МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

# ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

## ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою
програмою «Технології штучного інтелекту у біомедичних системах»
спеціальності F3 «Комп'ютерні науки»*

**Укладачі: А. А. Шумська, І. М. Кузнєцов**

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2026

УДК 510.6

Укладачі: *Алла Антонівна Шумська,* к.ф.-м. наук, доц.
*Ігор Миколайович Кузнєцов,* к.ф.-м. наук, ст. викл.

Рецензент *Стьопочкіна Ірина Валеріївна,* канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор *Яковлєв Сергій Володимирович,* канд. техн. наук, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*
*(протокол № 6 від 03.04.2026 р.)*
*за поданням Вченої ради Навчально-наукового Фізико-технічного інституту*
*(протокол № 4 від 30.03.2026 р.)*

Дискретна математика: Збірник завдань до практичних занять [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спец. F3 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: А. А. Шумська, І. М. Кузнєцов,. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,45 Мбайт). – Київ : КПІ імені Ігоря Сікорського, 2026. – 43 с.

Метою навчального видання "Дискретна математика" (збірник завдань для практичних занять) є допомога студентам у закріпленні та поглибленому розумінні означень, теоретичних положень та методів вказаної навчальної дисципліни. Навчальне видання складається з п'яти розділів, у яких підібрано найбільш типові задачі з дисципліни "Дискретна математика". Кожний розділ містить приклади розв'язання найбільш типових задач. Задачі кожного розділу скомпоновані у три групи, позначені літерами *A, B* та *C*. Задачі групи *A* рекомендується використовувати для аудиторної роботи студентів, групи *B* – для домашньої роботи. Задачі групи *C* є додатковими та більш складними. У першому розділі підібрані задачі з теми "Метод математичної індукції". Другий розділ містить задачі з теми "Множини", третій – з теми "Відношення", четвертий – з теми "Логіка висловлювань", п'ятий – з теми "Булеві функції".

УДК 510.6

Реєстр. № НП 25/26-281. Обсяг 2,1 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026

**Зміст**


1. Метод математичної індукції . . . . . . . . . . . . . . . . .. . . . . . . . . . . . . . . . 4

2. Множини. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .6

3. Відношення. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

4. Логіка висловлювань. . . . . . . . . . . . . .. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .25

5. Булеві функції . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .. . . . . . . . . . . . . . . . 33

Список використаної літератури . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42

## 1. Метод математичної індукції

Метод математичної індукції – це один з найбільш поширених методів доведення математичних тверджень, в яких фігурують слова “для довільного натурального $n$”. Доведення за допомогою цього методу завжди складається з двох етапів: базис індукції та індукційний крок.

1. *Базис індукції*. Перевіряємо, що сформульоване твердження виконується для найменшого можливого значення $n$.
2. *Індукційний крок*. Припускаємо, що твердження виконується для деякого довільного натурального $k$. Доводимо, що це твердження виконується також і для $k+1$.

Успішне виконання обох цих кроків і означає, що дане твердження є справедливим для будь-якого натурального $n$.

### Приклади розв’язання типових задач

Задача 1. *Довести, що для будь-якого натурального n число* $3^{2n+1}+2^{n+2}$ *ділиться на 7.*

*Розв’язання.*

- Базис індукції. Якщо $n=1$, то число $3^{2n+1}+2^{n+2}=35$ ділиться на 7.
- Індукційний крок. Припустимо, що для довільного $k$ число $3^{2k+1}+2^{k+2}$ ділиться на 7. При $n=k+1$ маємо:

$$3^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+2}=9\cdot 3^{2k+1}+2\cdot 2^{k+2}=9\cdot(3^{2k+1}+2^{k+2})-7\cdot 2^{k+2}.$$

Отримане число ділиться на 7, оскільки воно є різницею двох цілих чисел, кожне з яких ділиться на 7 (зменшуване ділиться на 7 за припущенням індукції).

Задача 2. *Довести, що для будь-якого натурального n має місце тотожність*

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

*Розв’язання.*

- Базис індукції. Якщо $n=1$, то $S_1=\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{3\cdot 1+1}$, тобто тотожність виконується.
- Індукційний крок. Припустимо, що тотожність вірна для $n=k$, тобто

$$S_k=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}.$$

Доведемо тотожність для $n=k+1$.

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}=S_k+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=$$

$$= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} =$$

$$= \frac{k+1}{3k+4} = \frac{k+1}{3(k+1)+1},$$

що і треба було довести.

Задача 3. *Довести, що $3^n - 2^n \geq n$ для будь-якого натурального $n$.*

*Розв'язання.*

- Базис індукції. Якщо $n = 1$, то $3^1 - 2^1 = 1 \geq 1$, тобто твердження вірне.
- Індукційний крок. Нехай при $n = k$ дана нерівність виконується, тобто $3^k - 2^k \geq k$. Доведемо справедливість нерівності при $n = k+1$. Маємо:

$$3^{k+1} - 2^{k+1} = 3 \cdot 3^k - 2^{k+1} \geq 3 \cdot (2^k + k) - 2^{k+1} = 3 \cdot 2^k + 3k - 2 \cdot 2^k =$$

$$= 3k + 2^k > k + 1.$$

Отже, на основі принципу математичної індукції дане твердження доведене для будь-якого натурального $n$.

## A1

1. Довести, що $n^3 + 5n$ ділиться на 6 для будь-якого натурального $n$.

2. Довести, що

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

для будь-якого натурального $n$.

3. Обчислити суму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$.

4. Довести, що для довільного натурального $n \geq 3$ виконується нерівність $2^n > 2n + 1$.

5. Нехай $a, b$ та $c$ відповідно катети та гіпотенуза прямокутного трикутника. Довести, що $a^n + b^n \leq c^n$ для будь-якого натурального $n \geq 2$.

## B1

1. Довести, що для будь-якого натурального $n$ число $5^{2n+1} + 9 \cdot 2^{n+1}$ ділиться на 23.

2. Довести, що $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

3. Довести, що

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

4. Довести, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

5. Довести, що для будь-якого натурального $n$ число $n^3+11n$ ділиться на 6.

6. Довести, що $5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\ldots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n$.

### C1

1. Довести, що $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$ для будь-якого натурального $n$.

2. Довести, що $n$ різних прямих, які проходять через одну точку ділять площину на $2n$ частин.

3. Довести, що для будь-якого натурального $n>1$
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

4. Довести, що для будь-якого натурального $n$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

5. Довести, що
$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}.$$

## 2. Множини

### Приклади розв'язання типових задач

<u>Задача 1</u>. *Нехай $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$. Визначити, які з наведених тверджень є правильними, а які – ні. Відповідь обґрунтувати.*

*a) $b\in\{a,b,c\}$; b) $x\notin\{a,b,c\}$; c) $\varnothing\in A$;*

*d) $A\subseteq B$; e) $A=B$; f) $\varnothing\subseteq A$.*

*Розв'язання.*

a) Твердження $b\in\{a,b,c\}$ правильне, тому що об'єкт $b$ міститься у множині $\{a,b,c\}$.

b) Твердження $x\notin\{a,b,c\}$ також правильне, оскільки множина $\{a,b,c\}$ не містить об'єкта $x$.

c) Твердження невірне, тому що серед елементів множини $A$ немає елемента $\varnothing$.

d) Твердження правильне, оскільки для елементів множини $A$ маємо: $a \in B,\ b \in B,\ c \in B$, отже, $A \subseteq B$.

e) Твердження $A = B$ невірне, оскільки елемент $d \in B$, але $d \notin A$.

f) Твердження вірне, оскільки множина $\varnothing$ не має елементів, тому умова $x \in \varnothing \ \Rightarrow\ x \in A$ не порушується для жодного $x$.

<u>Задача 2</u>. *Обчислити наведені вирази при заданих множинах* $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 5, 6, 8, 0\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ *та* $D = \{4, 5, 6\}$.

*a)* $A \bigcap B$; *b)* $C \bigcap D$; *c)* $A \setminus B$; *d)* $A \Delta B$; *e)* $(A \bigcup D)' \bigcap B$.

*Розв'язання.*

a) Оскільки лише елементи 5 та 6 є спільними для множин $A$ та $B$, то $A \bigcap B = \{5, 6\}$.

b) Очевидно, не існує жодного елемента, який би належав як множині $C$, так й множині $D$. Отже, множина $C \bigcap D$ не містить жодного елемента, тобто є порожньою: $C \bigcap D = \varnothing$.

c) Елементи 2, 8, 0 належать множині $A$ і одночасно не належать множині $B$, тому $A \setminus B = \{2, 8, 0\}$.

d) Оскільки $B \setminus A = \{3, 4\}$, то, скориставшись рівністю $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$, маємо $A \Delta B = \{2, 8, 0\} \bigcup \{3, 4\} = \{0, 2, 3, 4, 8\}$. Ми отримали елементи, які належать або тільки множині $A$, або тільки множині $B$, але не обом множинам $A$ та $B$ одночасно.

e) Оскільки $A \bigcup D = \{2, 5, 6, 8, 0, 4\}$, то $(A \bigcup D)' = \{1, 3, 7\}$ – множина елементів, які належать універсальній множині $U$ і не належать множині $A \bigcup D$. Остаточно, $(A \bigcup D)' \bigcap B = \{1, 3, 7\} \bigcap \{3, 4, 5, 6\} = \{3\}$.

<u>Задача 3</u>. *Довести, що* $B \setminus A = B \bigcap A'$ *для будь-яких множин* $A$ *і* $B$.

*Розв'язання.* Для доведення вказаної рівності достатньо показати, що $B \setminus A \subseteq B \bigcap A'$ та $B \bigcap A' \subseteq B \setminus A$. Доведемо спочатку, що $B \setminus A \subseteq B \bigcap A'$. Використовуючи визначення операцій різниці, перетину множин та операції доповнення множини, маємо: $x \in B \setminus A \ \Rightarrow\ x \in B$ та $x \notin A \ \Rightarrow\ x \in B$ та $x \in A' \ \Rightarrow\ x \in B \bigcap A'$, отже, доведено, що $x \in B \setminus A \ \Rightarrow\ x \in B \bigcap A'$, а це означає, що $B \setminus A \subseteq B \bigcap A'$. Тепер покажемо, що $B \bigcap A' \subseteq B \setminus A$: $x \in B \bigcap A' \Rightarrow x \in B,\ x \in A' \ \Rightarrow\ x \in B,\ x \notin A \ \Rightarrow x \in B \setminus A$, отже, $B \bigcap A' \subseteq B \setminus A$.

<u>Задача 4</u>. *Довести, що з* $A \subseteq B$ *випливає* $A \bigcap C \subseteq B \bigcap C$ *для будь-яких множин* $A, B, C$.

*Розв'язання.* Потрібно показати, що $A \cap C \subseteq B \cap C$ за умови $A \subseteq B$. Іншими словами, при доведенні включення $A \cap C \subseteq B \cap C$ можна користуватися не лише загальними відомостями про множини (такими, наприклад, як означення підмножини та операцій над множинами), але й тим, що $A \subseteq B$. Отже, нехай $x \in A \cap C$. Тоді, згідно з означенням операції перетину множин, маємо: $x \in A$ та $x \in C$. Оскільки $A \subseteq B$, то з того, що $x \in A$, випливає $x \in B$. Отже, з того, що $x \in B$ та $x \in C$, випливає $x \in B \cap C$, тобто $A \cap C \subseteq B \cap C$.

<u>Задача 5</u>. *Довести, що* $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap B' \subseteq C$ *для будь-яких множин* $A, B, C$.

*Розв'язання.* Для доведення цієї еквівалентності потрібно показати, що $A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap B' \subseteq C$ та $A \cap B' \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cup C$.

Доведемо спочатку, перше з цих тверджень. Для цього доведемо включення $A \cap B' \subseteq C$ за умови, що $A \subseteq B \cup C$. Отже, нехай $x \in A \cap B'$. Звідси випливає, що $x \in A$ та $x \in B'$ (тобто $x \notin B$). Оскільки $A \subseteq B \cup C$, то $x \in B \cup C$, отже, $x \in B$ або $x \in C$. Але відомо, що $x \notin B$, тобто залишається тільки можливість $x \in C$. Таким чином, показано, що $x \in A \cap B' \Rightarrow x \in C$, а це означає, що $A \cap B' \subseteq C$.

Доведемо друге твердження: $A \cap B' \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cup C$. Потрібно показати, що $A \subseteq B \cup C$ за умови $A \cap B' \subseteq C$. Нехай $x \in A$. Для довільної множини $B$ або $x \in B$, або $x \notin B$. Розглянемо окремо кожен з цих випадків. Нехай $x \in B$. Тоді з означення операції об'єднання множин випливає, що $x$ є елементом множини, яка є об'єднанням множини $B$ з будь-якою множиною. Отже, $x \in B \cup C$. Розглянемо тепер другий випадок, тобто $x \notin B$. Тоді $x \in B'$, а оскільки $x \in A$, то $x \in A \cap B'$. Але відомо, що $A \cap B' \subseteq C$, а це означає, що $x \in C$, тобто $x \in B \cup C$.

Доведення можна записати таким чином:

$(\Rightarrow)$ $x \in A \cap B' \Rightarrow x \in A,\ x \in B' \Rightarrow x \in A,\ x \notin B \Rightarrow x \in B \cup C,\ x \notin B \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in B$ або $x \in C$, $x \notin B \Rightarrow x \in C$.

$(\Leftarrow)$ $x \in A \Rightarrow x \in A$, $x \in B$ або $x \notin B \Rightarrow$ 1) $x \in A$, $x \in B$ або 2) $x \in A$, $x \notin B$.

1) $x \in A,\ x \in B \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in B \cup C$.
2) $x \in A,\ x \notin B \Rightarrow x \in A,\ x \in B' \Rightarrow x \in A \cap B' \Rightarrow x \in C \Rightarrow x \in B \cup C$.

<u>Задача 6</u>. *Використовуючи основні теореми та аксіоми алгебри множин, довести, що* $(A \cap B')' \cup B = A' \cup B$.

*Розв'язання.* Для спрощення виразу в лівій частині рівності послідовно застосуємо закон де Моргана, тотожність $(X')' = X$, закон асоціативності та закон ідемпотентності $X \cup X = X$:

$$(A \cap B')' \cup B = A' \cup (B')' \cup B = A' \cup B \cup B = A' \cup B .$$

Задача 7. *Спростити вираз* $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup B' \cup C'$.

*Розв'язання.* Маємо

$$(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup B' \cup C' = ((A \cup A') \cap B \cap C) \cup B' \cup C' =$$
$$= (U \cap B \cap C) \cup (B \cap C)' = (B \cap C) \cup (B \cap C)' = U .$$

При спрощенні даного виразу послідовно застосовувалися закон дистрибутивності (до виразу $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$), тотожності $X \cup X' = U$ та $X \cap U = X$. При перетвореннях також використовувались закони асоціативності та комутативності.

Задача 8. *Нехай* $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$. *Побудувати* $A \times B$ *та* $A^3$.

*Розв'язання.* Декартовим добутком множин $A$ та $B$ є множина

$$A \times B = \{<1, a>, <1, b>, <1, c>, <2, a>, <2, b>, <2, c>\} .$$

Декартовим степенем множини $A$ є множина

$$A^3 = A \times A \times A = \{<1,1,1>, <1,1,2>, <1,2,1>, <1,2,2>, <2,1,1>,$$
$$<2,1,2>, <2,2,1>, <2,2,2>\} .$$

Задача 9. *Довести, що* $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

*Розв'язання.* Доведемо спочатку, що $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$. Множина $(A \cup B) \times C$ є декартовим добутком двох множин $A \cup B$ та $C$, отже, елементи цієї множини – це впорядковані пари. Таким чином, маємо: $<x, y> \in (A \cup B) \times C \Rightarrow x \in A \cup B,\ y \in C \Rightarrow x \in A$ або $x \in B,\ y \in C \Rightarrow x \in A$ та $y \in C$ або $x \in B$ та $y \in C \Rightarrow <x, y> \in A \times C$ або $<x, y> \in B \times C$. Це і означає, що $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$.

Тепер покажемо, що $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$. Аналогічно попередньому випадку $<x, y> \in (A \times C) \cup (B \times C) \Rightarrow <x, y> \in A \times C$ або $<x, y> \in B \times C \Rightarrow$ $(x \in A$ та $y \in C)$ або $(x \in B$ та $y \in C)$.

Розглянемо випадок $x \in A$ та $y \in C$. Маємо: $x \in A$ та $y \in C \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in A \cup B,\ y \in C \Rightarrow <x, y> \in (A \cup B) \times C$. Якщо $x \in B$ та $y \in C$, то маємо: $x \in B$ та $y \in C \Rightarrow x \in A \cup B,\ y \in C \Rightarrow <x, y> \in (A \cup B) \times C$. Отже, у кожному випадку доведено, що $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$. Таким чином, рівність виконується.

**A2**

1. Задати множину $A$ іншим способом:

a) $A = \{x \mid x$ – корінь рівняння $x^2 = 1\}$;

b) $A = \{11, 22, \ldots, 99\}$;

c) $A = \{x \mid x \in N,\ x \le 1,\ x > 2\}$;

d) $A = \{y \mid x = y + z, \quad x, z \in B\}$, де $B = \{1, 2, 3\}$.

2. Вказати вірні співвідношення:

| | | |
|---|---|---|
| a) $1 \in \{1, 2, 3\}$; | f) $1 \subseteq \{1, 2, 3\}$; | k) $0 \in \varnothing$; |
| b) $1 \in \{\{1, 2, 3\}\}$; | g) $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; | l) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; |
| c) $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$; | h) $\{1\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}\}$; | m) $\varnothing \in \{1, 2\}$; |
| d) $\{1\} \in \{\{1\}, \{2, 3\}\}$; | i) $\{1\} \subseteq \{\{1, 2\}, 3\}$; | n) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; |
| e) $1 \in \{\{1\}, \{2\}, 3\}$; | j) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; | o) $\varnothing \subseteq \{1, 2\}$. |

3. Вказати вірні співвідношення:

| | |
|---|---|
| a) $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$; | c) $\{3, 2, 1\} = \{1+2, 1, 2\}$; |
| b) $\{1, 2, 3\} = \{1, \{2\}, 3\}$; | d) $\varnothing = \{\varnothing\}$. |

4. Нехай $A, B, C$ – скінченні множини. Вказати вірні твердження:

| | |
|---|---|
| a) $(\lvert A\rvert = \lvert B\rvert) \Rightarrow A = B$; | d) $(A \ne B) \Rightarrow \lvert A\rvert = \lvert B\rvert$; |
| b) $(\lvert A\rvert \ne \lvert B\rvert) \Rightarrow A \ne B$; | e) $(\lvert A\rvert < \lvert B\rvert) \Rightarrow A \subset B$; |
| c) $(A = B) \Rightarrow \lvert A\rvert = \lvert B\rvert$; | f) $A \subseteq A$. |

5. Нехай $A$ – множина всіх парних чисел, $B$ – множина всіх чисел, які можуть бути представлені у вигляді суми двох непарних чисел. Довести, що $A = B$.

6. Побудувати булеан множини $A = \{S, T, OP\}$, тобто множину всіх її підмножин.

7. Яку кількість підмножин містить
   a) порожня множина;
   b) одноелементна множина;
   c) двоелементна множина.

8. Зі скількох елементів складається множина $A$, якщо її булеан містить 32 елементи?

9. Довести, що нескінченна множина має безліч підмножин.

10. Які з даних тверджень справедливі для будь-яких множин $A, B, C$:
   a) $A \subseteq B$ і $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;
   b) $A \ne B$ і $B \ne C \Rightarrow A \ne C$?

Відповідь обґрунтувати.

11. Нехай $S = \{a, b, c\}$, $T = \{b, c, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$. Побудувати $S \bigcup T$, $S \bigcap T$, $S \setminus T$, $S \Delta T$, $T'$, $S \bigcap T \bigcap (T \setminus S)'$.

12. Чи виконується для довільних множин $A$ і $B$ рівність $(A \setminus B) \bigcup B = A$, при $B \subseteq A$? Відповідь обґрунтувати.

13. Довести закон де Моргана $(A \bigcup B)' = A' \bigcap B'$.

14.Довести включення $(A \setminus B) \subseteq (A \setminus D) \bigcup (D \setminus B)$.

15.Довести еквівалентності:

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$;

b) $A \bigcap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq B' \bigcup C$;

c) $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = A \bigcup B \Leftrightarrow A \bigcap B = \emptyset$.

16.За допомогою діаграм Венна перевірити теоретико-множинну рівність $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$. Довести її двома способами.

17.Довести тотожності, використовуючи основні теореми та аксіоми алгебри множин:

a) $(A' \setminus B) \bigcup (A \bigcap B') = B'$;

b) $A \setminus (B \bigcap C') = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C')$;

c) $(A \setminus B) \bigcap ((A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)) = A \setminus B$.

18.Спростити вираз ($U$ – універсальна множина):

a) $((A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup U)) \bigcup ((A \bigcup B) \bigcap (B \bigcup \emptyset))$;

b) $(A \bigcap B \bigcap C) \bigcup (A' \bigcap B \bigcap C) \bigcup B' \bigcup C'$.

19.Побудувати приклади розбиття та покриття множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

20.Побудувати $S \times T$, якщо $S = \{a, b, c\}$, $T = \{b, c, f\}$.

21.Нехай $A, B$ – скінченні множини, причому $|A| = n$, $|B| = m$. Скільки елементів містить множини $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$?

22.Що можна сказати про множини $A$ і $B$, якщо:

a) $A \times B = B \times A$; b) $|A \times B| = 41$.

23.Побудувати $A \times B \times C$, якщо $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$, $C = \{b, d\}$.

24.Зобразити на площині такі множини:

a) $[0,2] \times (-\infty, 2]$; b) $[-2,2] \times [2,3]$.

25.Довести, що для довільних множин $A$, $B$, $C$ виконується $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

26.Довести, що для довільних непорожніх множин $A$, $B$, $C$, $D$ виконується $A \subset B$ і $C \subset D \Leftrightarrow A \times C \subset B \times D$.

**B2**

1. Які з наступних сукупностей є множинами:

a) $A = \{a \mid 0 \le a \le 2\}$;

b) $A = \{x \mid x \in R, \sin \pi x = 0\}$;

c) $A = \{x \mid x \in Z, x^2 = 2\}$?

2. З яких елементів складається множина $B = \{y \mid y = x \cdot z,\ x, z \in A\}$, якщо $A = \{1, 2, 3\}$.

3. Нехай $A = \{1, 2, \{1\}\}$. Навести декілька вірних співвідношень із знаками належності та включення.

4. Визначити всі можливі співвідношення (рівності, нерівності, включення, строге включення) між такими множинами геометричних фігур:

$A$ – множина всіх ромбів;
$B$ – множина всіх ромбів, усі кути яких прямі;
$C$ – множина всіх квадратів;
$D$ – множина прямокутників, усі сторони яких рівні;
$E$ – множина всіх прямокутників;
$F$ – множина чотирикутників, усі кути яких прямі.

5. Чи існують такі множини $A$ та $B$, що $A \in B$ і $A \subseteq B$?

6. Які з наведених тверджень є правильними ($A, B, C$ – множини):

a) якщо $A \in B$ і $B \in C$, то $A \in C$;
b) якщо $A \notin B$ і $B \notin C$, то $A \notin C$.

У тих випадках, коли твердження невірне, разом із контр прикладами побудуйте окремі приклади, для яких воно виконується.

7. Для заданої множини $A$ побудувати множину всіх підмножин

a) $A = \varnothing$; b) $A = \{\varnothing\}$; c) $A = \{0, 1, \{0,1\}\}$.

8. Маючи множини $A, B, C$, за допомогою операцій $\bigcup, \bigcap, \setminus$ та доповнення записати множини елементів, які

a) належать всім трьом множинам;
b) належать принаймні двом з даних множин;
c) належать хоча б одній з цих множин;
d) не належать будь-яким двом множинам, але належать хоча б одній з них;
e) не належать жодній із множин.

9. Нехай $P$ – множина всіх прямокутників, $R$ – множина всіх ромбів на площині. З яких елементів складається множина

a) $P \bigcap R$; b) $R \setminus P$; c) $P \setminus R$?

10. Нехай $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $C = \{2, 4, 7\}$. Обчислити

a) $A \Delta B$; b) $A \bigcap (B \bigcup C)$; c) $(B \setminus C) \bigcap (A \setminus B)$.

11. Що можна сказати про множини $A$ і $B$, якщо:

a) $A \bigcup B = A$; d) $A \bigcap B = A$; g) $A \setminus B = A$;
b) $A \bigcup B = B$; e) $A \bigcap B = B$; h) $A \setminus B = B$;

c) $A \bigcup B = \emptyset$;   f) $A \bigcap B = A \bigcup B$;   i) $A \setminus B = B \setminus A$.

12.Довести еквівалентності:

a) $A \subseteq B \bigcap C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B$ і $A \subseteq C)$;

b) $A \subseteq B \bigcup C \;\Leftrightarrow\; A \bigcap B' \subseteq C$.

13.Довести один із законів поглинання.

14.За допомогою діаграм Венна перевірити такі рівності:

a) $A \bigcap (B \Delta C) = (A \bigcap B) \Delta (A \bigcap C)$;

b) $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

15.Довести тотожності шляхом рівносильних перетворень.

a) $A \bigcap B = A \setminus (A \setminus B)$;   d) $A \Delta (A \bigcap B) = A \setminus B$;

b) $(A \setminus B) \bigcup \left(A \bigcap B\right) = A$;   e) $(A \bigcup B) \setminus (A \setminus B) = B$.

c) $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus C) \bigcup (A \bigcap B \bigcap C) = A \bigcup (B \bigcap C')$;

16.Спростити вирази:

a) $(A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap B') \bigcup (A' \bigcap B) \bigcup (A' \bigcap B')$;

b) $((A \bigcup B') \bigcap (A' \bigcup C)) \setminus (B' \bigcup C)$;

c) $((A \bigcap B) \bigcup A) \bigcap ((A \Delta B) \Delta B)$.

17.Чи можна побудувати 10 різних покриттів множини $\{a, b, c\}$?

18.Знайти всі розбиття множини $\{a, b, c\}$.

19.Із вказаних нижче множин підібрати такі їх системи, які задавали б розбиття множини всіх цілих чисел $\mathbf{Z}$:

$M_0 = \{0\}$;

$M_1 = \{1\}$;

$M_2$ – множина всіх цілих додатних чисел;

$M_3$ – множина всіх цілих від’ємних чисел;

$M_4$ – множина всіх парних чисел;

$M_5$ – множина всіх непарних чисел;

$M_6$ – множина всіх простих чисел;

$M_7$ – множина всіх складених натуральних чисел.

Навести два приклади покриття множини $Z$.

20.Побудувати $A \times B \times C$, якщо $A = \{-1, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{a\}$.

21.Побудувати $M^2$, $M^3$, якщо $M = \{a, b\}$.

22.Коли в множині $A \times B$ є хоча б один елемент з однаковими першою та другою координатами?

23.Довести тотожність $(A \bigcap B) \times C = (A \times C) \bigcap (B \times C)$, де $A, B, C$ – непорожні множини.

24. Довести, що для довільних непорожніх множин $A, B, C$ виконується твердження $B \subset C \quad \Rightarrow \quad (A \times B) \subset (A \times C)$.

**C2**

1. Чи існують такі множини $A, B, C$, для яких виконувалися б умови:
   a) $C \neq \emptyset, \quad A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset$;
   b) $A \subset B, \quad B \cap C \subset A, \quad A \cap C = \emptyset$.

2. Нехай $A$ – довільна множина. Обчислити:

| | | |
|---|---|---|
| a) $A \cap \emptyset$; | d) $A \setminus A$; | g) $A \Delta A$; |
| b) $A \cup \emptyset$; | e) $\emptyset \setminus A$; | h) $A \Delta U$; |
| c) $A \setminus \emptyset$; | f) $U \setminus A'$; | i) $A \Delta \emptyset$. |

3. Обчислити:

| | | |
|---|---|---|
| a) $\emptyset \cup \{\emptyset\}$; | c) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\}$; | e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$; |
| b) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$; | d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset$; | f) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\}$. |

4. Нехай $A, B$ – скінченні множини, $|A| = m$, $|B| = n$. Обчислити $|A \cup B|$.

5. На фірмі працюють 67 чоловік. З них 47 співробітників володіють англійською мовою, 35 – німецькою, 23 володіють обома мовами. Скільки співробітників фірми не знають жодної іноземної мови?

6. Довести узагальнені закони:
   a) $A \cup (B \cap C \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D)$;
   b) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$.

7. Спростити
   a) $(A \cap B')' \cup B$;
   b) $(A \cap B \cap C \cap D') \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C) \cup (C \cap D)$.

8. Довести тотожності:
   a) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = B' \setminus A'$;
   b) $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$;
   c) $A \Delta (A \Delta B) = B$;
   d) $(A \cap B) \setminus (A \cup B) = A \cap ((A' \cup B) \cap (A' \cup B'))$.

9. Довести $A \subseteq B \Leftrightarrow \beta(A) \subseteq \beta(B)$, де $\beta(A), \ \beta(B)$ – булеани множин $A$ та $B$ відповідно.

10. Нехай $\beta(A), \ \beta(B)$ – булеани довільних непорожніх множин $A$ та $B$ відповідно. Чи вірними є рівності:
   a) $\beta(A) \cup \beta(B) = \beta(A \cup B)$;

b) $\beta(A) \bigcap \beta(B) = \beta(A \bigcap B)$.

11. Яким повинно бути розбиття скінченної множини $M$ на два класи $M = M_1 \bigcup M_2$, щоб декартів добуток $M_1 \times M_2$ містив найбільшу кількість елементів?

12. Чи істинними будуть твердження:
a) $(A \times B)' = A' \times B'$; b) $A \Delta A' = U$; c) $A \bigcap (B \setminus A) = \varnothing$.

# 3. Відношення

## Приклади розв'язання типових задач

<u>Задача 1</u>. *Нехай $A = \{1, 2, 3\}$. Вказати властивості відношення $R = \{<2,1>, <1,2>, <2,2>, <3,3>\}$, заданого на множині $A$.*

*Розв'язання.* Відношення $R$ *не є рефлексивним*, оскільки діагональна пара $<1,1>$ не належить $R$. Дане відношення містить діагональні пари $<2,2>$ і $<3,3>$, тому воно *не є іррефлексивним*. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що з кожною парою виду $<x, y>$ відношення $R$ містить пару виду $<y, x>$ (у нашому випадку до пари $<2,1>$ у відношенні є обернена пара $<1,2>$ і навпаки; пари $<2,2>$ і $<3,3>$ збігаються зі своїми оберненими). Отже, відношення $R$ *є симетричним*. Воно *не антисиметричне*, оскільки $<2,1> \in R$, $<1,2> \in R$, але $2 \neq 1$. Відношення $R$ *не є транзитивним,* оскільки $R$ містить пари $<2,1>$ і $<1,2>$, але не містить пари $<1,1>$.

<u>Задача 2</u>. *Класифікувати відношення $R = \{<x, y> |\ x$ та $y$ – особи одного року народження$\}$ на множині людей.*

*Розв'язання.* Відношення $R$ *рефлексивне* (адже твердження "$x$ та $x$ – особи одного року народження" істинне для будь-якого $x$ з множини людей, отже, $R$ містить усі діагональні пари), *симетричне* (якщо $<x, y> \in R$, то це означає, що $x$ та $y$ – особи одного року народження, але тоді $y$ та $x$ також є особами одного року народження, звідки $<y, x> \in R$), *транзитивне* (якщо $<x, y> \in R$ та $<y, z> \in R$, тобто $x$ та $y$ – особи одного року народження й $y$ та $z$ – особи одного року народження, то й $x$ та $z$ – особи одного року народження, отже, $<x, z> \in R$). Таким чином, дане відношення є відношенням еквівалентності.

<u>Задача 3</u>. *Нехай $R$, $R_1$ та $R_2$ – бінарні відношення на множині $A$. Довести, що: a) $\left(R^{-1}\right)' = \left(R'\right)^{-1}$; b) $(R_1 * R_2)^{-1} = R_2^{-1} * R_1^{-1}$.*

*Розв'язання.*

a) Використовуючи означення доповнення відношення та означення відношення, оберненого до даного, маємо: $<x,y>\in\left(R^{-1}\right)' \Rightarrow$ $\Rightarrow <x,y>\notin R^{-1} \Rightarrow <y,x>\notin R \Rightarrow <y,x>\in R' \Rightarrow <x,y>\in(R')^{-1}$. Отже, $\left(R^{-1}\right)'\subseteq(R')^{-1}$. Покажемо, що $(R')^{-1}\subseteq\left(R^{-1}\right)'$. Маємо: $<x,y>\in(R')^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow <y,x>\in R' \Rightarrow <y,x>\notin R \Rightarrow <x,y>\notin R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in\left(R^{-1}\right)'$. Це і означає, що $\left(R^{-1}\right)'=(R')^{-1}$.

b) Використовуючи означення відношення, оберненого до даного, та означення добутку відношень, маємо: $<x,y>\in(R_1*R_2)^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow <y,x>\in(R_1*R_2) \Rightarrow$ існує такий елемент $z$ з множини $A$, що $<y,z>\in R_1$ та $<z,x>\in R_2 \Rightarrow <x,z>\in R_2^{-1}$, $<z,y>\in R_1^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow <x,y>\in R_2^{-1}*R_1^{-1}$. Отже, $(R_1*R_2)^{-1}\subseteq R_2^{-1}*R_1^{-1}$. Покажемо, що $R_2^{-1}*R_1^{-1}\subseteq(R_1*R_2)^{-1}$. Маємо: $<x,y>\in R_2^{-1}*R_1^{-1} \Rightarrow$ існує такий елемент $z$ з множини $A$, що $<x,z>\in R_2^{-1}$ та $<z,y>\in R_1^{-1} \Rightarrow <z,x>\in R_2$, $<y,z>\in R_1 \Rightarrow <y,x>\in R_1*R_2 \Rightarrow <x,y>\in(R_1*R_2)^{-1}$. Отже, доведено, що $(R_1*R_2)^{-1}=R_2^{-1}*R_1^{-1}$.

Задача 4. *Нехай $R$ та $R_1$ – часткові порядки на $A$. Довести, що $R\bigcap R_1$ – частковий порядок на $A$.*

*Розв'язання.* Покажемо, що відношення $R\bigcap R_1$ є рефлексивним, антисиметричним та транзитивним. Оскільки $R$ та $R_1$ – часткові порядки на $A$, то відношення $R$ та $R_1$ є рефлексивними, тобто і відношення $R\bigcap R_1$ рефлексивне. Нехай $<x,y>\in R\bigcap R_1$ та $<y,x>\in R\bigcap R_1$. Тоді $<x,y>\in R$ і $<y,x>\in R$, звідки з антисиметричності $R$ випливає, що $x=y$. Отже, відношення $R\bigcap R_1$ – антисиметричне. Доведемо транзитивність. Нехай $<x,y>\in R\bigcap R_1$ та $<y,z>\in R\bigcap R_1$. Тоді $<x,y>\in R$, $<y,z>\in R$, $<x,y>\in R_1$, $<y,z>\in R_1$. З транзитивності відношень $R$ та $R_1$ випливає, що $<x,z>\in R$ та $<x,z>\in R_1$, тобто $<x,z>\in R\bigcap R_1$. Таким чином, $R\bigcap R_1$ є частковим порядком на $A$.

Задача 5. *З'ясувати, чи будуть відношення $F=\{<1,a>, <2,a>, <3,c>, <4,d>, <5,d>\}$, $S=\{<2,c>, <3,d>, <3,b>, <4,a>\}$ та $Q=\{<2,c>, <3,d>, <5,b>\}$, задані на множинах $A=\{1,2,3,4,5\}$ та $B=\{a,b,c,d,e\}$, відображеннями (або частковими відображеннями).*

*Розв'язання.* Відношення $F$ є відображенням множини $A$ у $B$, тому що $F$ функціональне та його область визначення $D(F)=\{1,2,3,4,5\}=A$, оскільки $F^{-1}(a)=\{1,2\}$, $F^{-1}(b)=\varnothing$, $F^{-1}(c)=\{3\}$, $F^{-1}(d)=\{4,5\}$, $F^{-1}(e)=\varnothing$. Відношення $S$ не є відображенням, оскільки воно не є функціональним (елемент 3 з множини $A$ зустрічається двічі, тобто більше одного разу, на першому місці у парах, які належать $S$). Відношення $Q$ є частковим відображенням $A$ у $B$, тому що $Q$ функціональне та його область визначення $D(Q)=\{2,3,5\}\subset A$.

<u>Задача 6</u>. *З'ясувати, чи будуть сюр'єктивними відображення* $F: A \to B$, $F=\{<1,b>, <4,a>, <2,c>, <3,a>\}$, *та* $F_1: A \to B$, $F_1=\{<1,a>, <2,c>, <3,c>, <4,a>\}$, *де* $A=\{1,2,3,4\}$ *та* $B=\{a,b,c\}$.

*Розв'язання.* Для кожного елемента $y$ з множини $B$ обчислимо повний прообраз $F^{-1}(y)$: $F^{-1}(a)=\{3,4\}$, $F^{-1}(b)=\{1\}$, $F^{-1}(c)=\{2\}$. Таким чином, $F^{-1}(y)\neq\varnothing$ для кожного $y\in B$, отже, $F$ є сюр'єктивним відображенням (відображенням $A$ на $B$). В той же час для відображення $F_1$ маємо $F_1^{-1}(b)=\varnothing$, тому $F_1$ не є сюр'єктивним.

<u>Задача 7</u>. *З'ясувати, чи будуть ін'єктивними відображення* $F: A \to B$, $F=\{<a,3>, <b,1>, <c,2>, <d,4>\}$, *та* $F_1: A \to B$, $F_1=\{<a,1>, <b,2>, <c,2>, <d,3>\}$, *де* $A=\{a,b,c,d\}$ *та* $B=\{1,2,3,4,5\}$.

*Розв'язання.* Відображення $F$ є ін'єктивним, оскільки різні елементи з області визначення мають різні образи. В той же час у відображенні $F_1$ різні елементи $b$ та $c$ мають однаковий образ 2, тому $F_1$ не є ін'єктивним.

<u>Задача 8.</u> *З'ясувати, чи будуть бієктивними (взаємно однозначними) відображення* $F: A \to B$, $F=\{<1,a>, <2,b>, <3,d>, <4,c>\}$, *та* $F_1: A \to C$, $F_1=\{<1,a>, <2,c>, <3,a>, <4,a>\}$, *де* $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d\}$ *та* $C=\{a,c\}$.

*Розв'язання.* Відображення $F$ є сюр'єктивним, оскільки кожен елемент множини $B$ має прообраз; крім того, різні елементи множини $A$ мають різні образи, отже, $F$ є ін'єктивним. Таким чином, $F$ є бієкцією. Відображення $F_1$ не є ін'єктивним, хоча є сюр'єктивним. Отже, $F_1$ не є бієктивним.

## А3

1. Навести приклади унарних відношень на множині натуральних чисел $N$ та на множині людей $L$.

2. Навести приклад тернарного відношення на множині відрізків.

3. Скільки унарних та тернарних відношень можна побудувати на множині $A$, якщо вона містить $n$ елементів?

4. На множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ побудувати відношення тотожності $R$: $x R y \Leftrightarrow x = y$.

5. На множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ побудувати відношення $R$: “мати спільний дільник, що не дорівнює 1”. Задати це відношення графіком, матрицею та стрілковою діаграмою.

6. Нехай $R_1$ та $R_2$ – бінарні відношення, задані на множині $N$, $R_1 = \{<1, 2>, <1, 3>, <3, 2>, <3, 4>\}$, $R_2 = \{<2, 1>, <2, 4>, <3, 5>\}$. Знайти $R_1 * R_2$, $R_2 * R_1$, $R_1 * R_1^{-1}$.

7. Нехай $L$ – множина людей, $R \subset L^2$, $R = \{<x, y> \mid x \text{є дитиною } y\}$. Яким буде відношення $R * R$ ?

8. Відношення $C = \{<x, y> \mid x^2 + y^2 = 1\}$ задане на множині дійсних чисел. Побудувати $C * C$.

9. Визначити властивості відношень $R \subset A^2$, $A = \{a, b, c\}$, якщо:
   a) $R = \{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <a, c>, <b, a>, <c, a>\}$;
   b) $R = \{<a, a>, <b, b>, <a, b>, <b, c>, <a, c>\}$.

10. Визначити властивості відношень, побудованих чи наведених у задачах № 4, 5, 6, 7.

11. Вказати властивості відношення, заданого на множині людей $L$: $x R y \Leftrightarrow x$ та $y$ мають спільного предка.

12. На множині $A = \{a, b, c\}$ побудувати відношення, яке є:
   a) рефлексивним, не симетричним, транзитивним;
   b) іррефлексивним, не антисиметричним, транзитивним.

13. Класифікувати відношення:
   a) $R_1 \subseteq Z^2$, $x R_1 y \Leftrightarrow (x - y) \vdots 2$;
   b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R_2 \subseteq A^2$, $R_2 = i_A \bigcup \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 1>, <3, 2>, <5, 6>, <6, 5>\}$.

   Для відношень еквівалентності побудувати класи еквівалентності.

14. З’ясувати, чи є наведені відношення відношеннями еквівалентності:

a) “вчитись в одній групі” на множині студентів КПІ;
b) “мати таку ж парність, як …” на множині $N$;
c) “мати стільки ж знаків, скільки …” на множині $N$;
d) $x R y \Leftrightarrow x \perp y$ на множині прямих;
e) $x R y \Leftrightarrow x \| y$ на множині прямих.

Для відношень еквівалентності побудувати класи еквівалентності.

15. Відношення еквівалентності на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задано розбиттям на класи $A_1 = \{1, 4\}$, $A_2 = \{2, 3, 7\}$, $A_3 = \{5, 6\}$. Представити це відношення множиною впорядкованих пар, матрицею та графом.

16. На множині різнокольорових кульок різного діаметра побудувати відношення еквівалентності.

17. Нехай $A$ – скінченна множина. Які відношення еквівалентності породжують найбільшу та найменшу кількість класів еквівалентності?

18. Класифікувати відношення, $R = \{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>, <a, b>, <a, c>, <a, d>\}$, задане на множині $A = \{a, b, c, d\}$. Побудувати матрицю цього відношення та діаграму Хаасе. Вказати мінімальний, максимальний, найбільший та найменший елементи.

19. На булеані множини $A = \{1, 2, 3\}$ задано бінарне відношення $R$: $X R Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$. Довести, що $R$ – відношення часткового порядку. Побудувати діаграму Хаасе, вказати елементи, які не можна порівняти за цим відношенням. Вказати мінімальний, максимальний, найбільший та найменший елементи.

20. Скільки різних відношень часткового порядку можна побудувати на трьохелементній множині. Побудувати діаграми Хаасе.

21. Чи може один і той же елемент частково впорядкованої множини бути одночасно мінімальним і максимальним?

22. Побудувати скінченну частково впорядковану множину, яка має два мінімальних та три максимальних елемента.

23. Якщо впорядкована множина має найменший елемент, то він єдиний. Довести.

24. Класифікувати відношення $R = i_A \cup \{<c,d>, <b,c>, <b,d>, <a,b>, <a,c>, <a,d>\}$, задане на множині $A = \{a, b, c, d\}$. Побудувати матрицю цього відношення та діаграму Хаасе.

25. З’ясувати тип порядку (частковий, строгий, лінійний):

a) на множині співробітників банку задане відношення “підлеглий – начальник”;

b) на множині офіцерських звань задане відношення "бути молодшим за званням";
c) на множині значень температур на шкалі термометра задане відношення "не бути вищою".

26. Розташувати у лексикографічному порядку елементи множини:

a) $B^3$, де $B=\{0,1\}$; b) $A^3$, де $A=\{a,b,c\}$.

27. Бінарне відношення $R$ є одночасно симетричним і антисиметричним. Довести, що $R$ – транзитивне.

28. Довести, що об'єднання двох рефлексивних відношень є рефлексивним.

29. Нехай $R, R_1$ – бінарні відношення, задані на множині $A$. Довести:

a) $R \subseteq R_1 \;\Rightarrow\; R^{-1} \subseteq R_1^{-1}$;
b) $(R \cap R_1)^{-1} = R^{-1} \cap R_1^{-1}$;
c) $R$ – транзитивне $\Leftrightarrow$ $R * R \subseteq R$.

30. Нехай $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$. Побудувати приклади відношень $R \subseteq A \times B$, кожне з яких є:

a) повністю визначене на $A$ і не функціональне;
b) не повністю визначене на $A$ і не функціональне;
c) не повністю визначене на $A$ і функціональне;
d) повністю визначене на $A$ і функціональне.

31. Нехай $R$ – відношення між елементами множин $X$ та $Y$: $R \subseteq X \times Y$. В яких випадках $R$ можна розглядати як відображення, якщо:

a) $X$ – множина студентів, $Y$ – множина навчальних дисциплін; $xRy \Leftrightarrow$ студент $x$ вивчає предмет $y$;

b) $X$ – множина спортсменів, $Y$ – множина дійсних чисел; $x\,R\,y \Leftrightarrow$ спортсмен $x$ має зріст $y$;

c) $X$ – множина херсонських кавунів, $Y$ – їх маса; $x\,R\,y \Leftrightarrow$ кавун $x$ має масу $y$?

32. З'ясувати властивості відображення $\sin$, якщо

a) $\sin: \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; c) $\sin: \ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$;

b) $\sin: \ \mathbf{R} \to [-1,1]$; d) $\sin: \ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$.

33. Вибрати множини та побудувати на них відображення, яке є: a) довільним; b) сюр'єктивним, але не ін'єктивним; c) ін'єктивним, але не сюр'єктивним; d) не сюр'єктивним та не ін'єктивним; e) бієктивним.

34. Вказати, чи будуть задані бінарні відношення відображенням; якщо

a) $R_1 = \{< x, y >: y = x^2 + x + 3,\ x \in R\}$;

b) $R_2 = \{< x^2, x >:\ x \in R\}$.

35. Побудувати бієктивне відображення між множинами $A \times B$ та $B \times A$.

36. Нехай задано відображення $f_1 : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^+,\ f_1(x) = x^2$ та $f_2 : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R},\ f_2(x) = \lg x$, де $\mathbf{R}^+$ – множина додатніх дійсних чисел. Побудувати $f = f_1 \circ f_2$ та $g = f_2 \circ f_1$.

37. Нехай $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Побудувати бінарну функцію з множини $A$ у множину $B$.

38. Побудувати бінарну операцію на множині $A = \{a, b, c, d\}$.

## В3

1. На множині студентів $S$ навести приклади повного та порожнього бінарного відношення.

2. На множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ побудувати відношення $R$: $x R y \iff x > y + 1$. Задати його різними способами.

3. Задати відношення $P \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ координатним способом:

a) $x P y \iff x^2 = y^2$; b) $x P y \iff (x^2 + y^2 < 1$ та $x > 0)$.

4. Нехай на множинах $A = \{a, b, c, d\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано відношення $R_1 = \{< a, 4 >, < a, 5 >, < b, 2 >, < b, 3 >, < c, 1 >, < d, 2 >, < d, 3 >\}$ і $R_2 = \{< a, 1 >, < a, 3 >, < a, 5 >, < b, 1 >, < b, 3 >, < d, 3 >, < d, 4 >, < d, 5 >\}$. Побудувати $R_1 \bigcup R_2$, $R_1 \bigcap R_2$, $R_2 \setminus R_1$, $R_2'$, $R_1^{-1}$.

5. Нехай на множині людей $L$ задані такі відношення $F = \{< x, y > |\ x$ є батьком $y\}$ та $D = \{< x, y > |\ x$ є донькою $y\}$. Описати такі відношення: $F * F$, $F * D$, $D * F$, $D * F^{-1}$, $F^{-1} * D^{-1}$.

6. Відношення $R$ задане на множині $A$, вказати його властивості, якщо:

a) $A = \{1\}$, $R = \{< 1, 1 >\}$;

b) $A = \{1, 5\}$, $R = \{< 1, 5 >\}$;

c) $A = \{3, 5\}$, $R = \{< 3, 5 >, < 5, 3 >, < 3, 3 >, < 5, 5 >\}$;

d) $A = \{3, 5\}$, $R = \{< 3, 5 >, < 5, 3 >\}$;

e) $A = \{a, b, c\}$, $R = \{< a, c >, < a, b >\}$.

7. З’ясувати, які властивості мають відношення, задані на множині натуральних чисел:

a) $nRm \Leftrightarrow n$ та $m$ взаємно прості;

b) $nRm \Leftrightarrow n$ є дільником $m$;

c) $nRm \Leftrightarrow n = m^2$;

d) $nRm \Leftrightarrow n \leq m^2$.

8. Навести приклад відношень, кожне з яких є

a) рефлексивним, симетричним, не транзитивним;

b) не рефлексивним, не симетричним, транзитивним;

c) рефлексивним, антисиметричним, не транзитивним.

9. Довести, що відношення $<a,b> R <c,d> \Leftrightarrow a + d = b + c$, задане на множині $M = \mathbf{N}^2$, є відношенням еквівалентності.

10. Чи буде відношенням еквівалентності відношення подібності на множині трикутників?

11. Нехай $M$ – множина прямих. З’ясувати, чи будуть наступні відношення відношеннями еквівалентності:

a) пряма $x$ перетинається з прямою $y$;

b) пряма $x$ лежить в одній площині з прямою $y$;

c) пряма $x$ перетинає ті ж самі площини, що і пряма $y$.

12. Нехай на множині $A$ задано відношення $R$. З’ясувати, чи буде $R$ відношенням еквівалентності, якщо:

a) $A = \mathbf{Z}, \quad xRy \Leftrightarrow x + y = 0$;

b) $A = \{-10, -9, ..., 0, 1, ..., 10\}, \quad xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$;

c) $A = \{-10, -9, ..., 0, 1, ..., 10\}, \quad xRy \Leftrightarrow x^3 = y^3$;

d) $A = \{1, 2, ..., 10\}, \quad xRy \Leftrightarrow x + y > 0$.

Для кожного відношення еквівалентності побудувати класи еквівалентності..

13. Знайти класи еквівалентності для відношень, заданих на $\mathbf{Z}$:

a) $xRy \Leftrightarrow x = y$; b) $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$; c) $xRy \Leftrightarrow (x - y) \vdots 5$.

14. Класифікувати відношення, задані на множині $A$:

a) $A = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad R = i_A \cup \{<d, e>, <b, c>, <e, f>, <a, b>, <a, c>, <d, f>\}$;

b) $A = \{2, 3, 5, 7, 14, 15, 21\}, \quad xRy \Leftrightarrow x$ ділить $y$.

Побудувати матриці відношень та діаграми Хаасе. Вказати мінімальний, максимальний, найбільший та найменший елементи.

15.Нехай $M=\{a,b\}$. Скільки відношень часткового порядку можна побудувати на цій множині? Вказати їх.

16.З'ясувати, чи будуть наведені відношення відношеннями порядку:

a) $R\subseteq \mathbf{Z}^2, \quad xRy \Leftrightarrow x \vdots y$;

b) $A=\{-5,-3,-2,0,1,3,4,5,6\}$, $S\subseteq A^2$, $xSy \Leftrightarrow |x|<|y|$;

c) $A=\{2,3,4,5,6,11,12,13\}$, $S\subseteq A^2$, $xSy \Leftrightarrow x$ ділиться на $y$ з остачею 1.

Вказати тип впорядкованості у випадках, коли це можливо. Побудувати діаграми Хаасе.

17.Опишіть симетричні відношення, які є відношеннями часткового порядку.

18.Довести, що перетин двох симетричних відношень є симетричним.

19.Нехай $R_1$ та $R_2$ – іррефлексивні відношення. Чи завжди буде добуток таких відношень іррефлексивним? Навести приклади.

20.Нехай $R$, $R_1$ та $R_2$ – бінарні відношення, задані на множині $A$. Довести:

a) $(R*R_1)*R_2=R*(R_1*R_2)$;

b) $(R_1\cup R_2)*R = R_1*R\cup R_2*R$;

c) $(R')^{-1}=(R^{-1})'$.

21.Чи кожна підмножина $T$ множини $A\times B$ є графіком певного відображення $f: A\to B$?

22.На множинах $A=\{a,b,c,d,e\}$ і $B=\{1,2,3,4,5\}$ задано відношення:

$R_1=\{<a,2>, <a,5>, <b,1>, <b,5>, <c,2>, <d,3>, <d,5>\}$;

$R_2=\{<a,3>, <b,2>, <c,3>, <e,3>\}$;

$R_3=\{<a,2>, <b,3>, <c,4>, <d,1>, <e,5>\}$;

$R_4=\{<a,2>,<a,3>,<b,1>,<c,4>,<c,5>,<d,1>,<e,2>,<e,4>\}$;

$R_5=\{<a,4>, <b,3>, <c,5>, <d,2>, <e,1>\}$.

Які з них: a) всюди визначені; b) функціональні; c) ін'єктивні; d) сюр'єктивні; e) бієктивні (взаємно однозначні)?

23.Чи є відношення

a) $f=\{<x,y>\in[0,1]\times\mathrm{R} \mid y=x^2\}$;

b) $f=\{<x,y>\in[0,1]\times[0,1] \mid y=x^2\}$;

c) $f=\{<x,y>\in[0,1]\times[-1,1] \mid x^2+y^2=1\}$;

d) $f=\{<x,y>\in[-1,1]\times[0,1] \mid x^2+y^2=1\}$;

e) $f=\{<x,y>\in\mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid x-y=3\}$;

f) $f = \{< x, y > \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid y - x = 3\}$;

g) $f = \{< x, y > \in [0,1] \times [0,1] \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$.

відображеннями? Вказати їх властивості.

24.Що можна сказати про множини $A$ та $B$, коли відомо, що кожне відображення $A \to B$ є: a) сюр'єкцією; b) ін'єкцією; c) бієкцією?

## C3

1. Множина $A$ складається з $n$ елементів. Скільки різних бінарних відношень можна побудувати на цій множині? Скільки буде серед них:

a) рефлексивних відношень; b) симетричних відношень?

2. Визначити, чи будуть вказані відношення відношеннями еквівалентності:

a) $S \subseteq \mathbf{R}^2$, $xSy \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$;

b) $S \subseteq \mathbf{R}^2$, $xSy \Leftrightarrow y = |x|$;

c) $T \subseteq \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, $(< x_1, x_2 > T < y_1, y_2 >) \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$;

d) $A = \{5, 8, 9, 12, 13, 16, 18, 19, 20\}$, $S \subseteq A^2$, $xSy \Leftrightarrow |x - y| \vdots 4$.

Для відношень еквівалентності задати класи еквівалентності.

3. Чи можна стверджувати, що об'єднання двох відношень еквівалентності теж буде еквівалентністю? Відповідь обґрунтувати.

4. Побудувати відношення часткового порядку на множині трикутників.

5. Якщо $R$ – відношення часткового порядку, то $R^{-1}$ теж відношення часткового порядку. Довести.

6. Нехай $R \subseteq A^2$, $x \le y \Leftrightarrow x$ ділиться на $y$. Вказати мінімальний, максимальний, найменший, найбільший елементи, якщо:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$; c) $A = \{2, 3, 4, \ldots\}$.

7. Нехай $M$ – сукупність непорожніх власних підмножин множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, впорядкована відношенням включення. Вказати мінімальний, максимальний, найменший, найбільший елементи.

8. Нехай на множині $A = \{a, b, c, d\}$ задано відношення $R = i_A \cup \{< a, c >, < b, c >, < b, d >, < a, b >\}$. Знайти лінійний порядок $Q$, для якого $R \subseteq Q$. Скільки існує таких лінійних порядків?

9. Нехай $R$ і $Q$ – бінарні відношення, задані на множині $A$. Довести:

a) $i_A * R = R$; b) $(R * Q)^{-1} = Q^{-1} * R^{-1}$.

10.Довести, що $R$ – симетричне відношення тоді і тільки тоді, коли $R = R^{-1}$.

11.Довести, що $R$ – антисиметричне відношення тоді і тільки тоді, коли $R \bigcap R^{-1} \subseteq i_A$, $\quad R \subseteq A^2$.

12.Якщо $R$ – відношення еквівалентності, то $R = R^{-1}$ та $R = R^2$. Довести.

13.Нехай $R_1$ та $R_2$ – відношення еквівалентності. Довести, що $R_1 * R_2$ – відношення еквівалентності тоді і тільки тоді, коли $R_1 * R_2 = R_2 * R_1$.

14.Нехай $|A| = n$, $|B| = m$. Скільки можна побудувати різних відображень $f:\ A \to B$?

15.Нехай $|A| = |B| = n$. Скільки можна побудувати різних бієкцій $f:\ A \to B$?

16.На множинах $A$ та $B$ задано відношення $R$. За яких умов відношення $R^{-1}$ є: a) всюди визначеним; b) функціональним; c) ін'єктивним; d) сюр'єктивним; e) бієктивним?

## 4. Логіка висловлювань

### Приклади розв'язання типових задач

<u>Задача 1</u>. *Довести, що* $P \to (P \wedge \neg(Q \vee R)) = \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)$.

*Розв'язання.* Доведемо вказану рівність двома способами.

А. Позначимо: $F_1 = P \to (P \wedge \neg(Q \vee R))$, $\quad F_2 = \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)$. Побудуємо таблиці істинності для формул $F_1$ та $F_2$. У кожній з формул занумеруємо порядок виконання логічних операцій:

$$F_1 = P \overset{4}{\to} (P \overset{3}{\wedge} \overset{2}{\neg}(Q \overset{1}{\vee} R)), \qquad F_2 = \overset{4}{\neg} P \overset{5}{\vee} (\overset{1}{\neg} Q \overset{3}{\wedge} \overset{2}{\neg} R).$$

Кожна з формул містить по три атомарних висловлювань: $P$, $Q$, $R$. Тому потрібно знайти істинносні значення формул $F_1$ та $F_2$ при восьми різних інтерпретаціях ($2^3 = 8$). Результати обчислень запишемо у вигляді таблиць істинності:

$F_1$:

| $P$ | $Q$ | $R$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

$F_2$:

| $P$ | $Q$ | $R$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Істинносні значення формул $F_1$ та $F_2$ наведені в останньому стовпчику кожної таблиці. З таблиць видно, що при однакових інтерпретаціях формули $F_1$ та $F_2$ набувають однакових значень, тобто формули рівносильні: $F_1 = F_2$.

В. Доведемо, що $F_1 = F_2$ за допомогою рівносильних перетворень:

$$P \to (P \wedge \neg(Q \vee R)) = \neg P \vee (P \wedge \neg(Q \vee R)) = \neg P \vee (P \wedge (\neg Q \wedge \neg R)) =$$

$$= (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)) = 1 \wedge (\neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)) = \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R).$$

При перетвореннях послідовно застосовувались: формула $X \to Y = \neg X \vee Y$, закон дистрибутивності, формули $\neg X \vee X = 1$ та $1 \wedge X = X$.

Задача 2. *Довести, що формула* $(\neg B \wedge (A \to B)) \to \neg A$ *є тавтологією.*

*Розв'язання.* Доведемо, що вказана формула є тавтологією, декількома способами.

А. Можна побудувати таблицю істинності і показати, що при будь-якій інтерпретації істиносне значення даної формули дорівнює 1.

В. Доведемо, що дана формула є тавтологією від супротивного. Припустимо, що існує така інтерпретація, при якій вказана формула приймає істиностне значення 0, тобто $(\neg B \wedge (A \to B)) \to \neg A = 0$. Це рівносильне системі:

$$\begin{cases}(\neg B \wedge (A \to B)) = 1 \\ \neg A = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\neg B = 1 \\ A \to B = 1 \\ A = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B = 0 \\ A \to B = 1. \\ A = 1\end{cases}$$

Отримали суперечність, оскільки $1 \to 0 = 0$. Отже, наше припущення невірне.

С. Виконаємо рівносильні перетворення даної формули:

$$(\neg B \wedge (A \to B)) \to \neg A = (\neg B \wedge (\neg A \vee B)) \to \neg A = \neg(\neg B \wedge (\neg A \vee B)) \vee \neg A =$$
$$= B \vee \neg(\neg A \vee B) \vee \neg A = (\neg A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee B) = 1.$$

При перетвореннях послідовно застосовувались: формула $X \to Y = \neg X \vee Y$ (двічі), закон де Моргана, асоціативний та комутативний закони, формула $X \vee \neg X = 1$.

<u>Задача 3</u>. *Записати формулу $(A \to (B \to C)) \to B$ у диз'юнктивній нормальній формі (ДНФ) та кон'юнктивній нормальній формі (КНФ).*

*Розв'язання.* Застосовуючи формулу $X \to Y = \neg X \vee Y$ (тричі), закон де Моргана, закон подвійного заперечення та асоціативний закон, маємо:

$$(A \to (B \to C)) \to B = \neg(A \to (B \to C)) \vee B = \neg(\neg A \vee (\neg B \vee C)) \vee B =$$
$$= (\neg\neg A \wedge \neg(\neg B \vee C)) \vee B = (A \wedge (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee B = (A \wedge B \wedge \neg C) \vee B.$$

В результаті цих перетворень отримали формулу, рівносильну даній і записану у ДНФ. Для того, щоб дістати КНФ, продовжимо перетворення, застосувавши закон дистрибутивності та ідемпотентності:

$$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee B = (A \vee B) \wedge (B \vee B) \wedge (\neg C \vee B) = (A \vee B) \wedge B \wedge (\neg C \vee B).$$

<u>Задача 4</u>. *Надворі може бути вітер або тиха погода. Якщо надворі вітер, то дерева хитаються. Дерева не хитаються. Чи означає це, що надворі тиха погода.*

*Розв'язання.* Виділимо прості висловлювання і введемо позначення: $A =$"надворі вітер", $B =$"надворі тиха погода", $C =$"дерева хитаються". Тоді дані в умові задачі міркування можна записати у вигляді: $A \vee B$, $A \to C$, $\neg C$ (це наші посилки). Потрібно з'ясувати, чи буде $B$ логічним наслідком цих трьох посилок.

*Перевірка логічної правильності міркувань:*

$A \vee B$, $A \to C$, $\neg C$ $\models$ (?) $B$

Спосіб 1. Скористаємось означенням логічного наслідку і побудуємо таблицю істинності:

$A$ $B$ $C$ $A \vee B$ $A \to C$ $\neg C$ $B$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | — |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | — |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | — |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | — |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | — |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | — |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | — |

З таблиці істинності видно, що при всіх інтерпретаціях, при яких всі посилки приймають істинносне значення 1 (у нашому випадку існує лише одна така інтерпретація), істинносне значення висновку $B$ теж дорівнює 1. Отже, $B$ є логічним наслідком трьох даних посилок. Зауважимо, що істинносне значення висновку можна не обчислювати (у таблиці стоїть знак "—"), якщо хоча б одна посилка є хибною.

Спосіб 2. Скористаємось теоремою1:

*Теорема 1.* $(F_1, F_2, \ldots, F_n \models F) \Leftrightarrow (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \to F = 1)$.

Побудуємо формулу $P$ та доведемо, що вона є тавтологією:

$$P = (A \vee B) \wedge (A \to C =) \wedge \neg C \to B = \neg((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge \neg C) \vee B =$$

$$= (\neg(A \vee B) \vee \neg(A \to C) \vee \neg\neg C) \vee B = ((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg A \vee C) \vee C) \vee B =$$

$$= (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vee C \vee B = ((\neg A \wedge \neg B) \vee B) \vee ((A \wedge \neg C) \vee C) =$$

$$= ((\neg A \vee B) \wedge (B \vee \neg B)) \vee ((A \vee C) \wedge (\neg C \vee C)) = ((\neg A \vee B) \wedge 1) \vee ((A \vee C) \wedge 1) =$$

$$= \neg A \vee B \vee A \vee C = (\neg A \vee A) \vee B \vee C = 1 \vee B \vee C = 1.$$

Побудована формула $P$ є тавтологією ( тобто тотожньо істинною), тому за теоремою 1 $B$ є логічним наслідком даних посилок $A \vee B$, $A \to C$, $\neg C$.

Спосіб 3. Скористаємось теоремою 2:

*Теорема 2.* $(F_1, F_2, \ldots, F_n \models F) \Leftrightarrow (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg F$ – суперечність).

Побудуємо формулу $Q$ та доведемо, що вона є суперечністю:

$$Q = (A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge \neg C \wedge \neg B = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge \neg C \wedge \neg B =$$

$$= ((A \vee B) \wedge \neg B) \wedge ((\neg A \vee C) \wedge \neg C) = ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B)) \wedge$$

$$\wedge((\neg A \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C)) = A \wedge \neg B \wedge \neg A \wedge \neg C = 0 \wedge \neg B \wedge \neg C = 0.$$

Врахували, що $B \wedge \neg B = C \wedge \neg C = 0$.

Побудована формула $Q$ є суперечністю (тобто тотожньо хибною формулою), тому за теоремою 2 $B$ є логічним наслідком даних посилок $A \vee B$, $A \to C$, $\neg C$.

<u>Задача 5</u>. *Якщо надворі йде дощ, то на небі є хмари. На небі є хмари. Чи означає це, що надворі йде дощ.*

*Розв'язання.* Як і в попередній задачі, виділимо прості висловлювання і введемо позначення: $D=$"надворі йде дощ", $X=$"на небі є хмари". Маємо посилки: $D \to X$, $X$. З'ясуємо, чи буде $D$ логічним наслідком цих посилок:

$$D \to X, \qquad X \qquad \models (?) \qquad D.$$

Спосіб 1. Для перевірки логічного слідування скористаємось означенням. Побудуємо таблицю істинності:

| $D$ | $X$ | $D \to X$ | $X$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | – |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | – |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

З таблиці істинності видно, що існує дві інтерпретації, при яких обидві посилки приймають істинносне значення 1, але на одній з них висновок має істинносне значення 0. Отже, $D$ не є логічним наслідком вказаних двох посилок.

Спосіб 2. Скористаємось теоремою 1.

*Теорема 1.* $(F_1, F_2, \ldots, F_n \quad \models F) \Leftrightarrow (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \to F = 1)$.

$$P = (D \to X) \wedge X \to D = \neg((D \to X) \wedge X) \vee D = \neg(\underbrace{(\neg D \vee X) \wedge X}_{\text{поглинання}}) \vee D =$$

$= \neg X \vee D \neq 1$ при довільних істиносних значеннях змінних.

Побудована формула $P$ не є тавтологією ( тобто тотожньо істинною), тому за теоремою 1 $D$ не є логічним наслідком даних посилок.

Спосіб 3. Скористаємось теоремою 2.

*Теорема 2.* $(F_1, F_2, \ldots, F_n \quad \models F) \Leftrightarrow (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg F = 0)$.

Побудуємо формулу $Q$ та покажемо, що вона не є суперечністю:

$Q = (D \to X) \wedge X \wedge \neg D = \underbrace{(\neg D \vee X) \wedge X}_{\text{поглинання}} \wedge \neg D = X \wedge \neg D \neq 0$ при довільних істинносних значеннях змінних.

Отже, за теоремою 2 $D$ не є логічним наслідком даних посилок.

**A4**

1. Які з наведених виразів є висловленнями? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

a) Число $12$ кратне $6$;

b) Кожне дійсне число задовольняє нерівність $-\sqrt{a} \le 0$;

c) Хай живе штучний інтелект!

d) Всі прості числа непарні.

2. Нехай $P$ означає “$n^2$ – парне”, $Q$ означає “$n$ – парне”. Записати символічні вирази $P \to Q$ та $\neg Q \to \neg P$ у вигляді висловлювань. Показати, що $P \to Q = \neg Q \to \neg P$ .

3. Визначити істиносне значення складених висловлень:

a) Перпендикуляр має більшу довжину, ніж похила або 7 – просте число.

b) Якщо перпендикуляр має більшу довжину, ніж похила, то 7 – просте число.

c) Якщо 7 – просте число, то перпендикуляр має більшу довжину, ніж похила.

d) Перпендикуляр має більшу довжину, ніж похила, тоді і тільки тоді, коли студенти КПІ не вміють читати.

4. У ході розслідування про пограбування банку було отримано свідчення трьох обвинувачених: Джонса, Брауна та Сміта.

Джонс: “Браун є винним, а Сміт не винен”.

Браун: “Джонс не є винним, або Сміт винен”.

Сміт: “Я не винен. Джонс або Браун пограбували банк”.

Перевірити сумісність всіх показань, тобто чи можуть свідчення всіх трьох обвинувачених бути правдивими. Чи можна з’ясувати, хто саме пограбував банк? Чи можуть всі вони говорити неправду?

5. Скільки моделей має формула $F = (\neg A \vee B \to C) \wedge A$?

6. При якій кількості інтерпретацій формула $F = A \to B \vee C \vee D$ набуває значення 1?

7. З’ясувати, чи будуть формули еквівалентними, якщо $F_1 = P \wedge Q$ та $F_2 = \neg(P \to \neg Q)$.

8. Не будуючи таблиці істинності, показати двома способами, що формули $F_1 = A \to (B \to A)$ та $F_2 = (P \to Q) \wedge (Q \to T) \to (P \to T)$ є тавтологіями.

9. Довести двома способами, що формула $F = (P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$ є суперечністю.

10.Довести, що $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

11.Чотири студентки Аня, Валя, Галя і Дарина зайняли перші чотири місця на змаганнях з гімнастики, причому жодні дві з них не ділили між собою ніякі два місця. На питання "Яке місце зайняла кожна з них?" троє глядачів дали три різні відповіді:

a) Аня зайняла друге місце, Дарина – третє.

b) Аня – перше місце, Дарина – друге.

c) Галя – друге місце, Дарина – четверте.

В кожній з цих відповідей одне висловлювання є істинним, а друге – хибним. З'ясувати, яке місце зайняла кожна студентка.

12.Спростити формулу $F = (\neg(A \vee B) \to A \vee B) \wedge B$.

13.З'ясувати, чи буде сумісною сукупність наступних тверджень:

a) Якщо йде дощ, то сонце не світить і небо захмарене.

b) Весною або літом часто буває гарна погода.

c) Якщо погода гарна, то невірно, що може бути сильний вітер або неймовірна спека.

d) Зараз літо, небо не захмарене і дуже сильний вітер.

14.Привести формулу $F = \neg(A \vee \neg B) \wedge (C \to D)$ до ДНФ та КНФ.

15.Купівельна спроможність грошей падає, якщо зростають податки. Люди незадоволені, коли падає купівельна спроможність грошей. Податки зростають. Чи означає це, що люди незадоволені.

16.Чи буде логічним наслідком формула $B \to (A \vee C)$ множини формул $A \wedge B \wedge \neg C$, $B \to C$, $B \to A$?

## В4

1. Нехай $P$ означає "Я складу цей екзамен", $Q$ означає "Я буду регулярно виконувати домашні завдання". Записати у символічній формі наступні висловлювання.

a) Я складу цей екзамен тільки у тому випадку, коли буду регулярно виконувати домашні завдання.
b) Регулярне виконання домашніх завдань є необхідною умовою того, що я складу цей екзамен.
c) Складання цього екзамену є достатньою умовою того, що я регулярно виконував домашні завдання.
d) Я складу цей екзамен тоді і тільки тоді, коли я буду регулярно виконувати домашні завдання.

e) Регулярне виконання домашніх завдань є необхідною і достатньою умовою для того, щоб я склав екзамен.

2. Записати висловлення у вигляді формул. Перевірити їх сумісність.

Якщо політична особа хоче отримати Нобелівську премію миру, то вона повинна невпинно працювати для забезпечення справедливого миру, а не займатись тільки балачками про мир. Політична особа не отримає авторитет у світової громадськості тоді і тільки тоді, коли вона займається тільки балачками про мир. Політична особа хоче отримати Нобелівську премію миру і отримати авторитет у світової громадськості. Але політична особа займається тільки балачками про мир.

3. Відомо, що імплікація $A \to B$ є істинною, а еквівалентність $A \leftrightarrow B$ – хибною. Що можна сказати про істинносне значення імплікації $B \to A$?

4. Перевірити, чи буде імплікація комутативною операцію.

5. Вказати, чи є наведені формули тавтологіями, суперечностями чи нейтральними:

a) $(A \wedge (A \to B)) \to B$; c) $\neg(\neg(A \to B) \to (A \to \neg B))$;

b) $\neg B \wedge A \wedge (A \to B)$; d) $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$.

6. Три учні різних шкіл міста Києва приїхали на відпочинок у літній табір. На питання вожатої, в яких школах Києва вони вчаться, кожен дав таку відповідь:

Антон: "Я вчусь у школі № 4, а Сергій – у школі № 8";
Сергій: "Я вчусь у школі № 4, а Антон – у школі № 3";
Коля: "Я вчусь у школі № 4, а Антон – у школі № 8".

Вожата, здивована протиріччями у відповідях хлопців, попросила їх пояснити, де правда, а де брехня. Тоді хлопці признались, що у відповідях кожного з них одне твердження є вірним, а інше – ні. В якій школі вчиться кожен з хлопців?

7. Довести двома способами закон поглинання $A \wedge (A \vee B) = A$.

8. Довести двома способами, що $(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge A = A \wedge B \wedge C$.

9. Спростити формулу $F = (A \leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)$.

10. Довести суперечність формули $F = \neg(P \to (Q \to \neg P)) \wedge (Q \to \neg P)$, перетворивши її у ДНФ.

11. Довести тавтологічність формули $F = ((P \to Q) \wedge P) \to Q$, перетворивши її до КНФ.

12. Привести формулу $F = P \to ((Q \wedge R) \to S)$ до ДНФ та КНФ.

13. Довести логічне слідування (метод доведення розбором випадків):

$$H, \quad H \to (P \vee Q), \quad P \to C, \quad Q \to C \quad \models \quad C,$$

де $H$ – гіпотеза, $P$ і $Q$ – два можливих випадки, $C$ – наслідок.

## C4

1. Довести, що $(A\wedge B)\rightarrow C=\neg A\vee(B\rightarrow C)$.

2. Перевірити еквівалентність формул, перетворивши формули в лівій та правій частинах рівності до однієї й тієї ж нормальної форми:

a) $(P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)=P\rightarrow(Q\wedge R)$;

b) $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\wedge Q)=(\neg P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$;

c) $P\wedge Q\wedge(\neg P\vee\neg Q)=\neg P\wedge\neg Q\wedge(P\vee Q)$;

d) $P\vee(P\rightarrow(P\wedge Q))=\neg P\vee\neg Q\vee(P\wedge Q)$.

3. Привести формулу $F=(A\rightarrow B)\leftrightarrow(C\rightarrow B)$ до ДНФ та КНФ.

4. Чи буде логічним наслідком формула $A\rightarrow C$ множини формул $A\rightarrow(B\rightarrow C)$, $B$?

5. Якщо завтра буде холодно, я одягну тепле пальто, якщо рукав буде полагоджений. Завтра буде холодно, а рукав не буде полагоджений. Чи означає це, що я не одягну тепле пальто?

6. Якщо я піду завтра на першу пару, то повинен буду прокинутись рано. Якщо я піду ввечері на дискотеку, то ляжу спати пізно. Якщо я ляжу спати пізно, а прокинуся рано, то я мушу задовольнитись лише п’ятьма годинами сну. Я просто не можу обійтися п’ятьма годинами сну. Отже, я мушу або пропустити першу пару, або не ходити на дискотеку. Перевірити, чи має місце логічне слідування.

# 5. Булеві функції

### Приклади розв’язання типових задач

<u>Задача 1</u>. *Звести формулу* $((x\downarrow y)\downarrow(x\,|\,\bar y))\vee\overline{(\bar x\vee y\vee(\bar y\downarrow\bar z))}$ *до диз’юнктивної нормальної форми (ДНФ) та досконалої диз’юнктивної нормальної форми (ДДНФ).*

*Розв’язання.* Використовуючи означення операцій “стрілка Пірса” та “штрих Шеффера”, маємо

$$((x\downarrow y)\downarrow(x\,|\,\bar y))\vee\overline{(\bar x\vee y\vee(\bar y\downarrow\bar z))}\;=\;\overline{\overline{x\vee y}\vee\overline{x\bar y}}\vee\overline{\bar x\vee y\vee\overline{\bar y\vee\bar z}}\;=$$

$$=\;\overline{\overline{(x\vee y)}}\cdot\overline{\overline{(x\bar y)}}\vee(\bar{\bar x}\,\bar y\,\overline{\overline{(\bar y\vee\bar z)}})\;=(x\vee y)\cdot(x\bar y)\vee(x\,\bar y\,(\bar y\vee\bar z))\;=$$

$$=\;x\,x\,\bar y\vee y\,x\,\bar y\vee x\,\bar y\,\bar y\vee x\,\bar y\,\bar z\;=\;x\,\bar y\vee 0\vee x\,\bar y\vee x\,\bar y\,\bar z\;=x\,\bar y\vee x\,\bar y\,\bar z\,.$$

Для того, щоб побудувати ДДНФ застосуємо формулу розщеплення:

$$x\,\bar y\vee x\,\bar y\,\bar z\;=x\,\bar y\cdot 1\vee x\,\bar y\,\bar z=x\,\bar y\cdot(z\vee\bar z)\vee x\,\bar y\,\bar z\;=$$

$$=\;x\,\bar y\,z\vee x\,\bar y\,\bar z\vee x\,\bar y\,\bar z\;=\;x\,\bar y\,z\vee x\,\bar y\,\bar z\,.$$

Задача 2. *Використовуючи теорему про диз'юнктивний розклад булевої функції, розкласти функцію* $f(x,y,z,t) = (\overline{x\,y \vee \bar{z}})\,t$ *за змінними* $x$ *та* $z$.

*Розв'язання.* За теоремою про диз'юнктивний розклад маємо:

$$f(x,y,z,t) = x^0 z^0 f(0,y,0,t) \vee x^0 z^1 f(0,y,1,t) \vee x^1 z^0 f(1,y,0,t) \vee$$
$$\vee\, x^1 z^1 f(1,y,1,t) = \bar{x}\,\bar{z}\, f(0,y,0,t) \vee \bar{x}\, z\, f(0,y,1,t) \vee x\,\bar{z}\, f(1,y,0,t) \vee x\, z\, f(1,y,1,t).$$

Обчислимо:

$$f(0,y,0,t) = (\overline{0 \cdot y \vee \bar{0}})\, t = (\overline{0 \vee 1})\, t = 0 \cdot t = 0;$$
$$f(0,y,1,t) = (\overline{0 \cdot y \vee \bar{1}})\, t = (\overline{0 \vee 0})\, t = 1 \cdot t = t;$$
$$f(1,y,0,t) = (\overline{1 \cdot y \vee \bar{0}})\, t = (\overline{y \vee 1})\, t = 0 \cdot t = 0;$$
$$f(1,y,1,t) = (\overline{1 \cdot y \vee \bar{1}})\, t = (\overline{y \vee 0})\, t = \bar{y}\, t.$$

Підставивши отримані значення у формулу диз'юнктивного розкладу, маємо

$$f(x,y,z,t) = \bar{x}\,\bar{z} \cdot 0 \vee \bar{x}\, z \cdot t \vee x\,\bar{z} \cdot 0 \vee x\, z \cdot \bar{y}\, t = \bar{x}\, z\, t \vee x\, \bar{y}\, z\, t.$$

Задача 3. *Побудувати досконалу диз'юнктивну нормальну форму (ДДНФ) та досконалу кон'юнктивну нормальну форму (ДКНФ) булевої функції, яка задана таблицею.*

| $x$ | $y$ | $z$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

*Розв'язання.* Для побудови ДДНФ виділимо в таблиці ті рядки, для яких значення функції $f$ на відповідному булевому наборі дорівнює 1. Виписавши елементарні кон'юнкції, які їм відповідають, маємо:

$$f(x,y,z) = x^0 y^1 z^0 \vee x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^1 z^0 = \bar{x}\, y\, \bar{z} \vee \bar{x}\, y\, z \vee x\, y\, \bar{z}.$$

Для того, щоб побудувати ДКНФ для функції $f$, виділимо в таблиці ті рядки, в яких значення функції дорівнює нулю. Для кожного з цих булевих наборів будуємо відповідну елементарну диз'юнкцію. Маємо:

$$f(x,y,z) = (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}}) \cdot (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}) \cdot (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}}) \cdot (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}) \cdot$$

$$\cdot (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{1}}) = (x \vee y \vee z) \cdot (x \vee y \vee \bar{z}) \cdot (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

<u>Задача 4</u>. *Скільки існує самодвоїстих функцій від $n$ змінних?*

*Розв'язання.* Множина наборів, значення на яких визначають самодвоїсту функцію, містить $2^{n-1}$ елементів (половина всіх можливих наборів). Оскільки булева функція на кожному наборі може приймати два значення 0 та 1, то існує $2^{2^{n-1}}$ самодвоїстих функцій від $n$ змінних.

<u>Задача 5</u>. *Довести, що на протилежних наборах самодвоїста функція приймає протилежні значення.*

*Розв'язання.* Нехай $f(x_1, \ldots, x_n)$ – самодвоїста функція, тобто

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}.$$

Маємо

$$\overline{f(x_1, \ldots, x_n)} = \overline{f^*(x_1, \ldots, x_n)} = \overline{\overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}} = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n).$$

<u>Задача 6</u>. *Побудувати булеву функцію $f^*(x, y, z)$, двоїсту до функції $f(x, y, z) = x \vee \bar{y}\, z \vee 0$.*

*Розв'язання.* Замінимо в даній функції всі знаки $\vee$ на $\wedge$ (двічі), $\wedge$ на $\vee$ та 0 на 1. Використавши дужки для того, щоб порядок виконання операцій залишився тим же, маємо

$$f^*(x, y, z) = x \wedge (\bar{y} \vee z) \wedge 1.$$

<u>Задача 7</u>. *Мінімізувати за допомогою методу Квайна булеву функцію*

$$f(x, y, z) = \bar{x}\, y\, \bar{z} \vee \bar{x}\, y\, z \vee x\, y\, z \vee x\, \bar{y}\, z \vee x\, \bar{y}\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y}\, \bar{z}.$$

*За допомогою методу Петрика виписати всі тупикові ДНФ та вибрати серед них мінімальні.*

*Розв'язання.* Виконавши всі можливі операції склеювання, отримаємо диз'юнкцію всіх можливих імплікант функції $f(x, y, z)$ (скорочену ДНФ):

$$f(x, y, z) = \underset{1}{\bar{x}\, y\, \bar{z}} \vee \underset{2}{\bar{x}\, y\, z} \vee \underset{3}{x\, y\, z} \vee \underset{4}{x\, \bar{y}\, z} \vee \underset{5}{x\, \bar{y}\, \bar{z}} \vee \underset{6}{\bar{x}\, \bar{y}\, \bar{z}} =$$

$$= \underset{1,2}{\bar{x}\, y} \vee \underset{1,6}{\bar{x}\, \bar{z}} \vee \underset{2,3}{y\, z} \vee \underset{3,4}{x\, z} \vee \underset{4,5}{x\, \bar{y}} \vee \underset{5,6}{\bar{y}\, \bar{z}}.$$

Очевидно, що операція поглинання не може бути застосованою до отриманої формули. Будуємо імплікантну таблицю.

| | | $\bar{x}y\bar{z}$ | $\bar{x}yz$ | $xyz$ | $x\bar{y}z$ | $x\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\bar{x}y$ | • | • | | | | |
| $B$ | $\bar{x}\bar{z}$ | • | | | | | • |
| $C$ | $yz$ | | • | • | | | |
| $D$ | $xz$ | | | • | • | | |
| $E$ | $x\bar{y}$ | | | | • | • | |
| $F$ | $\bar{y}\bar{z}$ | | | | | • | • |
| | | $A \vee B$ | $A \vee C$ | $C \vee D$ | $D \vee E$ | $E \vee F$ | $B \vee F$ |

У таблиці відміченими є ті клітинки, для яких проста імпліканта, що маркує рядок, є власною частиною повної елементарної кон’юнкції, що маркує стовпчик (імпліканта поглинає відповідну повну елементарну кон’юнкцію). Сформуємо набори покриттів і випишемо мінімальні тупикові ДНФ.

Очевидно, що не існує таких наборів покриттів, у яких використовується одна чи дві прості імпліканти. В той же час існують два набори покриттів, у яких використовуються по три імпліканти (замість шести початкових):

$$\text{ТДНФ}_1 = \bar{x}y \vee xz \vee \bar{y}\bar{z}; \qquad \text{ТДНФ}_2 = \bar{x}\bar{z} \vee yz \vee x\bar{y}.$$

Ці тупикові форми і будуть мінімальними.

Для того, щоб за допомогою методу Петрика виписати всі тупикові форми, поставимо у відповідність кожній простій імпліканті даної функції деяку літеру (ідентифікатор) – перший стовпчик таблиці. Кожному стовпчику приписується диз’юнкція літер, які відповідають тим рядкам, в яких у даному стовпчику стоїть значок “•” – останній рядок таблиці. Далі утворюємо кон’юнкцію цих диз’юнкцій:

$$\Phi = (A \vee B)(A \vee C)(C \vee D)(D \vee E)(E \vee F)(B \vee F).$$

Це і буде формула покриття конституент одиниці простими імплікантами.

Перетворимо цю формулу до ДНФ, застосовуючи при цьому закони дистрибутивності, ідемпотентності, поглинання та комутативності. Маємо:

$$\Phi = (A \vee B)(A \vee C)(C \vee D)(D \vee E)(E \vee F)(B \vee F) =$$

$$= (A \vee AC \vee AB \vee BC)(CD \vee CE \vee D \vee DE)(BE \vee EF \vee BF \vee F) =$$

$$= (A \vee BC)(CE \vee D)(BE \vee F) = (ACE \vee AD \vee BCE \vee BCD)(BE \vee F) =$$

$$= ABCE \vee ACEF \vee ABDE \vee ADF \vee BCE \vee BCEF \vee BCDE \vee BCDF =$$
$$= ADF \vee BCE \vee ACEF \vee ABDE \vee BCDF$$

($BCE$ поглинає $ABCE$, $BCEF$ та $BCDE$). Кожна елементарна кон'юнкція утвореної ДНФ відповідає одній тупиковій формі даної функції, тобто

$$\text{ТДНФ}_1 = \bar{x}\,y \vee x\,z \vee \bar{y}\,\bar{z};$$
$$\text{ТДНФ}_2 = \bar{x}\,\bar{z} \vee y\,z \vee x\,\bar{y};$$
$$\text{ТДНФ}_3 = \bar{x}\,y \vee y\,z \vee x\,\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{z};$$
$$\text{ТДНФ}_4 = \bar{x}\,y \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee x\,z \vee x\,\bar{y};$$
$$\text{ТДНФ}_5 = \bar{x}\,\bar{z} \vee y\,z \vee x\,z \vee \bar{y}\,\bar{z}.$$

Очевидно, що перші дві тупикові форми і будуть мінімальними.

## А5

1. На інтерпретаціях № 2 та № 5 знайти істинносне значення функції $f(x,y,z) = (x \oplus y) \wedge z \to \bar{x} \vee (y \sim z)$.

2. Чи буде функція $f(x,y,z) = ((x \oplus y) \sim z)\,(x \to y\,z)$ тотожно дорівнювати 0 чи 1?

3. Знайти фіктивні змінні булевої функції $f$, яка задана формулою $f(x,y,z) = ((z \to y) \vee x)\,(y \to x)\,z\,\bar{x}$.

4. Довести рівносильність формул $f_1 = (x \to y) \to y$ та $f_2 = (x \downarrow y) \mid \bar{y}$. Використати таблиці істинності та тотожні перетворення.

5. Чи будуть еквівалентними формули $f_1 = (x \to y) \to z$ та $f_2 = x \to (y \to z)$?

6. Подати булеву функцію $f(x,y) = (\bar{x} \to \bar{y}) \downarrow y$ формулою в булевій алгебрі.

7. Нехай задана функція $f(x,y) = (x \to y) \vee (x \to x\,y)$.

   a) Який порядковий номер цієї функції?

   b) Застосовуючи тотожні перетворення, спростити формулу, яка задає $f(x,y)$.

   c) Розкласти функцію $f(x,y)$ за змінною $x$.

   d) Побудувати ДКНФ функції $f(x,y)$.

   e) Побудувати $f^*(x,y)$. Чи буде функція $f(x,y)$ самодвоїстою?

8. Застосовуючи тотожні перетворення, привести функцію $f(x,y,z) = (x\,y \vee \bar{z}) \oplus x$ до виду ДНФ, а потім ДДНФ.

9. Побудувати диз'юнктивний розклад булевої функції $f(x,y,z,t)=\overline{x}\,y\,\overline{z}\vee\overline{x}\,\overline{y}\,z\vee x\,\overline{y}\,\overline{z}\vee x\,z\,t$:

a) за змінною $z$;
b) за змінними $x,y$.

10. Побудувати диз'юнктивний розклад булевої функції $f=(0,0,1,1,0,1,0,1)$ за змінними $x,z$.

11. Чи будуть двоїстими функції $f_1=(\overline{x}\mid\overline{y})\to(x\vee\overline{y})$ та $f_2=(x\mid y)x\overline{y}$?

12. Побудувати функцію, двоїсту до $f=x\downarrow y$.

13. Функція від трьох змінних набуває значень 1 на наборах № 1, 2, 4, 7. Побудувати ДДНФ і ДКНФ. З'ясувати, чи буде ця функція самодвоїстою.

14. За допомогою тотожних перетворень побудувати поліном Жегалкіна:

a) $f=(x\mid y)\downarrow z$;
b) $f=(x\to y)\vee\overline{z}\mid x$.

15. Методом невизначених коефіцієнтів побудувати поліном Жегалкіна: $f=(\overline{x}\downarrow\overline{y})\mid x$.

16. Побудувати поліном Жегалкіна булевої функції $f=(0,0,1,1,0,1,0,0)$.

17. Подати формулу $f$ у вигляді поліному Жегалкіна, звівши її до ДДНФ, якщо $f(x,y,z)=x\overline{y}z\vee y\overline{z}\vee\overline{x}\,z$.

18. З'ясувати, чи будуть дані булеві функції лінійними, вказати суттєві змінні. Які з них зберігають 0 та зберігають 1, якщо:

a) $f_1=(x\oplus y)(x\downarrow y)\vee x$;
b) $f_2=xy\vee\overline{y}z$.

19. З'ясувати, чи буде булева функція монотонною, якщо $f(x,y)=(\overline{x}\to x\overline{y})y$.

20. Довести, що система $\{x_1\mid x_2\}$ є повною. Виразити всі булеві функції алгебри логіки через штрих Шеффера.

21. Перевірити повноту системи булевих функцій $f_1(x,y)=x\oplus xy$, $f_2(x,y,z)=x\leftrightarrow yz$, $f_3(x,y)=x\oplus\overline{y}$, $f_4(x,y,z)=xy\vee\overline{z}$. Чи буде система нескоротною? Вказати повну нескоротну систему зі вказаних функцій.

22. З'ясувати, які з елементарних кон'юнкцій, складених з двох змінних $x$ та $y$, є імплікантами функції $f(x,y)=x\vee y$. Чи будуть вказані імпліканти простими? Вказати прості імпліканти.

23. Серед наведених елементарних кон’юнкцій $K$ вибрати імпліканти функції $f(x,y,z)$, заданої вектором $f=(1,1,0,0,1,1,1,0)$, якщо $K=\{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z},\ \bar{x}\,\bar{y}\,z,\ \bar{x}\,y\,\bar{z},\ \bar{x}\,z,\ \bar{y}\,\bar{z},\ x\,\bar{y},\ \bar{x},\ \bar{y}\}$.

24. Мінімізувати булеву функцію $f=(1,1,0,0,1,1,1,0)$ аналітичним способом та за допомогою карти Карно.

25. За допомогою карт Карно мінімізувати булеві функції:

a) $f=(x\oplus y)(x\downarrow y)\vee x$;

b) $f=xy\vee\bar{y}z$.

26. Привести булеву функцію $f=x\,y\,\bar{z}\vee x\,z\vee\bar{x}\,y$ до ДДНФ та мінімізувати її аналітичним методом.

27. Функція $f$ приймає значення 1 на наборах: 010, 011, 100, 101 та 111. За допомогою методу Петрика знайти тупикові ДНФ та вибрати серед них мінімальні форми.

28. За допомогою методу Квайна мінімізувати булеву функцію $f(x,y,z)=x\,y\,z\vee\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,y\,z\vee x\,\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\,z$.

29. Функція $f$ приймає значення 1 на наборах: 010, 110, 101 та 111. Мінімізувати функцію $f$ за допомогою методу Квайна.

## B5

1. Побудувати таблицю істинності для функції $f(x,y,z)=(x\,y\vee\bar{z})\oplus x$.

2. Чи буде функція $f(x,y)=(x\bar{y}\downarrow\bar{x})\to y$ тотожно дорівнювати 0 чи 1?

3. Показати, що $x$ є фіктивною змінною функції $f$, що задана формулою $f(x,y,z)=((x\vee y)\,(x\vee\bar{z})\to(\bar{x}\to y\bar{z}))\,y$.

4. Довести рівносильність формул $f_1=\bar{x}\,\bar{z}\vee xy\vee x\bar{z}$ та $f_2=xyz\vee\bar{z}$. Використати таблиці істинності та тотожні перетворення.

5. Чи будуть еквівалентними формули $f_1=\bar{y}\to(x\downarrow y)$ та $f_2=x\bar{y}\to(\bar{x}\,y\,|\,\bar{y})x$? Подати формули в булевій алгебрі та в алгебрі логіки.

6. Нехай задана функція $f(x,y)=(x\,|\,\bar{y})\,(\bar{x}\to y)\vee x$.

a) Який порядковий номер цієї функції?

b) Застосовуючи тотожні перетворення, спростити формулу, яка задає $f(x,y)$.

c) Розкласти функцію $f(x,y)$ за змінною $x$.

d) Побудувати ДКНФ функції $f(x,y)$.

e) Побудувати $f^*(x,y)$. Чи буде функція $f(x,y)$ самодвоїстою?

7. Перевірити асоціативність булевої функції $f(x,y)=x\oplus y$.

8. Перевірити дистрибутивність кон'юнкції відносно додавання за модулем два та навпаки.

9. Знайти диз'юнктивний розклад функції за змінними $x,z$, якщо $f(x,y,z)=(x\,y\vee x\,\overline{z})\,(x\vee\overline{y}\,z\,(z\vee\overline{x}\,y))$.

10. Знайти диз'юнктивний розклад булевої функції за змінними $x,y$, якщо $f=(0,1,0,0,1,0,1,1)$.

11. Нехай задана функція $f(x,y,z)=(x\to(y\vee z))\,|\,((x\downarrow y)\sim(\overline{x}\oplus z))$. За таблицею істинності побудувати ДДНФ і ДКНФ. З'ясувати, чи буде ця функція самодвоїстою.

12. Привести булеву функцію $f(x,y,z)=(x\vee\overline{y}\vee z)(y\vee\overline{z})(\overline{x}\vee z)$ до ДКНФ.

13. Привести булеву функцію $f(x,y,z)=(x\vee y\vee z)(y\to\overline{z})\downarrow\overline{x}$ до ДДНФ та ДКНФ шляхом тотожних перетворень та за допомогою таблиць істинності.

14. Чи є самодвоїстими булеві функції:

a) $f_1(x,y,z)=x\oplus y\oplus z$;

b) $f_2(x,y)=\overline{x}\,\overline{y}\downarrow(\overline{x}\,y\to x)y$.

15. Записати функції, двоїсті до функцій:

a) $f=(\overline{x}\vee y\,\overline{z})\,(x\,y\vee x\,\overline{z})$;

b) $f=(x\vee\overline{y})\,z\,\overline{t}\vee\overline{x}\,t$.

16. Побудувати двома способами поліном Жегалкіна:

a) $f=\overline{x}\,z\to(x\vee y)$;

b) $f=y\,\overline{z}\to(\overline{x}\leftrightarrow z)$.

17. Методом невизначених коефіцієнтів побудувати поліном Жегалкіна для $f=(0,1,1,1,0,1,0,1)$.

18. Побудувати поліном Жегалкіна за допомогою перетворень $f=(x\oplus y)\vee\overline{x}\,z$.

19. З’ясувати, чи буде булева функція монотонною, якщо $f(x,y)=(\overline{x}\downarrow\overline{y})\,|\,x$. Чи зберігає вона 0 та 1?

20. З’ясувати, чи буде повною система функцій: $\{x_1\cdot x_2,\ x_1\oplus x_2\}$.

21. Використовуючи критерій повноти, з’ясувати, чи є функціонально повною система $\{x\to y,\ x\oplus y,\ 1\}$.

22. Перевірити повноту системи булевих функцій $f_1(x,y)=\overline{xy}\,|\,(x\to\overline{y})$, $f_2(x,y,z)=(xy)\downarrow(y\leftrightarrow z)$, $f_3(x,y)=x\,\overline{y}\oplus(\overline{x}\vee y)$.

23. З’ясувати, які з елементарних кон’юнкцій, складених з двох змінних, є імплікантами функції $f(x,y,z)=x\,(y\vee z)$. Чи будуть вказані імпліканти простими?

24. За допомогою карт Карно мінімізувати булеві функції:

a) $f=x\,y\,z\vee\overline{x}\,y\,z\vee\overline{x}\,y\,\overline{z}\vee\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\vee x\,y\,\overline{z}$;

b) $f=x\,y\,\overline{z}\,t\vee x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t\vee\overline{x}\,y\,z\,t\vee\overline{x}\,y\,\overline{z}\,t\vee\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,t\vee\overline{x}\,\overline{y}\,z\,t$.

25. Побудувати ДДНФ для булевої функції $f(x,y,z)=xy\overline{z}\vee xz\vee\overline{x}\,y$ та мінімізувати її аналітичним спрсобом.

26. Функція $f$ приймає значення 1 на наборах: 0000, 0010, 0100, 0110, 1010, 1011, 1101, 1111. Мінімізувати функцію $f$ за допомогою карти Карно.

## C5

1. Знайти фіктивні змінні функції $f$, що задана вектором значень:

a) $f=(0,0,1,1,0,0,1,1)$;

b) $f=(0,0,1,1,1,1,0,0)$.

2. Скільки існує різних булевих функцій від $n$ змінних, що зберігають нуль (тобто дорівнюють 0 на нульовому наборі)?

3. Спростити формулу $(x\to y)\,(z\to y)\,(x\,z\to y)$.

4. Довести тотожності:

a) $x\to y\,z\ =\ x\,|\,(y\,|\,z)$;

b) $x\,y\,z\to(x\vee y\vee z)\ =\ (x\to y)\vee(y\to z)\vee(z\to x)$.

5. Подати булеву функцію формулою в булевій алгебрі, якщо $f(x,y)=(x\oplus y)\downarrow(x\,|\,y)$.

6. Нехай задана функція $f(x,y,z) = ((x\,y \vee z) \mid (x \mid \overline{y})) \sim (z \to (y \oplus \overline{z}))$. За таблицею істинності побудувати ДДНФ і ДКНФ. З’ясувати, чи буде ця функція самодвоїстою.

7. Привести булеву функцію $f(x,y,z) = \overline{(x \vee y\,\overline{z})}\,(x \vee z)$ шляхом тотожних перетворень до ДДНФ та ДКНФ.

8. Побудувати всі самодвоїсті функції від двох змінних.

9. Перевірити рівності:

a) $x \vee \overline{x}\,y = x \vee y$;

b) $\overline{x} \vee x\,y = \overline{x} \vee y$.

Записати двоїсті співвідношення та довести їх справедливість.

10. Знайти всі самодвоїсті функції від двох змінних.

11. Перевірити, чи будуть булеві функції співпадати $(f_1 = f_2)$, якщо $f_1 = (\overline{x} \vee y) \downarrow (y \vee z)$, $f_2 = \overline{\overline{x} \vee y \vee z}$. Звести їх до поліному Жегалкіна.

12. Мінімізувати за допомогою методу Квайна булеву функцію $f = (0,1,1,1,0,1,0,1)$. Побудувати карту Карно.

13. Мінімізувати за допомогою методу Квайна булеву функцію $f = x\,y\,z\,t \vee \overline{x}\,y\,z\,t \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. – Київ: Наукова думка, 2002. – 580 с.
2. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. – Київ: Видавнича група BHV, 2007. – 367 с.
3. Спекторський І.Я. Дискретна математика. Київ: Політехніка НТУУ «КПІ», 2004. – 219 с.
4. Трохимчук Р.М. Основи дискретної математики. Практикум. – Київ: МАУП, 2004. – 163 с.
5. *Дискретний аналіз 1. Множини та відношення [Електронний ресурс]: методичні вказівки до практичних занять для студентів напрямів підготовки «Безпека інформаційних і комунікаційних систем» та «Прикладна математика» / НТУУ «КПІ»; уклад. А. А. Шумська. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,81 Мбайт). – Київ: НТУУ «КПІ», 2010. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/567*

6. *Дискретний аналіз. Ч. 2: Елементи математичної логіки [Електронний ресурс]: курс лекцій для студентів спеціальностей, пов'язаних з інформаційними технологіями та захистом інформації / НТУУ «КПІ»; уклад. М. К. Мороховець. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,05 Мбайт). – Київ: НТУУ «КПІ», 2010. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/441*.
7. Дискретний аналіз. Частина 5. Булеві функції [Електронний ресурс]: курс лекцій для студентів спеціальностей, пов'язаних з інформаційними технологіями та захистом інформації / НТУУ «КПІ»; уклад. М.К. Мороховець. – Електронні текстові дані (1 файл: 853 Кбайт). – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – 48 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/16595