцій, заданих у параметричній та неявній формах.

15.1. Поняття похідної. Геометричний зміст похідної

Нехай на деякому проміжку $(a; b)$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x \in (a; b)$ і надамо x довільного приросту Δx так, щоб точка $x + \Delta x$ також належала проміжку $(a; b)$. Приріст функції при переході від точки x до точки $x + \Delta x$ має вигляд: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Означення 1. *Похідною* функції $y = f(x)$ у точці x називають границю відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідна функції $y = f(x)$ у точці x позначається одним з символів:

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, y'_x, f'(x).$$

Таким чином, за означенням похідної маємо:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (15.1)$$

З означення похідної випливає наступний спосіб її знаходження:

1) надати значенню x довільного приросту Δx і знайти відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

2) знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

3) знайти границю цього відношення

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то вона дорівнює шуканій похідній $f'(x)$.

Означення 2. Операцію знаходження похідної від функції $f(x)$ називають *диференціюванням* цієї функції.

Розглянемо поняття односторонньої похідної. Односторонні похідні визначаються за допомогою односторонніх границь.

Означення 3. Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x . Границю відношення приросту функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ до приросту аргументу Δx , якщо $\Delta x \rightarrow 0$ і при цьому $\Delta x > 0$, називають *правою похідною* від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_+(x)$:

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (15.2)$$

Означення 4. Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x . Границю відношення приросту функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ до приросту аргументу Δx , якщо $\Delta x \rightarrow 0$ і при цьому $\Delta x < 0$, називають *лівою похідною* від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_-(x)$:

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (15.3)$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a, b]$, то під похідною у точці $x = a$ розуміють праву похідну, а у точці $x = b$ – ліву.

З означення похідної випливає, що похідна $f'(x)$ у точці $x = x_0$ існує тоді і тільки тоді, коли у цій точці існують ліва та права похідні і вони рівні між собою: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Якщо ж $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то похідна у цій точці не існує. Не існує похідної і у точках розриву функції $f(x)$.

Приклад. Довести, що функція $y = |x|$ не має похідної у точці $x = 0$.

Розв'язування. Приріст функції $y = |x|$ у точці $x = 0$, що відповідає приросту аргументу Δx , $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$. Це відношення дорівнює -1 при $\Delta x < 0$ і дорівнює 1 при $\Delta x > 0$. Тому границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ залежить від знаку Δx : вона дорівнює 1 при $\Delta x > 0$ і -1 при $\Delta x < 0$.

Таким чином, у точці $x = 0$ існують односторонні похідні $f'_-(0) = -1$ та $f'_+(0) = 1$, але $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. Це означає, що у точці $x = 0$ похідна функції $y = |x|$ не існує.

Геометричний зміст похідної функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ полягає у тому, що значення $f'(x_0)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка цієї функції, проведеної у точці з абсцисою $x = x_0$, до додатного напрямку осі Ox , тобто *кутовому коефіцієнту* цієї дотичної. При цьому **рівняння дотичної** до графіка $y = f(x)$ у точці $P_0(x_0; f(x_0))$ має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (15.4)$$

Якщо похідна $f'(x_0)$ додатна, то дотична до графіка функції утворює гострий кут з додатним напрямом осі Ox ; якщо ж $f'(x_0) < 0$, то цей кут – тупий. Якщо у точці x_0 похідна $f'(x_0)$ є нескінченною, то дотична до графіка $y = f(x)$ у цій точці паралельна осі Oy . У цьому випадку рівняння дотичної має вигляд: $x = x_0$.

Означення 6. Нормаллю до кривої називають пряму, що проходить перпендикулярно дотичній через точку дотику.

Оскільки добуток кутових коефіцієнтів двох перпендикулярних прямих дорівнює -1 , то кутовий коефіцієнт нормалі до графіка функції $y = f(x)$, проведеної у точці $P_0(x_0; f(x_0))$ дорівнює $\frac{-1}{f'(x_0)}$, а, відповідно, рівняння цієї нормалі має вигляд:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (15.5)$$

15.2. Неперервність та диференційованість функції

Означення 7. Функцію $y = f(x)$ називають *диференційованою* у точці x_0 , якщо у цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Означення 8. Функцію $y = f(x)$ називають *диференційованою* на проміжку, якщо вона диференційована у кожній точці цього проміжку.

Зв'язок між неперервністю функції у точці та її диференційованістю у цій точці встановлює наступна теорема.

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою у точці x_0 , то вона є неперервною у цій точці.

Твердження, обернене теоремі 1, невірне: з неперервності функції у точці не випливає її диференційованість у цій точці. Неперервність функції у точці є лише необхідною умовою її диференційованості у цій точці. Так, функція $y = |x|$ є неперервною у точці $x = 0$, але не є диференційованою у цій точці.

15.3. Правила диференціювання. Похідні від основних елементарних функцій

Теорема 2. Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовані у точці x , то їх сума, різниця, добуток та частка (частка за умови, що дільник $v(x) \neq 0$) також диференційовані у цій точці, причому виконуються рівності:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (15.6)$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad (15.7)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (15.8)$$

Теорема 3. Якщо $y = f(x) = C$, де C – стале число, то

$$f'(x) = (C)' = 0. \quad (15.9)$$

Теорема 4. Сталій множник можна виносити за знак похідної, тобто

$$(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x). \quad (15.10)$$

Деякі формули таблиці похідних, їх доведення

Отримаємо формулу для похідної степеневі функції $y = x^k$, $k \in \mathbb{R}$. Для цього використаємо означення похідної (15.1):

$$\begin{aligned} y' = (x^k)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^k - x^k}{\Delta x} = x^k \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^k - 1}{\Delta x} = x^k \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k \cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \\ &= k \cdot \frac{x^k}{x} = k \cdot x^{k-1}. \end{aligned}$$

Тут ми використали еквівалентність нескінченно малих: при $\alpha \rightarrow 0$ $(1 + \alpha)^k - 1 \sim k \cdot \alpha$. Таким чином, маємо формулу:

$$(x^k)' = k \cdot x^{k-1}. \quad (15.11)$$

Аналогічним чином отримаємо формули для похідних тригонометричних функцій.

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos x = \cos x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\
 &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin x = -\sin x.
 \end{aligned}$$

Отже, ми отримали формули:

$$(\sin x)' = \cos x \quad (15.12)$$

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (15.13)$$

При знаходженні цих похідних ми використали формулу, що є наслідком з першої важливої границі: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin k\alpha}{\alpha} = k$.

Знайдемо похідні від функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$. Для цього використаємо формулу (15.8) похідної частки функцій.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Таким чином, справедливими є формули:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (15.14)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (15.15)$$

Знайдемо похідну показникової функції $y = e^x$:

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Маємо формулу:

$$(e^x)' = e^x. \quad (15.16)$$

Для отримання формули (15.16) використано отриману при вивченні другої важливої границі формулу $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1$. Результат свідчить, що функція $y = e^x$ при диференціюванні не змінюється.

Похідну показникової функції загального вигляду $y = a^x$ знайдемо аналогічно формулі (15.16), для чого використаємо рівність $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a$.

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Таким чином, вірною є рівність:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a. \quad (15.17)$$

Знайдемо похідну логарифмічних функцій $y = \ln x$ та $y = \log_a x$.

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x} / x}{\cancel{\Delta x}} = \frac{1}{x}.$$

Ми використали еквівалентність нескінченно малих:

$$\text{при } \alpha \rightarrow 0: \ln(1 + k\alpha) \sim k\alpha.$$

Для отримання похідної від функції $y = \log_a x$ перейдемо до натуральних логарифмів: $y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Тоді за теоремою, виносячи сталий множник $\frac{1}{\ln a}$ за знак похідної, отримуємо:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad (15.18)$$

15.4. Диференціювання складеної функції

Знайдемо похідну від складеної функції $y = f(\varphi(x))$.

Теорема 5 (Про похідну складеної функції). Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x у точці x , а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u , то складена функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну y'_x у точці x і при цьому виконується рівність

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \quad (15.19)$$

Згідно з формулою (15.19) маємо таке правило диференціювання складеної функції: *похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на похідну від проміжного аргументу по кінцевому аргументу*. Це правило залишається справедливим, коли складена функція має кілька проміжних аргументів. Наприклад, якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

Зауваження. У різноманітних науково-технічних дослідженнях часто використовують так звані *гіперболічні функції*.

Означення. Гіперболічним синусом $\operatorname{sh} x$, гіперболічним косинусом $\operatorname{ch} x$, гіперболічним тангенсом $\operatorname{th} x$ та гіперболічним котангенсом $\operatorname{cth} x$ називають функції, що визначаються за такими формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Функції $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ визначені на всій числовій прямій, а функція $\operatorname{cth} x$ визначена для всіх дійсних $x \neq 0$.

Похідні гіперболічних функцій можна визначити, використовуючи їх означення, а також основні формули диференціювання:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \quad (15.20)$$

15.5. Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій

Нехай $y = f(x)$ та $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій. Сформулюємо теорему про зв'язок між похідними цих функцій.

Теорема 6 (Про похідну оберненої функції). *Якщо функція $y = f(x)$ є строго монотонною на проміжку $(a; b)$ і має у довільній точці x цього проміжку відмінну від нуля похідну $f'(x)$, то обернена їй функція $x = \varphi(y)$*

також має похідну у відповідній точці, при цьому похідна оберненої функції дорівнює:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (15.21)$$

Теорема 6 дає можливість отримати похідні обернених тригонометричних функцій.

Отримаємо формулу для похідної функції $y = \arcsin x$. Ця функція, визначена на відрізку $[-1; 1]$, є оберненою до функції $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Оскільки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $x = \sin y$ монотонно зростає і її похідна $x'_y = (\sin y)'_y = \cos y > 0 \quad \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то всі умови теореми 6 виконуються і можна скористатися формулою (15.21):

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Для отримання похідної функції $y = \arccos x$ використаємо тотожність:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Диференціюючи цю тотожність, маємо: $(\arcsin x + \arccos x)' = 0$. Звідси випливає, що $(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$ є оберненою для функції $x = \operatorname{tg} y$, де $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На цьому проміжку $x = \operatorname{tg} y$ монотонно зростає і $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, тобто умови теореми 6 виконані. Застосуємо цю теорему:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Похідну функції $y = \operatorname{arcsctg} x$ знайдемо, використовуючи тотожність

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Знайдемо похідні від її обох частин. Маємо $(\operatorname{arctg} x)' + (\operatorname{arcctg} x)' = 0$.
Звідси знаходимо, що $(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Таким чином, ми отримали формули для похідних обернених тригонометричних функцій:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (15.22)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (15.23)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (15.24)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (15.25)$$

15.6. Таблиця похідних. Приклади застосування основних формул диференціювання

Наведемо таблицю похідних. Тут вважатимемо, що функції, які диференціюються, є складеними, тобто їх аргумент u є проміжним: $u = u(x)$.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. $C' = 0$, $C = \text{const}$.

2. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

3. $(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$, $k \in \mathbb{R}$.

4. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

$$6. (\log_a u)' = \frac{1}{a \ln u} \cdot u', \quad a > 0, a \neq 1.$$

$$7. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

$$8. (\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$9. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$10. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

$$11. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$$

$$12. (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'.$$

$$13. (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'.$$

$$14. (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'.$$

$$15. (\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$$

$$16. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$17. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$18. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$19. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

Навести приклади обчислення похідних.

15.7. Диференціювання функцій, заданих у параметричній та неявній формах

Диференціювання параметрично заданої функції

Отримаємо формулу для знаходження похідної функції $y = y(x)$, заданої у параметричній формі, тобто у вигляді рівнянь $x = x(t)$, $y = y(t)$ при заданому проміжку зміни допоміжної змінної (параметра) $t: \alpha \leq t \leq \beta$. Будемо вважати, що функції $x(t)$ та $y(t)$ мають похідні x'_t та y'_t , причому функція $x(t)$ має обернену функцію $t = \varphi(x)$. За правилом диференціювання оберненої функції маємо: $t'_x = \frac{1}{x'_t}$.

Функцію $y = y(x)$, задану параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, розглянемо як складену функцію $y = y(t)$, де $t = \varphi(x)$. Тоді, за правилом диференціювання складеної функції, отримаємо: $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$.

Таким чином, ми отримали формулу диференціювання функції, заданої у параметричній формі:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (15.26)$$

Формула (15.26) дозволяє знаходити похідну y'_x , функції, заданої у параметричній формі, без безпосереднього знаходження залежності $y = y(x)$.

Диференціювання неявно заданої функції

Нехай функція $y = y(x)$ задана у неявній формі, тобто у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$. Для знаходження похідної y'_x немає необхідності виражати з цього рівняння змінну y через x в явному вигляді $y = f(x)$. Достатньо продиференціювати рівняння $F(x, y) = 0$ за змінною x , вважаючи при цьому змінну y функцією x , і з отриманого рівняння знайти y'_x . При цьому похідна y'_x виражатиметься через змінні x та y .

Контрольні питання

1. Означити похідну функції, пояснити обчислення її за означенням на прикладі.
2. Диференційованість та неперервність функції в точці.
3. Основні правила обчислення похідної, навести приклади.
4. Диференціювання параметрично заданої функції.
5. Пояснити на прикладі застосування теореми про похідну для оберненої функції.
6. Навести приклади обчислення похідної складеної та неявно заданої функції.
7. Отримати за відповідною методикою основні формули таблиці похідних.
8. Геометричний та механічний зміст похідної.

Лекція 16. Похідна та диференціал функції

16.1. Похідні вищих порядків.

16.2. Диференціал функції та його властивості.

16.3. Диференціали вищих порядків.

16.1. Похідні вищих порядків

Похідна n -го порядку функції $y = f(x)$

Розглянемо диференційовану функцію $y = f(x)$. Похідна цієї функції, тобто $y' = f'(x)$, теж є функцією змінної x , тому можна розглядати задачу знаходження похідної цієї функції. Якщо функція $y' = f'(x)$ є диференційованою, то її похідну називають *похідною другого порядку* функції $y = f(x)$ і позначають $y''(x)$ або $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Отже, $y''(x) = (y'(x))'$. Похідну від похідної другого порядку функції $y = f(x)$ називають її третьою похідною або *похідною третього порядку* та позначають $y'''(x)$. Таким чином, $y'''(x) = (y''(x))'$. Аналогічно можна визначити похідну довільного n -го порядку як похідну від похідної $(n-1)$ -го порядку. Для похідної n -го порядку використовують позначення $y^{(n)}(x)$ або $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Означення. *Похідною n -го порядку* або n -ою похідною функції $y = f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$ -го порядку цієї функції, тобто

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))'. \quad (16.1)$$

Похідні порядків, вищих, ніж перший, називають *похідними вищих порядків*.

Наведемо формули для похідних n -го порядку деяких елементарних функцій.

$$1. (x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)x^{m-n}. \quad (16.2)$$

$$2. (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a. \quad (16.3)$$

$$3. (e^x)^{(n)} = e^x. \quad (16.4)$$

$$4. (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad (16.5)$$

$$5. (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad (16.6)$$

$$6. (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}. \quad (16.7)$$

Для знаходження похідної n -го порядку добутку функцій $u(x)$ та $v(x)$ використовують формулу Лейбніца:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n)}. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Похідні вищих порядків для неявно заданої функції

Нехай функція $y = y(x)$ задана у неявній формі у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$. Диференціюючи це рівняння за змінною x , знаходимо з отриманої рівності першу похідну $y'(x)$. Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати за x першу похідну і в отримане співвідношення підставити знайдене перед цим значення $y'(x)$. Продовжуючи диференціювання, можна послідовно знайти похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну x і функцію y .

Обчислення похідної вищого порядку для параметрично заданої функції

Нехай функція $y(x)$ задана у параметричній формі рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де параметр $t \in [\alpha; \beta]$. Якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ мають перші похідні,

причому $x'(t) \neq 0, t \in [\alpha; \beta]$, а $x(t)$ – строго монотонна функція, то першу похідну y'_x знаходять за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ мають похідні другого порядку, то можна знайти другу похідну від y за змінною x :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}.$$

Аналогічно можна знайти похідну будь-якого порядку $n, n > 2$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}. \quad (16.9)$$

16.2. Диференціал функції та його властивості

Нехай функція $y = f(x)$ у точці x має відмінну від нуля похідну $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тоді у деякому околі точки x відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Тому приріст функції $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. При цьому величина $\alpha \cdot \Delta x$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж $f'(x) \cdot \Delta x$ і нескінченно мала $\Delta y \sim f'(x) \cdot \Delta x$, тому величину $f'(x) \cdot \Delta x$ називають *головною частиною* приросту функції Δy .

Означення. *Диференціалом* dy функції $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx , частину її приросту Δy , що дорівнює добутку похідної функції у цій точці на приріст аргументу:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (16.10)$$

Диференціал dy називають також *диференціалом першого порядку*.

Знайдемо диференціал незалежної змінної x , тобто диференціал функції $y = x$. Оскільки $y' = 1$, то $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, тобто диференціал незалежної

змінної дорівнює її приросту: $dx = \Delta x$, тобто формулу (16.10) можна записати у вигляді:

$$dy = f'(x)dx. \quad (16.11)$$

Таким чином, диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної.

З геометричної точки зору диференціал функції $y = f(x)$ у точці x дорівнює приросту ординати дотичної до графіка функції у цій точці, коли змінна x отримує приріст Δx .

Нехай $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовані функції. Тоді виконуються наступні рівності:

1. $d(u + v) = du + dv$.
2. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$.
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Теорема. Диференціал складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на диференціал цього проміжного аргументу.

Доведення. Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції, що утворюють складену функцію $y = f(\varphi(x))$. Тоді $y'(x) = f'_u \cdot u'_x$, диференціал $dy = f'(x)dx = f'_u \cdot u'_x dx = f'_u \cdot du$.

Таким чином, $dy = f'_x dx = f'_u du$, тобто перший диференціал функції $y(x)$ визначається однією й тією ж формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною, чи функцією іншого аргументу. Цю властивість диференціала першого порядку називають *інваріантністю (незмінністю) форми першого диференціала*.

Застосування диференціала до наближених обчислень

Як вже зазначалося, приріст Δy функції $y = f(x)$ у точці x можна наближено замінити диференціалом dy в цій точці: $\Delta y \approx dy$. Підставивши сюди значення Δy та dy , отримаємо наближену формулу:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (16.12)$$

Абсолютна похибка величини $\Delta y - dy$ при $\Delta x \rightarrow 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx , тому, що при $f'(x) \neq 0$ величини Δy і dy є еквівалентними нескінченно малими:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1.$$

Тут $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Можна довести, що абсолютна похибка формули (16.12) не перевищує величини $M \cdot (\Delta x)^2$, де M – максимальне значення $|f''(x)|$ при $x \in [x; x + \Delta x]$.

Приклад. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 1,01$.

Розв'язування. Маємо: $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. При $x=1$ і $\Delta x=0,01$ за формулою (16.12) отримаємо

$$\operatorname{arctg}(1+0,01) \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1+1^2} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{4} + 0,005 \approx 0,79.$$

16.3. Диференціали вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ – диференційована функція незалежної змінної x . Тоді її диференціал $dy = f'(x)dx$ теж є функцією аргументу x і можна знайти диференціал цієї функції. Диференціал диференціала функції $y = f(x)$ називають її *другим диференціалом* або *диференціалом другого порядку*. Його позначають d^2y або $d^2f(x)$.

Знайдемо вираз для d^2y .

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)dx^2.$$

Таким чином, отримали формулу:

$$d^2y = f''(x)dx^2. \quad (16.13)$$

Аналогічно можна визначити диференціал третього порядку як диференціал диференціала другого порядку:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = (f''(x)dx^2)' dx = f'''(x)dx^3.$$

Означення. *Диференціалом n -го порядку* називають диференціал диференціала $(n-1)$ -го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n. \quad (16.14)$$

З формули (16.14) випливає, що n -у похідну функції $y = f(x)$ можна записати у вигляді відношення її диференціала n -го порядку до n -го степеня диференціала незалежної змінної: $y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$.

Наведені вище формули для диференціалів вищих порядків є вірними, якщо x є незалежною змінною. Якщо ж змінна x є функцією також незалежної змінної t , тобто $x = x(t)$, то

$$d^2y = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким чином, якщо у функції $y = f(x)$ змінна x є залежною змінною, тобто $x = x(t)$, то $d^2y \neq f''(x)dx^2$. Ми бачимо, що диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності форми.

Приклад. Знайти диференціал третього порядку функції $y = e^{5x}$, де x – незалежна змінна.

Розв'язування. Оскільки потрібно знайти диференціал третього порядку функції незалежної змінної, то можна використати формулу (16.14) при $n=3$, тобто маємо: $d^3y = f'''(x)dx^3$. $f'''(x) = (e^{5x})''' = 125e^{5x}$. Звідси випливає, що $d^3y = 125e^{5x}dx^3$.

Контрольні питання

1. Означити похідну n -ого порядку для функції $y = f(x)$.
2. Отримати формули n -ої похідної для однієї тригонометричної функції та функції $y = e^{kx}$.
3. Обчислення похідних вищих порядків для неявно та параметрично заданої функцій. Навести приклади.
4. Поняття диференціала функції, його обчислення та властивості.
5. Обчислення наближених значень функції із застосуванням диференціала.
6. Диференціали вищих порядків для різних способів задання функцій.

Лекція 17. Основні теореми диференціального числення

17.1. Диференціальні теореми про середні значення.

17.2. Правило Лопіталя.

17.3. Формула Тейлора.

17.1. Диференціальні теореми про середні значення

Теорема (Теорема Ферма). Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на інтервалі $(a; b)$ і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці $x = c \in (a; b)$. Тоді, якщо у цій точці існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ферма полягає у тому, що у точці $x = c \in (a; b)$, де функція $y = f(x)$ набуває найбільшого чи найменшого значення на $(a; b)$, дотична до графіка цієї функції паралельна осі абсцис.

Теорема (Теорема Ролля). Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, диференційованою на проміжку $(a; b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, у якій $f'(c) = 0$.

Отже, теорема Ролля стверджує, що на графіку функції, яка задовольняє умовам цієї теореми, знайдеться хоча б одна точка, дотична у якій паралельна осі Ox .

Якщо $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можна сформулювати наступним чином: між двома коренями функції знаходиться хоча б один корінь її похідної.

Теорема (Теорема Коші). Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на $[a; b]$, диференційовані у інтервалі $(a; b)$, причому $\varphi'(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$, то існує така точка $c \in (a; b)$, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (17.1)$$

Теорема (Теорема Лагранжа). Якщо функція $f(x)$ є неперервною на $[a; b]$, диференційованою у $(a; b)$, то всередині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, у якій виконується рівність:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (17.2)$$

Доведення. Теорему Лагранжа можна розглядати як окремий випадок теореми Коші. Дійсно, формулу (17.2) отримаємо, поклавши у формулі (17.1) $\varphi(x) = x$. Теорему доведено.

Формулу (17.2) називають *формулою Лагранжа, або формулою скінченних приростів*, оскільки вона виражає точне значення приросту функції $\Delta y = f(b) - f(a)$ через похідну у деякій проміжній точці $c \in (a; b)$ та скінченне значення приросту аргументу $\Delta x = b - a$. Відповідно, формулу (17.2) можна записати у вигляді: $\Delta y = f'(c) \cdot \Delta x$.

Розглянемо геометричний зміст теореми Лагранжа. Запишемо формулу (17.2) у вигляді:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Ця рівність свідчить, що на графіку функції, яка задовольняє умовам теореми Лагранжа, знайдеться хоча б одна точка з абсцисою c , у якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучає точки $(a; f(a))$ та $(b; f(b))$.

Теорема Лагранжа має також механічну інтерпретацію. Якщо $s = s(t)$, $t \in [t_1; t_2]$ – закон руху матеріальної точки, то відношення $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ – це середня швидкість руху за проміжок часу $[t_1; t_2]$. Теорема Лагранжа стверджує, що в деякий момент часу $c \in (t_1; t_2)$ миттєва швидкість матеріальної точки неодмінно співпадає з її середньою швидкістю: $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = s'(c)$.

З теореми Лагранжа випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. Якщо похідна функції дорівнює нулю на деякому проміжку, то ця функція є сталою на даному проміжку.

Наслідок 2. Якщо похідні двох функцій співпадають на деякому проміжку, то ці функції відрізняються між собою на сталу величину.

Теорему Лагранжа та її наслідки можна застосовувати при доведенні тотожностей та нерівностей.

17.2. Правило Лопіталя (розкриття невизначеностей)

Розглянемо спосіб обчислення границь, які потребують розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, пов'язаний з застосуванням похідних.

Теорема (Правило Лопіталя розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$).

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та диференційованими у околі точки $x = x_0$ і при цьому $f(x_0) = g(x_0) = 0$, а $g'(x) \neq 0$ у околі цієї точки. Якщо

існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l. \quad (17.3)$$

Зауважимо, що теорема справедлива і у тому випадку, коли функції $f(x)$ та $g(x)$ невизначені при $x = x_0$, але $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Ця теорема має зміст також при $x \rightarrow \infty$.

Приклад. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x}$.

Розв'язування. При підстановці у чисельник та знаменник дробу під знаком границі значення $x=1$ отримуємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Застосуємо до розкриття даної невизначеності правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Теорема (Правило Лопітала розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та диференційовними у околі точки x_0 (можливо, окрім самої цієї точки), і у цьому околі

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, причому $g'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то існує і границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l. \quad (17.4)$$

Приклад. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Розв'язування. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \operatorname{tg} 3x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \operatorname{tg} 5x = \mp \infty$, то дана границя

зводиться до невизначеності виду $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, тому застосуємо правило Лопітала:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} 3x)'}{(\operatorname{tg} 5x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 10x}{1 + \cos 6x} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos 10x)'}{(1 + \cos 6x)'} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-10 \sin 10x}{-6 \sin 6x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{10 \cos 10x}{6 \cos 6x} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

До невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0} \right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, для розкриття яких можна застосувати правило Лопітала, зводяться невизначеності видів $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) , (∞^0) , (0^0) . Для цього застосовують тотожні перетворення та логарифмування.

17.3. Формула Тейлора. Нехай функція $y = f(x)$ у деякому околі точки $x = a$ має всі похідні до $(n + 1)$ -го порядку включно. Знайдемо многочлен $P_n(x)$, степінь якого не перевищує n , значення якого у точці $x = a$ дорівнює значенню функції $f(x)$ у цій точці, а значення його похідних до n -го порядку у точці $x = a$ дорівнюють відповідним значенням похідних у цій точці:

$$P_n(a) = f(a), P'_n(a) = f'(a), P''_n(a) = f''(a), \dots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad (17.5)$$

Будемо шукати цей многочлен у вигляді многочлена за степенями $(x - a)$ з невизначеними коефіцієнтами:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n = \sum_{k=0}^n c_k(x - a)^k. \quad (17.6)$$

Невизначені коефіцієнти $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ знайдемо так, щоб виконувались умови (17.5). Для цього, диференціюючи (17.6), знайдемо похідні від $P_n(x)$. Отримуємо:

$$P'_n(x) = c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot (x - a) + 3 \cdot c_3 \cdot (x - a)^2 \dots + n \cdot c_n \cdot (x - a)^{n-1};$$

$$P''_n(x) = 2 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 \cdot (x - a) \dots + n \cdot (n - 1) \cdot c_n \cdot (x - a)^{n-2};$$

.....

$$P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_n.$$

Підставивши у ліві та праві частини останніх рівностей та рівності (17.6) замість x значення a та прирівнявши їх згідно з (17.5) до значень $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$, отримаємо рівності: $f(a) = c_0, f'(a) = c_1, f''(a) = 2 \cdot 1 \cdot c_2, f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3, \dots, f^{(n)}(a) = n! \cdot c_n$. Звідси знаходимо коефіцієнти шуканого многочлена:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (17.7)$$

Тут похідною нульового порядку вважають саму функцію.

Таким чином, шуканий многочлен (17.5) має вигляд:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k. \quad (17.8)$$

Нехай $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Звідси маємо

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x). \quad (17.9)$$

Формулу (17.9) називають **формулою Тейлора** для функції $f(x)$ у околі точки $x=a$, а многочлен $P_n(x)$, коефіцієнти якого визначаються за формулою (17.7) – *многочленом Тейлора*. Вираз $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ називають *залишковим членом формули Тейлора*. Для значень x , при яких залишковий член є достатньо малим, многочлен $P_n(x)$ є наближенням функції $f(x)$. Таким чином, формула (17.9) дає можливість замінити функцію $f(x)$ многочленом Тейлора $P_n(x)$ з точністю, що дорівнює значенню залишкового члена $R_n(x)$.

Формулу Тейлора (17.9) при $a=0$ називають **формулою Маклорена**. Таким чином, формула Маклорена для функції $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \quad (17.13)$$

де $R_n(x)$ визначається за формулою:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (17.14)$$

У формулі (17.14) точка ξ знаходиться між точками 0 та x , тобто $\xi = \theta x$, де $0 < \theta < 1$.

Формула (17.14) визначає залишковий член формули Маклорена у формі Лагранжа, цей залишковий член можна записати у формі Пеано:

$$R_n(x) = o(x^n). \quad (17.15)$$

Формула (17.15) означає, що при заміні функції $f(x)$ многочленом Тейлора у околі точки $x=0$ похибка є нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж $|x^n|$.

Наведемо формулу Маклорена для наближення деяких основних елементарних функцій.

$$1. \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \quad (17.16)$$

$$2. \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}). \quad (17.17)$$

$$3. \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}). \quad (17.18)$$

$$4. \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n +$$

$$+ o(x^n) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n). \quad (17.19)$$

$$5. \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n). \quad (17.20)$$

Контрольні питання

1. Сформулювати основні теореми про середні значення.
2. Записати формулу скінченних приростів (теорема Лагранжа), пояснити її геометричний та механічний зміст.
3. Показати на прикладах застосування правила Лопіталя.
4. Записати формулу Тейлора та Маклорена в загальному вигляді.
5. Отримати формулу Маклорена для декількох елементарних функцій (на вибір).

Лекція 18. Застосування диференціального числення до дослідження функції

18.1. Застосування похідної до дослідження функцій на монотонність.

18.2. Знаходження екстремумів функцій.

18.3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

18.1. Застосування похідної до дослідження функцій на монотонність

Установимо необхідні та достатні умови зростання та спадання функції.

Теорема (Необхідні умови монотонності функції). *Якщо диференційована на $(a; b)$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на цьому проміжку, то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a; b)$.*

З геометричної точки зору теорема означає, що дотичні до графіка зростаючої диференційованої функції утворюють гострий кут з додатним напрямом осі Ox або ж у деяких точках вони паралельні цій осі. Для спадної функції цей кут є тупим або дотична паралельна Ox .

Теорема (Достатні умови монотонності функції). *Якщо функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a; b)$ і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in (a; b)$, то ця функція зростає (спадає) на $(a; b)$.*

Означення. Точки, у яких похідна функції дорівнює нулю, називають її *стаціонарними точками*. Точки, у яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називають її *критичними точками*.

Розглянуті теореми дозволяють досліджувати функції на монотонність. З них випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного критичними точками.

Щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, треба:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти похідну даної функції;

- 3) з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує, знайти критичні точки функції;
- 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали, і у кожному з них визначити знак похідної, на інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

18.2. Знаходження екстремумів функцій

Означення. Точку x_0 називають *точкою локального максимуму (мінімуму)* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0 , який належить області визначення функції $f(x)$, що для всіх значень x з цього околу виконана нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Означення. Точки локального максимуму та локального мінімуму називають *точками локального екстремуму*. Значення функції $f(x)$ у цих точках називають *локальними екстремумами* цієї функції (локальними мінімумами чи локальними максимумами).

Означення. Найбільше значення функції у її області визначення називають *абсолютним або глобальним максимумом*, найменше значення – відповідно *абсолютним або глобальним мінімумом*.

Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку, то локальних екстремумів вона може досягати лише у внутрішніх точках цього відрізка, а абсолютний мінімум чи максимум може досягатися також на кінцях цього відрізка.

Розглянемо умови існування локального мінімуму.

Теорема (Необхідна умова локального екстремуму). *Якщо функція $f(x)$ має у точці x_0 локальний екстремум та диференційована у цій точці, то $f'(x_0) = 0$.*

Можливими точками екстремуму є її критичні точки. Розглянемо критерії, що дають змогу з множини критичних точок вибрати точки максимуму та мінімуму.

Теорема (Перша достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, неперервної у цій точці, і нехай існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 , у якому функція має похідну $f'(x)$, можливо, крім самої точки x_0 , тоді:

- 1) якщо у інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а у інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$, то x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$;
- 2) якщо у інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а у інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$, то x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$;
- 3) якщо у обох інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ і $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то x_0 не є точкою екстремуму функції $f(x)$.

З теорем випливає наступне правило дослідження функції на екстремум. Щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$, треба:

- 1) знайти критичні точки функції $f(x)$;
- 2) відзначити їх у області визначення функції;
- 3) дослідити знак похідної на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення критичними точками;
- 4) за зміною знаку $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції у цих точках. Результати дослідження доцільно звести у таблицю.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$.

Розв'язування. Задана функція визначена та диференційована на всій числовій прямій, тому її критичними точками є лише стаціонарні точки – корені похідної $f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x$. З рівняння $f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x = 0$ або $3x(x^2 - x - 6) = 0$ знаходимо ці точки: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$. Нанесемо їх на числову пряму. Отримуємо інтервали $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 3)$ та $(3; +\infty)$.

Визначимо знак похідної на кожному з цих інтервалів. Для цього виберемо всередині кожного з них довільним чином внутрішню точку і підставимо її у вираз для похідної. $f'(-3) = 3(-3)^3 - 3(-3)^2 - 18 \cdot (-3) < 0$, отже на інтервалі $(-\infty; -2)$ $f'(x) < 0$. $f'(-1) = 3(-1)^3 - 3(-1)^2 - 18 \cdot (-1) > 0$, на $(-2; 0)$ $f'(x) > 0$. При $x=1$ $f'(1) = 3 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 < 0$, на $(0; 3)$ $f'(x) < 0$. Якщо $x=4$, то похідна $f'(4) = 3 \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 18 \cdot 4 > 0$, на $(3; +\infty)$ $f'(x) > 0$.

При переході через критичну точку $x_1 = -2$ похідна змінює свій знак з мінуса на плюс, тому це точка локального мінімуму, $f(-2) = -9$. Знак похідної змінюється з плюса на мінус при переході через точку $x_2 = 0$, це точка локального максимуму і $f(0) = 7$. Точка $x=3$ – це точка локального мінімуму, оскільки при переході через неї похідна змінює знак з мінуса на плюс, мінімум функції у цій точці $f(3) = -\frac{161}{4}$.

У випадках, коли обчислення другої похідної функції є простішим, ніж дослідження знаків її першої похідної, для дослідження функції на екстремум доцільно використовувати другу достатню умову.

Теорема (Друга достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 є стаціонарною точкою функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і у околі цієї точки існує неперервна друга похідна $f''(x)$, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо при цьому $f''(x_0) > 0$, точка x_0 є точкою локального мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму.

Розглянемо приклад застосування цієї теореми.

Приклад. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.

Розв'язування. Областю визначення даної функції є вся числова пряма. Похідна $f'(x) = x^2 - 3x + 2$ має корені $x_1 = 1$ та $x_2 = 2$. Знайдемо другу похідну заданої функції: $f''(x) = 2x - 3$. У точці $x_1 = 1$ $f''(1) = 2 \cdot 1 - 3 < 0$, тому $x=1$ –

точка локального максимуму, оскільки $f''(2) = 2 \cdot 2 - 3 > 0$, то точка $x = 2$ – точка локального мінімуму.

Загалом дослідження функції на екстремум за другою достатньою умовою є простішим, ніж за першою, проте її не можна застосовувати у випадках, коли у критичних точках друга похідна не існує, або дорівнює нулю. Узагальненням теореми є третя достатня умова локального екстремуму, яку використовують для стаціонарних точок, у яких $f'(x) = 0$.

Теорема (Третя достатня умова локального екстремуму). *Нехай у околі стаціонарної точки x_0 існує неперервна похідна $f^{(n)}(x)$, причому $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, а всі похідні до $(n-1)$ -го порядку включно дорівнюють нулю. Тоді:*

- 1) якщо n – парне і $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x)$ має у точці x_0 локальний максимум;
- 2) якщо n – парне і $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x)$ має у точці x_0 локальний мінімум;
- 3) якщо n – непарне, то $f(x)$ у точці x_0 екстремуму не має.

Теорема є окремим випадком попередньої теореми при $n = 2$.

Приклад. Дослідити на екстремум у точці $x_0 = 0$ функцію $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$.

Розв'язування. Точка $x_0 = 0$ є стаціонарною точкою заданої функції, оскільки $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$, $f'(0) = 0$. Знайдемо похідні вищих порядків функції $f(x)$ у точці $x_0 = 0$:

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \cos x, \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2 \sin x, \quad f'''(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x, \quad f^{(4)}(0) = 4 > 0.$$

Оскільки $n = 4$ – парне і $f^{(4)}(0) > 0$, то точка $x_0 = 0$ є точкою локального мінімуму і при цьому локальний мінімум функції $f(x)$ у цій точці $f(0) = 4$.

18.3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$. Тоді вона повинна досягати на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень, тобто абсолютних екстремумів $f(x)$ на цьому відрізку. Будемо позначати їх відповідно $M = \max_{[a; b]} f(x)$ та $m = \min_{[a; b]} f(x)$.

Точки, у яких досягається найбільше та найменше значення функції на відрізку можуть бути кінцями цього відрізка, або його внутрішніми точками. Якщо точка x_0 , у якій досягається абсолютний екстремум, належить $(a; b)$, то таку точку потрібно шукати серед критичних точок даної функції.

Отже, щоб знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, потрібно:

- 1) знайти критичні точки цієї функції, що належать інтервалу $(a; b)$;
- 2) обчислити значення функції у знайдених критичних точках та на кінцях відрізка – точках $x = a$ та $x = b$;
- 3) вибрати серед них найбільше та найменше значення.

Якщо функція неперервна у інтервалі $(a; b)$, то вона може й не мати абсолютних екстремумів у цьому інтервалі. Про їх наявність роблять висновок на основі дослідження поведінки функції на кінцях інтервалу (знаходження границь $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$) та значень функції у критичних точках, що належать $(a; b)$.

Контрольні питання

1. Необхідні та достатні умови монотонності функції.
2. Необхідна умова локального екстремуму, перша достатня умова.
3. Навести приклади застосування другої та третьої достатньої умови локального екстремуму.
4. Найбільше та найменше значення функції на відрізку, навести приклад.

Лекція 19. Застосування диференціального числення до дослідження функції

19.1. Опуклість графіка функції. Точки перегину.

19.2. Знаходження асимптот графіка функції.

19.3. Загальна схема дослідження функції і побудова її графіку.

19.1. Опуклість графіка функції. Точки перегину

Означення. Графік диференційованої на $(a; b)$ функції $y = f(x)$ називають *опуклим вниз* на цьому інтервалі, якщо він розташований вище будь-якої дотичної до цього графіка на $(a; b)$.

Означення. Графік диференційованої на $(a; b)$ функції $y = f(x)$ називають *опуклим вгору* на цьому інтервалі, якщо він розташований нижче будь-якої дотичної до цього графіка на $(a; b)$.

Означення. Точку на графіку функції $y = f(x)$, що відокремлює його частини з різною випуклістю, називають *точкою перегину*.

Інтервали, на яких графік функції опуклий вгору та опуклий вниз знаходять з допомогою наступної теореми.

Теорема. Якщо для функції $y = f(x)$ у всіх точках інтервалу $(a; b)$ друга похідна $f''(x) < 0$, то графік функції на цьому інтервалі опуклий вгору. Якщо $f''(x) > 0$ на $(a; b)$, то графік функції опуклий вниз.

Для знаходження точок перегину графіка функції використовують наступну теорему.

Теорема (Достатня умова існування точок перегину). Нехай x_0 – точка, у якій $f''(x)$ дорівнює нулю, або не існує. Якщо при переході через цю точку $f''(x)$ змінює свій знак, то точка графіка функції $y = f(x)$ з абсцисою x_0 є точкою перегину.

Приклад. Дослідити на опуклість та визначити точки перегину графіка функції $y = x^5 - x + 2$.

Розв'язування. Задана функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо її другу похідну. $y'(x) = 5x^4 - 1$, $y''(x) = 20x^3$. Друга похідна існує у всіх точках числової прямої. З рівняння $y'' = 0$ знаходимо $x = 0$.

Для $x < 0$ маємо $y'' < 0$, тут графік функції опуклий вгору. Відповідно, для $x > 0$ $y'' > 0$, тому при $x < 0$ графік опуклий вниз. Точка з абсцисою $x = 0$ є точкою перегину, її ордината $y(0) = 2$.

19.2. Знаходження асимптот графіка функції

Означення. *Асимптотою* кривої називають пряму, відстань від якої від точки, що лежить на кривій, прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки по кривій від початку координат.

Асимптоти можуть бути вертикальними, горизонтальними та похилими.

Пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$. Для відшукування вертикальних асимптот потрібно знайти такі значення x , поблизу яких $|f(x)|$ необмежено зростає. Звичайно, це точки розриву другого роду функції $y = f(x)$.

Наприклад, крива $y = \frac{4}{x-3}$ має вертикальну асимптоту – пряму $x = 3$, оскільки $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{4}{x-3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{4}{x-3} = +\infty$.

Рівняння *похилої асимптоти* шукають у вигляді $y = kx + b$, де формула для знаходження кутового коефіцієнта k та числа b :

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (19.1)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (19.2)$$

Таким чином, якщо графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, то її коефіцієнти k та b знаходять за формулами (19.1) та (19.2).

Приклад. Знайти похилі асимптоти графіка функції $y = \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1}$.

Розв'язання. За формулами (19.1) та (19.2) знаходимо:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{x(x^2 + 1)} = 1.$$

Знайдемо коефіцієнт b :

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x^2 + 1} = 0.$$

Таким чином, похила асимптота графіка функції $y = \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ – це пряма $y = x$.

Якщо у рівнянні похилої асимптоти $k = 0$, то воно набуває вигляду $y = b$. У цьому випадку графік функції $y = f(x)$ може мати **горизонтальну асимптоту** $y = b$.

Рівняння горизонтальної асимптоти має вигляд $y = b$, де сталу b знаходять за формулою

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x). \quad (19.3)$$

Наприклад, графік функції $y = \frac{x^2 + x - 1}{2x^2 + 4}$ має горизонтальну асимптоту

$$y = \frac{1}{2}, \text{ оскільки } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{2x^2 + 4} = \frac{1}{2}.$$

Якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ або не існує, то горизонтальні асимптоти відсутні.

Асимптоти графіка функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ та $x \rightarrow -\infty$ можуть бути різними, тому при використанні формул потрібно окремо розглядати випадки, коли $x \rightarrow +\infty$ та $x \rightarrow -\infty$.

19.3. Загальна схема дослідження функції

Розглянемо загальну схему дослідження функції $y = f(x)$ та побудови її графіка. Вона складається з наступних етапів.

1. Знайти область визначення функції.

2. Якщо функція має точки розриву, то з'ясувати їх характер, а також дослідити поведінку функції на межах області визначення (скінченних чи нескінченних). Знайти асимптоти функції (вертикальні, горизонтальні, похилі).

3. Дослідити функцію на парність. Якщо функція є парною або непарною, то подальше дослідження доцільно виконувати лише для невід'ємних значень аргументу. Побудувавши графік для цих значень аргументу, потім добудувати його для від'ємних значень аргументу симетрично осі Oy для парної функції і симетрично відносно початку координат – для непарної функції.

4. Дослідити функцію на періодичність. Якщо функція є періодичною, то достатньо провести її дослідження на будь-якому відрізку, довжина якого дорівнює періоду функції і, побудувавши графік на цьому відрізку, продовжити його на всю область визначення функції.

5. Знайти нулі функції (корені рівняння $f(x)=0$) та інтервали знакосталості функції (інтервали, на яких функція зберігає знак: є додатною, або від'ємною). Область визначення розбивається на інтервали знакосталості нулями та точками розриву функції.

6. Знайти локальні екстремуми та проміжки зростання та спадання функції.

7. Знайти проміжки, на яких графік функції зберігає напрям опуклості, а також точки перегину графіка.

8. За результатами виконаного дослідження побудувати графік.

Контрольні питання

1. Означити опуклість графіка функції вгору та вниз, показати із геометричною інтерпретацією точки перегину.

2. Дослідження функції на опуклість та точки перегину.

3. Асимптоти графіка функції, їх класифікація та знаходження.

4. За схемою дослідження функції побудувати ескіз графіка вибраної функції.

Лекція 20. Функція багатьох змінних

20.1. Означення функції багатьох змінних, область визначення.

20.2. Границя, неперервність ФБЗ.

20.3. Частинні похідні.

20.4. Диференціали функцій багатьох змінних.

20.1. Означення функції багатьох змінних, область визначення.

Розглянемо функцію $f(M)$, $M \in G$, яка кожній точці M множини G (площини або простору) ставить у відповідність деяке число $f(M)$. Якщо G – множина точок координатної площини, то замість $f(M)$ пишуть $f(x; y)$, де x, y є координати точки $M \in G$, і кажуть, що задано **функцію двох змінних** $f(x; y)$, $(x; y) \in G$. Отже, функцією двох змінних $f(x; y)$, $(x; y) \in G$, називається функція, яка кожній парі чисел $(x; y) \in G$ ставить у відповідність деяке число $f(x; y)$. Змінні x, y називають *аргументами* або *незалежними змінними*.

Наприклад, $f(x; y) = x^2 + y^2$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ – функція двох змінних x і y , визначена на всій координатній площині $\mathbb{R}^2$, яка кожній точці $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ ставить у відповідність число $z = x^2 + y^2$.

Аналогічно означається функція трьох і більшої кількості змінних. Наприклад,

$$f_1(x; y; z) = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x; y; z; t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \cos t.$$

Функція f_1 – функція трьох змінних x, y і z , визначена для всіх значень x, y, z , які задовольняють нерівності $x^2 + y^2 \neq 0$ і $z^2 \geq 1$. Вона кожній точці (x, y, z) із зазначеної множини ставить у відповідність число $u = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{x^2 + y^2}$.

Функція f_2 – функція чотирьох змінних x, y, z і t , визначена для будь-яких значень змінних x, y, z, t . Можна вважати, що x, y, z – це координати точки

простору, а t – час. Функція f_2 кожній четвірці чисел (x, y, z, t) ставить у відповідність число $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \cos t$.

Надалі для стислості викладу всі означення й твердження формулюватимемо тільки для функцій двох змінних. На функції трьох і більшої кількості змінних вони легко узагальнюються.

Графіком функції двох змінних $z = f(x, y)$ є деяка поверхня у тривимірному просторі. Точці M площини OXY з координатами $M(x, y)$ ставиться у відповідність число z , яке відкладаємо в напрямку осі OZ .

Область визначення функції двох змінних – це область допустимих значень для пар (x, y) , тобто це деяка частина площини OXY , при яких можна обчислити значення функції, позначають $D(f)$ або D .

Множину значень $z = f(x, y)$ позначають $E(f)$ або E .

Приклад. 1. Функція $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ існує для $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, геометрично ця область є кругом радіуса 2 з центром в початку координат.

2. Функція $u = \frac{x^2 y + z \sin xy + z^3}{x + y}$ точці простору з координатами (x, y, z)

ставить у відповідність одне число u . Область визначення – область допустимих значень x, y, z тобто частина простору $OXYZ$ за умови $x + y \neq 0$.

*Лінії рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ – лінії в площині OXY з рівняннями $z = c$, $c = \text{const}$, тобто $f(x, y) = c$. Число c називається рівнем, лінії рівня називають також *ізоквантами*. Це лінії, в точках яких функція набуває однакового значення c .*

Поверхнею рівня функції трьох аргументів $u = f(x, y, z)$ називається така поверхня, у точках якої функція набуває сталого значення $u = c$ (ізоповерхні).

20.2. Границя, неперервність ФБЗ

Околом точки $M_0(x_0, y_0)$ в площині OXY є круг з центром в точці M_0 і радіусом $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ без межі (рис. 20.1).

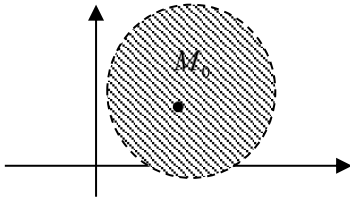


Рис. 20.1. Зображення околу точки

Нехай функція $f(x; y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0; y_0)$, крім, може, самої точки $(x_0; y_0)$.

Означення. Число A називається *границею функції* $f(x; y)$ при $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$, якщо для будь-якої послідовності точок $(x_n; y_n)$, таких що $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$ для $n \rightarrow \infty$ і $(x_n; y_n) \neq (x_0; y_0)$, послідовність $z_n = f(x_n; y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, збігається до числа A . Записують

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y).$$

Означення. Число A називається *границею функції* $f(x; y)$ в точці $(x_0; y_0)$, якщо для будь-якого, як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$, існує додатне число $\delta > 0$, що залежить від ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$), таке, що для будь-яких точок (x, y) , що розміщені від точки (x_0, y_0) на відстані $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ меншій, ніж δ ($0 < \rho < \delta$), має місце нерівність: $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Ці два означення є еквівалентними.

Оскільки границя функції багатьох змінних зводиться до границі числової послідовності, то для функцій багатьох змінних справедливі теореми про границю суми, різниці, добутку і частки двох функцій, аналогічні відповідним теоремам для функції однієї змінної.

Означення. Функція $f(x; y)$, $(x; y) \in G$, називається *неперервною в точці* $(x_0; y_0) \in G$, якщо для будь-якої послідовності точок $(x_n; y_n) \in G$ такої, що $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$ при $n \rightarrow \infty$, послідовність $\{f(x_n, y_n), n \geq 1\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n; y_n) = f(x_0; y_0).$$

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною у точці* $M_0(x_0, y_0)$, якщо вона визначена у цій точці, має скінченну границю при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$, причому $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

З геометричної точки зору в точці $M_0(x_0, y_0)$ графік функції $z = f(x, y)$ є нерозривною поверхнею.

Функція, що неперервна в усіх точках деякої області, називається *неперервною на цій області*.

Порушення умов неперервності для функції $f(x, y)$ можуть відбуватися як в окремих точках (ізолювана точка розриву), так і у точках, що утворюють одну або декілька ліній (лінії розриву), а іноді і більш складні геометричні образи.

Для функції багатьох змінних, як і для функції однієї змінної, доводять такі твердження:

сума і добуток двох неперервних на множині G функцій є неперервними на G функціями;

відношення двох неперервних на G функцій є неперервною функцією в усіх точках множини G , в яких знаменник не перетворюється в нуль.

20.3. Частинні похідні

Нехай $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Нехай точка $M_1(x + \Delta x, y)$ належить цьому околу.

Означення. $\Delta_x z = z(M_1) - z(M) = z(x + \Delta x, y) - z(x, y)$ називається *частинний приростом функції z за змінною x в точці M* .

Аналогічно можна знайти *частинний приріст функції за змінною y* : нехай точка $M_2(x, y + \Delta y)$ належить також області визначення функції f , тоді

$$\Delta_y z(M) = z(M_2) - z(M) = z(x, y + \Delta y) - z(x, y).$$

Якщо взяти точку $M_3(x + \Delta x, y + \Delta y)$ із області визначення функції, то $\Delta z(M) = z(M_3) - z(M) = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)$ називається **повним приростом функції z** в точці M .

Нехай функція $f(x; y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0; y_0)$. При фіксованому $y = y_0$ дістанемо функцію $f(x; y_0)$, яка залежить тільки від однієї змінної x , а при $x = x_0$ дістанемо функцію $f(x_0; y)$, яка залежить тільки від y . Похідна функції $f(x; y_0)$ при $x = x_0$ називається частинною похідною за змінною x функції $f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ і позначається

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \text{ або } f'_x(x_0; y_0),$$

а похідна функції $f(x_0; y)$ при $y = y_0$ називається частинною похідною за y функції $f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ і позначається

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \text{ або } f'_y(x_0; y_0).$$

За означенням **частинна похідна** функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ за змінною x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Частинна похідна за змінною y –

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Поряд з позначеннями $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ використовують також інші позначення:

$$z'_x, f'_x(x, y) \text{ та } z'_y, f'_y(x, y).$$

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Аналогічно означаються і знаходяться частинні похідні функцій трьох та більшої кількості змінних.

Коротко означення частинних похідних можна сформулювати так:

$f'_x(x; y)$ – це похідна за змінною x функції $f(x; y)$ при фіксованому y , а $f'_y(x; y)$ – це похідна за y функції $f(x; y)$ при фіксованому x .

Отже, частинні похідні функції знаходять за звичайними правилами диференціювання; треба тільки при диференціюванні за x змінну y вважати сталою, а при диференціюванні за y вважати сталою x .

Наприклад, якщо $f(x; y) = x^2 y^3$, то

$$f'_x(x; y) = (x^2 y^3)'_x = y^3 (x^2)'_x = y^3 \cdot 2x = 2xy^3,$$

$$f'_y(x; y) = (x^2 y^3)'_y = x^2 (y^3)'_y = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2 y^2.$$

20.4. Диференціали функцій багатьох змінних

Означення. Різниця $\Delta f(x; y) = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$ називається **повним приростом** функції $f(x; y)$, а різниці

$$\Delta_x f(x; y) = f(x + \Delta x; y) - f(x; y), \quad \Delta_y f(x; y) = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

називаються **частинними приростами** функції $f(x; y)$ за змінними x і за y відповідно.

Якщо функція $f(x; y)$ має частинні похідні $f'_x(x; y)$ і $f'_y(x; y)$, то, очевидно,

$$\Delta_x f(x; y) = f'_x(x; y) \Delta x + \alpha \Delta x,$$

$$\Delta_y f(x; y) = f'_y(x; y) \Delta y + \beta \Delta y,$$

де $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Добутки $f'_x(x; y) \Delta x$ і $f'_y(x; y) \Delta y$ називаються **частинними диференціалами** функції $f(x; y)$ за змінними x та за y відповідно.

Означення. Якщо функція $f(x; y)$ має неперервні частинні похідні $f'_x(x; y)$ і $f'_y(x; y)$, то сума частинних диференціалів

$$df(x; y) = f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y$$

називається **повним диференціалом функції** $f(x; y)$ в точці $(x; y)$.

Прирости незалежних змінних Δx та Δy позначають dx і dy . Тоді

$$df(x; y) = f'_x(x; y)dx + f'_y(x; y)dy.$$

Можна показати, що

$$\Delta f(x; y) = df(x; y) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. Це твердження можна сформулювати так: повний приріст функції $f(x; y)$ в точці $(x; y)$ наближено дорівнює диференціалу цієї функції у тій самій точці, тобто

$$\Delta f(x; y) \approx df(x; y) = f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y.$$

Приклад 1. Знайти повний диференціал функції $z = x \sin xy$.

Розв'язування. Знайдемо спочатку частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin xy + x \cos xy \cdot y = \sin xy + xy \cos xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos xy$$

Отже, $dz = (\sin xy + xy \cos xy)dx + (x^2 \cos xy)dy$.

Приклад 2. За допомогою диференціала обчислити наближене значення функції $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ у точках $(3, 1; 3, 9)$ і $(2, 9; 4, 1)$.

Розв'язування. Розглядувані точки лежать поблизу точки $(3; 4)$, в якій легко обчислити значення функції: $f(3; 4) = 5$. Знайдемо диференціал заданої функції в точці $(3; 4)$:

$$f'_x(x; y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f'_x(3; 4) = \frac{3}{5} = 0,6,$$

$$f'_y(x; y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f'_y(3; 4) = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Отже,

$$df(3; 4) = f'_x(3; 4)\Delta x + f'_y(3; 4)\Delta y = 0,6\Delta x + 0,8\Delta y.$$

З формули застосування диференціала для наближених обчислень випливає, що

$$f(3 + \Delta x; 4 + \Delta y) \approx f(3; 4) + 0,6\Delta x + 0,8\Delta y$$

Для точки $(3,1; 3,9)$ маємо $\Delta x = 0,1; \Delta y = -0,1$ і тому

$$f(3,1; 3,9) \approx 5 + 0,6 \cdot 0,1 - 0,8 \cdot 0,1 = 4,98.$$

Для точки $(2,9; 4,1)$ маємо $\Delta x = -0,1; \Delta y = 0,1$, і тому

$$f(2,9; 4,1) \approx 5 - 0,6 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,1 = 5,02.$$

Зауваження. Диференціал dz функції $z = f(x, y)$ має властивість інваріантності (так як і диференціал функції однієї незалежної змінної), тобто dz має однакову форму запису як і в тому випадку, коли змінні x та y є незалежними змінними, так і в тому випадку, коли x , y є проміжними аргументами, тобто функціями однієї або декількох інших незалежних змінних.

Контрольні питання

1. Означити функцію двох, трьох змінних; сформулювати основні поняття, пов'язані з функціями багатьох змінних.
2. Навести приклади задання області визначення функції двох та трьох змінних.
3. Означити границю ФБЗ в точці, основні правила її обчислення.
4. Поняття неперервності ФБЗ в точці та замкненій області, формулювання основних властивостей та теорем.
5. Частинний приріст та поняття частинної похідної. Навести приклади обчислення частинних похідних для функції двох та трьох змінних.
6. Означити частинні диференціали та повний диференціал.
7. Застосувати формулу обчислення наближеного значення для функції трьох змінних.

Лекція 21. Частинні похідні та диференціал функції

21.1. Похідні та диференціали вищих порядків.

21.2. Диференціювання складеної функції.

21.1. Похідні та диференціали вищих порядків.

Частинні похідні $f'_x(x; y)$ і $f'_y(x; y)$ функції $f(x; y)$, якщо вони існують в кожній точці $(x; y)$ деякої області, самі є функціями двох змінних. Отже, для них також можна розглядати частинні похідні.

Частинні похідні від частинних похідних $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ називаються *частинними похідними другого порядку* функції $f(x; y)$. Очевидно, функція $f(x; y)$ двох змінних має чотири частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

Похідні $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ називаються частинними похідними другого порядку за x і за y відповідно, позначаються $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Частинні похідні

$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ називаються *мішаними похідними другого порядку*. Можна довести, що коли мішані похідні неперервні, то вони рівні. У цьому разі позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ визначена в області D і в цій області існують перші похідні f'_x та f'_y , а також другі мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які до того ж як функції від x і y неперервні в точці $(x_0; y_0) \in D$, то в цій точці справедлива рівність

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \quad (21.1)$$

Частинні похідні другого порядку знову можна диференціювати за змінними x та y . При цьому отримаємо частинні похідні третього порядку, яких

для функції двох змінних $z = f(x; y)$ буде вісім: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$;

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

Означення. *Частинною похідною n -го порядку* функції $z = f(x; y)$ називається частинна похідна першого порядку від частинної похідної $(n-1)$ -го порядку.

Диференціали вищих порядків

Означення. Повним *диференціалом $d^2 z$ другого порядку функції* $z = f(x, y)$ називається повний диференціал dz від цієї функції:

$$d^2 z = d(dz).$$

Тому, вважаючи мішані частинні похідні неперервними, маємо:

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial}{\partial x} (dz) dx + \frac{\partial}{\partial y} (dz) dy = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dy = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned} \quad (21.2)$$

Аналогічно визначається і повний диференціал третього порядку:

$$d^3 z = d(d^2 z).$$

Вважаючи мішані частинні похідні третього порядку неперервними, отримаємо диференціал третього порядку:

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Так само визначаються і обчислюються повні диференціали і більш високих порядків. Можна довести, що біноміальні коефіцієнти у виразах dz, d^2z, d^3z мають місце і в загальному випадку. Отже,

$$d^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + \frac{n}{1!} \cdot \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \dots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n. \quad (21.3)$$

21.2. Диференціювання складених функцій

Випадок однієї незалежної змінної

Якщо $z = f(x, y)$ є диференційованою функцією аргументів x та y , які в свою чергу є диференційованими функціями змінної t

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то похідна складної функції $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (21.4)$$

У випадку, якщо t збігається з одним із аргументів, наприклад x , то «повна» похідна функції z за змінною x дорівнює

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (21.5)$$

Випадок кількох незалежних змінних

Якщо z є складною функцією кількох незалежних змінних, наприклад, $z = f(x, y)$, де $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ (u, v – незалежні змінні; f, φ, ψ – диференційовані функції), то частинні похідні z за змінними u і v знаходять за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}. \quad (21.6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (21.7)$$

Незалежно від того, є змінні x та y незалежними, чи залежать від інших змінних, справедлива формула $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ (властивість *інваріантності* форми повного *диференціала*).

Зауваження. Нехай $z = f(x, y)$ є складена функція не однієї, а декількох незалежних змінних $u, v, \dots, \omega$, якщо вважати $x = \varphi(u, v, \dots, \omega)$ і $y = \psi(u, v, \dots, \omega)$. Нехай z має неперервні частинні похідні за змінними x та y , а x і y мають частинні похідні за $u, v, \dots, \omega$. Виведемо формулу диференціювання складеної функції z в таких умовах.

Покладемо $v = \dots = \omega = \text{const}$; тоді $x = x(u)$, $y = y(u)$ і z є складена функція однієї незалежної змінної u , тоді $\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{du}$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Покладемо сталими всі величини, крім v , отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Аналогічно, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \omega} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega}.$$

Контрольні питання

1. Означити частинні похідні другого порядку. Показати на прикладі рівність мішаних частинних похідних.
2. Навести приклад обчислення частинних похідних вищих (більше, ніж другий) порядку.
3. Диференціал другого порядку, довести його формулу запису.
4. Показати на прикладі обчислення диференціала третього порядку.
5. Записати формули диференціювання складених функцій.

Лекція 22. Диференціювання неявних функцій

22.1. Неявні функції, їх диференціювання.

22.2. Дотична площина та нормаль до поверхні.

22.3. Похідна за напрямом, градієнт.

22.1. Диференціювання неявних функцій

Випадок однієї незалежної змінної

Якщо рівняння $f(x, y) = 0$, де $f(x, y)$ – диференційована функція змінних x та y , визначає y як функцію від x , то похідна цієї **неявно заданої функції** (за умови $f'_y(x, y) \neq 0$) знаходиться за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}. \quad (22.1)$$

Похідні вищих порядків знаходяться послідовним диференціюванням цієї рівності.

Випадок кількох незалежних змінних

Функцію двох змінних $z = z(x, y)$ називають **неявною** функцією, що визначається рівнянням $F(x, y, z) = 0$, якщо вона неперервна і перетворює це рівняння у тотожність $F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$.

Якщо рівняння $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z)$ – диференційована функція змінних x, y та z , визначає z як функцію незалежних змінних x, y і $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частинні похідні цієї неявно заданої функції знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad (22.2)$$

де $z = z(x, y)$.

Приклад. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

Розв'язування. Позначимо $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y$. Знайдемо частинні похідні:

$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1, \quad F'_z(x, y, z) = 6z - y.$$

$$\text{За формулами (22.2): } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{6z - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y}.$$

22.2. Дотична площина і нормаль до поверхні

Означення. *Дотичною площиною* до поверхні у точці $M(x_0; y_0; z_0)$ (точка дотику) називається площина, в якій знаходяться всі дотичні у точці M до різних кривих, що проведені на поверхні через цю точку.

Означення. *Нормаллю* до поверхні називається перпендикуляр до дотичної площини у точці дотику.

Рівняння дотичної площини і нормалі у випадку явного задання поверхні

Якщо рівняння поверхні у декартовій системі координат задано у явній формі $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – диференційована функція, то рівняння дотичної площини у точці $M(x_0; y_0; z_0)$ поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (22.3)$$

Рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (22.4)$$

Приклад. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

$$z = \frac{x^2}{2} - y^2 \text{ у точці } M(2; -1; 1).$$

Розв'язування. Застосовуючи формули (22.3) і (22.4) маємо:

$z - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1)$ або $2x + 2y - z - 1 = 0$ – рівняння дотичної площини;

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1} \text{ – рівняння нормалі.}$$

Рівняння дотичної площини і нормалі у випадку неявного задання поверхні

У випадку, коли рівняння поверхні задано у неявній формі

$$F(x, y, z) = 0 \text{ і } F(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

відповідні рівняння дотичної площини і нормалі мають вигляд

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \quad (22.5)$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \quad (22.6)$$

Зауваження. Випадок явного задання функції на практиці розглядають як частинний для неявно заданої, тобто $z = f(x, y)$ можна записати в неявному вигляді, як

$$z = f(x, y) \Leftrightarrow f(x, y) - z = 0 \Leftrightarrow F(x, y, z) = 0.$$

22.3. Похідна за напрямом, градієнт функції

При розв'язанні багатьох прикладних задач використовується поняття скалярного поля. Це область простору, кожній точці якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини. Прикладами скалярного поля може бути поле температур тіла, поле атмосферного тиску і т. д.

Для того, щоб задати **скалярне поле**, досить задати скалярну функцію $u(x, y, z)$. Поле називають **стаціонарним**, якщо воно не залежить від часу. Скалярне поле, яке змінюється з часом, називають нестаціонарним.

Важливою характеристикою скалярного поля є швидкість зміни поля в

заданому напрямі.

Нехай задано скалярне поле $u(x, y, z)$. Візьмемо в ньому точку $A(x_0, y_0, z_0)$ та вектор $\bar{\ell}$, який виходить з цієї точки. Напрямок $\bar{\ell}$ задамо за допомогою кутів α, β, γ , які він утворює з додатними напрямками осей координат. Візьмемо точку $B(x_1, y_1, z_1)$ яка лежить на прямій, що проходить через A в напрямі $\bar{\ell}$. Нехай відстань AB дорівнює h . Тоді

$$\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0)\bar{i} + (y_1 - y_0)\bar{j} + (z_1 - z_0)\bar{k}$$

та $\overrightarrow{AB} = h \cos \alpha \bar{i} + h \cos \beta \bar{j} + h \cos \gamma \bar{k}$.

Звідси маємо:
$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h \cos \alpha, \\ y_1 = y_0 + h \cos \beta, \\ z_1 = z_0 + h \cos \gamma. \end{cases}$$

Обчислимо приріст функції $u(x, y, z)$ при переході від A до B

$$\Delta u(A) = u(B) - u(A).$$

Означення. Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta u}{h}$ при $h \rightarrow 0$, то цю границю називають *похідною функції $u(x, y, z)$ в точці A за напрямом $\bar{\ell}$* , позначають $\frac{\partial u(A)}{\partial \ell}$, тобто

$$\frac{\partial u(A)}{\partial \ell} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u(A)}{h}. \quad (22.7)$$

Зазначимо, що коли напрям $\bar{\ell}$ співпадає з напрямом осі Ox ($\bar{i}$), то границя (22.7) дорівнюватиме частинній похідній функції u за змінною x у точці A .

Аналогічно, якщо $\bar{\ell}$ співпадає з $\bar{j}$, або $\bar{k}$, то формула (22.7) визначатиме $\frac{\partial u(A)}{\partial y}$ та $\frac{\partial u(A)}{\partial z}$.

Величина $\left| \frac{\partial u}{\partial \ell} \right|$ визначає величину швидкості зміни функції $u(x, y, z)$ за

напрямом $\bar{\ell}$, а знак $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ вказує на зростання чи спадання величини u .

Виведемо формулу для обчислення похідної за напрямом. Користуючись виразом

$$\begin{aligned}\Delta u(A) &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - u(x_0, y_0, z_0) = \\ &= \frac{\partial u(A)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(A)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u(A)}{\partial z} \Delta z + \omega(x_0, y_0, z_0, \Delta x, \Delta y, \Delta z)h,\end{aligned}$$

де $h = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, $\lim_{h \rightarrow 0} \omega = 0$, а також взявши $\Delta x = h \cos \alpha$, $\Delta y = h \cos \beta$,

$\Delta z = h \cos \gamma$, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (22.8)$$

Приклад. Обчислити похідну функції $u(x, y, z) = xy + \sqrt{y^2 + z^2}$ в точці $A(1, 0, 2)$ за напрямом $\bar{\ell} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$.

Розв'язування. На основі (22.8) обчислимо $\frac{\partial u(A)}{\partial \ell}$.

$$\frac{\partial u(A)}{\partial x} = y|_A = 0, \quad \frac{\partial u(A)}{\partial y} = \left(x + \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) \Big|_A = 1 + \frac{0}{\sqrt{0+4}} = 1,$$

$$\frac{\partial u(A)}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_A = \frac{2}{\sqrt{0+4}} = 1.$$

Значення $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ знайдемо з відповідних формул:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{\ell}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{\ell}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\bar{\ell}|} = -\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Тоді } \frac{\partial u(A)}{\partial \ell} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 1 \cdot \frac{(-2)}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \approx -0,408.$$

Градiєнт функції

Праву частину формули (22.8) можна розглядати як скалярний добуток

двох векторів:

$$\bar{\ell} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k},$$

$$\bar{N} = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}.$$

Означення. Вектор $\bar{N}$ називають *градієнтом функції* $u(x, y, z)$ в точці A і позначають $\overrightarrow{\text{grad}} u$. Отже,

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}. \quad (22.9)$$

Тоді $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \overrightarrow{\text{grad}} u \cdot \bar{\ell}$. Нехай ϕ – кут між $\bar{\ell}$ та $\bar{N}$, $\cos \phi = \frac{\bar{\ell} \cdot \bar{N}}{|\bar{\ell}| |\bar{N}|} = \frac{\partial u / \partial \ell}{|\overrightarrow{\text{grad}} u|}$. Звідси

випливає, що $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ досягає максимального значення при $\phi = 0$ ($\cos \phi = 1$). Таким чином,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \ell} \right)_{\max} = |\overrightarrow{\text{grad}} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}.$$

Це означає, що швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта.

Зауваження.

Похідною функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x, y)$ **за напрямом** $\vec{e} = \overrightarrow{PP_1}$ називається

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \lim_{PP_1 \rightarrow 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{PP_1},$$

де $f(P)$, $f(P_1)$ – значення функції у точках P та P_1 , PP_1 – відстань між цими точками.

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована, то має місце формула

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha, \quad (22.10)$$

де α – кут, що утворює вектор $\vec{e}$ з віссю Ox .

Градiєнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ називається вектор, проєкціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overrightarrow{\text{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}. \quad (22.11)$$

Похідна даної функції за напрямом $\vec{e}$ пов'язана з градієнтом функції формулою

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \text{пр}_{\vec{e}} \overrightarrow{\text{grad}} z.$$

Градiєнт функції у точці співпадає з напрямом нормалі до відповідної лінії рівня функції.

Контрольні питання

1. Записати формули обчислення частинних похідних неявно заданої функції, навести приклади.
2. Поняття дотичної площини та рівняння нормалі до поверхні в точці.
3. Навести приклади запису рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.
4. Скалярне поле, його задання та характеристики.
5. Обчислення похідної за напрямком вказаного вектора.
6. Поняття градієнта, його обчислення та зміст.

Лекція 23. Дослідження на екстремум функції двох змінних

23.1. Поняття екстремуму функції двох змінних. Необхідна та достатня умови екстремуму.

23.2. Найбільше і найменше значення функції 2-х змінних в замкненій області.

23.1. Поняття екстремуму функції двох змінних. Необхідна та достатня умови екстремуму.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ має *локальний максимум (мінімум)* $f(a, b)$ у точці $P(a, b)$, якщо для всіх, відмінних від $P(a, b)$, точок $P(x, y)$ у деякому околі вказаної точки $P(a, b)$ виконується нерівність:

$$f(a, b) > f(x, y) \text{ (} f(a, b) < f(x, y) \text{)}.$$

Локальні мінімуми і максимуми функції називаються її локальними екстремумами. Точка, в якій досягається локальний екстремум функції, називається точкою локального екстремуму.

Теорема (Необхідні умови локального екстремуму). Якщо диференційована функція $z = f(x, y)$ має в точці $M(x_0, y_0)$ локальний екстремум, то для неї виконуються рівності:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 0, \\ \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = 0. \end{cases} \quad (23.1)$$

Означення. Точки, в яких виконуються рівності (23.1) або в яких $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ не існують, називають *критичними* точками для функції $z = f(x, y)$.

Теорема (Достатні умови локального екстремуму). Нехай у точці $M(x_0, y_0)$ і деякому її околі функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні

до другого порядку включно; нехай, крім того, $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 0$ і $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = 0$. Позначимо

через $A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0}$, $B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_0}$, $C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0}$ і $\Delta = AC - B^2$. Тоді:

1) функція $z = f(x, y)$ досягає в точці $M(x_0, y_0)$ локального максимуму, якщо $\Delta > 0$ і $A < 0$;

2) функція $z = f(x, y)$ досягає в точці $M(x_0, y_0)$ локального мінімуму, якщо $\Delta > 0$ і $A > 0$;

3) функція $z = f(x, y)$ не має в точці $M(x_0, y_0)$ локального екстремуму, якщо $\Delta < 0$;

4) функція $z = f(x, y)$ може досягати і може не досягати в точці $M(x_0, y_0)$ локального екстремуму, якщо $\Delta = 0$ (в цьому випадку потрібно провести додаткові дослідження).

Приклад. Дослідити на екстремуми функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Розв'язування. Знайдемо частинні похідні і складемо систему (23.1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12,$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо чотири стаціонарні точки: $P_1(1; 2)$, $P_2(2; 1)$, $P_3(-1; -2)$, $P_4(-2; -1)$.

Знайдемо похідні 2-го порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$$

Обчислимо $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

$$1) \text{ Точка } P_1: A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{P_1} = 6, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{P_1} = 12, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{P_1} = 6;$$

$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_1 екстремуму немає.

2) Точка P_2 : $A=12, B=6, C=12$; $\Delta=144-36=108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то у точці P_2 функція має мінімум. Цей локальний мінімум дорівнює значенню функції при $x=2, y=1$: $z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$.

3) Точки P_3 : $A=-6, B=-12, C=-6$; $\Delta=36-144=-108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_3 екстремуму немає.

4) Точка P_4 : $A=-12, B=-6, C=-12$; $\Delta=144-36=108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A < 0$, то у точці P_4 функція має локальний максимум, що дорівнює $z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$.

Зауваження. Умовний екстремум

У найпростішому випадку умовним екстремумом функції $f(x, y)$ називається максимум або мінімум цієї функції за умови, що її аргументи пов'язані рівнянням зв'язку $\varphi(x, y) = 0$. Для знаходження умовного екстремуму функції $f(x, y)$ при співвідношенні $\varphi(x, y) = 0$ складають функцію Лагранжа

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y),$$

де λ – невизначений сталий множник.

Необхідні умови екстремуму зводяться до системи трьох рівнянь з трьома невідомими x, y, λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (23.2)$$

Достатні умови умовного екстремуму. Нехай x_0, y_0, λ_0 – розв'язок системи (23.2). Складемо визначник

$$\Delta = - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}. \quad (23.3)$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $f(x, y)$ має у точці (x_0, y_0, λ_0) умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

23.2. Найбільше і найменше значення функції 2-х змінних в замкненій області

Функція, неперервна в замкненій області D , обов'язково має найбільше і найменше значення в цій області.

Диференційована функція в обмеженій замкненій області набуває свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або у точці межі області.

Найбільше і найменше значення неперервної у замкненій області функції досягають у внутрішніх точках області (або на межі області), збігаючись відповідно з максимальним або мінімальним значеннями функції. Для пошуку найбільшого і найменшого значень функції в певній замкненій області треба знайти всі внутрішні критичні точки, обчислити в них значення функції, порівняти їх з найбільшим і найменшим значеннями функції на межі області. Найбільше і найменше з цих значень будуть найбільшим та найменшим значеннями неперервної функції в даній замкненій області.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = (x - y^2) \sqrt[3]{(x-1)^2}$ в області, обмеженій лініями $y^2 = x$, $x = 2$.

Розв'язування.

1) Знаходимо критичні точки за необхідними умовами (23.1).

$$z'_x = \sqrt[3]{(x-1)^2} + (x-y^2) \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}} (3(x-1) + 2(x-y^2)) = \frac{1}{3} \frac{5x - 2y^2 - 3}{\sqrt[3]{(x-1)}};$$

$$z'_y = -2y \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Для знаходження стаціонарних точок одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 2y^2 - 3 = 0, & x \neq 1, \\ 2y \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} = 0. \end{cases}$$

Звідси маємо $x = \frac{3}{5}, y = 0$ стаціонарна точка $A\left(\frac{3}{5}, 0\right)$ належить заданій області визначення функції (дослідження за достатніми умовами не є обов'язковим, хоча бажаним), у ній $z(A) = \frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$.

Критичними точками для заданої функції є і точки хорди $x=1$, бо в цих точках $z'_x = \infty, z'_y = 0$. У всіх точках цієї хорди $z = 0$.

2) Дослідимо функцію на межі області, яка складається з частини параболи і хорди тієї ж параболи.

На параболі, рівняння якої $y^2 = x$, функція $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ має вигляд $z \equiv 0$, тобто на цій частині межі області задана функція $z = 0$.

На хорді, рівняння якої $x = 2$, функція має вигляд $z = 2 - y^2$. Значення цієї функції в стаціонарній точці $y = 0$ і в граничних точках $y = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ відповідно дорівнюють:

$$z(0) = 2, z(\sqrt{2}) = 0, z(-\sqrt{2}) = 0.$$

Порівнюючи всі знайдені значення функції, визначимо, що задана функція має найбільше значення $z = 2$ (досягається в точці $(2;0)$) і найменше значення $z = 0$ (досягається на хорді $x=1$ і на частині параболи $y^2 = x$).

Контрольні питання

1. Поняття локального екстремуму функції багатьох змінних.
2. Необхідні умови екстремуму. Критичні точки.
3. Достатні умови екстремуму, навести приклад.
4. Найбільше та найменше значення ФБЗ в замкненій області.

Лекція 24. Первісна функція, невизначений інтеграл, властивості інтеграла. Основні методи інтегрування

24.1. Первісна функції, її властивості.

24.2. Означення невизначеного інтеграла, його основні властивості.

24.3. Таблиця основних інтегралів.

24.4. Основні методи інтегрування: а) метод безпосереднього інтегрування та внесення під знак диференціала; б) метод заміни змінної.

24.1. Первісна функції, її властивості

Означення. Функція $y = F(x)$ називається *первісною* функції $y = f(x)$ на проміжку (a, b) , якщо $y = F(x)$ диференційована на (a, b) і $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a, b)$.

Наприклад, 1) $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$; 2) $f(x) = x$, $F(x) = x^2/2 + 10$ або $F(x) = x^2/2 + C$, де $C = \text{const}$, оскільки $F'(x) = (x^2/2 + C)' = x$, $x \in R$.

Задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно, тобто в умові існування первісної для функції ця первісна є не єдиною.

Дійсно, якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$, то функція $F(x) + C$, де C – довільна стала, також є первісною функції $f(x)$, оскільки $(F(x) + C)' = f(x)$ для будь-якого числа C .

Покажемо, що множина функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, а C – довільна стала, вичерпує всі первісні функції $f(x)$.

Оскільки $f'(c) = 0$, то $f(x_2) = f(x_1)$, тобто $f(x) = C$, де C – деяке число.

Теорема. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку (a, b) , то множина всіх первісних цієї функції на цьому ж проміжку має вигляд

$$y = F(x) + C. \quad (24.1)$$

24.2. Означення невизначеного інтеграла, його основні властивості

Означення. Множину всіх первісних $F(x) + C$ на проміжку (a, b) , де C – довільна стала для функції $y = f(x)$ називають *невизначеним інтегралом функції $f(x)$* на цьому проміжку і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (24.2)$$

При цьому функцію $f(x)$ називають *підінтегральною функцією*, вираз $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл є множиною кривих, кожна з яких називається *інтегральною кривою* і утворюється зсувом однієї з них паралельно іншій із них відносно осі Oy .

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, тоді для цієї функції існує первісна і, значить, невизначений інтеграл (24.2).

Властивості невизначеного інтеграла

$$1. \left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

$$2. d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx.$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Сталій множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

5. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C.$$

$$6. \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, тоді

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Доведемо властивість 4.

Дійсно, нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Тоді $kF(x)$ – первісна функції $kf(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Звідси випливає, що

$$k \int f(x) dx = k(F(x) + C) = kF(x) + C_1 = \int kf(x) dx, \text{ де } C_1 = kC.$$

24.3. Таблиця основних інтегралів

Відновлення функції за її похідною або, що те ж саме, знаходження невизначеного інтеграла за заданою функцією, називається *інтегруванням*. Оскільки інтегрування – дія, обернена до диференціювання, то будь-яка формула, яка виражає похідну функції, тобто формула вигляду $F'(x) = f(x)$, може бути обернена (записана у вигляді інтегральної формули):

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Використовуючи ці міркування, напишемо таблицю деяких невизначених інтегралів, які випливають з основних формул диференціального числення.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$
- $\left(\int dx = x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \right).$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$
8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$13. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$14. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$21. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$22. \int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$$

Зауваження. Правильність багатьох формул доводиться за допомогою диференціювання.

Доведемо формулу 20.

$$\left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right)' = \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|)' = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} \frac{x+a - (x-a)}{x^2 - a^2} =$$

$$= \frac{1}{x^2 - a^2}, \text{ тобто } \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

Якщо первісна деякої елементарної функції $f(x)$ є елементарною функцією, то кажуть, що інтеграл $\int f(x)dx$ виражається через елементарні функції або, що цей інтеграл обчислюється. Зауважимо, якщо операція диференціювання елементарних функцій знову приводить до елементарних функцій, то операція інтегрування вже може привести до неелементарних функцій, тобто функцій, які не виражаються через скінченне число арифметичних операцій і суперпозицій елементарних функцій.

Наприклад, доведено, що наступні інтеграли не інтегруються в елементарних функціях: $\int e^{-x^2} dx$ – інтеграл Пуассона, $\int \frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ – інтегральний косинус, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ – інтегральний синус.

24.4. Основні методи інтегрування: а) метод безпосереднього інтегрування та внесення під знак диференціала

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла та таблиці основних інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням*.

Приклад використання безпосереднього інтегрування

$$\begin{aligned} \int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx &= 5 \int \cos x dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \\ &+ \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4 \arctg x + C. \end{aligned}$$

Властивості 5, 7 використовують, вносячи неперервно-диференційовану функцію під знак диференціала. Наприклад,

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C; \quad \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3) = e^{x^3} + C.$$

б) метод заміни змінної (метод підстановки)

Теорема. Нехай $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку (a, b) , тобто $\int f(x)dx = F(x) + C$ і нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена та диференційована на проміжку (α, β) , причому множина значень цієї функції є проміжок (a, b) . Тоді справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C, \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (24.3)$$

Дійсно, з правила диференціювання складеної функції маємо

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

і справедливість формули випливає з властивості 1 невизначеного інтеграла.

Метод заміни змінної є одним із основних методів обчислення невизначених інтегралів.

Формула (24.3) називається **формулою заміни змінної в невизначеному інтегралі**.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx &= \left| \begin{matrix} x = t+1 \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln |t| - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C. \end{aligned}$$

Зауваження. При заміні змінної в невизначеному інтегралі інколи зручніше задавати не x як функцію t , а навпаки, задавати t як функцію x .

Контрольні питання

1. Дати означення первісної, невизначеного інтеграла. Навести приклади.
2. Сформулювати основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Записати таблицю інтегралів для основних функцій.
4. Пояснити метод заміни змінної у невизначеному інтегралі.

Лекція 25. Інтегрування частинами. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен. Прості раціональні дробы

25.1. Формула інтегрування частинами, основні випадки її використання.

25.4. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен.

25.5. Інтегрування простих раціональних дробів.

25.1. Формула інтегрування частинами, основні випадки її використання

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді для диференціала їхнього добутку маємо

$$d(uv) = vdu + u dv, \quad u dv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du,$$

або

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (25.1)$$

Формулу (25.1) називають *формулою інтегрування частинами*.

Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати даним методом.

1) Інтеграли виду $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)a^x dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$,

де $P(x)$ – многочлен, а k – дійсне число. В даних інтегралах $u = P(x)$, оскільки для $du = P'(x)dx$ порядок многочлена на одиницю зменшується. Відповідно до інтегралів

$$dv = \left\{ \begin{array}{l} e^{kx} dx, a^x dx \\ \sin kx dx, \\ \cos kx dx \end{array} \right\}, \text{ тоді } v = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} e^{kx}, \frac{1}{\ln a} a^x \\ -\frac{1}{k} \cos kx, \\ \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right\}.$$

2) Інтеграли виду $\int P(x)\ln^n x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$,

$\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\text{arcctg} x dx$, де $n \in \mathbb{N}$.

У цих інтегралах беруть $dv = P(x)dx$, відповідно $u = \ln^n x$, $du = n \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} dx$, тобто зменшується степінь логарифма;

$$u = \begin{cases} \arcsin x, \arccos x \\ \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x \end{cases}, \quad du = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{1}{1+x^2}, -\frac{1}{1+x^2} \end{cases} dx.$$

3) Інтеграли виду $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$, $\int a^x \sin \beta x dx$, $\int a^x \cos \beta x dx$, де α, β – дійсні числа. Тут двічі застосовують формулу інтегрування частинами, беручи перший або другий множник за u чи dv . Після двократного застосування формули утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, \int dv = \int dx, v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

25.2. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен

25.2.1. Розглядаємо $I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, де a, b, c – дійсні числа.

Попередньо перетворимо тричлен: $ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) =$

$$= a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right),$$

де позначили $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$. Знак плюс або мінус залежить від коренів квадратного тричлена ($D > 0$ – корені дійсні і знак мінус, $D < 0$ – дійсних коренів немає і знак плюс). Таким чином,

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}.$$

Зробивши підстановку $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$, отримують $I = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{t^2 \pm k^2}$, які є табличними (формули 19, 20 таблиці інтегралів).

25.2.2. Розглядаємо інтеграл більш загального вигляду $I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$, де A, B – також дійсні числа.

Виконуємо тотожні перетворення підінтегральної функції

$$I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = I_1 + I_2,$$

де I_2 розглянуто в п. 25.2.1. В першому інтегралі виконуємо заміну змінної

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b)dx = dt, \quad \text{тоді}$$

$$\int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2 + bx + c| + C.$$

25.2.3. Розглядаємо $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$

За допомогою перетворень, аналогічних в п. 25.2.1 даний інтеграл зводиться в залежності від знаку числа a до табличних інтегралів

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}, a > 0 \quad \text{та} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}, a < 0.$$

25.2.4. Інтеграл $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ обчислюється за допомогою перетворень, аналогічних в п. 25.2.2:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Тоді для першого інтеграла $ax^2 + bx + c = t$, $(2ax + b)dx = dt$, тому

$$\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C,$$

а другий інтеграл розглянуто в п. 25.2.3.

25.3. Інтегрування простих раціональних дробів

Означення. Відношення двох многочленів $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ вигляду $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називають *раціональною функцією* або *раціональним дробом* за умови $P_m(x) \neq 0$, $Q_n(x) \neq 0$.

Означення. Раціональний дріб називають *правильним*, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника $m < n$; в інших випадках ($m \geq n$) раціональний дріб називають *неправильним*.

Якщо дріб неправильний, то, виконавши ділення, дістанемо правильний дріб:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_k(x) + \frac{R_p(x)}{Q_n(x)},$$

причому $p < n$.

Означення. *Простими дробами I-IV типів* називаються правильні раціональні дробі:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \frac{A}{x-a}; \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}, \quad n=2, 3, \dots; \\ \text{III. } & \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

де A, a, M, N, p, q – дійсні числа, а тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $D = p^2 - 4q < 0$.

Інтегрування дробів I–III типу є достатньо простим.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{III. } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{M}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{M}{2} \ln|x^2+px+q| + \\ &\quad + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C. \end{aligned}$$

Висновок. Для того, щоб інтегрувати простий дріб III типу, потрібно:

1. виділити в чисельнику повну похідну від знаменника;
2. розкласти дріб в суму двох дробів;
3. в знаменнику другого дробу виділити повний квадрат.

IV. Більш складніше інтегрування дробу IV – го типу.

Виконуємо спочатку аналогічні перетворення, як для III– го типу:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \\ &= \frac{M}{2} I + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) I_k, \text{ тоді для першого інтеграла} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q=t, \\ (2x+p)dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k} dt = \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ &= \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

Для другого інтеграла

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right)^k} = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t, dx = dt \\ q - \frac{p^2}{4} = m^2 \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2 + m^2) - t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt.$$

Перетворюємо тепер другий інтеграл і інтегруємо його частинами:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^k} = \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2 + m^2)^k} = \left. \begin{aligned} u = t, du = dt \\ dv = \frac{t dt}{(t^2 + m^2)^k}, v = -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{aligned} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)} \left[t \cdot \frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right].$$

Підставляємо даний вираз у I_k .

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right] = \\ &= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}}. \end{aligned}$$

Отримали:

$$I_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} I_{k-1}.$$

Продовжуючи так само, отримують відомий табличний інтеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C.$$

Контрольні питання

1. Що таке раціональний дріб? Наведіть приклади.
2. Який дріб називається правильний, неправильний?
3. Як виділити цілу частину в неправильному дробі? Наведіть приклади.
4. Запишіть загальний вигляд простих дробів I-IV типів. Як вони інтегруються?
5. Наведіть приклад інтегрування простих дробів I-III типів.

Лекція 26. Деякі відомості з теорії раціональних дробів

26.1. Многочлени з дійсними коефіцієнтами.

26.2. Раціональні дробі. Розклад правильних раціональних дробів на прості.

26.1. Многочлени з дійсними коефіцієнтами

Означення. Многочленом n – го степеня називається функція вигляду:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

де $a_i, i = 0, 1, \dots, n$, – дійсні коефіцієнти або комплексні, а x – змінна. Якщо $a_n \neq 0$, то число n називається *степенем* многочлена.

Означення. Число x_0 таке, що $P_n(x_0) = 0$ називається *коренем* даного многочлена.

Теорема 1 (Безу). При діленні многочлена $P_n(x)$ на різницю $x - x_0$ одержується залишок, що дорівнює $P_n(x_0)$.

Наслідок 1. Якщо x_0 – корінь многочлена, тобто $P_n(x_0) = 0$, то $P_n(x)$ ділиться без залишку на $x - x_0$ і, отже, представляється у вигляді добутку

$$P_n(x) = (x - x_0) Q_{n-1}(x). \quad (26.1)$$

Означення. Якщо многочлен $P_n(x)$ ділиться на $(x - x_0)^k$ (k – натуральне число) і не ділиться на $(x - x_0)^{k+1}$, то число k називається *кратністю кореня* x_0 .

Таким чином, якщо число x_0 є коренем кратності k многочлена $P_n(x)$, то

$$P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x), \quad (26.2)$$

де $Q_{n-k}(x)$ – многочлен степеня $(n - k)$ за умови $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2 (Розклад многочлена на лінійні та квадратичні множники).

Для будь-якого многочлена степеня n з дійсними коефіцієнтами має місце єдиний розклад на лінійні та квадратичні (з від'ємними дискримінантами) множники:

$$P_n(x) = A_n(x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}, \quad (26.3)$$

де $\sum_{i=1}^n \alpha_i + 2 \sum_{i=1}^s \beta_i = n$, $\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, S$ і всі коефіцієнти $A_n, a_1, \dots, a_r, p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$ – дійсні.

26.2. Раціональні дроби. Розклад правильних раціональних дробів на прості

Важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції утворюють раціональні функції (раціональні дроби), тобто функції, які можна зобразити у вигляді дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x), Q(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Означення. Раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена $P(x)$ менша або дорівнює степені многочлена $Q(x)$.

Якщо раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ не є правильним, то виконавши ділення чисельника на знаменник, дріб можна зобразити у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

де $R(x), P^*(x), Q^*(x)$ – деякі многочлени, а $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ – правильний раціональний дріб.

Приклад.

$$\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} = x^2 + 3 - \frac{2x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x + 1}.$$

Теорема 3. Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб, $P(x), Q(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами. Якщо

$$Q_m(x) = b_0 (x - \gamma_1)^{r_1} (x - \gamma_2)^{r_2} \cdots (x - \gamma_s)^{r_s} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \cdots (x^2 + p_vx + q_v)^{l_v}, \quad (26.4)$$

то існують такі дійсні числа

$$A_1, A_2, \dots, A_{r_1}, B_1, B_2, \dots, B_{r_2}, C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_{l_1}, D_{l_1}, \dots, M_{l_v}, N_{l_v},$$

які визначають методом невизначених коефіцієнтів, що

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A_1}{x - \gamma_1} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x - \gamma_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{x - \gamma_2} + \cdots + \frac{B_{r_2}}{(x - \gamma_2)^{r_2}} + \cdots + \\ & + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \cdots + \frac{C_{l_1}x + D_{l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{M_{l_v}x + N_{l_v}}{(x^2 + p_vx + q_v)^{l_v}}. \end{aligned} \quad (26.5)$$

Таким чином, теорема стверджує, що будь-який правильний раціональний дріб можна однозначно розкласти на суму простих дробів.

При виконанні розкладу вигляду (26.5) для конкретного заданого дробу є зручний так званий **метод невизначених коефіцієнтів**. Він полягає в наступному. Для даного дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ записується розклад (26.5), в якому коефіцієнти $A_i, B_i, C_i, D_i, M_i, N_i$, вважаються невідомими. Після цього обидві частини рівності зводяться до спільного знаменника і для многочленів, які отримані в чисельнику, прирівнюються коефіцієнти. При цьому, якщо степінь многочлена $Q(x)$ дорівнює n , то в чисельнику правої частини (26.5) після зведення до спільного знаменника одержується многочлен степеня $n-1$.

Таким чином, ми отримуємо систему n рівнянь з n невідомими. Існування у неї розв'язку впливає з доведеної теореми.

Зауважимо, що після зведення (26.5) до спільного знаменника і його відкидання, у випадку, коли $Q(x)$ має дійсні корені, доцільно підставити в обидві частини отриманої рівності послідовно ці корені; в результаті одержимо деякі співвідношення між шуканими коефіцієнтами, які є корисними для їх подальшого визначення.

Приклад. Розкладемо дріб $\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)}$ на елементарні дробі:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Зведемо до спільного знаменника і відкинемо його, одержимо:

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1). \quad (26.6)$$

Маємо випадок, коли всі корені знаменника дійсні. Підставивши в (26.6) послідовно $x=1$, $x=-1$ і $x=2$, знайдемо

$$1 = -2A, \quad -1 = 6B, \quad 2 = 3C, \quad \text{звідси } A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{6}, C = \frac{2}{3}.$$

Отже, шуканий розклад

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}.$$

Загальний метод інтегрування дробово-раціональних функцій:

1. Виділити цілу частину з даної функції, якщо дріб неправильний; ціла частина інтегрується безпосередньо.
2. Знаменник правильного дробу розкласти на множники $x-a$ та x^2+px+q , при цьому квадратичні множники повинні мати від'ємний дискримінант.
3. Скоротити правильний дріб, якщо це можливо.
4. Розкласти правильний дріб на суму елементарних дробів та виконати інтегрування кожного доданка окремо.

Можливі наступні частинні випадки:

1. *Корені знаменника тільки дійсні та різні числа, тобто*

$$Q_m(x) = (x-a_1)(x-a_2) \cdot \dots \cdot (x-a_m). \quad (26.7)$$

В цьому випадку правильний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму простих дробів

1-го типу:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_m}{x-a_m}, \quad (26.8)$$

де $A_1, A_2, \dots, A_m$ – невизначені коефіцієнти.

Корені знаменника тільки дійсні числа, причому деякі з них кратні, тобто

$$Q_m(x) = (x-a) \cdot \dots \cdot (x-b)^i. \quad (26.9)$$

Тоді правильний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму простих дробів 1-го та 2-го типів:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_{i-1}}{(x-b)^{i-1}} + \frac{B_i}{(x-b)^i}, \quad (26.10)$$

де невизначені коефіцієнти $A, \dots, B_1, B_2, \dots, B_{i-1}, B_i$.

Корені знаменника дійсні числа, причому деякі з них кратні, крім того знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники (комплексні корені), тобто

$$Q_m(x) = (x-a)(x-b)^i(x^2 + px + q). \quad (26.11)$$

В цьому випадку дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму простих дробів I, II та III-го типів

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_{i-1}}{(x-b)^{i-1}} + \frac{B_i}{(x-b)^i} + \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}, \quad (26.12)$$

де $A, B_1, B_2, \dots, B_{i-1}, B_i, M, N$ – невизначені коефіцієнти, які необхідно знати.

2. *Корені знаменника дійсні числа, причому деякі з них кратні, крім того знаменник містить квадратні тричлени, які не розкладаються на множники (комплексні корені), причому деякі з них теж є кратні, тобто*

$$Q_m(x) = (x-a)(x-b)^i(x^2 + px + q)(x^2 + tx + l)^j. \quad (26.13)$$

В цьому випадку дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму простих дробів всіх

типів

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_{i-1}}{(x-b)^{i-1}} + \frac{B_i}{(x-b)^i} + \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} + \\ & + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + tx + l} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + tx + l)^2} + \dots + \frac{M_jx + N_j}{(x^2 + tx + l)^j}, \end{aligned} \quad (26.14)$$

де $A, B_1, B_2, \dots, B_{i-1}, B_i, M, N, M_1, \dots, M_j, N_1, \dots, N_j$ – невизначені коефіцієнти.

Контрольні питання

1. Сформулюйте теорему Безу та її наслідки.
2. Сформулюйте теорему про розклад многочлена на множники. Наведіть приклади.
3. Сформулюйте теорему про розклад правильного раціонального дробу на прості дробі. Наведіть важливі частинні випадки.

Лекція 27. Інтегрування деяких ірраціональних та тригонометричних функцій

27.1. Інтеграли типу $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx$.

27.2. Інтеграли від диференціального бінома. Підстановки Чебишова.

27.3. Універсальна тригонометрична підстановка.

27.4. Деякі інші тригонометричні підстановки.

27.1. Інтеграли типу $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx$.

Означення. Функція вигляду

$$R(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{P(u_1, \dots, u_n)}{Q(u_1, \dots, u_n)} \quad (27.1)$$

де P і Q – многочлени від змінних $u_1, \dots, u_n$, а змінні $u_1, \dots, u_n$ є функціями змінної x : $u_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ називається *раціональною функцією* від функцій $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$.

Наприклад, функція $f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + 1}}$ є раціональною функцією від x і радикалів $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2 - 1}$, $\sqrt{x^2 + 1}$:

$$f(x) = R(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x^2 - 1}, \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\text{Тут } R(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_1 + u_3^2}{u_2 - u_4}, \quad u_1 = x, \quad u_2 = \sqrt{x}, \quad u_3 = \sqrt[3]{x^2 - 1}, \quad u_4 = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Якщо в формулі (27.1) змінні $u_1, \dots, u_n$ є елементарними тригонометричними функціями, то складена функція, яка отримується, називається *раціональною відносно елементарних тригонометричних функцій*.

Прикладом такої функції є $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos x} = R(\sin x, \cos x)$.

Перейдемо тепер до інтегралів від функцій вказаних типів і покажемо, що в наступних випадках вони зводяться до інтегралів від раціональних функцій.

Розглянемо інтеграли типу $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx$ за умови, що сталі

$r_1, \dots, r_s$ раціональні, і $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d – сталі).

Нехай m – спільний знаменник чисел $r_1, \dots, r_s$: $r_i = \frac{p_i}{m}$, p_i – ціле, $i = 1, 2, \dots, s$.

Покладемо $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, звідси $x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t)$; $\rho(t)$ є раціональною функцією, тому $\rho'(t)$ також раціональна функція; $dx = \rho'(t)dt$, $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Тоді

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s}\right) \rho'(t) dt = \int R^*(t) dt,$$

де $R^*(t) = R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s}\right) \rho'(t)$ є раціональною функцією змінної t . Таким чином, обчислення інтеграла типу

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx \quad (27.2)$$

зводиться до інтегрування раціональних дробів.

Відзначимо, що до інтегралів типу (27.2) відносяться інтеграли

$$\int R\left(x, (ax+b)^{r_1}, \dots, (ax+b)^{r_s}\right) dx$$

і, зокрема, також

$$\int R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_s}) dx.$$

27.2. Інтеграли від диференціального бінома. Підстановки Чебишова

Означення. Вираз $x^m(a + bx^n)^p dx$ ($a \neq 0, b \neq 0$) називається *диференціальним біномом*.

Будемо розглядати випадки, коли n , m і p – раціональні, а a і b – дійсні числа.

Для інтеграла від диференціального бінома

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx, \quad (27.3)$$

маємо такі *підстановки Чебишова*: коли одне з чисел p , $\frac{m+1}{n}$ або $\frac{m+1}{n} + p$ є цілим, інтеграл можна звести до інтеграла від раціонального дробу. При цьому:

1. p – ціле, зведення здійснює підстановка $z = x^{\frac{n}{s}}$, де число $s \in \text{НСЗ}$ дробів n , m .
2. $\frac{m+1}{n}$ – ціле, підстановка $z = (a + bx^n)^{\frac{1}{s}}$, де число s – знаменник дробу p , тобто $p = \frac{r}{s}$,
3. $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле, підстановка $z = (ax^{-n} + b)^{\frac{1}{s}}$, де s – також знаменник дробу p .

П. Л. Чебишов показав, що при показниках m , n і p , які не задовольняють вказаним вище умовам, інтеграл (27.3) не виражається через елементарні функції.

27.3. Універсальна тригонометрична підстановка

Будемо розглядати інтегрування функцій, які раціонально залежать від тригонометричних функцій

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (27.4)$$

Для таких функцій застосуємо універсальну підстановку

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
(27.5)

В результаті

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2tdt}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt.$$

Маємо раціональний дріб, тобто функцію, яка раціонально залежить від змінної t .

27.4. Деякі інші тригонометричні підстановки

а) Нехай функція $R(\sin x, \cos x)$ задовольняє умові

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
(27.6)

тоді треба виконати заміну $t = \cos x$, $dt = -\sin x$.

б) Нехай функція $R(\sin x, \cos x)$ задовольняє умові

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
(27.7)

тоді треба виконати заміну $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

в) Нехай функція $R(\sin x, \cos x)$ задовольняє умові

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$
(27.8)

тоді треба виконати заміну $t = \operatorname{tg} x$, $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ або $t = \operatorname{ctg} x$, $dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$.

Зауваження. При інтегруванні тригонометричних функцій спочатку треба спробувати застосувати підстановки (27.6) – (27.8), а потім універсальну підстановку. Часто універсальна підстановка приводить до інтегрування простих дробів IV типу.

Контрольні питання

1. Дати означення функції, яка раціонально залежить від своїх аргументів.
2. Що таке біномний диференціал?
3. Запишіть підстановки Чебишова. Сформулюйте теорему Чебишова.
4. Що таке універсальна тригонометрична підстановка? Які функції можна за допомогою неї зінтегрувати?
5. Наведіть інші тригонометричні підстановки. Коли вони застосовуються?

Література

Основна література

1. Васильченко І. П. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч. посібник: У двох книгах. Книга 2 / І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, А. І. Лобанов, Є. Ю. Таран. – друге видання зі змінами. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.
2. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: У 3 ч.: Навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К: Книги України ЛТД, 2009. – Ч. 1. – 578 с.
3. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: У 3 ч.: Навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К: Книги України ЛТД, 2010. – Ч. 2. – 470 с.
4. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2015. – 648 с.
5. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2015. – 480 с.
6. Кулик Г.М. Вища математика: Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей / Г.М. Кулик, О.І. Кушлик-Дивульська, Н.В. Степаненко, Н.П. Ярема: НТУУ "КПІ". – Електронні текстові дані (1 файл: 5,04 Мбайт). – К.: НТУУ "КПІ". 2016. – 278 с. – Назва з екрана. – Доступ: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/16444>.
7. Кушлик-Дивульська О. І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс] : навчальний посібник [для студентів Видавничо-поліграфічного інституту спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія»] / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук ; відп. ред. С. Д. Івасишен; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,15 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 141 с. – Назва з екрана. – Доступ: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19572>.
8. Кушлик-Дивульська О.І. Конспект лекцій кредитного модуля «Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння» (Вища математика-2) для напряму підготовки 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа» [Електронний ресурс] / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,68 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 241 с. – Назва з екрана. – Доступ: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/12700>.
9. Кушлик-Дивульська О. І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс]: збірник типових завдань кредитного модуля «Вища математика-1» для студентів видавничо-поліграфічного інституту / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-

Дивульська, Н. В. Поліщук, Н. П. Селезньова. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,67 Мбайт). – Київ: НТУУ «КПІ», 2015.–149 с.– Назва з екрана. – Доступ : <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/10429>.

10. Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н.В. Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Збірник індивідуальних завдань [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,03 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 78 с. – Назва з екрана. – Доступ: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46598>.

11. Стрижак Т. Г. Математичний аналіз: приклади і задачі: навч. посіб. / Стрижак Т. Г., Коновалова Н. Р. – К.: Либідь, 1995. – 240 с.

Додаткова література

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления (т.1). М.: Наука, 1996. – 416 с.

2. Стрижак Т.Г. Математичний аналіз: приклади і задачі: навч. посіб. / Стрижак Т.Г., Коновалова Н.Р. – К.: Либідь, 1995. – 240 с.

3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов. В 2-х ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М.: Высш. школа, 1986. – Ч. I. – 304 с.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Дрофа, 2004. – 288 с.

5. Ефимов В.Н. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 2005.– 240с.

6. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. – 240 с.

1. Лінійна алгебра

Визначники: другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

або
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Правила Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}, \quad \text{за умови, що } \Delta \neq 0 \text{ для системи}$$

Матричний спосіб (для системи 3-го порядку) $X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

2. Векторна алгебра

Модуль вектора: $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$, $|\vec{a}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

Умова колінеарності векторів: $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{b} = (x_1, y_1, z_1)$, $\frac{x_0}{x_1} = \frac{y_0}{y_1} = \frac{z_0}{z_1}$.

Скалярний добуток :

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \quad \vec{a}\vec{b} = x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1, \quad \cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\vec{b} = 0$, $x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = 0$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$: $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Векторний добуток: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = (y_0 z_1 - y_1 z_0) \vec{i} - (x_0 z_1 - x_1 z_0) \vec{j} + (x_0 y_1 - x_1 y_0) \vec{k}.$

Площа паралелограма, трикутника, побудованих на векторах

$\vec{a}, \vec{b}$: $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$, $S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$

Мішаний добуток: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$

Об'єм паралелепіпеда і піраміди: $V_{\text{пар}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$, $V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|.$

3. Аналітична геометрія

Пряма на площині

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0) \perp$ до вектора $\vec{N}(A, B)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$

Загальне рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$. Кут φ між двома прямими, які задані

загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$: $\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n)$: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$: $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$

Параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k : $y - y_0 = k(x - x_0)$ (прямі перпендикулярні: $k_1 \cdot k_2 = -1$).

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k : $y = kx + b$. Для прямих $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ тангенс кута між ними через їх кутові коефіцієнти обчислюють за формулою $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$

Відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$

Криві 2-го порядку

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіуса R : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Рівняння еліпса з центром в точці $O(0, 0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Рівняння гіперболи з центром в точці $O(0, 0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1, \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1.$$

Рівняння параболи з вершиною $O(0, 0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$y^2 = 2px, \quad x^2 = 2py; \quad (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \quad (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

Пряма в просторі

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \text{ Кут між двома прямими } \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}:$$

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \text{ Умова паралельності двох прямих: } \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}, \text{ умова}$$

перпендикулярності: $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$: $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$.

Параметричні рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt.$$

$$\text{Загальні рівняння прямої: } \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Площина в просторі

Рівняння площини через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\perp$ до вектора $\vec{N}(A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$$\text{Рівняння площини у відрізках на осях: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

$$\text{Загальне рівняння площини: } Ax + By + Cz + D = 0.$$

Рівняння площини через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Кут між площинами: $\cos \varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}$, $\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряма і площина в просторі

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: $Am + Bn + Cp = 0$, а умова перпендикулярності

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Поверхні 2-го порядку

Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, еліпсоїд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Циліндри 2-го порядку:

круговий $x^2 + y^2 = R^2$; еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; параболічний $y^2 = 2px$.

Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Гіперболоїди: однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, двопорожнинний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

Параболоїд: еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

4. Функція однієї змінної

Дві важливі границі: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 \pm x)^{\pm \frac{1}{x}} = e$.

Основні еквівалентні величини:

$$\sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0;$$

$$\ln(1+x) \sim x, \log_a(1+x) \sim (\log_a e)x, \quad x \rightarrow 0; e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, \quad x \rightarrow 0; \arcsin x \sim x, \quad x \rightarrow 0;$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0; \operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0; (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x, \quad x \rightarrow 0.$$

Таблиця похідних

$$1. (C)' = 0$$

$$9. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$10. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$3. (e^x)' = e^x$$

$$11. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$4. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$5. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$13. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$6. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$14. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$15. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$16. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Правила диференціювання

$$1. (C_1 u + C_2 v)' = C_1 u' + C_2 v'. \quad 2. (uv)' = u'v + uv'. \quad 3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$4. y = f(u), \quad u = u(x), \quad \text{то } y'_x = f'_u \cdot u'_x. \quad 5. x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{то } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Рівняння дотичної і нормалі

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$

Екстремуми функцій

Точки, в яких $f'(x_0) = 0$ – критичні точки функції. Якщо похідна змінює знак з + на -, то точка x_0 – точка максимуму, якщо з - на +, то точка мінімуму.

Таблиця інтегралів

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$10. \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$11. \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$13. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

$$16. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$18. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$19. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$20. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$21. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

Формула інтегрування частинами: $\int u dv = uv - \int v du$.

5. Функція багатьох змінних

$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ – похідна за змінною x , y – стала; $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ – похідна за змінною y , x – стала.

$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – похідна 2-го порядку за x ; $z''_{yy} = (z'_y)'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – похідна 2-го порядку за y ;

$z''_{xy} = (z'_y)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – мішана похідна 2-го порядку за x , y .

Значення функцій деяких кутів

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \pi = 0, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1;$$

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \pi = -1, \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0;$$

$$\operatorname{tg} 0 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} - \text{ не існує};$$

$$\operatorname{ctg} 0 - \text{ не існує}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0.$$