

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»

Навчально-науковий фізико-технічний інститут
Кафедра математичного моделювання та аналізу даних

«На правах рукопису»

УДК 519.4

«До захисту допущено»

В.о. завідувача кафедри

_____ Іван ТЕРЕЩЕНКО

«__» _____ 2025 р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за освітньо-професійною програмою

**«Математичні методи моделювання, розпізнавання образів та
комп'ютерного зору»**

зі спеціальності: 113 Прикладна математика

на тему: **«Асимптотичний розподіл індексу складності
випадкового рекурсивного дерева»**

Виконав:

студент IV курсу, групи ФІ-12

Сачук Артем Олегович _____

Керівник:

доктор технічних наук, професор

Шелестов Андрій Юрійович _____

Консультант:

кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Ніщенко Ірина Іванівна _____

Рецензент:

кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий

співробітник відділу теорії випадкових процесів

Інституту математики НАН України.

Рябов Георгій Валентинович _____

Засвідчую, що у цій дипломній
роботі немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студент _____

Київ — 2025

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»

Навчально-науковий фізико-технічний інститут
Кафедра математичного моделювання та аналізу даних

Рівень вищої освіти — перший (бакалаврський)
Спеціальність — 113 Прикладна математика,
ОПП «Математичні методи моделювання, розпізнавання образів та
комп'ютерного зору»

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. Завідувача кафедри

_____ Іван ТЕРЕЩЕНКО

«__» _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу

Студент: Сачук Артем Олегович

1. Тема роботи: *«Асимптотичний розподіл індексу складності випадкового рекурсивного дерева»*, науковий керівник дисертації: доктор технічних наук, професор Шелестов Андрій Юрійович,

затверджені наказом по університету №1761-с від «26» травня 2025 р.

2. Термін подання студентом роботи: «__» _____ 2025 р.

3. Об'єкт дослідження: *Випадкове рекурсивне дерево*

4. Предмет дослідження: *Експоненційний індекс складності*

5. Перелік завдань:

1) *Розглянути індекси складності випадкового рекурсивного дерева*

2) *Узагальнити відомі твердження про експоненційний індекс складності*

3) *Довести обмеженість моментів*

4) *Розглянути граничну випадкову величину та довести існування її щільності*

5) *Апроксимувати щільність розподілу граничної випадкової величини*

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу:
Презентація доповіді

7. Орієнтовний перелік публікацій: *XXIII Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики»*

8. Дата видачі завдання: 10 вересня 2024 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання	Примітка
1	Узгодження теми роботи із науковим керівником	01-15 вересня 2024 р.	Виконано
2	Огляд опублікованих джерел за тематикою дослідження	Вересень-жовтень 2024 р.	Виконано
3	Узагальнення відомих тверджень про експоненційний індекс складності	Листопад-грудень 2024 р.	Виконано
4	Доведення обмеженості моментів	Січень 2025 р.	Виконано
5	Доведення існування щільності граничної випадкової величини	Лютий-березень 2025 р.	Виконано
6	Апроксимація щільності	Квітень-травень 2025 р.	Виконано

Студент _____ Артем САЧУК

Керівник _____ Андрій ШЕЛЕСТОВ

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота містить: 41 сторінку, 5 рисунків, 0 таблиць, 10 джерел.

Об'єктом дослідження є випадкові рекурсивні дерева. Предметом дослідження є експоненційний індекс складності випадкового рекурсивного дерева.

Метою дослідження є встановлення асимптотичних властивостей експоненційного індексу складності, коли кількість вершин дерева прямує до нескінченності.

В результаті проведеного дослідження було доведено обмеженість моментів нормованого індексу складності. Досліджено властивості експоненційного індексу складності, коли кількість вершин дерева прямує до нескінченності, доведено існування щільності граничної випадкової величини. Встановлено, що рівняння, якому задовольняє щільність, має єдиний роз'язок.

ВИПАДКОВЕ РЕКУРСИВНЕ ДЕРЕВО, ІНДЕКС СКЛАДНОСТІ
ДЕРЕВА, ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ІНДЕКСУ СКЛАДНОСТІ

ABSTRACT

The qualification work contains: 41 pages, 5 figures, 0 tables, 10 sources.

The object of the study is random recursive trees. The subject of the study is the exponential complexity index of a random recursive tree.

The purpose of the study is to establish the asymptotic properties of the exponential complexity index when the number of tree vertices tends to infinity.

As a result of the study, boundedness of moments of the normalized complexity index was proved. The properties of the exponential complexity index were investigated when the number of tree vertices tends to infinity, the existence of the density of a limiting random variable was proven. It was established that the equation satisfied by the density has a unique solution.

RANDOM RECURSIVE TREE, TREE COMPLEXITY INDEX, LIMIT
DISTRIBUTION OF COMPLEXITY INDEX

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень, скорочень і термінів	7
Вступ.....	8
1 Випадкові рекурсивні дерева. Алгоритми побудови. Міри складності .	10
1.1 Випадкове рекурсивне дерево	10
1.1.1 Метод n -коалесцентів Кінгмана.....	11
1.1.2 Класичний метод побудови	14
1.2 Міри складності	14
1.2.1 Загальна довжина шляху	15
1.2.2 Профайл дерева	17
1.2.3 Експоненційний індекс складності	18
Висновки до розділу 1	19
2 Експоненційний індекс складності випадкового рекурсивного дерева .	20
2.1 Означення експоненційного індексу складності	20
2.2 Моменти індексу складності	22
2.3 Властивості граничної випадкової величини $X(\lambda)$	29
2.4 Існування щільності розподілу $X(\lambda)$	31
2.5 Умова Карлемана	35
2.6 Відновлення щільності	38
Висновки до розділу 2	39
Висновки	40
Перелік посилань	41

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

$G(E, V)$ — граф з множиною вершин V та множиною ребер E

T_n — дерево на n вершинах

$d(u, v)$ — відстань від вершини u до вершини v

$W(T)$ — індекс Вінера випадкового дерева T

$\Gamma(n)$ — Гамма функція

$\mathcal{Y}_{n,r}$ — кількість вершин серед n вершин графа, які знаходяться на відстані r від кореня

$\mathcal{E}_n(\lambda)$ — індекс складності рекурсивного дерева на n вершинах

ВСТУП

Актуальність дослідження. У сучасній теорії алгоритмів, випадкових структур та аналізу обчислювальної складності важливе місце займає дослідження індексів, що кількісно характеризують структурні властивості стохастичних об'єктів. Одним із таких показників є експоненційний індекс складності та характеризує глибину та розгалудженість структури випадкового дерева.

Метою дослідження є встановлення властивостей експоненційного індексу складності випадкового рекурсивного дерева. Для досягнення мети необхідно розв'язати **задачу дослідження**, яка полягає у встановленні асимптотичних властивостей експоненційного індексу складності випадкового рекурсивного дерева, коли кількість вершин прямує до нескінченності. Для розв'язання задачі необхідно вирішити такі завдання:

- 1) провести огляд опублікованих джерел за тематикою дослідження;
- 2) довести обмеженість моментів нормованого індексу складності;
- 3) вивчити властивості граничної випадкової величини, коли кількість вершин дерева прямує до нескінченності, як розв'язку певного рівняння самоподібності;
- 4) дослідити існування щільності розподілу граничної випадкової величини;
- 5) вивести рівняння, якому задовільняє щільність, і з'ясувати, чи розв'язок такого рівняння є єдиний.

Об'єктом дослідження є випадкові рекурсивні дерева.

Предметом дослідження є індекс складності випадкового рекурсивного дерева.

При розв'язанні поставлених завдань використовувались такі *методи дослідження*: методи теорії графів, теорії ймовірностей, комбінаторного аналізу, комп'ютерного та статистичного моделювання.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у отриманні нових результатів щодо асимптотичного розподілу експоненційного індексу складності випадкового рекурсивного дерева.

Практичне значення результатів полягає у можливості їх застосування до аналізу алгоритмів, які базуються на випадкових рекурсивних деревах.

Апробація результатів та публікації. Частина роботи була представлена на XXIII Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики».

1 ВИПАДКОВІ РЕКУРСИВНІ ДЕРЕВА. АЛГОРИТМИ ПОБУДОВИ. МІРИ СКЛАДНОСТІ

В цьому розділі представлено огляд літератури за темою дослідження: викладено необхідні теоретичні відомості з теорії випадкових графів, описано різні алгоритми побудови випадкових рекурсивних дерев, розглянуто різні існуючі міри складності дерев, а саме загальна довжина шляхів та експоненційний індекс.

1.1 Випадкове рекурсивне дерево

Перше використання випадкових рекурсивних дерев датується 1974 - м роком і стосується моделювання розповсюдження епідемії. Потім вони використовувалися в багатьох сферах досліджень від аналізу генеалогічних дерев у античних та середньовічних текстах до алгоритмів пошуку. В 1986-му році було доведено взаємно однозначну відповідність між рекурсивними та бінарними деревами, що дозволило детальніше вивчити бінарні дерева, які є фундаментальною структурою даних в теорії алгоритмів [10].

Нині випадкові рекурсивні дерева широко застосовуються в алгоритмах машинного навчання та аналізу даних. Наприклад, у навчанні з підкріпленням (reinforcement learning) та евристичних пошуках (наприклад, алгоритми A^* , Monte Carlo Tree Search) структура дерева пошуку часто наближається до структури випадкового рекурсивного дерева, коли вибір наступного вузла для розгортання є випадковим або залежить від імовірнісної евристики [1].

Також випадкові дерева та ліси застосовуються в задачах сегментації супутникових знімків [7].

Означення 1.1. Деревом називається зв'язний ациклічний граф $T = (V, E)$, де V є множиною вершин, а E – множиною ребер.

Означення 1.2. [10] Дерево з n вертикально з'єднаними пронумерованими вершинами називається *рекурсивним деревом*, якщо вершина під номером 1 розглядається як корінь, а для будь-якого k , $2 \leq k \leq n$ номери вертикально з'єднаних вершин від кореня до вершини з номером k утворюють зростаючу послідовність.

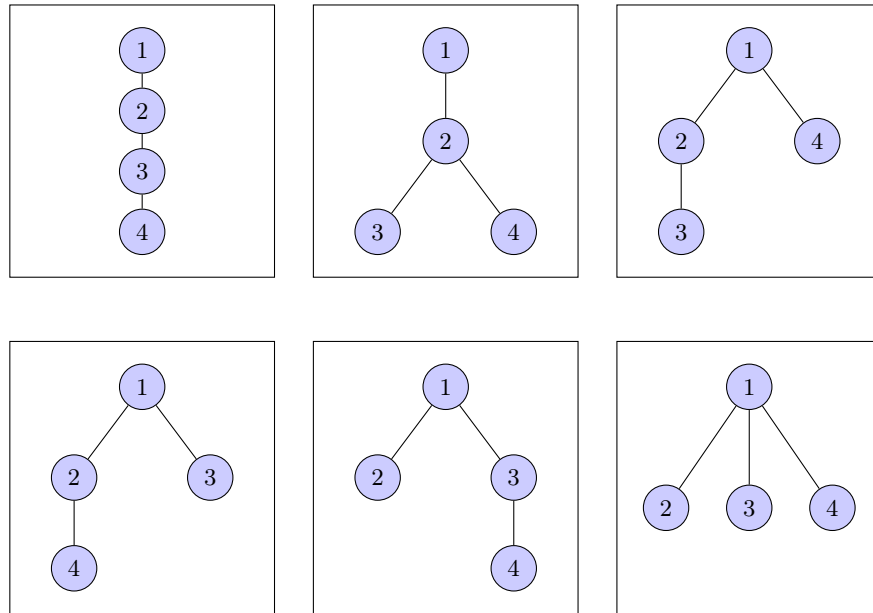


Рисунок 1.1 – Всі рекурсивні дерева для $n=4$

Розглянемо два поширених методи побудови випадкового рекурсивного дерева.

1.1.1 Метод n -коалесцентів Кінгмана

Особливість даного методу побудови полягає в тому, що з лісу, який складається з n одноточкових дерев, за певною процедурою випадкового склеювання дерев отримують фінальне дерево на n вершинах. Опишемо даний метод, базуючись на викладках зі статті [5].

Введемо наступні позначення

- F_j – ліс з j дерев на n вершинах, $F_j = \{T_1^{(j)}, \dots, T_j^{(j)}\}$;
- $T_a^{(j)}, T_b^{(j)}$ – два дерева, які об'єднуються на j -тому кроці;

- $r(T)$ – корінь дерева T ;
- ξ_j – випадкова змінна, що визначає напрямок ребра.

Тепер розглянемо покроково даний метод побудови.

1) Почнемо з лісу $F_n = \{T_1^{(n)}, \dots, T_n^{(n)}\}$, в якому кожна вершина є деревом

2) Для кожного $j = n, n-1, \dots, 3, 2$

а) Випадково рівноймовірно вибирається пара дерев $\{T_a^{(j)}, T_b^{(j)}\}$, $1 \leq a < b \leq j$.

б) Генеруємо випадкову величину $\xi_j \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$

– якщо $\xi_j = 1$, то додаємо ребро e_{j-1} , напрямлене від $T_b^{(j)}$ до $T_a^{(j)}$

– Інакше – ребро e_{j-1} спрямовується від $T_a^{(j)}$ до $T_b^{(j)}$

F_{j-1} складається з нового дерева $T_{ab} = T_a^{(j)} + T_b^{(j)}$, отриманого злиттям дерев $T_a^{(j)}; T_b^{(j)}$, та решти $(j-1)$ дерев лісу F_j .

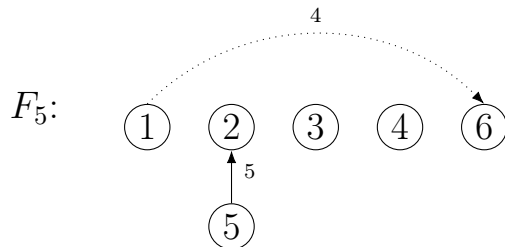
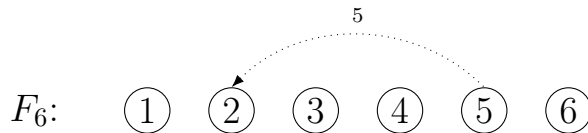
Повторюємо ці дії, поки не отримаємо фінальне дерево $F_1 = T^{(n)}$

Лишилося перенумерувати вершини:

а) Кореню дерева $T^{(n)}$ присвоюємо номер 1;

б) Для кожного кроку $j = n-1, \dots, 1$, вершина, яка приєднувалася як «дитина», отримує номер $j+1$.

На рисунку проілюстровано описаний метод



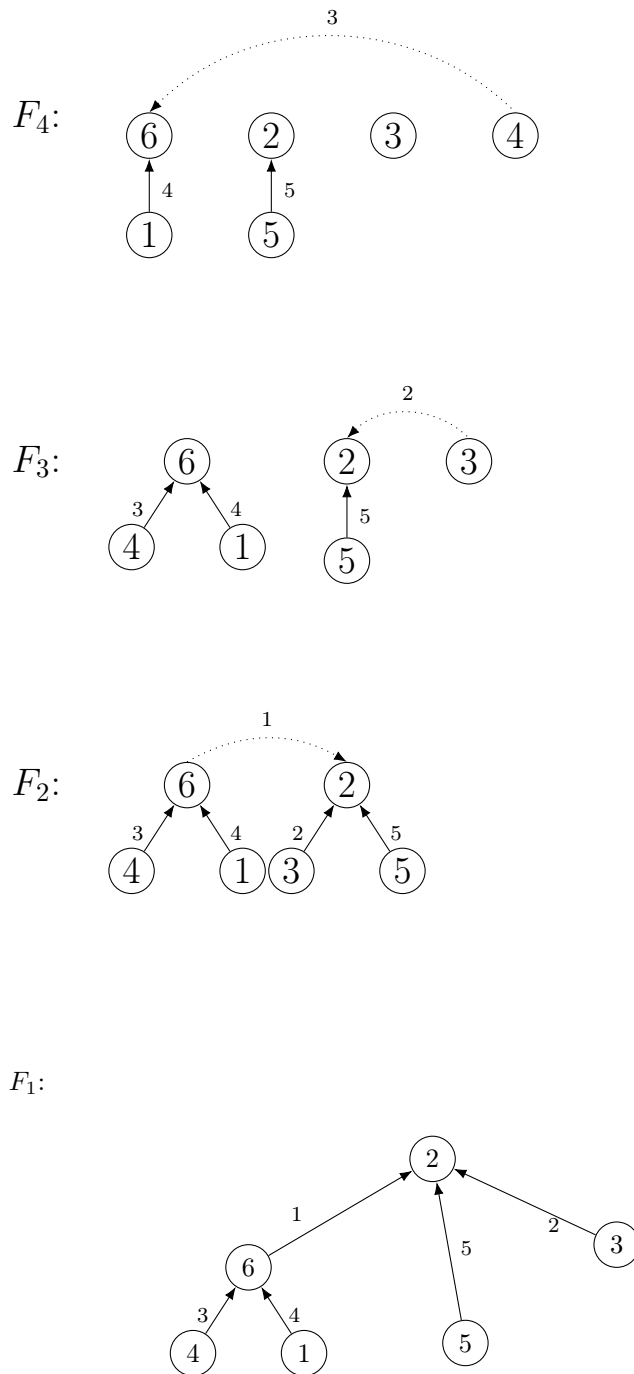


Рисунок 1.2 – Приклад побудови методом n -коалесцентів Кінгмана

Основними перевагами такої побудови є простота моделювання, а також спрощення аналізу степенів, глибини та інших характеристик вершин у випадковому дереві.

1.1.2 Класичний метод побудови

Наведемо класичний алгоритм побудови випадкового рекурсивного дерева, який був описаний в статті [10]. Даний метод побудови є найбільш розповсюдженим. Його і буде використано в цьому дослідженні.

- а) Починаємо з однієї вершини – кореня, з номером 1;
- б) Для кожного $k = 2, 3, \dots, n$:
 - i. Створюємо нову вершину з номером k ;
 - ii. Обираємо одну з уже наявних $k - 1$ вершин з однаковою ймовірністю $\frac{1}{k-1}$;
 - iii. З'єднуємо нову вершину з випадково обраною ребром;
- в) Отримуємо випадкове рекурсивне дерево на n вершинах.

1.2 Міри складності

Вивчення структури випадкових рекурсивних дерев є ключовим для розуміння властивостей алгоритмів та методів, що на них базуються. Для цього різні дослідники вводили різні міри. Як приклад такої міри варто згадати індекс Вінера, який в 1947-му році запропонував австро-американський хімік Гаррі Вінер, для позначення суми відстаней між кожними двома атомами молекули карбону. Згодом було доведено існування кореляції даного індексу з різними властивостями молекул речовин, таких наприклад, як точка кипіння [8]. Пізніше різні варіанти даного індексу були запропоновані та досліджені в теорії графів.

Для випадкових рекурсивних дерев найпоширенішими мірами складності є загальна довжина шляху (*англ. Total path length*), висота дерева, експоненційний індекс складності. Висота дерева є доволі простою його характеристикою і не в повній мірі описує його структуру. Тому зосередьмося на двох інших, а також важливій характеристиці дерева його профайлом.

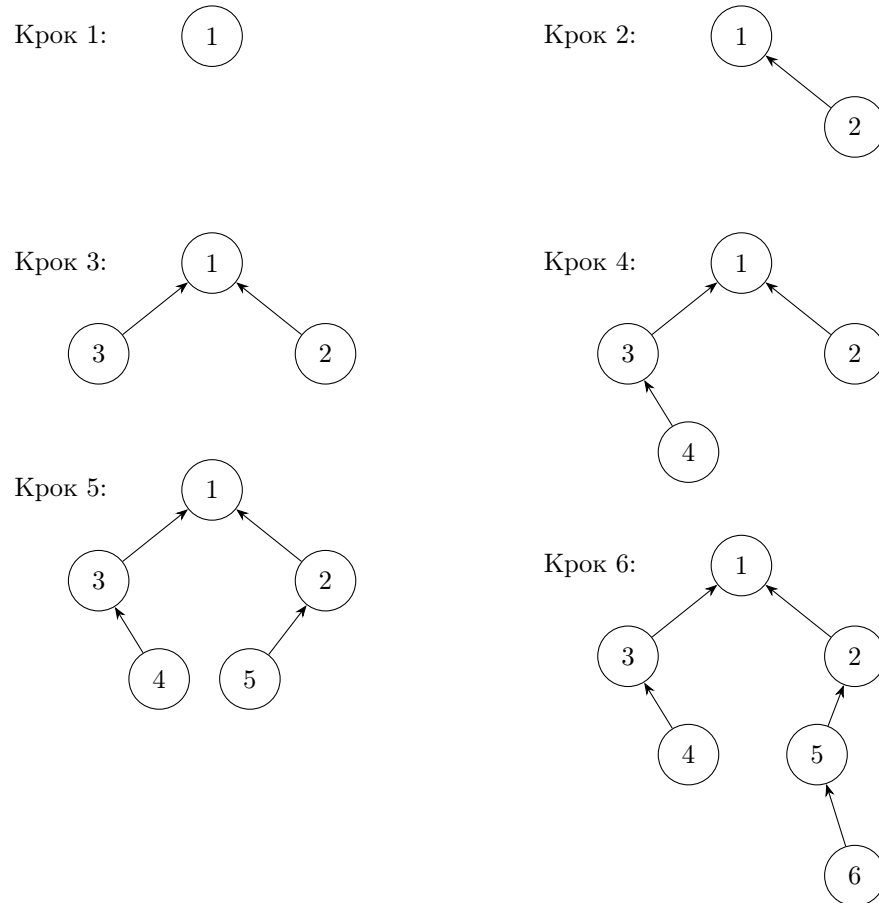


Рисунок 1.3 – Приклад побудови рекурсивного дерева класичним методом

1.2.1 Загальна довжина шляху

Дану міру складності досліджували багато науковців. Найбільш детальний опис характеристик загальної довжини шляху викладений в статті [2].

Означення 1.3. [2] Загальною довжиною шляху випадкового рекурсивного дерева T_n будемо називати наступну величину:

$$L_n = \sum_{k=1}^n D_k, \quad (1.1)$$

де D_k – довжина шляху від кореня до вершини k .

Для даної випадкової величини було доведено багато важливих тверджень, які описують її поведінку. У [2] було показано, що

$$\mu_n := M(L_n) = \sum_{i=1}^{n-1} H_i = n(H_n - 1), \quad (1.2)$$

де $H_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}$ – k -те гармонійне число.

Теорема 1.1. [2] *Визначимо нормалізовану випадкову величину:*

$$W_n := \frac{L_n - \mu_n}{n} \quad (1.3)$$

- а) існує випадкова величина W така, що $W_n \xrightarrow{a.s.} W$ при $n \rightarrow \infty$
 б) для будь-якого дійсного $p > 0$:

$$W_n \xrightarrow{\mathcal{L}_p} W \quad (1.4)$$

- в) для кожного цілого $p \geq 1$, існує границя:

$$\nu(p) := \lim_{n \rightarrow \infty} M(W_n^p) = M(W^p) < \infty \quad (1.5)$$

і $\nu(p)$ задовольняє рекурентне співвідношення :

$$\nu(p) = \int_0^1 \sum_{h,i,j,l} \binom{p}{h,i,j,l} x^{h+i} \nu(i) (1-x)^j \nu(j) (-\mathcal{E}(x))^l dx, \quad (1.6)$$

де $\mathcal{E}(x) := -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$ – це функція бінарної ентропії, а

$$\binom{p}{h,i,j,l} := \frac{p!}{h! i! j! l!},$$

причому $h + i + j + l = p$.

Для граничної випадкової величини W в роботі [2] отримано наступну тотожність.

Твердження 1.1.

$$W \stackrel{d}{=} U(1 + W) + (1 - U)W^* - \mathcal{E}(U), \quad (1.7)$$

де $U \sim Unif(0,1)$, $W^* \stackrel{d}{=} W$, $\mathcal{E}(x)$ – бінарна ентропія.

Також було встановлено, що:

$$M(W) = 0, Var(W) = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Загальна довжина шляху є достатньо вивченою мірою складності, що робить її зручною для використання в практичних цілях.

1.2.2 Профайл дерева

Означення 1.4. [3] Нехай T_n – випадкове рекурсивне дерево з n вершинами. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}_0$, профайл дерева на рівні k визначається як кількість вершин, які знаходяться на відстані k до кореня:

$$\mathcal{Y}_{n,k} = \#\{v \in T_n : h(v) = k\} \quad (1.8)$$

де $h(v)$ – відстань від кореня до вершини v .

Зрозуміло, що

- а) $\mathcal{Y}_{n,0} = 1$
- б) $\sum_{k=0}^{H_n} \mathcal{Y}_{n,k} = n$, де H_n – висота дерева.

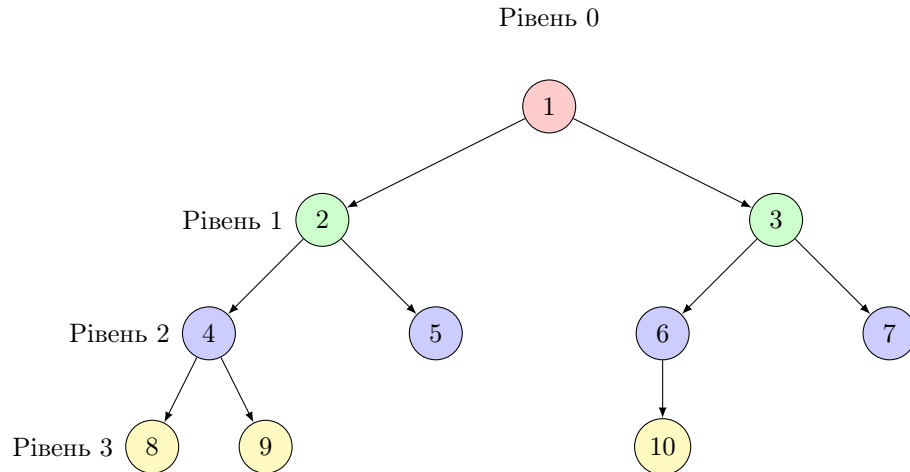


Рисунок 1.4 – Візуалізація профайлу дерева

- **Рівень 0:** $\mathcal{Y}_{10,0} = 1$
- **Рівень 1:** $\mathcal{Y}_{10,1} = 2$
- **Рівень 2:** $\mathcal{Y}_{10,2} = 4$
- **Рівень 3:** $\mathcal{Y}_{10,3} = 3$

Профайл дерева є широко застосовним в прикладному аналізі дерев. Наприклад, для опису навантаження на рівнях у мережевих структурах [3].

1.2.3 Експоненційний індекс складності

Нехай $T_n = (V, E)$ – випадкове дерево на n вершинах, де V є множиною вершин, а E – множиною ребер.

Означення 1.5. [9] Експоненційним індексом складності називається величина

$$\mathcal{E}(T_n) = \sum_{(i,j) \in V \times V} e^{-d(i,j)} \quad (1.9)$$

Для даного індексу складності в статті [9] було доведено ряд важливих теорем та тверджень. Наведемо декілька з них.

Твердження 1.2. [9]

$$M(\mathcal{E}(T_n)) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{e^{-1}}{k}\right). \quad (1.10)$$

Твердження 1.3. [9] *Послідовність випадкових величин*

$$\left\{ \frac{\mathcal{E}(T_{n+1})}{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-1}}{k}\right)} \right\}_{n \geq 1} \quad (1.11)$$

утворює обмежений в $\mathcal{L}_2$ мартингал відносно потоку σ -алгебри $\{\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, T_2, \dots, T_n)\}_{n \geq 1}$.

Узагальнення даного індексу складності і буде досліджуватися в даній роботі.

Висновки до розділу 1

У даному розділі було зроблено огляд основних понять і результатів, пов'язаних із випадковими рекурсивними деревами, що є важливим об'єктом дослідження в теорії випадкових графів та алгоритмах. Розглянуто історичний контекст виникнення цих структур, приклади їх застосування в сучасних задачах аналізу даних, машинного навчання та обробки зображень.

Окрему увагу приділено різним методам побудови випадкових рекурсивних дерев, зокрема n -коалесцентів Кінгмана як одному з базових алгоритмів. Також описано основні підходи до аналізу складності таких дерев, серед яких важливе місце займають загальна довжина шляхів та експоненційний індекс складності. Другий через свою недостатню вивченість і стане предметом подальшого дослідження.

2 ЕКСПОНЕНЦІЙНИЙ ІНДЕКС СКЛАДНОСТІ ВИПАДКОВОГО РЕКУРСИВНОГО ДЕРЕВА

У цьому розділі буде наведено узагальнене означення експоненційного індексу складності випадкового рекурсивного дерева. Будуть сформульовані та доведені його властивості, зокрема – обмеженість в $\mathcal{L}_p$ для довільного $p \geq 1$ та збіжність нормованого індексу складності майже напевне та в $\mathcal{L}_p$. Виведені рівняння для граничної випадкової величини, досліджено його властивості та доведено існування щільності розподілу цієї випадкової величини.

2.1 Означення експоненційного індексу складності

Експоненційним індексом складності випадкового дерева T_n , побудоване класичним методом, будемо називати величину

$$\mathcal{E}_n(\lambda) = \sum_{r=1}^n e^{-\lambda d(1,r)}, \quad (2.1)$$

де $d(1,r)$ позначає кількість ребер в шляху від кореня (вершини 1) до вершини з номером r , а λ є довільним додатним дійсним числом.

Цей індекс складності є узагальненням індексу складності, запропонованого у статті [9].

Зауважимо, що індекс складності $\mathcal{E}_n(\lambda)$ можна подати у вигляді

$$\mathcal{E}_n(\lambda) = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda k} \mathcal{Y}_{n,k}, \quad (2.2)$$

де $\mathcal{Y}_{n,k}$ є кількістю вершин у дереві T_n , які знаходяться на відстані k від кореня. З даного представлення випливає, що $\mathcal{E}_n(\lambda)$ є перетворенням Лапласа для профайлу $(\mathcal{Y}_{n,k})_{k \geq 0}$ дерева T_n .

Встановимо властивості індексу складності $\mathcal{E}_n(\lambda)$.

Твердження 2.1.

$$M(\mathcal{E}_n(\lambda)) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{k}\right). \quad (2.3)$$

Доведення. Для початку зауважимо, що

$$\mathcal{Y}_{n+1,r} = \mathcal{Y}_{n,r} + \mathbb{1}(d(1, \xi_{n+1}) = r)$$

де $\{\xi_{n+1}\}_{n \geq 1}$ є послідовністю незалежних випадкових величин таких, що ξ_k має рівномірний розподіл на множині $\{1, 2, \dots, k-1\}$ і вказує номер вершини, з якою з'єдналася ребром k -та вершина.

Тоді з (2.2) випливає наступне співвідношення для $\mathcal{E}_{n+1}(\lambda)$

$$\mathcal{E}_{n+1}(\lambda) = \mathcal{E}_n(\lambda) + e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda r} \mathbb{1}(d(1, \xi_{n+1}) = r+1), \quad (2.4)$$

Тепер знайдемо умовне математичне сподівання $\mathcal{E}_{n+1}(\lambda)$ відносно σ -алгебри $\mathcal{F}_n$, породженої випадковими величинами $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ до моменту n :

$$\begin{aligned} M(\mathcal{E}_{n+1}(\lambda) | \mathcal{F}_n) &= M(\mathcal{E}_n(\lambda) | \mathcal{F}_n) + e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda r} P(d(1, \xi_{n+1}) = r+1 | \mathcal{F}_n) = \\ &= \mathcal{E}_n(\lambda) + \frac{e^{-\lambda}}{n} \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda r} \mathcal{Y}_{n,r} = \mathcal{E}_n(\lambda) + \frac{e^{-\lambda}}{n} \mathcal{E}_n(\lambda) = \left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{n}\right) \mathcal{E}_n(\lambda). \end{aligned}$$

Тепер візьмемо математичне сподівання ліворуч та праворуч.

$$M(\mathcal{E}_{n+1}(\lambda)) = M(M(\mathcal{E}_{n+1}(\lambda) | \mathcal{F}_n)) = \left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{n}\right) M(\mathcal{E}_n(\lambda)),$$

звідки випливає

$$M(\mathcal{E}_{n+1}(\lambda)) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{k}\right) M(\mathcal{E}_1(\lambda)).$$

Враховуючи, що $\mathcal{E}_1(\lambda) = 1$, отримуємо твердження леми.

□

Наведемо лему, частковий випадок якої було доведено в статті [9].

Лема 2.1. *Послідовність*

$$\left\{ \frac{\mathcal{E}_n(\lambda)}{\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{k}\right)} \right\}_{n \geq 1} \quad (2.5)$$

утворює мартингал відносно послідовності σ -алгебр $\{\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, T_2, \dots, T_n)\}_{n \geq 1}$.

Доведення. Послідовність випадкових величин $(\eta_n)_{n \geq 1}$ утворює мартингал відносно потоку σ -алгебр $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$, якщо $M(\eta_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \eta_n$. Доведемо виконання цієї умови для (2.5)

$$M \left(\frac{\mathcal{E}_{n+1}(\lambda)}{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{k}\right)} \middle| \mathcal{F}_n \right) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{k}\right)} \left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{n}\right) \mathcal{E}_n(\lambda) = \frac{\mathcal{E}_n(\lambda)}{\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{k}\right)}.$$

□

2.2 Моменти індексу складності

Зі співвідношення (2.4) випливає, що для довільного $m \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+1}^m(\lambda) &= (\mathcal{E}_n(\lambda) + e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} e^{-r\lambda} \mathbb{1}(d(1, \xi_{n+1}) = r+1))^m = \\ &= \sum_{j=0}^m C_m^j \mathcal{E}_n^{m-j}(\lambda) e^{-\lambda j} \sum_{r=0}^{\infty} e^{-j\lambda r} \mathbb{1}(d(1, \xi_{n+1}) = r+1) = \\ &= \mathcal{E}_n^m(\lambda) + m e^{-\lambda} \mathcal{E}_n^{m-1}(\lambda) \sum_{r=0}^{\infty} e^{-r\lambda} \mathbb{1}(d(1, \xi_{n+1}) = r+1) + \sum_{j=2}^m e^{-\lambda j} C_m^j \mathcal{E}_n^{m-j}(\lambda), \end{aligned}$$

а тоді, враховуючи вимірність випадкової величини $\mathcal{E}_n^j(\lambda)$ відносно σ -алгебри $\mathcal{F}_n$, отримуємо

$$\begin{aligned} M(\mathcal{E}_{n+1}^m(\lambda)|\mathcal{F}_n) &= \mathcal{E}_n^m(\lambda) + me^{-\lambda}\mathcal{E}_n^{m-1}(\lambda)\frac{\mathcal{E}_n(\lambda)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^m C_m^j e^{-\lambda j}\mathcal{E}_n^{m-j}(\lambda)\mathcal{E}_n(j\lambda) = \\ &= \left(1 + \frac{me^{-\lambda}}{n}\right)\mathcal{E}_n^m(\lambda) + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^m C_m^j e^{-\lambda j}\mathcal{E}_n^{m-j}(\lambda)\mathcal{E}_n(j\lambda). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отже математичне сподівання $M(\mathcal{E}_{n+1}^m(\lambda))$ задовольняє наступному рекурентному рівнянню

$$M(\mathcal{E}_{n+1}^m(\lambda)) = \left(1 + \frac{me^{-\lambda}}{n}\right)M(\mathcal{E}_n^m(\lambda)) + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^m C_m^j e^{-j\lambda}M(\mathcal{E}_n^{m-j}(\lambda)\mathcal{E}_n(j\lambda)). \quad (2.7)$$

Загальний розв'язок рекурентного рівняння $a_{n+1} = \alpha_n a_n + \beta_n$ згідно з початковою умовою $a_1 = 1[3]$ має вигляд

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \alpha_k + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \prod_{j=k+1}^{n-1} \alpha_j. \quad (2.8)$$

Поклавши

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 1 + \frac{me^{-\lambda}}{n}, \\ \beta_n &= \frac{1}{n}\sum_{j=2}^m C_m^j e^{-j\lambda}M(\mathcal{E}_n^{m-j}(\lambda)\mathcal{E}_n(j\lambda)), \end{aligned}$$

знаходимо, що розв'язок (2.7) має вигляд

$$M(\mathcal{E}_{n+1}^m(\lambda)) = R_n(me^{-\lambda}) \times \left(1 + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^m C_m^j e^{-\lambda j} \frac{M(\mathcal{E}_k^{m-j}(\lambda)\mathcal{E}_k(j\lambda))}{kR_{k+1}(me^{-\lambda})}\right), \quad (2.9)$$

де $R_n(x) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{x}{i}\right)$, $M(\mathcal{E}_n(\lambda)) = R_n(e^{-\lambda})$.

Звідси випливає, що для моментів випадкової величини $X_n(\lambda) = \frac{\mathcal{E}_n(\lambda)}{M(\mathcal{E}_n(\lambda))} = \frac{\mathcal{E}_n(\lambda)}{R_n(e^{-\lambda})}$ має місце така рівність

$$M(X_n^m(\lambda)) = \frac{R_n(me^{-\lambda})}{(R_n(e^{-\lambda}))^m} \times \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=2}^m C_m^j e^{-\lambda j} \frac{M(\mathcal{E}_k^{m-j}(\lambda) \mathcal{E}_k(\lambda j))}{k R_{k+1}(me^{-\lambda})}\right). \quad (2.10)$$

Зауважимо, що

$$\frac{R_n(me^{-\lambda})}{(R_n(e^{-\lambda}))^m} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 + \frac{me^{-\lambda}}{k}}{\left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{k}\right)^m} \leq 1$$

Сформулюємо декілька додаткових тверджень щодо правої частини (2.10), які в подальшому допоможуть нам довести основну теорему цього розділу.

Лема 2.2. При $b > a$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k(a)}{k R_{k+1}(b)}$ є збіжним і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k(a)}{k R_{k+1}(b)} = \frac{1}{b-a}.$$

Доведення. Зауважимо, що

$$\frac{R_k(a)}{k R_{k+1}(b)} = \frac{\Gamma(k+a)}{(k-1)!\Gamma(1+a)} \frac{1}{k} \frac{k!\Gamma(1+b)}{\Gamma(k+1+b)} = \frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a)} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+1+b)}.$$

Виразимо добуток Гамма-функцій через інтегральне означення Бета-функцій

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+1+b)} &= \frac{\Gamma(k+a)\Gamma(b+1-a)}{\Gamma(b+1-a)\Gamma(k+1+b)} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(b+1-a)} B(k+a, b+1-a) = \frac{1}{\Gamma(b+1-a)} \int_0^1 (1-x)^{b-a} x^{a-1+k} dx. \end{aligned}$$

Підставимо отриманий вираз у суму

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{j-1} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+1+b)} &= \frac{1}{\Gamma(b+1-a)} \int_0^1 (1-x)^{b-a} x^{a-1} \sum_{k=1}^{j-1} x^k dx = \\
&= \frac{1}{\Gamma(b+1-a)} \int_0^1 (1-x)^{b-a-1} (x^a - x^{a+j-1}) dx = \\
&= \frac{1}{\Gamma(b+1-a)} (B(b-a, a+1) - B(b-a, a+j)) = \\
&= \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1-a)\Gamma(b+1)} - \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a+j)}{\Gamma(b+1-a)\Gamma(b+j)} = \\
&= \frac{\Gamma(a+1)}{(b-a)\Gamma(b+1)} - \frac{\Gamma(a+j)}{(b-a)\Gamma(b+j)}.
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{j-1} \frac{R_k(a)}{kR_k(b)} &= \frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+b)} \left(\frac{\Gamma(a+1)}{(b-a)\Gamma(b+1)} - \frac{\Gamma(a+j)}{(b-a)\Gamma(b+j)} \right) = \\
&= \frac{1}{b-a} - \frac{1}{b-a} \frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(b+j)} \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(1+a)} = \frac{1}{b-a} \left(1 - \frac{R_j(a)}{R_j(b)} \right).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що при $a < b$ і $j \rightarrow \infty$

$$\frac{\Gamma(j+a)}{\Gamma(j+b)} \sim \frac{\Gamma(j)j^a}{\Gamma(j)j^b} \sim \frac{1}{j^{b-a}},$$

а отже

$$\frac{R_j(a)}{R_j(b)} = \frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a)} \frac{\Gamma(j+a)}{\Gamma(j+b)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty.$$

□

Лема 2.3. Для довільного $m \geq 2$ і довільного $j = 2, \dots, m$

$$R_n^{m-j}(e^{-\lambda}) R_n(e^{-\lambda j}) \leq K_{m,\lambda} R_n((m-j)e^{-\lambda} + e^{-\lambda j}),$$

де $K_{m,\lambda}$ є деякою константою, що не залежить від n .

Доведення. Оцінимо добуток $R_n^{m-j}(e^{-\lambda})R_n(e^{-j\lambda})$:

$$\begin{aligned}
R_n^{m-j}(e^{-\lambda})R_n(e^{-j\lambda}) &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{k}\right)^{m-j} \left(1 + \frac{e^{-j\lambda}}{k}\right) \leq \\
&\leq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{(m-j)e^{-\lambda} + e^{-j\lambda}}{k} + \frac{\text{решта доданків, які діляться на } k^2, k^3, \dots}{k^2} a(\lambda, m, j)\right) \leq \\
&\leq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{(m-j)e^{-\lambda} + e^{-j\lambda}}{k}\right) \left(1 + \frac{a(\lambda, m, j)}{k^2}\right) = \\
&= R_n((m-j)e^{-\lambda} + e^{-j\lambda}) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{a(\lambda, m, j)}{k^2}\right).
\end{aligned}$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(\lambda, m, j)}{k^2}$ є збіжним, то добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a(\lambda, m, j)}{k^2}\right)$ є збіжним [4], а отже

$$R_n^{m-j}(e^{-\lambda})R_n(e^{-j\lambda}) \leq R_n((m-j)e^{-\lambda} + e^{-j\lambda}) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a(\lambda, m, j)}{k^2}\right).$$

Позначивши $K_{m,\lambda}(j) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a(\lambda, m, j)}{k^2}\right)$ і $K_{m,\lambda} = \max_{j=2,m} K_{m,\lambda}(j)$, отримуємо твердження леми. $\square$

Оцінимо змішані моменти вигляду $M(\mathcal{E}_n^{m-j}(\lambda)\mathcal{E}_n(\lambda j))$. Скориставшись нерівністю Гельдера з $p = \frac{m-j+1}{m-j}$, $q = m-j+1$, отримуємо:

$$M(\mathcal{E}_n^{m-j}(\lambda)\mathcal{E}_n(\lambda j)) \leq (M(\mathcal{E}_n^{m-j+1}(\lambda)))^{\frac{m-j}{m+1-j}} (M(\mathcal{E}_n^{m-j+1}(\lambda j)))^{\frac{1}{m+1-j}}.$$

Врахувавши, що

$$\mathcal{E}_n(\lambda) = \frac{\mathcal{E}_n(\lambda)}{M(\mathcal{E}_n(\lambda))} M(\mathcal{E}_n(\lambda)) = X_n(\lambda) R_n(e^{-\lambda}),$$

праву частину останньої нерівності можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
&(M(X_n^{m-j+1}(\lambda))R_n^{m-j+1}(e^{-\lambda}))^{\frac{m-j}{m+1-j}} (M(X_n^{m+1-j}(\lambda j))R_n^{m+1-j}(e^{-\lambda j}))^{\frac{1}{m+1-j}} = \\
&= (M(X_n^{m-j+1}(\lambda)))^{\frac{m-j}{m+1-j}} (M(X_n^{m+1-j}(\lambda j)))^{\frac{1}{m+1-j}} (R_n^{m-j}(e^{-\lambda})R_n(e^{-\lambda j})).
\end{aligned}$$

Застосувавши лему 2.3, знаходимо:

$$\begin{aligned} M(\mathcal{E}_n^{m-j}(\lambda)\mathcal{E}_n(\lambda j)) &\leq K_{m,\lambda}(M(X_n^{m-j+1}(\lambda)))^{\frac{m-j}{m+1-j}}(M(X_n^{m-j+1}(\lambda j)))^{\frac{1}{m+1-j}} \times \\ &\quad \times R_n((m-j)e^{-\lambda} + e^{-\lambda j}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Повертаючись до формули (2.10) та використовуючи леми 2.2, 2.3, а також оцінку змішаних моментів (2.11) отримаємо наступну нерівність

$$\begin{aligned} M(X_n^m(\lambda)) &\leq 1 + K_{m,\lambda} \sum_{j=2}^m C_m^j e^{-\lambda j} (M(X_n^{m-j+1}(\lambda)))^{\frac{m-j}{m+1-j}} (M(X_n^{m-j+1}(\lambda j)))^{\frac{1}{m+1-j}} \times \\ &\quad \times \frac{1}{me^{-\lambda} - ((m-j)e^{-\lambda} + e^{-\lambda j})} = \\ &= 1 + K_{m,\lambda} \sum_{j=2}^m C_m^j e^{-\lambda j} (M(X_n^{m-j+1}(\lambda)))^{\frac{m-j}{m+1-j}} (M(X_n^{m-j+1}(\lambda j)))^{\frac{1}{m+1-j}} \frac{1}{je^{-\lambda} - e^{-j\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Оскільки

$$\frac{e^{-\lambda j}}{je^{-\lambda} - e^{-j\lambda}} \leq \frac{e^{-\lambda j}}{je^{-\lambda j} - e^{-j\lambda j}} = \frac{1}{j-1},$$

то

$$\begin{aligned} M(X_n^m(\lambda)) &\leq 1 + K_{m,\lambda} \sum_{j=2}^m C_m^j (M(X_n^{m-j+1}(\lambda)))^{\frac{m-j}{m+1-j}} (M(X_n^{m-j+1}(\lambda j)))^{\frac{1}{m+1-j}} \times \\ &\quad \times \frac{1}{j-1}. \end{aligned}$$

Після доведення допоміжних лем, отримуємо наступну теорему.

Теорема 2.1. Для кожного $m \geq 2$ існує константа $A(m, \lambda)$ така, що

$$\forall n \geq 1 \quad M(X_n^m(\lambda)) \leq A(m, \lambda). \quad (2.13)$$

Доведення. Доведемо цю теорему за індукцією, використовуючи нерівність (2.2), а також той факт що $M(X_n(\lambda)) = 1$.

При $m = 2$ маємо:

$$\begin{aligned} M(X_n^2(\lambda)) &\leq 1 + K_{2,\lambda} C_1^1(M(X_n(\lambda)))^0 M(X_n(2\lambda)) = \\ &= 1 + K_{2,\lambda} \equiv A_{2,\lambda}. \end{aligned}$$

При $m = 3$

$$\begin{aligned} M(X_n^3(\lambda)) &\leq 1 + K_{3,\lambda} \sum_{j=2}^3 C_3^j(M(X_n^{4-j}(\lambda)))^{\frac{3-j}{4-j}} (M(X_n^{4-j}(j\lambda)))^{\frac{1}{4-j}} \times \\ &\quad \times \frac{1}{(j-1)}. \end{aligned}$$

Оцінимо доданки в правій частині останньої нерівності

$$\begin{aligned} C_3^2(M(X_n^2(\lambda)))^{\frac{1}{2}} (M(X_n^2(2\lambda)))^{\frac{1}{2}} &= 3 \times \\ \times (M(X_n^2(\lambda)))^{\frac{1}{2}} M(X_n^2(2\lambda)) &\leq 3(A_{2,\lambda})^{\frac{1}{2}} A_{2,2\lambda} \equiv F_{2,\lambda} = const \end{aligned}$$

$$C_3^3 M(X_n(\lambda))^0 M(X_n(3\lambda)) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже

$$M(X_n^3(\lambda)) \leq 1 + K_{3,\lambda} \left(\frac{1}{2} + F_{2,\lambda} \right) \equiv A_{3,\lambda}.$$

Припустимо, що для довільного $m \leq k$ нерівність (2.13) виконується.

Доведемо нерівність для $m = k + 1$. Маємо:

$$\begin{aligned}
M(X_n^{k+1}(\lambda)) &\leq 1 + K_{k+1,\lambda} \sum_{j=2}^{k+1} C_{k+1}^j (M(X_n^{k-j+2}(\lambda)))^{\frac{k+1-j}{k+2-j}} (M(X_n^{k+2-j}(\lambda j)))^{\frac{1}{k+2-j}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{(j-1)} = \\
&= 1 + K_{k+1,\lambda} \left(\sum_{j=2}^k C_k^j (M(X_n^{k-j+1}(\lambda)))^{\frac{k-j}{k+1-j}} (M(X_n^{k+1-j}(\lambda j)))^{\frac{1}{k+1-j}} \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{(j-1)} + \frac{1}{k} \right) \leq \\
&\leq 1 + K_{k+1,\lambda} \left(\sum_{j=2}^k C_k^j (A_{k-j+1,\lambda})^{\frac{k-j}{k+1-j}} (A_{k-j+1,\lambda j})^{\frac{1}{k+1-j}} + \frac{1}{k} \right) \equiv A_{k+1,\lambda}.
\end{aligned}$$

□

З обмеженості усіх моментів випадкової величини $X_n(\lambda)$ і того, що послідовність $(X_n(\lambda))_{n \geq 1}$ утворює мартингал, впливає [4] наступна теорема.

Теорема 2.2. *Існує така випадкова величина X , що*

$$X_n(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{M.H.}} X(\lambda), \quad n \rightarrow \infty$$

і для довільного $p \geq 1$

$$X_n(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}_p} X(\lambda), \quad n \rightarrow \infty$$

2.3 Властивості граничної випадкової величини $X(\lambda)$

В роботі [3] показано, що випадкова величина $\mathcal{Y}_{n,k}$, що фігурує в (2.2) задовільняє рівнянню

$$\mathcal{Y}_{n,k} \stackrel{d}{=} \mathcal{Y}_{I_n, k-1} + \mathcal{Y}_{n-I_n, k}^*,$$

де $(\mathcal{Y}_{n,k})_{n \geq 1, 0 \leq k \leq n}$, $(\mathcal{Y}_{n,k}^*)_{n \geq 1, 0 \leq k \leq n}$, $(I_n)_{n \geq 1}$ є незалежними послідовностями випадкових величин таких, що $\mathcal{Y}_{n,k} \stackrel{d}{\sim} \mathcal{Y}_{n,k}^*$, а I_n має рівномірний розподіл на множині $\{1, 2, \dots, n-1\}$. З цього співвідношення випливає, що для індексу складності $\mathcal{E}_n(\lambda)$ має місце зображення

$$\mathcal{E}_n(\lambda) \stackrel{d}{=} e^{-\lambda} \mathcal{E}_{I_n}(\lambda) + \mathcal{E}_{n-I_n}^*(\lambda), \quad (2.14)$$

де $\mathcal{E}_n^*(\lambda) \stackrel{d}{\sim} \mathcal{E}_n(\lambda)$ і є незалежними від $(\mathcal{E}_n(\lambda))_{n \geq 1}$.

Тоді для граничної випадкової величини $X(\lambda)$ отримуємо рівняння

$$X(\lambda) \stackrel{d}{=} e^{-\lambda} U^{e^{-\lambda}} X_1(\lambda) + (1 - U)^{e^{-\lambda}} X_2(\lambda), \quad (2.15)$$

де $X_1(\lambda), X_2(\lambda), U$ є незалежними випадковими величинами, випадкова величина U має рівномірний розподіл на $(0, 1)$, а розподіл випадкових величин $X_1(\lambda), X_2(\lambda)$ співпадає з розподілом $X(\lambda)$. Зауважимо, що рівність (2.15) дозволяє рекурентно обчислювати моменти будь-якого порядку випадкової величини $X(\lambda)$. А саме, має місце наступна теорема.

Теорема 2.3.

$$\begin{aligned} M(X^m(\lambda)) &= \frac{1}{(me^{-\lambda} - e^{-m\lambda})\Gamma(1 + me^{-\lambda})} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k e^{-\lambda k} \Gamma(1 + ke^{-\lambda}) \Gamma(1 + (m-k)e^{-\lambda}) \times \\ &\times M(X^k(\lambda)) M(X^{m-k}(\lambda)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Доведення. Спочатку запишемо рівняння для m -того степеню $X^m(\lambda)$

$$\begin{aligned} X^m(\lambda) &= e^{-m\lambda} U^{me^{-\lambda}} X_1^m(\lambda) + (1 - U)^{me^{-\lambda}} X_2^m(\lambda) + \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k e^{-k\lambda} U^{ke^{-\lambda}} (1 - U)^{(m-k)e^{-\lambda}} X_1^k(\lambda) X_2^{m-k}(\lambda). \end{aligned}$$

Врахувавши, що випадкова величина U не залежить від $X_1(\lambda), X_2(\lambda)$ і що

$$\begin{aligned} M(U^{me^{-\lambda}}) &= \int_0^1 x^{me^{-\lambda}} dx = \frac{1}{1 + me^{-\lambda}}, \\ M(U^{ke^{-\lambda}}(1 - U)^{(m-k)e^{-\lambda}}) &= \int_0^1 x^{ke^{-\lambda}}(1 - x)^{(m-k)e^{-\lambda}} dx = \\ &= B(ke^{-\lambda} + 1, (m - k)e^{-\lambda} + 1). \end{aligned}$$

Обчислимо математичне сподівання від $M(X^m(\lambda))$:

$$\begin{aligned} M(X^m(\lambda)) &= \frac{e^{-m\lambda}}{1 + me^{-\lambda}} M(X^m(\lambda)) + \frac{1}{1 + me^{-\lambda}} M(X^m(\lambda)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k e^{-\lambda k} B(1 + ke^{-\lambda}, 1 + (m - k)e^{-\lambda}) M(X^k(\lambda)) M(X^{m-k}(\lambda)). \end{aligned}$$

Оскільки $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, то

$$\begin{aligned} M(X^m(\lambda)) &= \frac{1 + me^{-\lambda}}{me^{-\lambda} - e^{-m\lambda}} \frac{1}{\Gamma(1 + (1 + me^{-\lambda}))} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k e^{-\lambda k} \Gamma(1 + ke^{-\lambda}) \Gamma(1 + (m - k)e^{-\lambda}) M(X^k(\lambda)) M(X^{m-k}(\lambda)). \end{aligned}$$

Використовуючи властивість гамма функції $\Gamma(1 + z) = z\Gamma(z)$, отримуємо твердження теореми. $\square$

2.4 Існування щільності розподілу $X(\lambda)$

Щоб довести існування щільності розподілу випадкової величини $X(\lambda)$, для початку розглянемо функцію вигляду

$$g_{a,b}(x) = a\alpha x^\alpha + b(1 - x)^\alpha, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad x \in (0, 1), \quad \alpha = e^{-\lambda},$$

і покажемо, що ця функція має єдину точку екстремуму на $[0, 1]$.

Зрозуміло, що

$$\begin{aligned} g(0) &= b; \quad g(1) = a\alpha \\ g'(x) &= a\alpha^2 x^{\alpha-1} - b\alpha(1-x)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

З рівняння

$$g'(x) = 0$$

знаходимо

$$\begin{aligned} a\alpha x^{\alpha-1} &= b(1-x)^{\alpha-1}, \\ \left(\frac{a\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} &= \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1. \end{aligned}$$

Отже

$$x^*(a,b) = \frac{1}{1 + \left(\frac{a\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} - \text{єдина точка екстремуму на } (0,1).$$

Для цієї функції доведемо наступну лему.

Лема 2.4. *Випадкова величина $g_{a,b}(U) = aU^\alpha + b(1-U)^\alpha$ має щільність розподілу $f_{g_{a,b}(U)}(y)$.*

Доведення. Випадкова величина ξ має щільність розподілу, якщо

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \quad P(\xi \in A) = \int_A f(y) dy,$$

для деякої невід'ємної інтегровної функції f . Скориставшись формулою

заміни змінних, знаходимо

$$\begin{aligned}
 P(aU^\alpha + b(1-U)^\alpha \in A) &= P(g(U) \in A) = M(\mathbb{1}(g(U) \in A)) = \\
 &= \int_0^1 \mathbb{1}(g(u) \in A) du = \int_0^{x^*} \mathbb{1}(g(u) \in A) du + \int_{x^*}^1 \mathbb{1}(g(u) \in A) du = \\
 &= \int_A \frac{1}{|g'(g^{-1}(u))|} \mathbb{1}(g^{-1}(u) \in [0, x^*]) du + \\
 &+ \int_A \frac{1}{|g'(g^{-1}(u))|} \mathbb{1}(g^{-1}(u) \in [x^*, 1]) du = \\
 &= \int_A \sum_{\substack{x \in (0,1): \\ g(x)=u}} \frac{1}{|g'(x)|} du.
 \end{aligned}$$

Звідси й випливає, що випадкова величина $g_{a,b}(U)$ має щільність розподілу

$$f_{g_{a,b}(U)}(y) = \sum_{\substack{x \in (0,1): \\ g(x)=y}} \frac{1}{|g'(x)|}.$$

□

Теорема 2.4. *Випадкова величина $X(\lambda)$ має щільність розподілу $f(z)$, $z > 0$, причому $f(z)$ є розв'язком рівняння*

$$f(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(x, y, z) f(x) f(y) dx dy, \quad z > 0, \quad (2.17)$$

де

$$h(x, y, z) = \sum_{t \in [0,1]: g_{x,y}(t)=z} \frac{1}{|g'_{x,y}(t)|},$$

$$\begin{aligned}
 g_{x,y}(t) &= e^{-\lambda} x t^{e^{-\lambda}} + y(1-t)^{e^{-\lambda}}, \\
 x &> 0, y > 0, t \in [0,1].
 \end{aligned}$$

Доведення. Для доведення теореми ми скористаємось вже доведеною лемою 2.4, яка гарантує, що випадкова величина $g_{x,y}(U)$ має щільність розподілу. Далі переконаємося, що існує невід'ємна інтегровна функція

$f_X(t)$ така що

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P(X_0 e^{-\lambda} U^{e^{-\lambda}} + (1 - U)^{e^{-\lambda}} X_0^* \in A) = \int_A f_X(t) dt.$$

Оскільки

$$P(X_0 e^{-\lambda} U^{e^{-\lambda}} + (1 - U)^{e^{-\lambda}} X_0^* \in A) = M(\mathbb{1}(X_0 e^{-\lambda} U^{e^{-\lambda}} + (1 - U)^{e^{-\lambda}} X_0^* \in A)),$$

то використовуючи властивості умовного математичного сподівання, отримуємо

$$M(M(\mathbb{1}(X_0 e^{-\lambda} U^{e^{-\lambda}} + (1 - U)^{e^{-\lambda}} X_0^* \in A) | X_0, X_0^*)) = M(\varphi(X_0, X_0^*)),$$

де

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, t_2) &= M(\mathbb{1}(t_1 e^{-\lambda} U^{e^{-\lambda}} + t_2 (1 - U)^{e^{-\lambda}} \in A)) = P(g_{t_1, t_2}(U) \in A) = \\ &= \int_A f_{g_{t_1, t_2}(U)}(y) dy. \end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned} P(X_0 e^{-\lambda} U^{e^{-\lambda}} + X_0^* (1 - U)^{e^{-\lambda}} \in A) &= M(\varphi(X_0, X_0^*)) = \\ &= M\left(\int_A f_{g_{X_0, X_0^*}(U)}(y) dy\right). \end{aligned}$$

Користуючись теоремою Фубіні[4], отримуємо

$$P(X_0 e^{-\lambda} U^{e^{-\lambda}} + X_0^* (1 - U)^{e^{-\lambda}} \in A) = \int_A M(f_{g_{X_0, X_0^*}(U)}(y)) dy.$$

Звідси слідує, що функція

$$f_X(y) = M(f_{g_{X_0, X_0^*}(U)}(y)),$$

є щільністю розподілу випадкової величини $X(\lambda)$.

Зауважимо що

$$X_0, X_0^* \stackrel{d}{\sim} X; \quad f_{X_0}(y) = f_{X_0^*}(y) = f_X(y).$$

Використовуючи незалежність X_0, X_0^* , можемо записати

$$\begin{aligned} f_X(y) &= M(f_{g_{X_0, X_0^*}(U)}(y)) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_{g_{t_1, t_2}(U)}(y) f_{X_0}(t_1) f_{X_0^*}(t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(t_1, t_2, y) f_X(t_1) f_X(t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

де

$$h(t_1, t_2, y) = f_{g_{t_1, t_2}(U)}(y) = \sum_{x \in [0,1]: g_{t_1, t_2}(x)=y} \frac{1}{|g'_{t_1, t_2}(x)|},$$

що й доводить твердження теореми. □

2.5 Умова Карлемана

Теорема 2.5 (Умова Карлемана [4]). *Нехай X є невід'ємною дійснозначною випадковою величиною, яка має моменти всіх порядків. Тоді якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (M(X^k))^{-\frac{1}{2k}} = \infty,$$

то розподіл випадкової величини X однозначно визначається її моментами.

Виявляється, що для випадкової величини $X(\lambda)$ виконується умова Карлемана. Доведення цього факту ґрунтується на наступній лемі.

Лема 2.5. *Для довільного $m \geq 1$*

$$M\left(\frac{X^m(\lambda)}{m!}\right) \leq \frac{C^m}{\Gamma(1 + me^{-\lambda})} a^{m-1},$$

$$\partial e C = \Gamma(1 + e^{-\lambda}), a = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Доведення. Доведемо цю лему використовуючи метод математичної індукції.

Для $m = 1$ маємо:

$$M(X(\lambda)) = 1, \\ \frac{C^1}{\Gamma(1 + e^{-\lambda})} a^0 = 1.$$

Для $m = 2$, використовуючи формулу (2.3), отримуємо:

$$M\left(\frac{X^2(\lambda)}{2}\right) = \frac{1}{(2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda})\Gamma(1 + 2e^{-\lambda})} e^{-\lambda}(\Gamma(1 + e^{-\lambda}))^2 = \\ = \frac{1}{2 - e^{-\lambda}} \frac{(\Gamma(1 + e^{-\lambda}))^2}{\Gamma(1 + 2e^{-\lambda})} \leq \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \frac{C^2}{\Gamma(1 + 2e^{-\lambda})} = \frac{C^2}{\Gamma(1 + 2e^{-\lambda})} a.$$

Припустимо, що нерівність виконується для всіх $m \leq j - 1$, і доведемо її виконання для $m = j$. Маємо:

$$M\left(\frac{X^j(\lambda)}{j!}\right) = \frac{1}{\Gamma(1 + je^{-\lambda})(je^{-\lambda} - e^{-j\lambda})} \sum_{k=1}^{j-1} e^{-\lambda k} \Gamma(1 + ke^{-\lambda}) \times \\ \times \Gamma(1 + (j - k)e^{-\lambda}) M\left(\frac{X^k(\lambda)}{k!}\right) M\left(\frac{X^{j-k}(\lambda)}{(j - k)!}\right) \leq \frac{1}{\Gamma(1 + je^{-\lambda})(je^{-\lambda} - e^{-j\lambda})} \times \\ \times \sum_{k=1}^{j-1} e^{-k\lambda} \Gamma(1 + ke^{-\lambda}) \Gamma(1 + (j - k)e^{-\lambda}) \frac{C^k a^{k-1}}{\Gamma(1 + ke^{-\lambda})} \frac{C^{j-k} a^{j-k-1}}{\Gamma(1 + (j - k)e^{-\lambda})} = \\ = \frac{C^j a^{j-2}}{\Gamma(1 + je^{-\lambda})(je^{-\lambda} - e^{-j\lambda})} \sum_{k=1}^{j-1} e^{-k\lambda} \leq \frac{C^j a^{j-2}}{\Gamma(1 + je^{-\lambda})(je^{-\lambda} - e^{-j\lambda})} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\lambda} = \\ = \frac{C^j a^{j-1}}{\Gamma(1 + je^{-\lambda})(je^{-\lambda} - e^{-j\lambda})} e^{-\lambda} a \leq \frac{C^j a^{j-1}}{\Gamma(1 + je^{-\lambda})}.$$

□

Лема 2.6. Для випадкової величини $X(\lambda)$ виконується умова

$$\sum_{m=1}^{\infty} (M(X^m(\lambda)))^{-\frac{1}{2m}} = \infty$$

Доведення. З леми (2.5) відомо, що для довільного $m \geq 1$

$$M(X^m(\lambda)) \leq \frac{m!C^m}{\Gamma(1+me^{-\lambda})}a^{m-1}.$$

Перетворимо дану нерівність наступним чином

$$(M(X^m(\lambda)))^{-\frac{1}{2m}} \geq \left(a \frac{\Gamma(1+me^{-\lambda})}{m!}\right)^{\frac{1}{2m}} \frac{1}{\sqrt{Ca}}.$$

Дослідимо поведінку виразу в правій частині нерівності, коли $m \rightarrow \infty$. Використаємо для цього формули Стірлінга

$$\begin{aligned}\Gamma(1+me^{-\lambda}) &\sim \sqrt{2\pi me^{-\lambda}} \left(\frac{me^{-\lambda}}{e}\right)^{me^{-\lambda}}, \\ m! &\sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m,\end{aligned}$$

отримуємо

$$\left(\frac{1}{1-e^{-\lambda}} \frac{\Gamma(1+me^{-\lambda})}{m!}\right)^{\frac{1}{2m}} \sim \left(\frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{1-e^{-\lambda}}\right)^{\frac{1}{2m}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}(1-e^{-\lambda})}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Оскільки

$$\left(\frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{1-e^{-\lambda}}\right)^{\frac{1}{2m}} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty,$$

то

$$\sum_{m=1}^{\infty} M(X^m)^{-\frac{1}{2m}} \geq \text{const} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}(1-e^{-\lambda})}.$$

З того, що $\frac{1-e^{-\lambda}}{2} < 1$, випливає, що

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1-e^{-\lambda}}{2}} = \infty,$$

а отже і ряд $\sum_{m=1}^{\infty} M(X^m)^{-\frac{1}{2m}}$ є розбіжним.

□

2.6 Відновлення щільності

Існує багато методів, які дозволяють за допомогою моментів відновити щільність розподілу. Одним з них є метод ортогональних поліномів Лагерра [6], який дозволяє побудувати наближення щільності наступного вигляду

$$f_N(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^N c_n L_n(x), \quad x > 0,$$

$$\text{де } c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k M(X^k(\lambda)), \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k x^k.$$

Маючи набір моментів випадкової величини $X(\lambda)$, які легко обчислити за формулою (2.10), і використовуючи алгоритм апроксимації щільності з [6], вдалося апроксимувати щільність розподілу випадкової величини $X(\lambda)$. За допомогою методу МСМС було згенеровано вибірку з розподілу випадкової величини $X(\lambda)$, як розв'язку рівняння (2.15). На рисунку (2.1) зображено гістограму, побудовану за емпіричним розподілом випадкової величини $X(\lambda)$, та графік функції $f_N(x)$, яка слугує апроксимацією для істинної щільності розподілу, побудованої з використанням ортогональних поліномів Лагерра.

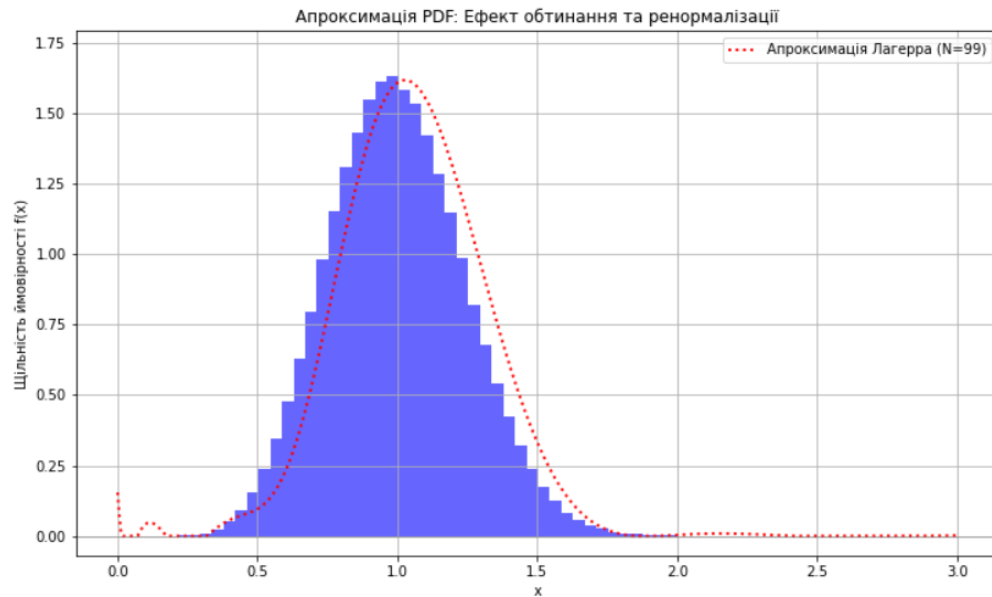


Рисунок 2.1 – Порівняння апроксимації щільності з емпіричним розподілом $X(\lambda)$.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі було введено узагальнене означення експоненційного індексу складності для випадкового рекурсивного дерева. Було виведено рекурентне рівняння для моментів випадкової величини $\frac{\mathcal{E}_n(\lambda)}{M(\mathcal{E}_n(\lambda))}$, та доведено, що нормована послідовність $\left(\frac{\mathcal{E}_n(\lambda)}{M(\mathcal{E}_n(\lambda))}\right)_{n \geq 1}$ утворює $\mathcal{L}_p$ -обмежений мартингал для довільного $p \geq 1$. Це дозволило довести існування випадкової величини $X(\lambda)$ такої, що $\frac{\mathcal{E}_n(\lambda)}{M(\mathcal{E}_n(\lambda))} \xrightarrow{a.s.} X(\lambda)$ та $\frac{\mathcal{E}_n(\lambda)}{M(\mathcal{E}_n(\lambda))} \xrightarrow{\mathcal{L}_p} X(\lambda)$, $p \geq 1$. Для граничної випадкової величини $X(\lambda)$ доведено існування щільності розподілу та виведено рівняння, якому ця щільність задовольняє. Отримано також рекурентне рівняння для обчислення моментів випадкової величини $X(\lambda)$.

Також було досліджено задачу відновлення щільності розподілу випадкової величини $X(\lambda)$ на основі її моментів. Зокрема, було доведено виконання умови Карлемана для випадкової величини $X(\lambda)$, що гарантує однозначне визначення розподілу за моментами. Це створює теоретичне підґрунтя для побудови апроксимації щільності за скінченним набором моментів.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто узагальнене означення експоненційного індексу складності для випадкового рекурсивного дерева та досліджено його асимптотичну поведінку. Зокрема, встановлено, що нормована послідовність індексів складності утворює $\mathcal{L}_p$, $p \geq 1$ -обмежений мартингал. Це дозволило довести існування випадкової величини $X(\lambda)$ такої, що нормований індекс збігається до неї майже напевно і в просторі $\mathcal{L}_p$, $p \geq 1$. Доведено існування щільності розподілу цієї граничної величини, виведено рівняння, якому ця щільність задовольняє, а також рекурентні співвідношення для обчислення моментів. Показано, що щільність однозначно визначається за моментами завдяки виконанню умови Карлемана, що створює основу для її чисельної апроксимації.

Практичну реалізацію відновлення щільності здійснено за допомогою методу ортогональних поліномів Лагерра. Отримано явну формулу для апроксимації щільності $f_N(x)$, яка базується на скінченному наборі моментів випадкової величини $X(\lambda)$. Результати апроксимації були проілюстровані графічно: гістограму емпіричного розподілу, отриманого за методом Монте-Карло з марковськими ланцюгами (МСМС), порівняно з побудованою функцією $f_N(x)$. Збіг апроксимації з емпіричними даними підтверджує доцільність використаного підходу для відновлення щільності за допомогою моментів.

Подальші дослідження слід спрямувати у вивчення властивостей рівняння, якому задовольняє щільність розподілу випадкової величини $X(\lambda)$.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- [1] P. Brémaud. *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*. Springer Science Business Media., 2001.
- [2] R. P. Dobrow та J. A. Fill. «Total path length for random recursive trees». АНГЛ. В: *Combinatorics, Probability and Computing*, 4 (1999), с. 1317—333.
- [3] M. Drmota. *Random trees: an interplay between combinatorics and probability*. Springer Science & Business Media., 2009.
- [4] R. Durrett. *Elementary probability for applications*. АНГЛ. Cambridge university press, 2009.
- [5] B Lodewijks. «On joint properties of vertices with a given degree or label in the random recursive tree». В: *Electronic Journal of Probability* (2022).
- [6] Serge B. Provost. «Moment-based density approximants». В: *Mathematica Journal* (2005), с. 727—756.
- [7] G. Tseng та ін. «Lightweight, Pre-trained Transformers for Remote Sensing Timeseries». В: *NeurIPS 2023 Workshop on Tackling Climate Change with Machine Learning* (2023).
- [8] H. Wiener. «Structural determination of paraffin boiling points». В: *Journal of the American Chemical Society* (1947).
- [9] А. Дороговцев, Д. Калитюк та І. Ніщенко. «Асимптотична поведінка індексу складності зростаючих випадкових дерев». Ukrainian. В: *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Kyiv, Ukraine* 6 (2024), 3–10.
- [10] Р.Смайз та М.Махмуд. «Рекурсивні дерева: огляд.» Ukrainian. В: *ТВіМС*. 6 (1994), 2–28.