МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# ВИЩА МАТЕМАТИКА:

## Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та їх застосування. Елементи теорії поля
## Практикум, розрахункова робота

**Навчальний посібник**

\

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальностями галузі знань 14 Електрична інженерія

Укладачі: В. Ф. Зражевська, Г. М. Зражевський

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент *Жук Я. О.,* докт. фіз.-мат. наук,. професор кафедри теоретичної та прикладної механіки КНУ ім. Тараса Шевченка

Відповідальний редактор *Дудкін.М.Є.,* докт. фіз.-мат. наук, проф

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*
*(протокол № 5 від 26.05.2022 р.)*
*за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету*
*(протокол № 02 від 24.02.2022 р.)*

Навчальний посібник забезпечує проведення практичних занять та виконання розрахункової роботи, передбачених навчальною програмою дисципліни “Вища математика: Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та їх застосування. Елементи теорії поля. Практикум, розрахункова робота” для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями галузі знань 14 Електрична інженерія. Тематика вказівок охоплює розділ навчальної програми, що стосується теорії кратних, криволінійних, поверхневих інтегралів та елементів теорії поля. У роботі стисло викладено основний теоретичний матеріал, розібрано розв'язання типових прикладів. У вказівках запропоновано 50 варіантів завдань, які можуть бути використані студентами очної та заочної форм навчання при роботі над матеріалом по даній темі.

Реєстр. 21/22- 427.Обсяг 5,5 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

## Зміст


Вступ 5

1. Подвійний інтеграл, його обчислення та застосування 6

    1.1 Означення та властивості подвійного інтеграла 6

    1.2 Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах 7

    1.3 Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах 11

    1.4. Деякі застосування подвійного інтеграла 14

2. Потрійний інтеграл, його обчислення та застосування 19

    2.1. Означення та властивості потрійного інтеграла 19

    2.2. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах 20

    2.3. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах 22

    2.4. Обчислення потрійного інтеграла в сферичних координатах 23

    2.5. Деякі застосування потрійного інтеграла 25

3. Криволінійний інтеграл I роду, його обчислення та застосування 29

    3.1. Означення і властивості криволінійного інтеграла I роду 29

    3.2. Обчислення криволінійного інтеграла I роду 30

    3.3. Деякі застосування потрійного інтеграла 33

4. Криволінійний інтеграл II роду, його обчислення та застосування 35

    4.1 Означення криволінійного інтеграла II роду 35

    4.2. Обчислення криволінійного інтеграла II роду 36

    4.3. Формула Гріна 39

    4.4. Криволінійні інтеграли II роду, що не залежать від кривої інтегрування 41

    4.5. Деякі застосування криволінійного інтеграла II роду. 44

5. Поверхневий інтеграл I роду, його обчислення та застосування 47

    5.1. Означення та властивості поверхневого інтеграла I роду 47

    5.2. Обчислення поверхневого інтеграла I роду 48

    5.3. Деякі застосування поверхневого інтеграла I роду 50

6. Поверхневий інтеграл II роду. Його обчислення та застосування 53

6.1. Означення та деякі властивості 53
6.2. Обчислення поверхневого інтеграла II роду 54
6.3. Формула Остроградського-Гаусса 58
7. Елементи теорії поля 61
7.1 Скалярні поля 61
7.1 Векторні поля 65
8. Варіанти типового розрахунку 75
Література 131

# 1. Вступ

Мета навчального посібника - допомогти студентам глибше вивчити одну з найскладніших тем навчальної дисципліни “Окремі розділи вищої математики для студентів енергетичних спеціальностей” - "Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та їх застосування. Елементи теорії поля". У роботі надано основні теоретичні відомості на тему, наведено приклади розв'язання типових задач.

Вказівки містять 50 варіантів розрахункової роботи по розглянутій темі. Запропоновані задачі можуть бути корисними для викладачів при проведенні практичних занять, складанні контрольних завдань, організації вивчення матеріалу даного розділу вищої математики в умовах дистанційного навчання. Матеріали, викладені у навчальному посібнику, можуть бути корисними для студентів очної і заочної форм навчання, що вивчають вищу математику, для організації самостійної роботи.

# 1. Подвійний інтеграл, його обчислення та застосування

**1.1 Означення та властивості подвійного інтеграла.** На площині $Oxy$ розглянемо обмежену на площині область $D$, в кожній точці якої задана неперервна функція $f(x,y)$. Розіб'ємо $D$ на елементарні підобласті $D_i$ $(i=\overline{1,n})$. Позначимо через $\Delta S_i$ $(i=\overline{1,\mathrm{n}})$ площу $D_i$, а через $d_i$ - діаметр (тобто найбільшу відстань між точками області) $D_i$. У кожній області $D_i$ виберемо довільну точку $M_i(x_i,y_i)$ $.M_i$

**Означення.** Якщо існує $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i\to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i$, яка не залежить ні від способу розбиття області $D$ на підобласті $D_i$, ні від способу вибору точок, то ця границя називається подвійним інтегралом від функції по області $D$, який позначається $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Отже, подвійний інтеграл визначається рівністю:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max di\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i.$$

В цьому випадку функція $f(x,y)$ називається інтегровною в області $D$, область $D$ називається областю інтегрування, змінні $x,y$ - змінні інтегрування.

Можна довести, що якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області $D$, то вона інтегровна в цій області. Надалі розглядаються тільки неперервні в області інтегрування функції.

Вкажемо деякі властивості подвійного інтеграла, які найчастіше використовуються при його обчисленні .

<u>Властивість 1</u>. Якщо $f_i(x,y)$, $i=\overline{1,\mathrm{n}}$ неперервні в $D$ функції, а $c_i$, $i=\overline{1,n}$ - довільні сталі, то:

$$\iint\limits_D (c_1 f_1(x,y)+\ldots+c_n f_n(x,y))dxdy = c_1\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy+\ldots+c_n\iint\limits_D f_n(x,y)dxdy.$$

Властивість 2. Якщо область $D = D_1 \cup D_2$ і перетин областей $D_1$ і $D_2$ складається лише з лінії, що їх роз'єднує, то: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$

Властивість 3. Якщо в усіх точках області $D$ виконується нерівність $f(x,y) \geq 0$, то і $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0.$

Повний перелік властивостей подвійного інтеграла можна знайти в [1,2,3].

**1.2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах**. Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двократного інтеграла.

Нехай область $D$ є криволінійною трапецією, що обмежена прямими $x = a,\ x = b$ і кривими $y = y_1(x),\ y = y_2(x)$, причому, функції $y_1(x),\ y_2(x)$ - неперервні і такі, що $y_1(x) \leq y_2(x)$ для всіх $x \in [a;b]$ (Рис.1.1).

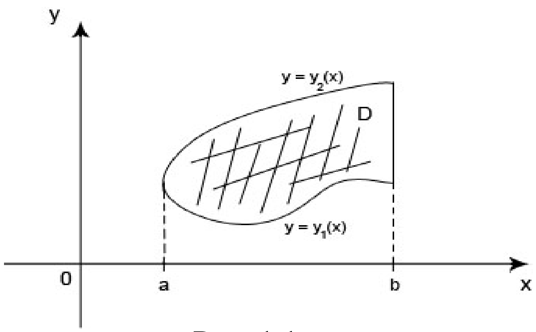

Рис. 1.1

Така область є правильною в напрямку осі $Oy$: будь-яка пряма, паралельна осі $Oy$, перетинає границю області не більше ніж в двох точках. Вважаємо, що функція $f(x,y)$ є неперервною в області $D$. Тоді буде існувати двократний інтеграл $\int\limits_a^b \left( \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$, який частіше записують у вигляді $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy,$ і має місце рівність :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (1.1)$$

Для обчислення двократного інтеграла (1.1) спочатку знаходимо інтеграл $\int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)dy$ по $y$, вважаючи $x$ сталою. Інтеграл $\int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)dy$ називається внутрішнім інтегралом. В результаті підстановки отримаємо деяку неперервну функцію від $x$, яку вже інтегруємо по $x$ в межах від $a$ до $b$.

Якщо ж область $D$ задається лініями: $y = c, y = d \ (c < d)$, $x = x_1(y), x = x_2(y)$, при чому $x_1(y) \le x_2(y)$ для всіх $y \in [c;d]$, ($D$ є правильною в напрямку осі $OX$), то буде виконуватись рівність:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (1.2)$$

Якщо область $D$ правильна в напрямках і осі $Ox$ і осі $Oy$, то подвійний інтеграл можна обчислити і по формулі (1.1), і по формулі (1.2). Якщо область $D$ не є правильною ні в напрямку $Ox$, ні в напрямку $Oy$, то її слід розбити на підобласті, що є правильними в напрямку або $Ox$ або $Oy$, і скористатися властивістю 2 для обчислення подвійного інтеграла.

***Приклад.*** Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D xydxdy$, де область $D$ обмежена лініями $y = x, y = \frac{1}{x}, x = 2$.

***Розв'язання***. Зображуємо область інтегрування $D$ (Рис. 1.2), яка є правильною в напрямку $Ox$. Скористаємося формулою (1.1). Щоб знайти межі зовнішнього інтеграла по $x$ знайдемо ортогональну проєкцію $D$ на вісь

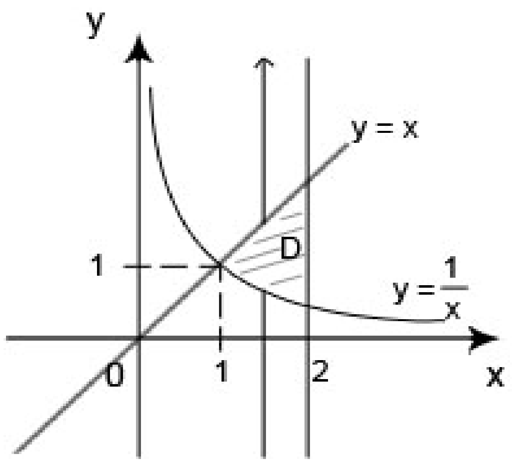


Рис. 1.2

$OX$ : $x \in [1;2]$, отже, в зовнішньому інтегралі межі від 1 до 2. Тепер візьмемо довільне $x \in [1;2]$, зафіксуємо його (проведемо на рисунку пряму $x = const$ ) і з'ясуємо, як при цьому значенні $x$ змінюється $y$. Найменше значення $y$ знаходимо з рівняння $y = \frac{1}{x}$, а найбільше – з рівняння $y = x$ для будь-якого $x \in [1;2]$, отже: $\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} xydy$. Обчислення двократного інтеграла починаємо з обчислення внутрішнього інтеграла. Оскільки цей інтеграл по $y$, то $x$ в ньому виступає за сталу і виноситься за знак інтеграла

$$\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} xydy = x\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} ydy = x\frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x} = \frac{x}{2}(x^2 - \frac{1}{x^2}) = \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x}.$$

Знайдену функцію підставляємо у зовнішній інтеграл по $x$:

$$\int\limits_1^2 (\frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x})dx = \int\limits_1^2 \frac{x^3}{2}dx - \int\limits_1^2 \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\ln x\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(4 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{15}{8} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Тепер поміняємо порядок інтегрування і скористаємося формулою (1.2) (Рис. 1.3). Щоб розставити межі в зовнішньому інтегралі, проєктуємо область на вісь $Oy$. Нижня межа знаходиться як перетин лінії $y = \frac{1}{x}$ і прямої $x = 2$, тобто $y = \frac{1}{2}$. Верхня межа знаходиться як точка перетину прямих $y = x$, $x = 2$, тобто $y = 2$. Щоб розставити межі по $x$

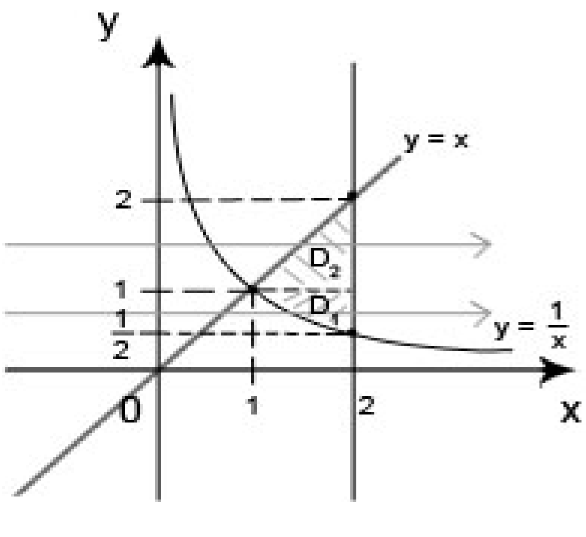


Рис. 1.3

зафіксуємо $y$, тобто проведемо пряму $y = const$. Якщо брати довільне $y \in [\frac{1}{2};1]$, то нижня межа $x$ визначається з рівняння $y = \frac{1}{x} => x = \frac{1}{y}$, а верхня з прямої $x = 2$. Для будь-якого $y \in [1;2]$, нижня межа знаходиться з рівняння $y = x => x = y$, а верхня з $x = 2$. Отже, при такій послідовності інтегрування область треба розбивати на дві області: $D_1$ і $D_2$ і користуватися властивістю 2 подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_{D} xydxdy = \iint\limits_{D_1} xydxdy + \iint\limits_{D_2} xydxdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} xydx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} xydx\,.$$

Інтегруючи аналогічно, отримуємо ту ж саму відповідь:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{y}}^{2} dy + \int\limits_{1}^{2} y\frac{x^2}{2}\Bigg|_{y}^{2} dy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2y - y\frac{1}{2y^2}\right)dy + \int\limits_{1}^{2}\left(2y - \frac{y^3}{2}\right)dy =$$

$$= \left(y^2 - \frac{1}{2}\ln y\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} + \left(y^2 - \frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_{1}^{2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + 4 - 2 - 1 + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} - \frac{\ln 2}{2}.$$

***Приклад.*** Змінити порядок інтегрування в інтегралі: $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy.$

***Розв'язання***. Зобразимо область інтегрування $D$ (Рис. 1.4). Область обмежена лініями: $y = \frac{x^2}{4} - 1$; $y = 2 - x$. Знаходимо точки перетину параболи $y = \frac{x^2}{4} - 1$ і прямої $y = 2 - x$: $x_1 = 2; x_2 = -6$. Тоді $y_1 = 0$; $y_2 = 8;$. Отже, найменша ордината у точок області $y = -1$, найбільша $y = 8$.

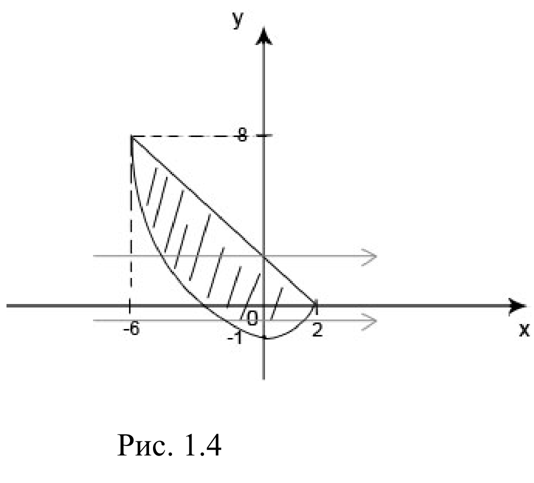

Рис. 1.4

Взявши довільне значення $y \in [-1;0]$, з рисунка бачимо, що значення нижньої межі $x$ визначається з лівої вітки параболи, а верхня – з правої. Шукаємо ці значення з рівняння параболи: $\frac{x^2}{4} = y+1;\ x^2 = 4\left(y+1\right); => x = \pm 2\sqrt{y+1};$ Для довільного $y$ з [0;8] нижня межа по $x$ визначається з рівняння лівої вітки параболи $x = -2\sqrt{y+1}$, а верхня – з рівняння прямої $x = 2 - y$. Отже, остаточно маємо:

$$\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_{0}^{8} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx.$$

**1.3. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах.** Полярна система координат задається точкою $O$ – полярним полюсом, полярною віссю і одиничним вектором того ж напрямку, що і полярна вісь. Положення точки $M$ на площині з введеною полярною системою координат визначається двома числами: полярним радіусом $\rho$, що визначається як відстань від полюса до точки, і полярним кутом $\varphi$, що утворений відрізком $OM$ і полярною віссю. Кут відкладаємо від полярної осі проти руху годинникової стрілки. Щоб отримати всі точки площини достатньо визначити, що $\varphi$ змінюється на $[0;2\pi)$, а $\rho$ на $[0;\infty)$. Тоді кожній точці площини $M$ відповідає єдина пара чисел $\left(\rho,\varphi\right)$ і навпаки. Числа $\rho,\varphi$ називаються **полярними координатами точки** ([5]).

Сумістимо полярну і декартову системи координат: полюс $O$ сумістимо з початком відліку , полярну вість – з додатним напрямком осі $Ox$ (Рис. 1.5). Нехай $\left(x;y\right)$ - декартові координати точки $M$, а $\left(\rho,\varphi\right)$- полярні. Тоді з прямокутного трикутника $OAM$ випливає зв’язок декартових і полярних координат точки $M$:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi. \tag{1.3}$$

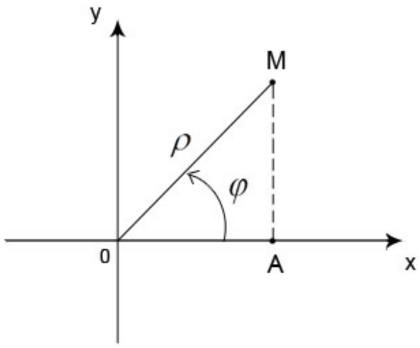

Рис. 1.5

З (1.3) випливає: $x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2$. Тому перехід в подвійних інтегралах до полярних координат має сенс, область $D$ обмежена колами або лініями, в рівняння яких входить вираз виду $x^2 + y^2$.

Можна довести [1,4], що формула переходу від декартової системи координат до полярної в подвійному інтегралі має вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho. \tag{1.4}$$

Подвійний інтеграл в полярних координатах також зводиться до двократного. Нехай $D$ обмежена променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta; \left(\alpha < \beta\right)$, кривими $\rho = \rho_1\left(\varphi\right)$, $\rho = \rho_2\left(\varphi\right)$; $\rho_1\left(\varphi\right) \le \rho_2\left(\varphi\right)$, для всіх $\varphi \in (\alpha, \beta)$. Вважаємо область $D$ правильною: промінь, що виходить із полюса, перетинає її границю не більш ніж в двох точках. Тоді ([1,2,3]):

$$\iint\limits_{D^*} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho\, d\varphi d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho\ . \tag{1.5}$$

У випадку, коли область $D$ обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ доцільно використовувати так звану **узагальнену полярну систему координат** : $x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi.$ Легко переконатись, що рівняння еліпса в такій системі має вигляд: $\rho = 1$. Формула переходу від декартової системи координат до узагальненої полярної в подвійному інтегралі записується як:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_D f\left(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho, \tag{1.6}$$

***Приклад.*** Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, де область $D$ обмежена лініями:

$x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x$.

***Розв'язання***. Сумістимо, як було вказано вище, декартову і полярну системи координат. Маємо 2 кола (Рис. 1.6). Знаходимо їх полярні рівняння:

$x^2 + y^2 = 2x; \quad => \rho^2 = 2\rho\cos\varphi; => \rho = 2\cos\varphi;$

$x^2 + y^2 = 4x; => \rho = 4\cos\varphi;$

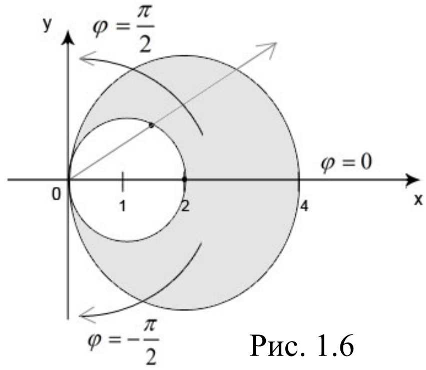

Рис. 1.6

Область розташована в I і IV квадрантах декартової системи. Оскільки точки на додатній півосі $Ox$ мають $\varphi = 0$, то, щоб описати всі точки області в I квадранті, маємо змінювати $\varphi$ від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Для точок, що лежать в IV квадранті, треба здійснювати рух за годинниковою стрілкою, тобто $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Остаточно, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тепер зафіксуємо $\varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і проведемо промінь $\varphi = \varphi_0$. З рисунка видно, що найменшу довжину $\rho$ мають точки, що лежать на колі $\rho = 2\cos\varphi$, а найбільшу – на колі $\rho = 4\cos\varphi$. Отже, $\rho$ змінюється від $2\cos\varphi$ до $4\cos\varphi$. Тепер, відповідно до формули (1.5), переходимо до полярних координат:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\,\rho d\rho.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл по $\rho$, вважаючи $\varphi$ сталою:

$$\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \sqrt{\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{\rho^3}{3}\Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} = \frac{64}{3}\cos^3\varphi - \frac{8}{3}\cos^3\varphi = \frac{56}{3}\cos^3\varphi.$$

Тоді зовнішній інтеграл:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{56}{3}\cos^3\varphi d\varphi = \frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\varphi\right) d\sin\varphi =$$

$$=\frac{56}{3}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\sin\varphi-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\sin\varphi\right)=\frac{56}{3}\left(\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{56}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{224}{9}.$$

***Приклад.*** Обчислити $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy.$

***Розв'язання***. Заданий двократний інтеграл достатньо складно обчислити, враховуючи наявність ірраціональності в підінтегральній функції. За заданими межами інтегрування побудуємо область інтегрування (Рис. 1.7).

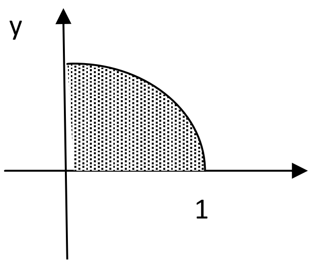

Рис. 1.7

Оскільки областю інтегрування є частина круга одиничного радіуса, що розташована в першому квадранті, перейдемо в інтегралі до полярних координат за формулою (1.5):

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1\rho\rho d\rho=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

***Приклад.*** Обчислити $\iint\limits_D x^2dxdy$, де область $D$ обмежена лінією: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

***Розв'язання***. Областю інтегрування обмежена еліпсом з півосями $a=2, b=3$. Використовуючи узагальнену полярну систему координат: $x=2\rho\cos\varphi,\ y=3\rho\sin\varphi$ і формулу (1.6), маємо

$$\iint\limits_D x^2dxdy=2\cdot3\cdot\iint\limits_D 4\rho^2\cos^2\varphi\,\rho d\rho=24\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^1\rho^3d\rho=$$

$$=24\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\,\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1=6\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi=3(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi)\Big|_0^{2\pi}=6\pi$$

**1.4. Деякі застосування подвійного інтеграла.** У даній розрахунковій роботі розглядаються наступні застосування подвійного інтеграла.

1. **Площа плоскої фігури.**

Щоб знайти площу області $D$, треба обчислити подвійний інтеграл з одиничною підінтегральною функцією ([1,3]):

$$S = \iint_D dxdy \ . \qquad (1.7)$$

***Приклад***. Знайти площу області $D$, що обмежена лініями: $x^2 + y^2 = 2y$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$; $y = \sqrt{3}x$.

***Розв'язання***. Будуємо область $D$ (Рис. 1.8).

Оскільки в границю області входить коло, то обчислюємо інтеграл в полярних координатах. Всі точки, що лежать на промені $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ (в I квадранті), мають $\varphi = \frac{\pi}{6}$ $\left( \rho \sin\varphi = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}} => tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} => \varphi = \frac{\pi}{6} \right)$.

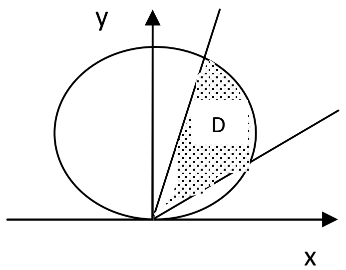

Рис1.8

Аналогічно, для точок променя $y = \sqrt{3}x$: $\varphi = \frac{\pi}{3}$ $\left( tg\varphi = \sqrt{3} => \varphi = \frac{\pi}{3} \right)$. Отже, $,\varphi \in \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$. Зафіксуємо $\varphi_0 \in \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$ і проведемо промінь $\varphi = \varphi_0$. Найменшу довжину має точка полюс $(\rho = 0)$, а найбільшу – точка, що лежить на колі: $x^2 + y^2 = 2y; => \rho^2 = 2\rho\sin\varphi; => \rho = 2\sin\varphi$. Отже, маємо:

$$S = \iint_D dxdy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{2\sin\varphi} \right) d\varphi = \int_{\pi/6}^{\pi/3} 2\sin^2\varphi \, d\varphi = 2\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6} \text{ (кв.од.)} .$$

**2. Об'єм циліндричного тіла.** Розглянемо циліндричне тіло, тобто тіло, що обмежено зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, знизу - обмеженою областю $D$ площини $Oxy$, з боків - циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі $Oz$ , а напрямною є границя області $D$. Тоді можна довести ([1,2,3]), що об'єм такого циліндричного тіла знаходиться за формулою:

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (1.8)$$

***Приклад***. Застосовуючи подвійний інтеграл, знайти об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $z = 1 + x^2 + y^2$ і площинами: $z = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 1.$

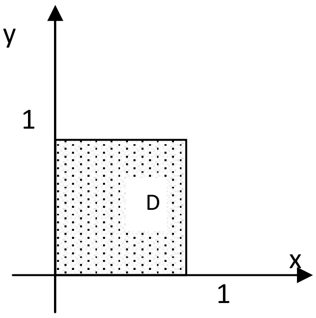

Рис.1.9

***Розв'язання***. За формулою (1.8): $V = \iint_D (1 + x^2 + y^2)dxdy$, де область $D$ зображена на Рис. 1.9. Обчислюємо інтеграл в декартових координатах: $V = \int_0^1 dx \int_0^1 (1 + x^2 + y^2)dy.$ Внутрішній інтеграл:

$$\int_0^1 (1 + x^2 + y^2)dy = \int_0^1 dy + x^2 \int_0^1 dy + \int_0^1 y^2 dy = (y + x^2 y + \frac{y^3}{3})\Big|_0^1 = 1 + x^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} + x^2.$$

Тоді :

$$V = \int_0^1 (\frac{4}{3} + x^2)dx = (\frac{4x}{3} + \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}\,(\text{куб.од.}).$$

**3. Маса, статичні моменти, координати центра мас плоскої фігури.** Нехай є пластина постійної товщини у формі області $D$, з поверхневою густиною $\gamma = \gamma(x,y)$. Вважаємо, що густина є неперервною функцією координат точки. Тоді ([1,2]): **маса плоскої фігури** знаходиться за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x,y)dxdy, \qquad (1.9)$$

**статичні моменти** відносно осі Ox ($S_x$) і Oy ($S_y$):

$$S_x = \iint_D y\gamma(x,y)dxdy\ ,\ S_y = \iint_D x\gamma(x,y)dxdy, \qquad (1.10)$$

**координати центра мас плоскої фігури** ($x_c,\ y_c$) – за формулами:

$$x_c = \frac{S_x}{m} \quad y_c = \frac{S_y}{m}\ . \qquad (1.11)$$

***Приклад.*** Знайти масу пластини $D$, що обмежена лініями $x=2; y=0; y=\sqrt{\frac{x}{2}}$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y)=2x+3y^2$.

***Розв'язання***. За формулою (1.9): $m=\iint\limits_D\left(2x+3y^2\right)dxdy.$ Будуємо область $D$ (Рис. 1.10). Обчислюємо інтеграл в декартовій системі координат. З рисунка видно: $x\in\left[0;2\right]$. При будь-якому фіксованому $x\in\left[0;2\right]$ найменше значення $y$ визначається з прямої $y=0$, а найбільше - з вітки параболи $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$. Отже:

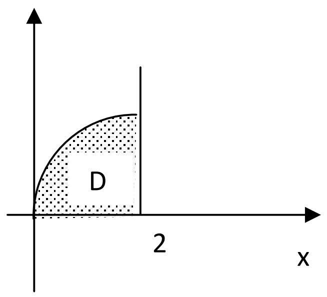

Рис1.10

$m=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}}(2x+3y^2)dy.$ Обчислюємо внутрішній інтеграл:

$$\int\limits_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}}(2x+3y^2)dy=\int\limits_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}}2xdy+\int\limits_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}}3y^2dy=2xy\Big|_0^{\sqrt{x/2}}+y^3\Big|_0^{\sqrt{x/2}}=(2x\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}})=$$

$$=(\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}})x^{\frac{3}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}x^{3/2}\quad.$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл: $m=\frac{5\sqrt{2}}{4}\int\limits_0^2 x^{3/2}dx=\frac{5\sqrt{2}}{2}\frac{x^{5/2}}{5}\Bigg|_0^2=4$ (од.маси).

***Приклад.*** Знайти масу, статичні моменти і координати центра ваги плоскої фігури $D$, що лежить в першому квадранті, обмежена колом $x^2+y^2=1$ і координатними осями. Поверхнева густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

***Розв'язання***. Область $D$ зображена на Рис 8. Користуємося формулами (1.9), (1.10), (1.11), переходячи в подвійних інтегралах до полярної системи координат:

$$m=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^1 \rho\rho d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1)d\varphi=\frac{\pi}{6}\quad \text{(од. маси)}$$

$$S_x=\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^1 \rho\sin\varphi\,\rho\,\rho d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi(\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}(-\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{1}{4},\quad S_y=\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^1 \rho\cos\varphi\,\rho\,\rho d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi(\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}(\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{1}{4},$$

$$x_c=\frac{S_x}{m}=\frac{1/4}{\pi/6}=\frac{3}{2\pi}\;,\;y_c=\frac{S_y}{m}=\frac{1/4}{\pi/6}=\frac{3}{2\pi}\;.$$

Інші застосування подвійного інтеграла можна знайти, наприклад, в [1,3].

## 2. Потрійний інтеграл, його обчислення та застосування

**2.1. Означення та властивості потрійного інтеграла.** Нехай в обмеженій замкненій області $V$ простору $Oxyz$ задана неперервна функція $f\left(x,y,z\right)$. Розбиваємо $V$ довільним чином на $n$ підобластей, $V_i, i=\overline{1,n}$, об'єм яких відповідно $\Delta V_i$, $d_i$- діаметр області. У кожній підобласті $V_i$ вибираємо довільним чином точку $M_i\left(x_i,y_i,z_i\right)$.

**Означення**: Якщо існує границя: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i\to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i,y_i,z_i\right)\Delta V_i$, яка не залежить ні від способу розбиття області на підобласті, ні від вибору точок $M_i$, то ця границя називається **потрійним інтегралом** від функції $f\left(x,y,z\right)$ по області $V$ і позначається $\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz$. Отже, потрійний інтеграл визначається рівністю:

$$\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz = \lim_{\max di->0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i,y_i,z_i\right)\Delta V_i.. \tag{2.1}$$

Можна довести, що якщо функція $f\left(x,y,z\right)$ неперервна в обмеженій замкненій області $V$, то границя в формулі (2.1) існує і не залежить ні від способу розбиття області $V$ на підобласті, ні від вибору точок $M_i$.

При обчисленні потрійного інтеграла використовують наступні властивості.

<u>Властивість 1.</u> Якщо $f_i\left(x,y,z\right), i=\overline{1,n}$ інтегровані в області $V$ функції, а $c_i = const$, $i=\overline{1,n}$, то:

$$\iiint\limits_V \left(c_1 f_1\left(x,y,z\right)+...+c_n f_n\left(x,y,z\right)\right)dxdydz = c_1\iiint\limits_V f_1\left(x,y,z\right)dxdydz+...$$
$$...+c_n\iiint\limits_V f_n\left(x,y,z\right)dxdydz.$$

<u>Властивість 2.</u> Якщо $V=V_1\bigcup V_2$ і перетин $V_1$ і $V_2$ складається з границі, що їх розділяє, то

$$\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz=\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz+\iiint\limits_{V_2} f\left(x,y,z\right)dxdydz.$$

<u>Властивість 3.</u> Якщо в області $V$ $f(x,y,z)\geq 0$, то і $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz\geq 0.$

Більш повно про властивості інтеграла можна прочитати, наприклад, в [1,2,3].

## 2.2. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах.

Нехай область інтегрування $V$ обмежена двома поверхнями $z=z_1(x,y)$ і $z=z_2\left(x,y\right)$, область $D$- проєкція $V$ на площину $Oxy$. Вважаємо, що функції $z_1(x,y)$ і $z_2\left(x,y\right)$ неперервні в $D$ і для всіх точок $\left(x,y\right)\in D$ виконується нерівність: $z_1(x,y)\leq z_2\left(x,y\right)$. Вважаємо, що область $V$ правильна в напрямкі $Oz$, тобто довільна пряма, що паралельна осі $Oz$, перетинає границю області не більш ніж в двох точках. Тоді для неперервної в області $V$ функції $f(x,y,z)$ має місце формула:

$$\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz=\iint\limits_D\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\left(x,y,z\right)dz\right)dxdy\ . \tag{2.2}$$

Інтеграл по $z$ називається внутрішнім, він обчислюється першим і результатом його обчислення є функція $\varphi\left(x,y\right)$. Далі іде обчислення подвійного інтеграла від $\varphi\left(x,y\right)$ по області $D$.

При необхідності, область $V$ може бути спроєктована на інші координатні площини і тоді порядок інтегрування в формулі (2.2) буде іншим.

***Приклад***. Обчислити інтеграл: $\iiint\limits_V xdxdydz$, де область $V$ обмежена площинами: $2x+2y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

***Розв'язання***. Побудуємо область інтегрування: $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$- площина, що відтинає відрізки 1, 1, 2 на координатних осях $Ox$, $Oy$, $Oz$ відповідно; $x=0$- координатна площина $Oyz$, $y=0$ - координатна площина $Oxz$, $z=0$ -

координатна площина $Oxy$ відповідно. (Рис. 2.1). Отже, $V$ - тетраедр і є правильною в напрямку $Oz$. Проєкція області на площину $Oxy$, область $D$, зображена на Рис. 2.2.

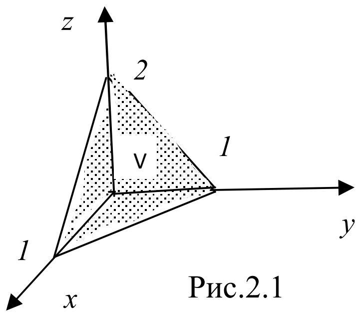


Рис.2.1

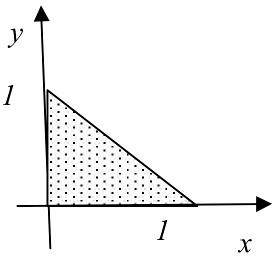


Рис.2.2

За формулою (2.2) інтеграли по $x$ і $y$ розставляємо по області $D$. Щоб розставити межі по $z$ через довільну точку області $D$ на Рис. 2.1 проведемо пряму, паралельно осі $Oz$. Нижня межа по $z$ визначається з поверхні, в яку ми входимо - $z=0$, верхня – з поверхні, з якої виходимо: $2x+2y+z=2$=> $z=2-2x-2y$. Отже:

$$\iiint\limits_V xdxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{2-2z-2y} xdz.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл по $z$, вважаючи $x$ і $y$ сталими: $\int\limits_0^{2-2z-2y} xdz = x\cdot z\Big|_0^{2-2x-2y} = 2x-2x^2-2yx$. Обчислюємо інтеграл по $y$, вважаючи $x$ сталою:

$$\int\limits_0^{1-x}\left(2x-2x^2-2yx\right)dy=\left(2xy-2x^2y-2x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}=2x(1-x)-2x^2(1-x)-x\left(1-x\right)^2=$$
$$=x^3-2x^2+x.$$

Обчислюємо інтеграл по $x$

$$:\int\limits_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$$

**2.3. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах.** Якщообласть інтегрування утворена циліндричною поверхнею,

Положення точки $M(x,y,z)$ в просторі $Oxyz$ можна визначити завданням трьох чисел (Рис. 2.3):

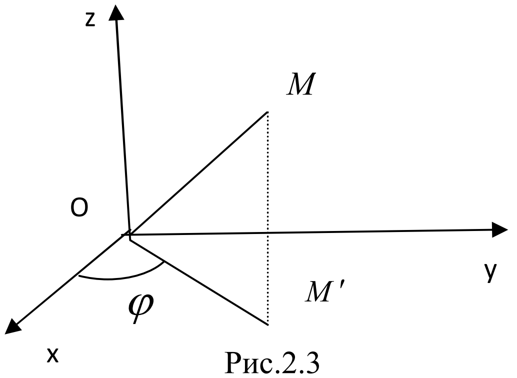

Рис.2.3

$\rho-$ довжина відрізка $OM'$, де $M'$- проєкція точки $M$ на площину $Oxy$; $\varphi$ − кут між додатним напрямом осі $Ox$ і $OM'$, що відраховується проти годинникової стрілки, $z-$ апліката точки $M$. Отже, $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $z \in R$. Числа $(\rho,\varphi,z)$ називаються циліндричними координатами точки $M$. Зв'язок між декартовими і циліндричними координатами точки:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z\ . \qquad (2.3)$$

Можна довести [1,2,3], що для циліндричних координат формула заміни змінних в потрійному інтегралі має вигляд :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz\ . \qquad (2.4)$$

***Приклад.*** Обчислити $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, де $V$- область, що утворена поверхнями: $5-z = x^2+y^2;\ z=1$.

***Розв'язання***. Зображуємо область інтегрування (Рис.2.4) і її проєкцію на площину $Oxy$ (Рис.2.5). Проєкцією області $V$ на площину $Oxy$ буде круг. Знаходимо його центр і радіус: $\begin{cases} 5-z = x^2+y^2; \\ z=1; \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=4.$

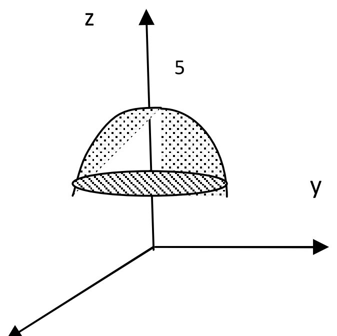

Рис.2.4

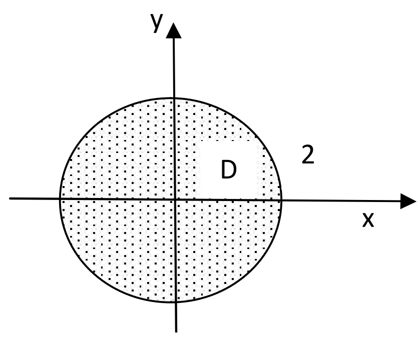

Рис2.5

Центр круга O(0,0), $r=2$. Переходимо в циліндричну систему координат (2.4). Рівняння кола $x^2+y^2=4$, що є границею області $D$, записуємо у вигляді: $x^2+y^2=4 \Rightarrow \rho^2=4 \Rightarrow \rho=2$. Межі інтегралів по $\varphi$ і $\rho$ визначаємо з області $D$ (Рис.2.5): $0\le\varphi\le 2\pi; 0\le\rho\le 2$. Щоб розставити межі по $z$, проводимо пряму, паралельну осі $Oz$, на Рис. 2.4. Нижня межа по $z$ знаходиться з рівняння площини $z=1$, верхня - з рівняння параболоїда: $5-z=x^2+y^2 \Rightarrow$ $5-z=\rho^2 \Rightarrow z=5-\rho^2$. Підінтегральна функція в циліндричних координатах набуває вигляду: $z\rho$. Отже:

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_1^{5-\rho^2}z\rho dz.$$

Обчислюємо інтеграл, починаючи з внутрішнього.

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\cdot\rho\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{5-\rho^2}d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^2\left(5-\rho^2\right)^2d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(25\rho^2-10\rho^4+\rho^6\right)d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(25\frac{\rho^3}{3}-10\frac{\rho^5}{5}+\frac{\rho^7}{7}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi(\frac{200}{3}-64+\frac{128}{7})=\frac{440}{21}\pi$$

**2.4. Обчислення потрійного інтеграла в сферичних координатах.** Якщо область інтегрування обмежена сферами, частинами сфер то потрійний інтеграл зручно обчислювати в сферичних координатах.

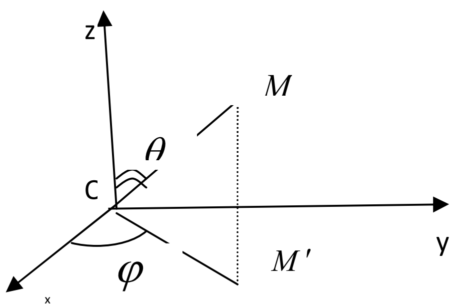

Рис.2.6

Сферичними координатами точки $M\left(x,y,z\right)$ в просторі $Oxyz$ називаються наступні три числа (Рис.2.6): $\rho$- довжина радіус-вектора точки $M$, $\varphi$- кут між додатним напрямом $Ox$ і $OM'$, що відраховується проти годинникової стрілки, де $M'$- проєкція точки

$M$ на площину $Oxy$, $\theta$ - кут між додатним напрямом осі $Oz$ і $OM$, що відраховується від осі $Oz$. Тоді $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$; $\theta \in [0; \pi]$. Зв'язок декартових і сферичних координат має вигляд:

$$x = \rho \cos\varphi \sin\theta, \ y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \ z = \rho \cos\theta. \qquad (2.5)$$

Безпосереднім підрахунком легко перевірити рівність: $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

Можна довести [1,2,3], що для сферічних координат формула заміни змінних в потрійному інтегралі має вигляд :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \qquad (2.6)$$

***Приклад.*** Обчислити $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, де $V$ обмежена поверхнями $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (I октант).

***Розв'язання***. Область інтегрування $V$ зображена на Рис.2.7, її проєкція $D$ на Рис.2.8. Для обчислення потрійного інтегралу переходимо до сферичних координат (2.5). Межі зовнішнього інтеграла по $\varphi$ визначаємо на Рис.2.8: $\varphi \in [0, \pi/2]$ . Межі інтеграла по $\theta$ визначаємо з Рис.2.7.

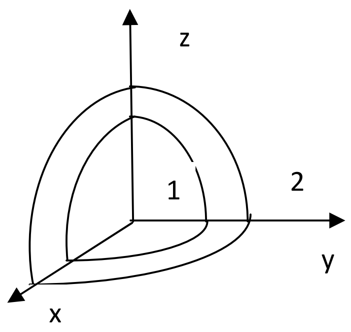


Рис.2.7

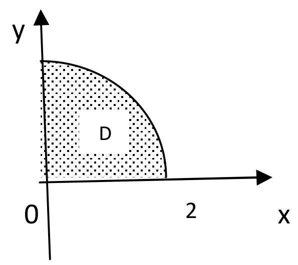


Рис.2.8

Точки, які лежать на додатній півосі $Oz$ мають $\theta = 0$, точки, що лежать в площині $Oxy$, мають $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Отже, $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Щоб знайти межі внутрішнього інтеграла по $\rho$, проводимо на Рис.2.7 промінь з початку відліку. Найменше значення $\rho$ буде у точок, що лежать на сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Тому

$\rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1$. Найбільше - у точок, що лежать на сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Отже, $\rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2$. Підінтегральна функція в сферичних координатах набуває вигляд: $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\rho^2}} = \dfrac{1}{\rho}$. Отже, за (2.6):

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_1^2 \frac{\rho^2}{\rho} d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \left( \frac{\rho^2}{2} \Bigg|_1^2 \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-\cos\theta\right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}.$$

**2.5. Деякі застосування потрійного інтеграла.** Розглянемо наступні застосування потрійного інтеграла.

**1. Об'єм тіла.** Об'єм тіла $V$ знаходимо за формулою ([1,4]):

$$V = \iiint\limits_V dxdydz. \tag{2.7}$$

***Приклад.*** Знайти об'єм тіла, що задане поверхнями, які його обмежують : $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 22 - x^2 - y^2$.

***Розв'язання***. Будуємо $V$. Рівняння $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}$ задає половину конуса, рівняння $z = 22 - x^2 - y^2$ - параболоїд з вершиною в точці $(0, 0, 22)$ (Рис.2.9).

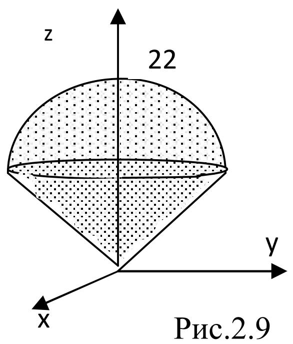

Рис.2.9

Проєкцією області $V$ на площину $Oxy$ буде круг $D$. Доцільно обчислити інтеграл (2.7) в циліндричних координатах. В циліндричних координатах рівняння поверхонь набувають вигляду: $z = 9\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = 9\rho$, $z = 22 - x^2 - y^2 \Rightarrow z = 22 - \rho^2$. Щоб знайти радіус круга $D$, треба знайти радіус кола перетину двох поверхонь.

Для цього розв'язуємо систему : $\begin{cases} z = 9\rho \\ z = 22 - \rho^2 \end{cases} \Rightarrow 9\rho = 22 - \rho^2 \Rightarrow \rho^2 + 9\rho - 22 = 0.$

Оскільки $\rho \geq 0$, то залишаємо лише додатний розв'язок рівняння: $\rho = 2$. Отже, область $D$ - круг з центром в $\text{O}(0;0)$ і $r = 2$. (Рис. 2.5) Тоді:

$$V = \iiint\limits_V \rho\, d\rho\, d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{9\rho}^{22-\rho^2} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho \cdot z \Big|_{9\rho}^{22-\rho^2} d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho \cdot \left(22 - \rho^2 - 9\rho\right) d\rho = = \int\limits_0^{2\pi} \left( 22\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^2 - \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^2 - 9\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^2 \right) d\varphi =$$

$$= 16\varphi \Big|_0^{2\pi} = 32\pi \ \left(\text{куб.од}\right).$$

**2. Маса, статичні моменти, координати центра ваги тіла.** Розглядаємо тіло, що має форму області $V$. Неперервна функція $\gamma(x,y,z)$ – густина розподілу маси в точці $M(x,y,z)$ Тоді ([1,2]):

маса тіла знаходиться за формулою:

$$m = \iiint\limits_V \gamma\left(x;y;z\right) dxdydz, \tag{2.8}$$

статичні моменти відносно координатних площин *Oxy* ($S_{xy}$), *Oxz* ($S_{xz}$) і *Oyz* ($S_{yz}$):

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z\,\gamma\left(x;y;z\right) dxdydz,\ S_{xz} = \iiint\limits_V y\,\gamma\left(x;y;z\right) dxdydz,$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_V x\ \gamma\left(x;y;z\right) dxdydz, \tag{2.9}$$

координати центра ваги тіла ($x_c$, $y_c$, $z_c$)– за формулами:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m},\ y_c = \frac{S_{xz}}{m},\ z_c = \frac{S_{xy}}{m}. \tag{2.10}$$

***Приклад.*** Тіло задане поверхнями, що його обмежують: $9\left(x^2 + y^2\right) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0, y = 0, z = 0$ $\left(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right)$. Функція $\gamma\left(x;y;z\right) = \frac{5}{3}(x^2 + y^2)$ -

густина. Знайти масу, статичні моменти відносно координатних площин, координати центра ваги тіла.

***Розв'язання***. За формулою (2.8) : $m=\iiint\limits_V \frac{5}{3}(x^2+y^2)dxdydz.$

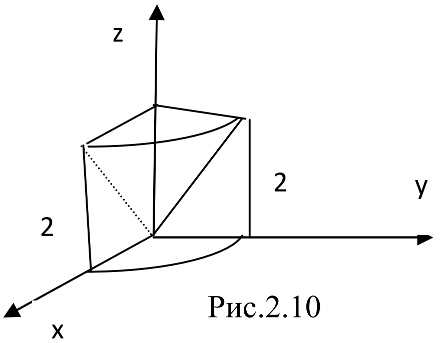

Рис.2.10

Область $V$ зображена на Рис.2.10. Переходимо в потрійному інтегралі до циліндричних координат. Рівняння конуса набуває вигляду:

$$9\left(x^2+y^2\right)=z^2 \Rightarrow 9\rho^2=z^2 \Rightarrow z=3\rho,$$

враховуючи, що $z\geq 0$. Проєкцією $V$ на площину $Oxy$ буде частина круга радіуса 2 з центром в точці O(0,0) в першому квадранті. Використовуючи (2.4), обчислюємо (2.9):

$$m=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_0^{3\rho} \frac{5}{3}\rho^2 dz=\frac{5}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 z\Big|_0^{3\rho} d\rho=\frac{5}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 3\rho^4 d\rho==5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^2 d\varphi=$$

$$=32\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=16\pi \text{ (од.маси)}.$$

Аналогічно за формулами (2.10) знаходимо статичні моменти відносно координатних площин :

$$S_{xy}=\iiint\limits_V \frac{5}{3}(x^2+y^2)z\,dxdydz=\frac{5}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_0^{3\rho} \rho^2 z\,dz=40\pi\,,$$

$$S_{xz}=\iiint\limits_V \frac{5}{3}(x^2+y^2)y\,dxdydz=\frac{5}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_0^{3\rho} \rho^2 \rho\sin\varphi\,dz=\frac{160}{3}\,,$$

$$S_{yz}=\iiint\limits_V \frac{5}{3}(x^2+y^2)x\,dxdydz=\frac{5}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_0^{3\rho} \rho^2 \rho\cos\varphi\,dz=\frac{160}{3}.$$

Тоді координати центра ваги: $x_c = \frac{S_{yz}}{m} = \frac{10}{3\pi}$, $y_c = \frac{S_{xz}}{m} = \frac{10}{3\pi}$, $z_c = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{5}{2}$.

Інші застосування потрійного інтеграла можна знайти, наприклад, в [1,2,3].

## 3. Криволінійний інтеграл І роду, його обчислення та застосування

**3.1. Означення криволінійного інтеграла І роду.** Розглядаємо на площині $Oxy$ неперервну криву $AB$. Вважаємо, що в кожній точці кривої $M$ визначена неперервна функція $f(M)$. Розбиваємо криву $AB$ точками $A = A_0, A_1, A_2, ..., A_n = B$ на $n$ довільних дуг $A_{i-1}A_i$ з довжинами $\Delta l_i, (i = \overline{1,\text{n}})$. На кожній дузі $A_{i-1}A_i$ обираємо довільну точку $M_i \in A_{i-1}A_i$.

**Означення**. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$, то ця границя називається **криволінійним інтегралом І роду** від функції $f(M)$ по кривій $AB$ і позначається : $\int\limits_{AB} f(M)\,dl.$

Оскільки точки кривої $AB$ визначаються своїми координатами $(x, y)$, функцію $f(M)$, задану на кривій $AB$, будемо записувати у вигляді $f(x, y)$, розуміючи, що $x$ і $y$ тут зв'язані умовою - точка $(x, y)$ лежить на кривій $AB$. Отже, за означенням маємо:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i \text{, де } (x_i, y_i) \text{ - координати точок } M_i.$$

Можна довести наступне твердження: якщо функція $f(x, y)$ неперервна в кожній точці гладкої кривої (тобто кривої, в кожній точці якої існує дотична до кривої і положення дотичної змінюється неперервно при переміщенні точки по кривій), то криволінійний інтеграл І роду існує і його величина не залежить ні від способу розбиття кривої на дуги, ні від вибору точок на них ([1,4,5]). У випадку кусково-гладкої кривої (принаймні, коли кількість гладких ланок скінченна) криволінійний інтеграл обчислюється як сума криволінійних інтегралів по сукупності гладких ланок.

Вкажемо деякі властивості криволінійного інтеграла І роду ([1,2,3]).

Властивість 1. Криволінійний інтеграл І роду не залежить від напрямку інтегрування: $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl.$

Властивість 2.

$\int\limits_{AB} \left(c_1 f_1(x,y) + \ldots + c_n f_n(x,y)\right)dl = c_1 \int\limits_{AB} f_1(x,y)\,dl + \ldots + c_n \int\limits_{AB} f_n(x,y)\,dl$, де $c_i = const$, $i = \overline{1,n}$.

Властивість 3. $\int\limits_{L} f(x,y)\,dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)\,dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)\,dl$, де $L_1 \cup L_2 = L$

Аналогічно розглянутому плоскому випадку, вводиться криволінійний інтеграл І роду від функції $f(x,y,z)$ по просторовій кривій $L$: $\int\limits_{L} f(x,y,z)\,dl$ ([1,2,3]).

**3.2. Обчислення криволінійного інтеграла І роду.** В залежності від способу завдання кривої, отримуємо формули, що зводять криволінійний інтеграл І роду до визначеного [1,3].

**1. Параметричне завдання кривої.** Нехай плоска крива $AB$ задана параметричним рівнянням: $x = x(t), y = y(t),\ \ t \in [t_0, t_1], (t_0 < t_1)$. Вважаємо, що функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервно диференційовані по $t$ і значення параметру $t = t_0$ відповідає точці $A$ , а $t = t_1$ - точці $B$. Тоді :

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\left(x(t), y(t)\right) \cdot \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt. \qquad (3.1)$$

Аналогічна формула за аналогічних умов має місце для криволінійного інтеграла від $f(x,y,z)$ по просторовій кривій $AB$, що задається параметричним рівнянням: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t\in[t_0,t_1]$:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dl=\int_{t_0}^{t_1} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt. \tag{3.2}$$

**2. Явне завдання кривої.** Нехай плоска крива $AB$ задана рівнянням $y=y(x)$, $x\in[a,b]$. Вважаємо $y(x)$ неперервно диференційованою для $x\in[a,b]$. Тоді :

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl=\int_{a}^{b} f\big(x,y(x)\big)\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx. \tag{3.3}$$

***Приклад:*** Обчислити криволінійні інтеграли І роду :

а) $\int\limits_{AB}\sqrt{y}\,dl$ , де $AB$ - дуга параболи $y=2x^2$, що відсікається параболою $x=2y^2$,

б) $\int\limits_{AB}(x+2yz)\,dl$ , де $AB$ - відрізок прямої між точками $A(1;2;3)$ і $B(3;-2;5)$;

в) $\int\limits_{L}x^2z\,dl$ , де $L$ - крива, задана як перетин параболоїда $2-z=x^2+y^2$ і площини $z=1$.

***Розв'язання***. а) Крива $AB$ зображена на Рис.3.1 жирним шрифтом. Щоб знайти межі інтегрування, знаходимо точки перетину двох парабол:

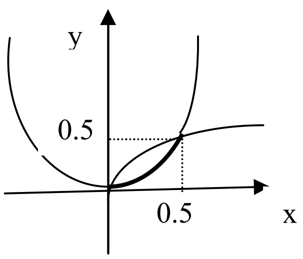

Рис.3.1

$$\begin{cases} y=2x^2\\ x=2y^2\end{cases}\Rightarrow x=2\left(2x^2\right)^2\Rightarrow x=8x^4\Rightarrow x_1=0;\ x_2=\frac{1}{2}.$$

Користуємося формулою (3.3) , де $x\in[0;1/2]$, $y=2x^2$

$$\int\limits_L \sqrt{y}dl = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2} \cdot \sqrt{1+\left(2x^2\right)'^2}\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{1+16x^2}\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(1+16x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx^2 = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot 16} \cdot \frac{\left(1+16x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{48}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

б) Складаємо параметричне рівняння прямої $AB$: $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{-2-2} = \frac{z-3}{5-3} \Rightarrow$ $x = 2t+1$ ; $y = -4t+2$ ; $z = 2t+3$.. Точці $A$ відповідає значення параметра $t=0$, а $t=1$ відповідає точці $B$. Знаходимо похідні: $x_t' = 2$ ; $y_t' = -4$ ; $z_t' = 2$. За формулою (3.2) :

$$\int\limits_L \left(x+2yz\right)dl = \int\limits_0^1 \left(2t+1+2\left(-4t+2\right)\left(2t+3\right)\right)\sqrt{2^2+\left(-4\right)^2+2^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{24}\int\limits_0^1 \left(-16t^2-14t+13\right)dt = \sqrt{24}\left(-16\frac{t^3}{3}-14\frac{t^2}{2}+13t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

в) Крива інтегрування $L$ зображена на Рис.3.2.

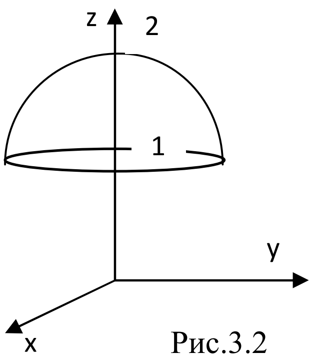


Рис.3.2

Це коло, що розташоване в площині $z=1$. Знаходимо його радіус $\begin{cases} 2-z = x^2+y^2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow$ $2-1 = x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 1.$ Параметризуємо $L$: $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=1,\ t\in\left[0;2\pi\right].$ Тоді $x_t' = -\sin t$ ; $y_t' = \cos t$ ; $z_t' = 0$. За формулою (3.2) маємо :

$$\int\limits_L x^2 z dl = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 0^2}dt = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left( t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi.$$

**3.3. Деякі застосування криволінійного інтеграла І роду.** Зупинимось на наступних застосуваннях криволінійного інтеграла І роду**.**

**1. Довжина дуги кривої**. Нехай $AB$ - плоска чи просторова крива. Тоді її довжина $l$ знаходиться за формулою ([1,2,3]):

$$l = \int\limits_{AB} dl. \tag{3.4}$$

***Приклад***. Знайти довжину дуги кривої, що задана параметричним рівнянням: $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t \quad (0 \le t \le 2\pi)$.

***Розв'язання***. Знаходимо $x'_t = \cos t - t\sin t$ ; $y'_t = \sin t + t\cos t$ ; $z'_t = 1$, і користуємось формулами (3.4) і (3.2) :

$$l = \int\limits_{AB} dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2+t^2}dt = \left( \frac{t}{2}\sqrt{2+t^2} + \ln\left| t + \sqrt{2+t^2} \right| \right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi \cdot \sqrt{2+4\pi^2} +$$

$$+\ln(2\pi + \sqrt{2+4\pi^2}) - \ln\sqrt{2} == \pi\sqrt{2+4\pi^2} + \ln\frac{2\pi + \sqrt{2+4\pi^2}}{\sqrt{2}} \text{ (од.)}.$$

**2. Маса, статичні моменти, координати центра ваги дуги матеріальної кривої.** Розглядаємо матеріальну криву $AB$, тобто неперервну криву, вздовж якої розподілена деяка маса. Нехай $\gamma(x, y)$ - погонна густина кривої в точці $M(x.y)$. Тоді маса дуги ($m$), статичні моменти відносно осі $Ox$ ($S_x$) і $Oy$ ($S_y$) і координати центра ваги матеріальної кривої ($x_c$, $y_c$) знаходяться за формулами ([1,2])::

$$m = \int_{AB} \gamma(x, y) dl, \; S_x = \int_{AB} y \gamma(x, y) dl, \; S_y = \int_{AB} x \, \gamma(x, y) dl, \; x_c = \frac{S_y}{m}, \; y_c = \frac{S_x}{m}.$$

***Приклад***. Знайти масу дуги $AB$ кривої $y = \ln x$, якщо в кожній її точці густина пропорційна квадрату абсциси точки. Координати точок: $A(1,0)$, $B(e,1)$.

***Розв'язання***. З умови випливає: $\gamma(x, y) = x^2$, за формулами (24), (22) маємо:

$$m = \int_{AB} x^2 dl = \int_1^e x^2 \sqrt{1 + \left(\ln x\right)'} dx = \int_1^e x^2 \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} d\left(x^2 + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2} 2 \frac{\left(x^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \Bigg|_1^e = \frac{\left(e^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{\sqrt{\left(e^2 + 1\right)^3} - \sqrt{8}}{3} \text{ (од. мас)}$$

# 4. Криволінійний інтеграл II роду, його обчислення та застосування.

**4.1. Означення криволінійного інтеграла II роду.** Розглянемо неперервну криву $AB$ і функцію $P(x;y)$, що визначена в кожній точці кривої. Розбиваємо криву в напрямку від точки $A$ в точку $B$ точками $A_i(x_i;y_i),\ i=\overline{0,n}$, так, що $A_0=A,\dots,\ A_n=B$ на дуги $A_{i-1}A_i$ з довжинами $\Delta l_i, i=\overline{1,n}$. Вибираємо на кожній дузі $A_{i-1}A_i$ довільним чином точку $M_i\in A_{i-1}A_i$. Позначимо через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ проєкцію дуги $A_{i-1}A_i$ на вісь $Ox$.

**Означення.** Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\max \Delta l_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(M_i)\Delta x_i$, яка не залежить ні від способу розбиття кривої $AB$ на дуги, ні від вибору точок $M_i$, то ця границя називається криволінійним інтегралом по координаті $x$ або **криволінійним інтегралом II** роду від функції $P(x;y)$ по кривій $AB$:

$$\int_{AB}P(M)dx=\lim_{\max \Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(M_i)\Delta x_i.$$

Аналогічно вводиться криволінійний інтеграл від функції $Q(x;y)$ по координаті $y$: $\int_{AB}Q(M)dy=\lim\limits_{\max \Delta l_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(M_i)\Delta y_i$, де $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ - проєкція дуги $A_{i-1}A_i$ на вісь $Oy$.

Криволінійний інтеграл II роду загального виду $\int_{AB}P(M)dx+Q(M)dy$ визначається рівністю: $\int_{AB}P(M)dx+Q(M)dy=\int_{AB}P(M)dx+\int_{AB}Q(M)dy$.

Оскільки точки кривої $AB$ визначаються своїми координатами $(x,y)$, функції $P(M)$ і $Q(M)$ на кривій $AB$ часто записують у вигляді $P(x,y), Q(x,y)$.

Можна довести наступний факт [2]: якщо крива $AB$ гладка, а функції $P(x,y), Q(x,y)$ неперервні на кривій, то криволінійний інтеграл $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x.y)dy$ існує.

Вкажемо деякі властивості криволінійного інтеграла II роду.

Властивість 1. При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл II роду змінює свій знак на протилежний, тобто:

$$\int\limits_{AB} P(M)dx + Q(M)dy = -\int\limits_{BA} P(M)dx + Q(M)dy.$$

Властивість 2 . Якщо крива $AB$ розбита точкою С на дві частини АС і СВ, то :

$$\int\limits_{AB} P(M)dx + Q(M)dy = \int\limits_{AC} P(M)dx + Q(M)dy + \int\limits_{CB} P(M)dx + Q(M)dy.$$

Властивість 3. Криволінійний інтеграл по замкненій кривій не залежить від вибору початкової точки інтегрування, а лише від напрямку обходу кривої.

Аналогічно плоскому випадку вводиться криволінійний інтеграл II роду по просторовій кривій: $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$, який має аналогічні властивості ([1,2,3]).

**4.2. Обчислення криволінійного інтеграла II роду.** Обчислення криволінійного інтеграла II роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

**1. Параметричне завдання кривої.** Нехай плоска крива АВ задана параметричним рівнянням: $x = x(t), y = y(t), t \in [t_0, t_1]$, причому значення параметра $t = t_0$ відповідає точці А, а $t = t_1$ - точці В. Вважаємо функції

$x(t)$ і $y(t)$ неперервними разом із своїми похідними $x'(t)$ і $y'(t)$ на відрізку $[t_0,t_1]$. Вважаємо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ неперервними на кривій AB. Тоді має місце формула ([1,2,3]):

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_{t_0}^{t_1} (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt. \qquad (4.1)$$

Аналогічна формула за аналогічних умов має місце для криволінійного інтеграла II роду в просторі:

$$\int\limits_{AB} P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt \qquad (4.2)$$

де крива AB задана параметричним рівнянням : $x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ t \in [t_0,t_1]$.

**2. Явне завдання кривої.** Нехай плоска крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, де функції $y(x), y'(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$. Тоді криволінійний інтеграл II роду зводиться до визначеного за формулою ([1,2,3]):

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{a}^{b} (\ P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\ )\,dx. \qquad (4.3)$$

Якщо крива AB задана рівнянням $x = x(y)$ , $y \in [c;d]$, то за аналогічних умов має місце формула ([1,2,3]):

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{c}^{d} (P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y))dy. \qquad (4.4)$$

***Приклад.*** Обчислити криволінійні інтеграли II роду:

а) $\int\limits_L \left(x+y^2\right)dx+2xydy$ , де L - контур трикутника ABC, $A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(1;1)$ , (напрямок руху - в додатному напрямі).

б) $\int\limits_L xydx+y^2dy$, де L - дуга еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ , що розташована в I квадранті, від точки $A(a;0)$ до точки $B(0;b)$.

в) $\int\limits_L ydx+x^2dy+\left(z^2+1\right)dz$, де L - виток гвинтової лінії $x=a\cos t$ , $y=a\sin t$ , $z=bt,\ \ t\in\left[0;2\pi\right]$ в напрямку зростання параметра $t$.

***Розв'язання***. а) Контур інтегрування складається з трьох відрізків: AB, BC, CA. (Рис.4.1). Напрямок обходу вказано стрілкою. Користуючись властивістю 2, шукаємо інтеграл на кожному відрізку .

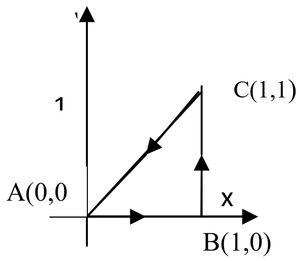

Рис.4.1

1) AB: $y=0,\ x\in[0,1]$, за (4.3) маємо :

$$\int\limits_{AB}\left(x+y^2\right)dx+2xydy=\int\limits_0^1\left(x+0+2x\cdot 0\cdot 0\right)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}.$$

2) BC: $x=1,\ y\in[0,1]$. За (4.4):

$$\int\limits_{BC}\left(x+y^2\right)dx+2xydy=\int\limits_0^1((1+y^2)\cdot 0+2\cdot 1\cdot y))dy=\left.y^2\right|_0^1=1\ ;$$

3) CA: $y=x,\ x\in[1,0]$. За (4.3) :

$$\int\limits_{CA}\left(x+y^2\right)dx+2xydy=\int\limits_1^0(x+x^2+2x\cdot x\cdot 1)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3x^3}{3}\right)\right|_1^0=-\frac{3}{2}.$$

Остаточно: $\int\limits_L\left(x+y^2\right)dx+2xydy=\frac{1}{2}+1-\frac{3}{2}=0$.

б) Складаємо параметричне рівняння дуги еліпса (Рис.4.2): $x=a\cos t,\ \mathrm{y}=b\,\mathrm{sint}$ .

Точка A відповідає значенню параметра $t=0$, точка B $t=\frac{\pi}{2}$. Отже, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

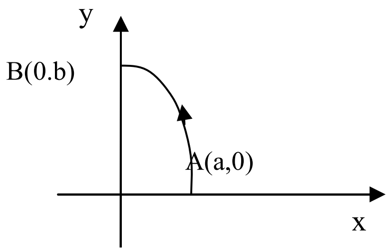

Рис.4.2

Знаходимо $x_t' = -a\sin t$; $y_t' = b\cos t$ і користуємось формулою (4.1):

$$\int_L xydx + y^2dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t\, b\sin t(-a\sin t) + b^2\sin^2 t\, b\cos t)dt =$$

$$= (-a^2b + b^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, d\sin t = (b^3 - a^2b)\frac{\sin^3 t}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{b(b^2 - a^2)}{3}.$$

в) Знаходимо $x_t' = -a\sin t;\ y_t' = a\cos t;\ z_t' = b$ і користуємося формулою (4.2):

$$\int_L ydx + x^2dy + (z^2+1)dz = \int_0^{2\pi} (a\sin t(-a\sin t) + a^2\cos^2 t\,(a\cos t) + (b^2t^2+1)b)dt =$$

$$= -a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt + a^3\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t + b^3\frac{t^3}{3}\bigg|_0^{2\pi} + bt\big|_0^{2\pi} = -\frac{a^2}{2}\left(t\big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\sin 2t\bigg|_0^{2\pi}\right) +$$

$$+a^3\left(\sin t\big|_0^{2\pi} - \frac{\sin^3 t}{3}\bigg|_0^{2\pi}\right) + \frac{b^3}{3}8\pi^3 + 2\pi b = -\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^3 + 2\pi b.$$

**4.3 Формула Гріна.** Нехай на площині $Oxy$ задана правильна область $D$, $L$ – границя області $D$. Вважаємо, що в області $D$ задані функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, які є неперервними разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тоді має місце формула Гріна ([1,2,3]):

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (4.5)$$

де інтегрування по замкненій кривій $L$ в криволінійному інтегралі здійснюється в додатному напрямі (коли область, обмежена контуром, залишається зліва).

Якщо при інтегруванні по замкненій кривій область, обмежена контуром, залишається справа то, відповідно до властивості 1 перед подвійним інтегралом в правій частині формули (4.5) треба поставити знак "-"

**Зауваження**. Якщо окремо не вказано, то по замкненій кривій береться по замовченню інтегрування в додатному напрямі.

***Приклад***. Користуючись формулою Гріна, обчислити криволінійні інтеграли II роду по замкненим контурам (обхід контуру в додатному напрямі):

а) $\int\limits_L \left(x+y^2\right)dx + 2xydy$, де $L$ – контур трикутника ABC; A(0;0), B(1;0), C (1;1);

б) $\int\limits_L \left(x+y^3\right)dx - x^3dy$, де $L$: $x^2+y^2=4x$.

***Розв'язання***. а) Контур інтегрування зображений на Рис.4.1. Область $D$ – область, обмежена контуром трикутника $ABC$. Застосовуючи формулу Гріна, маємо: $P(x,y)=x+y^2$; $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y$; $Q(x,y)=2xy$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y$;

$$\int\limits_L (x+y^2)dx+2xydy=\iint\limits_D (2y-2y)dxdy=0.$$

б) Крива $L$ та область $D$, яку вона обмежує, зображені на Рис.4.3.

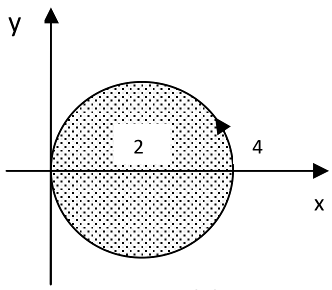

Рис4.3

Застосовуючи формулу Гріна, маємо:

$$P(x;y)=x+y^3;\frac{\partial P}{\partial y}=3y^2;\ Q(x;y)=-x^3;\frac{\partial Q}{\partial x}=-3x^2;$$

$$\int\limits_L (x+y^3)dx-x^3dx=\iint\limits_D (-3x^2-3y^2)dxdy=-3\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy.$$

Оскільки область $D$ круг, переходимо в подвійному інтегралі до полярної системи координат: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$. Рівняння $L$ в полярній системі координат: $\rho^2=4\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho=4\cos\varphi$. Отже,

$$-3\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = -3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho^2 \rho d\rho = -3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{4\cos\varphi} d\varphi = -\frac{3\cdot 4^4}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= -192\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi == -48\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)d\varphi =$$

$$= -48(\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi) = -48\left(\pi + \frac{1}{2}\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= -48(\pi + \frac{\pi}{2}) = -72\pi.$$

## 4.4. Криволінійні інтеграли II роду, що не залежать від кривої інтегрування.

**Теорема.** Нехай область $D$ однозв'язна (тобто така, що довільна замкнена лінія, що належить цій області, обмежує область, що цілком лежить в $D$), замкнена, обмежена кривою $L$. Вважаємо, що функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ в області $D$ визначені і неперервні разом зі своїми частинними похідними. Тоді сформульовані нижче чотири умови рівносильні між собою (тобто з виконання однієї умови випливає виконання трьох інших):

1) в області $D$ виконується рівність:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \qquad (4.6)$$

2) $\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, де $C$ – будь-який замкнений контур, що лежить в $D$;

3) вираз $P(x.y)dx + Q(x.y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, що визначена в $D$, тобто $du(x,y) = P(x.y)dx + Q(x.y)dy$.

4) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ залежить лише від початкової точки $A$ і кінцевої точки $B$ і не залежить від виду кривої, що їх з'єднує, причому:

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x.y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} du(x.y) = u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0). \quad (4.7)$$

Доведення теореми можна знайти, наприклад, в [1,3].

Аналогічна теорема може бути сформульована для криволінійного інтеграла II роду по просторовій кривій $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$. Так, зокрема, умови (4.6) набувають виду:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (4.8)$$

існує функція $u(x,y,z)$ така, що $du(x,y,z) = Pdx + Qdy + Rdz$, криволінійний інтеграл залежить лише від початкової і кінцевої точок інтегрування і

$$\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} P(x.y,z)dx + Q(x,y.z)dy + R(x,y.z)dz = u(x_1,y_1,z_1) - u(x_0,y_0,z_0). \quad (4.9)$$

Сформульована теорема дозволяє відновити з точністю до сталої функцію по відомому її повному диференціалу за формулами:

для плоского випадку:

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi,y_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\eta)d\eta + C, \quad (4.10)$$

для просторового випадку:

$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi,y_0,z_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\eta,z_0)d\eta + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,\zeta)d\varsigma + C\ , \quad (4.11)$$

де $(x_0, y_0)$ для плоского випадку і $(x_0, y_0, z_0)$ для просторового випадку - координати фіксованої точки, $(x, y)$ і $(x, y, z)$ - координати довільної точки для плоского і просторового випадків відповідно.

Виведення формул (4.10) і (4.11) приведено, наприклад, в [2].

***Приклад.*** Знайти $\int\limits_L (2x + 3x^2 + 3y^2)e^{3x}dx + 2ye^{3x}dy$, де $L$ - коло: $x^2 + y^2 = 4y$.

***Розв'язання***. В даному прикладі $P(x, y) = (2x + 3x^2 + 3y^2)e^{3x}$; $Q(x, y) = 2ye^{3x}$. Тоді: $\frac{\partial P}{\partial y} = 6ye^{3x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y3e^{3x} = 6ye^{3x}$. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ і контур замкнений, то $\int\limits_L (2x + 3x^2 + 3y^2)e^{3x}dx + 2ye^{3x}dy = 0$.

***Приклад.*** Перевірити, що вираз $\cos(x + 2y)dx + (2\cos(x + 2y) + 3e^{3y})dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$ і знайти цю функцію.

***Розв'язання.*** Перевіряємо виконання умови (4.6): $P(x, y) = \cos(x + 2y)$, $Q(x, y) = 2\cos(x + 2y) + 3e^{3y}$. Тоді $\frac{\partial P}{\partial y} = -2\sin(x + 2y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2\sin(x + 2y)$. Отже, умова виконується. Функцію $u(x, y)$ шукаємо за формулою (4.10), вибираючи $x_0 = 0, y_0 = 0$:

$$u(x, y) = \int\limits_0^x \cos(\xi + 2 \cdot 0)d\xi + \int\limits_0^y (2\cos(x + 2\eta) + 3e^{3\eta})d\eta + C =$$

$$= \sin\xi \Big|_0^x + 2\frac{1}{2}\sin(x + 2\eta)\Big|_0^y + 3\frac{1}{3}e^{3\eta}\Big|_0^y + C =$$

$$= \sin x + \sin(x + 2y) - \sin x + e^{3y} - 1 + C = \sin(x + 2y) + e^{3y} + C.$$

***Приклад***. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} \cos(x + 2y)dx + (2\cos(x + 2y) + 3e^{3y})dy$. не залежить від кривої інтегрування та знайти його значення.

***Розв'язання***. Для того, щоб показати, що інтеграл не залежить від виду кривої, що з'єднує точки (0,0) і (1,2), треба перевірити виконання умови (4.6), що було зроблено в попередньому прикладі. Отже, криву інтегрування можемо вибрати самостійно. Побудуємо ламану OAB (Рис.4.4), де O(0,0), A(1,0), B(1,2).

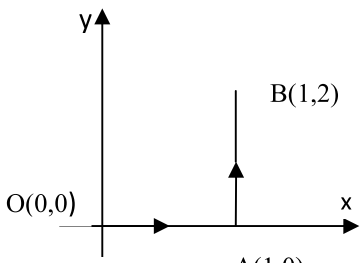

Рис.4.4

Користуємося властивістю 2 криволінійних інтегралів II роду.

OA: $y = 0,\ x \in [0,1]$,. За формулою (4.3): $\int\limits_0^1 \cos x dx = \sin x \Big|_0^1 = \sin 1$.

AB: $x = 1,\ y \in [0,2]$, За формулою (4.4):

$$\int\limits_0^2 (2\cos(1+2y) + 3e^{3y})dy = (\sin(1+2y) + e^{3y})\Big|_0^2 = \sin 5 + e^6 - \sin 1 - 1.$$

Тоді:

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} \cos(x+2y)dx + (2\cos(x+2y) + 3e^{3y})dy = \sin 1 + \sin 5 + e^6 - \sin 1 - 1 =$$

$$= \sin 5 + e^6 - 1.$$

Зауважимо, даний приклад можна було розв'язувати, користуючись формулою (4.7). Враховуючи, що підінтегральний вираз є повним диференціалом функції $u(x,y) = \sin(x+2y) + e^{3y} + C$, що була знайдена в попередньому прикладі, формулою (4.7). маємо:

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} \cos(x+2y)dx + (2\cos(x+2y) + 3e^{3y})dy = (\sin(x+2y) + e^{3y})\Big|_{(0,0)}^{(1,2)} = \sin 5 + e^6 - 1.$$

### 4.5. Деякі застосування криволінійного інтеграла II роду.

**1. Площа плоскої фігури.** Нехай плоска область $D$ обмежена замкненою лінією $L$. Тоді її площу можна обчислити за формулою [1, 2, 3]:

$$S = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx. \quad (4.12)$$

Інтегрування здійснюється в додатному напрямку.

***Приклад.*** Знайти площу фігури, що обмежена кардіоїдою: $x = 2a\cos t - a\cos 2t,\ y = 2a\sin t - a\sin 2t.$

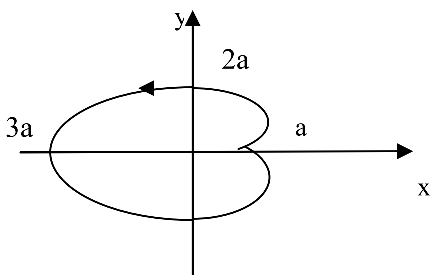

Рис.4.5

***Розв'язання***. Зображуємо область на Рис. 4.5. При обході контуру в додатному напрямі параметр $t$ змінюється від 0 до $2\pi$. Застосуємо формули (4.12) і (4.1). Оскільки $x_t' = -2a\sin t + 2a\sin 2t$; $y_t' = 2a\cos t - 2a\cos 2t$, то:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\left(2a\cos t - a\cos 2t\right)\left(2a\cos t - 2a\cos 2t\right) -$$

$$-\left(2a\sin t - a\sin 2t\right)\left(-2a\sin t + 2a\sin 2t\right)]dt =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(6 - 6(\cos t\cos 2t + \sin t\sin 2t\right)dt = 3a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - \cos(2t - t)\right)dt =$$

$$= 3a^2\left(t\Big|_0^{2\pi} - \sin t\Big|_0^{2\pi}\right) = 6\pi a^2 \text{(кв.од).}$$

**2. Робота змінної сили.** Нехай матеріальна точка $(x, y)$ під дією змінної сили $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ переміщується в площині $Oxy$ по деякій кривій від точки $M$ до точки $N$. Тоді робота, яку при цьому здійснює сила, знаходиться за формулою ([1,3]):

$$A = \int_{MN} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (4.13)$$

***Приклад.*** Знайти роботу сили $\overline{F} = \left\{x + y\sqrt{x^2 + y^2}; y - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$ при переміщенні вздовж кривої $L: x^2 + y^2 = 16$ $(x \ge 0, y \ge 0)$ від точки $M(4;0)$ до точки $N(0,4)$.

***Розв'язання***. За формулою (4.13): $A = \int\limits_{MN} \left(x + y\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy$.

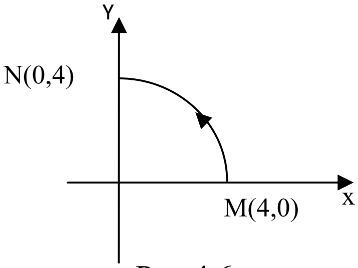

Рис.4.6

Записуємо рівняння кривої інтегрування (Рис. 4.6) в параметричному вигляді: $x = 4\cos t, y = 4\sin t,$ точці $M$ відповідає значення параметра $t = 0,$ точці $N$ - $t = \frac{\pi}{2}$

Тоді, використовуючи формулу (4.1) і враховуючи, що $x' = -4\sin t, y' = 4\cos t,$, знаходимо роботу сили:

$$A = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(4\cos t + 4\sin t\sqrt{16\cos^2 t + 16\sin^2 t}\right)(-4\sin t) + \right.$$

$$\left. + \left(4\sin t - \sqrt{16\cos^2 t + 16\sin^2 t}\right) 4\cos t\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-16\cos t\sin t - 64\sin^2 t + 16\cos t\sin t - 16\cos t\right)dt =$$

$$= -64\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - 16\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -32\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) - 16 = .$$

$$-32\left(\frac{\pi}{2}\right) - 16 = -16(\pi + 1).$$

## 5. Поверхневий інтеграл I роду, його обчислення та застосування

**5.1. Означення та властивості поверхневого інтеграла I роду.** Нехай в просторі $Oxyz$ задана поверхня $\sigma$. В кожній точці $M$ поверхні визначена неперервна функція $f\left(M\right)$. Розбиваємо поверхню $\sigma$ на $n$ поверхні $\sigma_i$ з площами $\Delta S_i$ і діаметрами $d_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$. На кожній $\sigma_i$ довільним чином вибираємо точку $M_i$.

**Означення**. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(M_i\right)\Delta S_i$, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні на $\sigma_i$, ні від вибору точок $M_i$, то ця границя називається **поверхневим інтегралом I роду** і позначається: $\iint\limits_{\sigma} f\left(M\right)d\sigma.$

Отже, за означенням поверхневого інтеграла I роду: $\iint\limits_{\sigma} f\left(M\right)d\sigma = \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(M_i\right)\Delta S_i.$

Оскільки точку $M$ можна задати декартовими координатами $\left(x,y,z\right)$, то поверхневий інтеграл I роду часто записують у вигляді $\iint\limits_{\sigma} f\left(x,y,z\right)d\sigma$, розуміючи, що $\left(x,y,z\right)$ - координати точки на поверхні.

Можна довести твердження: якщо поверхня $\sigma$ *гладка* (тобто в кожній точці поверхні існує дотична площина і положення цієї площини змінюється неперервно при переході від однієї точки σ до іншої), а $f\left(x,y,z\right)$ неперервна на цій поверхні, то поверхневий інтеграл I роду $\iint\limits_{\sigma} f\left(x,y,z\right)d\sigma$ існує ([1,2]). У випадку кусково-гладкої поверхні (принаймні, коли кількість гладких елементів скінченна) поверхневий інтеграл обчислюється як сума поверхневих інтегралів по сукупності гладких елементів.

Нижче приведені дві властивості поверхневого інтеграла I роду, що застосовуються для обчислення ([1,2,3]).

Властивість 1. Якщо $f_i(x,y,z)$, $i=\overline{i,n}$ інтегровані на поверхні $\sigma$ функції і $c_i = const,\, i=\overline{i,n}$, то

$$\iint\limits_{\sigma}\left(c_1 f_1(x,y,z)+\ldots+c_n f_n(x,y,z)\right)d\sigma = c_1\iint\limits_{\sigma} f_1(x,y,z)\,d\sigma+\ldots+c_n\iint\limits_{\sigma} f_n(x,y,z)\,d\sigma..$$

Властивість 2. Якщо $f(x,y,z)$ інтегрована на поверхні $\sigma$ і $\sigma=\sigma_1\bigcup\sigma_2$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1} f(x,y,z)\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_2} f(x,y,z)\,d\sigma.$$

**5.2. Обчислення поверхневого інтеграла I роду**. Розглянемо поверхневий інтеграл I роду $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma$. Позначимо через $D$ проєкцію поверхні $\sigma$ на площину $Oxy$. Вважаємо, що рівняння поверхні має вигляд $\sigma: z=z(x,y)$ і функція $z(x,y)$ в усіх точках області $D$ неперервна разом із своїми частинними похідними: $z'_x(x,y), z'_y(x,y)$. Тоді поверхневий інтеграл по поверхні $\sigma$ зводиться до подвійного інтеграла по проєкції $\sigma$ на $Oxy$ (область $D$) за формулою ([1,2,3]):

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_{D} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+\left(z'_x(x,y)\right)^2+\left(z'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy. \qquad (5.1)$$

Зауважимо, що аналогічні формули за відповідних умов можна отримати при проєктуванні поверхні $\sigma$ на інші координатні площини.

***Приклад***. Обчислити поверхневий інтеграл I роду $\iint\limits_{\sigma}(z+4y-x)d\sigma$, де $\sigma$ - частина площини $2x+4y+z-4=0$, що розташована в I октанті.

***Розв'язання***. Область інтегрування зображена на Рис. 5.1. Щоб скористатися формулою (5.1) записуємо рівняння площини у вигляді $z=4-2x-4y$, знаходимо $z'_x=-2$; $z'_y=-4$, знаходимо проєкцію $D$ поверхні $\sigma$ на площину $Oxy$ (Рис. 5.2).

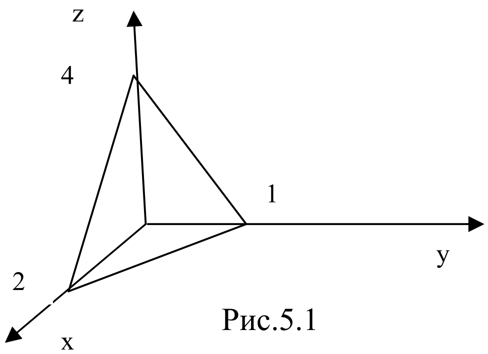

Рис.5.1

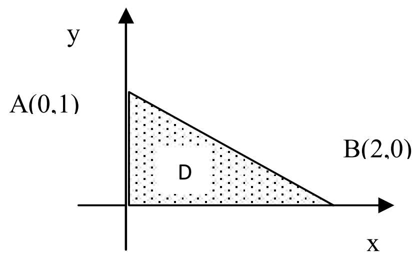

Рис 5.2

Рівняння прямої $AB: \frac{x}{2}+y=1$. За формулою (5.1) маємо:

$$\iint\limits_{\sigma}(z+4y-x)d\sigma==\iint\limits_{D}(4-2x-4y+4y-x)\sqrt{1+(-2)^2+(-4)^2}\,dxdy=$$

$$=\sqrt{21}\iint\limits_{D}(4-3x)dxdy=\sqrt{21}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{1-\frac{x}{2}}(4-3x)dy==\sqrt{21}\int\limits_0^2(4y-3xy)\Big|_0^{1-\frac{x}{2}}dx=$$

$$=\sqrt{21}\int\limits_0^2\left(4-5x+\frac{3}{2}x^2\right)dx=\sqrt{21}\left(4x-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3\right)\Bigg|_0^2==2\sqrt{21}$$

***Приклад.*** Обчислити поверхневий інтеграл I роду $\iint\limits_{\sigma}xzd\sigma$, де $\sigma$ - бокова поверхня конуса $z^2=x^2+y^2$ $(0\le z\le 3)$.

***Розв'язання***. Аналогічно попередньому прикладу, зображуємо область інтегрування $\sigma$ (Рис. 5.3). Проєкцією поверхні на площину $Oxy$ буде круг з центром в початку координат і радіуса 3.

Рівняння поверхні записуємо у вигляді: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ і шукаємо частинні похідні:

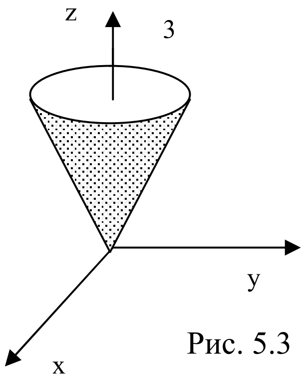

Рис. 5.3

$z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Зводимо поверхневий інтеграл до подвійного за формулою (5.1):

$$\iint_\sigma xzd\sigma=\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=$$
$$=\sqrt{2}\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Для підрахунку подвійного інтеграла по кругу $D$, переходимо в полярні координати $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ :

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\rho\cos\varphi\rho\rho d\rho=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^3\right)d\varphi=\frac{81\sqrt{2}}{4}\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}=0.$$

### 5.3. Деякі застосування поверхневого інтеграла I роду.

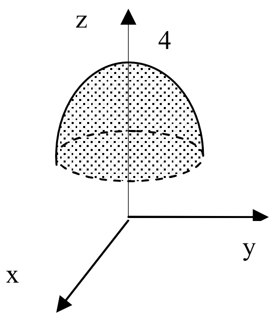

Рис.5.4

**1. Площа поверхні.** Площа поверхні $\sigma$ знаходиться за формулою ([1,2,3]):

$$S=\iint_\sigma d\sigma. \tag{5.2}$$

***Приклад***. Знайти площу поверхні частини параболоїда $4-z=x^2+y^2\,(z\ge 3)$.

***Розв'язання***. Користуємося формулами (5.2) і (5.1). Поверхня $\sigma$, площу якої шукаємо, зображена на Рис.5.4, її проєкція $D$ на площину $Oxy$ - круг радіуса 1 з центром в початку координат.

Рівняння поверхні $z=4-x^2-y^2$, $z'_x=-2x$, $z'_y=-2y$. Отже,

$$S=\iint_\sigma d\sigma=\iint_D\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}dxdy=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

Переходимо до полярної системи координат: $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$:

$$S=\iint_D \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\frac{\left(1+4\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{12}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)\cdot\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)\text{ (кв.од).}$$

**2. Маса, статичні моменти, координати центра ваги** матеріальної поверхні. Нехай по поверхні $\sigma$ розподілена деяка маса з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)$ і функція $\gamma(x,y,z)$ неперервна на $\sigma$. Маса ($m$) такої поверхні, статичні моменти відносно координатних площин *Oxy* ($S_{xy}$), *Oxz* ($S_{xz}$ ) і *Oyz* ($S_{yz}$), координати центра ваги ($x_c$, $y_c$, $z_c$) знаходяться за формулами ([1,2,3]):

$$m=\iint_\sigma \gamma(x,y,z)d\sigma,\ S_{xy}=\iint_\sigma z\gamma(x,y,z)d\sigma,\ S_{xz}=\iint_\sigma y\gamma(x,y,z)d\sigma,$$

$$S_{yz}=\iint_\sigma x\gamma(x,y,z)d\sigma,\ x_c=\frac{S_{yz}}{m}.\ y_c=\frac{S_{xz}}{m},\ z_c=\frac{S_{xy}}{m}.$$

***Приклад***. Знайти масу, статичні моменти, координати центра ваги частини сфери $x^2+y^2+z^2=R^2,(R>0)$, що розташована в I октанті, якщо густина в кожній її точці дорівнює аплікаті цієї точки.

***Розв'язання***. Поверхня $\sigma$ зображена на Рис. 5.5, її проєкція $D$ - на Рис. 5.6.

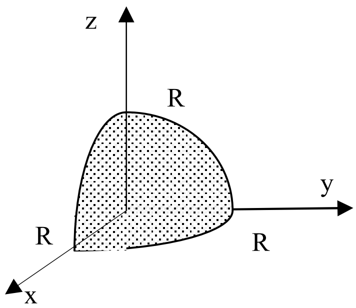

Рис.5.5

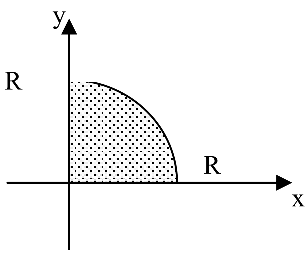

Рис.5.6

Оскільки $z \ge 0$, то $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $z'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $z'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$.

За умовою $\gamma\left(x, y, z\right) = z$. Отже,

$$m = \iint_{\sigma} z d\sigma = \iint_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy =$$

$$= \iint_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2} dxdy = R \iint_{D} dxdy = RS_D = \frac{\pi R^3}{4} \text{ (од. маси).}$$

$$S_{xy} = \iint_{\sigma} z^2 d\sigma = \iint_{D} (R^2 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy =$$

$$= R \iint_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy = R \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = -\frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \left. \frac{2(R^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} \right|_0^R = \frac{\pi R^4}{6},$$

$$S_{xz} = \iint_{\sigma} yz\, d\sigma = \iint_{D} y \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy =$$

$$= R \iint_{D} ydxdy = R \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \rho \sin\varphi \rho d\rho = \frac{R^4}{3},$$

Аналогічно $S_{yz} = \iint_{\sigma} xzd\sigma = R \iint_{D} xdxdy = R \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \rho \cos\varphi \rho d\rho = \dfrac{R^4}{3}$

Координати центра ваги матеріальної поверхні:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m} = \frac{4R}{3\pi},\ y_c = \frac{S_{xz}}{m} = \frac{4R}{3\pi},\ z_c = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{2}{3} R.$$

# 6. Поверхневий інтеграл II роду. Його обчислення та застосування

**6.1. Означення та деякі властивості**. Розглянемо гладку скінченну поверхню $\sigma$. В кожній точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ такої поверхні існує дотична площина і нормаль $\vec{n}$ до цієї поверхні. Виберемо один з двох можливих напрямків цієї нормалі. Поверхня називається *двосторонньою*, якщо при обході по. довільному замкненому контуру, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і не перетинає межі поверхні σ, ми повертаємося в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ з тим самим напрямком нормалі $\vec{n}$. ([1,2,3]). Прикладом двосторонньої поверхні є довільна поверхня, яка однозначно задається рівнянням $z = z(x, y)$ при умові, що функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ є неперервними в деякій області $D$ площини $Oxy$. Вибір певної сторони поверхні (вибір напрямку нормалі $\bar{n}$) називають *орієнтацією* поверхні. Двосторонні поверхні з вибраною стороною називають *орієнтовними*,.

Вважаємо, що в усіх точках двосторонньої поверхні $\sigma$ визначена неперервна функція $R(x, y, z)$. Розіб'ємо вибрану сторону поверхні $\sigma$ на $n$ частини $\sigma_i, i = \overline{1,n}$. Позначимо через $D_i$ проєкцію $\sigma_i$ на координатну площину *Oxy,* а через $\Delta\sigma_i$ - площу $D_i$. Беремо $\Delta\sigma_i$ зі знаком "+", якщо вибрана сторона поверхні $\sigma$, для якої вектор нормалі утворює гострий кут $\gamma$ з додатним напрямком осі $Oz$ ($\cos\gamma > 0$ ). Таку сторону поверхні будемо називати *зовнішньою* або *верхньою*. Якщо розглядається *внутрішня (нижня)* сторона поверхні, для якої $\cos\gamma < 0$, то беремо $\Delta\sigma_i$ зі знаком "-", На кожній елементарній поверхні $\sigma_i$ виберемо довільним чином точки $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \sigma_i$ та складемо інтегральну суму: $\sum_{i=1}^{n} R_i(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i$. Нехай $\lambda$ - найбільший діаметр утворених елементарних поверхонь $\sigma_i, i = \overline{1,n}$ .

**Означення**. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}}\sum\limits_{i=1}^{n} R\left(x_i, y_i, z_i\right)\Delta\sigma_i$, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні на $\sigma_i$, ні від вибору точок $M_i$, то ця границя називається **поверхневим інтегралом II роду** функції $R\left(x, y, z\right)$ по змінним $x, y$ по обраній стороні поверхні $\sigma$ і позначається: $\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)dxdy$ :

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = \lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}}\sum\limits_{i=1}^{n} R\left(x_i, y_i, z_i\right)\Delta\sigma_i \quad . \tag{6.1}$$

Аналогічно визначаються поверхневі інтеграли II роду по змінним $x, z$: $\iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz$ і $y, z$: $\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)dydz$. В загальному вигляді для функцій $P\left(x, y, z\right)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, визначених і неперервних на двосторонній поверхні $\sigma$, поверхневий інтеграл II роду записується як:

$$\iint\limits_{\sigma} P\left(x, y, z\right)dydz + Q\left(x, y, z\right)dxdz + R\left(x, y, z\right)dxdy$$

Вкажемо деякі властивості поверхневого інтеграла II роду [1,3].

<u>Властивість 1</u>. Поверхневий інтеграл II роду змінює знак при зміні сторони поверхні.

<u>Властивість 2</u>. Поверхневий інтеграл II роду від лінійної комбінації функцій дорівнює лінійній комбінації відповідних інтегралів.

<u>Властивість 3</u>. Поверхневий інтеграл II роду по поверхні $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ дорівнює сумі інтегралів по її частинам $\sigma_1$ і $\sigma_2$, якщо перетин $\sigma_1$ і $\sigma_2$ складається лише з границі, що їх розділяє.

**6.2. Обчислення поверхневих інтегралів II роду.** Обчислення поверхневих інтегралів II роду зводиться до обчислення подвійних інтегралів. Розглянемо інтеграл (6.1) по поверхні $\sigma : z = z(x, y)$. Позначимо через $D_{xy}$ - проєкцію поверхні $\sigma$ на площину $Oxy$. Вважаємо функцію $z(x, y)$ неперервною в $D_{xy}$. Виберемо ту сторону поверхні, де нормаль утворює гострий кут з віссю $Oz$ (в (6.1) $\Delta\sigma_i > 0$). Тоді обчислення криволінійного інтеграла по орієнтованій поверхні (6.1) зводиться до обчислення подвійного інтеграла [3]:

$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R\big(x,y,z\left(x,y\right)\big)dxdy \ .$$

Якщо вибрати іншу сторону поверхні (нормаль утворює тупий кут з віссю $Oz$), то перед інтегралом треба поставити знак "$-$".

Якщо рівняння поверхні задається однозначною функцією $y = y(x,z)$, поверхня $\sigma$ проєктується на координатну площину $Oxz$ в область $D_{xz}$, а функція $Q(x,y,z)$ визначена і неперервна на поверхні σ, то має місце формула:

$$\iint_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz = \pm\iint_{D_{xy}} Q\big(x,y(x,z),z\big)dxdz \ ,$$

де в інтегралі вибираємо знак "$+$", якщо нормаль до поверхні утворює з віссю $Oy$ гострий кут, знак "$-$" - якщо тупий.

Якщо рівняння поверхні задається однозначною функцією $x = x(y,z)$, поверхні $\sigma$ проєктується на координатну площину $Oyz$ в область $D_{yz}$, а функція $P(x,y,z)$ визначена і неперервна на поверхні σ, то має місце формула:

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{D_{yz}} P\big(x(y,z),y,z\big)dydz \ ,$$

де в інтегралі вибираємо"$+$", якщо нормаль до поверхні утворює з віссю $Ox$ гострий кут, "$-$" - якщо тупий.

Таким чином, для обчислення загального поверхневого інтеграла II роду потрібно знайти три подвійних інтегралів по проєкціях поверхні $\sigma$ на координатні площини, в припущені, що рівняння поверхні може бути однозначно розв'язане відносно змінних:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \pm\iint\limits_{Dyz} P\big(x(y,z),y,z\big)dydz \pm \iint\limits_{Dxz} Q\big(x,y(x,z),z\big)dxdz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy \qquad (6.2)$$

Можна довести справедливість формул: $dydz = \cos\alpha d\sigma$, $dxdz = \cos\beta d\sigma$, $dxdy = \cos\gamma d\sigma$, де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора нормалі $\vec{n}$ до обраної сторони поверхні, $d\sigma$ - елемент площі поверхні $\sigma$. Тоді з формули (6.2) маємо зв'язок між поверхневими інтегралами I та II родів:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint\limits_{\sigma}\big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big)d\sigma. \qquad (6.3)$$

Для знаходження напрямних косинусів вектора нормалі $\vec{n}$ можуть бути використані відомі формули [1.2]. Наприклад, якщо гладка поверхня $\sigma$ задається однозначною функцією $z = z(x,y)$ і однозначно проєктується в область $D_{xy}$ координатної площини *Oxy*, то координати вектора нормалі можуть бути знайдені за формулами:

$$\cos\alpha = \mp\frac{z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}; \cos\beta = \mp\frac{z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}};$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}. \qquad (6.4)$$

Якщо вектор нормалі $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю $Oz$, вибирається верхній знак в формулах, якщо тупий - нижній.

***Приклад.*** Обчислити поверхневий інтеграл II роду: $I = \iint\limits_{\sigma^+} xdydz + ydxdz + zdxdy$, де $\sigma^+$- сторона сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, що розташована в I октанті $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$, нормаль до поверхні утворює гострий кут з додатним напрямом осі $Oz$.

***Розв'язання***. Область інтегрування зображена на Рис. 5.5.

**I спосіб.** Зведемо поверхневий інтеграл II роду до поверхневого інтеграла I роду за (6.3). Для цього шукаємо координати вектора нормалі $\vec{n}$ за формулами (6.4), вибираючи верхній знак в формулах. Оскільки $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$; то

$$z'_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};\ z'_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};$$

$$\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Тоді: $\cos\alpha=\dfrac{x}{R}$; $\cos\beta=\dfrac{y}{R}$; $\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R}$. За (6.3) записуємо поверхневий інтеграл I роду: $\mathrm{I}=\iint\limits_{\sigma}\left(x\cdot\dfrac{x}{R}+y\cdot\dfrac{y}{R}+z\dfrac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R}\right)d\sigma$.

Тепер обчислюємо поверхневий інтеграл I роду за формулою (5.1). Для цього знаходимо проєкцію поверхні на площину $Oxy$ область $D$: чверть круга з центром в початку координат радіуса $R$ в першому квадранті (Рис. 5.6), і обчислюємо подвійний інтеграл по цій області в полярній системі координат:

$$I=\frac{1}{R}\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=$$

$$=\frac{R^3}{R}\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=$$

$$=-\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R}\left(R^2-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(R^2-\rho^2\right)=-\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left(2\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^R\right)=\frac{R^2}{2}\cdot 2R\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi R^3}{2}.$$

**II спосіб**. За формулою (6.2) зведемо інтеграл до суми трьох подвійних інтегралів $\mathrm{I}=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3$. Проєкцією поверхні на всі три координатні площини (область $D_{yz}$ на площину $Oyz$, область $D_{xz}$ на площину $Oxz$ і область $D_{xy}$ на площину $Oxy$) буде чверть круга з центром в початку координат радіуса $R$, що розташована в першому квадранті. Вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з додатними напрямами координатних осей, отже в правій частині (6.2) перед інтегралами вибираємо знак "+".

1. Записуємо рівняння поверхні $\sigma$ у вигляді $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$ і обчислюємо подвійний інтеграл по $D_{yz}$:

$$I_1=\iint_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2-z^2}\,dydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R d\varphi=\frac{\pi R^3}{6}.$$

2. Записуємо рівняння поверхні $\sigma$ у вигляді $y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}$ і обчислюємо подвійний інтеграл по $D_{xz}$: $\mathrm{I}_2=\iint_{D_{xz}}\sqrt{R^2-x^2-z^2}\,dxdz=\frac{\pi R^3}{6}.$

3. Записуємо рівняння $\sigma$ у вигляді $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ і і обчислюємо подвійний інтеграл по $D_{xy}$: $\mathrm{I}_3=\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{\pi R^3}{6}.$

Остаточно: $\mathrm{I}=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3=\frac{\pi R^3}{2}.$

**6.3. Формула Остроградського - Гауса.** Розглядаємо в просторі скінченну область $V$, що обмежена замкненою поверхнею $\sigma$, розглядається зовнішня сторона поверхні. Нехай функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в області $V$. Тоді має місце **формула Остроградського - Гауса** ([4,5]):

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_\sigma Pdydz+Qdxdz+Rdxdy\,. \qquad (6.5)$$

Формула встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом II роду по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по області, що обмежена цією поверхнею.

***Приклад.*** Використовуючи формулу Остроградського - Гауса, обчислити поверхневий інтеграл: $I=\iint\limits_{\sigma^+} x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, де $\sigma^+$- зовнішня сторона поверхні, що складається з верхньої півсфери $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ і площини $z=0$ (Рис. 6.1).

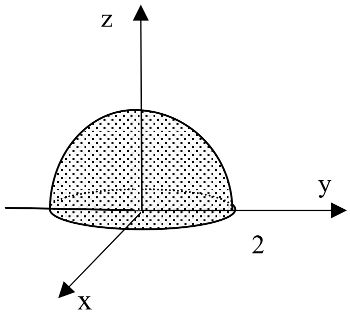

Рис.6.1

***Розв'язання***. В даному прикладі $P(x,y,z)=x^3$, $Q(x,y,z)=y^3$, $R(x,y,z)=z^3$. Тоді $\dfrac{\partial P}{\partial x}=3x^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=3y^2$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}=3z^2$ і за (6.5): $I=\iiint\limits_V \left(3x^2+3y^2+3z^2\right)dxdydz$.

Обчислюємо інтеграл в сферичних координатах:

$$I=3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^2\rho^2\cdot\rho^2d\rho=3\cdot\frac{32}{5}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{96}{5}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{192\pi}{5}.$$

В деяких випадках є доцільним використовувати формулу Остроградського - Гауса і для обчислення інтегралів по незамкнених поверхнях. У цьому випадку в границю області інтегрування додаються поверхні так, щоб поверхня інтегрування стала замкненою. Інтеграл по отриманій замкненій поверхні обчислюється за теоремою Остроградського - Гауса, і від отриманого результату віднімаються значення поверхневих інтегралів по поверхнях, які додавалися.

***Приклад.*** Знайти поверхневий інтеграл II роду: $I=\iint\limits_{\sigma^+}\left(x^3+xy^2\right)dydz+\left(y^3+x^2y\right)dxdz+z^3dxdy$, де $\sigma^+$- бокова поверхня циліндра $x^2+y^2=1$, що обмежена площинами $z=0$, $z=1$ (нормаль зовнішня до замкненій поверхні, що утворена даними поверхнями).

***Розв'язання***. Область інтегрування зображена на Рис.6.2. Дозамикаємо поверхню двома площинами: $\sigma_1 : z = 0$ з вектором нормалі $\overrightarrow{n_1} = \{0;0;-1\}$ і площиною $\sigma_2 : \text{z} = 1$ з вектором нормалі $\overrightarrow{n_2} = \{0;0;1\}$ і розглядаємо замкнену поверхню $\sigma_{зам}$. Тоді $I = I_з - I_1 - I_2$, де $I_з$ - інтеграл по побудованій замкненій поверхні $\sigma_{зам}$; $I_1$ - інтеграл по площині $\sigma_1$, $I_2$ - інтеграл по площині $\sigma_2$. $I_з$ знаходимо за теоремою Остроградського-Гауса. Оскільки

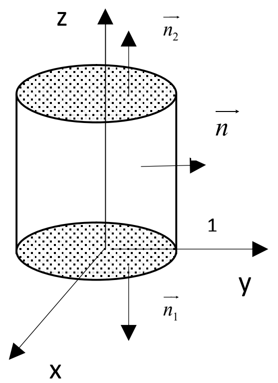

Рис.6.2

$$P = x^3 + xy^2;\ Q = y^3 + x^2 y;\ R = z^3,\ \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 + y^2;\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2 + x^2;\ \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2\ ,$$

то за формулою (6.5): $I_3 = \iiint\limits_V \left(3x^2 + y^2 + 3y^2 + x^2 + 3z^2\right) dxdydz$. Проєкцією області інтегрування на площину $Oxy$ буде круг $D : x^2 + y^2 \le 1$, тому переходимо в потрійному інтегралі в циліндричну систему координат

$$I_з = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^1 \left(4\rho^2 + 3z^2\right) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\left(4\rho^2 z + z^3\right)\Big|_0^1 d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(4\rho^3 + \rho\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \rho^4 \Big|_0^1 + \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1 \right) = \frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = 3\pi\,.$$

Тепер обчислюємо $I_1$ за формулою (6.3):

$$I_1 = \iint\limits_{\sigma_1} \left( \left(x^3 + xy^2\right)0 + \left(y^3 + x^2 y\right)0 + z^3(-1) \right) d\sigma = 0,$$

оскільки рівняння $\sigma_1 : z = 0$. Аналогічно обчислюємо $I_2$:

$$I_2 = \iint\limits_{\sigma_2} \left( \left(x^3 + xy^2\right)0 + \left(y^3 + x^2 y\right) + z^3 \cdot 1 \right) d\sigma = \iint\limits_{\sigma_2} z^3 d\sigma = \iint\limits_D 1^3 dxdy = S_D = \pi.$$

Остаточно: $I = 3\pi - 0 - \pi = 2\pi.$

# 7. Елементи теорії поля

**7.1. Скалярні поля.** Просторова область $V$ називається **полем**, якщо в кожній точці області $M \in V$ визначено значення деякої величини. Якщо кожній точці $M$ відповідає певне число $U = U(M)$, то кажуть, що в цій області $V$ задане **скалярне поле**. Прикладами скалярних полів можуть бути:

1) поле температур досліджуваного тіла;

2) потенціал електричного поля,

3) поле тиску в деякому просторі.

Для аналітичного вивчення полів введемо в просторі систему координат. Тоді кожна точка $M$ скалярного поля з області $V \subset R^3$ має свої координати, наприклад декартові $x, y, z$, і скалярне поле $U$ можна розглядати як скалярну функцію трьох змінних $U(x, y, z)$. Можна довести, що основні характеристики скалярних полів не залежать від системи координат. Якщо скалярна функція залежить лише від двох змінних $U(x, y)$, то скалярне поле називається *плоским*.

Для наочного представлення скалярних полів використовують поверхні рівня.

**Означення.** *Поверхнями рівня* скалярного поля називають геометричне місце точок, в яких функція $U(x, y, z)$ приймає стале значення: $U(x, y, z) = C$, де $C$ - різні дійсні сталі.

Наприклад, для скалярного поля $U(x, y, z) = ax + by + cz$ поверхнями рівня є множина паралельних площин $ax + by + cz = C$, що відповідають різним $C \in R$.

У випадку плоских скалярних полів, аналогом поверхонь рівня є *лінії рівня*, що задаються рівностями $U(x, y) = C$.

Для характеристики швидкості зміни скалярного поля за заданим напрямком розглядають похідну в заданому напрямку.

Нехай в області $V \subset R^3$ задано скалярне поле $U(x,y,z)$ і деякий вектор $\vec{\lambda}$. Побудуємо вектор $\vec{\lambda}$ з початком в довільній точці $M(x,y,z) \in V$ і виберемо точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) \in V$ на промені, утвореному вектором $\vec{\lambda}$. Приріст функції $U(x,y,z)$, що виникає при переході від точки $M$ до точки $M_1$ за напрямком вектора $\vec{\lambda}$ визначається як:

$$\Delta U = U(M_1) - U(M) = U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x,y,z) \ .$$

**Означення**. Похідною від $U(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком вектора $\vec{\lambda}$ називається границя:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|M_1 M|} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta \lambda}, \text{ де } \Delta\lambda = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \ .$$

З введеного означення випливає: якщо $\frac{\partial U}{\partial \lambda} > 0$, то скалярне поле $U(x,y,z)$ в точці $M$ зростає за напрямком вектора $\vec{\lambda}$, якщо $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то спадає, при цьому значення $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$ дає абсолютне значення миттєвої швидкості зміни функції $U$ в точці $M$ за напрямком вектора $\vec{\lambda}$.

Для знаходження похідної від $U(x,y,z)$ в точці $M$ за напрямком вектора $\vec{\lambda}$ в припущенні, що функція $U(x,y,z)$ є диференційованою в точці $M$, має місце формула [3]:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma \qquad (7.1)$$

де $\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора $\vec{\lambda}$ (координати орта $\vec{\lambda}$ - вектора $\vec{\lambda}^0$) .

***Приклад***. Знайти похідну поля $U(x,y,z) = z^3 + x^2 y^2$ в точці $M_1(-1;2;1)$ за напрямком від цієї точки до точки $M_2(-3;-1;-5)$

***Розв'язання.*** Обчислення проведемо за формулою (7.1). Для цього знайдемо потрібні частинні похідні заданого скалярного поля та їх значення в точці $M_1(-1;2;1)$: $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_1} = \left.2xy^2\right|_{M_1} = -8;$ $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_1} = \left.2x^2y\right|_{M_1} = 4;$ $\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_1} = \left.3z^2\right|_{M_1} = 3$.

За напрямний вектор виступає вектор $\vec{\lambda} = \overrightarrow{M_1M_2} = (-2,-3,-6)$. Знаходимо напрямні косинуси $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(-6)^2}} = -\frac{2}{7}; cos\beta = -\frac{3}{7}; cos\gamma = -\frac{6}{7}$. Отже, за формулою (7.1); $\left.\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|_{M_1} = -8\cdot(-\frac{2}{7}) + 4\cdot(-\frac{3}{7}) + 3\cdot(-\frac{6}{7}) = -2$. Оскільки $\left.\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|_{M_1} < 0$, то можна зробити висновок, що дана функція в даному напрямку є спадною.

***Приклад***. Знайти похідну поля $U(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - z$ в точці $M(3;4;1)$ за напрямком нормалі до поверхні $z+1 = x^2+y^2$, що проходить через $M$ і утворює гострий кут з додатним напрямком осі *Oz*.

***Розв'язання.*** Знаходимо координати вектора нормалі до поверхні, заданої неявно рівнянням $\Phi(x,y,z) = 0$ за формулою $\vec{n} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$. В нашому прикладі: $\Phi(x,y,z) = z - x^2 - y^2 + 1$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 1$. Отже, нормаль до поверхні в точці $M(3;4;1)$: $\vec{n} = (-6,-8,1)$. Знаходимо напрямні косинуси $\vec{n}$ і вибираємо напрям, враховуючи, що за умовою $cos\gamma > 0$: $cos\alpha = -\frac{6}{\sqrt{101}}; cos\beta = -\frac{8}{\sqrt{101}}; cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{101}}$. Знаходимо частинні похідні скалярного поля в точці $M(3;4;1)$: $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{M} = \frac{3}{5};$

$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_M = \frac{4}{5}$; $\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M = -1$. Отже, за (7.1)

$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_M = \frac{1}{\sqrt{101}}\left(-\frac{18}{5}-\frac{32}{5}-1\right) = -\frac{11\sqrt{101}}{101}$ .

**Означення.** ***Градієнтом скалярного поля*** $U(x,y,z)$ в довільній точці $M(x,y,z)\in V$ називається вектор, координатами якого є частинні похідні функції $U(x,y,z)$ в точці $M$ :

$$grad\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \tag{7.2}$$

Враховуючи означення градієнта, формулу (7.1) запишемо у вигляді: $\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \vec{\lambda}^0 gradU$. З означення скалярного добутку, врахувавши, що $\left|\vec{\lambda}^0\right| = 1$, маємо:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \left|gradU\right| \cdot \cos\varphi \quad , \tag{7.3}$$

де $\varphi$ - кут між векторами $grad\,U$ і $\vec{\lambda}$. З формули (7.3) випливає, що похідна за напрямком досягає свого найбільшого значення, коли $\cos\varphi = 1$, тобто коли $\varphi = 0$. Отже, фізичний сенс вектора градієнта полягає в тому, що вектор градієнта функції вказує напрямок найшвидшого зростання функції, при цьому, модуль вектора

$$\left|grad\,U\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \tag{7.4}$$

визначає найбільшу швидкість зміни функції $U(x,y,z)$ в точці $M$.

***Приклад***. Знайти кут $\varphi$ між градієнтами скалярних полів $U(x,y,z) = zy^2 + \frac{y}{x}$ і $V(x,y,z) = \sqrt{x + yz^2}$ в точці $M_1(1,0,-2)$.

***Розв'язання.*** За формулою (7.2) обчислюємо градієнти функцій $U$ і $V$ в точці $M$ :

$$grad\,U\big|_M = -\frac{y}{x^2}\bigg|_M \vec{i} + (2yz + \frac{1}{x})\bigg|_M \vec{j} + y^2\big|_M \vec{k} = \vec{j},$$

$$grad\,V\big|_M = \frac{1}{2\sqrt{x+yz^2}}\bigg|_M \vec{i} + \frac{z^2}{2\sqrt{x+yz^2}}\bigg|_M \vec{j} + \frac{yz}{\sqrt{x+yz^2}}\bigg|_M \vec{k} = \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j}\ .$$

Знаходимо косинус кута між знайденими векторами, використовуючи означення скалярного добутку:

$$cos\varphi = \frac{grad\,U\big|_M \cdot grad\,V\big|_M}{\left|grad\,U\big|_M\right| \cdot \left|grad\,U\big|_M\right|} = \frac{2}{1\cdot\sqrt{(1/2)^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

***Приклад***. Знайти найбільшу швидкість зміни функції $U(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 z}$ в точці $M(-3,4,1)$.

***Розв'язання.*** Знаходимо градієнт $U$ в точці $M$:

$$grad\,U\big|_M = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2z}}\bigg|_M \vec{i} + \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2z}}\bigg|_M \vec{j} + \frac{y^2}{2\sqrt{x^2+y^2z}}\bigg|_M \vec{k} = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} + \frac{8}{5}\vec{k}.$$

Тоді за (7.4) найбільша швидкість зміни функції в точці $M$:

$$|grad\,U| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{89}}{5}.$$

**7.2. Векторні поля.** Як і раніше, розглядаємо просторову область $V \subset R^3$**.** Якщо кожній точці $M \in V$ відповідає деякий вектор $\vec{a}(M)$, то кажуть, що в області $V$ задане **векторне поле**. Якщо ввести в просторі систему координат, наприклад, декартову, то кажемо, що в області $V$ задано векторне поле, якщо в кожній точці $M(x,y,z) \in V$ задано вектор $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Прикладами векторних полів можуть бути:

1) поле сили $\vec{F}(x,y,z)$,

2) поле швидкостей течії рідини або газу.

3) поле, утворене вектором напруженості електричного поля.

4) поле градієнта деякого скалярного поля тощо.

Важливою характеристикою векторного поля є поняття векторних ліній.

**Означення**. **Векторною лінією** поля $\vec{a}$ називається крива, в кожній точці якої дотична має напрям вектора $\vec{a}$.

Можна довести, що за умови диференційованості координат $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ в області $V$ через кожну точку $M_0 \in V$ проходить лише одна векторна лінія, і векторні лінії поля описуються системою диференціальних рівнянь виду: $\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dx}{Q(x,y,z)} = \frac{dx}{R(x,y,z)}$ [3].

Сукупність векторних ліній, що проходять через всі точки деякої кривої $L$, яка не паралельна векторним лініям, утворюють *векторну поверхню.* Векторна поверхня, що проходить через замкнений контур $\Gamma$, утворює *векторну трубку.*

Нехай векторне поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ - поле швидкостей стаціонарної течії рідини. Припустимо, що в цьому потоці розташована деяка поверхня $\sigma$ (замкнена чи незамкнена). Виберемо сторону поверхні і позначимо через $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ - одиничний вектор нормалі до обраної сторони поверхні.

**Означення.** Поверхневий інтеграл

$$\Pi = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma \qquad (7.5)$$

називається **потоком** векторного поля $\vec{a}$ через орієнтовану поверхню $\sigma$ в указаному напрямку.

Враховуючи формулу (6.3), потік може бути визначений як

$$\Pi = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \qquad (7.6)$$

Фізичний сенс потоку: якщо векторне поле $\vec{a}$ - поле швидкостей стаціонарної течії рідини, то величина $\Pi$ визначає кількість рідини, що протікає через поверхню $\sigma$ за одиницю часу в напрямку нормалі $\vec{n}$.

***Приклад***. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + z\vec{k}$ через частину площини $2x + 4y + z = 4$, розташовану в І октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю $Oz$).

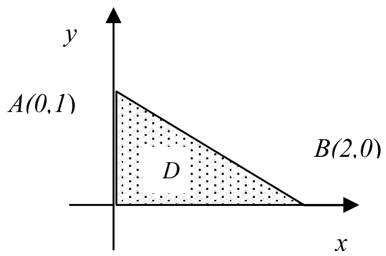

Рис 7.1

***Розв'язання.*** Скористуємось формулою (7.5). В даному прикладі

$$P(x,y,z) = x,\ Q(x,y,z) = 0,\ R(x,y,z) = z.$$

Знаходимо координати одиничного вектора нормалі до поверхні. Записуємо рівняння площини у вигляді $z = 4 - 2x - 4y$, користуємося формулами (6.4). Оскільки за умовою $cos\gamma > 0$, вибираємо верхні знаки у формулах (6.4):

$$cos\alpha = -\frac{-2}{\sqrt{1+(-2)^2+(-4)^2}} = \frac{2}{\sqrt{21}}; cos\beta = \frac{4}{\sqrt{21}}; cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

Проєкцією поверхні на площину $Oxy$ буде трикутник, зображений на Рис. 7.1, рівняння прямої $AB$: $x + 2y = 2$ Обчислюємо потік векторного поля:

$$\Pi = \iint_\sigma \left(x\frac{2}{\sqrt{21}} + z\frac{1}{\sqrt{21}}\right)d\sigma = \iint_D \left(2x\frac{1}{\sqrt{21}} + (4-2x-4y)\frac{1}{\sqrt{21}}\right)\sqrt{21}dxdy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{1-x/2} (2x + 4 - 2x - 4y)dy = 4\int_0^2 dx \int_0^{1-x/2} (1-y)dy = 4\int_0^2 \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x/2} dx =$$

$$= 4\int_0^2 \left(1 - x/2 - \frac{(1-x/2)^2}{2}\right)dx = 4\left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{(1-x/2)^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Введемо ще одне важливе в теорії векторного поля поняття. Нехай в області $V \subset R^3$ задане векторне поле $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$.

Вважаємо функції $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ неперервними разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ в області $V$.

**Означення.** Скалярна функція $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ називається **дивергенцією** векторного поля $\vec{a}$ в точці $M(x,y,z)$ і позначається $div\,\vec{a}$, тобто

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{7.7}$$

Враховуючи означення потоку і дивергенції векторного поля, формулу Остроградського – Гауса (6.5) можна записати у вигляді:

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{V} div\,\vec{a}\; dxdydz\ , \tag{7.8}$$

тобто, потік вектора $\vec{a}$ через гладку замкнену поверхню $\sigma$ в напрямку зовнішньої нормалі дорівнює потрійному інтегралу від $div\,\vec{a}$ по об’єму $V$, обмеженому поверхнею $\sigma$.

Для векторного поля швидкостей стаціонарної течії нестисливої рідини значення $div\,\vec{a}$ в точці $M(x,y,z)$ показує присутність джерела в точці $M$ при умові $div\,\vec{a} > 0$ та наявність стоку якщо $div\,\vec{a} < 0$.

***Приклад***. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a} = grad\,u(x,y,z)$ в точці $M(-1,0,3)$. де $u(x,y,z) = x^2y^2 + \frac{e^y + x}{\sqrt{z+1}}$.

***Розв’язання.*** Знаходимо координати векторного поля. Для цього відповідно до (7.2) знаходимо частинні похідні функції $u(x,y,z)$: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2 + \frac{1}{\sqrt{z+1}}; \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2y + \frac{e^y}{\sqrt{z+1}}; \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{e^y + x}{2(z+1)^{3/2}}$. Отже,

$$\vec{a} = grad\,u(x,y,z) = \left(2xy^2 + \frac{1}{\sqrt{z+1}}\right)\vec{i} + \left(2x^2y + \frac{e^y}{\sqrt{z+1}}\right)\vec{j} - \frac{e^y + x}{2(z+1)^{3/2}}\vec{k}\,.$$

Для знаходження дивергенції користуємось формулою (7.7). В нашому прикладі

$$P(x,y,z)=2xy^2+\frac{1}{\sqrt{z+1}};\ Q(x,y,z)=2x^2y+\frac{e^y}{\sqrt{z+1}};\ R(x,y,z)=-\frac{e^y+x}{2(z+1)^{3/2}}$$ . Отже,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2y^2;\ \frac{\partial Q}{\partial y}=2x^2+\frac{e^y}{\sqrt{z+1}};\ \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{3}{4}\frac{e^y+x}{(z+1)^{5/2}},$$

$$div\,\vec{a}\Big|_M=\left(2y^2+2x^2+\frac{e^y}{\sqrt{z+1}}+\frac{3}{4}\frac{e^y+x}{(z+1)^{5/2}}\right)\Bigg|_M=\frac{5}{2}.$$

***Приклад***. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=(3x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+(x+4z)\vec{k}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні, утвореної площинами $2x+4y+z=4$, $x=0; y=0; z=0$.

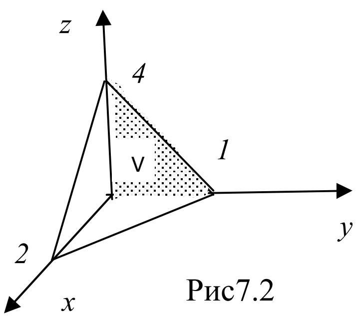

Рис7.2

***Розв'язання.*** В даному прикладі $P(x,y,z)=3x+z;\ Q(x,y,z)=x+3y;\ R(x,y,z)=x+4z$. За формулою (7.7) знаходимо

$$div\,\vec{a}=\frac{\partial(3x+z)}{\partial x}+\frac{\partial(x+3y)}{\partial y}+\frac{\partial(x+4z)}{\partial z}=3+3+4=10.$$

Тоді за формулою (7.8):

$$\Pi=\iiint_V div\,\vec{a}\,dxdydz=10\iiint_V dxdydz.$$

Область інтегрування $V$ зображена на Рис. 7.2 і становить собою прямокутний тетраедр. Оскільки за формулою (6.2) потрійний інтеграл від одиничної функції визначає об'єм області інтегрування, то:

$$\Pi=10V_{тетр}=10\cdot\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot 4=\frac{40}{3}.$$

Підкреслимо, що якби мова йшла про внутрішню сторону поверхні, перед потрійним інтегралом треба було б поставити знак "-".

**Означення.** Розглянемо в області $V$ векторне поле $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$, замкнену криву $\Gamma\in V$. Криволінійний інтеграл II роду по замкненому контуру

$$Ц = \int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \qquad (7.9)$$

називається **циркуляцією** вектора $\vec{a}$ вздовж замкненої кривої Г.

Враховуючи формулу (4.13), можна визначити фізичний зміст циркуляції: якщо векторне поле - поле сили $\vec{F}(x,y,z)$, то циркуляція визначає роботу сили при переміщенні вздовж замкненої кривої Г.

***Приклад***. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (xy + z^2)\vec{i} + x^2z^3\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma: x = 2\cos t; y = 4\sin t; z = 3$ в напрямку, що відповідає зростанню параметра *t*.

***Розв'язання.*** Контур Г - еліпс, рівняння якого записане в параметричному вигляді, що розташований в площині $z = 3$,. За формулою (7.9) складаємо криволінійний інтеграл II роду:

$$Ц = \int_{\Gamma} (xy + z^2)dx + x^2z^3dz$$

Для обчислення цього інтегралу використовуємо формулу (4.2). Враховуючи, що $x' = -2\sin t; y' = 4\cos t; z' = 0$, $0 \le t \le 2\pi$, зводимо криволінійний інтеграл до визначеного:

$$Ц = \int_0^{2\pi} ((2\cos t\ 4\sin t + 9)(-2\sin t) + 4\cos^2 t \cdot 27 \cdot 0)dt == -16\int_0^{2\pi} \cos t\ \sin^2 t dt -$$

$$-18\int_0^{2\pi} 2\sin t dt = -16\int_0^{2\pi} \sin^2 t d\sin t + 36\cos t\Big|_0^{2\pi} = -16\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi} + 36(1-1) = 0 \ .$$

**Означення. Ротором** векторного поля $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, називається вектор

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \qquad (7.10)$$

Для простого запам'ятовування формули складають умовний визначник, розкривши який за елементами першого рядка можна отримати координати ротора:

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (7.11)$$

Якщо векторне поле задається вектором швидкостей $\vec{v}$ точок твердого тіла, що рухається вільним чином, то $rot\vec{v}$ задає подвоєну миттєву кутову швидкість цього тіла.

Розглянемо основні класи векторних полів.

**Означення.** Векторне поле, в кожній точці якого дивергенція дорівнює нулю $div\,\vec{a}(M) = 0$, називається **соленоїдальним**.

Прикладом соленоїдального поля є поле швидкостей твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки.

Соленоїдальні поля мають наступні властивості:

Властивість 1. В соленоїдальному полі потік вектора через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю (властивість випливає з формули (7.8)).

Властивість 2. Соленоїдальне поле є полем ротора деякого векторного поля : якщо $div\,\vec{a} = 0$, то існує таке поле $\vec{b}$, що $\vec{a} = rot\vec{b}$ .

Властивість 3. В соленоїдальному полі потік вектора через поперечний переріз векторної трубки зберігає постійне значення.

**Означення.** Векторне поле, в кожній точці якого ротор дорівнює нулю $rot\,\vec{a}(M) = 0$, називається **потенціальним** ([3]).

Прикладами потенціальних полів є:

1) електричне поле напруженості точкового заряду,

2) гравітаційне поле (поле тяжіння заданої маси до нерухомого центра),

3) магнітне поле, створене рухомим прямолінійним провідником.

Умова $rot\,\vec{a}(M)=0$ означає, що в усіх точках області $V$ виконуються умови (4.8). Отже, на підставі теореми розділу 4.4, можна зробити наступні висновки про властивості потенціального поля.

<u>Властивість 1</u>. Циркуляція потенціального поля по будь-якому замкненому контуру в цьому полі дорівнює нулю.

<u>Властивість 2.</u> В потенціальному полі криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ залежить лише від початкової точки $A$ і кінцевої точки $B$ і не залежить від виду кривої, що їх з'єднує.

<u>Властивість 3.</u> Потенціальне поле є полем градієнта деякої скалярної функції, тобто існує функція $U(x,y,z)$ така, що: $\vec{a}=grad\,U(x,y,z)$. Функція $U(x,y,z)$ називається **потенціалом** векторного поля і може бути з точністю до сталої знайдена за формулою (4.11):

$$U(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^{x}P(\xi,y_0,z_0)d\xi+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,\eta,z_0)d\eta+\int\limits_{z_0}^{z}R(x,y,\zeta)d\varsigma+C. \qquad (7.12)$$

де $(x_0,y_0,z_0)$ - координати фіксованої точки, $(x,y,z)$ - координати довільної точки.

***Приклад***. Довести, що векторне поле $\vec{a}=(3x^2+3y^2)\vec{i}+(6xy+z^4)\vec{j}+4yz^3\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

***Розв'язання.*** Для перевірки потенціальності поля, покажемо, що $rot\,\vec{a}=0$ . Для цього складаємо умовний визначник (7.11), враховуючи, що в нашому прикладі $P(x,y,z)=(3x^2+3y^2);Q(x,y,z)=(6xy+z^4);R(x,y,z)=4yz^3$ і розкриваємо його за елементами першого рядка:

$$rot\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2+3y^2 & 6xy+z^4 & 4yz^3\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial(4yz^3)}{\partial y}-\frac{\partial(6xy+z^4)}{\partial z}\right)-$$

$$-\vec{j}\left(\frac{\partial(4yz^3)}{\partial x}-\frac{\partial(3x^2+3y^2)}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial(6xy+z^4)}{\partial x}-\frac{\partial(3x^2+3y^2)}{\partial y}\right)=$$

$$=\vec{i}\left(4z^3-4z^3\right)-\vec{j}\left(0-0\right)+\vec{k}\left(6y-6y\right)=0.$$

Отже, поле потенціальне. Знаходимо його потенціал за формулою (7.12). Вибираємо $x_0=0, y_0=0, z_0=0$. Тоді $P(\xi,0,0)=3\xi^2; Q(x,\eta,0)=6x\eta;\ R(x,y,z)=4y\zeta^3$,

$$U(x,y,z)=\int_0^x 3\xi^2 d\xi+\int_0^y 6x\eta d\eta+\int_0^z 4y\zeta^3 d\varsigma+C=3\int_0^x \xi^2 d\xi+$$

$$+6x\int_0^y \eta d\eta+4y\int_0^z \zeta^3 d\varsigma+C=x^3+3xy^2+yz^4+C\ .$$

**Означення.** Векторне поле називається **гармонічним**, якщо воно одночасно є і соленоїдальним і потенціальним, тобто якщо в кожній точці поля виконуються умови:

$$\begin{cases} div\ \vec{a}=0 \\ rot\ \vec{a}=0 \end{cases}.$$

Як випливає з означення, гармонічні поля мають властивості і потенціальних і соленоїдальних полів.

Для потенціалу гармонічного поля має місце твердження: потенціал гармонічного поля $U(x,y,z)$ є *гармонічною* функцією, тобто задовольняє рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0\ . \qquad (7.13)$$

***Приклад***. Визначити тип векторного поля $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$.

***Розв'язання.*** Щоб встановити, чи буде поле соленоїдальне, знайдемо $div\,\vec{a}$. В даному прикладі $P(x,y,z)=y+z;\ Q(x,y,z)=x+y;\ R(x,y,z)=x+y$ Знаходимо:

$$div\,\vec{a}=\frac{\partial(y+z)}{\partial x}+\frac{\partial(x+y)}{\partial y}+\frac{\partial(x+y)}{\partial z}=0+0+0=0.$$

Оскільки $div\,\vec{a}=0$, то поле соленоїдальне.

Для перевірки потенціальності поля, знайдемо $rot\,\vec{a}$,

$$rot\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial y}-\frac{\partial(x+z)}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x}-\frac{\partial(y+z)}{\partial z}\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial(x+z)}{\partial x}-\frac{\partial(y+z)}{\partial y}\right)=\vec{i}(1-1)-\vec{j}(1-1)+\vec{k}(1-1)=0\ -$$

поле потенціальне. Оскільки $div\,\vec{a}=0$ і $rot\,\vec{a}=0$, то поле гармонічне.

***Приклад***. Показати, що функція $U(x,y,z)=3x^2z+2xy-z^3$ є потенціалом гармонічного поля.

***Розв'язання.*** Покажемо, що дана функція задовольняє рівняння Лапласа. Знаходимо частинні похідні другого порядку.

$$\frac{\partial U}{\partial x}=6xz+2y;\ \frac{\partial^2U}{\partial x^2}=6z;\frac{\partial U}{\partial y}=2x;\ \frac{\partial^2U}{\partial y^2}=0;\frac{\partial U}{\partial z}=3x^2-3z^2;\ \frac{\partial^2U}{\partial z^2}=-6z;$$

підставляємо знайдені функції в (7.13): $6z+0-6z=0$ . Функція гармонічна, а, отже, є потенціалом гармонічного поля.

## 8. Варіанти типового розрахунку.

**Варіант № 1.**

1. Змінити порядок інтегрування: $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy.$

2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями: $x^2 + y^2 = 2x;\ x^2 + y^2 = 4x,$ $y = x;\ y = \sqrt{3}x$.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V (x+y)\,dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена площинами: $2x - y + z = 2;\ x = 0; y = 0; z = 0$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}; 12z = x^2 + y^2$

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L 3xydl,$ де $L: y = \sqrt{4 - x^2}$ .

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x^2 - y)dx + zdy + yzdz$, де L – відрізок прямої, від точки (3,-1,0) до точки (2,4,5).

7. Знайти масу частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9, (z \ge 0)$ з поверхневою густиною $\mu(x, y, z) = x^2 y^2 z$ .

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} 4xdydz - 2ydxdz - zdxdy$ по зовнішній стороні піраміди, що обмежена площинами $\sigma^+ : x + y + z = 6;\ x = 0;\quad y = 0;\ z = 0$ .

9. Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z) = z^2 + 2y^2 + \dfrac{xz}{z+1}$ в точці $M_1(2,-1,0)$ в напрямі токи $M_2(-2,1,3)$.

10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + z^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma : x = 2\cos t; y = 2\sin t; z = 3$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра $t$ .

**Варіант № 2.**

1. Змінити порядок інтегрування: $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy$ .

2. Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_D xdxdy$, де $D:\ x^2 + y^2 = 2y$ .

3. Знайти масу тіла з густиною $\gamma\left(x,y,z\right)=20z$, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=1;\ x^2+y^2=4z^2;\ x=0;\ y=0;\ \left(x>0;\ y>0;\ z>0\right)$.
4. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}\,;x=0;y=0;z=0$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L\frac{dl}{x+y^2}$, де L – відрізок прямої між точками (0;1) і (3;6).
6. Довести, що вираз $du=\frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy$ є повним диференціалом функції $u(x,y)$ і знайти цю функцію. .
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma\frac{d\sigma}{\left(1+x+2z\right)^2}$, де $\sigma$ - частина площини $x+y+z=1$. що розташована в І октанті.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}2xdydz+zdxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+:z=x^2+y^2+1;x^2+y^2=4;z=0$ $3x+y=6;y=0;z=0.$
9. Знайти орт градієнта скалярного поля $u(x,y,z)=\ln(z^2+xy^3)$ в точці $M(2,1,-1)$.
10. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=xz\vec{i}+z\vec{j}+2y\vec{k}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні : $\sigma^+:x^2+y^2=2;x^2+y^2=4;z=0;z=1$

**Варіант № 3.**

1. Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_D\left(x+2y\right)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y=x/2;y=x;y=1/x$.

2. Знайти масу пластини з поверхневою густиною $\gamma\left(x,y\right)=\frac{2x-y}{x^2+y^2}$, що обмежена лініями: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=9, \quad x=0; y=0 \ (x\geq 0, y\leq 0)$.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V 21xzdxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $y=x; x=2; \ y=0; \ z=0; \ z=xy$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2+y^2=2x; \ x^2+y^2=4x,$. $z=0; z=2$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2+z^2}dl$, де $L: x=t\cos t; y=t\sin t; z=t, 0\leq t\leq 2\pi$ .
6. За формулою Гріна обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(x^2-y\right)dx-y^2xdy$ де $L: y=\sqrt{x}; x=\sqrt{y}$ (обхід контуру в додатному напрямі).
7. Знайти масу поверхні $\sigma: 3x+y+6z-6=0; \quad \left(x>0; y>0; z>0\right)$; $\mu\left(x;y;z\right)=6z-x$ - густина.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}\left(x+y\right)dydz+\left(x-y\right)dxdz+\left(z^2-2\right)dxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+: z=\sqrt{x^2+y^2}; z=2$
9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x,y,z)=z^2+2xy^2$ і $v(x,y,z)=\frac{xz}{zy+1}$ в точці $M(2,-1,1)$ .
10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(x+2y)\vec{j}+xz^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma: x=2\cos t; y=\sin t; z=\sin t$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра t. .

**Варіант № 4.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2y^2dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y=2x; y=1/x; y=0; x=3$.
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2+y^2=2y \quad y=x;\ y=\sqrt{3}x$.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V (9+18z)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $y=4x; x=1;\ y=0;\ z=0;\ z=\sqrt{xy}$.
4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $9\left(x^2+y^2\right)=z^2; x^2+y^2=4; x=0; y=0;\ z=0; \left(x>0; y>0; z>0\right)$, $\mu\left(x,y,z\right)=5\left(x^2+y^2\right)/3$ - густина.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OAB} y\sin x dl$, де OAB –ламана, $O\left(0;0\right); A\left(1;1\right); B\left(2;0\right)$.
6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xydx+y^2dy$,де $L: x^2/4+x^2/9=1$ від $A\left(0;-3\right)$до $B\left(2;0\right)$.
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma yd\sigma$, де $\sigma: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}\left(y+z\right)dydz+\left(x-2y+z\right)dxdz+xdxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+: z=x^2+y^2; x^2+y^2=1; z=0$
9. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)=z^2+2y^2+\frac{xz}{z+1}$ в точці $M_1(3,1,0)$ в напрямі токи $M_2(2,1,8)$ .
10. Довести, що векторне поле $\vec{a}=2xy\vec{i}+(x^2+z^2)\vec{j}+2yz\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант № 5.**

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-y}^{2-2y} f dy$

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де $D: x^2+y^2=2y; x^2+y^2=4y; y=x; y=-x$.

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x+y=2; x=\sqrt{y}; z=\frac{12x}{5}, z=0.$

4. Знайти масу тіла з густиною $\mu(x,y,z)=90y$, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=6z; x^2+y^2=1; x=0; y=0;\ z=0;\ (x\ge 0; y\ge 0)$.

5. Знайти масу дуги матеріальної кривої $y=\ln x$ між точками $(1;0)$ і $(2;\ln 2)$ з густиною $\mu(x,y)=x^2$.

6. Знайти роботу сили $\vec{F}=(xy-y^2)\vec{i}+x\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y=2x^2$ від $M(0;0)$ до $N(1;2)$.

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma (1+z)d\sigma$ по частині площини $\sigma: x+4y+z=4;\ (x>0; y>0; z>0)$.

8. Обчислити $\iint\limits_{\sigma^+} 4xzdydz$ де $\sigma^+$ - поверхня $z=1-x^2-y^2; (z\ge 0)$, вектор нормалі до поверхні утворює тупий кут з $Oz$.

9. Знайти орт градієнта скалярного поля $u(x,y,z)=z^2 arctg\frac{x}{y}$ в точці $M(2,2,-1)$.

10. Довести, що векторне поле $\vec{a}=3ye^{z^2}\vec{i}+3xe^{z^2}\vec{j}+6xyze^{z^2}\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант № 6.**

1. Змінити порядок інтегрування: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$.
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2 + y^2 = 2x \quad y = x; \; y = -x$.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint_V (x - z - 1)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $x + 2y + z - 1 = 0; x = 0; \; y = 0; \; z = 0$.
4. Знайти масу тіла з густиною $\mu(x,y,z) = 10x$, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1; \; x^2 + y^2 = 2z; \; x = 0; y = 0; z = 0$; $(x \geq 0; y \geq 0)$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_{AB} \frac{dl}{\sqrt{x+2y}}$, де AB- відрізок прямої між точками $A(1;1)$ і $B(3;5)$.
6. Довести, що вираз $du = \left(3x^2 y + \cos y\right)dx + \left(x^3 - x\sin y\right)dy$ є повним диференціалом функції $u = u(x,y)$ і знайти цю функцію.
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_\sigma x d\sigma$, де $\sigma : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^+} 4xzdydz + z^2 dxdz + y^2 dxdy$ по частині площині $\sigma^+ : 2x + 2y + z = 2; (x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0)$ (вектор нормалі утворює гострий кут з додатним напрямом $Oz$) .
9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x,y,z) = \sqrt{x}\, z^2 + 2y^2$ і $v(x,y,z) = \frac{4}{zy+1}$ в точці $M_1(1,-1,3)$
10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xyz\vec{i} + (z^2 + x)\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma : x = 2\cos t; y = 2\sin t; z = 1 - \cos t$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра t.

**Варіант № 7.**

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f dx$.

2. Знайти масу пластини, що обмежена кривими $D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 16,$ $x = 0; y = 0 \ (x \geq 0, y \geq 0)$ , $\mu(x, y, z) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ - поверхнева густина.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 3$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2 + y^2 = 2y;\ x^2 + y^2 = 4y;\ y = -x;\ y = x;\ z = 0;\ z = 2.$

5. Знайти масу дуги матеріальної кривої $2x = y^2$ між точками $(0;0)$ і $(2;2)$ з густиною $\mu(x, y) = y$.

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (y^2 + xz)dx + y^2 zdy + x^3 ydz$ по замкненій кривій $L: \begin{cases} 2 - z = x^2 + y^2, \\ z = -2. \end{cases}$ (обхід контуру в додатному напрямі).

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma yd\sigma$, де $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 9;$ $(x > 0; y > 0; z > 0)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} xzdxdy$, де $\sigma^+$ - поверхня $z = 1 + x^2 + y^2; (z \leq 3)$, вектор нормалі до поверхні утворює тупий кут з $Oz$.

9. Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z) = z^2 y + \dfrac{z}{xy + 1}$ в точці $M_1(2, -4, 1)$ в напрямі токи $M_2(-5, 0, 4)$ .

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + 2z\vec{k}$ через частину площини $2x + y + z = 2$, розташовану в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю $Oz$).

**Варіант № 8.**

1. Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_D xdxdy$, де область $D$ обмежена лініями $y + x = 2; y = x^3; y = 0$.
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2 + y^2 = 4y \quad y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; \; y = \sqrt{3}x$.
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $V: z = x^2 + y^2 + 1; \; x = 3, y = 3$ , $x = 0; y = 0, z = 0.$
4. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V (2 + 2y + z)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $2x + 2y + z - 2 = 0; x = 0; \; y = 0; \; z = 0$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(2y + xz^2\right)dl,$ по замкненій кривій $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 4. \end{cases}$
6. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^2 y\vec{i} - xy^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: x^2 + y^2 = 4 \left(x > 0; y > 0\right);$ від $M\left(2;0\right)$ до $N\left(0;2\right)$.
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma z^2 d\sigma$ по боковій поверхні конуса $\sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}; \left(z \le 4\right).$
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \;\; x = 0; y = 0; z = 0$ .

9. Знайти орт градієнта скалярного поля $u(x,y,z)=\sqrt{y^2+1}\,arctg\frac{z}{x}$ в точці $M(1,0,1)$.

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=z\vec{i}+y\vec{j}+2x\vec{k}$ через частину площини $x+2y+z=2$, розташовану в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю $Oz$).

**Варіант № 9.**

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, де $D: x^2+y^2=y;$. $x^2+y^2=4y$.

3. Знайти масу тіла з густиною $\mu(x,y,z)=14yz$, обмеженого поверхнями: $x^2+y^2=z^2/25; x^2+y^2=z/5;\ x=0; y=0;\ (x\geq 0; y\geq 0)$.

4. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $z=\sqrt{1-x^2-y^2};\ z=0$ .

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де $L: x=a\cos t; y=a\sin t; z=bt, 0\leq t\leq 2\pi$ .

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydx-\left(y-x^2\right)dy$, де $L: y=2x-x^2$ від точки (0,0) до точки (1,1).

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma d\sigma$ по поверхні $\sigma: z=x^2+y^2; (z\leq 4)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} 3xdydz + 4zdxdy$ по частині площини $\sigma^+ : 2x + y + 4z = 4$, що розташована в I октанті (вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$).
9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x,y,z) = \sqrt{x}\, z^2 + e^{yz}$ і $v(x,y,z) = e^{xyz}$ в точці $M_1(4,0,2)$
10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (xy + z^2)\vec{i}$ вздовж контуру $\Gamma : x = 2\cos t; y = 2\sin t; z = \cos t$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра t.

**Варіант № 10**.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} ydxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y = x; y = 3x; y = 1/x$.
2. Знайти масу пластини з поверхневою густиною $\gamma(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, що обмежена кривими $D : x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$ $(y \geq 0)$.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_{V} (x^2 + 3y^2)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $z = 10x;\ x + y = 1; x = 0; y = 0.$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2 + y^2 = 4x;$ . $z = 10 - y^2; z = 0$ .
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OA} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9}}$, де OA – відрізок прямої між точками $O(0;0)$ і $A(1;2)$.

6. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} y^2dx - 2xydy$, де $L: y^2 + x^2 = 2y$ (обхід контуру в додатному напрямі).
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(x+z\right)d\sigma$ по частині площини $\sigma: 2x + y + z = 2;$ що розташована в I октанті.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} xydydz$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+ : z = \sqrt{x^2 + y^2}; z = 2$ .
9. Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z) = z\sqrt{x} + y^2 + \dfrac{xz}{zy+1}$ в точці $M_1(4,1,3)$ в напрямі токи $M_2(-2,2,1)$.
10. Довести, що векторне поле $\vec{a} = \vec{i} + 2ye^z\vec{j} + y^2e^z\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант № 11.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} x^2\sqrt{y}dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x + y = 2; y = 0; x = y^3$.
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2 + y^2 = y, x^2 + y^2 = 2y,\quad y = \dfrac{x}{\sqrt{3}};$ $y = x$.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_{V} xdxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $y = 10x;\ z = xy;\ x = 1;\ y = 0; z = 0.$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 1{,}5\sqrt{x^2 + y^2};$ . $z = 2{,}5 - x^2 - y^2$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydl,$ де L - дуга параболи $y^2 = 6x$, що відсікається параболою $x^2 = 6y$.

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy+z)dx + \sqrt{x^2+y^2}zdz$ по замкненій кривій $L: \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2}, \\ z = 2. \end{cases}$ (обхід контуру в додатному напрямі).

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xzd\sigma$ по боковій поверхні конуса $\sigma: x^2+y^2=z^2; (0 \le z \le 1)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} (y+z)dydz + ydxdy$ по боковій поверхні циліндра $\sigma^+: x^2+y^2=4$, що обмежена площинами $z=0$, $z=1$ (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, що утворена даними поверхнями).

9. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u(x,y,z) = \sqrt{y^2+x} + arctg\dfrac{z}{x+1}$ в точці $M(0,3,1)$.

10. Довести, що векторне поле $\vec{a} = 6xy\vec{i} + (3x^2+2yz^3)\vec{j} + 3y^2z^2\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант № 12**.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x+y=5; y=2x; y=1$

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x^2+y^2=\pi^2; x^2+y^2=4\pi^2$.

3. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{9-x^2-y^2}; z=\sqrt{4-x^2-y^2};$ $x=0; y=0; z=0$ з густиною : $\mu(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z=3\sqrt{x^2+y^2};$ . $z=10-x^2-y^2$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl,$ де AB –відрізок прямої між точками $A(-1;0)$ і $B(0;1)$.

6. Довести, що вираз $du=\left(y^2e^x-\sin(2x+4y)\right)dx+\left(2ye^x-2\sin(2x+4y)\right)dy.$ є повним диференціалом функції $u=u(x,y)$ і знайти цю функцію.

7. Обчислити поверхневий інтеграл: $\iint\limits_{\sigma}(6x+4y+3z)d\sigma$ по частині площини $\sigma: x+2y+3z=6;\ (x>0; y>0; z>0)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}xyzdxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+: x^2+y^2=2x; z=0; z=2.$

9. Знайти орт градієнта скалярного поля $u(x,y,z)=e^{z^2}+\sqrt{\dfrac{z+y}{x+1}}$ в точці $M(3,1,0)$ .

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=zx\vec{i}+2y^3\vec{k}$ через частину площини $3x+y+z=3$ , розташовану в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю Oz).

**Варіант № 13.**

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy$ .

2. Знайти масу пластини з поверхневою густиною $\gamma\left(x,y\right)=\frac{2x+5y}{x^2+y^2}$, що обмежена лініями $D: x^2+y^2=2y$ , $x^2+y^2=4y$ , $x=0; y=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $x+z=2;\ y=2;\ x=0;\ y=0;\ z=0.$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{49-x^2-y^2}; z=3;$ $x^2+y^2=33;\left(x^2+y^2\le 33\right)$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xydl$, де $L: x=\sqrt{a^2-y^2}$ .

6. Знайти роботу сили $\vec{F}=\left(x^2-y^2\right)\vec{i}+\left(x^2+y^2\right)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: x^2/9+y^2/4=1;\left(y\ge 0\right)$ від $M\left(3;0\right)$ до $N\left(-3;0\right)$.

7. Знайти масу поверхні $\sigma: x^2+y^2+z^2=16;$ $\left(x>0; y>0; z>0\right)$. з густиною $\mu\left(x;y;z\right)=y$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} 4xdydz+3ydxdz-xydxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+: x^2+y^2=4y; z=0; z=3$.

9. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)=\sqrt{z^2+y^2}+\frac{x+z}{zy+1}$ в точці $M_1(2,-3,4)$ в напрямі токи $M_2(0,-1,-3)$ .

10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(xy+z^2)\vec{i}+y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma: x=2\cos t; y=2\sin t; z=3\sin t$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра t.

**Варіант № 14.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де область $D$ обмежена лініями: $x^2+y^2=2x;\ x^2+y^2=4x;\ y=-x;\ y=x.$
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x=8-y^2; x=-2y$.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V xdxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $x+2y+z=2; x=0; y=0; z=0$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}; z=0;$ $x^2+y^2=2y;\ x^2+y^2=3y$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \sqrt{y}dl$, де $L:\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$.
6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x/(y+z))dx-((y+z)/x)dz$, де L – відрізок прямої, від точки A(1;0;2) до точки B(3;4;1).
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$ по боковій поверхні конуса $\sigma: z^2=x^2+y^2;(0\le z\le 25)$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} x^2dydz-ydxdz-2xzdxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+: z=\sqrt{25-x^2-y^2}; z=0$ .
9. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u(x,y,z)=(z^2+y^2)e^{xyz}$ в точці $M(0,3,1)$.
10. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=xz\vec{i}+z\vec{j}+2y^2\vec{k}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні: $x+y=1; x=0; y=0; z=0; z=2.$

**Варіант № 15.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(2x^2 - y\right)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y = -\sqrt{x}$; $y = x^2; x = 1$.
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2 + y^2 = 2y;\ y = x;\ x = 0.$.
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2; x^2 + y^2 = z^2$.
4. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V ydxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $y = \sqrt{x}; y = 0; x = 1;\ x + z = 1;\ z = 0.$
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OAB} x\sin ydl$, де OAB –ламана, $O\left(0;0\right); A\left(2;0\right); B\left(2;3\right)$.
6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(x - z\right)dx + \left(z - x\right)dy + \left(x - y\right)dz$, де $L: x = a\sin t; y = a\cos t; z = bt, 0 \le t \le \pi$ (обхід контуру в додатному напрямі).
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma xyzd\sigma$ по частині площини $\sigma: x + 2y + z = 2;\ \left(x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0\right)$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} \left(x + 3y\right)dxdy$ по боковій поверхні конуса $\sigma^+ : z = \sqrt{x^2 + y^2}; \left(z \le 2\right)$ (вектор нормалі до поверхні утворює тупий кут з $Oz$).
9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x, y, z) = \sqrt{x + z^2} + xye^z$ і $v(x, y, z) = \dfrac{x + z}{y + 1}$ в точці $M_1(4,1,0)$
10. Довести, що векторне поле $\vec{a} = 2xe^{3z}\vec{i} + 2ye^{3z}\vec{j} + 3(x^2 + y^2)e^{3z}\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант № 16.**

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, де область інтегрування $D$ обмежена лініями: $x^2+y^2=4\pi^2; x^2+y^2=9\pi^2$.

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{255}}$.

4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V ydxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $x+y=2; z=x^2+y^2; x=0; y=0; z=0$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L e^x dl$, де $L: y=e^x; (0\le x\le 1)$.

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{ABC}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$, де ABC- ламана, $A(0;1); B(1;1); C(2;0)$.

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma \left(x^2+y^2\right)d\sigma$, де $\sigma: x^2+y^2+z^2=1;\ (x\ge 0; y\ge 0; z\ge 0)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}\left(x+xy^2\right)dydz+\left(y-x^2y\right)dxdz+zdxdy$, по поверхні $\sigma^+: x^2+y^2+z^2=9; (z\ge 0)$ (вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$).

9. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)=x^2y^2+\dfrac{x}{z+1}$ в точці $M_1(1,-1,4)$ в напрямі токи $M_2(-2,1,3)$.

10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(x^2+zy)\vec{i}+z^2y\vec{k}$ вздовж контура $\Gamma: x=\cos t; y=\sin t; z=1-\cos t-\sin t$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра t.

**Варіант №17.**

1. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y=3\sqrt{x};\ y=\dfrac{3}{x};\ x=4.$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x^2+y^2=\pi^2; x^2+y^2=4\pi^2; y=0; \left(y\ge 0\right)$.
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=4y; z=4-x^2; z=0$.
4. Знайти масу тіла з густиною $\mu\left(x,y,z\right)=z$, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}; z=\sqrt{4-x^2-y^2};\ x=0; y=0; z=0$:.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xydl$, де $L$ - дуга кола $x^2+y^2=4$ , що розташована в I квадранті..
6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(x+y\right)dx+y^2xdy$, де $L: x^2+y^2=2y$ за формулою Гріна (обхід контуру в додатному напрямі).
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma \left(x+yz\right)d\sigma$ по частині площини $\sigma: x+2y+2z=2; \left(x\ge 0; y\ge 0; z\ge 0\right)$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} xdydz+ydxdz+\sin zdxdy$ по боковій поверхні циліндра $\sigma^+: x^2+y^2=1$ , що обмежена площинами $z=0$, $z=5$ (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, що утворена даними поверхнями).

9. Знайти орт градієнта скалярного поля $u(x,y,z)=y^2z+\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{z+1}}$ в точці $M(0,2,3)$.

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=xz\vec{i}+z\vec{j}+2y^2\vec{k}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні $\sigma^+ : 6-z=x^2+y^2; z=2$

**Варіант №18**.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xdxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y=\cos x; y=0, x\in(-\pi/2;\pi/2)$.
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2+y^2=x;\ y=x;\ y=-x.$
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=4y;\ z=\sqrt{x^2+y^2}; z=0$ .
4. Знайти масу тіла з густиною $\mu(x,y,z)=xyz$, обмеженого поверхнями: $x+y+z-3=0;\ x=0;\ y=0;\ z=0$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L x^2dl,$ де $L: y=\ln x; (1\le x\le e)$.
6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OAB}(x+3y)dx-4ydy$ ,де OAB- ламана, $O(0;0); A(1;1); B(2;3)$.
7. Знайти масу поверхні $\sigma : x^2+y^2=z^2;\quad (0\le z\le 1); \mu(x;y;z)=x^2+y^2$ - густина.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}\left(y+\sqrt{z}\right)dydz+3xdxdz+(3z+5x)dxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+ : z=\sqrt{8x^2+8y^2}; z=2$ .

9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x,y,z)=y^2+\dfrac{x}{\sqrt{z+1}}$ і $v(x,y,z)=\dfrac{xy}{\sqrt{z+1}}$ в точці $M_1(-2,-1,3)$

10. Довести, що векторне поле $\vec{a}=5e^{yz}\vec{i}+5xze^{yz}\vec{j}+5xye^{yz}\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант №19**.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xdxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y=\cos x; y=\sin x; x=0$.
2. Знайти масу пластини з поверхневою густиною $\gamma(x,y)=x^2$, що обмежена кривими $D: x^2+y^2=2y$, $y=x; y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.
3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (2x+z)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $2x-y+z=2;\ x=0; y=0; z=0$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{1-x^2-y^2}; (3/2)z=x^2+y^2$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xyzdl$, де $L: \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=2. \end{cases}$.
6. Застосовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xdx+\left(y^2+x^2\right)dy$, де $L$- контур трикутника $ABC$ $A(0;0); B(1;1); C(2;0)$ (рух по кривій в додатному напрямі).

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(z+2x+\left(4/3\right)y\right)d\sigma$ по частині площини $\sigma: 6x+4y+3z=12; \left(x\geq 0; y\geq 0; z\geq 0\right)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^{+}}\left(\pi/2\right)xdydz+4\pi ydxdz+2\left(z+1\right)dxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^{+}: 12x+4y+3z=12; \mathrm{x}=0, \mathrm{y}=0, z=0$.

9. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)=zy^{2}+\dfrac{x+z^{2}}{z+y}$ в точці $M_{1}(1,1,-3)$ в напрямі токи $M_{2}(2,-1,-3)$ .

10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(zy+x^{2})\vec{i}+z^{2}\vec{j}$ вздовж контуру $\Gamma: x=\cos t; y=3\sin t; z=2\cos t-3\sin t-2$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра t.

**Варіант №20.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}y^{2}dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x+y=2; x=\sqrt[3]{y}; x=0$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}xydxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x^{2}+y^{2}=1; x^{2}+y^{2}=4; x=0; \left(x\geq 0\right)$.

3. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{1-x^{2}-y^{2}}; z=\sqrt{4-x^{2}-y^{2}};$ $z=0$ з густиною : $\mu\left(x,y,z\right)=z^{2}$.

4. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{16-x^{2}-y^{2}}; 6z=x^{2}+y^{2}$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L}\sqrt{y}dl$, де $L: y=x^{2}$, $(1\leq x\leq 2)$.

6. Довести, що вираз $du = 2xe^{y}dx + \left(2y + x^2 + y^2\right)e^{y}dy$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$ і знайти цю функцію.
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} yzd\sigma$, де $\sigma : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} \left(x - y\right)dydz + \left(x + y\right)dxdz + z^2dxdy$, по боковій поверхні циліндра $\sigma^+ : x^2 + y^2 = 1$ , що обмежена площинами $z = 0$, $z = 2$ (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, що утворена даними поверхнями).
9. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u(x, y, z) = xy^2z + \dfrac{e^{xy}}{\sqrt{z^2 + 5}}$ в точці $M(2, 0, 2)$.
10. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{k}$ через частину площини $2x + 4y + z = 4$, розташовану в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю *Oz*).

**Варіант №21.**

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{3\cos y} f(x, y)dx$ .
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} (x + y)dxdy$, де область інтегрування $D$ обмежена лініями $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; x = 0; y = 0\left(x \ge 0, y \le 0\right)$.
3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{V} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнею: $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ .
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y = \sqrt{x};\ y = 2\sqrt{x};\ x + z = 6;\ z = 0.$

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \frac{ydl}{\sqrt{x}}$, де $L: y^2 = \frac{4}{9}x^3, (3 \le x \le 8)$.

6. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: x^2 + y^2 = 4;\ (y \ge 0)$ від $M(2;0)$ до $N(-2;0)$.

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_\sigma (x + 2z)d\sigma$ по частині площини $\sigma: x + 2y + 2z = 4; (x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^+} (x + z)dxdz$ по боковій поверхні конуса $\sigma^+ : z = \sqrt{x^2 + y^2}; (0 \le z \le 1)$, вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$.

9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x, y, z) = \frac{x}{z + y}$ і $v(x, y, z) = \sqrt{x + yz^2}$ в точці $M_1(1,0,1)$.

10. Довести, що векторне поле $\vec{a} = 3x^2y\vec{i} + (x^3 + 3z^2e^{3y})\vec{j} + 2ze^{3y}\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант №22.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D ydxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y = \sqrt{x}; y = 1/x; x = 16$.

2. Знайти масу пластини з поверхневою густиною $\gamma(x, y) = y^2$, що обмежена лініями: $x^2 + y^2 = y$, $y = x; y = \sqrt{3}\,x$.

3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

4. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $az = x^2 + y^2$; $2az = a^2 - x^2 - y^2$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x+y)dl$, де $L$ - контур трикутника $ABC$, $A(1;0);B(0;1);C(0;0)$.
6. Довести, що інтеграл не залежить від кривої інтегрування, та знайти його: $\int\limits_{(1;0)}^{(2;3)} 2xe^{2y}dx + \left(3y^2 + 2x^2e^{2y}\right)dy$.
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{z}d\sigma$ де $\sigma : z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right);\left(0 \le z \le 1\right)$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} xydydz + zydxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+ : x + 2y + 2z = 4; x = 0, y = 0, z = 0.$
9. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z) = 3y^2 + \sqrt{xy} + \dfrac{x+z}{z+2y}$ в точці $M_1(2,2,-6)$ в напрямі токи $M_2(1,1,2)$ .
10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (z + xy)\vec{j}$ вздовж контуру $\Gamma : x = 4\cos t; y = 4\sin t; z = 1 - \cos t$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра t.

**Варіант №23.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де область $D$ обмежена лініями: $x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = x;\ y = -x; y = x$.
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x = 16;\ y = \sqrt{x};\ y = \dfrac{1}{x}.$
3. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 2y; x^2 + y^2 = 4y;$ $z = 0;\ z = 2.$

4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 15(y^2+z^2)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $z=x+y;\ x+y=1; x=0;\ y=0;\ z=0.$
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl,$ де $L: x=t\sin t; y=t\cos t; z=t, 0\le t\le 2\pi$ .
6. Знайти роботу сили $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\vec{i}+\left(2x+y^2\right)\vec{j}$ при переміщенні вздовж прямої від точки $M\left(-4;0\right)$ до точки $N\left(0;2\right)$.
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma \left(z+2y\right)d\sigma$ по частині площини $\sigma: 2x-2y-z=2;$ що розташована в I октанті.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} 3xzdydz+z^2dxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+: z=2;\ z=x^2+y^2+1$.
9. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u(x,y,z)=x^2\cos y+\dfrac{x+z}{\sqrt{2z+7}}$ в точці $M_2(4,0,1)$ .
10. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=z\vec{i}+2x\vec{k}$ через частину площини $x+y+2z=2$, розташовану в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю Oz).

**Варіант №24.**

1. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y=-10x; y=11-x^2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x^2+y^2=1; x^2+y^2=4; x=0; y=0\left(x\ge 0, y\le 0\right)$.

3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (y+2x)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $z=x+y;\ x+y=1; x=y;\ y=0;\ z=0.$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2+y^2=(9z/2)$; $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xyd\,l$, де $L$ - дуга еліпса $x^2/4+y^2/16=1$, що розташована в I квадранті.

6. Застосовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(xy^2+x\right)dx+3xydy$, де $L$- контур трикутника $ABC$, $A(1;1);B(3;0);C(3;2)$ (обхід контуру в додатному напрямі).

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma \left(x^2+y^2\right)d\sigma$ по боковій поверхні конуса $\sigma: x^2+y^2=z^2;(0\le z\le 2)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} (y+z)dydz+ydxdy$ по боковій поверхні циліндра $\sigma^+: x^2+y^2=9$, що обмежена площинами $z=0$, $z=1$ (нормаль зовнішня до замкнуеної поверхні, що утворена даними поверхнями).

9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x,y,z)=2z+y^2+\dfrac{1}{z+x}$ і $v(x,y,z)=\sqrt{1+xyz^2}$ в точці $M_1(2,0,1)$.

10. Довести, що векторне поле $\vec{a}=3x^2y^2e^{3z}\vec{i}+2x^3ye^{3z}\vec{j}+(3x^3y^2e^{3z}+3z^2)\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант №25.**

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

2. Знайти масу пластини з поверхневою густиною $\gamma(x,y) = x^2$, що обмежена лініями $D: x^2 + y^2 = 2x$, $y = x; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (x+y)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $2x - y + z = 2;\ x = 0; y = 0; z = 0$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = 6\sqrt{x^2 + y^2}; z = 7 - x^2 - y^2$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \dfrac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де AB –відрізок прямої між точками $A(1;1)$ і $B(2;2)$.

6. Довести, що інтеграл не залежить від кривої інтегрування, та знайти його $\int\limits_{(0;0)}^{(\pi;1)} \left(2\cos(2x+y) + e^{3y}\right)dx + \left(\cos(2x+y) + 3xe^{3y}\right)dy$.

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma xzd\sigma$ де $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 9;$ $(x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} xzdydz + 3z^2dxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+ : x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = 4x; z = 0; z = 2$ .

9. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z) = \sqrt{z^2 - xy^2} + \dfrac{x+2}{z+y^2}$ в точці $M_1(0,-1,2)$ в напрямі токи $M_2(-2,4,3)$ .

10.Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (x^2 + 3zy)\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma: x = 2\cos t; y = 2\sin t; z = \sin t$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра t.

## Варіант №26.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x^2 + y^2 = e^2; x = 0; y = 0$ (перший квадрант).
2. Знайти статичний момент відносно осі $Oy$ матеріальної пластини $D$ з поверхневою густиною $\gamma(x, y) = xy^2$, обмеженої лініями $y = \sqrt{3}\ x,\ y = 0,\ x^2 + y^2 = 4,\ (x \geq 0)$.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V y\ dxdydz$ де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $2x + y = 2;\ x + y = 2;\ y = 0;\ z = 0;\ z = 1$ .
4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $x^2 + y^2 = 4x;\ z = 0;\ z = 1; y = 0$ (перший октант), з густиною $\gamma\left(x, y, z\right) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \frac{dl}{x + y}$, де AB –відрізок прямої між точками $A(1,5)$ і $B(2,7)$.
6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \left(x + 3\right)dx - xydy$ , де AB – дуга еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ від точки A(2,0) до точки B(0,3).
7. Знайти масу частини матеріальної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, $(0 \leq z \leq 1)$ з поверхневою густиною $\gamma\left(x, y, z\right) = z^2$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} x^3dydz + y^3dxdz$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma^+ : 1 - z = x^2 + y^2; z = 0$ .

9. Знайти орт градієнта скалярного поля $u(x, y, z) = z^2 \cos x + \dfrac{x + y}{\sqrt{z}}$ в точці $M(0,2,1)$.

10. Довести, що векторне поле $\vec{a} = (2xy^2 + z^2)\vec{i} + (2x^2y + z^3)\vec{j} + (3yz^2 + 2xz)\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант №27.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(3 - xy)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x + y = 1; y = 2 - x; y = 0$ .

2. Знайти масу пластини, що обмежена лініями $D : x^2 + y^2 = x$ , $y = 0;(x \geq 0)$; $\gamma(x, y) = x^2 + y^2$ - поверхнева густина.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_{V} xy\, dxdydz$ де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .

4. Знайти статичний момент відносно координатної площини $Oxy$ матеріального тіла з густиною $\gamma(x, y, z) = z$ , обмеженого поверхнями: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 = 1$; $z = 0$ .

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} \sqrt{2y}dl$, L – перша арка циклоїди – $x = 2(t - \sin t)$ , $y = 2(1 - \cos t)$

6. Довести, що інтеграл не залежить від кривої інтегрування, та знайти його $\int\limits_{(0;0)}^{(\pi;1)} \left(2xy - \cos x\right)dx + \left(x^2 - 1\right)dy$.

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}(x+y+z)d\sigma$ де $\sigma$ - частина площини $x+y+3z-3=0$ , обмежена умовами $x\geq 0; y\geq 0; z\geq 0$.
8. Обчислити $\iint\limits_{\sigma^{+}}(4x+z)dxdz$ де $\sigma^{+}$ - поверхня $z=4-x^2-y^2;(z\geq 0)$, вектор нормалі до поверхні утворює тупий кут з $Oz$.
9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x,y,z)=x^2e^{zy^2}$ і $v(x,y,z)=\sqrt{z^2+xy}$ в точці $M_1(1,1,0)$
10. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=3z\vec{i}+2y\vec{j}$ через частину площини $2x+y+2z=2$, розташовану в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю $Oz$).

**Варіант №28.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(7y-3x^2)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y=-x;\ y=3+x;\ x=0$.
2. Знайти масу пластини, що обмежена лініями; $x^2+y^2=x, y=0,\ x=0\ (x\geq 0)$, $\gamma(x,y)=y^2$ - поверхнева густина.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_{V}x\,dxdydz$ де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $x+2y+z=2;\ x=0;\ y=0;\ z=0$ .
4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z=1-x^2-y^2; z=0; x=0; y=0$ (перший октант), з густиною : $\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ .
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L}x^2y\,dl$ L –дуга кола $x=\sqrt{4-y^2}$ .

6. Довести, що вираз $du=\left(x^2-3xy^2+2\right)dx+\left(y^2-3x^2y\right)dy.$ є повним диференціалом функції $u=u\left(x,y\right)$ і знайти цю функцію.
7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xzd\sigma$ де $\sigma$ - частина поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ , що задовольняє умову $z\le 1$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}(4zx+y)dxdy$ по частині площини $\sigma^+:2x+y+z=4$, що розташована в I октанті (вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$).
9. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)=x^2z^2+\dfrac{x+y^2}{z+1}$ в точці $M_1(2,-1,5)$ в напрямі токи $M_2(-2,1,1)$.
10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(x^2y+z^2)\vec{j}+x^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma:x=2\cos t;y=4\sin t;z=3$ в напрямку, що відповідає зростанню параметра t.

**Варіант №29**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(2xy-1)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y=x^3;x+y=2;\ x=0$.
2. Застосовуючи подвійний інтеграл, знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=x^2+3,y=\sqrt{9-x^2},y=0,z=0$
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_{V}\sqrt{x^2+y^2}z\ dxdydz$ де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $z=4\sqrt{x^2+y^2};\ z=9$

4. Знайти статичний момент відносно координатної площини $Oxz$ матеріального тіла з густиною $\gamma(x,y,z)=x+z$, обмеженого площинами : $x+2y+z-1=0;\ y=0;\ x=0;\ z=0$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}\frac{dl}{x+y}$, AB –відрізок прямої між точками A(0,-2) і B(4,0).

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}\left(x^2+3y^2\right)dy$ по дузі параболи $y=2x^3$ від точки A(0,0) до точки B(1,2).

7. Знайти масу частини матеріальної поверхні $z^2=x^2+y^2$ , розташованої в I октанті ( $x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0$ ) з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=xz$ .

8. Обчислити $\iint\limits_{\sigma^+}4xydxdz$ де $\sigma^+$ - поверхня $z=1-x^2-y^2;(z\ge 0)$, вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$.

9. Знайти орт градієнта скалярного поля $u(x,y,z)=z\ln(x^2+yz)$ в точці $M(2,2,1)$ .

10. Довести, що векторне поле $\vec{a}=2xy\vec{i}+(x^2+3y^2z^2)\vec{j}+(2y^3z+3z^2)\vec{k}$ потенціальне і знайти потенціал.

**Варіант №30.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(x+y+2)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями:.

2. Знайти статичний момент відносно осі $Ox$ матеріальної пластини $D$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y)=x^2$, обмеженої лініями $y=x/\sqrt{3},\ y=0,\ x^2+y^2=1,\ (x\ge 0)$.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V xy\,dxdydz$ де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 1$; $z = 0$.

4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; $z = 0$ з густиною $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} x^2 y\,dl$, L – дуга параболи $y = 2x^2, (0 \le x \le 2)$.

6. Довести, що вираз $du = \left(2e^{2x} + y + \sin y\right)dx + \left(e^{3y} + x + x\cos y\right)dy.$ є повним диференціалом функції $u = u(x, y)$ і знайти цю функцію.

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} (xy - z)d\sigma$ де $\sigma$ - частина площини $x + 3y + z - 3 = 0$, обмежена умовами $x \ge 0$; $y \ge 0$; $z \ge 0$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} 3yzdxdz$, де $\sigma^+$ - поверхня $z = 1 + x^2 + y^2; (z \le 2)$, вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$ .

9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x, y, z) = zy^2 + 4x^3$ і $v(x, y, z) = \sqrt{xy + z^3}$ в точці $M_1(4,2,1)$

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = xyz\vec{i} + 3x\vec{j} + 2y^2\vec{k}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні: $x^2 + y^2 = 2y; z = 0; z = 1$.

**Варіант № 31.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x + y = 2; x = 0; y = x^3$.

2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2+y^2=3y, x^2+y^2=5y$, $x=0\ (x\geq 0)$ .

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V zdxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $2-z=x^2+y^2; z=x^2+y^2$ .

4. Знайти масу тіла, обмеженого площинами $x+y+z-2=0; x=1; y=1; x=0; y=0; z=0$, з густиною $\gamma(x,y,z)=x+2z$

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydl$, де L - дуга параболи $y=2x^2$, що відсікається параболою $x=2y^2$.

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy-z)dx+\sqrt{x^2+y^2}dy$ по замкнутій кривій $L:\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=1. \end{cases}$ (обхід контуру в додатному напрямі).

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma x^2 d\sigma$ по боковій поверхні конуса $\sigma: x^2+y^2=z^2; (0\leq z\leq 1)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}(3x+z)dydz+xydxdy$ по боковій поверхні циліндра $\sigma^+: x^2+y^2=4$, що обмежена площинами $z=0$, $z=1$ (нормаль зовнішня до замкнутої поверхні, що утворена даними поверхнями).

9. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u(x,y,z)=\sqrt{y+xz}+arctg\dfrac{y}{x+1}$ в точці $M(0,4,3)$.

10. Визначити тип векторного поля $\vec{a}=6xy\vec{i}+(3x^2+2yz^3)\vec{j}+3y^2z^2\vec{k}$ .

**Варіант № 32**.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+3y)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y=x; y=-x; y=1$
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x^2+y^2=2\pi^2; x^2+y^2=3\pi^2; x=0; y=0$ $(x\geq 0, y\geq 0)$.
3. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}; z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; $z=0$ з густиною : $\mu(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=2\sqrt{x^2+y^2};$ . $z=3-x^2-y^2$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}\left(4\sqrt[3]{x}+y+1\right)dl,$ де AB –відрізок прямої між точками $A(1;2)$ і $B(3;5)$.
6. Довести, що вираз $du=\left(2x+e^{2y}\right)dx+\left(3y^2+2xe^{2y}\right)dy.$ є повним диференціалом функції $u=u(x,y)$ і знайти цю функцію.
7. Обчислити поверхневий інтеграл: $\iint\limits_\sigma\left(3x+4y+z-6\right)d\sigma$ по частині площини $\sigma: 3x+y+z=6;$ $\left(x>0; y>0; z>0\right)$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma (x^2+y^2)zdxdy$ по зовнішній стороні замкнутої поверхні $\sigma^+: x^2+y^2=y; z=0; z=1$.
9. Знайти орт градієнта скалярного поля $u(x,y,z)=ye^{xz}+\sqrt{\dfrac{z+xy}{y+1}}$ в точці $M(0,1,2)$ .
10. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=x\vec{i}+(2y+z)\vec{j}$ через частину площини $3x+3y+z=3$ , розташовану в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю $Oz$).

**Варіант № 33.**

1. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат: $\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\sqrt{x^2+y^2}dy$ .
2. Знайти статичний момент відносно осі $Ox$ плоскої фігури $D$, що обмежена лінями $y=\sqrt{x}; x=1; y=0$. Поверхнева густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x,y)=4x$.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V zdxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $x+z=2;\ y=2;\ x=0;\ y=0;\ z=0.$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=2y; z=0; z=2$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x+2y)dl,$ де $L: x=\sqrt{4-y^2}$ .
6. Знайти роботу сили $\vec{F}=xy^2\vec{i}$ при переміщенні вздовж кривої $L: x^2/9+y^2/4=1; (y\geq 0)$ від $M(0;-2)$ до $N(0;2)$.
7. Знайти масу поверхні $\sigma: z=\sqrt{x^2+y^2};\quad (x\geq 0; y\geq 0; z\leq 1)$. з густиною $\mu(x;y;z)=y$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma 4xdydz+(x+zy)dxdy$ по зовнішній стороні замкнутої поверхні $\sigma^+: x^2+y^2=x; z=0; z=2.$
9. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)=\sqrt{z^2+xy}+\dfrac{x+y}{z^2+1}$ в точці $M_1(0,3,4)$ в напрямі точки $M_2(1,1,-3)$ .
10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(x^2+y^2+z^2)\vec{j}+y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma: x=2\cos t; y=2\sin t; z=3\sin t$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра t.

**Варіант № 34.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де область $D$ обмежена лініями: $x^2+y^2=2x;\ x^2+y^2=4x;\ y=-x;\ y=x.$
2. Знайти статичний момент відносно осі $Oy$ плоскої фігури $D$, що обмежена лінями $x=\sqrt{y}; y=1; x=0$. Поверхнева густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x,y)=4x$.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V ydxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $x+y+z=2; x=0; y=0; z=0$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}; z=0;\ x^2+y^2=2x$ .
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl,$ де $L: x=2\cos t; y=2\sin t; z=t; (0\le t\le 2\pi)$
6. Застосовуючи формулу Гріна. обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L 2xydx-(3x-y)dy$, де L – контур трикутника ABC, A(1;0), B(1;4), C(0;4) (обхід контуру в додатному напрямі).
7. Знайти масу поверхні $\sigma: z=\sqrt{x^2+y^2};\quad \left(x\ge 0; y\ge 0; z\le 1\right)$. з густиною $\mu\left(x;y;z\right)=y^2$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma x^2dydz$ по зовнішній стороні замкнутої поверхні $\sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}; z=0$ .
9. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u(x,y,z)=(z^2+xy)e^{x^2z}$ в точці $M(1,2,0)$.

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = (xy + z)\vec{i} + x^2\vec{j}$ через зовнішню сторону замкнутої поверхні: $x + 2y = 1; x = 0; y = 0; z = 0; z = 1$.

**Варіант № 35.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x + y)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x = \sqrt{-y}; \quad y = x^3; x = 1$.
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2 + y^2 = 2y;\ y = x;\ y = -x$.
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = 3 - x^2 - y^2; z = 1 + x^2 + y^2$.
4. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V xdxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $y = x^2; y = 1;\ x + z = 2;\ z = 0$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OAB} y\cos x dl$, де OAB –ламана, $O(0;0); A(0;\pi); B(1;\pi)$.
6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydx + zdy + xdz$, де $L: x = a\sin t; y = a\cos t; z = bt, 0 \le t \le \pi$ (обхід контуру в додатному напрямі).
7. Знайти статичний момент відносно координатної площини $Oxy$ матеріальної поверхні $\sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (x \ge 0; y \ge 0; z \le 1)$ з густиною $\mu(x;y;z) = x^2$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma xzdxdz$ по боковій поверхні конуса $\sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}; (z \le 2)$ (вектор нормалі до поверхні утворює тупий кут з $Oz$).

9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x,y,z) = z\sqrt{x+y} + y^2 e^z$ і $v(x,y,z) = \dfrac{x+z}{y+1}$ в точці $M_1(4,5,0)$

10. Довести, що векторне поле $\vec{a} = 2xe^{3y}\vec{i} + (2z + 3x^2e^{3y})\vec{j} + (2z + 2y)\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

## Варіант № 36.

1. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат: $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} y^2 dy$ .
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D arctg\dfrac{y}{x}\, dxdy$, де область інтегрування $D$ обмежена лініями: $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 9$.
3. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 4 - x^2 - y^2$ з густиною $\gamma(x,y,z) = z$
4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V xdxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $x + y = 2; z = x^2 + y^2; x = 0; y = x; z = 0$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydl$, де $L: y = \sin x; \left(0 \le x \le \pi / 4\right)$.
6. Застосовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{ABC} \left(x^2 - xy\right)dx + \left(y^2 + 2xy\right)dy$, де ABC- контур трикутника, $A\left(0;2\right); B\left(2;2\right); C\left(2;0\right)$ ((обхід контуру в додатному напрямі
7. Обчислити площу поверхні $\sigma: z = 1 + x^2 + y^2;\ \left(z \le 5\right)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} z\,dxdy$, по поверхні $\sigma: x^2+y^2=z;(z\le 9)$ (вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$).
9. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)=x^2yz+\dfrac{x+y^2}{z+1}$ в точці $M_1(2,-1,3)$ в напрямі точки $M_2(4,1,5)$.
10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(x^2+z+y)\vec{i}+zy\vec{j}$ вздовж контуру $\Gamma: x=\cos t; y=\sin t; z=1-\cos t-\sin t$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра *t*.

**Варіант №37.**

1. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y=x^2; y=x/3; y=3$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x^2+y^2=\pi^2; x=0; y=0; \left(x\ge 0; y\ge 0\right)$.
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=x;\ z=1-y; z=0$.
4. Знайти масу тіла з густиною $\mu\left(x,y,z\right)=x^2z$, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}; z=\sqrt{4-x^2-y^2};\ \ z=0$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} x^2y\,dl$, де $L$ - дуга кола $x=\sqrt{1-y^2}$.
6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L}\left(x^2-3y\right)dx+y^2dy$, де $L: x^2+y^2=y$ за формулою Гріна (обхід контуру в додатному напрямі).

7. Знайти статичний момент відносно координатної площини $Oxz$ матеріальної поверхні $\sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\left(x \ge 0; y \ge 0; z \le 1\right)$ з густиною $\mu\left(x; y; z\right) = xy$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} zx\,dxdz$, по поверхні $\sigma : x^2 + y^2 = z; (z \le 4)$ (вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$).

9. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a} = grad\,u(x, y, z)$ в точці $M(1,0,3)$. де $u(x, y, z) = x^2 z + \dfrac{e^{y^2}}{\sqrt{z+1}}$.

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = (xy + z)\vec{i} + z\vec{j} + 2yz\vec{k}$ через зовнішню сторону замкнутої поверхні $\sigma^+ : 5 - z = 4(x^2 + y^2); z = 1$

**Варіант №38**.

1. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат: $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy$ .

2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $2 - y = x^2$; $y = x$; $x = 0$.

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 2y$; $z = x^2 + y^2; z = 0$.

4. Знайти масу тіла з густиною $\mu\left(x, y, z\right) = x + z$, обмеженого поверхнями: $x + 3y + z - 3 = 0$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} ydl$, де $L : y = \cos x; \left(0 \le x \le \pi / 6\right)$.

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OAB} \left(xy\right)dx - (4 + y)dy$ ,де OAB- ламана, $O\left(0;0\right); A\left(2;1\right); B\left(2;3\right)$.

7. Обчислити площу поверхні $\sigma : z = 1 + 3(x^2 + y^2);\ (z \le 4)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} \left( y\sqrt{z} \right) dydz + 3ydxdz + \left( 3z + x^3 \right) dxdy$ по зовнішній стороні замкнутої поверхні $\sigma : z = 2\sqrt{x^2 + y^2}; z = 2$ .

9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x, y, z) = xzy^2 + \dfrac{1}{\sqrt{z+1}}$ і $v(x, y, z) = \dfrac{x + 2y}{\sqrt{z+1}}$ в точці $M_1(-2, -1, 3)$

10. Довести, що векторне поле $\vec{a} = (2xy^2z^3 + y)\vec{i} + (2x^2yz^3 + x)\vec{j} + 3x^2y^2z^2\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант №39**.

1. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} yxdy$ .

2. Знайти масу пластини з поверхневою густиною $\gamma\left(x, y\right) = x^2$, що обмежена кривими $D : x^2 + y^2 = 2y; x^2 + y^2 = 3y$ , $y = x; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V \left( 2y - z + 2 \right) dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $2x - 2y + z = 2;\ x = 0; y = 0; z = 0$.

4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 4 - x^2 - y^2$ з густиною $\gamma(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$ .

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy + z^2) dl$, де $L : \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 4. \end{cases}$.

6. Застосовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L x^3dx + \left(y^2 + x^2y\right)dy$, де $L$ - контур трикутника $ABC$ $A(0;0); B(1;1); C(1;0)$ (рух по кривій в додатному напрямі).
7. Знайти статичний момент відносно координатної площини $Oyz$ матеріальної поверхні $\sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\left(x \geq 0; y \geq 0; z \leq 1\right)$ з густиною $\mu(x; y; z) = x^2 + y^2$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + 2(z+1)dxdy$ по зовнішній стороні замкнутої поверхні $\sigma : 12x + 4y + z = 12; x = 0, y = 0, z = 0.$
9. Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z) = z^3yx + \dfrac{y + z^2}{2z + x}$ в точці $M_1(1,1,-3)$ в напрямі точки $M_2(2,-1,-3)$ .
10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (zy - 2x^2)\vec{i}$ вздовж контуру $\Gamma : x = \cos t; y = 3\sin t; z = 3\sin t$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра t.

**Варіант №40.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x = \sqrt{e^2 - y^2}; y = 0$.
2. Знайти статичний момент відносно осі $Oy$ матеріальної пластини $D$ з поверхневою густиною $\gamma(x, y) = xy^2$, обмеженої лініями $y = \sqrt{3}\,x,\ y = 0,\ x^2 + y^2 = 4,\ (x \geq 0)$.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V y\,dxdydz$ де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $y=-3x+4;\ x+y=4;\ y=1;\ z=0;\ z=1$ .
4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $x^2+y^2=x;\ z=0;\ z=2$ з густиною $\gamma(x,y,z)=(x^2+y^2)^2$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}(x+3yz-4)dl,$ де AB –відрізок прямої між точками $A(1,5,-2)$ і $B(2,7,-3)$.
6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}\left(x+3y^2\right)dx$, де AB – дуга еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ від точки A(3,0) до точки B(0,2).
7. Знайти масу частини матеріальної поверхні $z^2=x^2+y^2$ , розташованої в I октанті ( $x\ge0;\ y\ge0; 1\ge z\ge 0$ ) з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=yz^2$ .
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma zy\,dydz$, по поверхні $\sigma: x^2+y^2=z;(z\le1)$ (вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$ ).
9. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a}=grad\,u(x,y,z)$ в точці. $M(0,4,3)$ , де $u(x,y,z)=3z^2+y\cos x+\frac{x+y}{z+1}$ .
10. .Довести, що векторне поле $\vec{a}=(yz^3+2xyz)\vec{i}+(xz^3+x^2z)\vec{j}+(3xyz^2+x^2y)\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант № 41.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D(x^2+y)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y=x;y=1;y=-x^3$.

2. Знайти статичний момент відносно осі $Oy$ плоскої фігури $D$, що обмежена лінями $x^2 + y^2 = 4;\ x = 0;\ y = 0;\ (x \geq 0, y \geq 0)$. Поверхнева густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x, y) = y^2$.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V z\, dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $6 - z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 = 4;\ z = 0$.

4. Знайти масу тіла, обмеженого площинами $x + 2y + z - 2 = 0; x = 0; y = 0; z = 0$, з густиною $\gamma(x, y, z) = x^2$

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydl$, де L - дуга параболи $y = x^3$, між точками (0,0) і (1,1).

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right) dy + z\sqrt{x^2 + y^2}\, dy$ по замкнутій кривій $L: \begin{cases} z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 2. \end{cases}$ (обхід контуру в додатному напрямі).

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma x^2 y d\sigma$ по боковій поверхні конуса $\sigma: 2\left(x^2 + y^2\right) = z^2; \left(0 \leq z \leq 2\right)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} \left(3 - y\right) dydz + xydxdz$ по боковій поверхні циліндра $\sigma^+ : x^2 + y^2 = 9$, що обмежена площинами $z = 0$, $z = 1$ (нормаль зовнішня до замкнутої поверхні, що утворена даними поверхнями).

9. Знайти похідну скалярного поля $U(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2} + 2xy$ в точці $M(3; -4; 2)$ за напрямком нормалі до поверхні $z + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, що проходить через $M$ і утворює гострий кут з додатним напрямком осі $Oz$.

10. Визначити тип векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.

**Варіант № 42**.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y = (x+1)^2; y = (x-1)^2; y = 0$
2. Знайти масу пластини з поверхневою густиною $\gamma(x, y) = \dfrac{2x + 5y}{x^2 + y^2}$, що обмежена лініями: $x^2 + y^2 = 16, x^2 + y^2 = 9, \quad x = 0; y = 0 \ (x \ge 0, y \le 0)$.
3. Знайти масу тіла, обмеженого площинами: $x + y = 3; x = 0; y = 0; z = 0; z = 2$ з густиною : $\gamma(x, y, z) = xz^2$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями. $6 - z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 = 1; \ z = 0.$
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy + 1)dl$, де $L$–контур прямокутника з вершинами $A(0;0), B(2;0)$, $C(2;3)$ $B(0;3)$.
6. Довести, що вираз $du = \left(\cos(x + 2y) + 2y^2e^{2x}\right)dx + \left(2\cos(x + 2y) + 2ye^{2x}\right)dy.$ є повним диференціалом функції $u = u(x, y)$ і знайти цю функцію.
7. Обчислити поверхневий інтеграл: $\iint\limits_\sigma (3x - 6)d\sigma$ по частині площини $\sigma : 3x + 2y + z = 6; \ (x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0)$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma (x^2 + y^2)^2 dxdy$ по зовнішній стороні замкнутої поверхні $\sigma^+ : x^2 + y^2 = 2y; z = 0; z = 2.$
9. Знайти орт градієнта скалярного поля $u(x, y, z) = xy + e^{xz} + \sqrt{\dfrac{z}{y+1}}$ в точці $M(0,3,1)$ .

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + (2y + z)\vec{j} - \vec{k}$ через частину площини $x + y + 3z = 3$ , розташовану в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю *Oz*).

**Варіант № 43.**

1. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\, dy$ .
2. Знайти статичний момент відносно осі $Ox$ плоскої фігури $D$, що обмежена лінями $x^2 + y^2 = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ (x \geq 0, y \geq 0)$. Поверхнева густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x, y) = x^2$ .
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V zdxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $y = 2x^2;\ y = 1;\ z = 0;\ z = 2.$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 2x; z = 1; z = 2$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L x^2 ydl$, де $L : x = \sqrt{9 - y^2}$ .
6. Знайти роботу сили $\vec{F} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L : x^2/4 + y^2 = 1; \left(x \leq 0; y \geq 0\right)$ від $M\left(-2;0\right)$ до $N\left(0;1\right)$.
7. Знайти масу поверхні $\sigma : z = 2\sqrt{x^2 + y^2};\ \ \left(x \geq 0; y \geq 0; z \leq 4\right)$. з густиною $\gamma\left(x; y; z\right) = y$.
8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma 4(x^3 + zy)dxdy$ по зовнішній стороні замкнутої поверхні $\sigma^+ : x^2 + y^2 = 2x; z = 0; z = 2.$

9. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)=x\sqrt{z^2+y^2}+\frac{x}{z^2+1}$ в точці $M_1(2,3,-4)$ в напрямі точки $M_2(-1,5,3)$ .

10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(y+2z^2)\vec{j}+xy\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma: x=2\cos t; y=\sin t; z=\sin t$ в напрямі, що відповідає зростанню параметра t.

**Варіант № 44.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (2x+y)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $y=\frac{2}{x}$; $y=2x^2$; $y=\frac{1}{2}$.

2. Знайти статичний момент відносно осі $Ox$ плоскої фігури $D$, що обмежена лінями $x^2+y^2=1$; $y=x$; $y=0$; . Поверхнева густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x,y)=x^2+y^2$.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V (y+x)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $x+y+2z=2; x=0; y=0; z=0$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=1$; $z-1=x^2+y^2$; $z=0$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$,де $L: x=2\cos t; y=2\sin t; z=2t; (0\le t\le 2\pi)$

6. Застосовуючи формулу Гріна. обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L 2x^2ydx-5y^3dy$, де L – контур трикутника $ABC$, $A(0;1)$, $B(3;1)$, $C(3;2)$ (обхід контуру в додатному напрямі).

7. Знайти масу поверхні $\sigma : z=\sqrt{x^2+y^2}$; $\left(x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\le 1\right)$. з густиною $\gamma\left(x;y;z\right)=x^2y^2$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}(x^2+yz)dydz$ по зовнішній стороні замкнутої поверхні $\sigma : z=\sqrt{4-x^2-y^2};z=0$ .

9. Знайти найбільшу швидкість зміни функції $u(x,y,z)=(z^2+\sqrt{x+y})e^{y^2z}$ в точці $M(8,1,0)$.

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a}=(xy+z)\vec{i}+x^2\vec{j}+\vec{k}$ через зовнішню сторону замкненої\ поверхні: $3x+y=3;x=0;y=0;z=0;z=2.$

**Варіант № 45.**

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}\left(2x+5y\right)dxdy$, де область $D$ обмежена лініями: $x=1;\quad x=-\sqrt[3]{x};\ y=x^2.$

2. Знайти масу пластини з поверхневою густиною $\gamma\left(x,y\right)=\dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}$, що обмежена лініями: $x^2+y^2=16,x^2+y^2=9,\quad x=0;y=0\ (x\ge 0,y\le 0)$.

3. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $z-1=\sqrt{x^2+y^2};x^2+y^2=4;z=0.$

4. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_{V}(x+2)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $y^2=x;x=1;\ 3x+z=1;\ z=0.$

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OAB}(y+\sqrt{x})dl$, де OAB –ламана, $O(0;0);A(2;1);B(4;1)$.

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L}2xdx-zdy-4xdz$, де $L: x=a\sin t; y=a\cos t; z=bt, 0\le t\le\pi$ (обхід контуру в додатному напрямі).

7. Знайти статичний момент відносно координатної площини $Oxy$ матеріальної поверхні $\sigma: z=2\sqrt{x^2+y^2}$; $(x\ge 0; y\ge 0; z\le 2)$ з густиною $\gamma(x;y;z)=x^2$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}yzdydz$ по боковій поверхні конуса $\sigma: z=\sqrt{x^2+y^2};(z\le 3)$ (вектор нормалі до поверхні утворює тупий кут з $Oz$).

9. Знайти похідну поля $U(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}+2z^2$ в точці $M(3;-4;2)$ за напрямком нормалі до поверхні $z-1=4(x^2+y^2)$, що проходить через $M$ і утворює гострий кут з додатним напрямком осі $Oz$.

10. Довести, що векторне поле $\vec{a}=2xz^2\vec{i}+2yz\vec{j}+(2zx^2+y^2)\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант № 46.**

1. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат: $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}dy$ .

2. Знайти масу пластини з поверхневою густиною $\gamma(x,y)=x$, що обмежена лініями: $x^2+y^2=2y, x=0,(x\ge 0)$.

3. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$ з густиною $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$.

4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (y+1)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}; z=\sqrt{x^2+y^2}$ .

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (2z-\sqrt{x^2+y^2})dl,$ де $L: x=2t\cos t; y=2t\sin t; z=2t \quad (0\le t\le 2\pi)$.

6. Застосовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{ABC}\left(x^2+3y^2\right)dx+\left(y^2+2xy\right)dy$, де $ABC$- контур трикутника, $A(0;0); B(2;2); C(0;4)$ ((обхід контуру в додатному напрямі).

7. Обчислити площу поверхні $\sigma: z=4+x^2+y^2;\ (z\le 5)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma z^2\,dxdy$, по поверхні $\sigma: x^2+y^2=2z; (z\le 2)$ (вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$).

9. Знайти похідну поля $U(x,y,z)=3\sqrt{x^2+y^2}-2z^3$ в точці $M(3;-4;-1)$ за напрямком нормалі до поверхні $z=2x^2+3y^2$, що проходить через $M$ і утворює гострий кут з додатним напрямком осі $Oz$.

10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(x^2+z^2-3y)\vec{i}+z^2y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma: x=2\cos t; y=4\sin t; z=1$ в напрямку, що відповідає зростанню параметра *t*.

**Варіант №47.**

1. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y = x^2 - 1; y = x + 1$.

2. Знайти статичний момент відносно осі $Ox$ плоскої фігури $D$, що обмежена лінями $x^2 + y^2 = y$. Поверхнева густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x, y) = x$.

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 2y;\ z = 1 - x; z = 0$.

4. Знайти масу тіла з густиною $\mu\left(x, y, z\right) = z^2$, обмеженого поверхнями: $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}; z = \sqrt{4 - x^2 - y^2};\ x = 0; y = 0;\ z = 0\ (x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0)$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де $L: x = 2\cos t; y = 2\sin t; z = 2t; (0 \leq t \leq 2\pi)$

6. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(\pi,2\pi)} \left(\cos(x + 2y) + 2y^2 e^{2x}\right)dx + \left(2\cos(x + 2y) + 2ye^{2x}\right)dy.$ не залежить від кривої інтегрування та знайти його значення

7. Знайти статичний момент відносно координатної площини $Oxy$ матеріальної поверхні $\sigma: z = 2\sqrt{x^2 + y^2};\quad \left(x \geq 0; y \geq 0; z \leq 2\right)$ з густиною $\mu\left(x; y; z\right) = xy$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma z^2\, dxdz$, по поверхні $\sigma: x^2 + y^2 = z; (z \leq 1)$ (вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$).

9. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a} = grad\, u(x, y, z)$ в точці $M(-2,0,8)$, де $u(x, y, z) = 2x^3 z + \dfrac{e^{y^2} + 3x}{\sqrt{z+1}}$.

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = (x+3z)\vec{i} + z^2\vec{j} + 2xz\vec{k}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні $\sigma^+ : 5 - z = x^2 + y^2; z = 4$

**Варіант №48**.

1. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy$ .

2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y^2 = 1 + x;\ y = 1 - x$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}; x^2 + y^2 = 1;\ z = 0$.

4. Знайти масу тіла з густиною $\mu(x, y, z) = x + y + z$, обмеженого поверхнями: $x + y + z - 3 = 0;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(2x + y^2 - 1\right) dl$, де $L$–контур прямокутника з вершинами $A(0;0), B(4;0)$, $C(4;2)\ B(0;2)$.

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OAB} x^2 y dx - (4 + xy) dy$ ,де $OAB$- ламана, $O(1;0); A(2;1); B(3;1)$.

7. Обчислити площу поверхні $\sigma : z = 1 + 5(x^2 + y^2);\ (z \le 6)$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(y^2+\sqrt{z}\right)dydz-4ydxdz+\left(3z+x^3y\right)dxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma: z=3\sqrt{x^2+y^2}; z=3$ .

9. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x,y,z)=x^2y^2z+\dfrac{x}{\sqrt{z+1}}$ і $v(x,y,z)=x^2+\dfrac{y}{\sqrt{z+1}}$ в точці $M_1(-3,1,8)$

10. Довести, що векторне поле $\vec{a}=(2xy^3+2xy)\vec{i}+(3x^2y^2+2yz^3+x^2)\vec{j}+3y^2z^2\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

**Варіант №49**.

1. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат: $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} yxdy$ .

2. Знайти статичний момент відносно осі $Oy$ плоскої фігури $D$, що обмежена лінями $x^2+y^2=4;\ y=x;\ x=0;$ . Поверхнева густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ .

3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V\left(y-z\right)dxdydz$, де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $2x+y=2;\ x=0; y=0; z=0; z=2$.

4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями в першому октанті: $z=\sqrt{x^2+y^2};\ z=2-x^2-y^2; x=0; y=0; z=0$ з густиною $\gamma(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2}$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$, де $L:\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=4. \end{cases}$.

6. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2\pi)} \left(\sin y+3x^2y^2\right)dx+\left(x\cos y+2yx^3\right)dy$ не залежить від кривої інтегрування та знайти його значення

7. Знайти статичний момент відносно координатної площини $Oxz$ матеріальної поверхні $\sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$; $\left(x\ge 0; y\ge 0; z\le 4\right)$ з густиною $\mu\left(x;y;z\right)=\sqrt{x^2+y^2}$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xdydz-ydxdz+4\left(z+x^2\right)dxdy$ по зовнішній стороні замкненої поверхні $\sigma: 2x+y+2z=4; x=0, y=0, z=0$.

9. Знайти похідну поля $U(x,y,z)=z^2+2\sqrt{x^2+y^2}$ в точці $M(-3;4;2)$ за напрямком нормалі до поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що проходить через $M$ і утворює гострий кут з додатним напрямком осі $Oz$.

10. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(zy-2x^2)\vec{j}+3\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma: x=2\cos t; y=3\sin t; z=3\cos t$ в напрямку, що відповідає зростанню параметра $t$.

**Варіант №50.**

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{e^{x^2}} fdy$

2. Знайти статичний момент відносно осі $Oy$ плоскої фігури $D$, що обмежена лінями $x^2+y^2=x$. Поверхнева густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x,y)=y$.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V xyz\, dxdydz$ де область інтегрування $V$ обмежена поверхнями: $y = x;\ x = 4;\ y = 0;\ z = 0;\ z = 1$ .

4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z = \sqrt{x^2 + y^2};\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$ з густиною $\gamma\left(x, y, z\right) = z^2$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} (xz - y)dl,$ де AB –відрізок прямої між точками $A(2,-1,2)$ і $B(2,3,-2)$.

6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \left(x + 3y^2\right)dx + xydy$, де $AB$ – дуга параболи $y = 2x^2$ від точки A(1;2) до точки B(2;8).

7. Знайти масу частини матеріальної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$ , розташованої в I октанті ( $x \geq 0;\ y \geq 0;\ 1 \geq z \geq 0$ ) з поверхневою густиною $\gamma\left(x, y, z\right) = yz^2$.

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} zx\, dydz$, по поверхні $\sigma : x^2 + y^2 = 4z; (z \leq 1)$ (вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з $Oz$ ).

9. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a} = grad\, u(x, y, z)$ в точці. $M(-1,-2,3),$ де $u(x, y, z) = 3xyz^2 + + \dfrac{x^2 + y^2}{z + 1}$ .

10. .Визначити тип векторного поля $\vec{a} = (yz^3 + 2xyz)\vec{i} + (xz^3 + x^2 z)\vec{j} + (3xyz^2 + x^2 y)\vec{k}$ .

## Література

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальное и интегральное исчисление* - М.: Наука. - 1988. - 432 с.

[2] Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление*. Т.2.- М.: Наука - 1970. - 576 с.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике. Полный курс* (9-е изд.) - М:Высшее образование. - 2009.-606 с.

[4] Кузнецов Л.А. *Сборник заданий по вістей математике* (6 изд.) – С.-П.:Лань – 2007. – 238 с.

[5] Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. *Збірник завдань з вищої математики.* Ч.2. - Київ: Політехніка. - 2002.-108 с.

[6] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика: навчальний посібник*. - Київ: А.С.К.-2005. - ISBN 966-539-320-0. - 64

[7] Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. *Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах*, Т.3, К.: Книги України ЛТД, 2009.– 400с.

[8] Вища математика: Кратні інтеграли та їх застосування: Розрахункова робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та 144 «Теплоенергетика» /КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.Ф. Зражевська, Г.М. Зражевський. – Електронні текстові данні (1 файл: 1.33 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 34 с.

[9] Вища математика: Криволінійні, поверхневі інтеграли та їх застосування: Розрахункова робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та 144 «Теплоенергетика» /КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.Ф. Зражевська, Г.М. Зражевський. – Електронні текстові данні (1 файл: 1.55 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 43 с.