



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ ЕНЕРГЕТИКИ

ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Математичні задачі енергетики: Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», освітньої програми «Електричні системи та мережі» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. М. Паненко. – Електронні текстові дані (1 Файл 0,7 МБ). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. - 37 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 26.05.2022р.)
за поданням Вченої ради Факультету електроенерготехніки та автоматики
(протокол № 9 від 17.05.2022 р.)*

Електронне мережеве навчальне видання

МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ ЕНЕРГЕТИКИ

ПРАКТИКУМ

Укладач: *Паненко Олена Миколаївна*

Відповідальний
редактор: *Кацадзе Т. Л., канд. техн. наук, доц.*

Рецензент: *Дмитренко О. О., канд. техн. наук, доцент кафедри
автоматизації енергосистем КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Навчальний посібник містить розв'язання типових задач, які охоплюють змістовні модулі дисципліни "Математичні задачі енергетики - 1" і "Математичні задачі енергетики - 2". Призначений для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», освітня програма «Електричні системи та мережі».

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Математичні задачі енергетики. Частина 1.	5
ЗАДАЧА 1.....	5
ЗАДАЧА 2.....	6
ЗАДАЧА 3.....	7
ЗАДАЧА 4.....	9
ЗАДАЧА 5.....	10
ЗАДАЧА 6.....	13
ЗАДАЧА 7.....	15
ЗАДАЧА 8.....	17
ЗАДАЧА 9.....	20
ЗАДАЧА 10.....	23
ЗАДАЧА 11.....	24
ЗАДАЧА 12.....	25
ЗАДАЧА 13.....	26
ЗАДАЧА 14.....	27
ЗАДАЧА 15.....	28
ЗАДАЧА 16.....	28
ЗАДАЧА 17.....	29
Математичні задачі енергетики. Частина 2.	31
ЗАДАЧА 1.....	31
ЗАДАЧА 2.....	32
ЗАДАЧА 3.....	32
ЗАДАЧА 4.....	33
ЗАДАЧА 5.....	33
ЗАДАЧА 6.....	34
ЗАДАЧА 7.....	34
ЗАДАЧА 8.....	35
ЗАДАЧА 9.....	35
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	37

ВСТУП

Навчальний посібник містить розв'язання типових практичних задач з дисципліни "Математичні задачі енергетики" для студентів, які навчаються за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», освітньою програмою «Електричні системи та мережі».

Дисципліна "Математичні задачі енергетики" належить до циклу професійної підготовки в фахівців за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», освітньою програмою «Електричні системи та мережі». Метою вивчення дисципліни є формування у студента системи ґрунтових знань та практичних навичок в формуванні розрахункових моделей електричних систем, формуванні математичних моделей для розрахунку ustalених режимів роботи електричних систем, використання методів оптимізаційних розрахунків і застосування теорії ймовірностей для рішення задач в електроенергетиці.

У навчальному посібнику наведено розв'язання типових задач, які охоплюють змістовні модулі дисципліни.

Змістовні модулі частини 1.

Методи аналізу ustalених режимів електричних систем.

Методи пошуку оптимальних розв'язків задач електроенергетики.

Методи аналізу перехідних процесів та стійкості електроенергетичних систем

Змістовний модуль частини 2.

Використання теорії ймовірностей та математичної статистики для розв'язання задач електроенергетики.

Матеріал, наведений в навчальному посібнику, сприяє закріпленню у студентів знань, вмінь та навичок, набутих під час вивчення лекційного матеріалу дисципліни, а саме:

- використання матриць під час формування моделей розрахунку режимів електричних систем;
- постановка та математична формалізація задачі розрахунку ustalеного режиму електричної мережі;
- методи розв'язання систем алгебраїчних рівнянь та їх використання для розрахунку режимів електричних мереж;
- оптимізаційні задачі електроенергетики;
- лінійне та нелінійне програмування;
- методи аналізу перехідних процесів в електроенергетичних системах;
- основні поняття та теореми ймовірностей;
- випадкові величини та закони розподілу;
- визначення законів розподілу випадкових величин на підставі дослідних даних;
- числові характеристики випадкових величин.

Математичні задачі енергетики. Частина 1.

ЗАДАЧА 1.

Скласти схему заміщення електричної системи, принципова схема якої має наступний вигляд (рис. 1.):

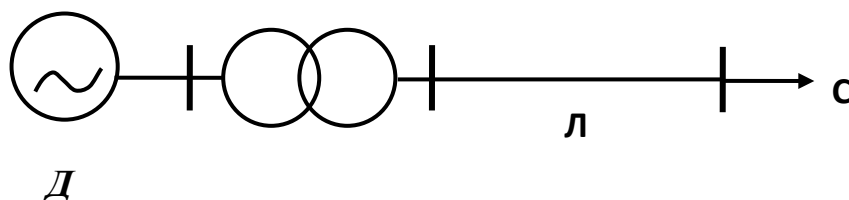


Рисунок 1- Принципова схема електричної системи

Складання схеми заміщення електричної системи засновано на поданні кожного з її елементів схемою заміщення. Для опису симетричних режимів системи трифазного змінного струму всі величини визначаються комплексними числами і схеми заміщення елементів складаються на одну фазу з нейтраллю.

Джерело живлення може бути представлено як джерело напруги з ЕРС $\dot{E}_D$ та внутрішнім опором $\underline{Z}_D$, або як джерело струму $\dot{J}_D$. При розрахунках ustalених режимів використовують представлення через струми, а представлення за допомогою ЕРС та опорів використовують при розрахунках струмів замикання та перехідних режимів. Споживачі електроенергії (електричні навантаження) мають схему заміщення або у вигляді провідності $\underline{Y}_H$, або у вигляді струму навантаження $\dot{J}_H$. Лінії електропередачі представляють Π -подібною схемою заміщення, а трансформатори представляють Γ -подібною схемою заміщення.

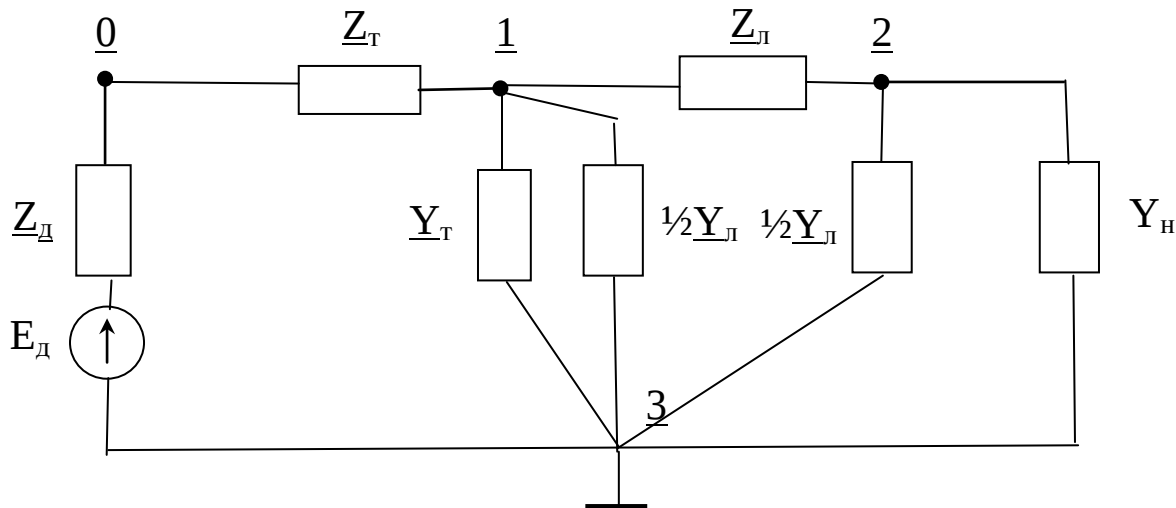


Рисунок 2 - Схема заміщення наведеної в задачі електричної системи.

ЗАДАЧА 2.

Скласти схему заміщення для електричної системи, що показана на рис.3 и побудувати направлений граф заданої електричної системи .

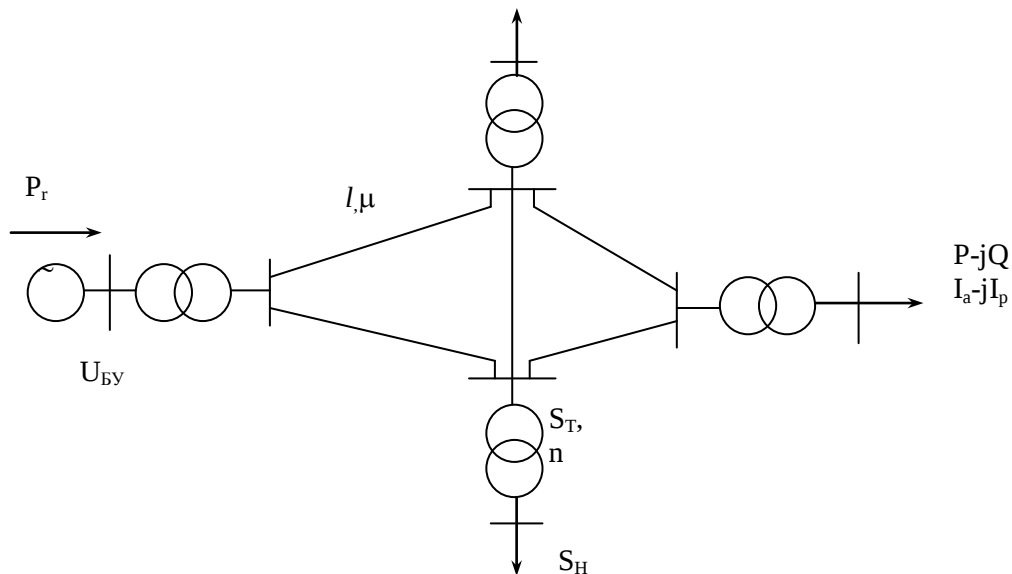


Рисунок 3 - Принципова схема електричної системи

Схеми заміщення сучасних електричних систем містять сотні гілок та вузлів. Для розрахунків режимів роботи електричних систем доцільно використовувати формалізований підхід на основі аналітичного опису конфігурації схем за допомогою теорії графів та алгебри матриць.

На рис.4 наведена схема заміщення заданої електричної системи

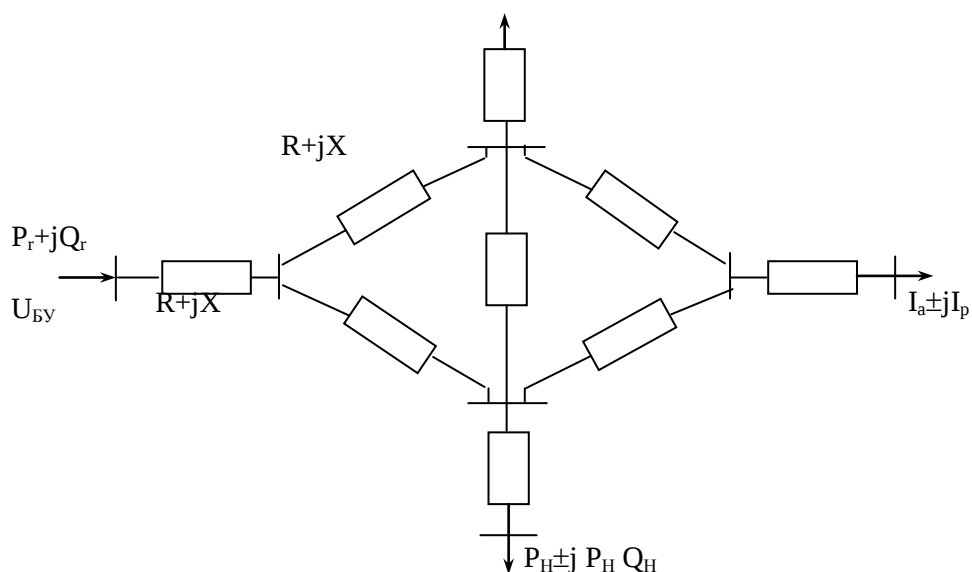


Рисунок 4 - Схема заміщення електричної системи

При зображенні схем у вигляді графа гілка зображується прямою з зазначенням її напрямку. Таким чином, напрямок гілки від початкового вузла до кінцевого одночасно є додатним напрямком і для інших величин – ЕРС, струму та падіння напруги.

Для подання розрахункової схеми електричної мережі у вигляді спрямованого графа необхідно виконати упорядковану нумерацію гілок, вузлів та контурів. При використанні контурної моделі електричної мережі спочатку необхідно виділити незалежні контури і гілки, які будуть умовно видалені із замкнутого контуру – хорди.

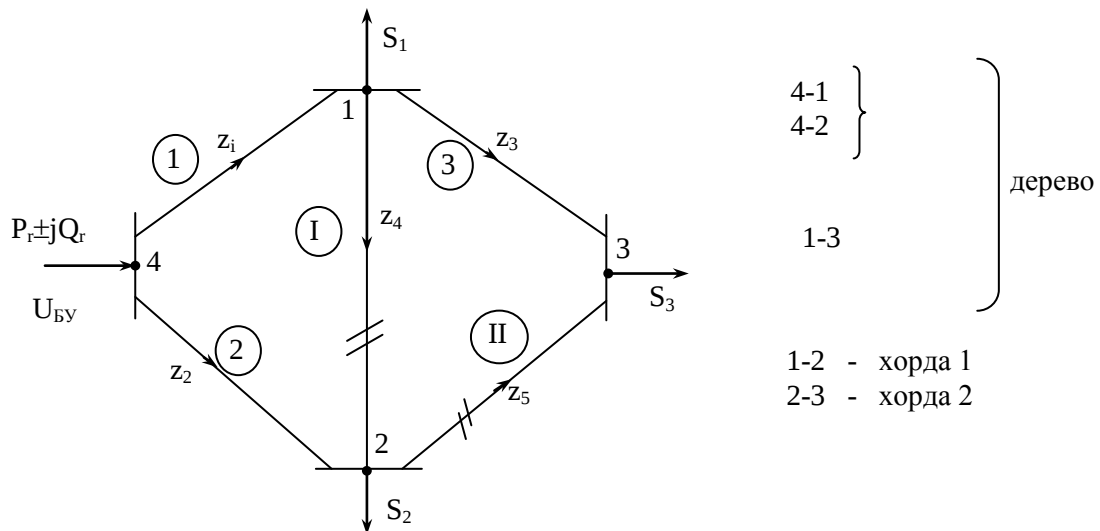


Рисунок 5 - Зв'язаний направлений граф, що відповідає спрощеній схемі заміщення

ЗАДАЧА 3.

Розрахункова схема електричної мережі подана у вигляді спрямованого графа. Скласти матриці інцидентій.

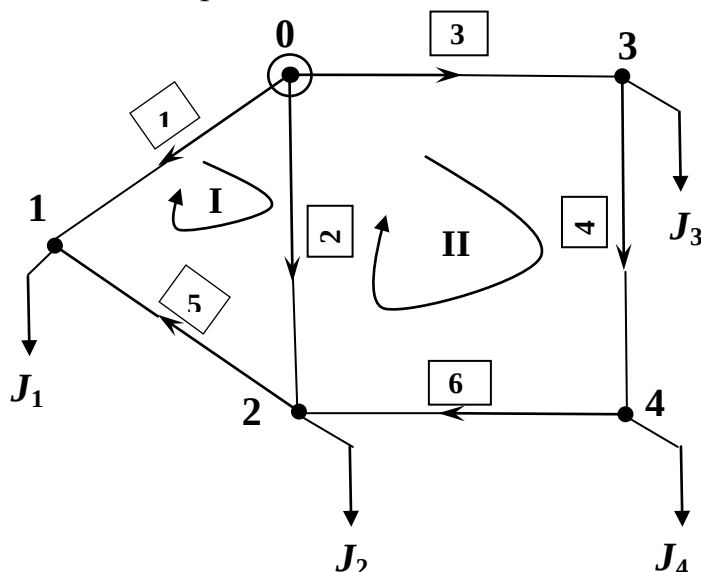


Рисунок 6 Розрахункова схема електричної мережі

Для схеми, представленої на рис. 6, вибираємо два контури: перший 0-2-1-0, де в якості хорди вибрана гілка 1-2, та другий контур 0-3-4-2-0, де хордою вибрана гілка 2-4. Виконуємо упорядковану нумерацію спочатку гілок дерева мережі, а потім хорд. Напрямки контуру і відповідної хорди повинні збігатися.

Перша матриця інциденцій – матриця $[M]$. Матриця, що показує з'єднання гілок і вузлів. Це прямокутна матриця розміру $(m \times n)$, де m – дорівнює числу розрахункових вузлів, а n – відповідає числу гілок. Правило її формування: на перетині j -го рядка та i -го стовпця ставлять 1, якщо j -й вузол є початковою вершиною i -ої гілки; -1 , якщо j -й вузол є кінцевою вершиною i -ої гілки і ставлять 0, якщо вузол j не зв'язаний з гілкою i .

Друга матриця інциденцій – матриця $[N]$. Матриця з'єднання контурів та гілок. Це прямокутна матриця розміру $(k \times n)$, де k – дорівнює числу контурів, а n – числу гілок. Правило її формування: на перетині k -го рядка та i -го стовпця ставлять 1, якщо i -та гілка входить до k -го контуру та співпадає з ним за додатним напрямком; ставлять -1 , якщо i -та гілка входить до k -го контуру та не співпадає з ним за додатним напрямком; ставлять 0, якщо i -та гілка не належить до k -го контуру.

Складаємо матриці інциденцій для заданої розрахункової схеми.

Перша матриця інциденцій $[M]$:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon & \zeta \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{matrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

M_α
 M_β

Друга матриця інциденцій $[N]$:

$$[N] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon & \zeta \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

N_α
 N_β

ЗАДАЧА 4.

Скласти узагальнене рівняння стану електричної системи для розрахункової схеми електричної мережі (рис. 7.).

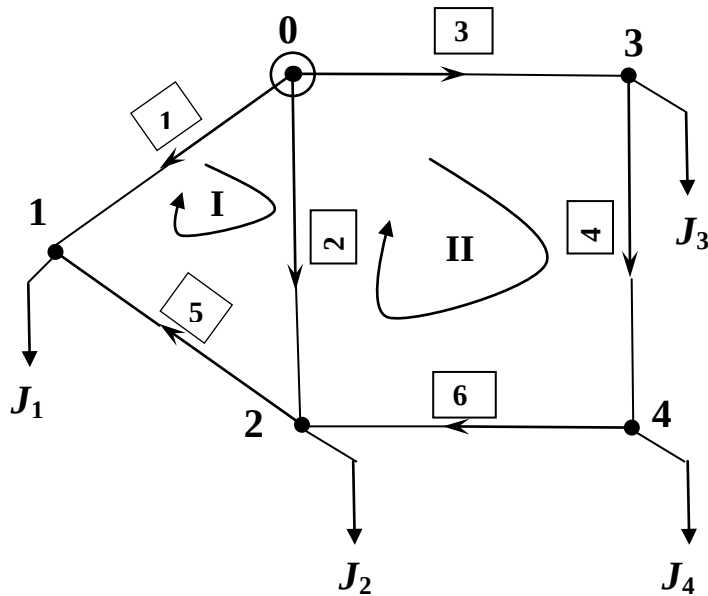


Рисунок 7 - Розрахункова схема електричної мережі

Перша матриця інциденцій $[M]$:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Друга матриця інциденцій $[N]$:

$$[N] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[N][Z_0] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -z_1 & z_2 & 0 & 0 & z_5 & 0 \\ 0 & -z_2 & z_3 & z_4 & 0 & z_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z}_\partial \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -z_1 & z_2 & 0 & 0 & z_5 & 0 \\ 0 & -z_2 & z_3 & z_4 & 0 & z_6 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -J_1 \\ -J_2 \\ -J_3 \\ -J_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Узагальнене рівняння стану електричної системи:

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -z_1 & z_2 & 0 & 0 & z_5 & 0 \\ 0 & -z_2 & z_3 & z_4 & 0 & z_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 \\ -J_2 \\ -J_3 \\ -J_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ЗАДАЧА 5.

Побудувати контурну модель електричної системи, розрахункова схема якої представлена на рис. 8.

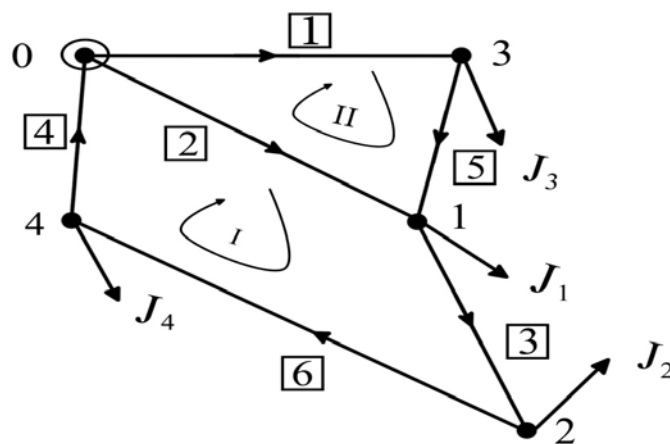


Рисунок 8 - Розрахункова схема електричної мережі

Для подання розрахункової схеми електричної мережі у вигляді спрямованого графа необхідно виконали упорядковану нумерацію гілок, вузлів та контурів. При використанні контурної моделі електричної мережі спочатку виділили незалежні контури і гілки, які будуть умовно видалені із замкнутого контуру – хорди. Для схеми, представленої на рис.8, вибираємо два контури: перший 0-4-2-1-0, де в якості хорди вибрана гілка 4-2, та другий контур 0-1-3-0, де хордою вибрана гілка 1-3. Виконали упорядковану нумерацію спочатку гілок дерева мережі, а потім хорд. Напрямки контуру і відповідної хорди збігаються.

Для формування контурної моделі електричної мережі складаємо матриці інциденцій для заданої розрахункової схеми.

Перша матриця інциденцій [M]:

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Друга матриця інциденцій [N]:

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Третя матриця інциденцій [C]:

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Знаходимо власні та взаємні опори контурів, для цього знайдемо транспоновану матрицю N:

$$N^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z_k := N \cdot Z_d \cdot N^T \rightarrow \begin{pmatrix} z_2 + z_3 + z_4 + z_6 & -z_2 \\ -z_2 & z_1 + z_2 + z_5 \end{pmatrix}$$

Розраховуємо праву частину системи рівнянь, вектор-стовпець контурних ЕРС $[E_k]$.

Знаходимо значення коефіцієнта :

$$N_\alpha \cdot Z_\alpha \cdot C_\alpha$$

$$N_\alpha \cdot Z_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1 & -z_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_\alpha \cdot Z_\alpha \cdot C_\alpha := \begin{pmatrix} z_2 & z_2 + z_3 & 0 & -z_4 \\ -z_2 & -z_2 & z_1 & 0 \end{pmatrix}$$

З урахуванням того, що ЕРС у гілках відсутні, отримуємо:

$$E_k := N_\alpha \cdot Z_\alpha \cdot C_\alpha \cdot J \rightarrow \begin{bmatrix} J_1 \cdot z_2 + J_2 \cdot (z_2 + z_3) - J_4 \cdot z_4 \\ -J_1 \cdot z_2 - J_2 \cdot z_2 + J_3 \cdot z_1 \end{bmatrix}$$

Складаємо систему рівнянь контурної моделі електричної мережі вигляду , де невідомими величинами є контурні струми.

У загальному вигляді:

$$\begin{pmatrix} z_2 + z_3 + z_4 + z_6 & -z_2 \\ -z_2 & z_1 + z_2 + z_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} E_{k1} \\ E_{k2} \end{pmatrix}$$

ЗАДАЧА 6.

Побудувати вузлову модель електричної системи за заданою розрахунковою схемою (рис. 9.).

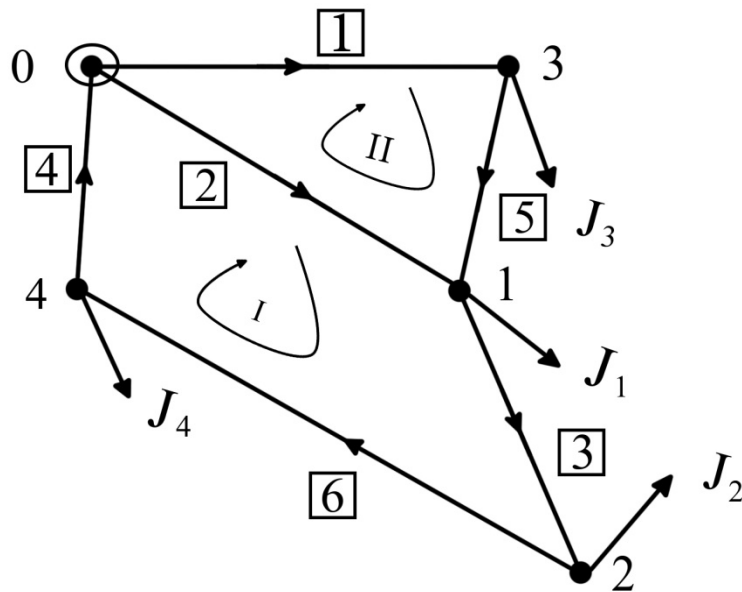


Рисунок 9 - Розрахункова схема електричної системи

Для формування вузлової моделі електричної мережі необхідно знайти власні та взаємні провідності вузлів.

Перша матриця інцидентій [M]:

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Знаходимо власні та взаємні провідності вузлі в, згідно з виразом :

$$\underline{Y}_g = -\underline{M} \cdot \underline{Y}_0 \cdot \underline{M}^T$$

$$\underline{Y}_g = - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{y}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{y}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{y}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{y}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{y}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{y}_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -(\underline{y}_2 + \underline{y}_3 + \underline{y}_5) & \underline{y}_3 & \underline{y}_5 & 0 \\ \underline{y}_3 & -(\underline{y}_3 + \underline{y}_6) & 0 & \underline{y}_6 \\ \underline{y}_5 & 0 & -(\underline{y}_1 + \underline{y}_5) & 0 \\ 0 & \underline{y}_6 & 0 & -(\underline{y}_4 + \underline{y}_6) \end{bmatrix}.$$

Розраховуємо праву частину системи рівнянь, відповідно до виразу :

$$\dot{\mathbf{J}} + \mathbf{Y}_e \cdot \dot{\mathbf{U}}_{БП} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}_d \cdot \dot{\mathbf{E}}$$

Спочатку визначаємо складову $[\underline{Y}_e] \cdot [\dot{\mathbf{U}}_{БП}]$:

$$[\underline{Y}_e] \cdot [\mathbf{U}_{БП}] = \begin{bmatrix} -(\underline{y}_2 + \underline{y}_3 + \underline{y}_5) & \underline{y}_3 & \underline{y}_5 & 0 \\ \underline{y}_3 & -(\underline{y}_3 + \underline{y}_6) & 0 & \underline{y}_6 \\ \underline{y}_5 & 0 & -(\underline{y}_1 + \underline{y}_5) & 0 \\ 0 & \underline{y}_6 & 0 & -(\underline{y}_4 + \underline{y}_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_0 \\ U_0 \\ U_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{y}_2 U_0 \\ 0 \\ -\underline{y}_1 U_0 \\ -\underline{y}_4 U_0 \end{bmatrix}$$

З урахуванням того, що ЕРС у гілках відсутні, отримуємо вектор-стовпчик вільних членів системи рівнянь вузлової моделі:

$$\dot{\mathbf{J}} + \mathbf{Y}_e \cdot \dot{\mathbf{U}}_{БП} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}_d \cdot \dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\underline{y}_2 U_0 \\ 0 \\ -\underline{y}_1 U_0 \\ -\underline{y}_4 U_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - \underline{y}_2 U_0 \\ J_2 \\ J_3 - \underline{y}_1 U_0 \\ J_4 - \underline{y}_4 U_0 \end{bmatrix}$$

Складаємо систему рівнянь вузлової моделі електричної мережі, де невідомими величинами є напруги у вузлах:

$$\begin{bmatrix} -(\underline{y}_2 + \underline{y}_3 + \underline{y}_5) & \underline{y}_3 & \underline{y}_5 & 0 \\ \underline{y}_3 & -(\underline{y}_3 + \underline{y}_6) & 0 & \underline{y}_6 \\ \underline{y}_5 & 0 & -(\underline{y}_1 + \underline{y}_5) & 0 \\ 0 & \underline{y}_6 & 0 & -(\underline{y}_4 + \underline{y}_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - \underline{y}_2 U_0 \\ J_2 \\ J_3 - \underline{y}_1 U_0 \\ J_4 - \underline{y}_4 U_0 \end{bmatrix}$$

ЗАДАЧА 7.

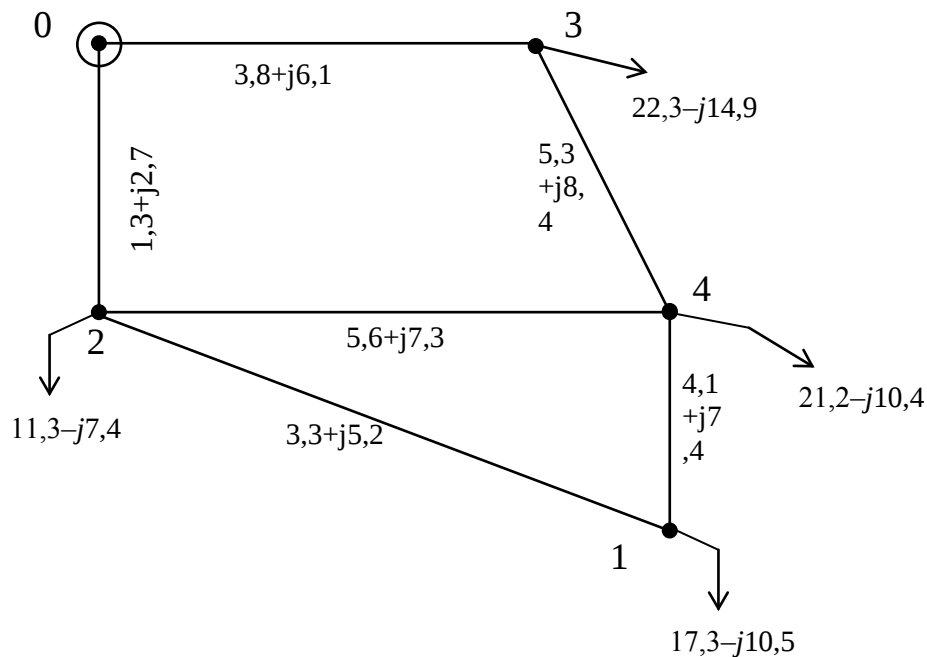


Рисунок 10 – Розрахункова схема електричної системи

На рис.10 наведена розрахункова схема електричної системи номінальною напругою 110 кВ. Параметри ділянок схеми позначені на рисунку числовими значеннями повного повздовжнього опору схеми заміщення під кожною з ділянок схеми та складають:

$$\begin{aligned} z_{12} &= 3,3 + j5,2 \text{ Ом}; & z_{03} &= 3,8 + j6,1 \text{ Ом}; \\ z_{02} &= 1,3 + j2,7 \text{ Ом}; & z_{14} &= 4,1 + j7,4 \text{ Ом}; \\ z_{24} &= 5,6 + j7,3 \text{ Ом} & z_{34} &= 5,3 + j8,4 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Потужності електричних навантажень в незалежних вузлах схеми дорівнюють:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= 17,3 - j10,5 \text{ МВА}; & \dot{S}_2 &= 11,3 - j7,4 \text{ МВА}; \\ \dot{S}_3 &= 22,3 - j14,9 \text{ МВА}; & \dot{S}_4 &= 21,2 - j10,4 \text{ МВА}. \end{aligned}$$

Рівень напруги в балансуєчому вузлі схеми дорівнює $U_0=112$ кВ.

Записати систему нелінійних алгебраїчних рівнянь вузлової моделі для заданої електричної системи.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{y}_{11} \dot{U}_1 + \underline{y}_{12} \dot{U}_2 + \underline{y}_{14} \dot{U}_4 = \frac{\dot{S}_1}{\underline{U}_1}; \\ \underline{y}_{21} \dot{U}_1 + \underline{y}_{22} \dot{U}_2 + \underline{y}_{24} \dot{U}_4 = \frac{\dot{S}_2}{\underline{U}_2} - \underline{y}_{02} \dot{U}_0; \\ \underline{y}_{33} \dot{U}_3 + \underline{y}_{34} \dot{U}_4 = \frac{\dot{S}_3}{\underline{U}_3} - \underline{y}_{03} \dot{U}_0; \\ \underline{y}_{41} \dot{U}_1 + \underline{y}_{42} \dot{U}_2 + \underline{y}_{43} \dot{U}_3 + \underline{y}_{44} \dot{U}_4 = \frac{\dot{S}_4}{\underline{U}_4}. \end{array} \right.$$

Взаємні провідності чисельно дорівнюють оберненому опору відповідної ділянки схеми.

$$\underline{y}_{02} = 1/\underline{z}_{02} = 1/(1,3 + j2,7) = 0,145 - j0,301 \text{ См};$$

$$\underline{y}_{03} = 1/\underline{z}_{03} = 1/(3,8 + j6,1) = 0,074 - j0,118 \text{ См};$$

$$\underline{y}_{12} = 1/\underline{z}_{12} = 1/(3,3 + j5,2) = 0,087 - j0,137 \text{ См};$$

$$\underline{y}_{14} = 1/\underline{z}_{14} = 1/(4,1 + j7,4) = 0,057 - j0,103 \text{ См};$$

$$\underline{y}_{24} = 1/\underline{z}_{24} = 1/(5,6 + j7,3) = 0,066 - j0,086 \text{ См};$$

$$\underline{y}_{34} = 1/\underline{z}_{34} = 1/(5,3 + j8,4) = 0,054 - j0,085 \text{ См}.$$

Власні провідності вузлів:

$$\underline{y}_{11} = -(\underline{y}_{12} + \underline{y}_{14}) = -((0,087 - j0,137) + (0,057 - j0,103)) = -0,144 + j0,24 \text{ См};$$

$$\begin{aligned} \underline{y}_{22} &= -(\underline{y}_{02} + \underline{y}_{12} + \underline{y}_{24}) = -((0,145 - j0,301) + (0,087 - j0,137) + 0,066 - j0,086) = \\ &= -0,298 + j0,524 \text{ См}; \end{aligned}$$

$$\underline{y}_{33} = -(\underline{y}_{03} + \underline{y}_{34}) = -((0,074 - j0,118) + (0,054 - j0,085)) = -0,127 + j0,203 \text{ См}.$$

$$\begin{aligned} \underline{y}_{44} &= -(\underline{y}_{14} + \underline{y}_{24} + \underline{y}_{34}) = -((0,057 - j0,103) + (0,066 - j0,086) + (0,054 - j0,085)) = \\ &= -0,177 + j0,275 \text{ См}. \end{aligned}$$

З урахуванням отриманих значень провідностей вузлів, система рівнянь (1) набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} (-0,144 + j0,24) \cdot \dot{U}_1 + (0,087 - j0,137) \dot{U}_2 + (0,057 - j0,103) \dot{U}_4 = \frac{17,3 - j10,5}{\bar{U}}; \\ (0,087 - j0,137) \dot{U}_1 + (-0,298 + j0,524) \cdot \dot{U}_2 + (0,066 - j0,086) \dot{U}_4 = \frac{11,3 - j7,4}{\bar{U}_2} - (0,145 - j0,301) \cdot 112; \\ (-0,127 + j0,203) \cdot \dot{U}_3 + (0,054 - j0,085) \dot{U}_4 = \frac{22,3 - j14,9}{\bar{U}_3} - (0,074 - j0,118) \cdot 112; \\ (0,057 - j0,103) \dot{U}_1 + (0,066 - j0,086) \dot{U}_2 + (0,054 - j0,085) \dot{U}_3 + (-0,177 + j0,275) \cdot \dot{U}_4 = \frac{21,2 - j10,4}{\bar{U}_4}. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 8.

Виконати розрахунок усталеного режиму електричної мережі, розрахункова схема якої надана на рис. 10 методом Зейделя. Вважати, що інженерна точність розрахунків дорівнює $1 \cdot 10^{-2}$ кВ.

1. Сформуємо систему рекурентних рівнянь ітераційного уточнення режиму напруги в незалежних вузлах схеми:

$$\begin{cases} \dot{U}_1^{(i)} = \frac{1}{(-0,144 + j0,24)} \left(\frac{17,3 - j10,5}{\bar{U}_1^{(i-1)}} - (0,087 - j0,137) \dot{U}_2^{(i-1)} - (0,057 - j0,103) \dot{U}_4^{(i-1)} \right); \\ \dot{U}_2^{(i)} = \frac{1}{(-0,298 + j0,524)} \left(\frac{11,3 - j7,4}{\bar{U}_2^{(i-1)}} - (0,087 - j0,137) \dot{U}_1^{(i)} - (0,066 - j0,086) \dot{U}_4^{(i-1)} - (0,145 - j0,301) \cdot 112 \right); \\ \dot{U}_3^{(i)} = \frac{1}{(-0,127 + j0,203)} \left(\frac{22,3 - j14,9}{\bar{U}_3^{(i-1)}} - (0,054 - j0,085) \dot{U}_4^{(i-1)} - (0,074 - j0,118) \cdot 112 \right); \\ \dot{U}_4^{(i)} = \frac{1}{(-0,177 + j0,275)} \left(\frac{21,2 - j10,4}{\bar{U}_4^{(i-1)}} - (0,057 - j0,103) \dot{U}_1^{(i)} - (0,066 - j0,086) \dot{U}_2^{(i)} - (0,054 - j0,085) \dot{U}_3^{(i)} \right). \end{cases}$$

2. Приймаємо початкові наближення напруг у вузлах розрахункової схеми:

$$\dot{U}_1^{(0)} = \dot{U}_2^{(0)} = \dot{U}_3^{(0)} = \dot{U}_4^{(0)} = U_n = 110 \text{ кВ.}$$

4. Визначаємо уточнені значення рівнів напруги в незалежних вузлах схеми на першій ітерації відповідно до (1):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1^{(1)} &= \frac{1}{-0,144 + j0,24} \left(\frac{17,3 - j10,5}{110} - (0,087 - j0,137) \cdot 110 - \right. \\ &\quad \left. - (0,057 - j0,103) \cdot 110 \right) = 109,42 - j0,306 \text{ кВ}; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_2^{(1)} = \frac{1}{-0,298 + j0,524} \left(\frac{11,3 - j7,4}{110} - (0,087 - j0,137) \cdot (109,42 - j0,306) - \right. \\ \left. - (0,066 - j0,086) \cdot 110 - (0,145 - j0,301) \cdot 112 \right) = 110,771 - j0,258 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_3^{(1)} = \frac{1}{-0,127 + j0,203} \left(\frac{22,3 - j14,9}{110} - (0,054 - j0,085) \cdot 110 - \right. \\ \left. - (0,074 - j0,118) \cdot 112 \right) = 110,233 - j0,419 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_4^{(1)} = \frac{1}{-0,177 + j0,275} \left(\frac{21,2 - j10,4}{110} - (0,057 - j0,103) \cdot (109,42 - j0,306) - \right. \\ \left. - (0,066 - j0,086) \cdot (110,771 - j0,258) - (0,054 - j0,085) \cdot (110,233 - j0,419) \right) = \\ = 109,554 - j0,63 \text{ кВ}.$$

5. Виконуємо розрахунок другої ітерації, згідно з виразами (1):

$$\dot{U}_1^{(2)} = \frac{1}{-0,144 + j0,24} \left(\frac{17,3 - j10,5}{109,42 + j0,306} - (0,087 - j0,137) \cdot (110,771 - j0,258) - \right. \\ \left. - (0,057 - j0,103) \cdot (109,554 - j0,63) \right) = 109,669 - j0,703 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_2^{(2)} = \frac{1}{-0,298 + j0,524} \left(\frac{11,3 - j7,4}{110,771 + j0,258} - (0,087 - j0,137) \cdot (109,669 - j0,703) - \right. \\ \left. - (0,066 - j0,086) \cdot (109,554 - j0,63) - (0,145 - j0,301) \cdot 112 \right) = 110,78 - j0,484 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_3^{(2)} = \frac{1}{-0,127 + j0,203} \left(\frac{22,3 - j14,9}{(110,233 + j0,419)} - (0,054 - j0,085) \cdot (109,554 - j0,63) - \right. \\ \left. - (0,074 - j0,118) \cdot 112 \right) = 110,047 - j0,68 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_4^{(2)} = \frac{1}{-0,177 + j0,275} \left(\frac{21,2 - j10,4}{109,554 + j0,63} - (0,057 - j0,103) \cdot (109,669 - j0,703) - \right. \\ \left. - (0,066 - j0,086) \cdot (110,78 - j0,484) - (0,054 - j0,085) \cdot (110,047 - j0,68) \right) = \\ = 109,581 - j0,931 \text{ кВ}.$$

6. Виконуємо перевірку закінчення ітераційного процесу. Умова закінчення розрахунку наступна:

$$\max \left\{ \left| \dot{U}_n^{(i)} - \dot{U}_n^{(i-1)} \right| \right\} \leq \varepsilon;$$

де: ε - задана інженерна точність.

Вектор-стовпчик нев'язок напруги :

$$\begin{pmatrix} \left| U_1^{(2)} - U_1^{(1)} \right| \\ \left| U_2^{(2)} - U_2^{(1)} \right| \\ \left| U_3^{(2)} - U_3^{(1)} \right| \\ \left| U_4^{(2)} - U_4^{(1)} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| (109,669 - j0,703) - (109,420 - j0,306) \right| \\ \left| (110,780 - j0,484) - (110,771 - j0,258) \right| \\ \left| (110,047 - j0,680) - (110,233 - j0,419) \right| \\ \left| (109,581 - j0,931) - (109,554 - j0,630) \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,469 \\ 0,226 \\ 0,320 \\ 0,303 \end{pmatrix} > \varepsilon$$

Як бачимо, умова не виконується, отже потрібно продовжити ітераційний розрахунок. Результати обчислень на третій та наступних ітераціях наведені в табл. 1.

Таблиця 1 - Ітераційне уточнення режиму напруги у вузлах схеми

Ітерація	$\dot{U}_1$	$\dot{U}_2$	$\dot{U}_3$	$\dot{U}_4$
0	110	110	110	110
1	109,420 – j0,306	110,771 – j0,258	110,233 – j0,419	109,554 – j0,630
2	109,669 – j0,703	110,780 – j0,484	110,047 – j0,680	109,581 – j0,931
3	109,685 – j0,958	110,800 – j0,606	110,056 – j0,805	109,592 – j1,100
4	109,699 – j1,098	110,812 – j0,673	110,061 – j0,875	109,601 – j1,194
5	109,709 – j1,175	110,819 – j0,710	110,064 – j0,913	109,606 – j1,245
6	109,716 – j1,218	110,824 – j0,730	110,067 – j0,935	109,610 – j1,274
7	109,720 – j1,242	110,827 – j0,741	110,068 – j0,946	109,613 – j1,289
8	109,722 – j1,255	110,828 – j0,748	110,069 – j0,953	109,614 – j1,298
9	109,724 – j1,262	110,829 – j0,751	110,070 – j0,957	109,615 – j1,303
10	109,725 – j1,266	110,830 – j0,753	110,070 – j0,959	109,616 – j1,305

ЗАДАЧА 9.

Розрахункова схема найпростішої електричної мережі номінальної напруги 110 кВ показана на рис. 11.

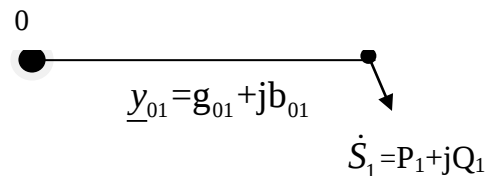


Рисунок 11 – Схема електричної мережі.

Параметри розрахункової схеми наступні. Провідність гілки 0-1:

$$\underline{y}_{01} = 0,01 - j0,05.$$

Потужність навантаження у вузлі 1 складає: $\dot{S}_1 = 40 - j20$ МВА.

Рівень напруги в балансуєчому вузлі схеми дорівнює: $U_0 = 120$ кВ.

Виконати розрахунок усталеного режиму електричної мережі методом Ньютона. Вважати, що інженерна точність розрахунків за нев'язками потужності дорівнює $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}$ МВА.

1. Система нелінійних алгебраїчних рівнянь вузлової моделі для заданої розрахункової схеми :

$$-\underline{y}_{11}\dot{U}_1 = \frac{\dot{S}_1}{U_1} - \underline{y}_{01}U_0$$

2. Записуємо отриману систему у вигляді $W(U)=0$:

$$-\underline{y}_{11}\dot{U}_1 - \frac{\dot{S}_1}{U_1} + \underline{y}_{01}U_0 = 0.$$

Помножимо всі коефіцієнти на $\hat{U}_1$, отримаємо:

$$\underline{y}_{11} \cdot \dot{U}_1 \cdot \hat{U}_1 - \dot{S}_1 + \underline{y}_{01} \cdot U_0 \cdot \hat{U}_1 = 0. \quad (1)$$

3. Розділимо всі комплексні величини на складові:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= U'_1 + jU''_1; & \hat{U}_1 &= U'_1 - jU''_1; \\ \underline{y}_{01} &= g_{01} + jb_{01}; & \dot{S}_1 &= P_1 + jQ_1. & \underline{y}_{11} &= g_{11} + jb_{11}. \end{aligned}$$

Після підстановки в (1) отримаємо наступні рівняння для обчислення нев'язок:

$$\begin{aligned} \omega_{P1} &= g_{11}(U_1'^2 + U_1''^2) + g_{01}U_1'U_0 + b_{01}U_1''U_0 - P_1 = 0; \\ \omega_{Q1} &= b_{11}(U_1'^2 + U_1''^2) - g_{01}U_1''U_0 + b_{01}U_1'U_0 - Q_1 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Власна провідність вузла:

$$\underline{y}_{11} = g_{11} + jb_{11} = -0,01 + j0,05. \quad \dot{S}_1 = 40 - j20 \text{ МВА.}$$

Взаємна провідність вузла:

$$\underline{y}_{01} = g_{01} + jb_{01} = 0,01 - j0,05;$$

Після підстановки числових значень коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \omega_{P1} &= -0,01(U_1'^2 + U_1''^2) + 0,01 \cdot 120 \cdot U_1' - 0,05 \cdot 120 \cdot U_1'' - 40 = 0; \\ \omega_{Q1} &= 0,05(U_1'^2 + U_1''^2) - 0,01 \cdot 120 \cdot U_1'' - 0,05 \cdot 120 \cdot U_1' + 20 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

4. Матриця Якобі для заданої схеми електричної системи:

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_{P1}}{\partial U_1'} & \frac{\partial \omega_{P1}}{\partial U_1''} \\ \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1'} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1''} \end{pmatrix}$$

Запишемо вирази для обчислення елементів матриці Якобі.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{P1}}{\partial U_1'} &= 1,2 - 0,02 \cdot U_1'; \\ \frac{\partial \omega_{P1}}{\partial U_1''} &= -6 - 0,02 \cdot U_1''; \\ \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1'} &= -6 + 0,1 \cdot U_1'; \\ \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1''} &= -1,2 + 0,1 \cdot U_1''. \end{aligned} \quad (4)$$

5. Приймаємо початкові наближення напруг у вузлах розрахункової схеми:

$$U_1^{(0)} = 110 \text{ кВ}; \quad U_1''^{(0)} = 0.$$

6. За виразами (3) визначаємо значення нев'язок потужностей у вузлах розрахункової схеми за поточних значень складових векторів напруг.

$$\omega_{P1} = -29$$

$$\omega_{Q1} = -35$$

Отримані значення нев'язок потужностей свідчать, що умова закінчення ітераційного процесу не виконується, отже продовжуємо розрахунок для уточнення складових векторів напруг.

7. Виконуємо розрахунок елементів матриці Якобі на першій ітерації, згідно з (4):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_{P1}}{\partial U_1'} &= -1; & \frac{\partial \omega_{P1}}{\partial U_1''} &= -6; \\ \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1'} &= 5; & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1''} &= -1,2.\end{aligned}$$

8. Складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно поправок до невідомих напруг у вузлах, відповідно:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 5 & -1,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta U_1' \\ \Delta U_1'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Розв'язок даної лінійної системи рівнянь дає наступні значення поправок до складових векторів напруг у вузлах розрахункової схеми на першій ітерації:

$$\Delta U_1' = 5,62; \quad \Delta U_1'' = -5,77.$$

9. Далі визначають уточнені значення рівнів напруги у вузлах електричної мережі на першій ітерації з урахуванням знайдених поправок:

$$\begin{aligned}U_1'^{(1)} &= U_1'^{(0)} + \Delta U_1'^{(1)} = 110 + 5,62 = 115,62 \text{ кВ}; \\ U_1''^{(1)} &= U_1''^{(0)} + \Delta U_1''^{(1)} = 0 - 5,77 = -5,77 \text{ кВ}.\end{aligned}$$

З новими значеннями напруг у вузлах розрахункової схеми продовжуємо розрахунок на другій ітерації, починаючи з пункту 4 наведеного алгоритму.

10. За виразами (3) визначаємо значення нев'язок потужностей у вузлах розрахункової схеми за поточних значень складових векторів напруг.

$$\omega_{P1} = -0,64; \quad \omega_{Q1} = 3,27.$$

Отримані значення нев'язок потужностей свідчать, що умова закінчення ітераційного процесу не виконується, отже продовжуємо розрахунок для уточнення складових векторів напруг.

11. Виконуємо розрахунок елементів матриці Якобі на другій ітерації.

$$\frac{\partial \omega_{P1}}{\partial U_1'} = -1,11; \quad \frac{\partial \omega_{P1}}{\partial U_1''} = -5,89;$$

$$\frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1'} = 5,56; \quad \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1''} = -1,78.$$

12. Складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно поправок до невідомих напруг у вузлах:

$$\begin{pmatrix} -1,11 & -5,89 \\ 5,56 & -1,78 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta U_1' \\ \Delta U_1'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,64 \\ -3,27 \end{pmatrix}$$

Розв'язок даної лінійної системи рівнянь дає наступні значення поправок до складових векторів напруг у вузлах розрахункової схеми на першій ітерації:

$$\Delta U_1' = -0,59; \quad \Delta U_1'' = 0,002.$$

13. Далі визначають уточнені значення рівнів напруги у вузлах електричної мережі на другій ітерації з урахуванням знайдених поправок:

$$U_1'^{(2)} = U_1'^{(1)} + \Delta U_1'^{(2)} = 115,62 - 0,59 = 115,03 \text{ кВ};$$

$$U_1''^{(2)} = U_1''^{(1)} + \Delta U_1''^{(2)} = -5,77 + 0,002 = -5,768 \text{ кВ}.$$

ЗАДАЧА 10.

Знайти точки екстремуму функції

$$F = 6 - 4x_1 - 3x_2$$

$$\text{За умови: } W = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L = F + \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i \cdot W_i = 6 - 4x_1 - 3x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

Обчислимо часткові похідні функції Лагранжа за змінними x_1, x_2 , а також за невизначеним множником Лагранжа. Запишемо необхідні умови екстремуму.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -4 + 2x_1 \cdot \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -3 + 2x_2 \cdot \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

Прирівнюємо часткові похідні нулю і записуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -4 + 2x_1 \cdot \lambda = 0 \\ -3 + 2x_2 \cdot \lambda = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь відносно λ :

$$\begin{cases} 2x_1 \cdot \lambda = 4 \\ 2x_2 \cdot \lambda = 3 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{2\lambda} \\ x_2 = \frac{3}{2\lambda} \\ \left(\frac{4}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Система має два рішення:

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}; \quad x_1 = \frac{4}{5}; \quad x_2 = \frac{3}{5};$$

$$\lambda_2 = -\frac{5}{2}; \quad x_1 = -\frac{4}{5}; \quad x_2 = -\frac{3}{5};$$

ЗАДАЧА 11.

Знайти точки екстремуму функції

$$F = x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

За наявності обмеження: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$.

Розв'язок:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -2; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 2.$$

ЗАДАЧА 12.

Знайти максимум функції F , використовуючи метод градієнта.

$$F(x_1, x_2) = 3 + 2x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 2x_2^2.$$

Початкова точка пошуку $X^{(0)} = (0, 0)$, крок $h=0,2$; $\varepsilon=0,3$.

1. Запишемо складові вектор-градієнта

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2 - 2x_1; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 12 - 4x_2.$$

2. Знаходимо послідовні наближення.

Перший крок:

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + 0,2(2 - 2x_1^{(0)}) = 0 + 0,2 \cdot 2 = 0,4;$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + 0,2(12 - 4x_2^{(0)}) = 0 + 0,2 \cdot 12 = 2,4.$$

$$|\nabla F(X^{(1)})| = 2,68; \quad F(X^{(1)}) = 20,92.$$

Другий крок:

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + 0,2(2 - 2x_1^{(1)}) = 0,4 + 0,2 \cdot (2 - 2 \cdot 0,4) = 0,64;$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + 0,2(12 - 4x_2^{(1)}) = 2,4 + 0,2 \cdot (12 - 4 \cdot 2,4) = 2,88.$$

$$|\nabla F(X^{(2)})| = 0,865; \quad F(X^{(2)}) = 21,84.$$

Третій крок:

$$x_1^{(3)} = x_1^{(2)} + 0,2(2 - 2x_1^{(2)}) = 0,64 + 0,2 \cdot (2 - 2 \cdot 0,64) = 0,784;$$

$$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} + 0,2(12 - 4x_2^{(2)}) = 2,88 + 0,2 \cdot (12 - 4 \cdot 2,88) = 2,976.$$

$$|\nabla F(X^{(3)})| = 0,443; \quad F(X^{(3)}) = 21,95.$$

Четвертий крок:

$$x_1^{(4)} = x_1^{(3)} + 0,2(2 - 2x_1^{(3)}) = 0,784 + 0,2 \cdot (2 - 2 \cdot 0,784) = 0,87;$$

$$x_2^{(4)} = x_2^{(3)} + 0,2(12 - 4x_2^{(3)}) = 2,976 + 0,2 \cdot (12 - 4 \cdot 2,976) = 2,995.$$

$$|\nabla F(X^{(4)})| = 0,261; \quad F(X^{(4)}) = 21,98.$$

ЗАДАЧА 13.

Знайти мінімум функції F , використовуючи метод градієнта.

$$F(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^3 + 2x_1x_2 - 40x_1 - 70x_2 + 700$$

Початкові умови:

$$X^{(0)} = (6; 4); \quad \text{крок } h=0,01; \quad \varepsilon=0,6.$$

Значення функції в точці $X^{(0)}$:

$$F(X^{(0)}) = 492.$$

1. Запишемо складові вектор-градієнта

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 4x_1 + 2x_2 - 40; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 9x_2^2 + 2x_1 - 70.$$

2. Знаходимо послідовні наближення.

Перший крок:

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - 0,01(4x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)} - 40) = 6,08;$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - 0,01(9x_2^{(0)2} + 2x_1^{(0)} - 70) = 3,14.$$

$$F(X^{(1)}) = 439.$$

Другий крок:

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} - 0,01(4x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} - 40) = 6,176;$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} - 0,01(9x_2^{(1)2} + 2x_1^{(1)} - 70) = 2,83.$$

$$F(X^{(2)}) = 433,4.$$

На восьмому кроці отримаємо:

$$X^{(8)} = (8,794; 2,429)$$

$$F(X^{(8)}) = 418,58.$$

ЗАДАЧА 14.

Розрахувати струм перехідного процесу в котушці індуктивності методом Ейлера. Режим електричної мережі після комутації можна представити системою алгебраїчних і диференціальних рівнянь, що відповідають законам Ома і Кірхгофа:

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ i_1 \cdot r_1 = i_2 \cdot r_2 \\ i_1 \cdot r_1 + L \frac{di}{dt} = E \end{cases}$$

Для приведення цієї системи до форми Коші, з першого рівняння визначимо i_2 і підставимо в друге, тоді:

$$i_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cdot i.$$

Підставимо отримане значення струму i_1 до третього рівняння і перетворимо його відносно похідної.

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{r_1 \cdot r_2}{L(r_1 + r_2)} \cdot i.$$

За умови задачі:

$$r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом};$$

$$E = 100 \text{ В};$$

$$L = 5; \quad h = 0,2.$$

І тому, з урахуванням числових значень, отримаємо:

$$\frac{di}{dt} = 20 - i.$$

Відповідно до початкових умов стану електричної мережі, значення струму індуктивності в момент часу $t=0$:

$$i(0) = \frac{E}{r_1} = \frac{100}{10} = 10.$$

Значення струму в наступні моменти часу визначають за виразом:

$$i^{(k+1)} = i^{(k)} + h \cdot F(i^{(k)}).$$

Для заданої системи:

$$i^{(1)} = 10 + 0,2(20 - 10) = 12;$$

$$i^{(2)} = 12 + 0,2(20 - 12) = 13,6;$$

$$i^{(3)} = 13,6 + 0,2(20 - 13,6) = 14,9;$$

$$i^{(4)} = 14,9 + 0,2(20 - 14,9) = 15,9;$$

$$i^{(5)} = 15,9 + 0,2(20 - 15,9) = 16,7.$$

ЗАДАЧА 15.

Використовуючи метод Ейлера, знайти $X(0,3)$.

Задана функція $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\cos t}{x^2 + 1}$. $X(0) = 0$; $h = 0,1$.

$$X^{(1)} = X^{(0)} + 0,1 \cdot \frac{\cos(t^{(0)})}{X^{(0)^2} + 1} = 0 + 0,1 \frac{\cos(0)}{0^2 + 1} = 0,1;$$

$$X(0,1) = 0,1.$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + 0,1 \cdot \frac{\cos(t^{(1)})}{X^{(1)^2} + 1} = 0,1 + 0,1 \frac{\cos(0,1)}{(0,1)^2 + 1} = 0,1985;$$

$$X(0,2) = 0,1985.$$

$$X(0,3) = 0,293.$$

ЗАДАЧА 16.

Задана система рівнянь в формі Коші, розрахувати два кроки перехідного процесу середньоінтервальним методом прогнозу і корекції:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = 1 - i + 0,1u \\ \frac{du}{dt} = 10 - 2u - 5i \end{cases}$$

Початкові умови: $i(0)=1$, $u(0)=5$, $h=0,1$.

Розраховуємо перший крок

$$i_{np}^{(1)} = 1 + 0,1(1 - 1 + 0,1 \cdot 5) = 1,05$$

$$u_{np}^{(1)} = 5 + 0,1(10 - 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1) = 4,5$$

$$i_{кор}^{(1)} = 1 + 0,5 \cdot 0,1[(1 - 1 + 0,1 \cdot 5) + (1 - 1,05 + 0,1 \cdot 4,5)] = 1,04$$

$$u_{кор}^{(1)} = 5 + 0,5 \cdot 0,1[(10 - 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1) + (10 - 2 \cdot 4,5 - 5 \cdot 1,05)] = 4,54$$

Розраховуємо другий крок

$$i_{np}^{(2)} = 1,04 + 0,1(1 - 1,04 + 0,1 \cdot 4,54) = 1,09$$

$$u_{np}^{(2)} = 4,54 + 0,1(10 - 2 \cdot 4,54 - 5 \cdot 1,04) = 4,11$$

$$i_{кор}^{(2)} = 1,04 + 0,5 \cdot 0,1[(1 - 1,04 + 0,1 \cdot 54,)4 + (1 - 1,09 + 0,1 \cdot 4,11)] = 1,08$$

$$u_{кор}^{(2)} = 4,54 + 0,5 \cdot 0,1[(10 - 2 \cdot 4,54 - 5 \cdot 1,04) + (10 - 2 \cdot 4,11 - 5 \cdot 1,09)] = 4,14$$

Результати розрахунку перехідного процесу за п'ять кроків наведено в табл.1.

Таблиця 1 – Результати розрахунків перехідного процесу

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
i	1,0	1,04	1,08	1,11	1,13	1,15
u	5,0	4,54	4,14	3,8	3,51	3,27

ЗАДАЧА 17.

Розрахувати два кроки перехідного процесу методом Рунге-Кутта в електричній мережі, що представлена наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = 1 - i + u \\ \frac{du}{dt} = 10 - u + 2i \end{cases}$$

Початкові умови: $i(0)=0$, $u(0)=0$, крок інтегрування $h=0,2$.

Обчислемо значення змінних в кінці першого інтервалу при $t=0,2$ с:

$$k_{1i} = 1 - 0 + 0 = 1$$

$$k_{1u} = 10 - 0 + 2 \cdot 0 = 10$$

$$k_{2i} = 1 - (0 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 1) + (0 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 10) = 1,9$$

$$k_{2u} = 10 - (0 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 10) + 2(0 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 1) = 9,2$$

$$k_{3i} = 1 - (0 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 1,9) + (0 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 9,2) = 1,73$$

$$k_{3u} = 10 - (0 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 9,2) + 2(0 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 1,9) = 9,46$$

$$k_{4i} = 1 - (0 + 0,2 \cdot 1,73) + (0 + 0,2 \cdot 9,46) = 2,55$$

$$k_{4u} = 10 - (0 + 0,2 \cdot 9,46) + 2(0 + 0,2 \cdot 1,73) = 8,80$$

$$i^{(1)} = 0 + \frac{0,2}{6}(1 + 2 \cdot 1,9 + 2 \cdot 1,73 + 2,55) = 0,36$$

$$u^{(1)} = 0 + \frac{0,2}{6}(10 + 2 \cdot 9,2 + 2 \cdot 9,46 + 8,80) = 1,87$$

Знайдемо значення змінних в кінці другого інтервалу:

$$k_{1i} = 1 - 0,36 + 1,87 = 2,51$$

$$k_{1u} = 10 - 1,87 + 2 \cdot 0,36 = 8,89$$

$$k_{2i} = 1 - (0,36 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 2,51) + (1,87 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 8,89) = 3,15$$

$$k_{2u} = 10 - (1,87 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 8,89) + 2(0,36 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 2,51) = 8,5$$

$$k_{3i} = 1 - (0,36 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 3,15) + (1,87 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 8,5) = 3,05$$

$$k_{3u} = 10 - (1,87 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 8,5) + 2(0,36 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 3,15) = 8,67$$

$$k_{4i} = 1 - (0,36 + 0,2 \cdot 3,05) + (1,87 + 0,2 \cdot 8,67) = 3,63$$

$$k_{4u} = 10 - (1,87 + 0,2 \cdot 8,67) + 2(0,36 + 0,2 \cdot 3,05) = 8,38$$

$$i^{(2)} = 0,36 + \frac{0,2}{6}(2,51 + 2 \cdot 3,15 + 2 \cdot 3,05 + 3,63) = 0,98$$

$$u^{(2)} = 1,87 + \frac{0,2}{6}(8,89 + 2 \cdot 8,5 + 2 \cdot 8,67 + 8,38) = 3,59$$

Результати розрахунків на п'яти кроках наведені в табл.2.

Таблиця 2 – Результати розрахунків методом Рунге-Кутта

<i>t</i>	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
<i>i</i>	0	0,36	0,98	1,79	2,76	3,86
<i>u</i>	0	1,87	3,59	5,25	6,94	8,70

Математичні задачі енергетики. Частина 2.

ЗАДАЧА 1.

Споживач отримує електроенергію з шин підстанції за схемою, наведеною на рис.12.

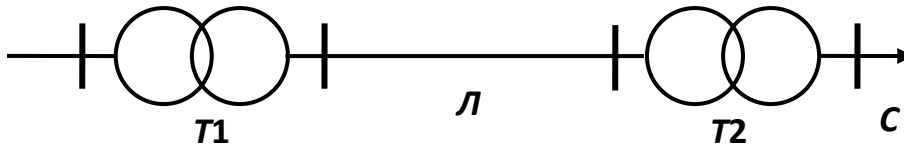


Рисунок 12 - схема отримання енергії споживачем.

Ймовірності аварійного відключення окремих елементів схеми становлять: для трансформатора T1 $q_{T1} = 0,003$; для лінії електропередачі $q_L = 0,01$; для трансформатора T2 $q_{T2} = 0,002$.

Розглядаючи роботу будь-якого елемента схеми незалежно від умов роботи інших елементів, необхідно визначити ймовірність припинення живлення споживача.

1. Порушення електропостачання споживача буде мати місце в тому випадку, якщо вийде з ладу хоча б один з послідовно з'єднаних елементів схеми рис.1. У даних умовах доцільно перейти до протилежної події, тобто надійної, безаварійної роботи споживача.

Визначимо ймовірності безаварійної роботи окремих елементів схеми:

трансформатора T1 $p_{T1} = 1 - q_{T1} = 0,997$,

лінії L $p_L = 1 - q_L = 0,99$,

трансформатора T2 $p_{T2} = 1 - q_{T2} = 0,998$.

Електропостачання споживача буде надійним у разі безаварійної роботи всіх елементів схеми, тобто має місце добуток подій.

$$p = p_{T1} \cdot p_L \cdot p_{T2} = 0,985.$$

Порушення електропостачання споживача є протилежною подією відносно його безаварійної роботи, тому ймовірність цієї події можна визначити як:

$$q = 1 - p = 0,015$$

2. У випадку безаварійної роботи лінії ($p_L = 1$) ймовірність порушення електропостачання споживача буде дорівнювати:

$$q = 1 - p_{T1} \cdot p_{T2} = 0,005.$$

Якщо безаварійно працює трансформатор T2, то ця ймовірність буде

дорівнювати

$$q = 1 - p_{T1} \cdot p_L = 0,013.$$

Аналіз отриманих результатів показує, що ймовірність припинення електропостачання у схемі з послідовним з'єднанням елементів в значній мірі визначається роботою найменш надійного елемента, в даному разі це лінія електропередачі.

ЗАДАЧА 2.

Статистична ймовірність пошкодження кожного кола двокової лінії електропередачі становить $P(A_1) = P(A_2) = 10^{-3}$. Лінія забезпечує 75% резервування живлення, тобто одне її коло може покрити 75% навантаження приймача. Розглядаючи пошкодження кіл лінії як незалежні події, обчислити ймовірність повної втрати живлення і 25% дефіциту потужності.

Приймач втратить живлення лише у випадку пошкодження обох кіл, ймовірність чого

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10^{-6}.$$

Ймовірність повного покриття навантаження

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,999999.$$

Дефіцит 25 % потужності матиме місце при виході з ладу будь-якої ланки електропередачі, ймовірність чого

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = P(A_1) \cdot (1 - P(A_2)) + (1 - P(A_1)) \cdot P(A_2) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) - 2P(A_1) \cdot P(A_2) = 10^{-3} + 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-6} = 1,998 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.

Трансформатор може працювати у двох режимах: нормальному та з перевантаженням. Нормальний режим використовують в 75% випадках роботи, з перевантаженням – в 25%. Статистична ймовірність пошкодження трансформатора протягом року при нормальному режимі дорівнює 0,001, а з перевантаженням – 0,08. Знайти ймовірність пошкодження трансформатора протягом року.

Для розв'язку використовуємо формулу повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

де $P(H_i)$ - ймовірність i -ї гіпотези; $P(A/H_i)$ - умовна ймовірність появи події A при i -й гіпотезі,

За гіпотези приймаємо: H_1 –робота з перевантаженням, H_2 – нормальна робота. Таким чином $P(H_1) = 0,25$; $P(H_2) = 0,75$. Через A позначимо подію – пошкодження трансформатора. За умовою $P(A/H_1) = 0,08$, $P(A/H_2) = 0,001$.

За формулою повної ймовірності визначимо

$$P(A) = 0,25 \cdot 0,08 + 0,75 \cdot 0,001 = 0,02075.$$

ЗАДАЧА 4.

Статистична ймовірність перенавантаження нелінійного обмежувача перенапруг в разі нормальної роботи мережі становить 0,002. При замиканні однієї фази мережі на землю, ймовірність перенавантаження зростає і становить 0,01. Як показали спостереження, робота з заземленою фазою мережі становить у середньому 200 годин за рік. Знайти повну ймовірність роботи обмежувача перенапруг з перенавантаженням (подія A).

Розглянемо дві гіпотези: нормальний режим роботи мережі і особливий, з заземленням фази. Ймовірність їх виникнення відповідно:

$$P(H_2) = 200/8760 = 0,0228; \quad P(H_1) = 1 - P(H_2) = 0,9772.$$

Згідно умови $P(A/H_2) = 0,01$ і $P(A/H_1) = 0,002$.

Таким чином, повна ймовірність пошкодження трансформатора $P(A) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) = 0,002 \cdot 0,9772 + 0,01 \cdot 0,0228 = 0,001205$.

ЗАДАЧА 5.

В енергосистемі в однакових умовах працює чотири однотипних генератора. Ймовірність пошкодження окремого генератора $q = 3 \cdot 10^{-3}$. Розглядаючи пошкодження агрегатів як випадкові рівноймовірні події, визначити ймовірність одночасного пошкодження всіх генераторів - P_4^4 і трьох генераторів - P_4^3 .

За формулою Бернуллі можна визначити ймовірність P_n^m , що в n дослідах подія A настає m ($0 \leq m \leq n$) разів:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

де $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ - число сполук з n елементів по m ;

p - ймовірність, що в кожному із випробувань подія A відбудеться;

$q = 1 - p$ - ймовірність протилежної події в кожному із випробувань (подія A не відбувається).

Користуючись формулою Бернуллі знаходимо шукані ймовірності:

$$P_4^4 = q^4 = (3 \cdot 10^{-2})^4 = 8,1 \cdot 10^{-7};$$

$$P_4^3 = 4!/(3!1!)q^3p^1 = 4 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^3 \cdot (0,97)^1 = 1,077 \cdot 10^{-4}.$$

ЗАДАЧА 6.

На електростанції в наближено однакових умовах працює сім однотипних агрегатів. Кожний з них має ймовірність аварійного виходу з ладу $q = 0,03$. Побудувати ряд розподілу ймовірностей числа агрегатів, що вийшли з ладу.

З теоретичних міркувань можна вважати, що кількість агрегатів які вийшли з ладу підпорядковується біноміальному закону.

$$\text{Відповідно до формули Бернуллі } P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

ймовірність того, що не вийде з ладу жоден генератор ($m=0$)

$$P_7^0 = 0,97^7 = 0,808.$$

Ймовірність виходу з ладу одного генератора

$$P_7^1 = \frac{7!}{1!6!} 0,97^6 0,03^1 = 0,175.$$

Результати наступних розрахунків наведені в таблиці.

m	0	1	2	3	4	5	6	7
P_5^m	0,808	0,175	0,016	0,000837	0,0000259	$4,87 \cdot 10^{-7}$	$4,95 \cdot 10^{-9}$	$2,12 \cdot 10^{-11}$

ЗАДАЧА 7.

Очікуваний дефіцит потужності в енергосистемі (dP) становить 16 МВт. Визначити ймовірність того, що значення дефіциту потужності не відхилиться від очікуваного більш ніж на 5% при умові, що величина дефіциту потужності підпорядковується нормальному закону з дисперсією 8 МВт².

Визначаємо середньоквадратичне відхилення дефіциту потужності

$$\sigma = \sqrt{8} = 2,83 \text{ МВт.}$$

Таким чином, згідно формули ймовірність влучення випадкової величини (розподіленої за нормальним законом) в інтервал $(m_x \pm l)$:

$$P(|x - m_x| < l) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1,$$

отримаємо

$$P(16 - 0,05 \cdot 16 < dP < 16 + 0,05 \cdot 16) = 2\Phi\left(\frac{0,8}{2,83}\right) - 1 = 2 \cdot 0,61 - 1 = 0,22$$

ЗАДАЧА 8.

Математичне сподівання частоти в енергосистемі дорівнює 49 Гц. Припускаючи, що середньоквадратичне відхилення частоти дорівнює 0,2 Гц (закон розподілу частоти нормальний), необхідно визначити ймовірність того, що частота в енергосистемі буде змінюватися в межах від 48,5 до 50 Гц.

Визначаємо шукану ймовірність згідно формули для ймовірності влучення випадкової величини X , розподіленої за нормальним законом, в інтервал від α до β

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right),$$

В нашому випадку:

$$\begin{aligned} P(48.5 \leq x \leq 50) &= \Phi\left(\frac{50 - 49}{2}\right) - \Phi\left(\frac{48.5 - 49}{2}\right) = \Phi(0,5) - \Phi(-0,25) = \\ &= 0,6915 - (1 - 0,5987) = 0,29 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 9.

Згідно даних 600 вимірів напруги на шинах підстанції побудований наступний статистичний ряд відхилення напруги ($V\%$) від номінального значення:

$V_i[\%]$	-4;-3	-3;-2	-2;-1	-1;0	0;1	1;2	2;3	3;4
m_i	69	75	78	81	72	75	84	66
P_i^*	0. 115	0. 125	0. 130	0. 135	0. 120	0. 125	0. 140	0. 110

Необхідно побудувати статистичну функцію розподілу і гістограму відхилення напруги.

Згідно виразів:

$$F^*(x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} P_i; \quad f^*(x) = \frac{P^*}{\Delta x}$$

визначаємо значення статистичної функції і щільності розподілу.

$V_i[\%]$	-4;-3	-3;-2	-2;-1	-1;0	0;1	1;2	2;3	3;4
$F^*(V)$	0.115	0.240	0.370	0.505	0.625	0.750	0.89	1.0
$f^*(V)$	0.115	0.125	0.130	0.135	0.12	0.125	0.14	0.11

На підставі результатів будуємо графік $F^*(V)$ і гістограму $f^*(V)$ (рис. 13).

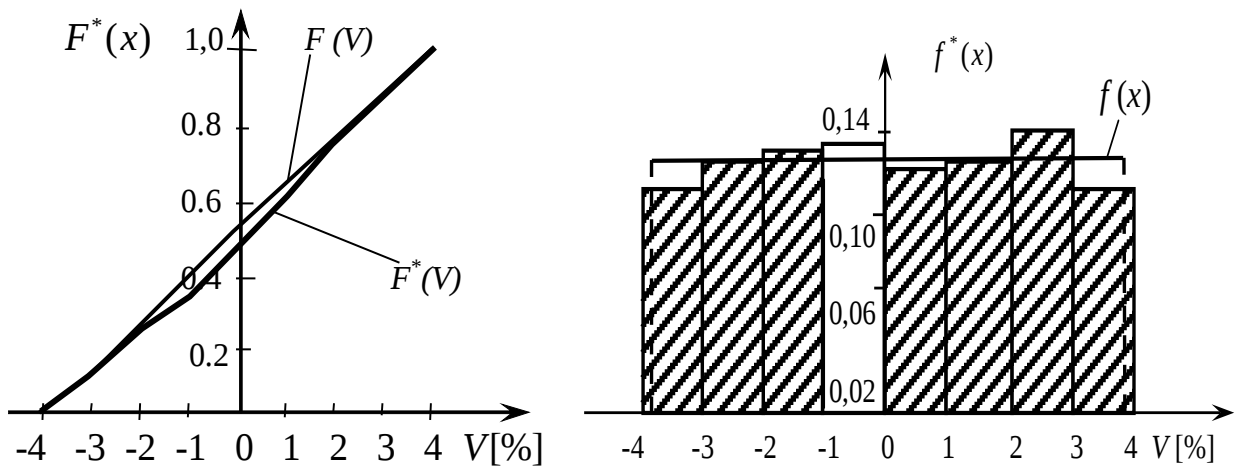


Рисунок 13 - Статистична функція розподілу і гістограма відхилення напруги.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бурбело М.Й. Математичні задачі електроенергетики. Математичне моделювання електропостачальних систем: навч. посібник / М.Й.Бурбело. - Вінниця: ВНТУ, 2016. - 185 с.
2. Перхач В.С. Математичні задачі енергетики. – Львів.: Вища шк. Вид. при Львів. Ун-ті, 1989. – 464 с.
3. Кириленко О.В. Математичне моделювання в електроенергетиці: Підручник / О.В. Кириленко, М.С. Сегеда, О.Ф. Буткевич, Т.А. Мазур. - Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2010. - 608 с.
4. Мельник В.П. Математичні моделі електроенергетичних систем. – К.: ІСДО, 1993. – 336 с.
5. Паненко О.М. Застосування теорії ймовірності у задачах електроенергетики. Метод. вказівки до практичних занять. К.: НТУУ "КПІ", 2006. – 48 с.