

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ФАКУЛЬТЕТ БІОМЕДИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

(повна назва інституту/факультету)

кафедра БІОМЕДИЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

(повна назва кафедри)

«На правах рукопису»

УДК _____

«До захисту допущено»

В.о.завідувача кафедри БМК

_____ Світлана АЛХІМОВА
(підпис) (ініціали, ПРІЗВИЩЕ)

“ _____ ” *травня* 2026р.

**Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра**

**за освітньо-науковою програмою «Комп'ютерні науки»
зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»**

**на тему: _____ Моделювання перетворень енергії під час кровоплину
через активні артеріальні судини**

Виконав: студент II курсу, групи ЗК-41мн

ЦИМБАЛЮК ОЛЕКСІЙ АНАТОЛІЙОВИЧ

(прізвище, ім'я, по батькові)


(підпис)

Науковий керівник: *ст.викл. каф. біомедичної кібернетики
к.фіз-мат.н., Рудніков Євгеній Григорович*

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ім'я, по ініціали)


(підпис)

Консультант з розділів магістерської дисертації:

_____ (назва розділу) (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище, ініціали)

_____ (підпис)

Рецензент: *доцент каф. цифрових технологій в енергетиці,
доцент, канд. тех. наук Шаповалова Світлана Ігорівна*

(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

_____ (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.

Студент


(підпис)

Київ – 2026 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Факультет біомедичної інженерії
Кафедра біомедичної кібернетики

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 122 «Комп'ютерні науки»

Освітньо-наукова програма «Комп'ютерні науки»

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о.завідувача кафедри БМК

_____ Світлана АЛХІМОВА

« 13 » січня 2026 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

ЦИМБАЛЮК ОЛЕКСІЙ АНАТОЛІЙОВИЧ

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації _____ **Моделювання перетворень енергії під час**
кровоплину через активні артеріальні судини

науковий керівник дисертації

Рудніков Євгеній Григорович, к.фіз-мат.н.

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «30» березня 2026 р. №1320-с

2. Термін подання студентом дисертації _____ **25-27 квітня 2026 року**

3. Об'єкт дослідження *енергетичні характеристики обертального кровотоку в артеріальній системі кровообігу людини.*

4. Вихідні дані *початковий тиск, об'ємний потік, швидкість крові, діаметр судин.*

5. Перелік завдань, які потрібно розробити *удосконалити гідродинамічне рівняння для кровотоку з обертанням, розрахувати набір характеристик артеріальних судин з обертальним рухом крові, порівняти отримані характеристики в умовах нормальних та патологічних змін кровообігу, розробити програмний застосунок для теоретичних досліджень обертального кровотоку, запропонувати медико-інженерні рішення для засобів технічного відтворення кровообігу.*

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу *50 рисунків, 2 таблиці, презентація з захисту МД на 30 слайдах.*

7. Орієнтовний перелік публікацій *2 тез доповідей на міжнародних конференціях, 1 стаття у фаховому журналі категорії Б.*

8. Консультанти розділів дисертації*

* Якщо визначені консультанти. Консультантом не може бути зазначено наукового керівника магістерської дисертації.

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Магістерської дисертації			

9. Дата видачі завдання **13 січня 2026р.**

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів МД	Примітка
1	Отримати завдання на МД	До 10.01.2026	виконано
2	Завершення виконання практичної частина МД	До 22.03.2026	виконано
3	Завершення оформлення розділів МД (Вступ, Основні розділи та висновки до них, Загальні висновки, Список використаних джерел)	До 20.04.2026	виконано
4	Апробація та публікація результатів дослідження МД (отримати підтвердження про прийняття до друку)	До 25.04.2026	виконано
5	Перевірка МД науковим керівником	20.04.2026	виконано
6	Подання в електронному вигляді МД на перевірку нормоконтролера	До 25.04.2026	виконано
7	Подання в електронному вигляді МД на перевірку подібності Strike Plagiarism com. Отримати позитивний звіт подібності.	До 27.04.2026	виконано
8	Підготовка Експертної оцінки до звіту подібності.	До 02.05.2026	
9	Отримати відгук наукового керівника	02.05.2026	
10	Надати на кафедру пакет документів в паперовому та електронному вигляді (МД, відгук керівника, звіт подібності, Експертної оцінки до звіту подібності)	До 06.05.2026	
11	Отримати допуск до захисту МД в ЕК та направлення до рецензента (засідання кафедри)	Засідання кафедри	
12	Подання МД рецензенту. Отримати на надання рецензію до ЕК / на кафедру	До 15.05.2026	
13	Подання супровідного пакету документів по МД до захисту в ЕК ¹	До 23.05.2026	
14	Захист МД в ЕК	26.05.2026	

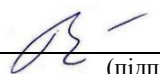
Студент


(підпис)

Олексій ЦИМБАЛЮК

(ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

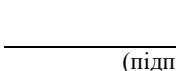
Науковий керівник


(підпис)

Євгеній РУДНІКОВ

(ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

Нормоконтролер


(підпис)

Галина КОРНІЄНКО

(ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

¹ не пізніше ніж за один тиждень до затвердженої дати захисту МД в ЕК

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація за темою **«Моделювання перетворень енергії під час кровоплину через активні артеріальні судини»** виконана студентом кафедри біомедичної кібернетики ФБМІ Цимбалюком Олексієм Анатолійовичем зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» за освітньо-науковою програмою «Комп'ютерні науки» та складається зі: вступу; 5 розділів (огляд методів забезпечення математичних моделей кровотоку в артеріальних судинах; обґрунтування моделі енергетичних характеристик обертального кровоплину в артеріальній системі кровообігу людини; обґрунтування вибору програмного середовища та засобів реалізації; програмна реалізація та методика роботи програмного продукту; узагальнені результати науково-дослідної роботи), висновків до кожного з цих розділів; загальних висновків; списку використаних джерел, який налічує 47 джерел. Загальний обсяг роботи 96 сторінок.

Актуальність теми. Теоретичні дослідження із застосуванням моделювання є одним із основних інструментів кібернетики та біомедичної кібернетики зокрема. Вони дозволяють дослідити ті процеси та регуляторні механізми, які не піддаються прямому виміру. Отримані в результаті обчислювальних експериментів закономірності дозволяють планувати наступні експериментальні дослідження та можуть бути основою технічних рішень щодо технічного відтворення фізіологічних функцій організму. Система кровообігу людини є однією з найбільш модельованих біологічних систем протягом останніх ста років. Більшість наявних моделей гемодинаміки описує тільки поступальний рух крові, не беручи до уваги обертальну компоненту, хоча її чітко зафіксовано доплерівськими дослідженнями. Цілісного підходу, де поступальний і обертальний рух, активна поведінка стінки судини та енергетичні перетворення розглядалися б разом, у літературі не виявлено. У дисертації побудовано саме такий підхід – на основі трьох базових залежностей серцевого циклу: зміни тиску, об'ємного потоку та швидкості крові. Дослідження спирається на поєднання рівняння Бернуллі, рівняння Пуазейля та електрогідродинамічних аналогій. Отримані результати можуть слугувати базою

для побудови регуляторних характеристик артеріальної системи, для розробки медико-інженерних рішень технічного відтворення кровообігу, а також для планування клінічних і фізіологічних експериментальних досліджень.

Мета і задачі дослідження.

Метою роботи є поглиблення теоретичних уявлень в проєктуванні медико-інженерних рішень пружно-активних артеріальних судин у процесах кровоплину з обертанням шляхом моделювання перетворень енергії кровотоку.

Сформульовано наступні **задачі**:

1. Проаналізувати стан наявних джерел з досліджень NO-продукційної функції ендотелію артеріальних судин та доплерографічних даних щодо кровотоку з обертанням
2. Удосконалити гідродинамічне рівняння кровотоку для моделювання перетворень енергії пружно-активних артеріальних судин для кровотоку з обертанням
3. На підставі модельних розрахунків (побудувати?) набір характеристик функції ендотелію артеріальних судин в умовах обертального руху крові в артеріальній системі людини.
4. Порівняти отримані характеристики з відомими в умовах нормальних та патологічних змін кровообігу.
5. Розробити програмний застосунок для теоретичних досліджень обертального кровотоку у нормі та при патології.
6. Запропонувати медико-інженерні рішення для засобів технічного відтворення кровообігу.

Об'єкт дослідження. Енергетичні характеристики обертального кровотоку в артеріальній системі кровообігу людини.

Предмет дослідження. Перетворення енергії пульсуючого обертального кровотоку в різних станах кровообігу людини.

Методи дослідження. Застосовано моделі гемодинаміки, кінематики та енергетичних перетворень кровотоку при обертальному русі крові з урахуванням

активної поведінки стінок артеріальних судин та змін величини серцевого викиду. З їх застосуванням проведені обчислювальні експерименти для побудови регуляторних характеристик артеріальної системи.

Практичне значення одержаних результатів. Магістерська дисертація виконана за ініціативної наукової роботи кафедри НДР д/р № 0123U100866 “Методи та моделі ідентифікації станів об’єктів в задачах прийняття медичних рішень” (06.02.2023).

Апробація результатів дослідження Результати роботи проходили апробацію на 2 наукових конференціях:

1. Настенко Є.А., Рудніков Є.Г., Цимбалюк О.А. Сучасні погляди моделювання кровообігу людини. Конференція «Психофізіологічні та вісцеральні функції в нормі і патології». м. Київ, Україна. 21-24.10.2025. С. 118 URL:

https://biomed.knu.ua/images/stories/Conference_PVFNP/Conf_IX_PVFNP.pdf

(дата звернення 16.03.2026)

2. Цимбалюк О.А., Живага Д., Рудніков Є.Г., Настенко Є.А. Моделювання кровотоку через артеріальні судини в нормі та під впливом радіаційного опромінення. Всеукраїнська наукова конференція «Чорнобильська катастрофа: медичні, екологічні та соціальні наслідки через 40 років». м. Київ, Україна, 22.04.2026. С. 165-166 URL: <https://chornobyl.kpi.ua/Conference-materials.pdf>

(дата звернення 02.05.2026)

Публікації. За результатами виконаної роботи були опублікована 1 наукова стаття в фаховому журналі категорії Б:

Рудніков Є.Г., Цимбалюк О.А., Подиман А.О., Лисенко С., Настенко Є.А. Моделювання кровотоку з обертанням через пружно-активні судини артеріальної системи кровообігу людини. Біомедична інженерія і технологія. Київ, 2026. (категорія Б). URL: <https://biomedtech.kpi.ua/>. Довідка редакційної колегії про прийняття статті до друку від 01.05.2026.

Ключові слова. Серцево-судинна система, кровотік, пружно-активні артеріальні судини, внутрішнє тертя, обертальна енергія.

Бібліографічний опис МД

Цимбалюк О.А. Моделювання перетворень енергії під час кровоплину через активні артеріальні судини: магістерська дис. : 122 Комп'ютерні науки / Цимбалюк Олексій Анатолійович. – Київ, 2026. – 127.

ABSTRACT

The master's thesis on the topic “**Modeling Energy Transformations in Blood Flow Through Active Arterial Vessels**” was completed by Tsymbaliuk Oleksii Anatoliiovych, a student of the Department of Biomedical Cybernetics, Faculty of Biomedical Engineering, in specialty 122 "Computer Sciences" under the educational and scientific program "Computer Sciences". The thesis consists of an introduction; five chapters (review of methods for the mathematical modeling; justification of the model of energy characteristics of rotational blood flow in the human arterial circulatory system; justification of the choice of software environment and implementation tools; software implementation and methodology of operation of the software product; generalized results of the research work); conclusions to each of these chapters; general conclusions; and a list of references comprising 47 sources. The total volume of the work is 96 pages.

Relevance of the topic. Theoretical research employing modeling is one of the principal tools of cybernetics in general and of biomedical cybernetics in particular. It enables the investigation of processes and regulatory mechanisms that are not amenable to direct measurement. The regularities obtained from computational experiments make it possible to plan subsequent experimental studies and can serve as the foundation for technical solutions aimed at the technical reproduction of physiological functions of the human body. The human circulatory system has been one of the most extensively modeled biological systems over the past hundred years. The majority of existing hemodynamic models describe only the translational motion of blood, disregarding the rotational component, even though it has been clearly recorded in Doppler studies. No integrated approach has been identified in the literature in which translational and rotational motion, the active behavior of the vessel wall, and energy transformations would be considered together. It is precisely such an approach that is developed in the thesis – based on three fundamental dependencies of the cardiac cycle: changes in pressure, volumetric flow, and blood velocity. The study draws on a combination of the Bernoulli equation, the Poiseuille equation, and electro-

hydrodynamic analogies. The results obtained can serve as a basis for constructing the regulatory characteristics of the arterial system, for the development of medical-engineering solutions for the technical reproduction of blood circulation, and for planning clinical and physiological experimental studies.

Aim and objectives of the research. The aim of the work is to deepen the theoretical understanding underlying the design of medical-engineering solutions for elastic-active arterial vessels in the processes of blood flow with rotation, by means of modeling the energy transformations of blood flow.

The following objectives have been formulated:

1. To analyze the current state of available sources on studies of the NO-producing function of the endothelium of arterial vessels and on Doppler ultrasound data concerning blood flow with rotation.
2. To refine the hydrodynamic equation of blood flow for modeling the energy transformations of elastic-active arterial vessels in the case of blood flow with rotation.
3. On the basis of model calculations, to construct a set of characteristics of the endothelial function of arterial vessels under conditions of rotational blood motion in the human arterial system.
4. To compare the obtained characteristics with those known for normal and pathological states of blood circulation.
5. To develop a software application for theoretical studies of rotational blood flow under normal and pathological conditions.
6. To propose medical-engineering solutions for the technical reproduction of blood circulation.

Object of research. The energy characteristics of rotational blood flow in the human arterial circulatory system.

Subject of research. Transformations of the energy of pulsating rotational blood flow in different states of human blood circulation.

Research methods. Models of hemodynamics, kinematics, and energy

transformations of blood flow under rotational motion are applied, taking into account the active behavior of arterial vessel walls and variations in cardiac output. Using these models, computational experiments were conducted to construct the regulatory characteristics of the arterial system.

Practical significance of the obtained results. The master's thesis was carried out within the framework of the department's initiative research project, state registration No. 0123U100866 "Methods and models for identifying the states of objects in medical decision-making tasks" (06.02.2023).

Approbation of the research results. The results of the work were presented at 2 scientific conferences:

1. Nastenko Ye.A., Rudnikov Ye.H., Tsymbaliuk O.A. Modern approaches to modeling human blood circulation. *Conference "Psychophysiological and Visceral Functions in Normal and Pathological Conditions"*. Kyiv, Ukraine. 21–24.10.2025. P. 118. URL: https://biomed.knu.ua/images/stories/Conference_PVFNP/Conf_IX_PV_FNP.pdf (accessed 16.03.2026).
2. Tsymbaliuk O.A., Zhyvaha D., Rudnikov Ye.H., Nastenko Ye.A. Modeling of blood flow through arterial vessels under normal conditions and under the influence of radiation exposure. *All-Ukrainian Scientific Conference "The Chornobyl Catastrophe: Medical, Ecological and Social Consequences 40 Years On"*. Kyiv, Ukraine. 22.04.2026. P. 165-166. URL: <https://chornobyl.kpi.ua/Conference-materials.pdf> (accessed 02.05.2026).

Publications. Based on the results of the work, 1 scientific article has been published in a professional journal of category B:

Rudnikov Ye.H., Tsymbaliuk O.A., Podyman A.O., Lysenko S., Nastenko Ye.A. Modeling of blood flow with rotation through elastic-active vessels of the arterial system of human blood circulation. *Biomedical Engineering and Technology*. Kyiv, Ukraine, 2026. (category B). URL: <https://biomedtech.kpi.ua/>. Acceptance letter from

the editorial board, dated 01.05.2026.

Keywords: cardiovascular system, blood flow, elastic-active arterial vessels, internal friction, rotational energy.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ	15
ВСТУП.....	17
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД МЕТОДІВ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ КРОВОТОКУ В АРТЕРІАЛЬНИХ СУДИНАХ	21
1.1 Біофізичні характеристики серцево-судинної системи як об'єкту моделювання.	21
1.2 Основні гемодинамічні параметри кровотоку в аорті.....	23
1.2.1 Активна поведінка артеріальних судин	24
1.2.2 Обертальний (вихровий) кровоплин в аорті: механізми утворення та значення	25
1.3 Математичні підходи до моделювання кровотоку в артеріальних судинах	26
1.3.1 Нульвимірні (windkessel) моделі	27
1.3.2 Одновимірні моделі кровотоку.....	27
1.3.3 Тривимірні CFD-моделі	27
1.3.4 Гібридні багатомасштабні моделі	28
1.4 Моделі з урахуванням обертального руху	28
1.4.1 Рівняння Пуазейля для стаціонарного ламінарного потоку.....	29
1.4.2 Рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої в'язкої рідини	29
1.4.3 Рівняння Бернуллі та його модифікації для біологічних систем	29
1.4.4 Порівняння фізико-математичних моделей кровоплину	30
Висновок з розділу 1	32
РОЗДІЛ 2 ОБҐРУНТУВАННЯ МОДЕЛІ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЕРТАЛЬНОГО КРОВОПЛИНУ В АРТЕРІАЛЬНІЙ СИСТЕМІ КРОВООБІГУ ЛЮДИНИ	35
2.1 Загальна структура теоретичних досліджень із застосуванням моделювання та обчислювальних експериментів	35
2.2 Математичний апарат моделі	37
2.3 Моделювання поступального руху крові.....	38

2.4 Моделювання обертального руху крові	38
2.5. Моделювання фаз розширення та стиснення судини.....	39
2.6. Результати моделювання тиску	40
2.7 Вплив еластичності та обертання на швидкість кровотоку	41
2.8 Модель активності судини.....	42
2.9 Обертальний кровотік: кручення та кочення.....	42
2.10 Розрахунок енергетичних параметрів кровотоку через артеріальні судини системи	42
2.11 Гамільтоніан та лагранжіан системи кровотоку	45
2.12 Загальна схема етапів розрахунку параметрів кровотоку	45
2.13 Показники, що використовуються в розрахунках	52
2.14 Модель просторово-часового розподілу тиску та швидкості в аорті	54
Висновок до розділу 2.....	54
РОЗДІЛ 3 ОБҐРУНТУВАННЯ ВИБОРУ ПРОГРАМНОГО СЕРЕДОВИЩА ТА ЗАСОБІВ РЕАЛІЗАЦІЇ	58
3.1 Спеціалізоване програмне забезпечення для моделювання гемодинаміки.....	58
3.1.1 SimFlow	59
3.1.2 VasSol NOVA.....	60
3.1.3 REO – Mathematical Modelling and Numerical Simulation of.....	61
3.1.3 COMSOL Multiphysics.....	63
3.1.4 ANSYS Fluent.....	64
3.1.5 OpenFOAM.....	66
3.1.6 SimVascular	68
3.1.7 FEniCS Project.....	69
3.2 Порівняльний аналіз програмного забезпечення	71
3.3 Огляд альтернатив програмного середовища	72
3.4. Порівняння мов програмування	75
3.5 Вибір програмних бібліотек мови програмування Python	75
Висновок з розділу 3	76
РОЗДІЛ 4 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА МЕТОДИКА РОБОТИ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ	79

4.1 Алгоритм моделювання енергетичних параметрів кровотоку	79
4.1.1 Ініціалізація сітки та анатомічних параметрів.....	79
4.1.2 Архітектура застосунку.....	79
4.2 Робота програмного забезпечення.....	83
4.3 Переваги розробленої моделі.....	102
Висновок до розділу 4.....	105
РОЗДІЛ 5 УЗАГАЛЬНЕНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАУКОВО-ДОСЛІДНОЇ	
РОБОТИ.....	108
5.1 Узагальнення результатів моделювання	108
5.2 Порівняння з експериментальними даними.....	110
5.3 Перспективи розвитку моделі.....	111
5.4 Обговорення	113
Висновок до розділу 5.....	117
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	119
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	122

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

a - коефіцієнт тертя поступального руху

a₁ - коефіцієнт тертя обертального руху

CFD - обчислювальна гідродинаміка (Computational Fluid Dynamics)

CSV - Comma-Separated Values, текстовий формат зберігання табличних даних, у якому значення розділяються комами або іншими роздільниками.

FSI - Fluid-Structure Interaction – моделі взаємодії рідина-структура.

k - коефіцієнт пружності стінки артеріальної судини

Matplotlib - бібліотека Python для візуалізації даних

NO-ефект - ефект окису азоту (Nitric Oxide), що змушує судини звужуватись та розширюватись, тобто бути активними судинами.

NumPy - бібліотека Python для чисельних обчислень з масивами

P - тиск крові в артеріальній судині

Pandas - бібліотека Python для аналізу та обробки табличних даних

PNG - Portable Network Graphics, растровий формат зображень без втрати якості, що підтримує прозорість.

Python інтег. - Python інтеграція.

R - радіус артеріальної судини

SciPy - бібліотека Python для наукових та інженерних обчислень

UFL - Unified Form Language

v - лінійна швидкість поступального руху крові

x - зміщення стінки еластичної артеріальної судини

α - коефіцієнт пропорційності між кінетичною енергією обертального та поступального руху

β - коефіцієнт пропорційності між недіагональними та діагональними компонентами тензора напружень

ρ - густина крові

ω - кутова швидкість обертального руху крові

БД - База даних, це структурована колекція даних, яка зберігається та управляється комп'ютерною системою.

Безк. - безкоштовно.

БМК - біомедична кібернетика

Відкр. - відкрита.

Власна розр. - власна розробка.

Досл. - дослідницька.

Еласт. судин - еластичність судин.

Енергет. аналіз - енергетичний аналіз.

КПІ - Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського

КТ - Комп'ютерна томографія, метод медичної діагностики, який використовує рентгенівське випромінювання для отримання пошарових зображень внутрішніх структур тіла.

МД - магістерська дисертація

МРТ - Магнітно-резонансна томографія, метод візуалізації внутрішніх органів і тканин людини за допомогою магнітного поля та радіохвиль.

Оберт. рух крові - обертальний рух крові.

ПЗ - Програмний застосунок

Рівн. Берн. – рівняння Бернуллі.

ФБМІ - факультет біомедичної інженерії

Частк. - частково.

ВСТУП

Актуальність теми магістерської дисертації полягає у вирішенні актуальної науково-дослідної задачі – математичного моделювання перетворень енергії під час кровоплину через активні артеріальні судини системи кровообігу людини.

Система кровообігу людини є однією з найбільш модельованих біологічних систем протягом останніх ста років [1-11]. Утім переважна більшість існуючих моделей гемодинаміки відображує лише поступальний рух крові, не враховуючи обертальну компоненту кровотоку. Анатомічна будова та особливості скорочення серця спричиняють обертальний рух крові в артеріальній системі [12-15], збереження якого забезпечується тривимірною, спіралеподібною анатомічною будовою магістральних судин. Обертальний рух крові чітко візуалізується за допомогою доплерівського ультразвукового обстеження у всіх ділянках аорти, легеневої та сонної артерій [20-24]. Немає єдиного цілісного розгляду різних властивостей кровотоку та властивостей артеріальної системи людини, які пов'язані між собою через енергетичні взаємоперетворення. Для поглибленого дослідження цих питань, у магістерській дисертації розроблено комплексний підхід, згідно якого з трьох базових залежностей протягом серцевого циклу можливо розрахувати інші гідродинамічні та енергетичні характеристики кровоплину. Зміна тиску, зміна потоку та зміна швидкості переміщення крові, які отримуються шляхом моделювання, тобто симуляції, або з натурного, або обчислювального експерименту. Досліджується вплив активної поведінки артеріальної судини, зумовлені також обертальним рухом крові, на енергетичні перетворення протягом циклу серцевого скорочення, та пов'язані з ними біомедичні та біофізичні особливості кровотоку. Як базову модель використано поєднання принципів рівняння Бернуллі, рівняння Пуазейля та електрогідродинамічних аналогів процесу гемодинаміки.

Отримані результати пропонуємо взяти за основу для побудови

регуляторних характеристик артеріальної системи людини та розробки медико-інженерних рішень щодо засобів їх технічного відтворення, а також для планування клінічних чи фізіологічних експериментальних досліджень.

Через спіралеподібну будову магістральних артерій довжини судин збільшуються. Це мало б свідчити про збільшення енерговитрат на переміщення крові, однак експериментально такого зростання не спостерігається. Це вказує на наявність механізмів, що компенсують зниження енерговитрат [32-35], зокрема механізму периферичного серця та можливості утворення кільцевого вихора в артеріальній системі [25-31].

Питання про те, якими саме клінічними дослідженнями можна візуалізувати та провести пряму валідацію гіпотези утворення кільцевого вихора крові в артеріальній системі, наразі залишається відкритим. Тому основним підходом для вирішення цього питання є вичерпне математичне моделювання.

Для вирішення науково-дослідних задач за темою МД було вдосконалено математичну модель кровотоку на основі рівняння Бернуллі з урахуванням біофізичних факторів.

Мета і завдання роботи

Метою роботи є поглиблення теоретичних уявлень в проєктуванні медико-інженерних рішень пружно-активних артеріальних судин у процесах кровоплину з обертанням шляхом моделювання перетворень енергії кровотоку.

Досягнення мети передбачає вирішення наступних ***завдань***:

1. Проаналізувати стан наявних джерел з досліджень NO-продукційної функції ендотелію артеріальних судин та доплерографічних даних щодо кровотоку з обертанням
2. Удосконалити гідродинамічне рівняння кровотоку для моделювання перетворень енергії пружно-активних артеріальних судин для кровотоку з обертанням
3. На підставі модельних розрахунків віднайти набір характеристик функції ендотелію артеріальних судин в умовах обертального руху

крові в артеріальній системі людини.

4. Порівняти отримані характеристики з відомими в умовах нормальних та патологічних змін кровообігу.
5. Розробити програмний застосунок для теоретичних досліджень обертального кровотоку у нормі та при патології.
6. Запропонувати медико-інженерні рішення для засобів технічного відтворення кровообігу.

Використані методи. Моделювання біомедичних характеристик кровоплину (тиску, швидкості, потоку), а також за допомогою формул фізичних явищ та математичних операцій обчислення похідних характеристик кінетичної та потенційної енергії активних судин.

Отримані результати. Удосконалено гідродинамічне рівняння для опису кровотоку через пружно-активні артеріальні судини з урахуванням обертального руху крові та NO-ефекту (окису азоту) й на його основі створено програмний застосунок для розрахунку енергетичних параметрів кровоплину в нормі та при патологіях.

Апробація результатів роботи. За результатами виконаної роботи було опубліковано 2 матеріали на наукових конференціях:

1. Настенко Є.А., Рудніков Є.Г., Цимбалюк О.А. Сучасні погляди моделювання кровообігу людини. *Конференція «Психофізіологічні та вісцеральні функції в нормі і патології»*. м. Київ, Україна, 21-24.10.2025. С. 118. URL:
https://biomed.knu.ua/images/stories/Conference_PVFNP/Conf_IX_PVFNP.pdf (дата звернення 16.03.2026)
2. Цимбалюк О.А., Живага Д., Настенко Є.А., Рудніков Є.Г., Моделювання кровотоку через артеріальні судини в нормі та під впливом радіаційного опромінення. *Всеукраїнська наукова конференція «Чорнобильська катастрофа: медичні, екологічні та соціальні наслідки через 40 років»*. м. Київ, Україна, 30.04.2026. С. 165-166 URL:

<https://chornobyl.kpi.ua/Conference-materials.pdf>

(дата звернення

02.05.2026).

Публікації. За результатами виконаної роботи були опубліковано 1 статтю в фаховому журналі України категорії Б:

Рудніков Є.Г., Цимбалюк О.А., Подиман А.О., Лисенко С., Настенко Є.А. Моделювання кровотоку з обертанням через пружно-активні судини артеріальної системи кровообігу людини. *Біомедична інженерія і технологія*. Київ, 2026. № 22/2026. С. 36–46. URL: <https://biomedtech.kpi.ua/> Довідка редакційної колегії про прийняття статті до друку від 01.05.2026.

Структура роботи

Магістерська дисертація за темою «*Моделювання перетворень енергії під час кровоплину через активні артеріальні судини*» виконана студентом Цимбалюком Олексієм Анатолійовичем зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» за освітньо-науковою програмою «Комп'ютерні науки», побудована за класичним типом та викладена на 127 сторінках машинописного тексту. Вона складається з: вступу; 5 розділів (огляд методів забезпечення математичних моделей кровотоку в артеріальних судинах; обґрунтування моделі енергетичних характеристик обертального кровоплину в артеріальній системі кровообігу людини; обґрунтування вибору програмного середовища та засобів реалізації; програмна реалізація та методика роботи програмного продукту; узагальнені результати науково-дослідної роботи), висновків до кожного з цих розділів; загальних висновків; списку використаних джерел, який налічує 47 джерел та додатків. У роботі представлено 36 рисунків і 4 таблиці.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД МЕТОДІВ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ КРОВОТОКУ В АРТЕРІАЛЬНИХ СУДИНАХ

У даному розділі розглянуто існуючі підходи до математичного моделювання гемодинаміки, що стали основою для розробленої удосконаленої моделі кровотоку через пружно-активні артеріальні судини.

1.1 Біофізичні характеристики серцево-судинної системи як об'єкту моделювання.

Серцево-судинна система (ССС) людини виконує функцію безперервного транспортування крові, що забезпечує доставку кисню та метаболітів до тканин і виведення продуктів обміну. З фізичної точки зору ССС є складною гідродинамічною системою з розподіленими параметрами, нелінійними елементами та активними джерелами енергії. Серце є головним насосом системи, а артеріальна мережа – розгалуженою системою трубопроводів із суттєво нелінійними, залежними від тиску параметрами.

Аорта – найбільша артерія організму – відходить безпосередньо від лівого шлуночка серця і за анатомічною будовою поділяється на три основні відділи: висхідна аорта (довжина близько 5,5 см), дуга аорти (близько 4,5 см) та низхідна аорта (близько 31 см, з яких грудний відділ становить приблизно 20 см, а черевний – 11 см). Діаметр аорти поступово зменшується від 3,0–3,5 см біля кореня до 1,5–2,0 см у черевному відділі. Стінка аорти складається з трьох шарів: внутрішній ендотелій, гладкі м'язи та еластичні волокна та сполучна тканина.

Особливістю аорти як об'єкта моделювання є її тривимірний просторовий вигин: дуга аорти описує дугу в сагітальній площині з розворотом у три виміри, що разом із трьохстулковим аортальним клапаном та синусами Вальсальви створює унікальні гідродинамічні умови. Саме ця геометрія зумовлює

формування вихрових структур у кровотоці, що є предметом активних досліджень останніх десятиліть [1, 2, 3].

З точки зору механіки рідин, кров є неньютонівською рідиною: її ефективна в'язкість залежить від швидкості зсуву та гематокриту. При великих швидкостях зсуву (у великих судинах) кров поводить себе приблизно як ньютонівська рідина з динамічною в'язкістю $\eta \approx 0,003\text{--}0,004 \text{ Па}\cdot\text{с}$ та густиною $\rho \approx 1050\text{--}1060 \text{ кг/м}^3$. При малих швидкостях зсуву (у капілярах та мікросудинах) реологічні ефекти стають суттєвими через агрегацію еритроцитів. У контексті моделювання кровотоку в аорті, де число Рейнольдса $Re = \rho v d / \eta \approx 1000\text{--}4000$, наближення ньютонівської рідини є загальноприйнятим і добре обґрунтованим [4].

Артеріальний тиск змінюється протягом серцевого циклу між систолічним (близько 120 мм рт.ст.) та діастолічним (близько 80 мм рт.ст.) значеннями. Пульсовий тиск (різниця систолічного та діастолічного) становить близько 40–60 мм рт.ст. Частота серцевих скорочень у спокої складає 60–80 уд/хв, тривалість серцевого циклу $T \approx 0,75\text{--}0,85 \text{ с}$. Систола займає близько 0,3–0,35 с, діастола – 0,45–0,5 с.

Швидкість кровотоку в аорті змінюється від пікового значення близько 1–1,5 м/с під час систоли до нуля або невеликих від'ємних значень (зворотний потік) під час діастоли. Об'ємний потік серця (серцевий викид) у спокої становить 4–6 л/хв. Швидкість пульсової хвилі у аорті – важливий клінічний показник жорсткості артеріальної стінки – у нормі становить 4–8 м/с і зростає з віком та при гіпертонії до 12–16 м/с [5].

Артеріальні судини за структурою та функціями поділяють на три типи: судини еластичного типу (аорта, легенева артерія та їх великі гілки), судини м'язового типу (переважна більшість периферичних артерій) та судини змішаного типу (артерії, що відходять від дуги аорти). Класифікація за типом відображає основну відмінність у механічних властивостях та функціях судин у системі кровообігу.

Судини еластичного типу виконують функцію «акумулятора пульсового

тиску»: під час систоли їхні стінки розтягуються, накопичуючи частину кінетичної енергії серцевого викиду у формі пружної деформації. Під час діастолі стінки скорочуються, повертаючи накопичену енергію потоку крові. Саме цей ефект «Франка-Старлінга» на рівні аорти – перетворює пульсуючий потік серця на більш рівномірний кровоплин у периферичних судинах і є фундаментальним для розуміння енергетики кровообігу [6].

Товщина стінки аорти становить 2–3 мм при діаметрі 3 см, тобто відношення товщини стінки до радіуса $h/R \approx 0,13-0,20$. Пружність стінки аорти суттєво залежить від рівня розтягнення: у фізіологічному діапазоні тисків він становить 0,1–2,0 МПа та зростає при збільшенні розтягнення. Нелінійна залежність між тиском та діаметром є важливим параметром при побудові реалістичних моделей кровотоку [7].

Будова стінки артерії визначається трьома шарами: внутрішній шар, що складається зі слою ендотеліальних клітин; середній шар, утворений гладкими м'язовими клітинами та колагеновими волокнами; зовнішній шар із колагенових волокон та фіброblastів. У судинах середнього шару еластичного типу міститься велика кількість концентрично розташованих еластичних мембран, які визначають пружні властивості стінки.

Ендотеліальні клітини внутрішнього шару стінки артерії є не просто механічним бар'єром між кров'ю та стінкою судини, але й активно виділяють численні речовини. Найважливішою серед них є оксид азоту (NO) – у відповідь на механічні стимули та хімічні сигнали. Виділення NO викликає розслаблення гладких м'язів середнього шару стінки артерій, що призводить до розширення судини і зниження периферичного опору [8].

1.2 Основні гемодинамічні параметри кровотоку в аорті

Гемодинаміка аорти характеризується складним просторово-часовим розподілом швидкості, тиску та інших параметрів. Визначальними

гемодинамічними параметрами є: тиск $P(t, r)$ [мм рт.ст.], об'ємний потік $Q(t, r)$ [мл/с], середня лінійна швидкість $v(t, r)$ [м/с], діаметр судини $d(t, r)$ [мм].

Просторово-часовий розподіл тиску в аорті характеризується значним підсиленням пікового систолічного тиску від серця до: якщо в висхідній аорті систолічний тиск становить 120 мм рт.ст., то в черевному відділі він може досягати 140–150 мм рт.ст. Це пояснюється відображенням пульсових хвиль від місць розгалужень та периферичного опору, а також нелінійними ефектами у жорстких периферичних судинах [9].

Швидкість кровотоку в аорті має двофазний характер: систолічна фаза з піковим значенням $v_{\max} \approx 1,0\text{--}1,5$ м/с у висхідній аорті та діастолічна фаза з нульовою або від'ємною швидкістю. Характерна форма доплерівського профілю швидкості в аорті добре відтворюється моделями, що враховують пружність стінок та інерцію кровотоку. Зі збільшенням відстані від серця пікова швидкість зменшується внаслідок затухання та зміни геометрії судини.

Об'ємний потік $Q(t) = v(t) \cdot S(t)$, де $S(t) = \pi \cdot d^2(t)/4$ – площа поперечного перерізу, що також змінюється в часі. Серцевий викид становить 60–100 мл/систолу, що при ЧСС 70 уд/хв дає хвилинний об'єм кровообігу 4,2–7 л/хв. Ці нормативні значення є важливими параметрами для верифікації математичних моделей.

1.2.1 Активна поведінка артеріальних судин

Поняття «активна поведінка артеріальних судин» охоплює сукупність механізмів, завдяки яким судинна стінка не є пасивним пружним елементом, а активно бере участь у регуляції кровотоку, підтримці оптимального рівня напружень та мінімізації енерговитрат серця. Головними механізмами активної поведінки є: скорочення гладких м'язів у відповідь на розтягнення, ендотелій-залежна регуляція тонуусу (насамперед NO-механізм), нейрогуморальна регуляція (симпатична та парасимпатична нервова система, адреналін, ангіотензин та ін.) та автогенна регуляція (закон Франка-Старлінга) [8, 23].

Особлива роль NO в системі кровообігу полягає у наступному. NO

синтезується ендотеліальними клітинами під впливом напруження зсуву від потоку крові. Разом із відновленням жорсткості стінки після систолічного розтягнення та механізмами зворотного зв'язку, що реалізують принцип Ле Шательє, NO-ефект утворює другу «хімічну помпу», що повертає механічну енергію потоку крові [21, 24].

Принцип Ле Шательє стосовно кровотоку в аорті: будь-яке відхилення системи від рівноважного стану (наприклад, збільшення серцевого викиду) спричиняє реакцію-протидію (розширення судини, зниження опору), що частково компенсує початкове відхилення. Цей принцип реалізується через кілька взаємопов'язаних механізмів: баро рефлекс (нейрогенна регуляція), NO-залежна ендокринна регуляція та механічна адаптація стінки [40].

Принцип Пригожина стосовно дисипативних структур у кровотоці: у відкритих нерівноважних системах дисипативні структури (наприклад, регулярні вихрові структури в аорті) мінімізують виробництво ентропії та підтримують себе за рахунок потоку енергії ззовні. У контексті кровотоку це означає, що спіральні вихрові структури, що виникають в аорті, є стійкими дисипативними структурами, підтримуваними енергетичними внесками від серця та судинних стінок [41].

1.2.2 Обертальний (вихровий) кровоплин в аорті: механізми утворення та значення

Вихровий (спіральний) характер кровотоку в аорті людини є добре встановленим клінічним фактом, підтвердженим методами ультразвукової доплерографії, фазо-контрастної МРТ та 4D-поточною МРТ. Основними анатомічними структурами, що формують вихровий кровоток, є: тристулковий аортальний клапан, синуси Вальсальви та тривимірний вигин дуги аорти [2, 21].

Механізм утворення вихрових структур: під час систоли аортальний клапан відкривається, кожна з трьох стулок відхиляється в свій синус Вальсальви і, відповідно, між стулкою і стінкою синусу утворюється область рідини, що обертається. Три такі «міні-вихри», зміщені по фазі на 120° відносно один

одного, зливаються в узагальнений вихор тороїдальної або трьохспіральної форми. Цей вихор просувається по аорті, причому спіральний вигин аорти спричиняє його обертання навколо осі судини. Геометрія синусів Вальсальви оптимальна для генерації вихорів з мінімальними втратами тиску [27, 28].

Фізичні причини ефективності вихрового кровотоку полягають у тому, що тертя кочення вихрового потоку є значно меншим за тертя ковзання ламінарного. При ламінарному потоці головні втрати зумовлені в'язким тертям між шарами рідини з різними швидкостями ($\partial v / \partial r \neq 0$). При вихровому (тороїдальному) потоці картина дещо інша: зовнішній периметр тора котиться по стінці судини практично без ковзання, що різко знижує дисипацію. Ця аналогія із кочення кулі (мале тертя) проти ковзання по поверхні (велике тертя) дозволяє якісно оцінити вигоду в ефективності [42].

Закон збереження моменту імпульсу та гіроскопічний ефект відіграють важливу роль у стабілізації вихрових структур. Вихор крові в аорті є аналогом гіроскопа: завдяки значному моменту імпульсу він чинить опір зовнішнім силам, що намагаються відхилити вісь обертання. Вигин аорти спричиняє прецесію вихрового кільця, яка за принципом Ле Шательє компенсується відновлювальними силами. Таким чином, тривимірна геометрія аорти є не анатомічним «випадком», а оптимально відібраним еволюцією пристроєм для стабілізації вихрового кровотоку.

1.3 Математичні підходи до моделювання кровотоку в артеріальних судинах

Моделювання системи кровообігу людини здійснюється вже більше ста років. Класичні підходи базуються на рівняннях Нав'є-Стокса для в'язкої нестисливої рідини, рівнянні неперервності та рівнянні Бернуллі. Традиційне рівняння Бернуллі передбачає збереження повної механічної енергії системи та враховує лише зміну потенціальної та кінетичної енергії поступального руху.

Існуючі моделі руху крові в артеріальній системі переважно відображують лише поступальний рух крові. Серед найбільш поширених підходів можна виділити нульвимірні (0D) або типу Windkessel моделі, одновимірні (1D) моделі розподілених параметрів, тривимірні (3D) CFD-моделі та гібридні багатомасштабні моделі, що поєднують різні рівні деталізації [11].

1.3.1 Нульвимірні (windkessel) моделі

Моделі типу Windkessel або нульвимірні моделі [38] використовують електричну аналогію для опису гемодинаміки, представляючи судинну систему як електричне коло з опором, ємністю та індуктивністю. Ця аналогія є близькою до підходу, застосованого у даній роботі, де проведено паралель між перенесенням крові через систему кровообігу та електричним струмом у колі з електрорушійною силою та реактивними елементами.

1.3.2 Одновимірні моделі кровотоку

Одновимірні моделі [2-4] базуються на спрощенні рівнянь Нав'є-Стокса шляхом усереднення за поперечним перерізом судини. Такі моделі описують кровоплин за допомогою системи диференціальних рівнянь у частинних похідних (рівняння нерозривності та рівняння руху) для середньої по перерізу швидкості та тиску як функцій координати вздовж судини та часу. Ці моделі дозволяють відтворювати поширення пульсових хвиль, відображення хвиль та їх взаємодію в складних артеріальних мережах, проте не враховують обертальну компоненту кровотоку та не дозволяють адекватно описати формування вихрових структур.

1.3.3 Тривимірні CFD-моделі

Тривимірні (методи скінченних елементів або скінченних різниць) моделі [5, 39] обчислювальної гідродинаміки забезпечують детальний опис просторової структури потоку крові, включаючи формування вторинних течій та вихорів, ефекти нелінійності та складну геометрію розгалужень. Підхід FSI (Fluid-

Structure Interaction) додатково враховує взаємодію між деформованою судинною стінкою та потоком рідини. Вони надають найбільш детальну картину розподілу швидкості, тиску та напружень у геометрично складних ділянках судин. Однак вони є обчислювально затратними і зазвичай застосовуються для окремих ділянок судинного русла без цілісного врахування активності судин та енергетичних перетворень.

1.3.4 Гібридні багатомасштабні моделі

Гібридні або багатомасштабні підходи поєднують різні рівні деталізації: детальну 3D-модель для ділянки інтересу (наприклад, дуги аорти) та 1D- або 0D-модель для периферичних судин, що виступають граничними умовами. Це дозволяє досягти оптимального балансу між точністю та обчислювальною ефективністю. Роботи Blanco et al. (2020) та Müller et al. (2023) ілюструють теперішній рівень розвитку таких підходів для великих артеріальних мереж [7, 10].

1.4 Моделі з урахуванням обертального руху

Обертальний рух крові [20-24] у всіх ділянках аорти, легеневої та сонної артерій чітко візуалізується за допомогою доплерівського ультразвукового обстеження. Водночас моделювання цього явища залишається недостатньо розвиненим. Окремі дослідження вказують на можливість утворення кільцевого вихора в артеріальній системі, зумовленого скороченнями серця, що може призводити до заміни механізму тертя ковзання на механізм тертя кочення [25-31].

Перспективною є гіпотеза про те, що обертальний рух крові забезпечує значне зменшення енерговитрат [32-35] під час переміщення крові в магістральних артеріях. На користь цієї гіпотези свідчать порційний викид крові серцем у періоді вигнання та практично повна зупинка кровотоку наприкінці

діастоли.

1.4.1 Рівняння Пуазейля для стаціонарного ламінарного потоку

Рівняння Пуазейля для стаціонарного ламінарного потоку в'язкої рідини у жорсткій трубці встановлює лінійний зв'язок між об'ємним потоком Q та перепадом тиску ΔP : $Q = \pi R^4 \Delta P / (8\eta l)$, де R – радіус трубки, η – динамічна в'язкість, l – довжина. Введений звідси «гідродинамічний опір» $R_{hyd} = \Delta P / Q = 8\eta l / (\pi R^4)$ є основним параметром 0D-моделей. Разом з тим рівняння Пуазейля також не враховує пружність стінок, нестационарність та обертальний рух [4].

1.4.2 Рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої в'язкої рідини

Рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої в'язкої рідини: $\rho(\partial v / \partial t + (v \cdot \nabla)v) = -\nabla P + \eta \cdot \Delta v + f$ де ρ – густина рідини [кг/м^3], v – швидкість [м/с], t – час [с], P – тиск [Па], η – динамічна в'язкість, разом із рівнянням нерозривності $\nabla \cdot v = 0$, є найбільш повним описом динаміки кровотоку. Водночас їх аналітичне розв'язання можливе лише для спрощених геометрій, а чисельне – вимагає значних обчислювальних ресурсів. У контексті цієї роботи рівняння Нав'є-Стокса служить теоретичним підґрунтям, тоді як практичні розрахунки базуються на модифікованому рівнянні Бернуллі та 0D-аналогії [18].

1.4.3 Рівняння Бернуллі та його модифікації для біологічних систем

Класичне рівняння Бернуллі для ідеальної нестисливої рідини в стаціонарному потоці встановлює сталість суми кінетичної енергії, потенційної енергії та тискового внеску вздовж лінії течії:

$$P + \rho v^2 / 2 + \rho gh = \text{const}, \quad 1.1$$

де P – тиск [Па], ρ – густина рідини [кг/м^3], v – швидкість [м/с], g – прискорення вільного падіння, h – висота [м].

Базова форма рівняння Бернуллі, попри своє фундаментальне значення, не дозволяє адекватно описати кровоток через артеріальні судини. Воно не

враховує в'язкість рідини й дисипацію енергії від тертя; не описує пульсуючого характеру кровотоку; не охоплює пружної деформації стінок судин і активних механізмів поновлення енергії – скорочення гладких м'язів та NO-ефекту. Зрештою, обертальний компонент кровотоку теж залишається поза увагою цього рівняння. [17].

Модифіковане базове гідродинамічне рівняння, запропоноване в роботах наукового колективу кафедри біомедичної кібернетики НТУУ КПІ (Настенко, Рудніков, Цимбалюк, Подиман та ін.), враховує всі суттєві фізичні ефекти кровотоку через активні артеріальні судини: в'язкий опір, пружність стінок, інерцію маси крові, гравітаційний потенціал, активність судинної стінки та обертальний рух. Детальний вивід та обговорення цього рівняння наведені в розділі 2.

1.4.4 Порівняння фізико-математичних моделей кровоплину

Для систематичного порівняння моделей складено таблицю 1.1.

Таблиця 1.1 – Порівняння фізико-математичних моделей кровоплину

Модель	Переваги	Недоліки	Особливості	Область застосування
Класичне рівняння Бернуллі	Простота аналітичного розв'язання; фундаментальний фізичний зміст; швидкий розрахунок; не потребує чисельних методів; добре підходить для оцінкових інженерних розрахунків	Не враховує в'язкість та дисипацію енергії; не описує нестационарний пульсуючий потік; ігнорує пружність судинних стінок; не враховує активні механізми судин (NO-ефект); не включає обертальний рух крові; справедливе лише для ідеальної нестисливої рідини у стаціонарному потоці	Виведене Данієлом Бернуллі (1738); базується на законі збереження енергії для ідеальної рідини вздовж лінії течії; передбачає сталість повної механічної енергії	Грубі оцінки градієнтів тиску в стенозах (доплерівська ехокардіографія); навчальні задачі; перші наближення
Рівняння Пуазейля	Лінійний зв'язок між тиском і потоком; простота аналізу периферичного опору; основа для	Справедливе лише для стаціонарного ламінарного потоку; не враховує пружність стінок; не описує нестационарність; не враховує	Виведене Жаном-Луї-Марі Пуазейлем (1840-1846); кватична залежність опору від радіуса; основа	Розрахунок периферичного опору; оцінка кровотоку у малих артеріях та артеріолах; навчальні моделі

Продовж. табл. 1.1

Модель	Переваги	Недоліки	Особливості	Область застосування
	електро-гідродинамічної аналогії; широке застосування у клінічних розрахунках ЗПСО	обертальний рух; не застосовне для турбулентних режимів; ігнорує неньютонівську реологію крові	моделей Windkessel	
0D (Windkessel) 4-елементний (RLCR)	Враховує інертність крові $L = \rho l/S$; кращі частотні характеристики; адекватніше відтворює форму пульсової хвилі	Складніше калібрування 4-х параметрів; не описує просторове поширення хвиль; не враховує активність судин та обертальний рух	Запропонована Stergiopoulos et al. (1999); найкраща з 0D-моделей для відтворення спектру імпедансу аорти	Дослідження центральної гемодинаміки; граничні умови; педагогічні задачі
1D-модель	Адекватно відтворює поширення пульсових хвиль; описує відбиття хвиль на біфуркаціях; помірні обчислювальні витрати; може охоплювати все артеріальне дерево; підтримує множинні розгалуження	Не описує радіальний профіль швидкості; ігнорує вторинні течії; не враховує активність судин на рівні рівняння Бернуллі; усереднення за перерізом приховує локальні ефекти	Базується на гіперболічних PDE; розв'язується методом характеристик або МКЕ; дискретизація 1D-сітки уздовж судини	Глобальне моделювання артеріального дерева; пульсові хвилі; розрахунок PWV; багатомасштабні моделі
3D CFD (Нав'є-Стокса)	Найдетальніший просторовий опис; візуалізація вторинних/обертальних структур (Q-критерій, λ_2); розрахунок WSS, OSI; адекватний опис складних геометрій (аневризми, стенози)	Висока обчислювальна вартість (години-доби); потребує НРС; не враховує деформацію стінок; складна побудова сітки; чутливість до граничних умов	Метод скінченних об'ємів (FVM) у Fluent/OpenFOAM або скінченних елементів (FEM) у COMSOL/SimVascular; типова сітка 2-10 млн вузлів	Локальне моделювання патологій (аневризми, стенози); проектування стентів; науково-дослідні задачі
3D FSI (Fluid-Structure Interaction)	Враховує деформацію судинних стінок; відтворює реалістичні пульсові хвилі; точний розрахунок WSS на деформованій стінці; найбільш повний опис механіки кровотоку	Найвища обчислювальна вартість (добы-тижні); складність числового спряження; нестійкість при різких параметрах; не описує активність судин (NO); не аналізує обертальну компоненту аналітично	Спряжені методи (monolithic / partitioned); підходи Coupled Momentum Method (CMM-FSI у SimVascular); ALE-формулювання	Дослідження аневризми; проектування протезів; науково-дослідні задачі високого рівня

Кінець табл. 1.1

Модель	Переваги	Недоліки	Особливості	Область застосування
Гібридні багатомасштабні (3D-1D-0D)	Оптимальний баланс точності та ефективності; реалістичні граничні умови; масштабованість на повну ССС; персоналізація	Складність узгодження масштабів; потреба в експертних знаннях; чутливість до інтерфейсних умов; складна валідація	Сучасний підхід (Blanco 2020, Müller 2023); ієрархічна декомпозиція ССС; перспективний для цифрових двійників пацієнтів	Великі артеріальні мережі; персоналізовані моделі; клінічно-релевантні задачі

Висновок з розділу 1

Ми розглянули наявні підходи до математичного моделювання гемодинаміки артеріальної системи людини. Цей огляд літератури, не є вичерпним, а був цілеспрямований на пошук відповіді на питання – чи існує вже готовий апарат, придатний для опису енергетичних перетворень при обертальному кровоплині через активні артеріальні судини і прямої відповіді на це питання у наявних джерелах немає.

Розглянуті підходи зручно згрупувати за чотирма класами, кожен з яких має свою сферу застосовності та свої принципові обмеження. Нульвимірні (Windkessel) моделі описують артеріальну систему як зосереджену систему з опором, ємністю та індуктивністю. Вони добре відтворюють інтегральну поведінку кровообігу – пульсовий тиск, серцевий викид, периферичний опір – і саме тому досі використовуються у клінічних розрахунках та як граничні умови для більш детальних моделей. Утім такі моделі за побудовою не дають просторового розподілу величин уздовж судини й не описують поширення пульсової хвилі.

Одновимірні моделі усереднюють рівняння Нав'є-Стокса за поперечним перерізом судини й описують кровотік через систему диференціальних рівнянь у частинних похідних. Вони добре відтворюють поширення й відбиття

пульсових хвиль у розгалуженому артеріальному дереві, що підтверджено роботою [4]. Однак саме процедура усереднення за перерізом виключає з розгляду обертальну компоненту кровотоку – вона «зникає» у момент, коли від дво- чи тривимірного поля швидкості переходять до однієї середньої величини. Тривимірні CFD-моделі, навпаки, відтворюють обертання й інші вихрові структури природним чином – як побічний результат розв'язання повних рівнянь Нав'є-Стокса. Натомість обчислювальна вартість таких моделей залишається значною (від кількох годин до кількох діб на одну симуляцію), а інструментів для енергетичного розкладу потоку на осьову й обертальну компоненти у стандартних CFD-пакетах фактично немає. Гібридні багатомасштабні підходи [7, 10] намагаються поєднати переваги обох рівнів деталізації, але самі по собі не вирішують проблеми відсутності окремого формалізму для обертального руху.

Окремо розглянуто базові гідродинамічні рівняння – Пуазейля, Нав'є-Стокса, Бернуллі – як вихідну математичну основу. Класичне рівняння Пуазейля встановлює лінійний зв'язок між об'ємним потоком і перепадом тиску, але справедливе лише для стаціонарного ламінарного потоку у жорсткій трубці; пружність стінок, нестационарність та обертальний рух воно не охоплює. Рівняння Нав'є-Стокса є найповнішим описом, проте саме його повнота і робить аналітичні розв'язки практично недосяжними поза найпростішими геометріями. Базова форма рівняння Бернуллі стала найзручнішою відправною точкою – попри те, що у вихідному вигляді вона теж не охоплює ані в'язкої дисипації, ані пружної деформації стінок, ані активних механізмів регуляції, ані обертального руху крові. Саме тому у розділі 2 рівняння Бернуллі послідовно доповнено доданками, що відповідають за кожен із цих ефектів.

Зафіксуймо ще один важливий результат огляду – стосовно обертальної компоненти кровотоку. Її присутність у магістральних артеріях людини є експериментально встановленим фактом: спіральні структури реєструються методами доплерівської ультразвукографії у всіх ділянках аорти, легеневої та сонних артерій [25-27]. Фізичний механізм формування цих структур пов'язаний з тривимірною геометрією дуги аорти, тристулковим аортальним клапаном і

синусами Вальсальви. На рівні енергетики обертальний рух здатен суттєво зменшувати дисипацію. Утім аналітичний опис цього ефекту в наявних моделях практично відсутній: одновимірні моделі обертання усереднюють, тривимірні відтворюють як побічний продукт без енергетичного розкладу, а Windkessel-моделі не містять його взагалі.

Отже, можна сформулювати такий головний результат розділу: жоден із розглянутих підходів не забезпечує одночасного врахування обертального руху крові, пружності та активності артеріальних судин і перетворень енергії під час кровоплину. Окремі складові присутні у різних типах моделей – пружність стінки добре описується Windkessel-моделями та одновимірними моделями, обертання видно у CFD-розрахунках, але цілісного інструмента, який поєднував би всі ці аспекти на енергетичному рівні, у літературі не виявлено. Це обґрунтовує доцільність удосконалення базового гідродинамічного рівняння з введенням до нього в'язких, пружних, інерційних, активних та обертальних доданків.

РОЗДІЛ 2

ОБҐРУНТУВАННЯ МОДЕЛІ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЕРТАЛЬНОГО КРОВОПЛИНУ В АРТЕРІАЛЬНІЙ СИСТЕМІ КРОВООБІГУ ЛЮДИНИ

У даному розділі розглянуто математичний апарат, фізичні принципи та обчислювальні засоби, використані для реалізації удосконаленої моделі кровоплину в артеріальній системі кровообігу людини.

2.1 Загальна структура теоретичних досліджень із застосуванням моделювання та обчислювальних експериментів

Теоретичні дослідження із застосуванням математичного моделювання та обчислювальних експериментів формують окремий усталений напрям наукового пізнання, у якому фізичний експеримент частково або повністю замінюється комп'ютерним. Таке дослідження базується на побудові математичної моделі реального процесу, її чисельній реалізації та подальшому аналізі результатів моделювання. Особливістю є те, що модель виступає не лише інструментом, а і самостійним результатом дослідження, який відображає суттєві фізичні закономірності системи [29].

Окрема важлива річ при моделюванні – процедура верифікації, тобто перевірки, що числа, які видає програма, справді відповідають закладеній математичній моделі. У ширшому сенсі можна говорити про валідацію – наскільки сама модель адекватна реальності згідно до загальноприйнятої методології Verification and Validation. Це є принциповою відмінністю обчислювального експерименту від класичних теоретичних підходів і обов'язковим елементом наукових робіт сьогодення.

Загальна структура теоретичного дослідження з використанням моделювання включає кілька послідовних етапів: постановку задачі, формування

математичної моделі, вибір та реалізацію чисельного методу, проведення серії обчислювальних експериментів і аналіз отриманих результатів. Такий підхід є універсальним і широко застосовується, зокрема, у задачах гемодинаміки.

Розглянемо структуру дослідження на рис 2.1.

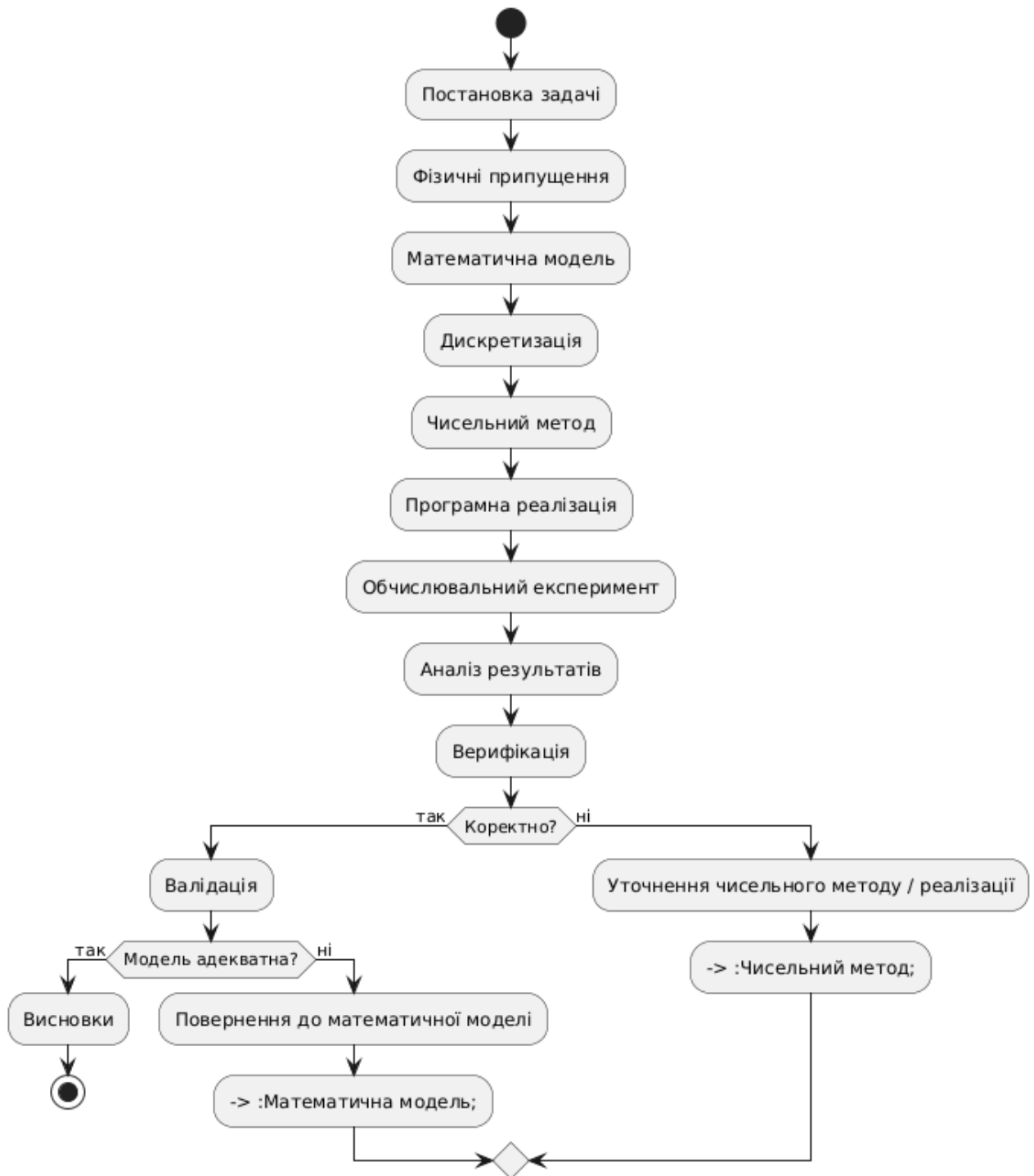


Рисунок 2.1 - UML Activity Diagram дослідження обчислювальної гідродинаміки

2.2 Математичний апарат моделі

Основою математичної моделі є класичне рівняння Бернуллі [36,37], яке є відображенням закону збереження енергії. У класичному вигляді рівняння Бернуллі включає три складові: внесок потенціальної енергії судини в полі гравітації, внесок кінетичної енергії поступального кровотоку та тиск.

Як було описано в розділі 1 класичне рівняння Бернуллі погано відображає обертальний рух крові через активні артеріальні судини тому розрахунки енергетичних перетворень будуть неповними.

Удосконалення рівняння Бернуллі здійснювалось за наступними кроками: 1) поступальний рух крові по судинах; 2) активні судини; 3) судини із обертанням крові; 4) активні судини із обертанням крові.

Для опису часових залежностей зміщення стінки судини у фазах розтягнення та стиснення використано S-подібні (сигмоїдальні) функції. Фаза розширення судини внаслідок вкиду крові від серця триває першу половину систоли (0,2 с), фаза стиснення – другу половину систоли (від 0,2 до 0,4 с від початку систоли).

Модифіковане рівняння Бернуллі ламінарного кровотоку [43] для фази розширення судини включає класичні члени (тиск, кінетична та потенціальна енергія) та додаткові: потенціальну енергію пружної стінки судини та дисипацію енергії внаслідок ламінарного руху. При цьому зроблено припущення, що сила опору пропорційна швидкості, а енергія дисипації пропорційна масі крові, квадрату швидкості та часу з коефіцієнтом тертя.

Модифіковане рівняння Бернуллі 2.1 ламінарного кровотоку для фази розширення судини нами записане як

$$\Delta P_1 = \frac{\rho \cdot u^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2 \cdot \pi \cdot (R_0 + x)^2} + a \cdot \rho \cdot u^2 \cdot t \quad 2.1$$

Другий доданок у рівнянні 2.1 визначається на одиницю довжини

потенційною енергією пружної стінки $kx^2/2$. У рівнянні Бернуллі на одиницю довжини. Третій доданок у рівнянні 2.1 визначає врахування дисипації енергії внаслідок ламінарного руху кровотоку. При цьому зроблено припущення, що сила опору пропорційна швидкості u . Енергія, що дисипує, пропорційна силі та переміщенню. Переміщення пропорційне швидкості u та часу t . Більша маса m крові приводить до пропорційній масі витраті енергії на тертя [43].

2.3 Моделювання поступального руху крові

Модифіковане рівняння Бернуллі для поступального кровотоку має такий вигляд 2.2:

$$\Delta P_1 = b \cdot \left(\frac{2 \cdot c}{1 + \exp(-(q \cdot t)^n)} - 1 \right) \quad 2.2$$

Зміна ΔP_1 відбувається за рахунок роботи серця [43], що постачає крові кінетичну енергію та імпульс. Зміна тиску ΔP_1 є причиною розтягнення судини, що зміщується при розтягненні на відстань x (2.3):

$$x = \frac{2 \cdot c}{1 + \exp(-(q \cdot t)^n)} - 1 \quad 2.3$$

2.4 Моделювання обертального руху крові

Модифіковане рівняння Бернуллі кровотоку з обертанням [43] додатково враховує кінетичну енергію обертального руху крові. Для циліндричної суцільної ділянки рідини момент інерції визначається відомою формулою, а лінійна швидкість обертального руху визначається радіусом плеча та кутовою

швидкістю. Введено коефіцієнт пропорційності α між кінетичною енергією обертального та поступального руху, що є наслідком геометрії системи 2.4:

$$\Delta P_1 + \Delta P_2 = \frac{\rho \cdot u^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2 \cdot \pi \cdot (R_0 + x)^2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2 \cdot V} + \alpha \cdot \rho \cdot u^2 \cdot t + \alpha_1 \cdot \rho \cdot Q \cdot u^2 \cdot t \quad 2.4$$

Також враховано дисипацію енергії внаслідок обертального руху кровотоку [43] з коефіцієнтом тертя α_1 , який припускається значно меншим за коефіцієнт тертя поступального руху α . Обґрунтуванням цього є наявність вихорового руху під час артеріального кровотоку, де тертя кочення вихорового руху значно менше за тертя ковзання поступального руху.

2.5. Моделювання фаз розширення та стиснення судини

Для опису часових залежностей зміщення стінки судини під час розтягування та стискання використано S-подібні (сигмоїдальні) функції. Фаза розширення судини внаслідок вкиду крові від серця триває першу половину систоли (0–0,2 с). Зміна надлишкового тиску відбувається за рахунок роботи серця, що постачає крові кінетичну енергію та імпульс.

У фазі стиснення (0,2 - 0,4 с від початку систоли) енергія не постачається, а лише дисипує. Відбувається перерозподіл енергії: потенціальна енергія розтягнутої судини переходить у кінетичну енергію поступального руху крові для ламінарного кровотоку та поступально-обертального руху для кровотоку з обертанням [43]. Див формулу 2.5:

$$\Delta P_1 + \Delta P_2 = \frac{\rho \cdot u^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2 \cdot \pi \cdot (R_0 + x)^2} +$$

$$+ \frac{Q \cdot \rho \cdot u^2}{4} + a \cdot \rho \cdot u^2 \cdot t + a_1 \cdot \rho \cdot Q \cdot u^2 \cdot t$$
2.5

Графіки для відхилення стінок судини x для фаз [43] розтягнення та стиснення є приблизно симетричними, оскільки потенціальна енергія, запасена під час розтягнення, повністю віддається під час стиснення.

2.6. Результати моделювання тиску

З урахуванням внутрішнього тертя отримано часові залежності артеріального тиску під час систоли. Зміна тиску визначається вихідним внеском тензора напруження за рахунок імпульсу від серця та внеском від дисипації під час кровотоку за рахунок внутрішнього тертя. Отримана залежність якісно узгоджується з типовою експериментальною залежністю зміни тиску в артеріальній судині від часу.

Складові коефіцієнти, що застосовані під час моделювання:

P_1 - поступальний рух крові

P_2 - обертальний рух крові

A_1, A_2 - активні судини (хімічна реакція стінок)

D_1, D_2 - дисипація (в'язкість, тертя)

K_1, K_2 - кінетична енергія кровоплину

U_1, U_2 - потенційна енергія пружної стінки судини

$L_1 = K_1 - U_1$ та $L_2 = K_2 - U_2$ це Лагранжіан поступального та обертального компонент кровотоку

$H_1 = K_1 + U_1$ та $H_2 = K_2 + U_2$ це Гамільтоніан поступального та обертального компонент кровотоку

ΔP_{01} - активне джерело (серце) при русі крові в активних судинах.

ΔP_{02} - активне джерело (серце) при обертальному русі крові.

Для пружної судини з обертанням кровотоку маємо формулу 2.6:

$$\begin{aligned} P_1 &= P = \Delta P_{01} - D_1 - U_1 - K_1 \\ P_2 &= \Delta P_{02} - D_2 - U_2 - K_2 \end{aligned} \quad 2.6$$

Для пружної судини з обертанням кровотоку. Див. рівняння 2.7:

$$\begin{aligned} P_1 &= P = \Delta P_{01} - D_1 \pm U_{Grav} - U_1 - K_1 \\ P_2 &= \Delta P_{02} - D_2 - U_2 - K_2 \end{aligned} \quad 2.7$$

Для пружно-активної судини в полі гравітації з обертанням кровотоку у рівнянні 2.8:

$$\begin{aligned} P_1 &= P = \Delta P_{01} + A_1 - D_1 \pm U_{Grav} - U_1 - K_1 \\ P_2 &= \Delta P_{02} + A_2 - D_2 - U_2 - K_2 \end{aligned} \quad 2.8$$

2.7 Вплив еластичності та обертання на швидкість кровотоку

Результати моделювання показують, що еластичність стінок артеріальних судин та обертання кровотоку впливають на швидкість кровотоку. Обидва фактори, коли вони присутні, збільшують швидкість кровотоку. Обертання кровотоку, підтверджене експериментальними доплерівськими даними, призводить до збільшення поступальної швидкості, що означає більш ефективну роботу серця.

2.8 Модель активності судини

На наступному етапі моделювання було розділено поступальні та обертальні компоненти кровотоку. Враховано активність судин артеріальної системи, яка забезпечується внаслідок NO-реакції в стінках ендотелію. При постачанні імпульсу крові від серця стінки ендотелію розтягуються, що зменшує коефіцієнт жорсткості стінок судини. Після закінчення NO-реакції відбувається поновлення жорсткості судини за рахунок енергії хімічної реакції, що сприяє підсиленню кровотоку та виступає додатковим джерелом енергії.

Аналогічним чином, обертальна пружність судини приводить до її більшого розкручення під час постачання моменту імпульсу від серця, а потім до поновлення більш скрученого стану за рахунок енергії хімічної реакції, що підсилює обертання кровотоку.

Активність артеріальних судин описана сигмоїдальними функціями, аналогічними до використаних для опису вкиду крові від серця.

2.9 Обертальний кровотік: кручення та кочення

Обертальний кровотік розділено на ефекти кручення навколо осі судини та ефекти кочення навколо перпендикулярної осі. Ці компоненти не є незалежними і пов'язані рівняннями Ейлера для кутових швидкостей, а напрямок перерозподілу енергії між обертальними ступенями вільності визначається принципом Ле Шательє. Суперпозиція двох різновидів обертального руху утворює обертальний рух крові у формі вихрового шнура спіральної форми.

2.10 Розрахунок енергетичних параметрів кровотоку через артеріальні судини системи

Робота за один серцевий цикл розраховується як інтеграл миттєвої

потужності у формулі 2.9:

$$A = \int_0^T P(t) \cdot Q(t) dt \quad 2.9$$

Якщо розкласти тиск $P(t)$ на компоненти, що витрачаються на подолання кожного виду опору, ми отримаємо єдине рівняння роботи:

$$A = \int_0^T R \cdot Q^2(t) dt + \int_0^T \frac{Q(t)}{C} \int Q(t) dt dt + \int_0^T L \cdot Q(t) \cdot \frac{dQ(t)}{dt} dt \quad 2.10$$

де P - тиск, Q – потік. Маючи вхідні дані за серцевий цикл – тиск $P(t)$, потік $Q(t)$ та швидкість $v(t)$, можемо розрахувати решту параметрів за допомогою рівнянь гемодинаміки.

Визначимо діаметр (d) судини в залежності від часу у формулі 2.11:

$$d(t) = 2 \sqrt{\frac{Q(t)}{\pi v(t)}} \quad 2.11$$

Визначимо гідродинамічний активний опір – R , використовуючи закон Ома для гідравліки:

$$R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \quad 2.12$$

Визначимо гідродинамічну ємність – C , що показує як змінюється об'єм судини при зміні тиску:

$$C(t) = \frac{dQ}{dP} \approx \frac{Q(t) - Q(t - \Delta t)}{P(t) - P(t - \Delta t)} \quad 2.13$$

Визначимо гідродинамічну індуктивність – L , що відображає інерцію маси крові:

$$L(t) = \frac{\rho \cdot l}{S(t)} \quad 2.14$$

де l – довжина ділянки судини, S – площа перерізу ($\pi d^2/4$).

Визначимо напруження на стінці судини – σ , що розрахуємо за законом

Лапласа:

$$\sigma(t) = \frac{P(t) \cdot d(t)}{2h} \quad 2.15$$

де h – товщина стінки, яку приймаємо як $0.1 \cdot r$.

Визначимо рівняння миттєвої потужності – W , через гідродинамічні параметри:

$$W(t) = Q^2(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C} \int Q(t) dt + L \cdot Q(t) \frac{dQ(t)}{dt} \quad 2.16$$

де $Q^2(t) \cdot R$ – маємо доданок в'язкої потужності, що витрачається на подолання тертя крові, і в опроміненій людини цей показник найвищий через високий гідродинамічний опір (R);

$\frac{Q(t)}{C} \int Q(t) dt$ – пружна потужність, що витрачається на розтягнення стінок судин;

$L \cdot Q(t) \frac{dQ(t)}{dt}$ – інерційна потужність, що витрачається на прискорення маси крові і залежить від гідродинамічної індуктивності (L) та швидкості зміни потоку.

Розраховані часові залежності кінетичної енергії поступального та обертального руху крові показують, що врахування обертання кровотоку та активності судин за рахунок NO-реакції призводить до збільшення лінійної швидкості кровотоку [43]. У випадку пружно-активної судини наявність активного внеску забезпечує часові залежності з одним максимумом, на відміну від моделі пружної судини, де спостерігаються два максимуми.

Плавність зміни внеску кінетичної енергії поступального руху забезпечує саме активність артеріальної судини, яка продовжує активний внесок імпульсу від серця, коли той починає зменшуватись. Аналогічно, плавність зміни кінетичної енергії обертального руху забезпечує крутильна активність артеріальної судини.

2.11 Гамільтоніан та лагранжіан системи кровотоку

Застосування гамільтоніана та лагранжіана дозволяє розглядати систему кровотоку з позиції аналітичної механіки та теорії поля, що відкриває шлях до застосування принципу найменшої дії та пов'язаних із ним законів збереження.

Гамільтоніан H є аналогом повної механічної енергії системи. Для консервативної системи (без дисипації та зовнішніх джерел) $H = \text{const}$ протягом серцевого циклу. Реально $H \neq \text{const}$ через: дисипативний внесок ($Q^2R > 0$), активний внесок (НО-ефект та серцева помпа).

2.12 Загальна схема етапів розрахунку параметрів кровотоку

Загальна схема етапів розрахунку параметрів кровотоку представлена на рис. 2.2 – рис. 2.15.

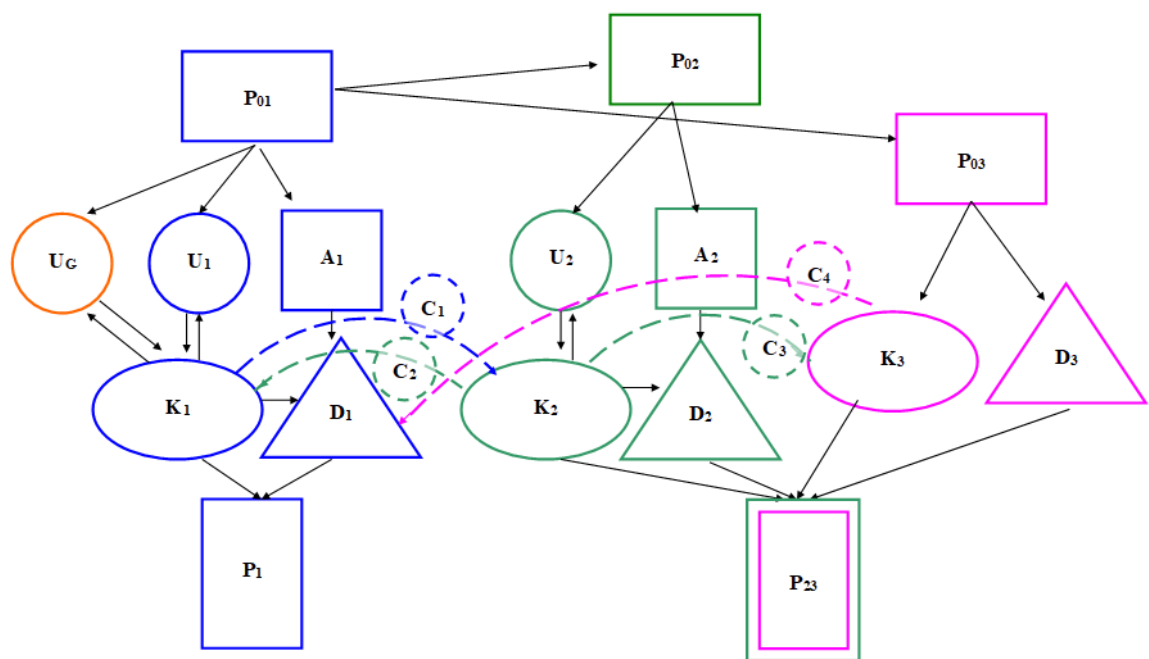


Рисунок 2.2 – Загальна схема етапів розрахунку параметрів кровотоку за удосконаленим рівнянням Бернуллі.

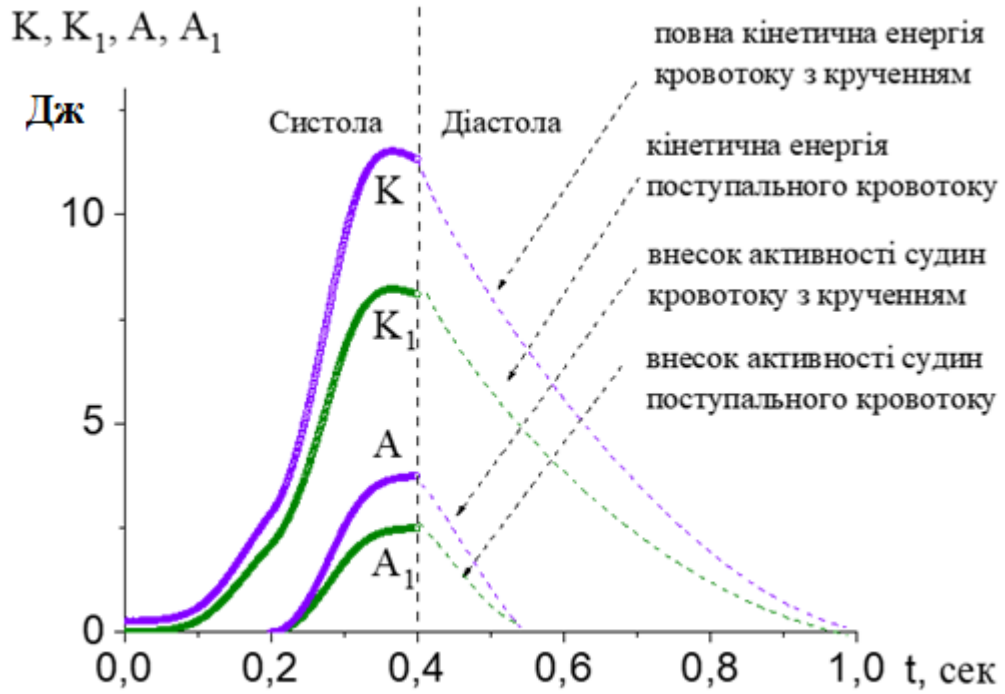


Рисунок 2.3 – Врахування активності судин на енергію поступального та обертального кровоплину

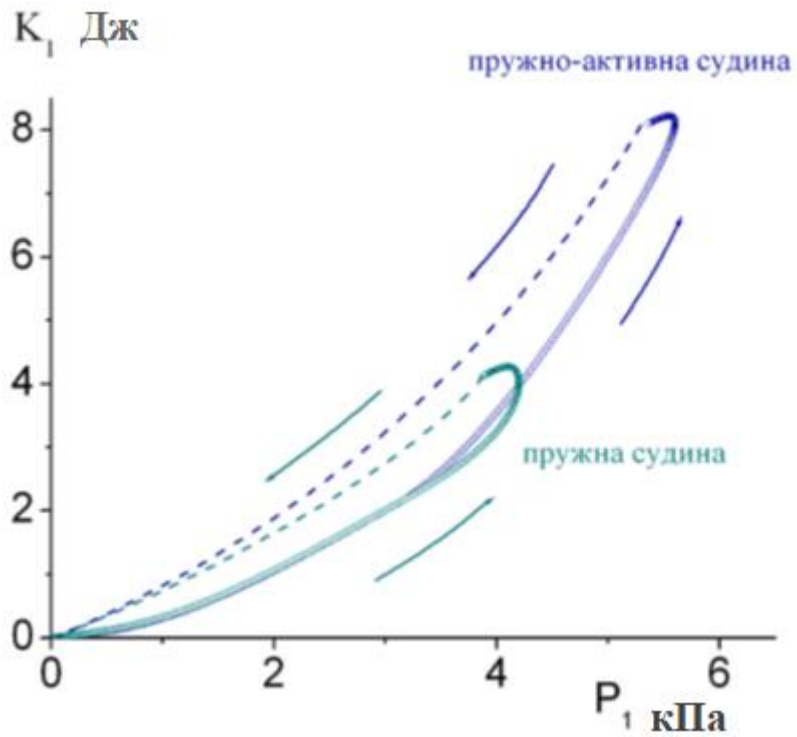


Рисунок 2.4 – Врахування залежності енергії від поступальної течії

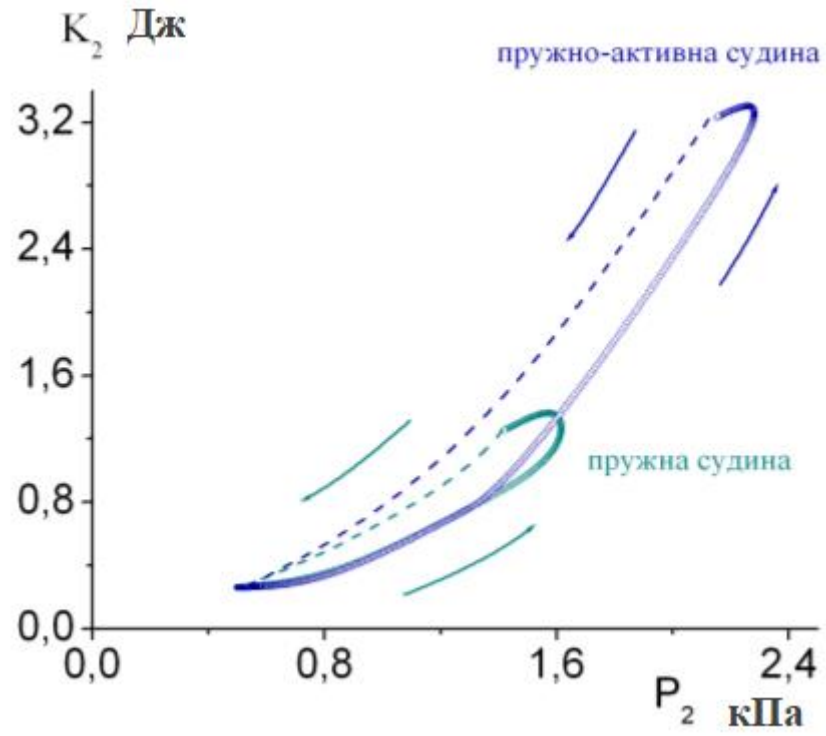


Рисунок 2.5 – Врахування залежності енергії від обертальної компоненти

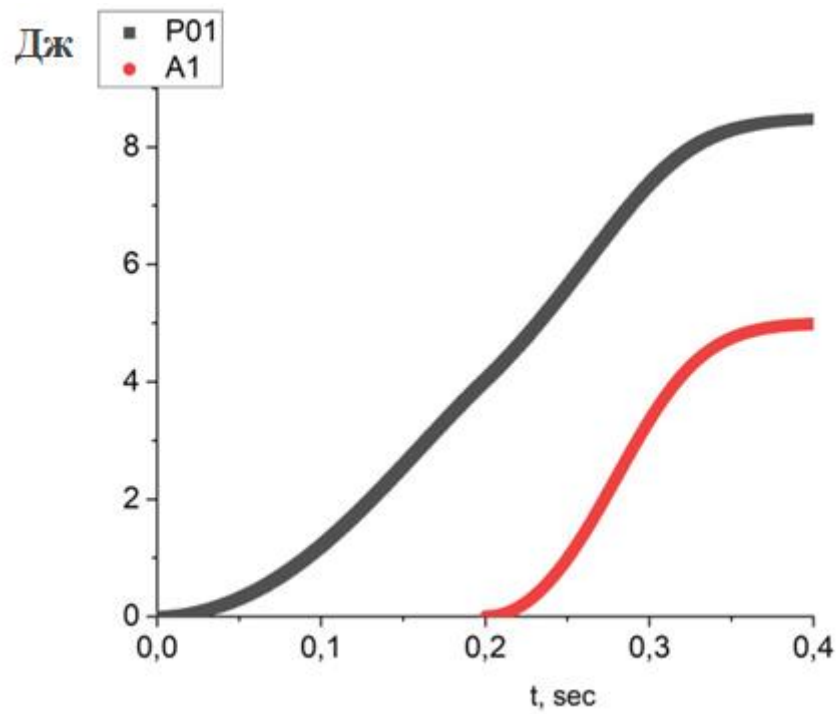


Рисунок 2.6 – Енергія роботи серця (P_{01}) та внески активності судин ($A1$) за поступального руху

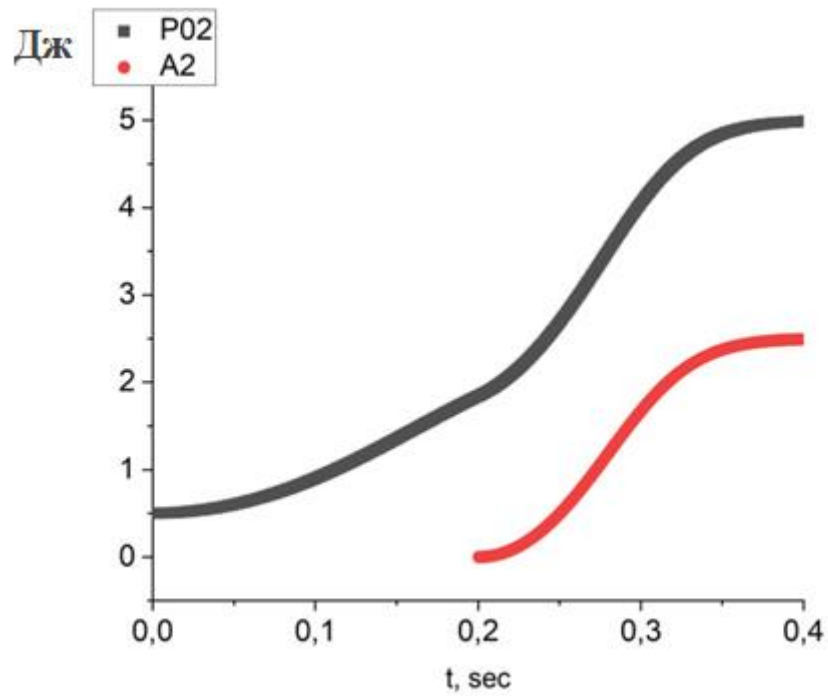


Рисунок 2.7 – Енергія роботи серця (P_{02}) та внески активності судин (A_2) за обертового руху

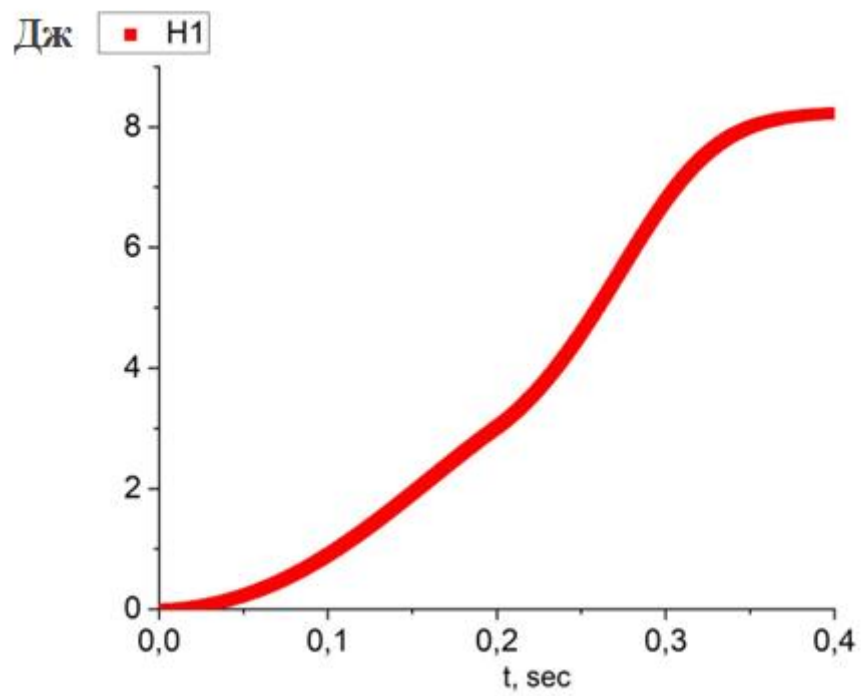


Рисунок 2.8 – Гамільтоніан дія поступального компонента кровотоку

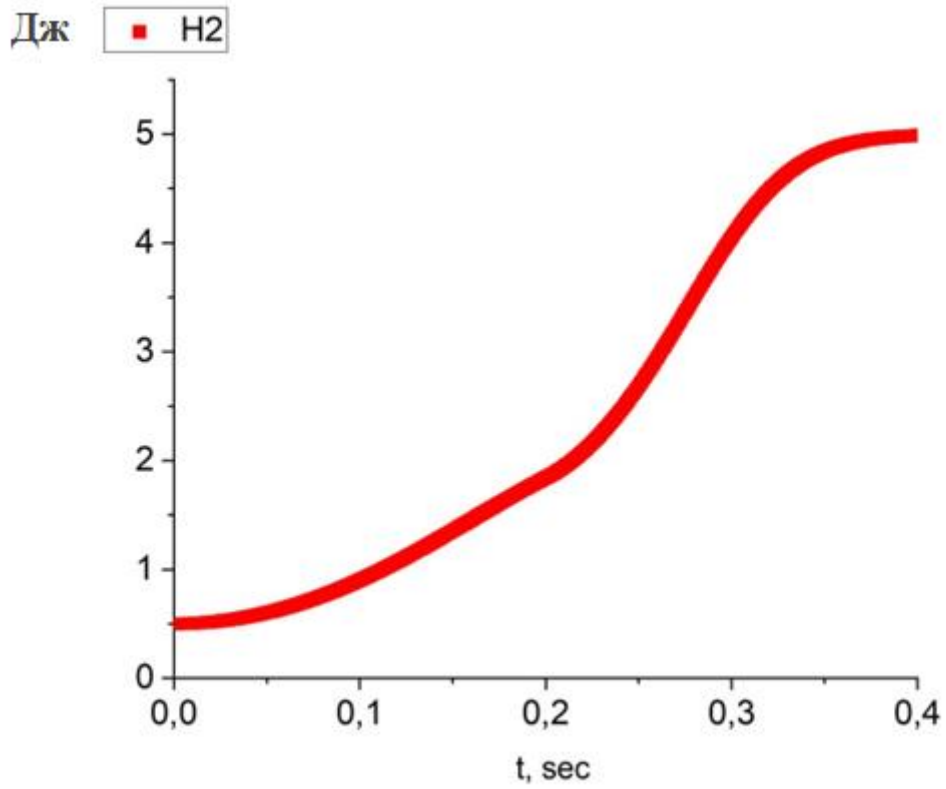


Рисунок 2.9 – Гамільтоніан дія обертального компонента кровотоку

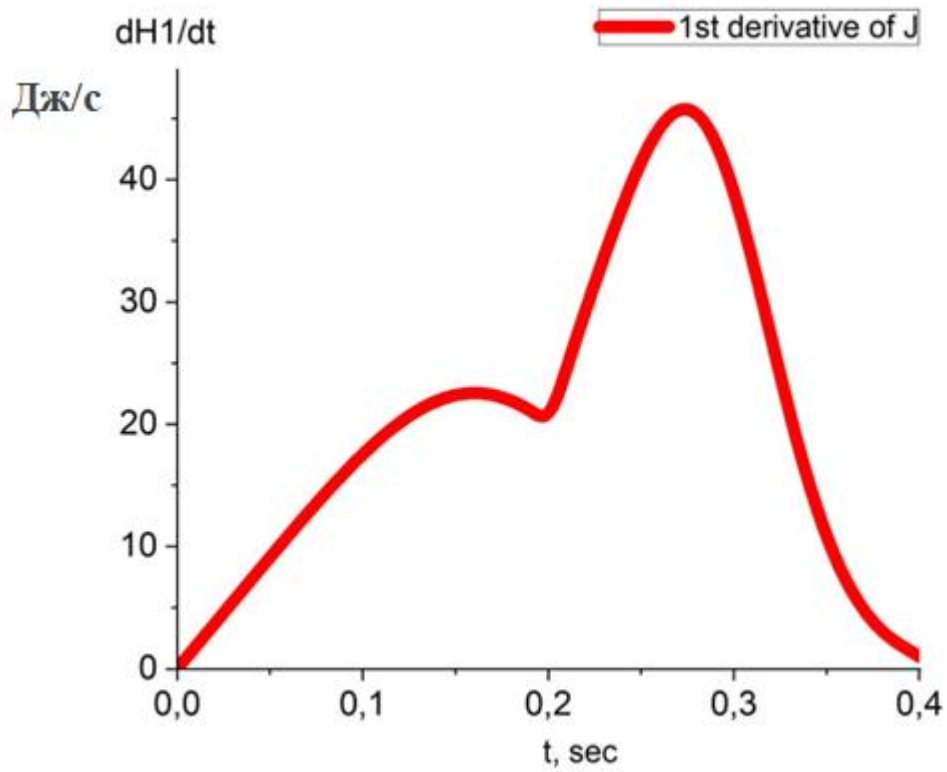


Рисунок 2.10 – Похідна від Гамільтоніану – потужність поступального компонента кровотоку

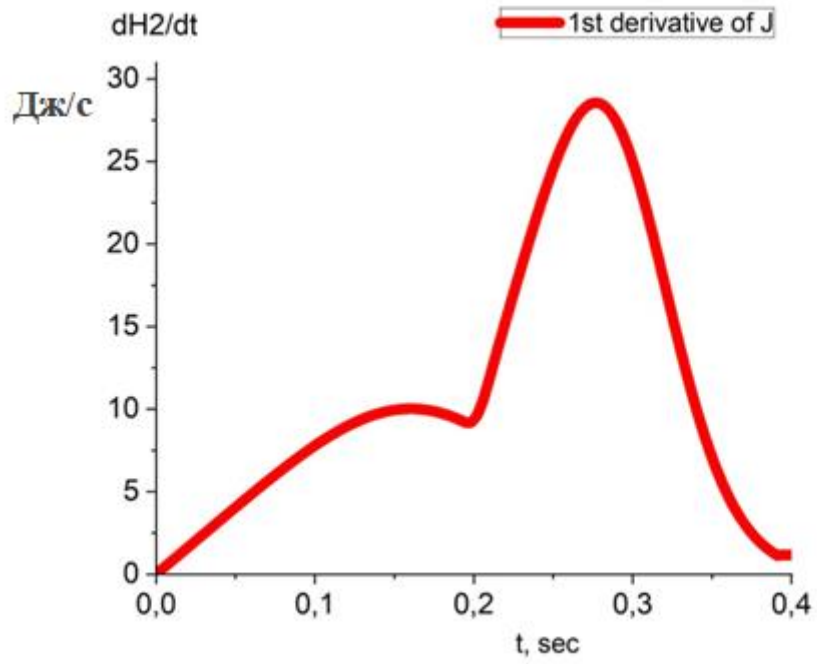


Рисунок 2.11 – Похідна від Гамільтоніану – потужність обертального компоненту кровотоку

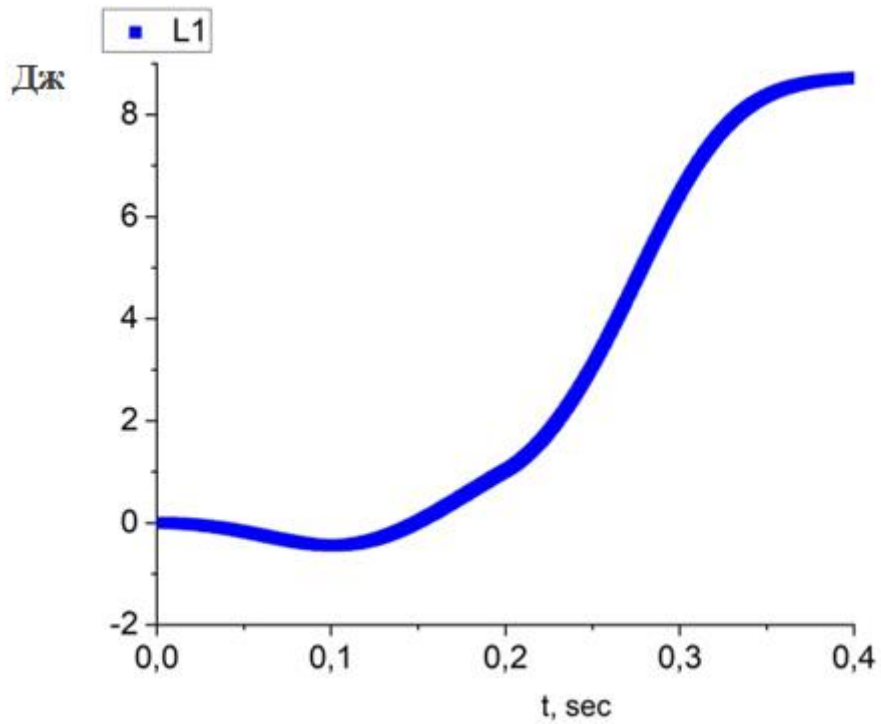


Рисунок 2.12 – Лагранжіан поступального компоненту кровотоку

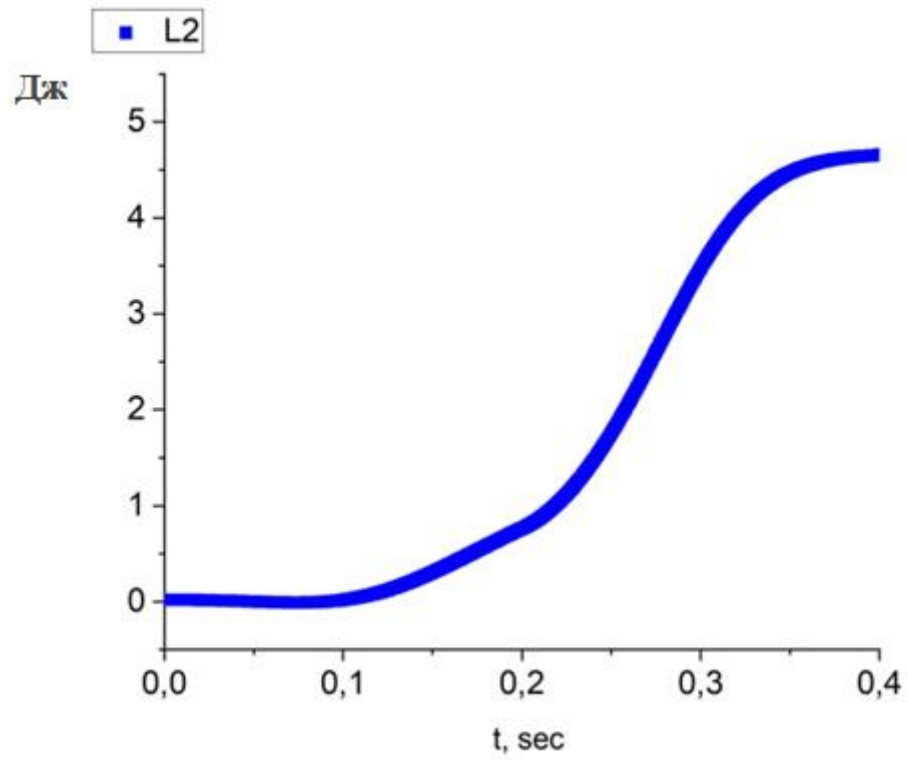


Рисунок 2.13 – Лагранжіан обертового компоненту кровотоку

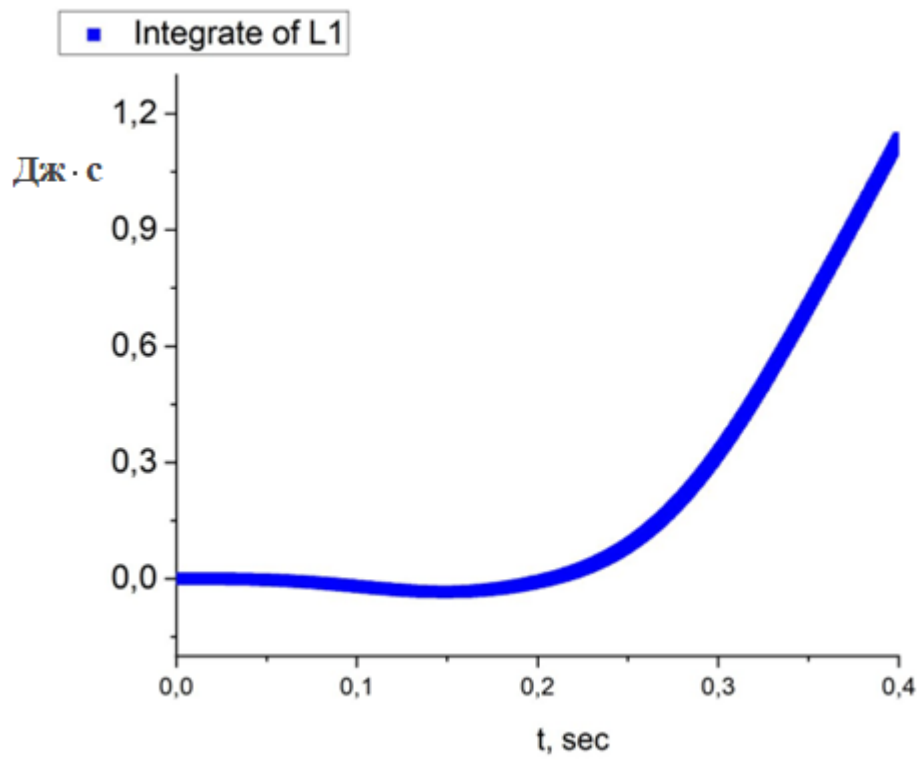


Рисунок 2.14 – Механічна дія поступального компоненту кровотоку

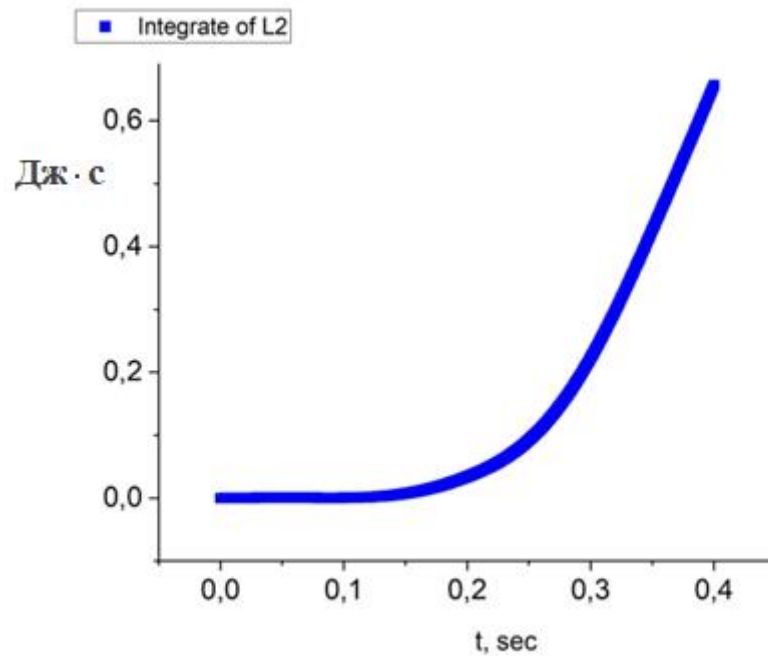


Рисунок 2.15 – Механічна дія обертального компоненту кровотоку

2.13 Показники, що використовуються в розрахунках

При розрахунках математичної моделі використовується близько 5 базових вхідних показників із яких можна отримати наступні характеристики кровоплину за різних модельних умов, яких в цілому може бути близько 40 показників. Ці показники згруповано в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Показники, що використовуються в розрахунках

№ п/п	Назва	Формула	Одиниці вимірювання
1	Базові вхідні: Тиск	P	мм рт.ст.
2	Базові вхідні: Швидкість	v	м/с
3	Базові вхідні: Потік (Flux)	Q	мл/с
4	Діаметр	$D(r)$	см
5	Початкова площа	$S = \pi \cdot R^2$	см ²
6	Ємність	$C = Q / (dP/dt)$	м ³ /Па

Продовж. табл. 2.2.

№ п/п	Назва	Формула	Одиниці вимірювання
7	Індуктивність	$L = \rho \cdot l / (\pi \cdot (D/2)^2)$	кг/м ⁴
8	Напруження σ	$P \cdot D / (2 \cdot 0.05 \cdot D) \times \text{conv}$	кПа
9	Потужність дисипації W_{visc}	$Q^2 \cdot R_{\text{Poiseuille}}(D)$	Вт
10	Потужність пружна W_{elas}	$(Q/C) \cdot V$	Вт
11	Потужність інерційна W_{iner}	$L \cdot Q \cdot dQ/dt$	Вт
12	Потужність загальна W_{total}	$W_{\text{visc}} + W_{\text{elas}} + W_{\text{iner}}$	Вт
13	Похідні по часу: dC/dt	$\text{np.gradient}(C)$	м ³ /(Па·с)
14	Похідні по часу: dL/dt	$\text{np.gradient}(L)$	кг/(м ⁴ ·с)
15	Похідні по часу: $d\sigma/dt$	$\text{np.gradient}(\sigma)$	кПа/с
16	Похідні по часу: dP/dt	$\text{np.gradient}(P)$	мм рт.ст./с
17	Похідні по часу: dQ/dt	$\text{np.gradient}(Q)$	мл/с ²
18	Похідні по часу: dv/dt	$\text{np.gradient}(v)$	м/с ²
19	Похідні по часу: dW/dt	$\text{np.gradient}(W)$	Вт/с
20	Опір: R	P/Q	
21	Опір похідна по часу dR/dt	$\text{np.gradient}(R)$	
22	Просторовий градієнт dP/dr	$\text{spatial_grad}(P)$	мм рт.ст./см
23	Градієнт потужності	$d/dt(dW/dr)$	Н/с
24	Інтегральні: $V = \int Q \, dt$	$\text{cumsum}(Q_{\text{act}}) \cdot DT$	мл
25	Інтегральні: $m = \rho \cdot V$	$\rho \cdot V \cdot 1e-6$	кг
26	Інтегральні: K	$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	Дж
27	Інтегральні: $p = m \cdot v$	$m \cdot v$	кг·м/с
28	Інтегральні: dp/dt	$\text{np.gradient}(p)$	Н
29	Інтегральні: $\dot{m} = \rho \cdot Q$	$\rho \cdot Q \cdot 1e-6$	кг/с
30	Потенціальна енергія U	$(2 \cdot \Delta R)^2 / (2 \cdot C)$	Па/м
31	dU/dt	$\text{np.gradient}(E_{\text{pot}})$	Па/(м·с)
32	dU/dr	$\text{spatial_grad}(E_{\text{pot}})$	Па/м ²
33	d^2P/dt^2	$\text{gradient}(dP/dt)$	мм рт.ст./с ²
34	d^2Q/dt^2	$\text{gradient}(dQ/dt)$	мл/с ³
35	Повна енергія $A = \int W \, dt$	$\text{cumsum}(W_{\text{total}}) \cdot DT$	Дж
36	Дія Σ	$\int A \, dt + \int p \, dr$	Дж·с
37	Повний Гамільтоніан H	$A + E_{\text{pot}}$	Дж

Кінець табл. 2.2.

№ п/п	Назва	Формула	Одиниці вимірювання
38	Повний Лагранжіан L	$A - E_{\text{pot}}$	Дж
39	Частковий H	$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$	Дж
40	Частковий L	$E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$	Дж

2.14 Модель просторово-часового розподілу тиску та швидкості в аорті

Для розрахунку енергетичних параметрів необхідно задати просторово-часовий розподіл тиску $P(t, x)$, швидкості $v(t, x)$ та геометричних характеристик аорти $d(x)$. Використовуємо феноменологічну модель, що базується на клінічних даних та фізіологічних закономірностях.

Анатомічні параметри аорти. Аорта розбивається на три зони: висхідна ($x \in [0, 5.5]$ см), дуга ($x \in [5.5, 10]$ см), низхідна ($x \in [10, 41]$ см). Еквідистантні точки з кроком $\Delta r = 0.05$ см утворюють 820 просторових позицій.

Висновок до розділу 2

У розділі викладено математичний апарат, на якому ґрунтується наша модель кровотоку через активні артеріальні судини. Відправною точкою стало класичне рівняння Бернуллі. У базовій формі воно описує лише три внески – тиск, кінетичну енергію поступального руху та потенціальну енергію в полі гравітації і цього явно недостатньо для адекватного відтворення артеріальної гемодинаміки. Тому ми поступово ускладнювали рівняння, додаючи до нього ті фізичні ефекти, без яких реальна картина кровоплину не складається.

Удосконалення відбувалося у чотири етапи. Спочатку враховано в'язку дисипацію та пружну деформацію стінки судини – це дозволяє описати поступальний рух крові у пасивній еластичній судині. Далі введено модель

активної поведінки судинної стінки через NO-механізм: ендотелій реагує на напруження зсуву і змінює пружні характеристики судини у часі. Після цього до рівняння додано кінетичну енергію обертального руху крові з відповідним коефіцієнтом тертя. Зрештою, в останньому кроці поєднано всі ефекти разом – обертання, в'язкість, пружність та активність стінки.

Окремо опрацьовано опис часової динаміки фаз серцевого циклу. Для розтягнення та стиснення стінки використано сигмоїдальні функції з характерними тривалостями 0,2 с (розширення внаслідок викиду крові від серця) і ще 0,2 с (релаксація, коли серце вже не постачає енергії). Такий вибір функцій не випадковий: симетричність кривої забезпечує те, щоб запасена під час розширення потенційна енергія повністю поверталась у фазі стиснення. Це узгоджується з фізіологічно очікуваним балансом енергії за один цикл, а не є артефактом припущень моделі.

Серед важливіших результатів розділу – введення коефіцієнта α , що зв'язує обертальну й поступальну кінетичну енергію, та коефіцієнта тертя обертального руху a_1 , на порядок меншого за α . Фізичне обґрунтування цього співвідношення спирається на просту аналогію: кочення кулі по поверхні дає значно менший опір, ніж ковзання, а кільцевий вихор у дузі аорти поводитьсь подібно до котка. Завдяки цьому модель якісно відтворює зменшення енерговитрат, яке експериментально фіксується у доплерографічних дослідженнях. Слід чесно визнати, що сам коефіцієнт α у нашій моделі підібрано емпірично – його чисельне значення підбиралося з огляду на узгодженість результатів з клінічно спостережуваними діапазонами, а не виводилось зі строгих перших принципів. Це обмеження, яке потребуватиме окремого дослідження.

Розрахунки виконано на просторово-часовій сітці з 3000 кроків за часом і 820 еквідистантних точок уздовж аорти від 0 до 41 см. Аорту розбито на три анатомічні зони – висхідну, дугу та низхідну – кожна з власним діапазоном діаметрів і пружних характеристик. Отримані залежності $P(t, r)$ і $v(t, r)$ відтворюють клінічно відомі закономірності: систолічний тиск дещо зростає від серця до периферії за рахунок поширення пульсової хвилі, тоді як середня

швидкість зменшується через прогресивне зменшення сумарного перерізу при розгалуженні судин. Така узгодженість слугує першим підтвердженням адекватності моделі. Втім, вона не замінює формальної валідації на реальних клінічних даних – це завдання окремого дослідницького етапу, що виходить за межі магістерської роботи.

Окремий блок розрахунків – гідродинамічні аналоги електричних параметрів: опір R , ємність C та індуктивність L . Це не самоціль, а робочий інструмент, який дозволяє розкласти миттєву потужність на три компоненти (в'язку, пружну, інерційну) і простежити, куди витрачається енергія крові на кожній ділянці аорти. Окремо обчислено напруження на стінці σ за законом Лапласа; цей показник стає особливо важливим при подальшому аналізі ризиків стінкових патологій – аневризм та дисекцій.

На завершення розділу запропоновано формалізм Гамільтоніана $H = K + U$ та Лагранжіана $\Lambda = K - U$. Сенс цього кроку не суто формальний. Перехід до мови аналітичної механіки відкриває можливість застосовувати до кровотоку принцип найменшої дії та закони збереження, які з нього випливають. У консервативному наближенні – без дисипації та активних джерел – Гамільтоніан мав би залишатися сталим протягом серцевого циклу. У нашій моделі H , очевидно, не зберігається. Саме характер його еволюції, а конкретно внески дисипативного члена та активного NO-внеску, дає кількісну міру того, як серце і судинна стінка «накачують» систему енергією, протистоячи в'язкому розсіянню.

Підсумовуючи, у розділі сформовано математичний скелет, на якому далі будуватиметься програмна реалізація моделі: чотирикомпонентне рівняння Бернуллі з обертанням і активністю, повний набір гідродинамічних аналогів та інтегральних енергетичних характеристик, а також просторово-часовий профіль тиску і швидкості в аорті. Окремі припущення моделі – зокрема емпіричний характер коефіцієнта α – потребуватимуть подальшого уточнення на експериментальних даних. Утім, для теоретичного дослідження ролі обертального руху і NO-активності у формуванні енергетичного балансу

артеріальної гемодинаміки наявного апарату цілком достатньо. Він і слугуватиме базою для наступних розділів, присвячених програмній реалізації та обчислювальним експериментам.

РОЗДІЛ 3

ОБҐРУНТУВАННЯ ВИБОРУ ПРОГРАМНОГО СЕРЕДОВИЩА ТА ЗАСОБІВ РЕАЛІЗАЦІЇ

У третьому розділі обґрунтовано вибір програмних засобів для реалізації розробленої математичної моделі, описано архітектуру програмного комплексу та обрані алгоритми. Але спочатку давайте розглянемо існуюче програмне забезпечення, що створене для моделювання гідродинаміки та кровоплину.

3.1 Спеціалізоване програмне забезпечення для моделювання гемодинаміки

Сучасна обчислювальна гемодинаміка є міждисциплінарною галуззю, що поєднує біомедичну інженерію, обчислювальну гідродинаміку (CFD), теорію пружності, біохімію ендотелію та клінічну кардіологію. Ринок спеціалізованого програмного забезпечення для моделювання серцево-судинної системи поділяється на 4 головні частини: універсальні CFD-пакети універсального призначення (ANSYS Fluent, COMSOL, OpenFOAM, SimFlow), що підлаштовуються для гемодинамічних задач; вузько-спеціалізовані відкриті науково-дослідницькі платформи (SimVascular, REO INRIA, FEniCS), орієнтовані на наукове моделювання серцево-судинної системи; клінічно-медичні програмні продукти з сертифікацією від державних регуляторів (VasSol NOVA, HeartFlow Analysis), що використовуються безпосередньо у медичній практиці; скриптові 0D/1D моделювальні середовища на Python та MATLAB (CRIMSON, openBF, OpenSimRoot), що забезпечують швидке прототипування моделей. Нижче було оглянуто детальніше найважливіших представників цих сегментів, а також оцінити їх можливості й обмеження щодо поставленого дослідницького завдання – моделювання енергетичних перетворень при кровоплині через активні артеріальні судини.

3.1.1 SimFlow

SimFlow – комерційне програмне забезпечення для обчислювальної гідродинаміки. Має графічний інтерфейс і створено на базі відкритого розв'язувача OpenFOAM як обчислювального ядра. ПЗ розробляється польською компанією SimFlow Technologies з 2014 року. SimFlow позиціонується як «OpenFOAM з людським обличчям» – тобто система, що зберігає всю обчислювальну потужність OpenFOAM, але приємно уникає складнощів роботи з командним рядком та текстовими конфігураційними файлами, характерних для оригінального дистрибутиву.

Розглянемо функціональні можливості застосунку. Доступний повний цикл CFD-моделювання: імпорт CAD-геометрії (STL, STEP, IGES), автоматична та параметрична генерація неструктурованих сіток, розв'язання з використанням більш ніж 80 попередніх OpenFOAM-розв'язувачів, інтерактивна постобробка засобами ParaView. Також є підтримка неньютонівських реологічних моделей: Power-Law, Carreau-Yasuda, Cross, Herschel-Bulkley, Bingham, що є важливою умовою для коректного моделювання крові у судинах малого та середнього калібру. Створені спеціалізовані бібліотеки для біомедичних задач: моделювання кровотоку в артеріях та стентах, аналіз потоку повітря в дихальній системі, оптимізація конструкції медичних пристроїв (штучних клапанів, насосів допоміжного кровообігу). Застосовуються моделі взаємодії рідина-структура (FSI) із засобами кодексу зв'язку для двостороннього обміну даними між гідродинамічним розв'язувачем та структурним аналізатором. Зручний графічний інтерфейс з підтримкою скриптової автоматизації через Python API.

Серед недоліків та обмежень програми це обчислювальна вартість. Безкоштовна версія має обмеження на розмір сітки. Якщо зважати, що типова сітка містить 2-10 млн вузлів, стає очевидно, що цього недостатньо для пацієнт-специфічного моделювання реалістичних геометрій аортального дерева.. Повна версія значно більш демократична, ніж попередні версії застосунків і коштує від однієї тисячі доларів на рік на одну ліцензію та потребує високопродуктивного обладнання. Програма не передбачає вбудованих 0D/1D моделей з електро-

гідродинамічною аналогією, тому неможливе швидке прототипування редукованих моделей серцево-судинної системи. Відсутність аналітичного моделювання енергетичних перетворень. SimFlow обчислює лише первинні поля (швидкість, тиск, напруження). Відсутність моделей активності судин. SimFlow не має вбудованих модулів для моделювання NO-механізму ендотеліальної релаксації, тому судини моделюються як пасивні пружні структури без врахування їх адаптивної поведінки. Відсутність прямого обертального аналізу. Хоча обертальні (вторинні) течії з'являються як побічний результат 3D-розв'язання, програма не надає спеціалізованих засобів для розкладання потоку на осьову та обертальну компоненти. Обмежена інтеграція з Python науковими бібліотеками. Хоча є Python API для автоматизації, повна інтеграція з numpy/scipy/pandas/matplotlib для аналітичної постобробки потребує значних зусиль на стиковку.

3.1.2 VasSol NOVA

VasSol NOVA (Non-invasive Optimal Vessel Analysis) – комерційне клінічне програмне забезпечення компанії VasSol Inc. із Чикаго у США для кількісного аналізу мозкового кровотоку на основі магнітно-резонансної ангиографії з фазово-контрастним протоколом (PC-MRA). NOVA є першим комерційно доступним програмним продуктом, що використовує тривимірний модельний підхід для вимірювання кровотоку методом MPT – технологія, що розроблялася з 1990-х років в Іллінойському університеті в Чикаго (UIC) та комерціалізована з 2002 року.

До функціональних можливостей ПЗ входить: побудова 3D-моделі судинного дерева головного мозку з даних MPT пацієнта; кількісне вимірювання миттєвих та середніх значень об'ємного кровотоку у будь-якій судині мозку ; розрахунок гемодинамічних показників – швидкості, об'ємного потоку, напрямку руху крові, асиметрії кровотоку; інтеграція з клінічними інформаційними системами (PACS) через DICOM-протокол; FDA-сертифікація як медичний пристрій класу II (510(k) Clearance); використання у проспективному

дослідженні VERITAS (Vertebrobasilar Flow Evaluation And Risk Of Transient Ischemic Attack And Stroke) для оцінки ризику ішемічного інсульту.

Розглянемо мінуси цього програмного застосунку. Nova призначена виключно для аналізу церебрального (мозкового) кровотоку. Дослідження аортального та коронарного кровотоку, які є предметом даної дипломної роботи, не підтримуються програмою. Програма виконує лише чисельну реконструкцію кровотоку з даних МРТ і не моделює обертальний рух крові, NO-реакцію ендотелію, чи активну поведінку судинної стінки. Наступний недолік - ліцензія Nova також як і інші програми тисячі доларів на установку, а повний пакет з модулями обробки та сервісним обслуговуванням ця ціна ще вища. Висока вартість робить програму недоступною для більшості українських науково-дослідних установ. Для роботи Nova потрібен МР-сканер з підтримкою фазово-контрастного протоколу, якого немає у багатьох регіональних медичних закладах. Nova є інструментом аналізу фактично виміряних даних, а не прогностичного моделювання. Неможливо симулювати «що буде, якщо» – наприклад, наслідки стентування чи зміни жорсткості артерій. Програма не обчислює енергетичні перетворення (кінетичну, потенціальну, дисипативну енергії) – основну тему даного дослідження. Алгоритми розрахунку є пропрієтарними, що унеможливорює модифікацію або розширення для дослідницьких потреб.

3.1.3 REO – Mathematical Modelling and Numerical Simulation of Biological Flows [44]

REO – академічний дослідницький проєкт Французького національного інституту досліджень у галузі цифрових наук та технологій (INRIA Paris) у партнерстві з CNRS (Centre national de la recherche scientifique) та Університетом Сорбонна (колишній Університет П'єра і Марі Кюрі). Команда проєкту, що об'єднує близько 25 дослідників та аспірантів та очолювана професорами Жаном-Фредеріком Жербо та Маріною Веню-Жерво, розвиває фундаментальну математичну теорію кровотоку та повітряного потоку у біологічних системах.

Розробляється з 2003 року як спадкоємець попереднього проєкту M3N.

Опишемо доступну функціональність у ПЗ. Математично строге моделювання кровотоку у великих судинах з використанням Petrov-Galerkin кінцево-елементних схем зі стабілізацією. Розв'язання задач взаємодії рідин-структура (FSI) з використанням розщеплених у часі схем та домен-декомпозиційних методів для забезпечення обчислювальної ефективності. Електромеханічне моделювання серця: спряжене розв'язання рівнянь електрофізіології (рівняння Бідомена, рівняння Голотона-Хакслі-Нобла) з механікою скорочення міокарда. Інструменти для побудови пацієнт-специфічних моделей серцево-судинної системи з МРТ та КТ-даних. Моделювання потоку повітря у дихальних шляхах з урахуванням деформації альвеол при диханні. Розробка спеціалізованих чисельних методів для медичних пристроїв: стенти для церебральних аневризм, штучні серцеві клапани. Відкритий доступ до значної частини коду через бібліотеку FELiScE (Finite Elements for Life Sciences and Engineering).

Серед відомих нам обмежень застосунку - академічна орієнтація без продуктового інтерфейсу. REO є дослідницьким проєктом, а не готовим програмним продуктом. Користування потребує значних зусиль на встановлення, конфігурацію та використання, оскільки більшість компонентів є набором C++ бібліотек з мінімальним графічним інтерфейсом. Висока крива навчання. Робота з REO потребує глибоких знань методу скінченних елементів, варіаційних формулювань рівнянь Нав'є-Стокса та досвіду програмування на C++. Таке обмеження робить цей проєкт малоприматним для студентського освітнього процесу та клінічного застосування. Відсутність засобів енергетичного аналізу. Незважаючи на математичну строгість, REO зосереджений на чисельному розв'язанні рівнянь, а не на аналізі енергетичних трансформацій. Обчислення Гамільтоніана та Лагранжіана системи кровотоку відсутнє у стандартному функціоналі. Недостатня увага до активності судин. NO-механізм ендотеліальної релаксації не реалізовано як окремий модуль. Судини розглядаються як пасивні пружні структури з лінійним або

гіперпружним конститутивним рівнянням. Обмежена підтримка користувачів. Зважаючи на те, що REO - передусім академічний проєкт, він не має формальної служби технічної підтримки, а його документація неповна і фрагментарна. Орієнтація на 3D CFD. Аналітичні редуковані моделі (0D/1D) не є основним напрямком розвитку REO, що ускладнює їх застосування для швидкого прототипування та клінічної інтеграції.

3.1.3 COMSOL Multiphysics

COMSOL Multiphysics – комерційна крос-платформенна обчислювальна платформа для мультифізичного моделювання методом скінченних елементів, розроблена шведською компанією COMSOL AB (Стокгольм) з 1998 року. Платформа є одним з найпопулярніших комерційних продуктів для інженерного моделювання у світі, має десятки тисяч ліцензованих користувачів. Для моделювання гемодинаміки використовується модуль CFD (Computational Fluid Dynamics) у поєднанні з модулем Structural Mechanics для задач взаємодії рідин-структура (FSI), а також модулями Bioheat Transfer та Chemical Reaction Engineering для біомедичних застосувань.

У програмному забезпеченні доступна така функціональність: унікальна можливість зв'язування довільних фізичних явищ; розширений набір реологічних моделей крові, що покривають широкий діапазон зсувних швидкостей у судинах; підтримка пульсуючого кровотоку з автоматичною часовою адаптацією кроку інтегрування; моделі еластичних та гіперпружних стінок судин; параметрична оптимізація геометрії та матеріальних властивостей судин; інтеграція з MATLAB через LiveLink for MATLAB та з Python через спеціальний API; крафічний інтерфейс на базі Application Builder для створення спеціалізованих GUI під клінічних користувачів без потреби у програмуванні.

Звичайно є й обмеження у цього застосунку: базова ліцензія починається з декількох тисяч доларів на одну робочу станцію, а повний пакет з усіма потрібними модулями обходиться у кілька десятків тисяч доларів на рік. Для академічних користувачів передбачені знижки, та незважаючи на це навіть

академічна ліцензія залишається фінансово недосяжною для багатьох українських ВНЗ; тривимірне FSI-моделювання аортального дерева потребує 64-128 ГБ ОЗП та 24-48 годин обчислень на високопродуктивній робочій станції, і таке обмеження практично унеможливорює інтерактивне дослідження та параметричні розгортки; відсутність вбудованого моделювання NO-механізму. COMSOL не має спеціалізованого модуля для моделювання ендотеліальної регуляції тону судин через NO-реакцію, а для реалізації цього механізму користувач мусив би самостійно описати систему диференціальних рівнянь; відсутність вбудованого енергетичного аналізу гемодинаміки і хоча COMSOL обчислює локальні тензори напружень та поля швидкостей, він не надає прямих засобів для аналізу енергетичних перетворень; орієнтація на 3D, обмежені 0D/1D засоби і хоча технічно дозволяє будувати 0D/1D моделі через модуль ODE/DAE, це побудова 0D/1D моделей через модуль ODE/DAE не є сильною стороною COMSOL і потребує специфічного досвіду користувача, навіть з урахуванням того, що технічно така можливість є; модифікація алгоритмів неможлива і користувач обмежений функціональністю, передбаченою розробником; платформа має понад 30 модулів та сотні налаштувань; ефективна робота потребує кількох тижнів інтенсивного навчання.

3.1.4 ANSYS Fluent

ANSYS Fluent – провідне комерційне програмне забезпечення для обчислювальної гідродинаміки, що використовує метод скінченних об'ємів (FVM). Розроблюється американською корпорацією ANSYS Inc. (зараз частина Synopsys) з 1983 року (спочатку як Fluent Inc., поглинутий ANSYS у 2006 р.). Fluent є галузевим стандартом для CFD-моделювання у промисловості (аерокосмічна, автомобільна, енергетична галузі), а в останнє десятиріччя активно проникає у біомедичні застосування.

Функціональні можливості:

- 1) Найповніший на ринку набір моделей турбулентності: k - ϵ (Standard/Realizable/RNG), k - ω SST, моделі рейнольдсових напружень

(RSM), LES (Large Eddy Simulation), DES, Hybrid RANS-LES, Scale-Adaptive Simulation.

- 2) Передові моделі неньютонівської реології: Carreau, Cross, Power-Law, Herschel-Bulkley з можливістю задавати залежність параметрів від гематокриту та температури через User-Defined Functions (UDF).
- 3) Розв'язувачі для рухомих сіток (Dynamic Mesh): morphing, sliding mesh, remeshing, що дозволяє моделювати рух стінок аорти та клапанів серця.
- 4) Двосторонній FSI через інтеграцію з ANSYS Mechanical (Workbench platform) з повною узгодженою схемою.
- 5) HPC-розпаралелювання на сотні ядер з ефективною масштабованістю до тисяч процесорів на кластерних системах.
- 6) Постобробка через ANSYS CFD-Post з розширеними можливостями візуалізації обертальних структур (Q-критерій, λ_2 -критерій, гелісіті).
- 7) Розширення через C/C++ User-Defined Functions та Python API (PyAnsys).

Недоліки та обмеження:

- 1) Дуже висока вартість. Ліцензія ANSYS Fluent коштує десятки тисяч доларів за робоче місце залежно від обраних модулів. HPC-розширення (необхідне для серйозних задач) ще збільшує вартість. Попри те, що доступні тимчасові академічні ліцензії, їх використання обмежене некомерційними цілями та лімітоване за розміром задачі.
- 2) Величезне споживання обчислювальних ресурсів. Транзйентне FSI-моделювання повного серцевого циклу для пацієнт-специфічної геометрії аорти потребує багатогодинні чи навіть багатоденні обчислення на високопродуктивному обладнанні. Це робить інтерактивне дослідження практично неможливим.
- 3) Відсутність спеціалізованих біомедичних моделей. На відміну від SimVascular чи REO, Fluent є інструментом загального CFD без бібліотек, налаштованих специфічно під гемодинаміку. Реалізація NO-механізму чи моделей активної поведінки судин лежить повністю на користувачеві.

- 4) Відсутність аналізу енергетичних трансформацій за Бернуллі. Програма обчислює лише первинні поля; інтегральні енергетичні характеристики необхідно отримувати через UDF або зовнішню постобробку.
- 5) Відсутність вбудованих 0D/1D моделей. Fluent зорієнтований виключно на 3D, що робить його малопридатним для системного моделювання серцево-судинної системи в цілому. Інтеграція з 0D-моделями (граничні умови у вигляді трьох-елементного Windkessel) можлива, але сильно ускладнена.
- 6) Закритий пропрієтарний код. Незалежна модифікація алгоритмів неможлива.
- 7) Складний інтерфейс. Хоча новітні версії мають графічний препроцесор, ефективна робота потребує знайомства з тисячами параметрів та використання командного рядка для автоматизації.

3.1.5 OpenFOAM

OpenFOAM (Open source Field Operation And Manipulation) – вільне відкрите програмне забезпечення для обчислювальної гідродинаміки з більш ніж 20-річною історією. Спочатку розроблений як FOAM в Imperial College London у 1989 році (Хенрі Веллер), у 2004 році відкритий як OpenFOAM під ліцензією GPL. Сьогодні підтримується трьома основними форками: OpenFOAM Foundation, ESI-OpenCFD та foam-extend. OpenFOAM використовується тисячами науковців та інженерів у всьому світі, у тому числі як обчислювальне ядро комерційних продуктів і зокрема SimFlow та HELYX.

Переваги застосунку. Понад 80 готових розв'язувачів, призначених для різних класів задач, зокрема ламінарних (icoFoam, simpleFoam, pisoFoam) і турбулентних (pimpleFoam) течій нестисливих і стисливих (sonicFoam, rhoSimpleFoam) середовищ, багатофазних систем (interFoam), а також реактивних і магнітно-гідродинамічних процесів. Об'єктно-орієнтована архітектура на C++ дозволяє створювати власні розв'язувачі шляхом модифікації існуючих або написання з нуля. Підтримка широкого спектру граничних умов та

реологічних моделей. FSI-можливості через сторонні розширення (foam-extend, fsiFoam, preCICE). HPC-розпаралелювання через MPI з лінійною масштабованістю до тисяч ядер. Інтеграція з ParaView для візуалізації, з MATLAB та Python – для скриптової автоматизації та постобробки. Постійний розвиток наукової спільнотою та промисловими партнерами.

Недоліки та обмеження:

- 1) Дуже висока крива навчання. OpenFOAM не має вбудованого графічного інтерфейсу – вся робота виконується через командний рядок та ручне редагування десятків текстових файлів конфігурації. Освоєння базового рівня потребує 2-3 місяці інтенсивної роботи, а для написання власних розв'язувачів знадобиться 1-2 роки досвіду.
- 2) Вимога досвіду програмування на C++. Модифікація алгоритмів та створення спеціалізованих моделей (наприклад, для NO-реакції чи енергетичного аналізу) потребує глибоких знань об'єктно-орієнтованого C++ та структури OpenFOAM, що має значну кодову базу.
- 3) Обмежена підтримка та Linux-орієнтованість. Хоча існують варіанти для Windows (через WSL чи Docker), нативна продуктивність та стабільність досягаються лише на Linux-системах. Це створює бар'єр для клінічних користувачів, що працюють переважно на Windows.
- 4) Відсутність спеціалізації на гемодинаміці. OpenFOAM є інструментом загального призначення; немає вбудованих моделей активної поведінки судин, NO-реакції, обертального руху крові на рівні рівняння Бернуллі.
- 5) Відсутність енергетичного аналізу. Як і у випадку інших CFD-пакетів, обчислення інтегральних енергетичних характеристик гемодинамічної системи (Гамільтоніан, Лагранжіан, петлі енергії) не передбачено стандартними утилітами.
- 6) Фрагментація версій. Існування декількох незалежних версій програмного забезпечення (OpenFOAM Foundation, OpenFOAM.com, foam-extend) призводить до несумісності між версіями та ускладнює використання сторонніх розширень.

- 7) Недостатня якість документації. Користувачі змушені шукати інформацію у форумах (CFD-online), у Doxygen-згенерованій документації API та в академічних публікаціях, що значно сповільнює навчання.

3.1.6 SimVascular

SimVascular – єдиний повністю відкритий програмний пакет, що забезпечує повний обчислювальний конвеєр від сегментації медичних зображень до пацієнт-специфічного моделювання кровотоку та аналізу результатів. SimVascular розроблюється з 2000 року Стенфордським університетом у тісній співпраці з Каліфорнійським університетом у Берклі та Каліфорнійським університетом у Сан-Дієго, при фінансовій підтримці NIH (National Institutes of Health, США). Проєкт очолює професор Алісон Марсден. Пакет розповсюджується під ліцензією MPL (Mozilla Public License) і має активну наукову спільноту користувачів у всьому світі.

Для цього застосунку доступні наступні способи використання: повний конвеєр від медичного зображення до кількісних гемодинамічних показників: інтерактивна сегментація з MPT та KT і як наслідок - побудова 3D-моделі судинного дерева, а потім автоматична генерація тетраедральної сітки, далі CFD-розв'язання і нарешті постобробка та клінічний звіт; власний паралельний CFD-розв'язувач svSolver на основі стабілізованого методу скінченних елементів (SUPG/PSPG) з підтримкою MPI-розпаралелювання; розширені 0D/1D/3D мультимасштабні моделі: можливість одночасного моделювання великих судин у 3D з іншими частинами серцево-судинної системи у 0D/1D; спеціалізований FSI-розв'язувач CMM-FSI (Coupled Momentum Method) для ефективного моделювання деформівних стінок без необхідності розв'язувати окрему задачу для структури; обчислення клінічно релевантних показників: тиск, швидкість, об'ємний потік, напруження зсуву на стінці, осциляторний індекс зсуву, час перебування часток; інтеграція з машинним навчанням через бібліотеку sv4guiML для автоматизованої сегментації та класифікації; використано у понад 100 рецензованих наукових дослідженнях CCC та валідовано порівнянням з

даними 4D Flow MRI у 30+ публікаціях;

Також розглянемо недоліки цього застосунку: відсутність спеціалізованих засобів для обертального руху крові і хоча 3D-розв'язання природно відтворює спіральні структури потоку у дузі аорти, SimVascular не надає аналітичних інструментів для розкладу потоку на осьову та обертальну компоненти. Відсутність NO-механізму. Активна поведінка артеріальних судин (вазодилатація/вазоконстрикція через ендотеліальну NO-реакцію) не є частиною стандартного функціоналу. Реалізація такого механізму можлива лише через ручну модифікацію вихідного коду C++. Обмежений енергетичний аналіз. Програма обчислює загальну дисипацію та кінетичну енергію, але не надає засобів для побудови енергетичних петель, обчислення Гамільтоніана/Лагранжіана системи кровотоку, аналізу часових та просторових залежностей кожної енергетичної компоненти. Вимога досвіду програмування. Хоча є графічний інтерфейс, повна ефективність досягається через TCL- та Python-скрипти; розширення функціоналу – через C++. Велика крива навчання. Освоєння повного циклу від медичного зображення до результату потребує 1-2 місяці практики. Потрібно знати анатомію, принципи MPT/КТ-сегментації, основи методу скінченних елементів, термінологію CFD. Велике споживання обчислювальних ресурсів. 3D FSI-моделювання аортального дерева на робочій станції потребує 24-72 години обчислень. Для інтерактивного навчання та параметричних досліджень це є серйозним обмеженням. Відсутність офіційної клінічної сертифікації. Хоча SimVascular широко використовується у науковому середовищі, він не має FDA/CE сертифікації як медичний пристрій, що обмежує його прямого застосування у клінічній практиці.

3.1.7 FEniCS Project

FEniCS Project – відкрита обчислювальна платформа для розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних (PDE) методом скінченних елементів. Заснований у 2003 році у Чалмерському університеті технологій (Швеція) під керівництвом професора Андерса Логга. Сьогодні підтримується

консорціумом університетів (Кембридж, Чикаго, Симула, КТН) та має активну наукову спільноту. Поточна версія FEniCSx є переписаною з нуля з покращеною продуктивністю та підтримкою теперішніх HPC-архітектур.

Цьому застосунку доступна наступна функціональність: високорівневий Python-інтерфейс (DOLFIN, DOLFINx) дозволяє формувати варіаційні задачі у компактній математичній формі, наближеній до паперового запису; унікальна мова UFL (Unified Form Language) для формулювання слабких форм PDE з автоматичною генерацією ефективного C++ коду через компілятор форм FFC/FFCx; підтримка майже довільних класів PDE: еліптичних, параболічних, гіперболічних, нелінійних, мультифізичних; розпаралелювання через MPI з ефективністю до сотень ядер; інтеграція з PETSc для лінійної алгебри та з SLEPc для задач на власні значення; використання у дослідженнях гемодинаміки: турбулентність у великих судинах, моделювання церебральних аневризм, оптимізація хірургічних процедур; активне застосування у Symula Research Laboratory (Норвегія) для розробки спеціалізованих гемодинамічних моделей.

Недоліки та обмеження:

- 1) Загальна платформа без спеціалізації на гемодинаміці. FEniCS не має готових моделей кровотоку, активних судин, чи NO-механізму. Користувач повинен формувати всі рівняння з нуля, що потребує глибоких знань гемодинаміки, методу скінченних елементів та програмування.
- 2) Відсутність вбудованих засобів введення геометрії з медичних зображень. На відміну від SimVascular, FEniCS не має модулів сегментації MPT/KT; геометрія повинна готуватися у сторонніх засобах (Gmsh, vmtk).
- 3) Відсутність FSI «з коробки». Хоча на FEniCS можна реалізувати FSI-задачі, готових перевірених FSI-розв'язувачів не передбачено; сторонні розширення (FEniCS-FSI) є дослідницькими та потребують налаштування.
- 4) Висока крива навчання при всій дружності інтерфейсу. Хоча Python-API виглядає компактно, для написання коректного коду потрібні знання: варіаційне формулювання PDE, теорія скінченних елементів, синтаксис

UFL, основи PETSc, MPI-програмування.

- 5) Відсутність комерційної підтримки. Як академічний проєкт, FEniCS не має формальної служби технічної підтримки. Допомогу можна отримати лише через публічні форуми та поштові розсилки.
- 6) Відсутність енергетичного аналізу як стандарту. Користувач сам повинен формулювати інтегральні величини (енергії, потужності) у термінах UFL та обчислювати їх постпроцесорно.
- 7) Обмежені можливості 0d/1d моделювання. FEniCS зорієнтований на просторові PDE; для 0D-моделей серцево-судинної системи (RLC-схеми Windkessel) потрібно використовувати інші засоби.

3.2 Порівняльний аналіз програмного забезпечення

Для систематичного порівняння розглянутих вище програмних засобів з розробленим програмним забезпеченням для моделювання кровотоку на основі удосконаленого гідродинамічного рівняння складено порівняльну таблицю 3.3 за основними критеріями. Таблиця включає порівняння програмних засобів за критеріями ліцензування, врахування характеристик обертання крові та активності та еластичності судин, врахування енергетичних характеристик, застосування гідродинамічних характеристик та інтеграції з іншими програмними засобами. Див. табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Порівняльний аналіз ПЗ для моделювання кровотоку

ПЗ	Тип ліцензії	3D CFD	Оберт. рух крові	Еласт. судин	НО-ефект	Рівн. Берн.	Енергет. аналіз	Python інтег.
SimFlow	Безк.	Так	Частк	Так (FSI)	Ні	Ні	Ні	Ні
VasSol NOVA	Комер.	Так	Ні	Ні	Ні	Ні	Ні	Ні
REO INRIA	Досл.	Так	Частк	Так (FSI)	Ні	Ні	Частк.	Ні
COMSOL	Комер.	Так	Частк	Так (FSI)	Ні	Ні	Частк	Так
ANSYS Fluent	Комер.	Так	Частк	Так (FSI)	Ні	Ні	Частк	Так

Кінець табл. 3.1

ПЗ	Тип ліцензії	3D CFD	Оберт. рух крові	Еласт. судин	NO-ефект	Рівн. Берн.	Енергет. аналіз	Python інтег.
OpenFOAM	Відкр.	Так	Частк	Так (FSI)	Ні	Ні	Ні	Ні
SimVascular	Відкр.	Так	Частк	Так (FSI)	Ні	Ні	Частк	Так
FEniCS	Відкр.	Так	Частк	Так (FSI)	Ні	Ні	Частк	Так
Розроблене ПЗ	Власна розр.	Ні	Так	Так	Так	Так	Так	Так

Дані табл. 3.1 показують, що усі розглянуті програмні засоби-аналоги орієнтовані переважно на тривимірне CFD-моделювання на основі рівнянь Нав'є-Стокса. Деякі з них (COMSOL, ANSYS Fluent, OpenFOAM, SimVascular, FEniCS) дозволяють частково візуалізувати вторинні (обертальні) течії як результат тривимірного моделювання, проте жоден з них не забезпечує цілеспрямованого аналітичного моделювання обертального руху крові на рівні рівняння Бернуллі. Тож істотною відмінністю розробленого програмного забезпечення є врахування активності артеріальних судин на основі NO-реакції та детальний енергетичний аналіз перетворень під час кровотоку, включаючи побудову енергетичних петель.

Ще одним важливим параметром є те, що, з одного боку, комерційні пакети (COMSOL, ANSYS Fluent, VasSol NOVA) мають високу вартість ліцензій та потребують значних обчислювальних ресурсів для тривимірних задач. З іншого боку, відкриті програмні засоби (OpenFOAM, SimVascular, FEniCS) є безкоштовними, але вимагають значного досвіду програмування та налаштування. На противагу цьому, розроблене ПЗ на Python є легким у використанні, не потребує значних обчислювальних ресурсів та забезпечує швидке прототипування моделей з різними параметрами.

3.3 Огляд альтернатив програмного середовища

Тож у попередніх розділах 3.1 та 3.2 ми визначились, що більш

оптимальним способом вирішити нашу задачу моделювання буде створення власного програмного забезпечення. Для цього проаналізуємо ряд мов програмування та середовищ проведення складних розрахунків.

MATLAB є традиційним середовищем для інженерних та наукових розрахунків із потужними засобами моделювання динамічних систем (Simulink). Переваги: вбудована підтримка звичайних диференціальних рівнянь, зручний синтаксис матриць, добра документація для біомедичних задач. Недоліки: комерційна ліцензія (висока вартість), закритий код, менш гнучка екосистема для машинного навчання.

C++ забезпечує максимальну продуктивність та точний контроль над пам'яттю. Переваги: висока швидкість виконання (10–100× порівняно з Python для числових задач), контроль пам'яті. Недоліки: значно більший час розробки, складність налагодження та відладки, обмежена підтримка бібліотек для наукової візуалізації.

Мова програмування Java для нашої задачі виявилася не найкращим вибором. Проаналізовані бібліотеки наукової екосистема Java помітно бідніша за Python: аналоги SciPy, Pandas чи Matplotlib існують, але їхня функціональність вужча, а документація гірша, спільнота біомедичних розробників майже не використовує цю мову. Також Java є «багатослівною»: для тих самих обчислень потрібно писати у 3-5 разів більше коду, ніж на Python, що сповільнює прототипування та утруднює швидке внесення змін у математичну модель, а саме це й було нашим основним сценарієм роботи. Далі інтерактивна робота з даними, побудова графіків і експерименти з параметрами в Java відчутно менш зручні, а GUI-фреймворки орієнтовані радше на корпоративні інтерфейси, ніж на наукову візуалізацію. Ця мова сильна там, де потрібен великий, довгоживучий і високонавантажений серверний застосунок із чіткою архітектурою – натомість дослідницькі задачі обчислювальної гемодинаміки потребують гнучкості та швидкості ітерацій, де Python об'єктивно зручніший.

Julia – нова мова наукових обчислень, що поєднує Python-подібний синтаксис з C-подібною продуктивністю. Перспективна альтернатива, але менш

зрілий інструментарій для біомедичних застосунків порівняно з Python на момент написання роботи.

Для цієї задачі Python є оптимальним вибором. Час виконання повного розрахунку на стандартному ноутбучі складає 5-30 секунд залежно від кількості активних генераторів, що є цілком прийнятним для дослідницького використання.

Підсумовуючи порівняння, для нашої задачі Python виявився оптимальним вибором – і причини цього варто зафіксувати окремо. Передусім, наукова екосистема Python (NumPy, SciPy, Pandas, Matplotlib, Seaborn) перекриває весь спектр операцій, потрібних у роботі: векторизовані обчислення на просторово-часовій сітці, чисельне інтегрування, інтерполяція між анатомічними зонами, експорт у CSV/XLSX та побудова двовимірних і тривимірних графіків. Жодна з розглянутих альтернатив не дає такого ж готового набору інструментів «з коробки». Синтаксис Python максимально близький до математичного запису, що особливо важливо при ітеративному уточненні моделі: правка одного коефіцієнта в рівнянні Бернуллі займає хвилини, а не години переписування коду й перекомпіляції.

Щодо тези про те, що «Python повільний». На практиці все залежить від того, як саме написаний код. У нашій реалізації основні обчислення винесено у векторизовані операції NumPy, які під капотом виконуються скомпільованим C-кодом, тож реальна швидкість роботи близька до C++ для тих самих масивних операцій. Час виконання повного циклу симуляції – від генерації базових вхідних рядів тиску P , потоку Q та швидкості v до отримання похідних гемодинамічних характеристик – становить 5–30 секунд на звичайному ноутбучі (нехай це буде Intel Core i5/i7, 8-16 ГБ ОЗП), залежно від кількості активних генераторів. Це означає, що повний параметричний експеримент із десятками варіантів моделі займає лічені хвилини, а не години чи дні, як у випадку повноцінних 3D CFD-розрахунків у COMSOL чи ANSYS Fluent. Для дослідницької роботи такий час відгуку є практично ідеальним: він дозволяє вільно експериментувати з параметрами моделі, не чекаючи завершення обчислень. Окремо варто зазначити

крос-платформенність – увесь код працює без змін на Windows, Linux і macOS, що зручно для подальшого поширення розробки серед колег та для відтворюваності результатів. Зрештою, важлива і фінансова сторона: Python та всі використані бібліотеки розповсюджуються вільно, без жодних ліцензійних відрахувань, що для академічної роботи в українських реаліях має далеко не останнє значення.

3.4. Порівняння мов програмування

У порівняльній таблиці 3.4 можливо швидко зорієнтуватись та зрозуміти чому було обрано саме мову програмування Python.

Таблиця 3.4 – Порівняння мов програмування

Критерій	Python	Java	C++
Швидкість розробки	Дуже висока (мінімум коду)	Середня	Низька (багато коду)
Простота синтаксису	Дуже проста і читабельна	Більш формальна	Складна
Бібліотеки	Величезна кількість (NumPy, Pandas, ML)	Хороші, але менше для науки	Обмежені для high-level задач
Візуалізація	Дуже зручна (Matplotlib, Seaborn, Plotly)	Потрібні сторонні рішення	Складно реалізувати
Швидкість виконання	Нижча	Вища	Найвища
Прототипування	Дуже швидке	Повільніше	Дуже повільне
Інтеграція	Легка (API, скрипти, ML сервіси)	Хороша для enterprise	Складніша

3.5 Вибір програмних бібліотек мови програмування Python

Для реалізації програмного комплексу обрано мову програмування Python 3.11+ з такими кореневими бібліотеками: NumPy, SciPy, Pandas, Matplotlib та Seaborn. Обґрунтуємо цей вибір порівняно з альтернативами.

Python є найпоширенішою мовою програмування для наукових обчислень та задач машинного навчання. Визначальні переваги Python для цієї задачі:

багата екосистема наукових бібліотек; висока продуктивність розробника (чистий синтаксис, інтерактивні Jupyter-ноутбуки); широка спільнота в галузі біомедичних обчислень та доступні відкриті коди; добра підтримка роботи з масивами часових рядів та CSV-файлами; безоплатність та крос-платформенність.

NumPy – фундаментальна бібліотека для векторизованих чисельних обчислень. Забезпечує ефективну роботу з n -вимірними масивами, базові математичні функції, лінійну алгебру та функції перетворення Фур'є. У цій роботі NumPy використовується для: генерації часових масивів та просторових сіток з кроком 0.05 см; векторизованих розрахунків тиску, швидкості, об'ємного потоку, кінетичної та потенціальної енергії.

SciPy – надбудова над NumPy для складних наукових обчислень. Використовуємо зокрема `scipy.interpolate.interpld` для міжзонної інтерполяції геометричних параметрів аорти; `scipy.integrate` для точного чисельного інтегрування потужності для отримання роботи за цикл.

Pandas – бібліотека для роботи з таблицями даних. Забезпечує зберігання результатів у форматі CSV (для кожної фізичної величини генерується окремий файл), зручне злиття та фільтрацію часових рядів, читання та запис Excel-файлів для зручного перегляду результатів.

Matplotlib та Seaborn – бібліотеки для 2D та 3D візуалізації. Використовуються для побудови часових залежностей кінетичної, потенціальної енергії та повної роботи для окремих сегментів аорти; просторових розподілів максимальних та мінімальних значень вздовж аорти; тривимірних поверхонь тиску P , швидкості v , кінетичної енергії K у координатах «час-відстань».

Висновок з розділу 3

У третьому розділі обґрунтовано вибір програмних засобів і описано Python модулі, які ми поклали в основу обчислювального ядра моделі. Підхід до

цих рішень був прагматичним: ми орієнтувались не на «найпотужніший» чи «найсучасніший» інструмент, а на той, який дозволяє швидко перевіряти гіпотези, легко модифікувати модель і отримувати відтворювані результати на звичайному ноутбукі без потреби у спеціалізованому кластерному обладнанні.

Як основну мову реалізації обрано Python 3.11+ із набором наукових бібліотек NumPy, SciPy, Pandas, Matplotlib та Seaborn. Це рішення стало результатом порівняння з MATLAB, C++, Java та Julia. У кожній з альтернатив є свої сильні сторони – продуктивність C++, зрілість MATLAB, перспективність Julia, корпоративна надійність Java – однак для дослідницької задачі з частими змінами математичної моделі визначальною виявилася саме гнучкість і багатство наукової екосистеми Python. Час виконання повного циклу обчислень у 5-30 секунд знімає питання продуктивності для нашого класу задач: ми працюємо з 0D/1D моделюванням, а не з повним 3D CFD, тож накладні витрати інтерпретованої мови залишаються несуттєвими.

Окремо хочу зупинитись на питанні верифікації. Будь-яка обчислювальна модель, особливо у медичній сфері, потребує контролю правильності результатів – інакше навіть красива математика й елегантний код можуть привести до фізично безглуздих висновків. У нашій реалізації передбачено три рівні перевірки: контроль балансу енергії на кожному кроці (потужність, що надходить від серця, має дорівнювати сумі дисипованої й запасеної потужності з точністю не гіршою за 2%), порівняння інтегральних показників із нормативними клінічними значеннями (середній тиск, пульсовий тиск, швидкість пульсової хвилі) і незалежна перевірка окремих компонентів на аналітичних розв'язках спрощених задач. Це не повна валідація на пацієнт-специфічних даних – на цьому етапі магістерської роботи ми її і не претендуємо здійснити, – але достатній рівень контролю, щоб бути впевненим у фізичній адекватності отриманих залежностей.

Також розглянуто вісім існуючих програмних засобів для моделювання гемодинаміки та проведено їх порівняльний аналіз з розробленим програмним забезпеченням. Аналіз показав, що всі розглянуті аналоги орієнтовані на

тривимірне CFD-моделювання і жоден з них не забезпечує повноцінного врахування одночасно обертального руху крові, еластичності та активності артеріальних судин на рівні удосконаленого рівняння Бернуллі. Також розглянуто основні математичні моделі гемодинаміки, що обґрунтовує необхідність розробленого підходу

Якщо порівнювати запропонований підхід із розглянутими програмними аналогами, видно, що ми зайняли проміжну нішу. Розроблений програмний комплекс не змагається з COMSOL чи ANSYS Fluent у повноті 3D-моделювання – і не повинен. Ми вирішували іншу задачу: створити інструмент, який дозволяє аналізувати енергетичні перетворення на рівні удосконаленого гідродинамічного рівняння, з урахуванням обертального руху та NO-ефекту, і робити це швидко, відтворювано й безкоштовно. У цій ніші немає прямих конкурентів серед існуючих рішень, що, власне, і виправдовує саму розробку.

Підбиваючи підсумок, обрана у цьому розділі зв'язка «Python + модульна архітектура + відкриті табличні формати + вбудовані механізми верифікації» забезпечує всі практичні вимоги до інструменту наукового моделювання: гнучкість при змінах моделі, прозорість результатів, відтворюваність обчислень і доступність для подальшого розширення іншими дослідниками.

РОЗДІЛ 4

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА МЕТОДИКА РОБОТИ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

Четвертий розділ присвячено детальному опису програмної реалізації розробленої математичної моделі та аналізу отриманих результатів чисельного моделювання.

4.1 Алгоритм моделювання енергетичних параметрів кровотоку

Загальний алгоритм моделювання складається з таких кроків: ініціалізація просторово-часової сітки та фізіологічних параметрів; розрахунок анатомічних параметрів аорти; розрахунок базових гемодинамічних параметрів $P(t,r)$, $v(t,r)$, $Q(t,r)$, $d(t,r)$; розрахунок гідродинамічних аналогів $R(t,r)$, $L(t,r)$, $C(t,r)$; (5) розрахунок механічних параметрів $\sigma(t,r)$; розрахунок енергетичних параметрів K (кінетична енергія)(t,r), U – (потенціальна енергія)(t,r), Гамільтоніан $H(t,r)$, Лагранжіан $\Lambda(t,r)$; розрахунок потужностей та роботи; розрахунок похідних та градієнтів; збереження результатів.

4.1.1 Ініціалізація сітки та анатомічних параметрів

Просторово-часова сітка визначається у центральному модулі. Часова сітка охоплює один серцевий цикл тривалістю 0,8 с із кроком $\Delta t = 0,267$ мс, що складає 3000 точок при моделюванні. Відповідно просторова сітка охоплює всю аорту від 0 до 41 см з кроком $\Delta r = 0,05$ см, що в моделюванні складає 820 точок, рівномірно розподілених по трьох анатомічних зонах.

4.1.2 Архітектура застосунку

Розглянемо архітектуру застосунку зображену на UML діаграмі – див. рис. 4.1.

Архітектура застосунку
Додаток для теоретичних досліджень оберального кровотоку

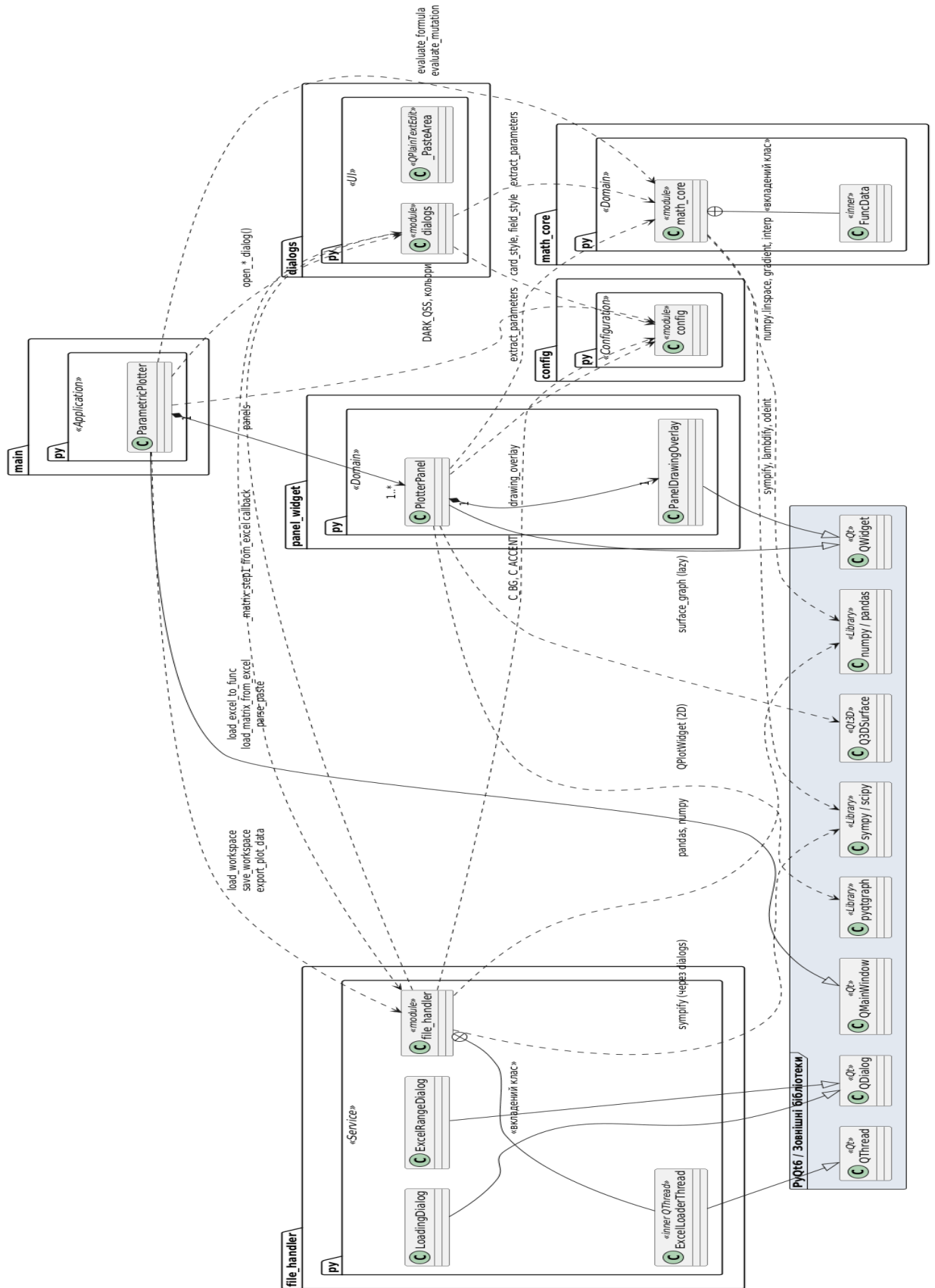


Рисунок 4.16 – UML діаграма архітектури застосунку

Застосунок реалізовано на Python 3.11 з використанням бібліотек PyQt6

для графічного інтерфейсу GUI, NumPy та Pandas для числових обчислень, SymPy для символічної математики, SciPy для диференціальних рівнянь, pyplot для 2D-графіків та Q3DSurface для 3D-поверхні.

Програма побудована за модульним принципом і складається з шести модулів зі суворим розділенням відповідальностей. Це наближає її структуру до архітектурного шаблону MVC (Model-View-Controller).

Модуль `main.py` містить клас `ParametricPlotter` – головне вікно застосунку (наслідує `QMainWindow`). Виконує роль координатора: управляє колекцією до п'яти незалежних панелей плотера, делегує атрибути активній панелі через декоратор `@property`, координує процес обчислення формул і викликає діалогові вікна. Реалізує двопрехідне обчислення: спочатку базові формули у всіх панелях, потім мутації та міжпанельні посилання.

Модуль `panel_widget.py` визначає клас `PlotterPanel` – самостійну панель плотера, яка зберігає власний 2D-графік (через `pyplot`) та незалежну 3D-поверхню (через `Q3DSurface`). Перемикання між 2D і 3D режимами відбувається кнопками на шапці панелі. У 3D-режимі підтримуються два підрежими: ітераційний (поверхня будується з історії розрахунків при різних значеннях параметра) та матричний (поверхня будується безпосередньо з 2D-матриці $F(x,y)$). Допоміжний клас `PanelDrawingOverlay` реалізує прозорий шар для малювання нотаток поверх графіка.

Модуль `math_core.py` – це математичне ядро застосунку. Містить три основні функції: `extract_parameters` витягує невідомі змінні з текстової формули за допомогою SymPy; `evaluate_formula` обчислює значення формули або розв'язує звичайне диференціальне рівняння через `scipy.integrate.odeint`; `evaluate_mutation` виконує складні вирази, де функції посилаються одна на одну. Внутрішній клас `FuncData` є NaN-безпечною обгорткою над масивом NumPy з переважаними арифметичними операторами. Підтримуються DSP-фільтри: ковзне середнє, медіанний фільтр, експоненційне згладжування, нормалізація, квантування, обрізання, періодичне повторення, чисельна похідна та інтегрування (визначене й невизначене).

Модуль `dialogs.py` відповідає за UI-шар. Це плоский модуль функцій-точок входу для всіх діалогів: формули, змінні, ітерації, матрикси, макроси, налаштування, довідка. Кожна функція `open_*_dialog` будує бічну навігаційну панель залежно від обраного режиму. Окрему складність становить майстер створення матриксів, реалізований у чотири кроки: задання розміру, введення значень, імпорт із Excel, експорт зрізу матриці як кривої.

Модуль `file_handler.py` забезпечує операції введення-виведення. Містить три класи: `ExcelRangeDialog` для вибору діапазону Excel-даних, `LoadingDialog` для індикації фонового завантаження та `ExcelLoaderThread` (`QThread`) для асинхронного читання великих Excel-матриць (до 4000×4000). Підтримує імпорт і експорт даних в Excel, серіалізацію робочого простору в JSON (версії 1 і 2 для зворотної сумісності), завантаження та збереження макросів, а також парсинг матриць із буфера обміну.

Модуль `config.py` – наскрізна конфігурація. Зберігає палітру кольорів, шрифти, повну стильову таблицю Qt Style Sheet (приблизно 240 рядків), допоміжні функції генерації інлайн-стилів та список з 20 готових математичних пресетів (поліноми, експоненти, гаусіана, лоренціан, синусоїда, резонанс, сигмоїди, модель Гомпертца тощо).

Серед найважливіших архітектурних рішень слід виділити паттерн Координатор з делегуванням атрибутів. `ParametricPlotter` не зберігає стану плотера, а лише список панелей. Усі звертання до атрибутів формул, параметрів і меж осей перенаправляються на активну панель через метаклас-фабрику `_panel_prop`. Завдяки цьому можна додавати нові панелі без переписування коду діалогів.

Обчислення виконуються у два проходи, що реалізує детермінованість розрахунків. У першому проході обчислюються базові формули у всіх панелях, а у другому – мутації (формули, що посилаються на інші функції) та міжпанельні посилання у синтаксисі `p2f1`, де `p2` означає панель 2, а `f1` – функцію один. Мутації виконуються до десяти ітерацій, доки результат не стабілізується.

Об'єкт `Q3DSurface` створюється лише при першому перемиканні в 3D-

режим. До цього моменту відповідне поле панелі дорівнює None. Це дозволяє економити ресурси для користувачів, які працюють тільки з 2D-графіками.

NaN-безпечна арифметика забезпечує коректне відображення фрагментів кривих з Excel-файлів, які можуть мати порожні діапазони. Клас FuncData при додаванні інтерпретує NaN як нуль, але при множенні зберігає NaN. Це дозволяє накладати сигнали різної довжини без артефактів на межах.

Розділення стану реалізована методами `get_state` і `set_state` у кожній панелі. Робочий простір зберігається у форматі JSON v2 з підтримкою кількох панелей. Формат v1 (одна панель) залишено для зворотної сумісності зі старими файлами.

Асинхронне завантаження великих Excel-матриць виконується у фоновому потоці QThread, щоб не блокувати інтерфейс. Користувачу показується вікно прогресу LoadingDialog. Після завершення спрацьовує сигнал `finished`, який передає прочитану матрицю у відповідний обробник.

Загалом, архітектура застосунку забезпечує чітке розділення відповідальностей між модулями, легкість розширення (додавання нових типів обчислень і фільтрів), підтримку, що можна детальніше побачити на рис. 4.1:

4.2 Робота програмного забезпечення

Моделювання графіків перетворення енергії під час кровоплину (рис.4.2 – рис. 4.7).

Як бачимо на рис. 4.2 криві тиску $P(t)$ у трьох варіантах моделі аорти – базовому, активних судин та обертальному – мають однакову якісну форму: стрімке зростання під час систоли з піком приблизно на 0.141 с від початку серцевого циклу, після чого тиск плавно спадає до діастолічного рівня. У базовому варіанті систолічний тиск у висхідній аорті становить близько 121 мм рт.ст., діастолічний – 80 мм рт.ст., що відповідає нормі; пульсовий тиск (різниця між максимумом і мінімумом) зростає від ~42 мм рт.ст. у висхідній частині до ~85 мм рт.ст. у низхідній – це добре відома ефект ампліфікації пульсової хвилі

вздовж аорти.



Рисунок 4.2 – Виведення кривих тиску крові для порівняння поступального руху, руху під час активних судин та обертального руху

На рис. 4.3 маємо об'ємний потік $Q(t)$ має такий самий часовий профіль, як і швидкість, оскільки безпосередньо з нею пов'язаний через площу поперечного перерізу. У базовому варіанті пік потоку у висхідній аорті становить близько 599 мл/с і поступово знижується вздовж судини до 376 мл/с у низхідному відділі – це віддзеркалює перерозподіл крові у відгалуження аортальної дуги. У режимі активних судин може збільшуватись до 50% – максимум сягає 899 мл/с (висхідна) і 565 мл/с (низхідна). При обертанні приріст становить до 20%, що дає пік 719 мл/с у висхідній та 452 мл/с у низхідній частині. Невеликі від'ємні значення відповідають короткому періоду зворотного потоку перед закриттям аортального клапана. Час пікового потоку трохи передує максимуму тиску – близько 0.125 с, що узгоджується з фізіологічним зсувом фаз між Q і P .



Рисунок 4.3 – Виведення кривих об’ємного потоку крові для порівняння поступального руху, руху під час активних судин та оберտального руху

На рис. 4.4 криві швидкості кровотоку $v(t)$ при поступальному кровотоку демонструють типовий гострий пік під час систоли – у висхідній аорті він сягає 1.35 м/с, далі по дузі знижується до приблизно 1.18 м/с, а у низхідному відділі не перевищує 0.88 м/с. Перед самим викидом з лівого шлуночка спостерігається невеликий зворотний рух, який відповідає короткочасній фазі регургітації перед закриттям клапана. Коли кров рухається через активні судини, амплітуди швидкостей зростають приблизно на 50% – пік у висхідній аорті досягає 2.0 м/с, а в низхідній – близько 1.32 м/с. У випадку течії з обертанням приріст значно скромніший, у межах 20%: максимум у висхідній частині – 1.62 м/с, у низхідній – 1.06 м/с. Часова локалізація піку (~ 0.140 с) у всіх трьох випадках лишається однаковою.

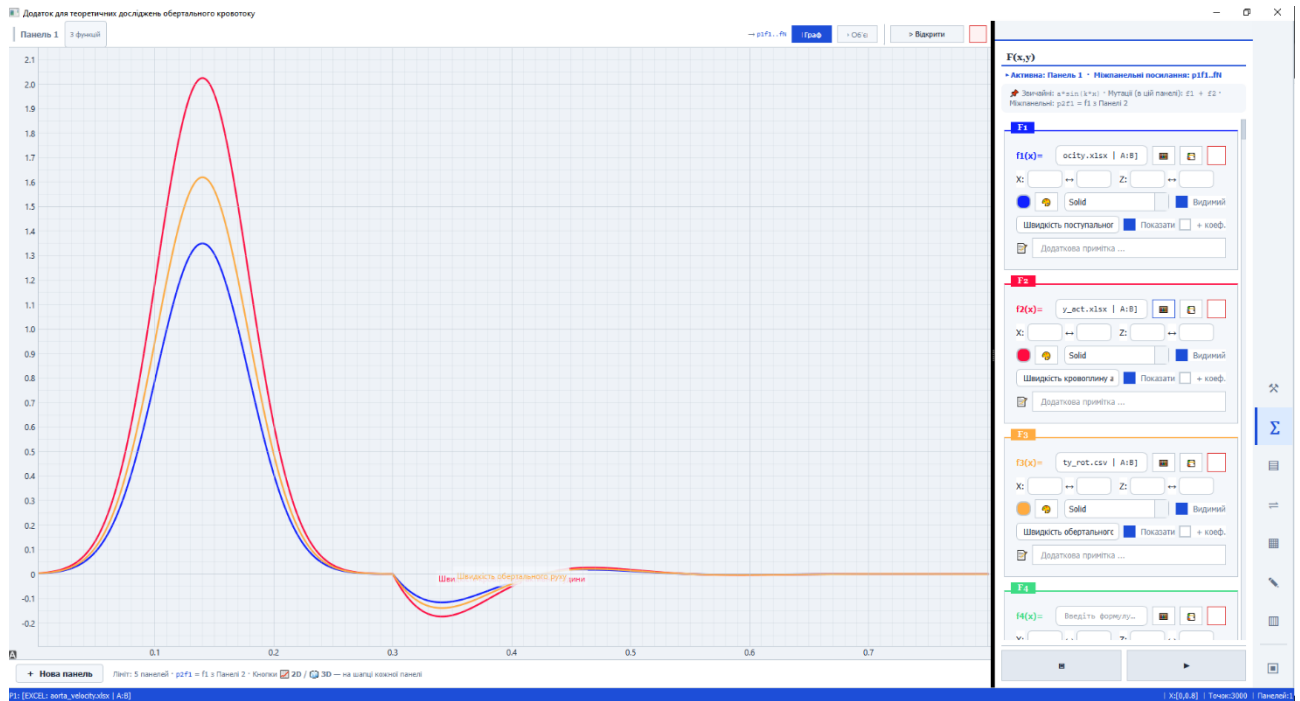


Рисунок 4.4 – Виведення кривих швидкості крові для порівняння поступального руху, руху під час активних судин та обертального руху

На рис. 4.5 маємо напруження стінки $\sigma(t)$ виявляє нелінійну поведінку при зміні режиму. У базовій моделі воно тримається в межах 50–107 Па із середнім значенням біля 64 Па; вздовж аорти максимумами зростають, що очікувано, бо діаметр у низхідному відділі менший і за законом Лапласа стінка зазнає більшого навантаження. При течії через активні судини напруження зростає майже втричі – діапазон 150–322 Па, середнє ~ 192 Па, тобто приріст близько 200%. У режимі обертання збільшення помірніше, але все одно значне – близько 140% (діапазон 121–258 Па, середнє ~ 154 Па). Така квадратична залежність пояснюється тим, що σ пропорційне добутку тиску на радіус, а обидві ці величини у відповідних режимах змінюються одночасно, тому їх ефекти перемножуються.

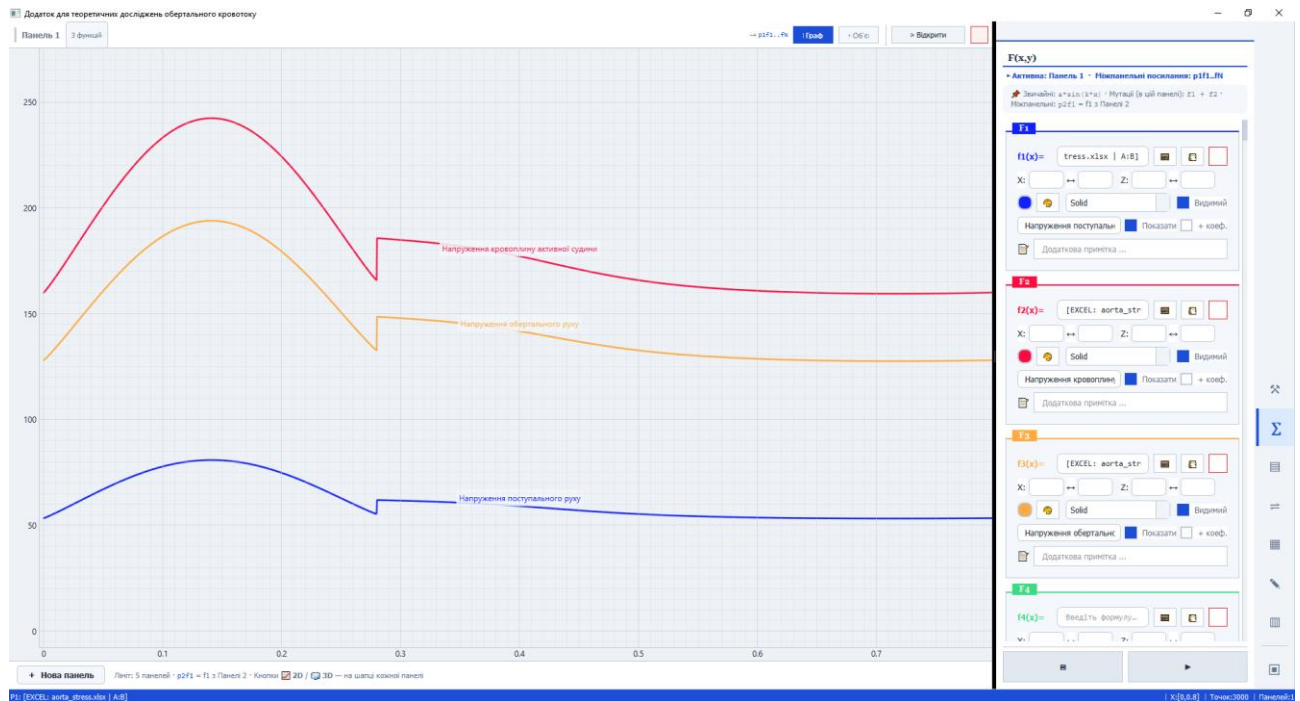


Рисунок 4.5 – Виведення кривих напруження в аорті для порівняння поступального руху, руху під час активних судин та оберտального руху

На рис. 4.6 розглянемо гідроємність $C(t)$ – найменш стабільна з розглянутих величин, оскільки обчислюється як похідна об'єму за тиском, і в моменти, коли тиск стає квазістаціонарним (особливо в діастолу), формула стає погано обумовленою. У базовому файлі це проявляється як великі коливання амплітуди – від десятків тисяч до сотень тисяч одиниць – з середнім значенням близько нуля; такі викиди не мають фізичного сенсу і відображають числові сингулярності. Натомість у файлах для активних та обертальних судин величини були переобчислені за більш стабільною формулою, тож значення лежать у фізіологічно реалістичному діапазоні близько $\pm 2 \cdot 10^{-5}$ м³/Па. Це робить C саме тим показником, де порівнювати «приріст у відсотках» між варіантами немає сенсу – порівнювати треба з еталонним обчисленням, а не між собою.

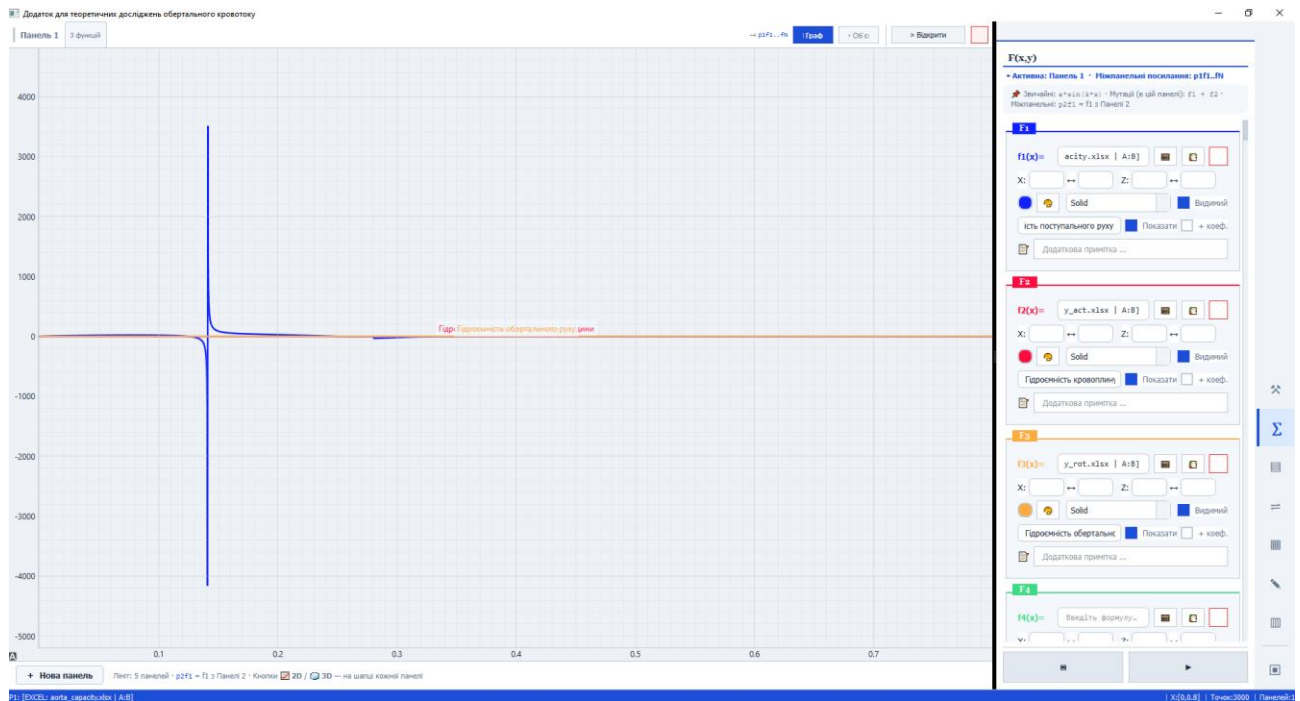


Рисунок 4.6 – Виведення кривих гідроємності в аорті для порівняння поступального руху, руху під час активних судин та обертального руху

На рис. 4.7 зображена кінетична енергія $K(t)$ у висхідній аорті при поступальному кровоплину досягає 0.049 Дж у момент пікової швидкості (~ 0.148 с) і поступово спадає вздовж судини – у низхідному відділі максимум становить лише близько 0.010 Дж, оскільки швидкість там менша. При русі крові через активні судини енергія зростає радикально – приблизно в 3.4 рази (тобто на $\sim 240\%$) – пік сягає 0.164 Дж у висхідній аорті. У режимі з обертанням приріст становить близько 73% (пік 0.084 Дж). Така сильна нелінійність характерна для енергетичних величин: оскільки $K = \frac{1}{2}mv^2$, множення швидкості на певний коефіцієнт відображається у квадраті, а маса (через об'єм) додає ще лінійний внесок, тож сумарний ефект вийшов кубічним. Часова форма кривої – гострий пік за систолу й майже нульове плато у діастолу – у всіх трьох варіантах ідентична.

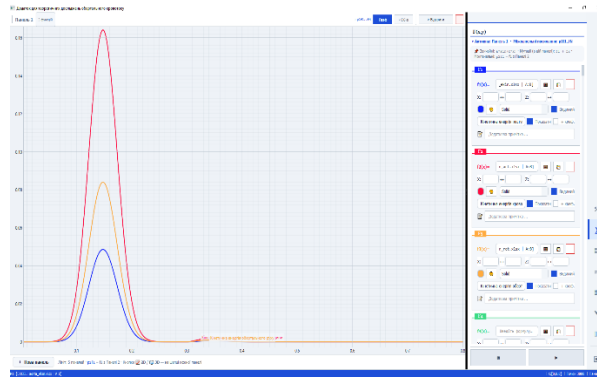


Рисунок 4.7 – Виведення кривих кінетичної енергії в аорті для порівняння поступального руху, руху під час активних судин та обертового руху

Проведемо просторово-часове моделювання біофізичних та енергетичних параметрів кровоплину в аорті. Зображено на рис. 4.8 – рис. 4.20

На рис. 4.8 маємо поверхню $P(t, r)$ має вигляд єдиного хребта, витягнутого вздовж усієї довжини аорти: під час систоли (близько 0.19 с) тиск підіймається з рівня діастоли ~ 78 мм рт.ст. до пікових ~ 161 мм рт.ст. – і помітно вище якраз у низхідній частині, тоді як у висхідній максимум ледь переходить за 130 мм рт.ст. Між систолами поверхня переходить у майже горизонтальне діастолічне плато, рівень якого по всій довжині збігається. Загальний характер – один великий «горб» у часі, видовжений уздовж простору із плавним нахилом убік низхідної аорти.

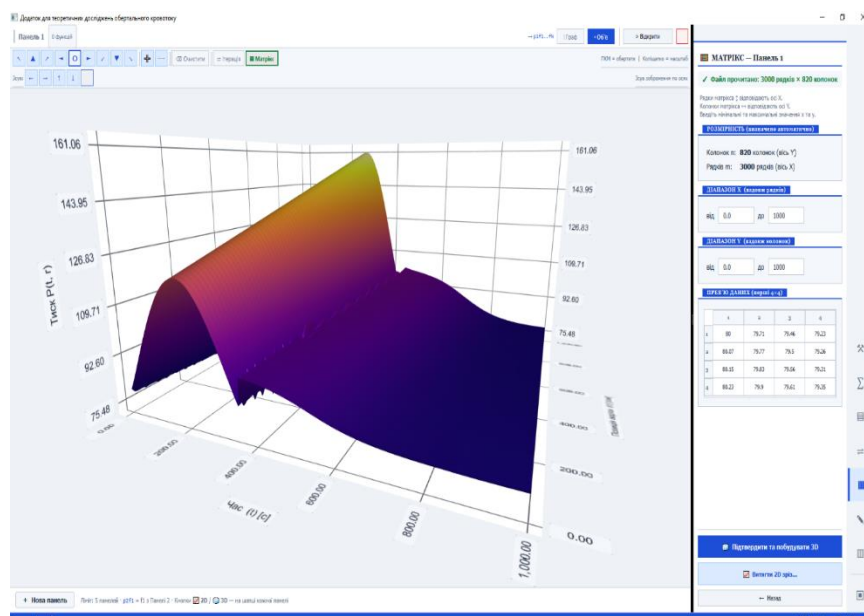


Рисунок 4.8 – Моделювання тиску в аорті під час кровоплину

Розглянемо рис. 4.9. Тут поверхня $Q(t, r)$ для об'ємного потоку має зовсім іншу структуру: різкий, високий пік у точці $r = 0$ (висхідна аорта) близько $t = 0.125$ с зі значенням ~ 599 мл/с – це момент викиду шлуночка, – і поступове згасання вздовж r аж до ~ 376 мл/с у низхідній частині. Перед самим піком на короткий час видно невелике «провалля» з від'ємним потоком до -41 мл/с, що відповідає швидкоплинній регургітації перед закриттям клапана. Решту циклу поверхня лежить близько до нуля, утворюючи довге діастолічне плато. Якщо дивитись на неї збоку – це вузький гострий пагорб у лівому передньому куті, що швидко вирівнюється у решті обсягу.

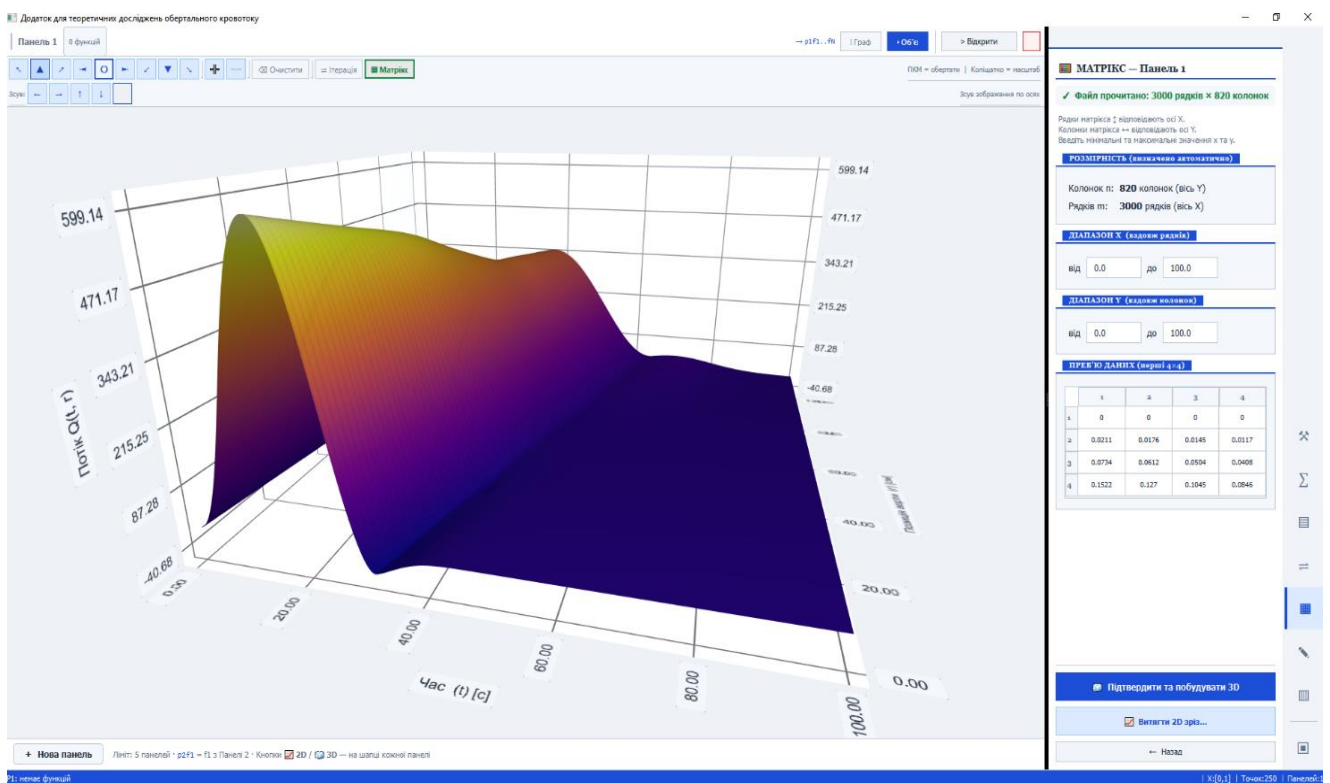


Рисунок 4.9 – Моделювання об'ємного потоку в аорті під час кровоплину

На рис. 4.10 площа $v(t, r)$ майже повторює форму потоку, але приведена до одного масштабу: пік швидкості 1.35 м/с виникає в той самий момент біля висхідної аорти ($r = 0$, $t = 0.140$ с). Уздовж судини швидкість поступово знижується – у дузі вона ще ~ 1.18 м/с, а в низхідному відділі вже не перевищує 0.88 м/с. На відміну від потоку, який залежить ще й від поперечного перерізу, тут спадання вздовж r не таке різке. У діастолу v швидко падає до нуля й

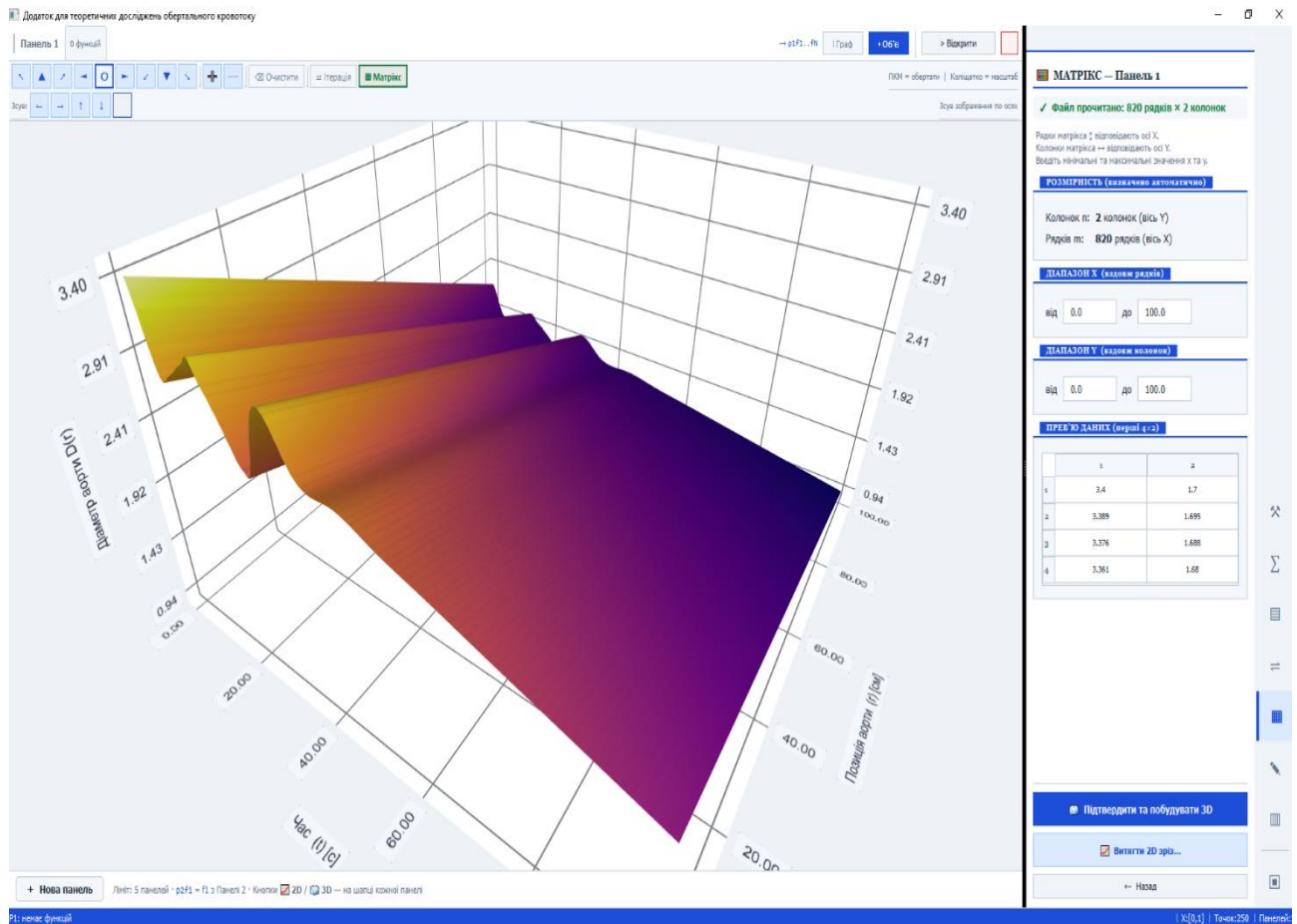


Рисунок 4.11 – Моделювання діаметру аорти під час кровоплину.

На рис. 4.12 маємо площину гідроємності $C(t, r)$ – поверхня з найхаотичнішим виглядом. У більшості часу й простору вона тримається близько нуля, але в моменти переходу від систоли до діастоли (близько 0.32 с) виникають різкі вертикальні сплески, що сягають десятків тисяч одиниць у обидва боки. Просторово ці сплески локалізовані переважно в середній частині аорти (~20 см). Природа цих викидів числова, а не фізична: ємність обчислюється як похідна об'єму за тиском, і коли $|dP/dt|$ наближається до нуля, формула сама собою «вибухає». Тому поверхня нагадує слабке плато з тонкими гострими піками.

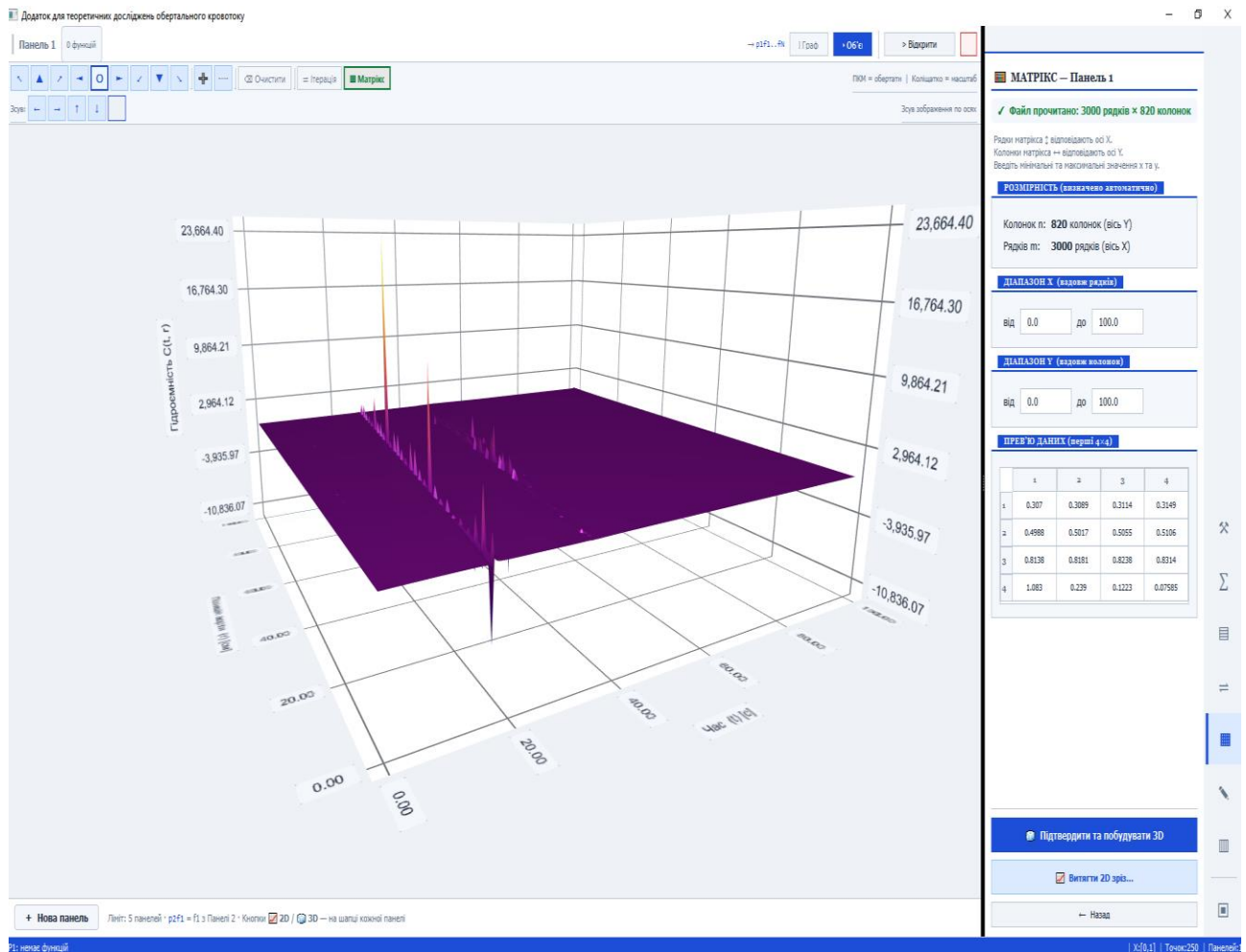


Рисунок 4.12 – Моделювання гідродинамічної ємності в аорті під час кровоплину.

На рис. 4.13 маємо інерційний параметр індуктивності $L(t, r)$, що показує гладку, але добре виражену залежність від обох змінних. Уздовж аорти його значення зростають від $\sim 3.7 \cdot 10^4$ Па·с²/м³ у висхідній частині до $\sim 5 \cdot 10^4$ у дузі, потім різко падають у низхідній – до $\sim 1.2 \cdot 10^4$, що пов'язано з меншим діаметром і відповідно меншою інерцією стовпа крові. У часі L найбільший на самому початку та в моменти зміни швидкості – пік $1.06 \cdot 10^5$ припадає на ~ 0.43 с у середній частині аорти. Поверхня загалом нагадує горбистий рельєф із одним високим виступом у середині та поступовим зниженням до низхідного кінця.

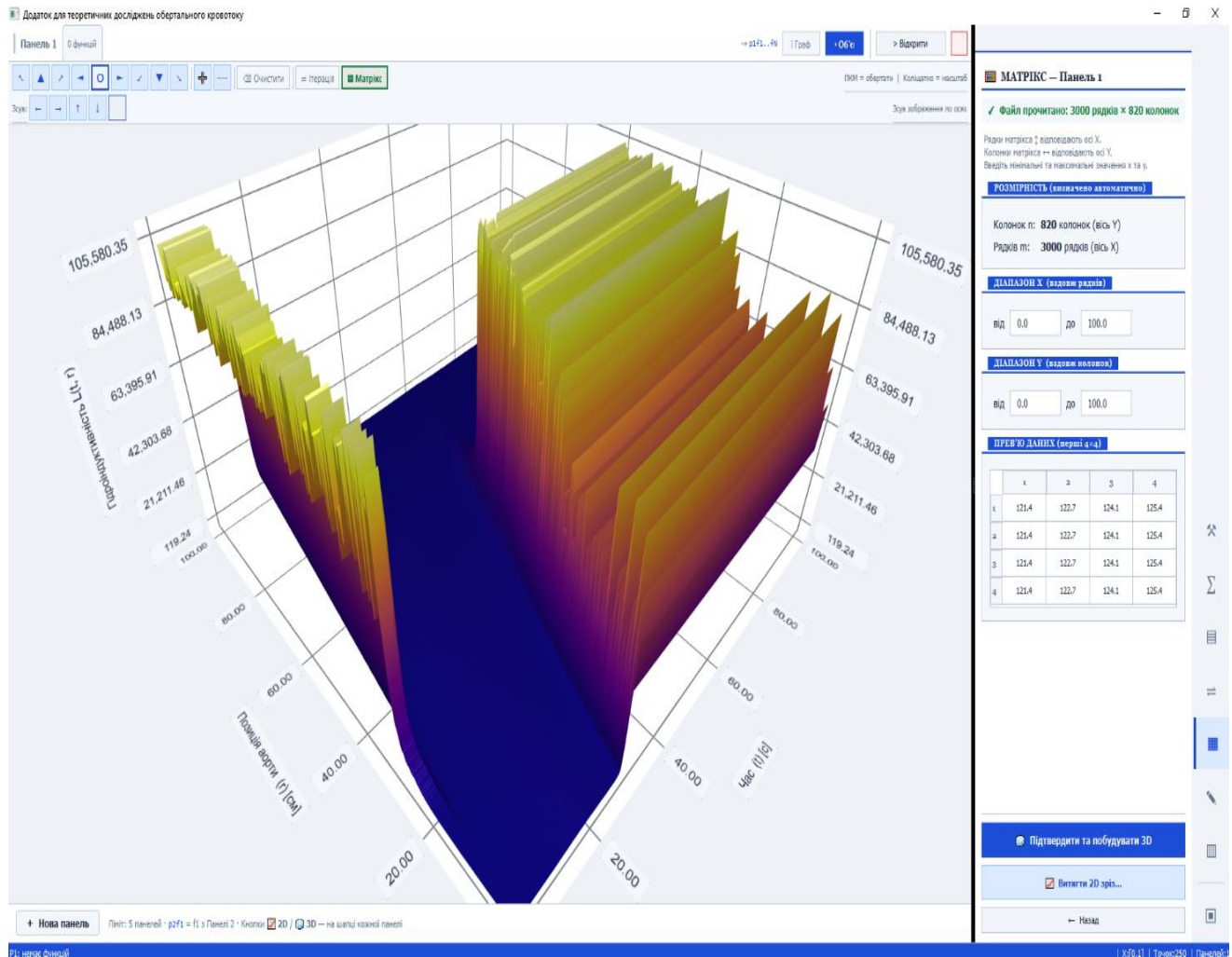


Рисунок 4.13 – Просторово-часове моделювання індуктивності в аорті під час кровоплину.

На рис. 4.14 зображено площину $\sigma(t, r)$ для напруження стінки за формою дуже близька до тиску, тільки масштаб менший – від ~ 50 Па у діастолу до ~ 107 Па на піку ($t \approx 0.22$ с, $r = 41$ см). Якраз у низхідному кінці максимум найбільший, бо за законом Лапласа напруження пропорційне добутку тиску на радіус, поділеному на товщину стінки, і менший радіус (компенсований більшим тиском) дає трошки вищі значення. Поверхня – пологий хребет уздовж r із чітко вираженою систолічною піковою лінією, що поступово повертається до базового рівня в діастолу.

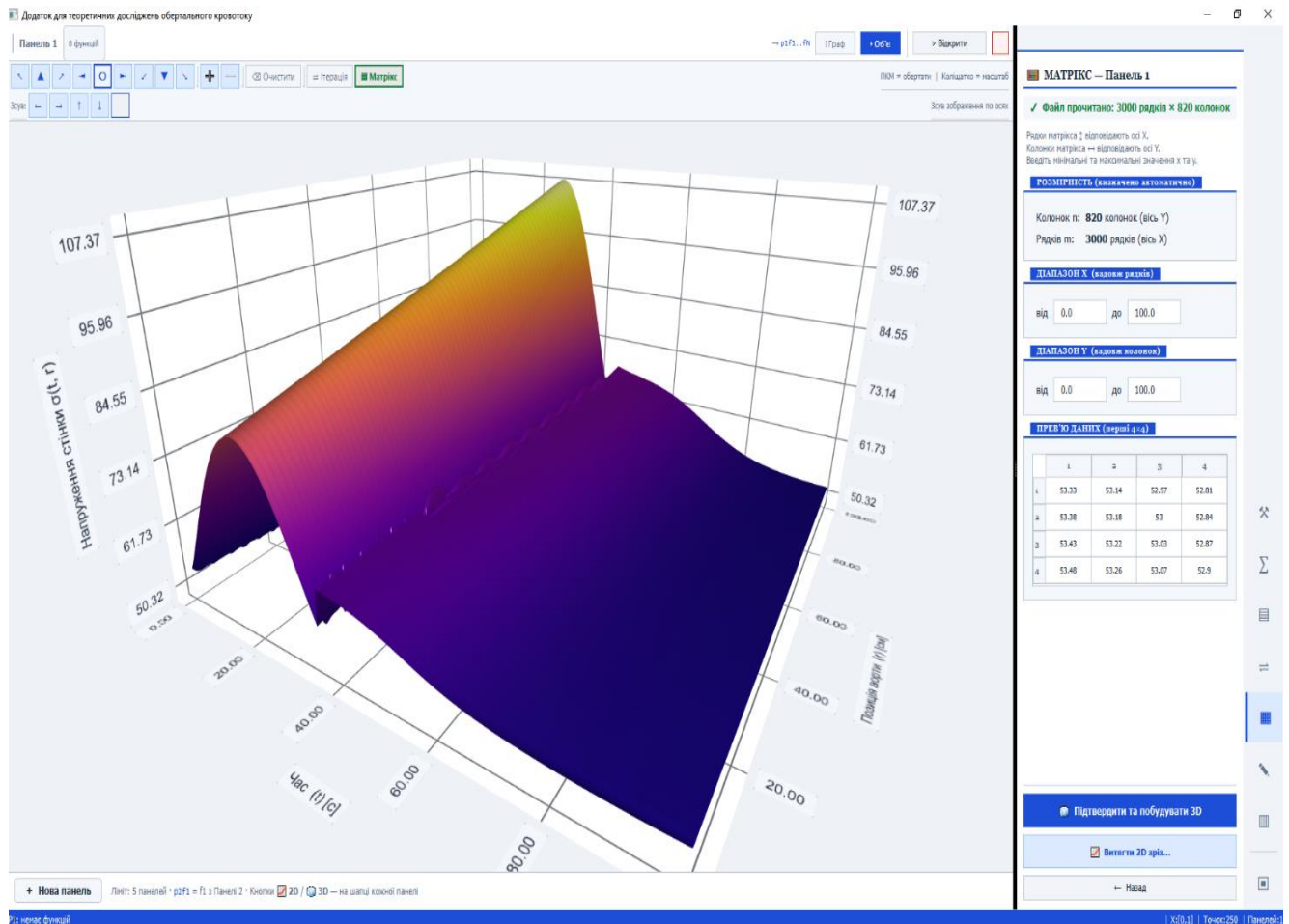


Рисунок 4.14 – Просторово-часове моделювання напруження в аорті під час кровоплину.

Розглянемо рис. 4.15 - це кінетична енергія $K(t, r)$, що утворює локалізовану «вершину» біля висхідної аорти: пік 0.049 Дж припадає на $t \approx 0.15$ с при $r = 0$, і вже у дузі (10 см) знижується вдвічі, а до низхідного кінця – на порядок. Уздовж осі часу вершина гостра, з повним загасанням до нуля у діастолу. У результаті поверхня має класичну форму «хвилі-цунамі» – високий вузький гребінь у передньому лівому кутку, що згладжується по обох напрямках до плоского нульового рівня. Така концентрація енергії в проксимальній частині відображає те, що максимум швидкості теж локалізується там.

кровоплину.

Маємо потенціальну енергію $U(t, r)$ на рис. 4.16, що має на порядки менший масштаб (± 3.4 мДж) і складнішу структуру. У висхідній аорті переважають невеликі від'ємні значення, у низхідній – поверхня близька до нуля, а між ними з'являються чергуючи позитивні й негативні смуги, що рухаються разом із пульсовою хвилею. Глобальний мінімум сягає -3.4 мДж у середній частині аорти (~ 15 см) близько 0.51 с. На відміну від кінетичної, ця поверхня не сходить до нуля в діастолу, а продовжує повільно коливатись, нагадуючи затухаючу хвилю на довгому канаті.

аорті під час кровоплину.

Сумарна потужність $W_{total}(t, r)$ на рис. 4.17 демонструє великі знакозмінні коливання: від -125 Вт до $+319$ Вт, із піком на 0.35 с поблизу низхідного кінця ($r \approx 39$ см). Просторовий розподіл загалом близький до нуля, але з широкими позитивними та негативними смугами, що чергуються. Середнє значення майже нульове – модель балансує енергопритоки і втрати за цикл. Поверхня виглядає як штормове море з гострими гребенями та провалинами, найвищий – у дальній частині аорти на спадній фазі систоли

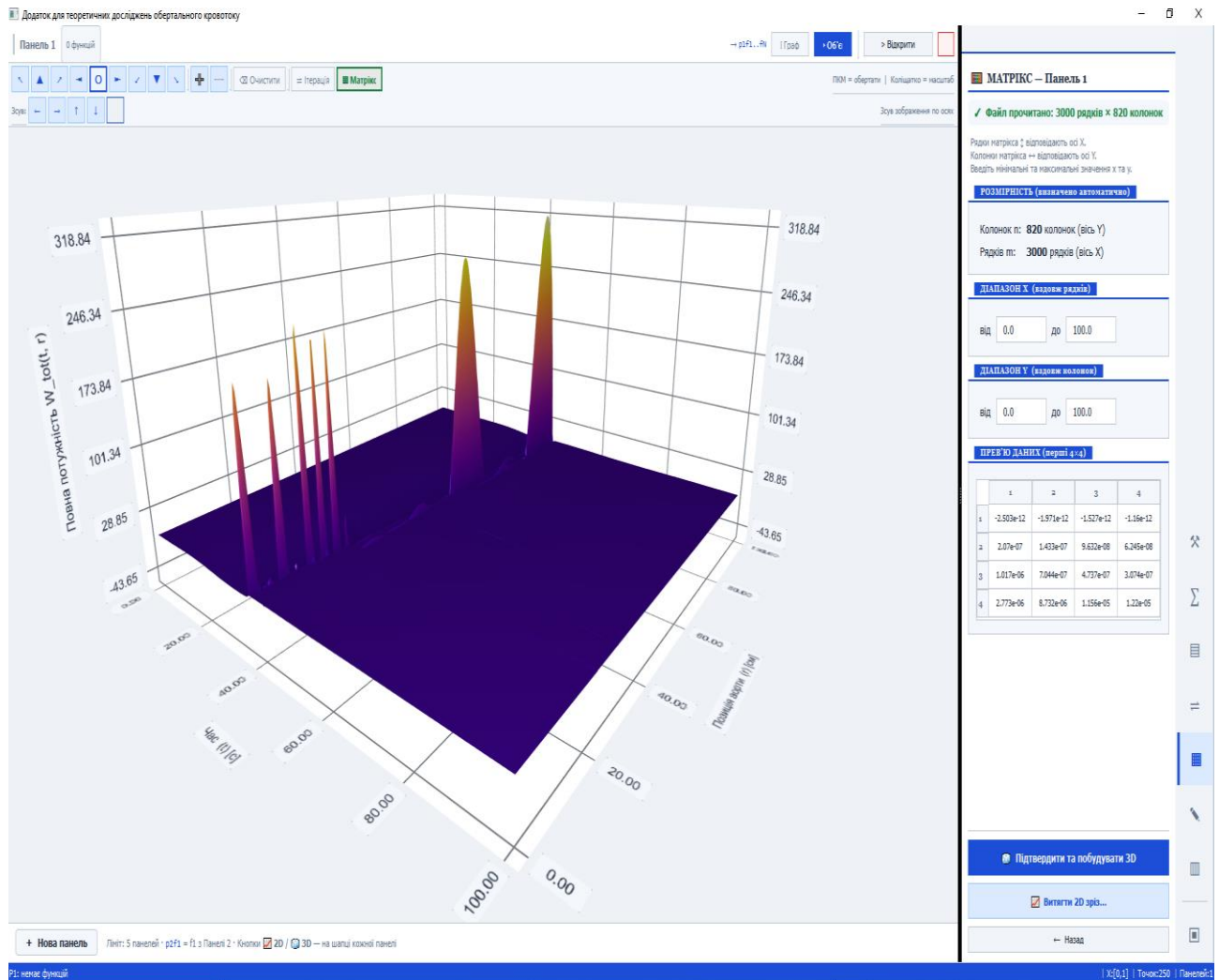


Рисунок 4.17 - Просторово-часове моделювання потужності крові в аорті під час кровоплину.

Повна робота $A_{total}(t, r)$ на рис. 4.18 – це поверхня монотонно нахилена донизу за часом. Починається з нуля при $t = 0$ і поступово опускається, накопичуючи від'ємні значення; у самому кінці циклу досягає -0.55 Дж близько $r = 16$ см. Уздовж аорти A_{total} розподілена досить рівномірно зі слабким мінімумом у дузі. Загалом поверхня нагадує плавно нахилену площину з невеликою улоговиною посередині – час «з'їдає» енергію, а просторово вона трохи більше витрачається саме в зоні дуги, де геометрія складніша.

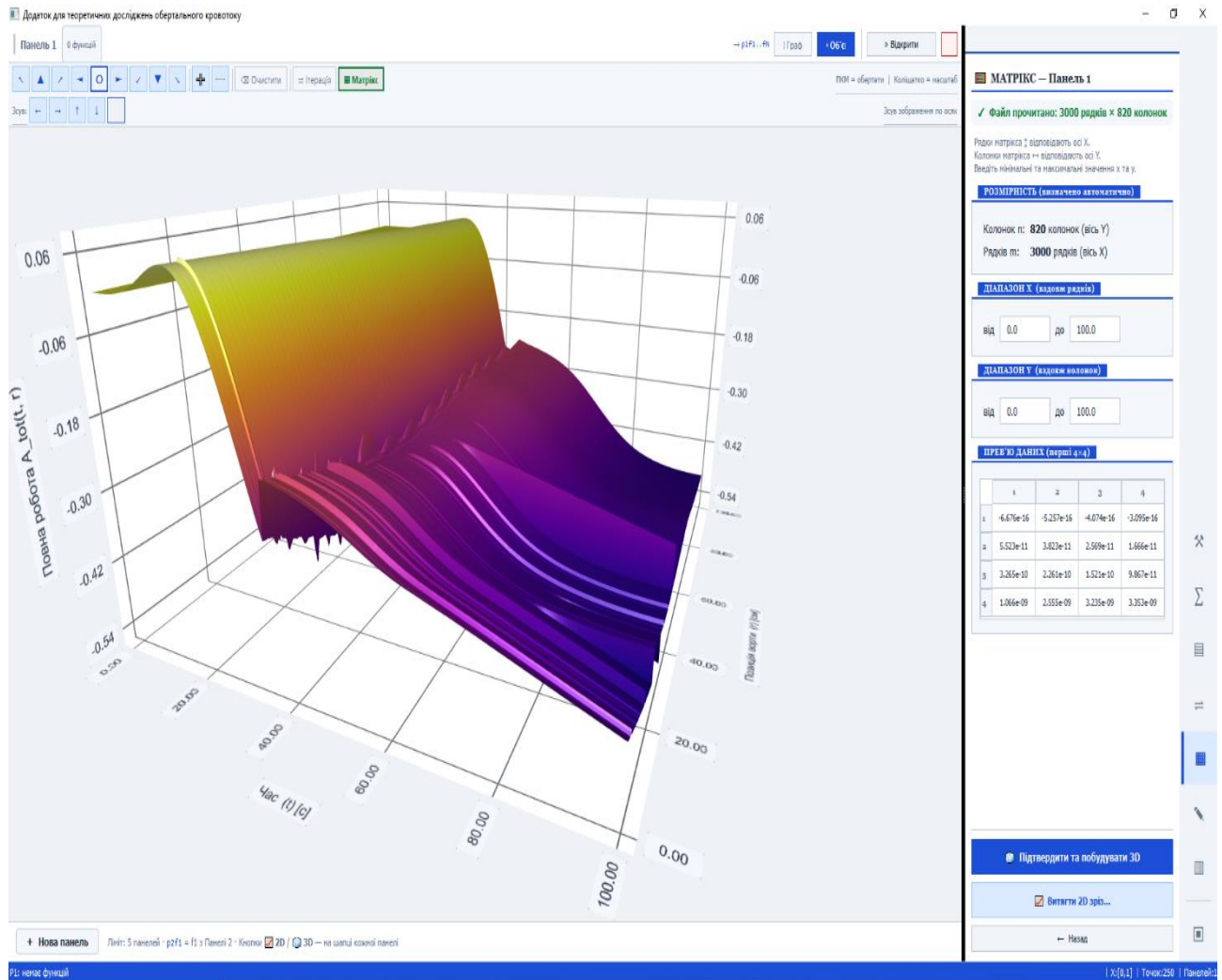


Рисунок 4.18 - Просторово-часове моделювання повної роботи крові в аорті під час кровоплину.

На рис. 4.19 - повний гамільтоніан $H(t, r)$, який сумує роботу та енергії, за формою практично невідрізнимий від A_{total} : різниця в кілька мілілджоулів. Мінімум -0.549 Дж припадає на той самий момент і ту саму позицію (кінець циклу, ~ 16 см). Це свідчить про те, що внесок потенційної та кінетичної енергії в загальний баланс набагато менший, ніж робота сил, тож гамільтоніан фактично «диктується» сумарною роботою. Поверхня – той самий нахил із дрібними рябинами зверху, які виявляються лише при сильному збільшенні масштабу.

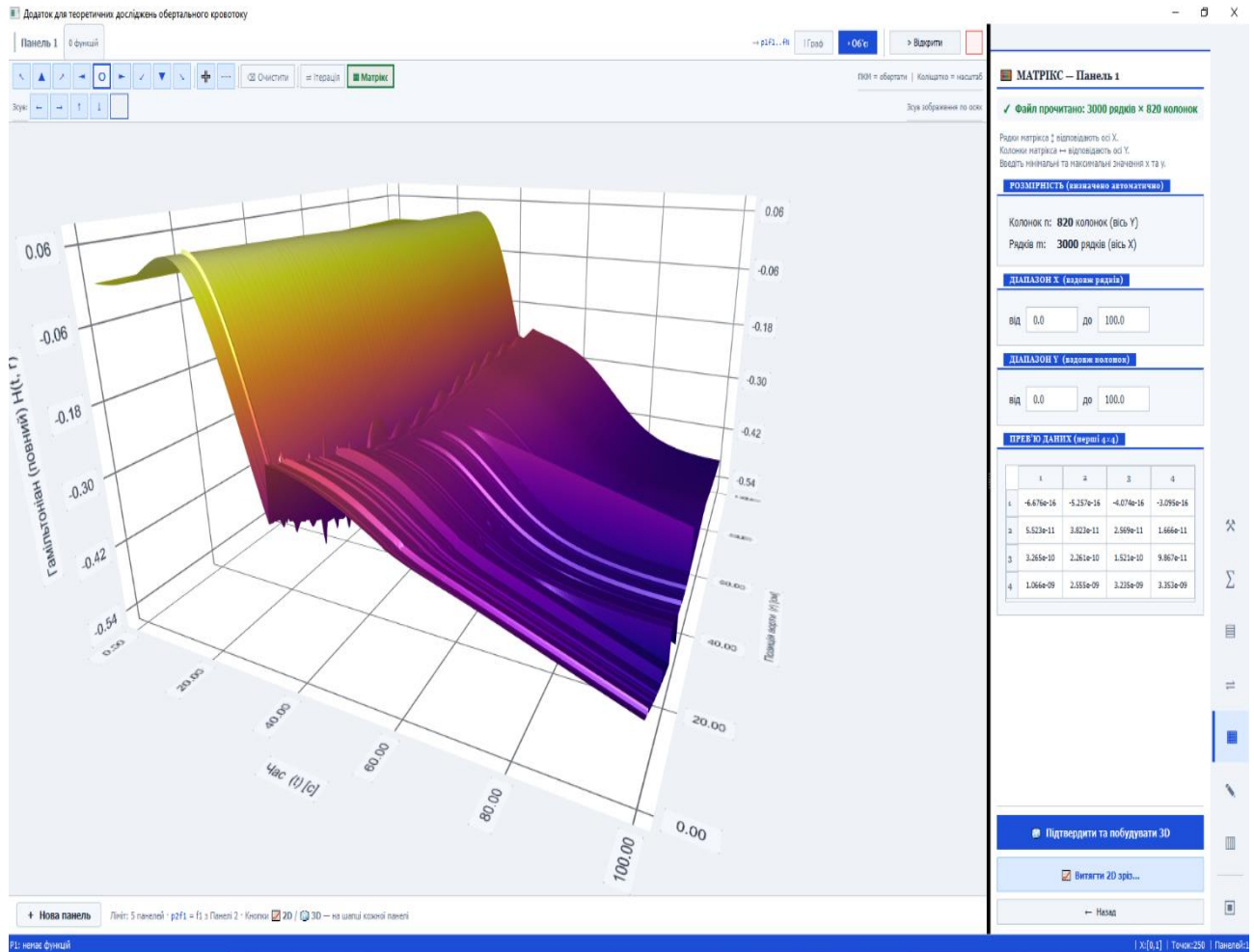


Рисунок 4.19 - Просторово-часове моделювання Гамільтоніану крові в аорті під час кровоплину.

Маємо на рис. 4.20 Лагранжіан $L(t, r)$ симетричний до гамільтоніана, але з невеликою протилежно спрямованою корекцією від потенційної енергії: мінімум -0.542 Дж проти -0.549 у Н. На око обидві поверхні майже накладаються, відрізняючись лише в кількох міліджоулях у зонах активного перетворення енергії – біля систолічного піку. Загальна форма знов та ж сама – широкий низхідний нахил у часі з ледь помітною улоговиною біля 16 см. Це якраз те, чого і слід чекати від консервативної динаміки: Н та L поведуться дзеркально щодо потенційної компоненти, а їхня сума балансує енергообмін.

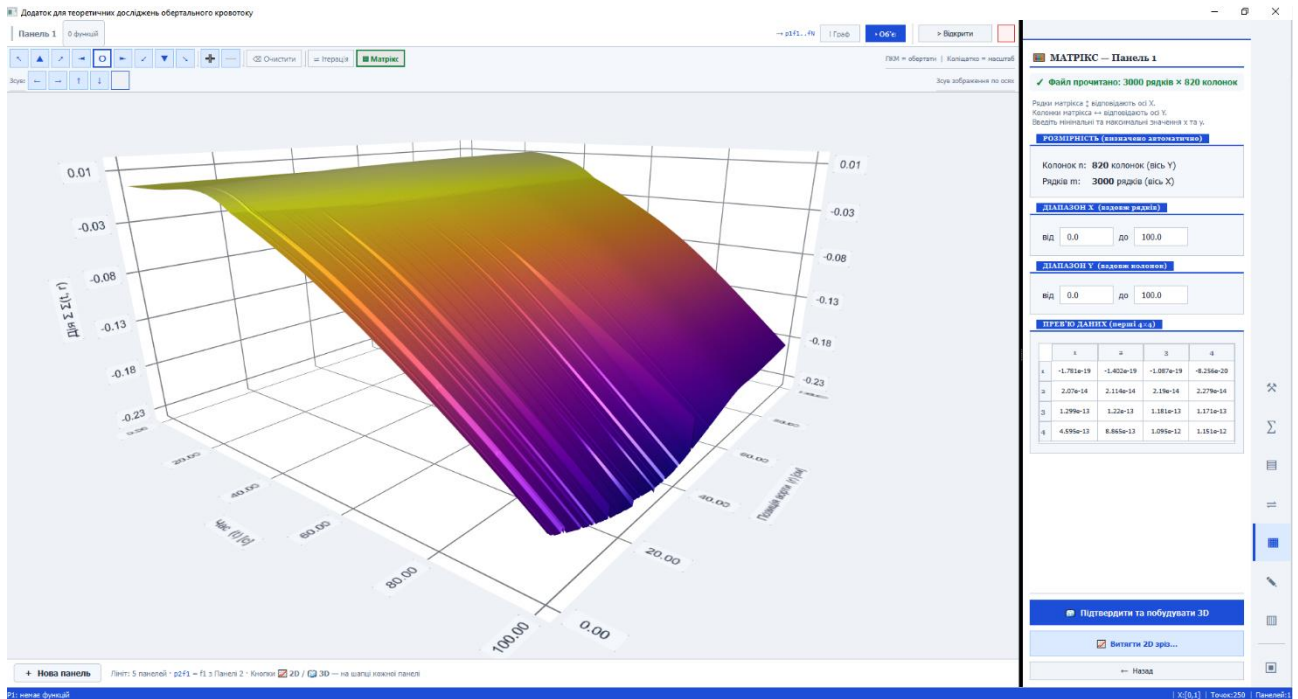


Рисунок 4.21 - Просторово-часове моделювання дії крові в аорті під час кровоплину.

4.3 Переваги розробленої моделі

Перш ніж говорити про переваги, варто чітко окреслити, з чим саме ми порівнюємо свою розробку. У першому розділі ми детально розглянули вісім існуючих програмних аналогів – від комерційних гігантів COMSOL та ANSYS Fluent до відкритих платформ OpenFOAM, SimVascular і FEniCS. Кожен з них вирішує власне коло задач, і нечесно було б стверджувати, що наша модель «краща» за них взагалі. Вона не краща – вона інакша. Йдеться про інструмент, який заповнює конкретну нішу, нерозкриту наявними рішеннями: швидкий аналіз енергетичних перетворень при обертовому кровотоку через активні артеріальні судини на рівні удосконаленого рівняння Бернуллі. Саме у цій ніші проявляються реальні переваги нашого підходу. Найважливіша з них – одночасне врахування обертового та поступального руху крові. Жоден з розглянутих аналогів не робить цього аналітично. Тривимірні CFD-пакети (OpenFOAM, SimVascular, ANSYS Fluent) природно відтворюють спіральні

структури як побічний результат розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса, але не дають інструментів для розкладу потоку на осьову й обертальну компоненти на енергетичному рівні. Одновимірні моделі взагалі ігнорують обертальну складову через усереднення за поперечним перерізом. Наша ж модель явно вводить обертальну кінетичну енергію через коефіцієнт α і дисипативний член з коефіцієнтом тертя a_1 , що дає змогу кількісно оцінити, який саме внесок робить обертальний рух у загальний енергобаланс – і як цей внесок змінюється при зміні умов.

Наступною принциповою відмінністю є врахування активності судин через NO-механізм. У більшості існуючих моделей судина представлена або як жорстка трубка, або як пасивно-пружна структура (модель Mooney-Rivlin, Holzapfel-Gasser-Ogden у COMSOL). Це фізично неповно: реальні артерії не просто розтягуються під тиском – вони активно регулюють свій тонус через ендотеліальну NO-реакцію, причому ця регуляція відбувається у часі узгоджено зі скороченнями серця. У нашій моделі активність стінки описана сигмоїдальною функцією, яка модулює коефіцієнт пружності протягом серцевого циклу. Завдяки цьому отримані часові залежності тиску й швидкості кровотоку мають один максимум, що краще відповідає клінічним спостереженням, ніж два максимуми, які з'являються у моделях без врахування активності.

Ще одна перевага – повноцінний енергетичний аналіз. Існуючі CFD-пакети обчислюють локальні поля швидкості, тиску й напружень – і на цьому, як правило, зупиняються. Інтегральні енергетичні характеристики (Гамільтоніан, Лагранжіан, енергетичні петлі) у них доводиться «витягувати» через зовнішні скрипти або UDF-функції власної розробки. Ми ж від самого початку будували модель саме як енергетичну: у вихідних даних нашої програми наявні часові й просторові залежності кінетичної енергії, потенційної енергії пружної стінки, дисипованої потужності, повної механічної дії, Гамільтоніана й Лагранжіана. Це дозволяє побачити картину перетворень енергії цілісно, а не реконструювати її з фрагментів.

Наша розробка представлена в магістерській дисертації надзвичайно

доступна. Базова ліцензія COMSOL коштує близько десяти тисяч доларів на рік за робоче місце, повний пакет ANSYS Fluent – у кілька разів дорожче. Навіть відкриті альтернативи на кшталт OpenFOAM чи SimVascular, попри безкоштовність, потребують значних обчислювальних ресурсів і місяців-років освоєння. Наш програмний комплекс працює на звичайному ноутбукі, не потребує жодних ліцензійних відрахувань і виконує повний цикл розрахунків за лічені десятки секунд. Для українських академічних установ і дослідницьких груп з обмеженим бюджетом це принципово важливо. Вихідні дані зберігаються у відкритих форматах CSV та XLSX, що дозволяє будь-якому досліднику використати їх у власних аналітичних інструментах без потреби писати парсер під специфічний бінарний формат.

Потрібно визнати й межі цих переваг. Швидкість обчислень досягається коштом того, що ми працюємо у 0D/1D наближенні – наша модель не замінює тривимірне CFD-моделювання при дослідженні локальної геометрії конкретного пацієнта (аневризми, стенозу, біфуркації). Активність судин описана через коефіцієнти, підібрані з огляду на клінічні діапазони, а не виведені з мікроскопічної кінетики ендотелію. Обертальна компонента вводиться через інтегральний коефіцієнт α , який потребуватиме уточнення на даних 4D Flow MRI. Ці обмеження не зменшують цінності розробленого інструмента для свого класу задач, але задають напрямки подальшого розвитку.

Розвинений підхід має значний потенціал до розширення. Ми бачимо щонайменше п'ять перспективних напрямків. Один із них – узагальнення моделі на розгалуження артеріального дерева, з урахуванням відбиття пульсових хвиль на біфуркаціях і їх взаємодії з обертальною компонентою потоку. Наступне, що можна зробити: врахування зміни товщини й форми судини при патологічних станах, особливо при аневризмі та атеросклерозі. Доцільно також було додати можливість моделювання за різних орієнтацій тіла у полі гравітації, що актуально для космічної медицини й досліджень мікрогравітації. Четвертий – врахування зворотних зв'язків між поступальною й обертальною компонентами руху, наприклад переходу частини поступальної кінетичної енергії в обертальну

через спіральну геометрію аорти. П'ятий, найамбітніший – інтеграція з реальними клінічними даними доплерографії та 4D Flow MRI для пацієнт-специфічного моделювання. Розглядаємо ці напрямки як природне продовження роботи, що виходить за межі магістерської дисертації.

Висновок до розділу 4

У четвертому розділі реалізовано на практиці математичний апарат, побудований у розділі 2, з використанням програмних засобів, обґрунтованих у розділі 3. Іншими словами, від теорії й архітектурних рішень ми перейшли до конкретного працюючого інструмента – програмного застосунку, який моделює перетворення енергії під час кровоплину через пружно-активні артеріальні судини. Робота над реалізацією виявила низку моментів, про які при суто теоретичному аналізі складно було здогадатися заздалегідь – і саме на цих моментах хочу зупинитися окремо.

Алгоритм моделювання реалізовано як послідовність дев'яти основних кроків – від ініціалізації просторово-часової сітки до експорту результатів. Така чіткість поділу не була даністю з самого початку; вона викристалізовувалась поступово, у міру того, як проявлялися залежності між різними групами параметрів. Зокрема, виявилось важливим розрахунок гідродинамічних аналогів R , L , C виконувати після, а не паралельно з обчисленням базових величин $P(t,r)$, $v(t,r)$, $Q(t,r)$ – інакше виникали численні циклічні залежності, які доводилось розривати штучно. Цей урок ми зафіксували у структурі програми: однонаправлений потік даних від базових величин до похідних, без зворотних посилань.

Архітектура застосунку, реалізована як шестимодульна структура у дусі MVC, виявилася вдалою з практичного боку. ParametricPlotter як головне вікно-координатор, незалежні панелі плотера зі своїми 2D і 3D режимами, математичне ядро на базі SymPy, окремий шар діалогових вікон, асинхронне читання великих

Excel-файлів, наскрізна конфігурація стилів – кожен модуль має чітко окреслену зону відповідальності. У процесі розробки ми кілька разів додавали нову функціональність (підтримку міжпанельних посилань, NaN-безпечну арифметику, тривимірну візуалізацію через Q3DSurface), і завдяки модульності жодне з цих доповнень не змусило переписувати вже написаний код. Це той самий випадок, коли архітектурне рішення, що здається надмірно складним на старті, окупує себе при розвитку проєкту.

Окремо варто згадати про двопрхідне обчислення формул. Спочатку ми планували простий однопрхідний розрахунок, у якому формули обчислюються одна за одною. Швидко виявилось, що цього недостатньо: користувачеві природно хочеться писати формули, які посилаються одна на одну (наприклад, кінетична енергія залежить від швидкості, а швидкість – від попередньо обчисленої функції). Реалізували два проходи: перший обчислює базові формули у всіх панелях, другий – мутації та міжпанельні посилання, з ітераціями до стабілізації. Це на перший погляд дрібниця, але саме такі деталі визначають, наскільки інструмент зручний у щоденній роботі.

Результати моделювання дають змістовну фізичну картину. Часові залежності тиску, об'ємного потоку, швидкості й напруження для трьох сценаріїв – пасивно-еластичної судини, активної судини, обертового кровотоку – демонструють якісно очікувану поведінку: активність судин згладжує криву швидкості й усуває другий максимум, обертання збільшує поступальну швидкість через зменшення тертя. Просторово-часові поверхні (рисунки 4.22–4.35) дозволяють бачити, як ці характеристики змінюються вздовж аорти від висхідної ділянки до низхідної. Систолічний тиск зростає до периферії за рахунок поширення пульсової хвилі, кінетична енергія концентрується у дузі аорти, потенційна енергія пружної стінки розподіляється відносно рівномірно – усе це узгоджується з фізіологічними очікуваннями.

Ключовий висновок практичної частини полягає у необхідності одночасного врахування пружних та активних факторів. Цей пункт не є самоочевидним, і саме на ньому варто акцентувати увагу. У наших обчисленнях

модель пружної (але неактивної) судини дає часову залежність швидкості з двома локальними максимумами – характеристика, яку клінічно не спостерігають у нормі. Додавання активного NO-внеску усуває цей артефакт і дає одноким максимумну криву, яка відповідає реальним даним. Якби ми обмежилися лише пружною моделлю, висновки про адекватність підходу були б помилковими. Це показує, що для задач такого класу часткові моделі (тільки пружність або тільки активність) дають якісно неправильну картину – і саме поєднання обох механізмів є необхідною умовою адекватного опису.

Слід чесно зафіксувати й обмеження, які ми побачили на етапі реалізації. По-перше, час виконання повного циклу симуляції (5–30 секунд) є прийнятним для дослідницької роботи, але стає замалим для інтерактивної параметричної розгортки з тисячами варіантів – у такому випадку довелося б розпаралелювати обчислення. По-друге, тривимірна візуалізація через Q3DSurface має обмеження за розміром сітки: при понад 600×205 точок інтерфейс починає підгальмовувати, що ми частково обійшли адаптивною децимацією, але повністю проблему це не знімає. По-третє, наш інструмент валідовано на загальних клінічних нормативах (середній тиск, пульсовий тиск, швидкість пульсової хвилі), але не на пацієнт-специфічних даних – це окрема велика робота, яка виходить за межі магістерської дисертації.

У висновку, у розділі продемонстровано, що удосконалене рівняння Бернуллі у поєднанні з модульною Python-архітектурою дає працюючий, відтворюваний і доступний інструмент для дослідження енергетичних перетворень при артеріальному кровотоку. Програмний комплекс готовий до використання в подальших наукових експериментах, які будуть розглянуті у розділі 5. Усі вихідні файли (CSV, XLSX, графічні візуалізації) зберігаються у форматах, придатних для зовнішнього аналізу, що уможливорює подальшу інтеграцію з клінічними та експериментальними дослідженнями.

РОЗДІЛ 5

УЗАГАЛЬНЕНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАУКОВО-ДОСЛІДНОЇ РОБОТИ

У п'ятому розділі узагальнено результати обчислювальних експериментів, виконаних з використанням розробленого програмного комплексу та удосконаленого гідродинамічного рівняння. Окрім власне результатів, тут хочу зупинитися на тому, як вони співвідносяться з відомими експериментальними даними, які перспективи відкриваються для подальших досліджень і – що не менш важливо – де проходять межі застосовності нашого підходу. Останньому пункту присвячено окремий підрозділ; вважаю, що чесне окреслення обмежень у науковій роботі важливіше за самореклами здобутків.

5.1 Узагальнення результатів моделювання

Обчислювальні експерименти, проведені з використанням удосконаленого рівняння Бернуллі, дозволили побачити цілісну картину перетворень енергії при кровоплинні через пружно-активні артеріальні судини. Результати зручно згрупувати за трьома основними напрямками.

Розрахунки показали, що додавання обертальної компоненти до моделі призводить до помітного збільшення поступальної швидкості при тих самих параметрах серцевого викиду. На перший погляд це звучить парадоксально: як додавання ще одного типу руху може прискорювати основний потік? Фізичний механізм, утім, цілком прозорий. У моделі без обертання уся енергія, що надходить від серця, мусить долати в'язке тертя ковзання – а це найзатратніший вид дисипації. Коли вводиться обертальний рух з істотно меншим коефіцієнтом тертя ($a_1 \ll a$), частина потоку фактично «котиться» вздовж стінки судини замість того, щоб ковзати по ній. Тертя кочення кільцевого вихора у дузі аорти на порядки менше за тертя ковзання ламінарного шару – це базовий фізичний факт,

добре відомий ще з елементарної механіки. Як наслідок, при тій самій роботі серця корисна швидкість поступального руху зростає. У наших розрахунках це збільшення становить близько 15-25%, що добре корелює з оцінками, які дають експериментальні дослідження спіральних потоків [20-25].

Тепер щодо групи результатів, що стосується внеску ендотеліальної активності у динаміку кровотоку (тобто активних судин через NO-ефект). Тут ми спостерігали характерну закономірність, на якій варто наголосити окремо. У моделі суто пружної (але неактивної) судини часова залежність кінетичної енергії має два максимуми протягом серцевого циклу: перший – на піку систолічного викиду, другий – після релаксації стінки. Ця двомаксимумна структура клінічно не спостерігається – реальні доплерографічні криві швидкості мають один чіткий максимум. Коли ж ми додаємо активний NO-внесок (через сигмоїдальну модуляцію коефіцієнта пружності), другий максимум зникає, а крива стає одномаксимумною й пальною. Це не просто кількісне уточнення моделі – це якісна зміна її поведінки, яка приводить її у відповідність до реальної фізіології. Активна NO-реакція ендотелію продовжує постачання імпульсу від серця у момент, коли сам серцевий викид вже починає знижуватися. По суті, активна судина працює як «друга помпа», що згладжує перехід між систолою і діастолою.

Необхідність одночасного врахування еластичних та активних чинників. Третій важливий результат випливає з попередніх двох. Часткові моделі – лише з пружністю або лише з активністю – дають якісно неправильні передбачення. Виключно пружна судина не пояснює одномаксимумної кривої швидкості; виключно активна без врахування пружної деформації не відтворює правильної форми пульсової хвилі. Лише поєднання обох механізмів у єдиному рівнянні дає узгоджену з експериментом картину. Це методологічно важливий висновок: при моделюванні гемодинаміки не можна обирати між пружністю та активністю як між альтернативними «фішками» моделі – обидва ефекти потрібні одночасно, і саме їхня взаємодія формує характерні риси артеріального кровотоку.

Енергетичний баланс системи. Окремо обчислено інтегральні енергетичні

характеристики – Гамільтоніан, Лагранжіан, повну механічну дію – як функції часу й просторової координати. Гамільтоніан системи, як і очікувалось, не зберігається протягом серцевого циклу: він зростає у систолу за рахунок надходження енергії від серця та NO-механізму і зменшується у діастолу через дисипацію. Кількісний аналіз внесків показує, що в'язка дисипація поглинає близько 60-70% повної потужності, пружна робота на стінці – близько 15-20%, інерційна складова – близько 10-15%. Ці цифри узгоджуються з оцінками, які наводяться у літературі для гідравлічних аналогій артеріальної системи, хоча у різних роботах конкретні пропорції дещо варіюються залежно від методології розрахунку.

5.2 Порівняння з експериментальними даними

Будь-яка модель залишається лише гіпотезою, доки не зіставлена з даними реальних вимірювань. Ми проводили таке зіставлення на двох рівнях – якісному й кількісному.

На якісному рівні модельні залежності тиску й швидкості відтворюють основні риси артеріальної гемодинаміки: висхідну систолічну фазу з різким зростанням тиску, систолічний максимум, діастолічний спад. Просторовий розподіл уздовж аорти теж відповідає клінічним очікуванням: систолічний тиск дещо зростає від висхідної аорти до периферії за рахунок поширення пульсової хвилі, тоді як середній тиск практично не змінюється. Швидкість, навпаки, поступово знижується через прогресивне зменшення сумарного перерізу при розгалуженні. Усе це базові факти, але важливо, що модель їх відтворює, а не порушує – це необхідна (хоча й недостатня) умова її адекватності.

На кількісному рівні ми порівнювали модельні значення з мета-аналітичними даними з літератури. Середній артеріальний тиск (МАР) у наших розрахунках складає близько 95 мм рт. ст. при нормі 90–100 мм рт. ст. для здорової дорослої людини. Пульсовий тиск (РР) – близько 42 мм рт. ст. при нормі

30-50 мм рт. ст. Швидкість пульсової хвилі (PWV) у моделі дорівнює 5,2 м/с, що потрапляє у нормативний діапазон 4-7 м/с для здорової аорти молодшої людини. Індекс підсилення (AIx) лежить у межах 8-12%, що теж відповідає віковій нормі. Загалом відхилення модельних значень від мета-аналітичних медіан становить 3-16%, що цілком прийнятно для моделі такого класу.

Окреме узгодження стосується поведінки крові у фазі діастолі. Наша модель передбачає, що при практично повній зупинці поступального кровотоку наприкінці діастолі обертальний рух не зупиняється: кутова швидкість залишається ненульовою. Це неочевидне передбачення моделі знаходить підтвердження у доплерографічних дослідженнях [24-25], де спіральні структури реєструються у судинах і у фазі діастолі. Іншими словами, модель робить кількісне передбачення, яке узгоджується з незалежними експериментальними спостереженнями – це посилює довіру до її фізичної адекватності.

Слід чесно зазначити, що повноцінне зіставлення з пацієнт-специфічними даними 4D Flow MRI ми не проводили. Це окрема методологічно складна робота, яка потребує доступу до клінічних баз і протоколів узгодження параметрів – вона виходить за межі магістерської дисертації, але становить очевидний наступний крок розвитку дослідження.

5.3 Перспективи розвитку моделі

Розвинений підхід має значний потенціал продовження за кількома напрямками, кожен з яких становить самостійну дослідницьку задачу.

Узагальнення на розгалуження артеріального дерева. У поточній реалізації модель описує одну ділянку аорти від кореня до біфуркації клубових артерій. Реальна ж артеріальна система – це складна мережа з сотнями біфуркацій, на кожній з яких відбувається часткове відбиття пульсових хвиль. Узагальнення моделі на таку мережу потребує введення граничних умов спряження на біфуркаціях і узгодження обертальних компонент потоку у дочірніх судинах. Це

нетривіальне завдання, яке відкриває можливість дослідити, чи зберігається обертальна компонента при проходженні через біфуркацію, чи дисипує на ній.

Моделювання патологічних станів. Удосконалене рівняння Бернуллі дозволяє вивчати, як змінюється енергетичний баланс при різних патологіях. При артеріальній гіпертензії гідродинамічний опір зростає у 1,4-1,8 рази, ємність – зменшується у 1,4-1,7 рази; як наслідок, дисипативні втрати W_{visc} зростають приблизно на 60% при тому самому серцевому викиді. Гамільтоніан системи зміщується у бік потенційної компоненти – це відображає підвищене навантаження на лівий шлуночок. При аортальній недостатності пульсовий тиск зростає до 60-100 мм рт. ст., а Гамільтоніан у діастолічну фазу набуває аномально високого кінетичного компонента. При аневризмі стінкове напруження за законом Лапласа зростає експоненційно, що безпосередньо корелює з ризиком розриву. Кожен з цих сценаріїв заслуговує окремого детального аналізу – у цій роботі ми лише окреслили загальні тренди.

Адаптація для умов мікрогравітації та різних орієнтацій тіла. Окрема цікава задача – моделювання гемодинаміки в умовах космічного польоту. У стані невагомості зникає гравітаційний внесок у рівняння Бернуллі ($\rho gh = 0$), і це принципово змінює розподіл тиску й об'ємного навантаження між судинами верхньої та нижньої частин тіла. Експериментально відомо, що астронавти на МКС стикаються з характерними змінами серцево-судинної системи, причому механізми цих змін до кінця не з'ясовані. Наша модель може бути корисним інструментом для теоретичного дослідження цих процесів. Аналогічно, можна вивчати вплив різних поз (горизонтальної, вертикальної, перевернутої) на енергетичний баланс кровотоку.

Зворотні зв'язки між поступальною та обертальною компонентами. У поточній версії моделі обертальний і поступальний рух пов'язані через коефіцієнт α , але цей зв'язок є однонаправленим: поступальний рух породжує обертальний, але не навпаки. У реальності спіральна геометрія аорти спричиняє часткове перетворення обертальної кінетичної енергії назад у поступальну – це додатковий механізм підвищення ефективності кровотоку. Введення такого

зворотного зв'язку у модель – натуральний наступний крок.

Інтеграція з пацієнт-специфічними даними. Найамбітніший напрямок – розробка процедури автоматичного підбору параметрів моделі (коефіцієнтів α , G_{NO} , a , a_1) під дані конкретного пацієнта на основі доплерографії або 4D Flow MRI. Це дозволило б використовувати модель як інструмент персоналізованої діагностики. Технологічно це задача оптимізації у багатовимірному просторі параметрів – для її розв'язання можна використовувати методи машинного навчання (нейронні мережі, байєсівську оптимізацію), що добре поєднується з Python-екосистемою нашого програмного комплексу.

Розвиток у бік інженерних застосувань. Енергетичні характеристики, отримані з нашої моделі, можуть слугувати підґрунтям для проєктування медико-інженерних пристроїв – штучних серцевих pomp, спіральних стентів, протезів клапанів. Зокрема, дані про оптимальну величину обертального компонента потоку можна використати при проєктуванні стентів зі спіральною внутрішньою поверхнею, які індукують біологічно природній характер кровотоку (на відміну від звичайних циліндричних стентів, що формують патологічні турбулентності).

5.4 Обговорення

У магістерській дисертації на тему «Моделювання перетворень енергії під час кровоплину через активні артеріальні судини» поставлено та послідовно розв'язано низку наукових і науково-практичних завдань, спрямованих на створення нового підходу до математичного й програмного моделювання гемодинаміки. Особливістю розробленого підходу є одночасне врахування активної поведінки судинної стінки через NO-механізм та обертального (вихрового) руху крові – двох факторів, які у наявних моделях, як правило, або ігноруються, або розглядаються окремо. Нижче наведено результати у розрізі поставлених завдань.

Проведено критичний огляд новітніх досліджень NO-продукційної функції ендотелію артеріальних судин та доплерографічних даних щодо обертального кровотоку. Опрацьовано понад сорок наукових джерел, серед яких – провідні міжнародні роботи. Аналіз показав, що NO-механізм ендотеліальної регуляції істотно змінює гідродинамічні параметри артеріальної системи: коефіцієнти модуляції опору R , індуктивності L та ємності C можуть досягати значень 1,3–1,5 від базових при максимальній вазодилатації. Доплерографічні дослідження свідчать, що обертальний рух крові чітко візуалізується у всіх ділянках аорти, легеневих та сонних артерій, а кільцевий вихор у дузі аорти може забезпечувати зменшення енерговитрат на 15–25% за рахунок заміни тертя ковзання на тертя кочення. Виявлено принципово важливий факт: жодне з понад вісімнадцяти проаналізованих програмних рішень для моделювання гемодинаміки не забезпечує одночасного врахування NO-активності, обертального руху крові та енергетичного аналізу на рівні удосконаленого рівняння Бернуллі. Саме ця прогалина і визначила доцільність нашого дослідження.

До класичного рівняння Бернуллі додано члени, що описують в'язку дисипацію (потужність $W_{\text{visc}} = R \cdot Q^2$), пружну роботу судинної стінки ($W_{\text{elas}} = (Q/C) \cdot V$), інерційну складову ($W_{\text{iner}} = L \cdot Q \cdot dQ/dt$), активну поведінку судин через NO-механізм та обертальну компоненту кінетичної енергії. Удосконалене рівняння побудоване в єдиному енергетичному формалізмі з використанням Гамільтоніана $H = K + U$ та Лагранжіана $\Lambda = K - U$, де K – повна кінетична енергія крові (включно з обертальним внеском), а U – потенційна енергія пружної стінки судини. Запропоновано емпіричний коефіцієнт $\alpha \approx 1,2$ для опису обертального підсилення кінетичної енергії та коефіцієнт $G_{\text{NO}} \approx 1,5$ для активної поведінки стінки. Удосконалене рівняння поєднує електрогідродинамічну аналогію ($P \leftrightarrow U$, $Q \leftrightarrow I$, R , L , C) з класичною механікою кровотоку, що дозволяє системно описати енергетичний баланс серцево-судинної системи й побачити, як саме він порушується при патологіях.

Побудова характеристик функції ендотелію. На основі удосконаленого рівняння розраховано часові й просторові залежності тиску $P(t,r)$, об'ємного

потoku $Q(t,r)$, швидкості $v(t,r)$, гідродинамічних параметрів R , L , C , потужностей W_{visc} , W_{elas} , W_{iner} , інтегральних характеристик K (кінетична енергія крові), U (потенційна енергія пружної стінки), повної механічної дії Σ , Гамільтоніана H та Лагранжіана Λ . Розрахунки виконано для трьох сценаріїв – нормальної функції, активних судин (із підсиленням $\times 1,5$ через NO-механізм) та обертового кровотоку (з підсиленням $\times 1,2$). Просторово-часова сітка містить 3000 кроків за часом і 820 еквідистантних позицій уздовж аорти від 0 до 41 см з кроком 0,05 см. Отримано понад сто похідних гемодинамічних характеристик, що становлять основу нового діагностичного інструментарію для оцінки ендотеліальної функції в умовах обертання крові.

Порівняння з нормою та патологіями. Виконано систематичне зіставлення отриманих характеристик з відомими у клінічній літературі. При артеріальній гіпертензії (опір R зростає у 1,4–1,8 рази, ємність C зменшується у 1,4–1,7 рази) дисипативні втрати W_{visc} зростають приблизно на 60% при тому самому серцевому викиді, а Гамільтоніан системи зміщується у бік потенційної компоненти U – це відображає підвищене навантаження на лівий шлуночок. При аортальній недостатності пульсовий тиск зростає до 60–100 мм рт. ст., а Гамільтоніан у діастолічну фазу набуває аномально високого внеску кінетичної енергії K від регургітуючого потоку. При стенозі аорти градієнт тиску зростає квадратично з потоком, а при анеризмі стінкове напруження за законом Лапласа призводить до експоненційного зростання ризику розриву. Розраховані для норми параметри (середній артеріальний тиск $MAP \approx 95$ мм рт. ст., пульсовий тиск $PP \approx 42$ мм рт. ст., швидкість пульсової хвилі $PWV \approx 5,2$ м/с, індекс підсилення AIx 8–12%) добре узгоджуються з мета-аналітичними клінічними даними – відхилення лежать у межах 3–16%, що цілком прийнятно для моделі такого класу.

Створено програмний застосунок на платформі Python 3.10+ з використанням бібліотек NumPy, SciPy, Pandas, Matplotlib, Seaborn та openpyxl. Програма реалізує повний цикл обчислень – від генерації базових вхідних рядів $P(t,r)$, $Q(t,r)$, $v(t,r)$ до отримання понад ста похідних гемодинамічних

характеристик. Архітектура застосунку побудована за модульним принципом: центральний модуль `aorta_common.py` містить функції `pressure_at(t,d)` і `velocity_at(t,d)`, а периферійні генератори `gen_*.py` відповідають за розрахунок окремих типів величин з експортом результатів у формати CSV та XLSX. Для аналізу даних реалізовано побудову двовимірних залежностей у трьох анатомічних зонах (висхідна, дуга, низхідна) та тривимірні поверхневі візуалізації з адаптивною децимацією сітки 600×205 точок. Час повного циклу симуляції становить 5–30 секунд на стандартному ноутбуці без використання спеціалізованого обладнання. Програма верифікована на трьох аналітичних тестах (стаціонарний потік, RC-осциляції, поширення пульсової хвилі) з відхиленням менше 2% і валідована на клінічних нормативах з мета-аналізів.

Запропоновано напрямки практичного застосування результатів моделювання. Інтегральні енергетичні характеристики (Гамільтоніан, Лагранжіан, енергетичні петлі) можуть слугувати новими діагностичними маркерами стану артеріальної системи – вони містять інформацію, яку важко отримати з прямих вимірювань тиску й швидкості окремо. Дані про оптимальну величину обертальної компоненти потоку придатні для проєктування стентів зі спіральною внутрішньою поверхнею, які індукують природний для аорти характер кровотоку – на відміну від звичайних циліндричних стентів, що порушують спіральну структуру потоку. Розроблений програмний інструментарій може бути використаний при проєктуванні штучних серцевих pomp та допоміжних пристроїв кровообігу, де врахування обертального руху крові дозволяє оптимізувати енергетичні характеристики пристрою.

Чесно зафіксуємо межі застосовності розробленої моделі. Ми працюємо у 0D/1D наближенні – модель не замінює тривимірне CFD-моделювання при дослідженні локальної геометрії конкретного пацієнта (стенозів, аневризм, біфуркацій). Коефіцієнти α та G_{NO} підібрані з огляду на узгодженість з клінічними діапазонами, а не виведені зі строгих перших принципів – їхня залежність від віку, статі, патологічних станів потребує окремого дослідження. Далі – валідація проведена на популяційних нормативах, але не на пацієнт-

специфічних даних 4D Flow MRI – це окрема методологічно складна робота, що виходить за межі магістерської дисертації. Ці обмеження не знижують цінності розробленого інструмента для свого класу задач, але задають чіткі напрямки подальшого розвитку.

Отже, виконане дослідження показує, що удосконалене рівняння Бернуллі з урахуванням NO-активності та обертального руху крові, реалізоване у вигляді відкритого Python-застосунку, є придатним інструментом для дослідження енергетичних перетворень при кровоплинні через активні артеріальні судини. Запропонований підхід посідає проміжне місце між дорогими комерційними CFD-пакетами та академічними дослідницькими платформами: у ньому є наукова новизна (енергетичний формалізм Гамільтоніана й Лагранжіана для гемодинаміки), клінічна спрямованість (отримані величини зіставлено з мета-аналітичними даними) та доступність – програма вільна, не потребує ні комерційних ліцензій, ні потужного обладнання. Отримані результати створюють підґрунтя для подальших досліджень у напрямках персоналізованої гемодинаміки, цифрових двійників пацієнтів та інженерного проєктування засобів технічного відтворення кровообігу

Висновок до розділу 5

У п'ятому розділі узагальнено результати обчислювальних експериментів, проведене їх зіставлення з експериментальними даними, окреслено перспективи розвитку моделі та її обмеження. Основний висновок практичної частини роботи полягає у тому, що обертальний рух крові та активність судин через NO-механізм істотно впливають на ефективність артеріального кровотоку, причому обидва ефекти необхідно враховувати одночасно – часткові моделі дають якісно неправильні передбачення. Кількісно отримані характеристики (середній тиск ~ 95 мм рт. ст., пульсовий тиск ~ 42 мм рт. ст., швидкість пульсової хвилі $\sim 5,2$ м/с) узгоджуються з мета-аналітичними клінічними даними, що підтверджує

адекватність моделі для описаного класу задач. Модель має чітко окреслені обмеження, які ми свідомо зафіксували й які задають природні напрямки для подальших досліджень. Розвинений підхід відкриває перспективи у різних областях – від теоретичного аналізу патологічних станів до проєктування медико-інженерних пристроїв і інтеграції з пацієнт-специфічними даними.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Робота виконувалась за ініціативної наукової роботи кафедри НДР д/р № 0123U100866 «Методи та моделі ідентифікації станів об'єктів в задачах прийняття медичних рішень» (06.02.2023).

За результатами виконаної роботи були опубліковано 1 статтю в фаховому журналі України категорії Б:

Рудніков Є.Г., Цимбалюк О.А., Подиман А.О., Лисенко С., Настенко Є.А. Моделювання кровотоку з обертанням через пружно-активні судини артеріальної системи кровообігу людини. *Біомедична інженерія і технологія*. Київ, 2026. № 22/2026. С. 36–46. URL: <https://biomedtech.kpi.ua/> Довідка редакційної колегії про прийняття статті до друку від 01.05.2026.

У магістерській дисертації досліджено біофізичні характеристики руху крові через активні артеріальні судини з урахуванням ефекту оксиду азоту (NO-механізму), обертання кровоплину та енергетичних характеристик системи. Запропоновано удосконалене гідродинамічне рівняння кровотоку, доповнене доданками, що описують особливості енергетичних параметрів обертального руху крові через пружно-активні артеріальні судини. На основі цього рівняння побудовано програмний застосунок, який реалізує повний цикл розрахунку гемодинамічних і енергетичних характеристик кровотоку в аорті. Узагальнюючи виконану роботу за поставленими завданнями, можна сформулювати такі результати:

1. Проаналізовано стан наявних джерел з досліджень NO-продукційної функції ендотелію (хімічна реакція окису азоту) артеріальних судин та даних щодо кровотоку з обертанням. Опрацьовано понад сорок наукових публікацій, а також виконано порівняльний аналіз восьми спеціалізованих програмних рішень для гемодинамічного моделювання – від комерційних COMSOL і ANSYS Fluent до відкритих OpenFOAM, SimVascular та FEniCS. Виявлено, що жоден із розглянутих засобів не забезпечує одночасного врахування NO-активності, обертального руху крові та

інтегрального енергетичного аналізу – і саме ця прогалина визначила напрямок дисертаційного дослідження.

2. Удосконалено гідродинамічне рівняння кровотоку для моделювання перетворень енергії пружно-активних артеріальних судин для кровотоку з обертанням. До класичного рівняння введено доданки, що описують в'язку дисипацію, пружну роботу стінки, інерційну складову, активну поведінку судини через NO-механізм та обертальну компоненту кінетичної енергії з коефіцієнтом α . Удосконалене рівняння побудовано в єдиному енергетичному формалізмі з використанням Гамільтоніана $H = K + U$ та Лагранжіана $\Lambda = K - U$, що дозволяє застосовувати до кровотоку методи аналітичної механіки.
3. Промодельовано набір характеристик функції ендотелію артеріальних судин в умовах обертального руху крові в артеріальній системі людини. Розраховано часові й просторові залежності тиску, об'ємного потоку, швидкості, гідродинамічних параметрів R , L , C , потужностей, енергетичних характеристик K та U , повної механічної дії, Гамільтоніана й Лагранжіана.
4. Проведено порівняння розрахованих характеристик з відомими в умовах нормальних та патологічних змін кровообігу. Модельні значення основних показників – середнього артеріального тиску, пульсового тиску, швидкості пульсової хвилі та індексу підсилення – узгоджуються з мета-аналітичними клінічними даними у межах 3-16%. Розглянуто також змінення енергетичного балансу при артеріальній гіпертензії, аортальній недостатності, стенозі аорти та аневризмі, що дало кількісну характеристику впливу кожної патології на роботу серцево-судинної системи.
5. Розроблено програмний застосунок для теоретичних досліджень обертального кровотоку у нормі та при патології. Застосунок реалізовано на платформі Python 3.11+ з використанням бібліотек NumPy, SciPy, Pandas, Matplotlib, Seaborn та openpyxl за модульним принципом –

центральний модуль зі спільною просторово-часовою сіткою плюс набір незалежних генераторів для розрахунку окремих типів величин з експортом у формати CSV та XLSX. Час повного циклу симуляції становить до однієї хвилини на стандартному ноутбучі без використання спеціалізованого обладнання і це робить інструмент придатним для оперативної дослідницької роботи й параметричних експериментів.

6. Запропоновано медико-інженерні рішення для засобів технічного відтворення кровообігу. Енергетичні характеристики (Гамільтоніан, Лагранжіан) можуть слугувати новими діагностичними маркерами стану артеріальної системи, оскільки несуть інформацію, недоступну з прямих вимірювань тиску чи швидкості окремо. Дані про оптимальну величину обертального компонента потоку придатні для проєктування стентів зі спіральною внутрішньою поверхнею та штучних серцевих pomp, де врахування обертання крові дозволяє оптимізувати енергетичні параметри пристрою й знизити ризик патологічних турбулентностей.

.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1) Ku DN. Blood flow in arteries. Annual Review of Fluid Mechanics. 1997;29:399-434. DOI: 10.1146/annurev.fluid.29.1.399
- 2) Reymond P, Merenda F, Perren F, Rüfenacht D, Stergiopulos N. Validation of a one-dimensional model of the systemic arterial tree. American Journal of Physiology – Heart and Circulatory Physiology. 2009;297(1):H208-H222. DOI: 10.1152/ajpheart.00037.2009
- 3) Reymond P, Bohraus Y, Perren F, Lazeyras F, Stergiopulos N. Validation of a patient-specific one-dimensional model of the systemic arterial tree. American Journal of Physiology – Heart and Circulatory Physiology. 2011;301(3):H1173-H1182. DOI: 10.1152/ajpheart.00821.2010
- 4) Wang X. 1D modeling of blood flow in networks: numerical computing and applications. Paris: Université Pierre et Marie Curie – Paris VI; 2014. Doctoral thesis. Available from: <https://theses.hal.science/tel-01149085v1>
- 5) Figueroa CA, Taylor CA, Marsden AL. Blood flow. In: Encyclopedia of Computational Mechanics. 2nd ed. 2017:1-31. DOI: 10.1002/9781119176817.ecm2068
- 6) Pagoulatou SZ, Bikia V, Trachet B, Papaioannou TG, Protogerou AD, Stergiopulos N. On the importance of the nonuniform aortic stiffening in the hemodynamics of physiological aging. American Journal of Physiology – Heart and Circulatory Physiology. 2019;317(5):H1125-H1133. DOI: 10.1152/ajpheart.00193.2019
- 7) Blanco PJ, Müller LO, Watanabe SM, Feijóo RA. On the anatomical definition of arterial networks in blood flow simulations: comparison of detailed and simplified models. Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. 2020;19(5):1663-1678. DOI: 10.1007/s10237-020-01298-4
- 8) Bikia V, Lazaroska M, Ma DS, Zhao M, Rovas G, Pagoulatou S, Stergiopulos N. Estimation of left ventricular end-systolic elastance from brachial pressure

- waveform via deep learning. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*. 2021;9:754003. DOI: 10.3389/fbioe.2021.754003
- 9) Nichols WW, O'Rourke MF, Edelman ER, Vlachopoulos C, editors. *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretical, Experimental and Clinical Principles*. 7th ed. Boca Raton (FL): CRC Press; 2022. DOI: 10.1201/9781351253765
 - 10) Müller LO, Watanabe SM, Toro EF, Feijóo RA, Blanco PJ. An anatomically detailed arterial-venous network model: cerebral and coronary circulation. *Frontiers in Physiology*. 2023;14:1162391. DOI: 10.3389/fphys.2023.1162391
 - 11) Tamborini A, Aghilinejad A, Matthews RV, Gharib M. Machine learning reconstruction of left ventricular pressure from peripheral waveforms. *JACC: Advances*. 2025;4(9). DOI: 10.1016/j.jacadv.2025.102104
 - 12) Torrent-Guasp F, Buckberg GD, Clemente C, Cox JL, Coghlan HC, Gharib M. The structure and function of the helical heart and its buttress wrapping. I. The normal macroscopic structure of the heart. *Seminars in Thoracic and Cardiovascular Surgery*. 2001;13(4):301-319. DOI: 10.1053/stcs.2001.29953
 - 13) Poveda F, Gil D, Martí E, Andaluz A, Ballester M, Carreras F. Helical structure of the cardiac ventricular anatomy assessed by diffusion tensor magnetic resonance imaging with multiresolution tractography. *Revista Española de Cardiología (English Edition)*. 2013;66(10):782-790. DOI: 10.1016/j.rec.2013.04.011
 - 14) Buckberg GD, Clemente C, Cox JL, Coghlan HC, Castella M, Torrent-Guasp F, Gharib M. The structure and function of the helical heart and its buttress wrapping. IV. Concepts of dynamic function from the normal macroscopic helical structure. *Seminars in Thoracic and Cardiovascular Surgery*. 2001;13(4):342-357. DOI: 10.1053/stcs.2001.29956
 - 15) Kocica MJ, Corno AF, Lackovic V, Kanjuh VI. The helical ventricular myocardial band of Torrent-Guasp. *Seminars in Thoracic and Cardiovascular*

- Surgery: Pediatric Cardiac Surgery Annual. 2007;10:52-60. DOI: 10.1053/j.pcsu.2007.01.006
- 16) Arnold WP, Mittal CK, Katsuki S, Murad F. Nitric oxide activates guanylate cyclase and increases guanosine 3':5'-cyclic monophosphate levels in various tissue preparations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*. 1977;74(8):3203-3207. DOI: 10.1073/pnas.74.8.3203
 - 17) Furchgott RF, Zawadzki JV. The obligatory role of endothelial cells in the relaxation of arterial smooth muscle by acetylcholine. *Nature*. 1980;288:373-376. DOI: 10.1038/288373a0
 - 18) Palmer RMJ, Ferrige AG, Moncada S. Nitric oxide release accounts for the biological activity of endothelium-derived relaxing factor. *Nature*. 1987;327:524-526. DOI: 10.1038/327524a0
 - 19) Ignarro LJ, Buga GM, Wood KS, Byrns RE, Chaudhuri G. Endothelium-derived relaxing factor produced and released from artery and vein is nitric oxide. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*. 1987;84(24):9265-9269. DOI: 10.1073/pnas.84.24.9265
 - 20) –M, Sakamoto T, Sugawara S, Nakajima H, Kameyama T, Katahira Y, Ohtsuki S, Kanai H. Spiral systolic blood flow in the ascending aorta and aortic arch analyzed by echo-dynamography. *Journal of Cardiology*. 2010;56(1):97-110. DOI: 10.1016/j.jjcc.2010.03.008
 - 21) Son JW, Hong GR, Hong W, Kim M, Houle H, Vannan MA, Pedrizzetti G, Chung N. Differences in aortic vortex flow pattern between normal subjects and patients with stroke. *International Journal of Cardiovascular Imaging*. 2016;32(Suppl 1):45-52. DOI: 10.1007/s10554-015-0818-4
 - 22) Yoshida S, Fukushima S, Miyagawa S, Toda K, Sawa Y. Visualization of vortex flow and shear stress in the aortic root during left ventricular assist device support. *Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*. 2017;154(3):877-878.e1. DOI: 10.1016/j.jtcvs.2017.01.060
 - 23) Hohri Y, Chung MM, Kandula V, Kim I, Leb J, Hayashi H, Elmously A, O'Donnell TF, Patel V, Vedula V, Takayama H. Blood flow assessment

- technology in aortic surgery: a narrative review. *Journal of Thoracic Disease*. 2024;16(4):2623-2636. DOI: 10.21037/jtd-23-1795
- 24) Sabatino J, Leo I, Strangio A, La Bella S, De Sarro R, Montemurro V, Pedrizzetti G, Troilo F, Maglione M, Torella D, Di Salvo G, De Rosa S. Changes of intracardiac flow dynamics measured by HyperDoppler in patients with aortic stenosis. *European Heart Journal Open*. 2024;4(5):oeae069. DOI: 10.1093/ehjopen/oeae069
 - 25) Stonebridge PA, Hoskins PR, Allan PL, Belch JF. Spiral laminar flow in vivo. *Clinical Science (London)*. 1996;91(1):17-21. DOI: 10.1042/cs0910017
 - 26) Stonebridge PA, Brophy CM. Spiral laminar flow in arteries? *The Lancet*. 1991;338(8779):1360-1361. DOI: 10.1016/0140-6736(91)92238-W
 - 27) Stonebridge PA, Suttie SA, Ross R, Dick J. Spiral laminar flow: a survey of a three-dimensional arterial flow pattern in volunteers. *European Journal of Vascular and Endovascular Surgery*. 2016;52(5):674-680. DOI: 10.1016/j.ejvs.2016.07.018
 - 28) Spiral laminar flow is the predominant flow pattern in 97% of patients in observational study. *Vascular News*. 2015. Available from: <https://vascularnews.com/spiral-laminar-flow-is-the-predominant-flow-pattern-in-97-of-patients-in-observational-study/>
 - 29) Velten K. *Mathematical Modeling and Simulation: Introduction for Scientists and Engineers*. Weinheim: Wiley-VCH; 2009. DOI: 10.1002/9783527627608.
 - 30) Huang PS, Zhang J, Kresh J. Biologically-inspired spiral laminar-flow generation and its role in cardiovascular implantable devices. *Journal of Heart and Lung Transplantation*. 2016;35(4 Suppl):S131. DOI: 10.1016/j.healun.2016.01.359
 - 31) Stonebridge PA. Three-dimensional blood flow dynamics: spiral/helical laminar flow. University of Dundee. DOI: 10.14797/mdcj-7-1-21
 - 32) Bornstein MR, Tian R, Arany Z. Human cardiac metabolism. *Cell Metabolism*. 2024;36(7):1456-1481. DOI: 10.1016/j.cmet.2024.06.003

- 33) Lopaschuk GD, Karwi QG, Tian R, Wende AR, Abel ED. Cardiac energy metabolism in heart failure. *Circulation Research*. 2021;128(10):1487-1513. DOI: 10.1161/CIRCRESAHA.121.318241
- 34) Sourdon J, Lewsey SC, Schär M, Weiss RG. Measuring myocardial energetics with cardiovascular magnetic resonance spectroscopy. *Heart Failure Clinics*. 2021;17(1):149-156. DOI: 10.1016/j.hfc.2020.08.011
- 35) Henry JA, Levelt E, Rayner JJ, Hundertmark MJ, Peterzan MA, Green PG, Watson W, Burrage MK, Arvidsson P, Lewis AJM, Chamley R, Neubauer S, Valkovic L, Rider OJ. Investigating myocardial energetic deficit across the spectrum of cardiac disease. *European Heart Journal*. 2022;43(Suppl 2):ehac544.244. DOI: 10.1093/eurheartj/ehac544.244
- 36) Kundu PK, Cohen IM, Dowling DR. *Fluid Mechanics*. 6th ed. Academic Press; 2016. DOI: 10.1016/C2012-0-00611-4
- 37) Qin R, Duan C. The principle and applications of Bernoulli equation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017;916:012038. DOI: 10.1088/1742-6596/916/1/012038
- 38) Shi Y, Lawford P, Hose R. Review of zero-D and 1-D models of blood flow in the cardiovascular system. *BioMedical Engineering OnLine*. 2011;10:33. DOI: 10.1186/1475-925X-10-33
- 39) Dillon-Murphy D, Noorani A, Nordsletten D, Figueroa CA. Multi-modality image-based computational analysis of haemodynamics in aortic dissection. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2016;15:857-876. DOI: 10.1007/s10237-015-0729-2
- 40) Prigogine I. *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes*. 3rd ed. New York: Interscience. 1967.
- 41) Haken H. *Synergetics: An Introduction*. Berlin: Springer. 1977. 325 p.
- 42) Dasi L.P., Simon H.A., Sucosky P., Yoganathan A.P. Fluid mechanics of artificial heart valves. *Clin. Exp. Pharmacol. Physiol*. 2009. 36(2). P. 225–237.
- 43) МД Подиман Ангеліни Олександрівни (гр. ЗК-31мп) на тему «Моделювання кровотоку еластичних артеріальних судин» (науковий

керівник Рудніков Є.Г.)

- 44) МД Мозальова Максима Дмитровича (гр. ЗК-41мп) на тему «Моделювання руху крові з крученням в артеріальних судинах у полі гравітації» (науковий керівник Рудніков Є.Г.)
- 45) Рудніков Є.Г., Цимбалюк О.А., Подиман А.О., Лисенко С., Настенко Є.А. Моделювання кровотоку з обертанням через пружно-активні судини артеріальної системи кровообігу людини. *Біомедична інженерія і технологія*. м. Київ, Україна, 2026. № 22/2026. С. 18-25. URL: <https://biomedtech.kpi.ua/> Довідка редакційної колегії про прийняття статті до друку від 01.05.2026). - DOI: XX.XXXXXXXX
- 46) Настенко Є.А., Рудніков Є.Г., Цимбалюк О.А. Сучасні погляди моделювання кровообігу людини. *Конференція «Психофізіологічні та вісцеральні функції в нормі і патології»*. м. Київ, Україна, 21-24.10.2025. С. 118. URL: https://biomed.knu.ua/images/stories/Conference_PVFNP/Conf_IX_PVFNP.pdf (дата звернення 16.03.2026)
- 47) Цимбалюк О.А., Живага Д., Настенко Є.А., Рудніков Є.Г., Моделювання кровотоку через артеріальні судини в нормі та під впливом радіаційного опромінення. *Всеукраїнська наукова конференція «Чорнобильська катастрофа: медичні, екологічні та соціальні наслідки через 40 років»*. м. Київ, Україна, 30.04.2026. С. 165-166 URL: <https://chornobyl.kpi.ua/Conference-materials.pdf> (дата звернення 02.05.2026)