

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**І. В. Лінчевський, В. В. Хіст, М. В. Чурсанова**

# **ФІЗИКА**

## **ЧАСТИНА 2.**

### **ОПТИКА. КВАНТОВА ФІЗИКА**

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
за всіма освітніми програмами  
природничих та технічних спеціальностей

Електронне мережеве навчальне видання

Київ  
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО  
2026

УДК 535(075)

Л59

Автори: *Лінчевський Ігор Валентинович*, д-р ф.-м. наук, проф.  
*Хіст Вікторія Володимирівна*, канд. фіз.-мат. наук  
*Чурсанова Марина Валеріївна*, канд. фіз.-мат. наук

Рецензент *Савченко Д. В.*, доктор фіз.-мат. наук, доцент,  
зав. кафедрою загальної фізики та моделювання фізичних процесів

Відповідальний редактор *Решетняк, С.О.*, д.ф.-м.наук, професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 5 від 05.03.2026 р.)  
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету  
(протокол № 1 від 11.02.2026 р.)*

Л59 **Лінчевський І. В.**

Фізика. Частина 2. Оптика. Квантова фізика [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за всіма освіт. програмами природ. та техн. спец. / І. В. Лінчевський, В. В. Хіст, М. В. Чурсанова; КПІ ім. Ігоря Сікорського.– Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 156с.

Навчальний посібник «Фізика. Частина 2. Оптика. Квантова фізика» охоплює розділи: Електромагнітні хвилі. Хвильова та квантова оптика. Елементи квантової механіки як розділів курсу загальної фізики. Посібник містить теоретичні, та методичні матеріали з дисципліни «Фізика». Приділено окрему увагу прикладам, задачам та контрольним запитанням, що сприяє більш якісному засвоєнню теоретичного матеріалу. Посібник призначений для підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньо-професійної програми за спеціальністю G22 «Біомедична інженерія». Навчальний посібник може бути також корисним також для, студентів та викладачів інших фізичних та технічних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів і класичних та педагогічних університетів.

УДК 535(075)

Реєстр. № НП 25/26-218. Обсяг 7 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© І. В. Лінчевський, В. В. Хіст, М. В. Чурсанова, 2026

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026

# ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ. ОПТИКА.....	8
1. Основи теорії Максвелла.....	8
1.1. Система рівнянь Максвелла в інтегральній формі.....	8
1.2. Система рівнянь Максвелла в диференціальній формі.....	10
1.3. Симетрія рівнянь Максвелла.....	11
Контрольні запитання і завдання.....	12
2. Електромагнітні хвилі.....	14
2.1. Розв’язання системи рівнянь Максвелла.....	14
2.2. Властивості електромагнітних хвиль.....	17
2.3. Плоска електромагнітна хвиля.....	18
Контрольні запитання і завдання.....	23
3. Енергія електромагнітної хвилі.....	24
3.1. Вектор Пойнтінга.....	24
3.2. Теорема Пойнтінга.....	25
3.3. Інтенсивність ЕМХ.....	27
Контрольні запитання і завдання.....	28
4. Оптика. Інтерференція електромагнітних хвиль.....	29
4.1. Закони відбивання та заломлення світла.....	29
4.1.1. Деякі відомості з геометричної оптики.....	29
4.1.2. Хвильова оптика.....	31
4.2. Інтерференція.....	36
4.3. Методи одержання інтерференції.....	40
4.3.1. Методи одержання когерентних пучків світла поділом хвильового фронту.....	40
4.3.2. Часова та просторова когерентність.....	42

4.3.3. Методи одержання когерентних пучків світла поділом амплітуди.....	46
4.3.4. Застосування інтерференції.....	50
Контрольні запитання і завдання.....	50
5. Дифракція світла.....	53
5.1. Дифракція. Принцип Гюйгенса - Френеля.....	53
5.1.1. Метод зон Френеля.....	55
5.2. Дифракція Фраунгофера на щілині.....	61
5.3. Дифракція Фраунгофера на дифракційних ґратках.....	64
5.4. Дисперсія і роздільна здатність дифракційних ґраток.....	69
Контрольні запитання і завдання.....	72
6. Поляризація світла.....	74
6.1. Поляризоване й природне світло.....	74
6.2. Закон Малюса. Проходження природного світла через поляризатор.....	76
6.3. Поляризація світла при відбитті та заломленні. Закон Брюстера.....	77
6.4. Формули Френеля.....	78
Контрольні запитання і завдання.....	82
7. Дисперсія світла в речовині.....	84
7.1. Прояви дисперсії при розповсюдженні ЕМХ. Фазова та групова швидкості.....	85
7.2. Елементарна теорія дисперсії.....	87
Контрольні запитання і завдання.....	91
РОЗДІЛ 2. КВАНТОВА ОПТИКА.....	92
8. Квантові властивості світла. Фотони.....	92
8.1. Фотони. Властивості фотонів.....	92
8.2. Зовнішній фотоефект.....	94

8.3. Гальмівне рентгенівське випромінювання (зворотній фотоефект) .....	96
8.4. Ефект Комптона.....	98
Контрольні запитання і завдання.....	101
РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ.....	103
9. Борівська теорія атома.....	103
9.1. Дослід Резерфорда.....	103
9.2. Постулати Бора. Правило квантування орбіт.....	104
9.3. Спектральні закономірності у випромінюванні атома водню... ..	107
Контрольні запитання і завдання.....	109
10. Хвилі де Бройля.....	110
10.1. Хвильові властивості мікрочастинок. Гіпотеза де Бройля.....	110
10.2. Статистична інтерпретація хвиль де Бройля. Хвильова функція.....	114
10.3. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга.....	116
Контрольні запитання і завдання.....	119
11. Рівняння Шредінгера.....	120
11.1. Часове та стаціонарне рівняння Шредінгера.....	120
11.2. Рух квантової частинки в одновимірній потенціальній ямі.....	122
11.3. Рух квантової частинки у дво- та тривимірній потенціальній ямі .....	127
Контрольні запитання і завдання.....	129
12. Потенціальні бар'єри.....	130
12.1. Бар'єр у вигляді сходинки.....	130
12.2. Проходження частинки крізь бар'єр прямокутної форми.....	132
12.3. Проходження частинки крізь бар'єр довільної форми.....	135
12.3.1. Контактна різниця потенціалів в металах.....	136
12.3.2. Автоелектронна емісія.....	138
12.3.3. Ефект Рамзауера.....	141

Контрольні запитання і завдання.....	146
Перелік посилань.....	148
References.....	150
Предметний покажчик.....	152

## ВСТУП

Навчальний посібник «Фізика. Частина 2. Оптика. Квантова фізика» призначений для підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньо-професійної програми за спеціальністю G22 «Біомедична інженерія». Навчальний посібник написано на основі лекцій, які автори читали на протязі ряду років студентам біомедикоінженерного факультету КПІ імені Ігоря Сікорського.

Пропоноване видання складається із трьох розділів:

1. Електромагнітні хвилі. Оптика;
2. Квантова оптика;
3. Елементи квантової механіки.

Матеріали розділів викладені у відповідності до силабусу дисципліни «Фізика. Частина 2. Оптика. Квантова фізика». В кожному розділі наведені приклади розв'язання задач, а в кінці розділів контрольні запитання, що сприяють максимально якісному засвоєнню лекційного матеріалу. Ця дисципліна є неодмінною частиною класичної програми підготовки спеціалістів в області біомедичної інженерії спрямована на формування у студентів базових понять, вмінь та навичок стосовно процесів, явищ та законів оптики та квантової фізики. Вона формує уявлення про фізику як одну з фундаментальних природничих наук, ознайомлює з виникненням ідей, теорій, понять, розкриває можливості використання математичного апарату, математичних методів, інформаційних технологій у галузі фізичних знань.

Незважаючи на наявність інших підручників необхідність написання такого навчального посібника обумовлено специфікою програми дисципліни «Фізика» для студентів спеціальності G22 «Біомедична інженерія». Навчальний посібник може бути також корисним також для студентів та викладачів інших фізичних та технічних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів і класичних та педагогічних університетів.

# РОЗДІЛ 1. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ. ОПТИКА

## 1. Основи теорії Максвелла

### 1.1. Система рівнянь Максвелла в інтегральній формі

Введення поняття струму зміщення  $\left( \vec{j}_{\text{зміщ}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$  дозволило Максвеллу

створити єдину теорію електричних та магнітних явищ, що описується системою фундаментальних рівнянь електродинаміки.

Система рівнянь Максвелла в інтегральній формі [1]:

$$1. \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \quad (1.1)$$

$$2. \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \left( \vec{j}_{\text{провід}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad (1.2)$$

$$3. \oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV; \quad (1.3)$$

$$4. \oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (1.4)$$

Рівняння (1.1) – (1.4) мають наступний зміст:

- рівняння (1.1) показує, що вихрове електричне поле створюється магнітним полем, яке змінюється із часом  $\left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$ ; в основі рівняння лежить закон електромагнітної індукції;
- рівняння (1.2) показує, що магнітне поле створюється або електричними струмами провідності ( $\vec{j}_{\text{провід}}$ ); надалі густину струму провідності будемо розуміти під позначенням ( $\vec{j}$ ), або електричним полем, яке змінюється за

часом  $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$ ; Цю складову густини струму називають струмом зміщення.

Це рівняння є фактично теоремою про циркуляцію вектора  $H$ . Рівняння (1.1) та (1.2) носять назву хвильових рівнянь системи рівнянь Максвелла.

- рівняння (1.3) – теорема Гаусса для електричного поля, де  $\rho$  – густина електричного заряду, який міститься всередині певної замкненої поверхні;
- рівняння (1.4) – теорема Гаусса для магнітного поля. Той факт, що інтеграл  $\oint_S \vec{B} d\vec{S}$  дорівнює нулю, показує, що лінії індукції магнітного поля замкнені та що магнітних зарядів, які по своїм властивостям були б аналогічні електричним, в природі не існує.

Систему рівнянь Максвелла необхідно доповнити співвідношеннями, які конкретизували би властивості матеріального середовища, у якому розглядається електромагнітне поле – *матеріальними рівняннями*. Їх можна записати у вигляді:

$$5. \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(E) \vec{E}; \quad (1.5)$$

$$6. \vec{B} = \mu_0 \mu(H) \vec{H}; \quad (1.6)$$

$$7. \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.7)$$

де  $\varepsilon$  – відносна діелектрична проникність середовища,  $\mu$  – відносна магнітна проникність середовища,  $\sigma$  – питома електропровідність середовища. Якщо середовище ізотропне, та не має сегнетоелектричних або феромагнітних властивостей, то  $\varepsilon = const$ ;  $\mu = const$ . Зокрема, для вакууму,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ .

## 1.2. Система рівнянь Максвелла в диференціальній формі

Система рівнянь Максвелла в диференціальній формі (згідно теореми Стокса):

$$1. \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{або} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (1.8)$$

$$2. \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{або} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (1.9)$$

$$3. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad \text{або} \quad \text{div} \vec{D} = \rho; \quad (1.10)$$

$$4. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{або} \quad \text{div} \vec{B} = 0. \quad (1.11)$$

Нагадаємо, математичний оператор набла

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z.$$

В загальному випадку, середовище може бути неоднорідним та містити поверхні розриву, при переході через які властивості поля змінюються стрибкоподібно. Тому рівняння Максвелла в диференціальній формі необхідно доповнити граничними умовами, яким має задовольняти електромагнітне поле на границі розділу двох середовищ. **Граничні умови:**

$$\begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{cases} \quad (1.12)$$

(тут перша та остання умови відносяться до випадків коли на границі розділу немає ні сторонніх зарядів, ні струмів провідності).

Властивості рівнянь Максвелла:

1. Рівняння Максвелла лінійні. Вони містять лише перші похідні полів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  за часом та просторовими координатами та перші степені густини електричних зарядів  $\rho$  та струмів  $\vec{j}$ . Звідси випливає, що електромагнітне

поле задовольняє принцип суперпозиції: якщо два яких-небудь поля задовольняють рівняння Максвелла, то це відноситься і до суми цих полів.

2. Рівняння Максвелла містять рівняння неперервності, що виражає закон збереження електричного заряду. Якщо взяти дивергенцію від обох частин рівняння (1.9) та врахувати (1.10), одержимо  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ .

3. Рівняння Максвелла виконуються у всіх інерціальних системах відліку. Вони є релятивістські інваріантними (відносно перетворень Лоренца), що підтверджується численними дослідними даними. Вид рівнянь Максвелла при переході з однієї інерціальної системи відліку до іншої не змінюється.

### 1.3. Симетрія рівнянь Максвелла

Рівняння Максвелла не симетричні відносно електричного та магнітного полів оскільки в природі існують електричні заряди, але магнітних зарядів не існує. Але якщо розглянути нейтральне однорідне непровідне середовище де  $\rho = 0$  та  $\vec{j} = 0$ , то рівняння Максвелла набувають симетричного вигляду (у диференціальній формі):

$$1. \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (1.13)$$

$$2. \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (1.14)$$

$$3. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0; \quad (1.15)$$

$$4. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.16)$$

$$5. \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad (1.17)$$

$$6. \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad (1.18)$$

Відмінність у знаках перед похідними  $\partial \vec{B} / \partial t$  та  $\partial \vec{D} / \partial t$  вказує що лінії вихрового електричного поля, індукованого зміною поля  $\vec{B}$ , утворюють з

вектором  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  ліво-гвинтову систему, в той час як лінії магнітного поля, індукованого зміною  $\vec{D}$ , утворюють з вектором  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  право-гвинтову систему (рис. 1.1).

З рівнянь Максвелла (1.13) – (1.18) випливає, що електромагнітне поле може існувати самостійно без будь-яких зарядів і струмів – у вигляді *електромагнітних хвиль*, що поширюються в просторі зі скінченною швидкістю.

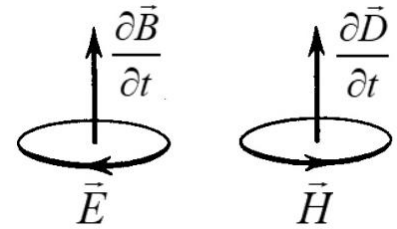


Рис. 1.1.

### *Контрольні запитання і завдання*

1. Поясніть фізичний зміст закону Гауса для електричного поля.
2. Виведіть диференціальну форму закону Гауса для електричного поля за допомогою теореми Остроградського – Гауса.
3. Чому потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню завжди дорівнює нулю?
4. Розкрийте фізичний зміст закону Фарадея-Максвелла (закон електромагнітної індукції).
5. Використовуючи теорему Стокса, виведіть диференціальну форму закону Фарадея-Максвелла.
6. Поясніть фізичний зміст закону повного струму (рівняння Ампера-Максвелла) – як струми і змінне електричне поле породжують магнітне поле?
7. Покажіть, як за допомогою теореми Стокса отримати диференціальну форму рівняння Ампера-Максвелла.
8. Поясніть роль струму зміщення у рівнянні Ампера-Максвелла для циркуляції магнітного поля.
9. Поясніть чому систему рівнянь Максвелла необхідно доповнити матеріальними рівняннями.

10. Поясніть чому інтегральна форма законів описує глобальні властивості поля, а диференціальна – локальні.
11. Для чого систему рівнянь Максвелла в диференціальній формі необхідно доповнити граничними умовами?
12. В чому полягає лінійність рівнянь Максвелла?
13. Виведіть рівняння неперервності із рівнянь Максвелла та поясніть його фізичний зміст.
14. Чому рівняння Максвелла не симетричні відносно електричного та магнітного полів?
15. За яких умов рівняння Максвелла набувають симетричного вигляду?
16. Яким чином симетрія рівнянь Максвелла вказує на можливість існування електромагнітних хвиль?

## 2. Електромагнітні хвилі

### 2.1. Розв'язання системи рівнянь Максвелла

Одним із надзвичайно важливих наслідків системи рівнянь Максвелла є існування принципово нового явища, яке теоретично відкрив сам Максвелл, – **електромагнітних хвиль (EMX)**. Справді, з рівнянь (1.13) – (1.18) видно, що будь-яка зміна в часі електричного поля  $\partial\vec{D}/\partial t$  зумовлює виникнення змінного в просторі вихрового магнітного поля  $rot\vec{H}$  і, у свою чергу, змінне в часі магнітне поле  $\partial\vec{B}/\partial t$  спричиняє виникнення в сусідніх точках простору вихрового електричного поля  $rot\vec{E}$ . Змінні електричне і магнітне поля взаємно обумовлюють одне одного. Вони існують в єдності, становлячи особливу форму матерії – **електромагнітне поле**, яке, виникнувши в певних точках простору, не лишається локалізованим, а навпаки (як це передбачають рівняння Максвелла) розповсюджується у просторі у вигляді EMX із певною швидкістю, значення якої залежить від властивостей навколишнього середовища.

**Електромагнітна хвиля** – це процес поширення в просторі із часом вільного електромагнітного поля (рис. 2.1). Джерелом електромагнітної хвилі може бути

- заряджене тіло, що прискорено рухається;
- провідник, через який тече змінний струм.

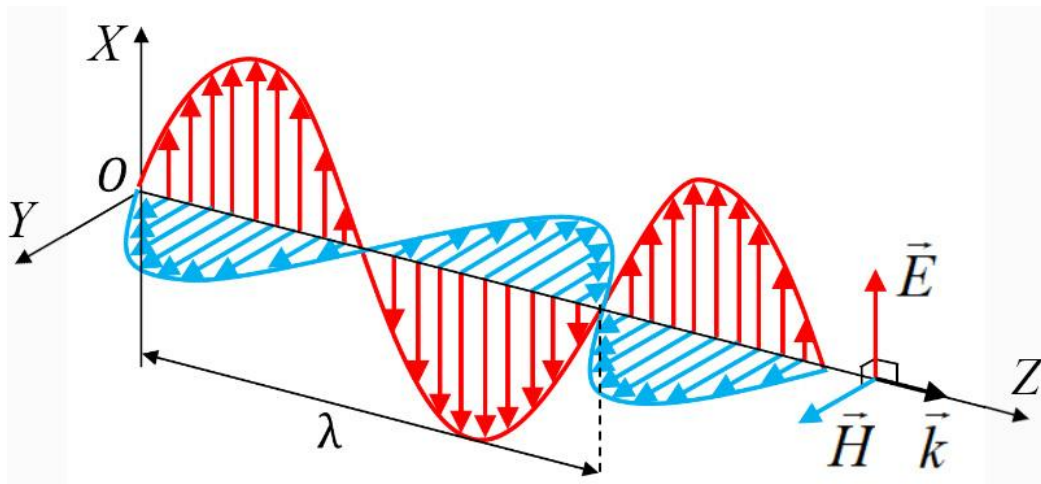


Рис.2.1

Хвильовий характер змінного електромагнітного поля та властивості електромагнітних хвиль випливають із того, що систему рівнянь Максвелла можна звести до хвильових диференціальних рівнянь, розв'язком яких є рівняння хвилі. Розглянемо однорідне нейтральне  $\rho = 0$  непровідне  $\vec{j} = 0$  середовище з відносними електричною та магнітною проникностями  $\varepsilon = const$ ,  $\mu = const$ . У такому випадку система рівнянь Максвелла має вигляд (1.13) – (1.18). Продиференціюємо рівняння (1.14) за часом з урахуванням (1.17):

$$\frac{\partial^2 (\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

З рівняння (1.13), врахувавши (1.18), ми знаємо, що

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial (\mu \mu_0 \vec{H})}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \text{ Звідси } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu \mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E}, \text{ і, підставляючи цей}$$

вираз, одержуємо:

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu \mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}).$$

Подвійний векторний добуток можна перетворити за правилом

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}),$$

де  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  відповідно до рівняння (3.19), а  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \nabla^2$  – оператор Лапласа.

В результаті, отримуємо диференціальне хвильове рівняння для вектора  $\vec{E}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Аналогічне рівняння можна одержати для вектора  $\vec{H}$ :

$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Введемо позначення  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  – швидкість поширення ЕМХ у вакуумі.

Тоді рівняння (2.1) і (2.2) можна записати як

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \text{хвильове рівняння для вектора } \vec{E}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \text{хвильове рівняння для вектора } \vec{H}. \quad (2.4)$$

Швидкість розповсюдження електромагнітної хвилі у вакуумі,  $c$ , пов'язана із електричною ( $\epsilon_0$ ) та магнітною ( $\mu_0$ ) сталими співвідношенням:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

Числове значення цієї швидкості збігається з відомою експериментально швидкістю поширення світла. Це дозволило Максвеллу зробити фундаментальний висновок: **світло є електромагнітною хвилею**. Швидкість

поширення ЕМХ в непровідному неферромагнітному середовищі  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}$ ,

де величина  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$  називається **показником заломлення середовища**.

Для диференціальних рівнянь (2.3) – (2.4) як правило шукають розв'язки у вигляді **плоских хвиль**

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (2.5)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (2.6)$$

де  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$  – сталі, які називаються **амплітудою** хвилі,  $\omega$  – **циклічна частота** гармонічних коливань поля,  $\vec{k}$  – **хвильовий вектор**, що визначає напрям поширення хвилі, вираз  $(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  називається **фазою** хвилі.

## 2.2. Властивості електромагнітних хвиль

### 1) Дисперсійне співвідношення

Підставимо вираз (2.5) у рівняння (2.1). Оператор Лапласа від функції  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  обчислюється як  $\nabla^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E}$ , а друга похідна за часом  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$ . Тоді (2.1) приймає вигляд  $-k^2 \vec{E} = -\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \omega^2 \vec{E}$ , і одержуємо співвідношення

$$k = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \cdot \omega = \frac{\omega}{v}, \quad (2.7)$$

звідки  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{\omega}{k}$  – **фазова швидкість** ЕМХ – швидкість поширення сталої фази в непровідному неферомагнітному середовищі.

### 2) Поперечність ЕМХ

Розглянемо електромагнітну хвилю що поширюється в напрямку  $\vec{k}$ . Обчислимо дивергенцію для виразу (2.5):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \vec{E}_0 \cdot (-i\vec{k} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) = -i\vec{k} \cdot \vec{E}$$

Але виходячи з умови (1.15)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , тоді  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ , а значить  $\vec{k} \perp \vec{E}$ .

Аналогічно, з умови (1.16)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ , для виразу (2.6) одержуємо  $\vec{k} \cdot \vec{H} = 0$ , отже  $\vec{k} \perp \vec{H}$ . В той же час з рівнянь (1.13) та (1.14) випливає що  $\vec{E} \perp \vec{H}$ .

Таким чином, вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{k}$  взаємно перпендикулярні і утворюють правошвинтову систему. В однорідних ізотропних середовищах коливання двох полів є перпендикулярними один до одного і перпендикулярними до напрямку поширення хвилі, утворюючи **поперечну хвилю**.

### 3) Зв'язок між полями

Обчислимо ротор виразу (2.5), скориставшись правилом

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} f) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) f + \vec{\nabla} f \times \vec{A}.$$

У першому доданку ротор від сталого вектора (амплітуди)  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0$ . У другому доданку  $\vec{\nabla} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -i\vec{k} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ , і одержуємо

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\vec{k}e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \times \vec{E}_0 = -i\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -i\vec{k} \times \vec{E}.$$

Але виходячи з умови (1.13)  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , і, підставивши у праву частину вираз (2.6) з врахуванням (1.18), в непровідному неферомагнітному середовищі одержимо

$$-i\vec{k} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \mu \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right) = -\mu_0 \mu \vec{H}_0 \left( i\omega e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right) = -i\omega \mu_0 \mu \vec{H},$$

тобто

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (2.8)$$

Модулі векторів із (2.8) співвідносяться як  $kE = \omega \mu_0 \mu H$ , і, врахувавши (2.7), маємо  $\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \omega E = \omega \mu_0 \mu H$ , звідки

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (2.9)$$

Вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  завжди коливаються в однакових фазах, і величина одного поля однозначно визначає величину іншого так, що за будь-яких умов миттєві значення  $E$  і  $H$  у будь-якій точці простору співвідносяться за рівністю (2.9).

### 2.3. Плоска електромагнітна хвиля

Перепишемо рівняння Максвелла у формі більш зручній для подальшого аналізу:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z = 0;$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0.$$

Розглянемо електромагнітну хвилю, яка випромінюється з будь-якої точки в площині  $XU$  і поширюється в напрямку осі  $Z$  (Рис. 2.1). Тоді вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{k}$  будуть направлені вздовж осей  $X$ ,  $Y$  і  $Z$ , відповідно:

$$\begin{aligned} E_x = E; & & E_y = 0; & & E_z = 0; \\ H_x = 0; & & H_y = H; & & H_z = 0; \\ k_x = 0; & & k_y = 0; & & k_z = k; & & \vec{k} \cdot \vec{r} = kz. \end{aligned}$$

Підставимо у рівняння Максвелла:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{e}_z = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \vec{e}_y \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0;$$

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial H_y}{\partial x} \vec{e}_z = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \vec{e}_x \Rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0;$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{B} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0.$$

Рівність нулю похідних від  $E$  та  $H$  по змінним  $x$  та  $y$  означає, що величини  $E$  і  $H$  (і їх проекції на осі  $E_x$  і  $H_y$ ) не залежать від координат  $x$  та  $y$ , а залежать лише від координати  $z$ , яка відповідає напрямку поширення хвилі. Тоді рівняння Максвелла спрощуються:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Застосувавши вже відому послідовність перетворень, із першого рівняння

маємо  $\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}$ , а про диференціювавши за часом друге

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial H_y}{\partial t} \right) = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

і підставивши вираз із першого, одержуємо  $\frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$ .

В результаті, можна отримати диференціальні хвильові рівняння для  $x$ -компоненти вектора  $\vec{E}$  і, аналогічно, для  $y$ -компоненти вектора  $\vec{H}$ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2},$$

розв'язок яких матиме вже відому нам форму

$$E(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad H(z, t) = H_0 e^{i(\omega t - kz)}.$$

Слід зазначити, що запис поля у вигляді комплексної експоненти є математичною зручністю. Фізичний сенс має лише дійсна частина цього виразу, яка відповідає реальним значенням електричного та магнітного полів:

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz); \quad (2.10)$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - kz). \quad (2.11)$$

Циклічна частота  $\omega = 2\pi\nu$ , де  $\nu$  – частота гармонічних коливань хвилі. Якщо коливання відбуваються зі строго визначеною частотою, хвиля називається *монохроматичною*.

Хвильове число  $k = \frac{\omega}{v}$ . Швидкість  $v$  поширення хвилі можна представити як  $v = \frac{\lambda}{T}$ , де  $T$  – період коливань хвилі,  $\lambda$  – *довжина хвилі* – відстань, на яку поширюються гармонічні коливання за час одного періода  $T$ . Тоді  $k = \frac{2\pi\nu T}{\lambda}$ , і одержуємо

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.12)$$

Хвильове число показує скільки довжин хвиль вміщується на відстані  $2\pi$  (м).

В залежності від частоти або довжини електромагнітної хвилі можна охарактеризувати її положення в *електромагнітному спектрі* (Рис. 2.2). У порядку зростання частоти (та зменшення довжини хвилі) розрізняють: радіохвилі, мікрохвилі, інфрачервоне випромінювання, видиме світло, ультрафіолетове випромінювання, рентгенівське випромінювання та гамма-випромінювання.

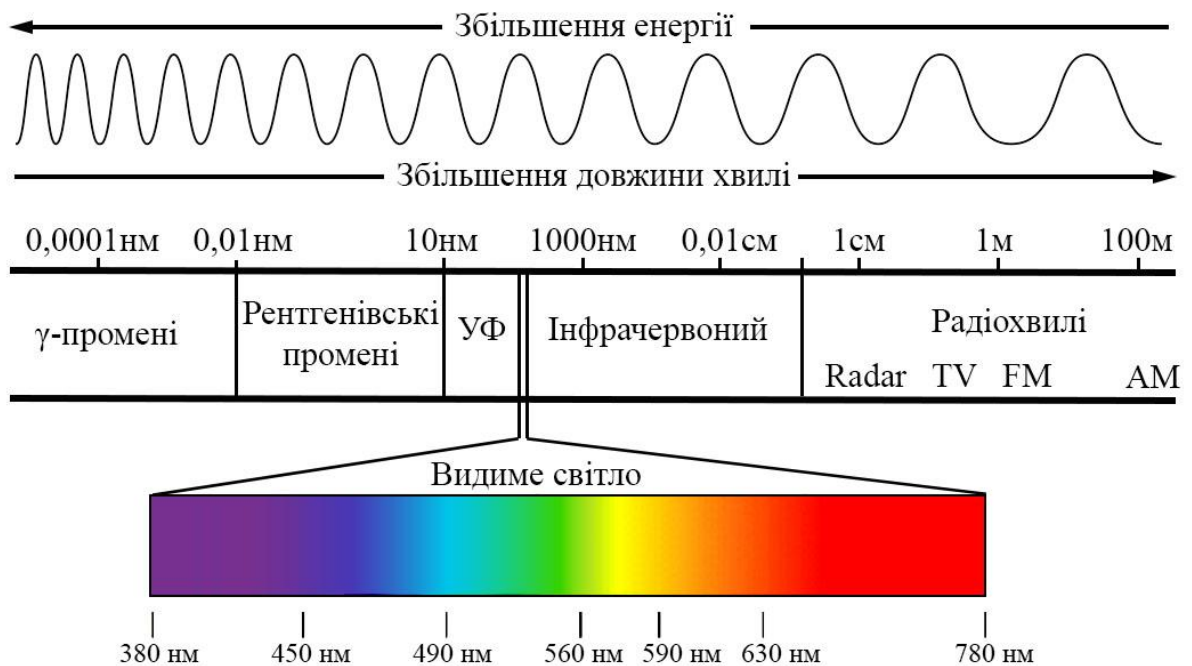


Рис. 2.2

Основні спектральні області електромагнітного спектра:

### 1. Радіохвилі

- Довжина хвилі:  $\lambda > 1 \text{ м}$  (до  $\sim 10^6 \text{ м}$ )
- Частота:  $\nu < 3 \cdot 10^8 \text{ Гц}$
- Використання: радіозв'язок, телебачення, радіолокація, мобільний зв'язок.

### 2. Мікрохвилі

- $\lambda \approx 1 \text{ м} - 1 \text{ мм}$
- $\nu \approx 300 \text{ МГц} - 300 \text{ ГГц}$
- Використання: Wi-Fi, Bluetooth, радари, мікрохвильові печі, супутниковий зв'язок.

### 3. Інфрачервоне (ІЧ) випромінювання

- $\lambda \approx 1 \text{ мм} - 760 \text{ нм}$
- $\nu \approx 300 \text{ ГГц} - 400 \text{ ТГц}$
- Використання: тепловізори, дистанційні пульти, системи нічного бачення, медицина.

### 4. Видиме світло

- $\lambda \approx 760 - 380 \text{ нм}$
- $\nu \approx 400 - 790 \text{ ТГц}$
- Це діапазон, що сприймається людським оком:
  - червоний ( $\sim 760-620 \text{ нм}$ ),
  - оранжевий ( $620-590 \text{ нм}$ ),
  - жовтий ( $590-570 \text{ нм}$ ),
  - зелений ( $570-500 \text{ нм}$ ),
  - блакитний ( $500-450 \text{ нм}$ ),
  - фіолетовий ( $450-380 \text{ нм}$ ).

### 5. Ультрафіолет (УФ)

- $\lambda \approx 380 - 10 \text{ нм}$
- $\nu \approx 7,9 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{16} \text{ Гц}$
- Використання: стерилізація, люмінесценція, аналіз речовин, біологічний вплив (вітамін D, опіки).

### 6. Рентгенівське випромінювання

- $\lambda \approx 10 - 0,01 \text{ нм}$
- $\nu \approx 3 \cdot 10^{16} - 3 \cdot 10^{19} \text{ Гц}$
- Використання: медична діагностика, кристалографія, контроль матеріалів.

### 7. Гамма-випромінювання ( $\gamma$ -промені)

- $\lambda < 0,01 \text{ нм}$
- $\nu > 3 \cdot 10^{19} \text{ Гц}$
- Використання: ядерна медицина, стерилізація, фізика високих енергій, космічні дослідження.

*Контрольні запитання і завдання*

1. Дайте означення електромагнітної хвилі
2. Що дало змогу зробити висновок про те що світло є електромагнітною хвилею?
3. Виведіть диференціальні хвильові рівняння для векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  із системи рівнянь Максвелла
4. Який вигляд мають розв'язки диференціальних хвильових рівнянь?
5. Які параметри входять до рівняння плоскої хвилі?
6. Одержіть співвідношення між  $\omega$  та  $k$
7. Як визначається фазова швидкість поширення ЕМХ?
8. Дайте визначення поперечної хвилі. Як довести що ЕМХ є поперечною хвилею?
9. Виведіть формулу взаємозв'язку між миттєвими значеннями  $E$  і  $H$  ЕМХ
10. Як довести що миттєві значення  $E$  і  $H$  плоскої хвилі залежать лише від часу та координати, яка відповідає напрямку поширення хвилі?
11. Що таке довжина хвилі?
12. Як визначається хвильове число?
13. Які хвилі називаються монохроматичними?
14. Що таке електромагнітний спектр?
15. Охарактеризуйте основні спектральні області ЕМХ

### 3. Енергія електромагнітної хвилі

#### 3.1. Вектор Пойнтінга

Електромагнітна хвиля являє собою поширення у просторі змінного електромагнітного поля і тому переносить енергію, що складається з енергії електричного та магнітного полів хвилі.

В однорідному непровідному неферомагнітному середовищі густина енергії електромагнітного поля  $w$  дорівнює сумі густин енергій електричного і магнітного полів:

$$w = w_e + w_m = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (3.1)$$

Оскільки за (2.9)  $\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0\mu} H$ , вираз (3.1) можна перетворити як

$$w = \epsilon\epsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2 = \sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} EH = \frac{EH}{v}, \quad (3.2)$$

де  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  – швидкість поширення хвилі.

Виходячи із (3.2), можна визначити густину потоку енергії  $\Pi$  як добуток густини енергії  $w$  на швидкість поширення хвилі  $v$ :

$$\Pi = wv = EH. \quad (3.3)$$

*Густина потоку енергії (густина потужності)* – це векторна фізична величина, яка характеризується кількістю енергії, що протікає за одиницю часу через одиницю площі, орієнтовану перпендикулярно до спрямованості потоку.

Напрямок перенесення енергії співпадає з напрямком вектора швидкості поширення хвилі  $\vec{v}$ , який пов'язаний із напрямками векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  правилом правого гвинта. Тому вектор густини потоку енергії електромагнітної хвилі  $\vec{\Pi}$ , який називається *вектором Пойнтінга*, визначається векторним добутком векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (3.4)$$

### 3.2. Теорема Пойнтінга

Оскільки електромагнітні хвилі, розповсюджуючись в просторі, переносять енергію, то якщо розглянути деякий об'єм  $V$ , оточений замкненою поверхнею  $S$ , енергія, яка міститься в ньому, буде змінюватись з часом.

Як відомо, енергію електричного поля визначають за формулою  $W_e = \int_V w_e dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$ , а магнітного –  $W_m = \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$ . Тоді повна енергія електромагнітного поля, що міститься в об'ємі  $V$

$$W = \int_V (w_e + w_m) dV = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV. \quad (3.5)$$

Зменшення за одиницю часу запасу електромагнітної енергії в об'ємі  $V$

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \left( \frac{\partial w_e}{\partial t} + \frac{\partial w_m}{\partial t} \right) dV. \quad (3.6)$$

В однорідному неізоляційному неферомагнітному середовищі зміну з часом густини електричної та магнітної енергії можна обчислити як

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \right) = \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) = \frac{\mu \mu_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{H}) = \mu \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Але із рівняння (1.9) системи рівнянь Максвелла виражаємо

$$\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{j}, \text{ а із рівняння (1.8) виражаємо } \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}, \text{ і після}$$

підстановки вираз (3.6) перетворюється як

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \left( \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{j}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right) dV = \int_V \left( \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) + \vec{j} \cdot \vec{E} \right) dV.$$

Вираз  $\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$  можна спростити за правилом векторної тотожності

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

$\Rightarrow$

$$\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}.$$

В той же час, згідно з законом Джоуля-Ленца в диференціальній формі, вираз  $\vec{j}\vec{E}$  – це питома теплова потужність струму, тобто кількість теплоти, що виділяється за одиницю часу в одиниці об'єму провідника. Повна теплова потужність, що буде виділятися в об'ємі  $V$ , дорівнюватиме  $P = \int_V \vec{j}\vec{E} dV$ .

Таким чином, вираз (3.6) набуває вигляду

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} + \vec{j}\vec{E}) dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} dV + \int_V \vec{j}\vec{E} dV = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} + P,$$

де враховано, що за теоремою Остроградського - Гауса  $\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} dV$ .

Одержана формула

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} + P \quad (3.7)$$

являє собою **теорему Пойнтінга** – теорему, що описує закон збереження енергії електромагнітного поля:

*Швидкість зменшення електромагнітної енергії, запасеної в об'ємі, дорівнює сумі направленого назовні потоку потужності через поверхню, що обмежує цей об'єм, і потужності, що виділяється струмами, що протікають в цьому об'ємі.*

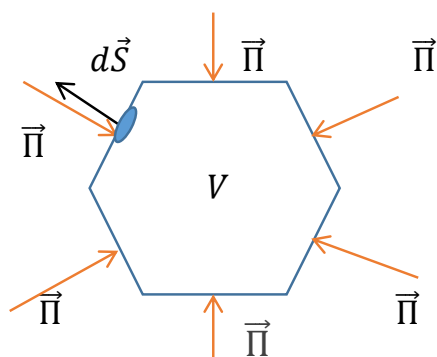


Рис.3.1

Звідси, направлений всередину потік вектора Пойнтінга крізь будь-яку замкнену поверхню, що обмежує деякий об'єм (Рис. 3.1), рівний сумі потужностей: потужності, яка виділяється в об'ємі у вигляді тепла  $P$  і потужності, яка витрачається на приріст енергії електромагнітного поля  $\frac{\partial W}{\partial t}$ .

Потужність теплових втрат  $P$  завжди позитивна, а зміна енергії електромагнітного поля може бути і позитивною, і негативною. Якщо вона позитивна, то електромагнітна енергія всередині об'єму збільшується. В цьому випадку потік вектора  $\vec{\Pi}$  через поверхню буде позитивним. З цим ми стикаємось при розігріві їжі у НВЧ пічі.

### 3.3. Інтенсивність ЕМХ

Оскільки вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{k}$  ЕМХ взаємно перпендикулярні і утворюють правоїгвинтову систему, модуль вектора Пойнтінга обчислюється як  $|\vec{\Pi}| = EH \sin 90^\circ = EH$ . Тоді, враховуючи, що за (2.9)  $\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu_0\mu}H$ ,

$$|\vec{\Pi}| = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu_0\mu}} E^2. \quad (3.8)$$

Для гармонічної плоскої хвилі вигляду (2.10) формула (3.8) записується як

$$|\vec{\Pi}| = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu_0\mu}} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

і представляє собою змінну з часом величину. Проте фізичний зміст має лише середнє значення цієї величини за період коливань: різного роду сенсори та приймачі електромагнітних хвиль не можуть відстежувати швидкозмінні миттєві значення поля, а реєструють середнє за часом.

Обчислимо середнє значення  $\cos^2(\omega t)$  за один період коливань:

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right) dt = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \right) \Big|_0^T = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\langle |\vec{\Pi}| \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu_0\mu}} E_0^2. \quad (3.9)$$

Середнє значення модуля вектора Пойнтінга називається **інтенсивністю** хвилі  $I$  та характеризує усереднену кількість енергії, яку хвиля переносить через одиницю площі за одиницю часу.

Приймаючи, що в однорідному неферомагнітному середовищі  $\mu \approx 1$  і показник заломлення середовища  $n = \sqrt{\varepsilon}$ ,

$$I = \langle |\vec{\Pi}| \rangle = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 E_0^2. \quad (3.10)$$

### *Контрольні запитання і завдання*

1. Які складові енергії, що переносяться у просторі електромагнітною хвилею?
2. Як записується густина енергії електромагнітного поля через електричне та магнітне поля?
3. Як обчислити енергію електромагнітного поля, що міститься в деякому об'ємі, якщо відома густина енергії?
4. Який фізичний сенс має добуток густини енергії на швидкість її поширення?
5. Що таке вектор Пойнтінга і який фізичний сенс він має? Яка його розмірність?
6. Сформулюйте теорему Пойнтінга (закон збереження енергії для електромагнітного поля) і поясніть її фізичний зміст
7. Чому дорівнює потік вектора Пойнтінга крізь будь-яку замкнену поверхню?
8. Чому в оптичному діапазоні користуються усередненим значенням модуля вектора Пойнтінга?
9. Що таке інтенсивність ЕМХ?
10. Чому дорівнює інтенсивність ЕМХ в однорідному неферомагнітному середовищі?
11. Яке співвідношення між інтенсивністю та амплітудою ЕМХ?

## 4. Оптика. Інтерференція електромагнітних хвиль

### 4.1. Закони відбивання та заломлення світла

*Оптика* – це розділ фізики, в якому вивчаються властивості світла, його фізична природа і взаємодія з речовиною. Під світлом в оптиці розуміють електромагнітні хвилі з частотою  $\nu$  від  $3 \cdot 10^{12}$  до  $3 \cdot 10^{16}$  Гц, відповідні інфрачервоному випромінюванню, видимому світлу і ультрафіолетовому випромінюванню. Цю область частот прийнято називати оптичною областю спектру електромагнітного випромінювання. Їй відповідають довжини хвиль  $\lambda$  від  $2 \cdot 10^{-3}$  до  $10^{-7}$  м. Видимому світлу відповідають довжини хвиль від  $3,8 \cdot 10^{-7}$  до  $7,6 \cdot 10^{-7}$  м. Виділення цієї частини спектру електромагнітних хвиль в окрему область обумовлене спільністю методів їх експериментального і теоретичного дослідження. В оптичній області спектру частота  $\nu$  вже порівняна з власними частотами коливань атомів і молекул, тому тут істотні явища, обумовлені атомістичною будовою речовини. Разом з хвильовими властивостями в цій області випромінювання виявляються і квантові властивості світла. Таким чином, з погляду сучасних уявлень світло має подвійну природу, тобто йому властивий корпускулярно-хвильовий дуалізм.

#### 4.1.1. Деякі відомості з геометричної оптики

*Геометричною оптикою* називають частину оптики, в якій вивчаються закони поширення світла в прозорих середовищах на основі уявлення про нього, як про сукупність *світлових променів*. Під променем розуміють лінію, уздовж якої поширюється енергія електромагнітної хвилі. Основу геометричної оптики утворюють наступні закони:

- 1) закон прямолінійного поширення світла;
- 2) закон незалежності світлових променів;
- 3) закон відбиття світла;
- 4) закон заломлення світла;
- 5) закон оборотності світлових променів.

**Закон прямолінійного поширення світла:** у однорідному середовищі світло поширюється прямолінійно. Цей закон є наближеним: при проходженні світла через дуже малі отвори спостерігаються відхилення від прямолінійності, тим більші, чим менше отвір.

**Закон незалежності світлових променів:** світлові промені, поширюючись у просторі, при перетині не впливають один на одного. Перетини променів не заважають кожному з них поширюватися незалежно один від одного. Цей закон справедливий при не дуже великій інтенсивності світла. При інтенсивності, що досягається за допомогою лазерів, незалежність світлових променів перестає дотримуватися.

**Закони відбивання світла (Рис. 4.1):**

- 1) кут падіння  $\alpha$  дорівнює куту відбивання  $\gamma$ ;
- 2) падаючий промінь, відбитий промінь і перпендикуляр до поверхні, проведений у точку падіння променю лежать в одній площині.

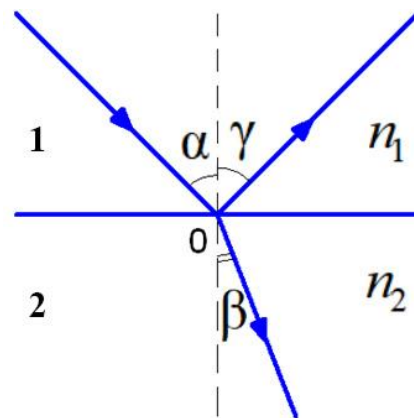


Рис.4.1

**Закони заломлення Снелліуса (Рис. 4.1):**

- 1) заломлений промінь, падаючий промінь і перпендикуляр до поверхні розділу середовищ, проведений у точку падіння, лежать в одній площині;
- 2) відношення синуса кута падіння  $\alpha$  до синуса кута заломлення  $\beta$  є величиною сталою для двох даних середовищ:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21}. \quad (4.1)$$

Величина  $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$  називається *відносним показником заломлення* середовища 2 відносно середовища 1.

*Абсолютним показником заломлення середовища* називається показник заломлення середовища відносно вакууму. Він дорівнює відношенню швидкості світла у вакуумі до швидкості світла в даному середовищі:

$$n = \frac{c}{v}, \quad (4.2)$$

де  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – швидкість світла у вакуумі,  $v$  – швидкість світла у даному середовищі.

**Закон оборотності (принцип оборотності) світлових променів:** якщо промінь падає з першого середовища на межу другого під кутом  $\alpha$ , заломлюється на межі і переходить у друге середовище під кутом  $\beta$ , то промінь, пущений у зворотному напрямі з другого середовища під кутом  $\beta$ , вийде в першому середовищі під кутом  $\alpha$ . Аналогічно буде і при відбиванні. Принцип оборотності виконується при будь-якій кількості заломлень і відбивань на межах оптичних систем.

#### **4.1.2. Хвильова оптика**

*Хвильова оптика* – розділ фізики, що вивчає оптичні явища, в яких виявляється хвильова природа світла. До них відносяться інтерференція, дифракція, поляризація. В основі хвильової оптики лежать рівняння Максвелла і висновки з них для електромагнітних хвиль. У класичній хвильовій оптиці розглядаються середовища, лінійні за своїми оптичними властивостями, тобто такі, для яких діелектрична  $\epsilon$  і магнітна  $\mu$  проникність не залежать від інтенсивності світла. Для таких середовищ справедливий принцип суперпозиції.

В електромагнітній хвилі коливаються вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ . Як показує досвід, фізіологічне, фотохімічне, фотоелектричне і інші дії світла викликаються коливаннями вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$ . Тому вектор напруженості електричного поля називають **світловим вектором**.

Розглянемо закони відбивання та заломлення з точки зору хвильової природи світла. Нехай хвиля зі світловим вектором загального вигляду (2.5) поширюється із середовища з показником заломлення  $n_1$  у середовище з

показником заломлення  $n_2$  і падає на границю розділу цих середовищ (Рис. 4.2).

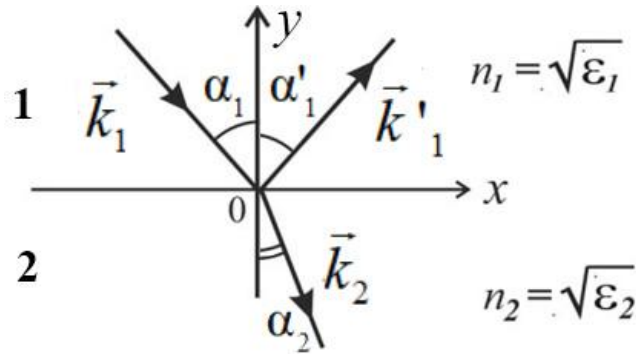


Рис. 4.2

Позначимо:

- $\dot{\vec{E}}_1$  – світловий вектор хвилі що падає і має хвильовий вектор  $\vec{k}_1$ ;
- $\dot{\vec{E}}'_1$  – світловий вектор відбитої хвилі що має хвильовий вектор  $\vec{k}'_1$ ;
- $\dot{\vec{E}}_2$  – світловий вектор заломленої хвилі що має хвильовий вектор  $\vec{k}_2$ .

Нехай хвильові вектори лежать в площині  $XU$ . Тоді компонента  $k_z = 0$ . В точці падіння хвилі на границю розділу середовищ координата  $y = 0$ , а за рисунком на границі розділу координата  $z$  також дорівнює нулю. Оскільки падіння хвилі може відбуватися в якій завгодно точці вздовж осі  $OX$ , то  $x \in (-\infty; +\infty)$ . Тому, у рівнянні хвилі скалярний добуток  $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x$ , і світлові вектори набувають вигляду

$$\dot{\vec{E}}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - k_{1x} x)}; \quad \dot{\vec{E}}'_1 = \vec{E}'_{01} e^{i(\omega t - k'_{1x} x)}; \quad \dot{\vec{E}}_2 = \vec{E}_{02} e^{i(\omega t - k_{2x} x)}.$$

За принципом суперпозиції,

$$\dot{\vec{E}}_1 = \dot{\vec{E}}'_1 + \dot{\vec{E}}_2;$$

маємо

$$\begin{aligned} \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - k_{1x} x)} &= \vec{E}'_{01} e^{i(\omega t - k'_{1x} x)} + \vec{E}_{02} e^{i(\omega t - k_{2x} x)} \Rightarrow \\ \vec{E}_{01} e^{-ik_{1x} x} &= \vec{E}'_{01} e^{-ik'_{1x} x} + \vec{E}_{02} e^{-ik_{2x} x}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Рівність (4.3) справджується для  $x \in (-\infty; +\infty)$  лише за умови

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}. \quad (4.4)$$

З Рис. 4.2, та, враховуючи що за (2.7) хвильове число  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c}$ , де

$n$  – показник заломлення середовища, маємо

$$k_{1x} = |k_1| \sin \alpha_1 = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha_1; \quad (4.5, \text{ а})$$

$$k'_{1x} = |k'_1| \sin \alpha'_1 = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha'_1; \quad (4.5, \text{ б})$$

$$k_{2x} = |k_2| \sin \alpha_2 = \frac{\omega}{c} n_2 \sin \alpha_2. \quad (4.5, \text{ в})$$

Отже, з рівності (4.5, а) та (4.5, б) випливає що

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha'_1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha'_1 - \text{закон відбивання світла.}$$

З рівності (4.5, а) та (4.5, в) випливає що

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \Rightarrow \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} - \text{закон заломлення світла.}$$

Одержимо тепер **співвідношення між амплітудами** відбитої/заломленої та падаючої хвилі.

Для цього розглянемо граничні умови для вектора  $\vec{E}$  на межі розділу двох середовищ. Оберемо невеликий замкнутий контур  $L$ , витягнутий вздовж межі розділу (Рис.4.3, де  $\tau$  – довжина

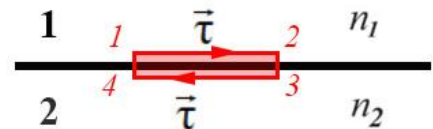


Рис. 4.3

сторони контура), і розглянемо для нього закон (1.1) про циркуляцію вектора електричного поля:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_{1-2} \vec{E} d\vec{l} + \int_{2-3} \vec{E} d\vec{l} + \int_{3-4} \vec{E} d\vec{l} + \int_{4-1} \vec{E} d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

При цьому контур є достатньо малим, щоб вважати поле сталим вздовж його відрізків 1-2 та 3-4:

$$\int_{1-2} \vec{E} d\vec{l} = \vec{E}_1 \vec{\tau} = E_{1\tau} \tau; \quad \int_{3-4} \vec{E} d\vec{l} = \vec{E}_2 \vec{\tau} = -E_{2\tau} \tau,$$

і є достатньо вузьким, щоб вважати довжину відрізків 2-3 та 4-1 наближеною до нуля:

$$\int_{2-3} \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \int_{4-1} \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Тоді площа  $S$ , обмежена контуром, теж наближається до нуля, і  $\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = 0$ .

Отже,

$$\begin{aligned} E_{1\tau} \tau - E_{2\tau} \tau = 0 &\Rightarrow \\ E_{1\tau} &= E_{2\tau}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поле в середовищі 1 представляє собою суперпозицію падаючої та відбитої хвиль, а в середовищі 2 – заломлену хвилю. Тому гранична умова (4.6) переписеться як

$$E_{1x} + E'_{1x} = E_{2x}. \quad (4.7)$$

Розглянемо тепер закон збереження енергії для ЕМХ на межі розділу двох середовищ. Енергія, що переноситься хвилею, характеризується вектором густини потоку енергії (вектором Пойнтінга). Тоді при нормальному падінні світла (або наближено, якщо кут падіння  $\alpha$  малий) вектор Пойнтінга хвилі до взаємодії з межею має дорівнювати сумарному вектору Пойнтінга після взаємодії:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_1 &= \vec{\Pi}'_1 + \vec{\Pi}_2 \Rightarrow \\ \Pi_{1x} &= \Pi'_{1x} + \Pi_{2x}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Використовуючи формулу (3.10), із (4.8) одержуємо співвідношення

$$n_1 E_{1x}^2 = n_1 E'_{1x}{}^2 + n_2 E_{2x}^2. \quad (4.9)$$

Виражаємо із (4.7)  $E'_{1x} = E_{2x} - E_{1x}$  і підставляємо у (4.9):

$$n_1 E_{1x}^2 = n_1 (E_{2x} - E_{1x})^2 + n_2 E_{2x}^2 \Rightarrow$$

$$n_1 E_{1x}^2 = n_1 E_{2x}^2 - 2n_1 E_{1x} E_{2x} + n_1 E_{1x}^2 + n_2 E_{2x}^2 \Rightarrow$$

$$0 = n_1 E_{2x}^2 - 2n_1 E_{1x} E_{2x} + n_2 E_{2x}^2 \Rightarrow 2n_1 E_{1x} = (n_1 + n_2) E_{2x}.$$

Таким чином, *співвідношення між амплітудою заломленої та падаючої хвилі*

$$E_{2x} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_{1x}. \quad (4.10)$$

В свою чергу,  $E'_{1x} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_{1x} - E_{1x}$ , і *співвідношення між амплітудою відбитої та падаючої хвилі*

$$E'_{1x} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_{1x}. \quad (4.11)$$

Якщо  $n_2 > n_1$  (відбиття хвилі від оптично густішого середовища), то у формулі (4.11) з'являється від'ємний знак, з чого слідує що  $E'_{1x}$  має протилежну фазу коливань до  $E_{1x}$ . Тобто, при відбитті від оптично густішого середовища хвиля змінює фазу коливань на  $\pi$ .

*Приклад. Обчислимо у скільки разів зменшується інтенсивність хвилі, що падає нормально із повітря на скло з показником заломлення  $n = 1,5$ .*

*Згідно (4.10), відношення амплітуд заломленої та падаючої хвилі*

$$\frac{E_{2x}}{E_{1x}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2 \cdot 1}{1 + 1,5} = 0,8.$$

*Тоді відношення інтенсивностей*

$$\frac{I_2}{I_1} = \left( \frac{E_{2x}}{E_{1x}} \right)^2 = 0,64.$$

## 4.2. Інтерференція

**Інтерференція світла** – це явище накладання когерентних світлових хвиль, в результаті якого відбувається перерозподіл в просторі енергії світлового поля, тобто утворюються світлі ділянки (максимуми інтенсивності) і темні ділянки (мінімуми інтенсивності) інтерференційної картини [2].

**Когерентні хвилі** – хвилі, що мають однакову частоту і приходять в дану точку простору з різницею фаз, яка не змінюється з часом. Світло від звичайних джерел є некогерентним.

Причини цього знаходяться в самому механізмі випромінювання світла атомами (молекулами, іонами) джерела світла. Збуджений атом випромінює протягом дуже короткого проміжку часу ( $t \sim 10^{-8}$  с), після чого він, витративши свою надмірну енергію на випромінювання, повертається у нормальний (незбуджений) стан. Через деякий час атом може знову збудитися, отримавши енергію ззовні, і почати випромінювати. Таке переривисте випромінювання світла атомами у вигляді окремих короточасних імпульсів характерне для будь-якого джерела світла незалежно від виду конкретних процесів, що відбуваються в ньому. При спонтанному (мимовільному) випромінюванні атоми випромінюють незалежно один від одного з випадковими початковими фазами, що хаотично змінюються від одного акту випромінювання до іншого. Тому спонтанно випромінюючі тіла є некогерентними джерелами.

Для отримання когерентних світлових хвиль застосовують методи розділення світла від одного джерела на дві або декілька хвиль. У кожній з них представлено випромінювання одних і тих же атомів джерела, так що ці системи хвиль когерентні між собою. Потім хвилі проходять або різні відстані, або йдуть у різних середовищах, після чого їх знову накладають. При цьому різниця довжин оптичних шляхів інтерферуючих хвиль не повинна бути дуже великою.

Розглянемо накладення двох світлових хвиль, збуджених когерентними джерелами  $S_1$  і  $S_2$  в точці  $P$  (Рис. 4.4). Величини хвильових векторів когерентних хвиль  $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

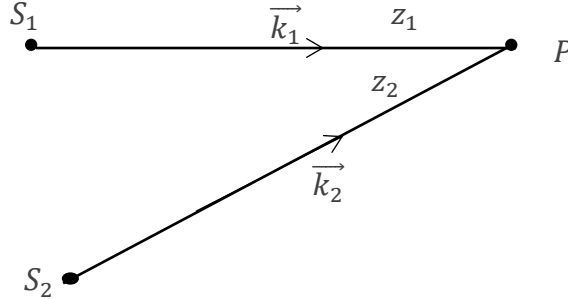


Рис. 4.4

Згідно з (2.10), ці хвилі описуються рівняннями:

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - kz_1) \text{ та } E_2 = E_{02} \cos(\omega t - kz_2), \quad (4.12)$$

або у більш зручному для обчислень комплексному записі

$$\dot{E}_1 = E_{01} e^{i(\omega t - kz_1)} \text{ та } \dot{E}_2 = E_{02} e^{i(\omega t - kz_2)}. \quad (4.13)$$

При накладанні хвиль в одній точці виконується принцип суперпозиції полів:

$$\dot{E} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2.$$

При цьому інтенсивність результуючої хвилі, згідно (3.9), пропорційна квадрату амплітуди:  $I \sim E^2$ . Обчислимо

$$\begin{aligned} \dot{E}^2 &= \dot{E}\dot{E}^* = (\dot{E}_1 + \dot{E}_2)(\dot{E}_1^* + \dot{E}_2^*) = \dot{E}_1\dot{E}_1^* + \dot{E}_2\dot{E}_2^* + \dot{E}_1\dot{E}_2^* + \dot{E}_2\dot{E}_1^* = \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01}E_{02}e^{i(\omega t - kz_1)}e^{-i(\omega t - kz_2)} + E_{01}E_{02}e^{-i(\omega t - kz_1)}e^{i(\omega t - kz_2)} = \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01}E_{02}(e^{-ik(z_1 - z_2)} + e^{ik(z_1 - z_2)}) = \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos k(z_1 - z_2). \end{aligned}$$

Тоді, інтенсивність  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos k(z_1 - z_2)$ , або

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi. \quad (4.14)$$

### Різниця фаз двох хвиль

$$\varphi = k(z_1 - z_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z, \quad (4.15)$$

де  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвильове число, а величину  $\Delta z = z_1 - z_2$  називають *геометричною різницею ходу*.

Якщо інтерферуючі промені проходять через два однорідні середовища з різними показниками заломлення  $n_1$  і  $n_2$ , то замість геометричної різниці ходу  $\Delta z$  вводять поняття *оптичної різниці ходу*  $\Delta$ :

$$\Delta = n_1 z_1 - n_2 z_2. \quad (4.16)$$

**Оптичний шлях**  $L = nz$  – це скалярна величина, яка чисельно дорівнює добутку показника заломлення середовища на геометричний шлях, пройдений у ньому хвилею.

Тоді формула різниці фаз (4.15) перепишеться у вигляді

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta. \quad (4.17)$$

Інтенсивність результуючого коливання можна визначити методом векторних діаграм (Рис.4.5):

$$\dot{E}^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \varphi.$$

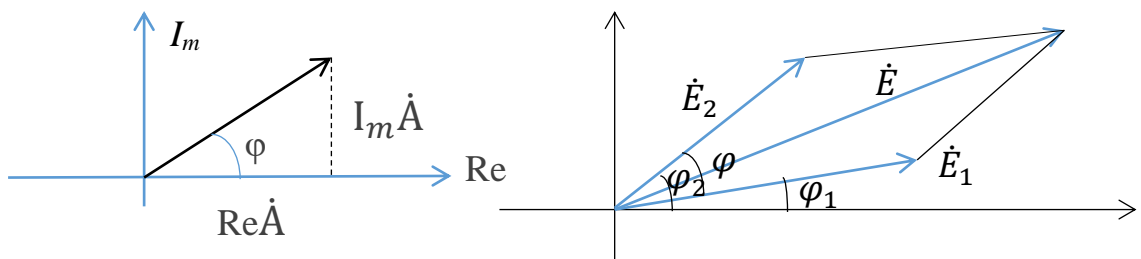


Рис. 4.5

Аналіз формули (4.14):

- Якщо хвилі некогерентні, то  $\varphi$  безперервно змінюється, а  $\cos \varphi$  приймає з рівною імовірністю будь-які значення від  $-1$  до  $+1$ . Середнє значення  $\cos \varphi$  за часом дорівнює нулю. Звідси можна зробити висновок, що при накладенні некогерентних хвиль результуюча інтенсивність світлової хвилі

дорівнює сумі інтенсивностей, що створює кожна з хвиль окремо:

$$I = I_1 + I_2.$$

- Якщо хвилі когерентні, то  $\cos \varphi$  має сталі в часі (але своє для кожної точки простору) значення. Якщо  $\cos \varphi > 0$ , то  $I > I_1 + I_2$ ; якщо  $\cos \varphi < 0$ , то  $I < I_1 + I_2$ . Таким чином, при накладенні когерентних хвиль відбувається перерозподіл енергії, в результаті якого в одних областях хвильового поля інтенсивність хвилі посилюється (виникають максимуми), а в інших – інтенсивність зменшується (виникають мінімуми).

Встановимо умови спостереження максимумів і мінімумів інтерференції.

1. Інтенсивність максимальна, якщо у виразі (4.14)  $\cos \varphi = 1$ , тобто

$$\varphi = 2m\pi, \text{ де } m = 0, 1, 2, 3, \dots - \text{ціле число.}$$

Використовуючи (4.17), маємо  $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta = 2m\pi. \Rightarrow$

$$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2} \quad (4.18)$$

– **умова максимумів інтерференції**: максимум інтерференції спостерігається, якщо оптична різниця ходу двох хвиль дорівнює парному числу півхвиль. Число  $m$  називається порядком максимуму.

2. Інтенсивність мінімальна, якщо у виразі (4.14)  $\cos \varphi = -1$ , тобто

$$\varphi = (2m + 1)\pi, \text{ де } m = 0, 1, 2, 3, \dots - \text{ціле число.}$$

Використовуючи (4.17), маємо  $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta = (2m + 1)\pi. \Rightarrow$

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (4.19)$$

– **умова мінімумів інтерференції**: мінімум інтерференції спостерігається, якщо оптична різниця ходу двох хвиль дорівнює непарному числу півхвиль.

Отримані співвідношення можна представити у вигляді таблиці 4.1.

## Умови максимумів і мінімумів інтерференції

Умова максимумів	$\varphi = 2m\pi$	$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}$
Умова мінімумів	$\varphi = (2m + 1)\pi$	$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$

**4.3. Методи одержання інтерференції**

Для отримання когерентних світлових хвиль за допомогою звичайних (нелазерних) джерел застосовують *метод розділення світла* від одного джерела на два або декілька світлових пучків. Тому ці хвилі когерентні між собою та інтерферують при накладанні. В оптиці відомо два принципово різні шляхи одержання когерентних світлових пучків з одного: поділом хвильового фронту і поділом амплітуди.

**4.3.1. Методи одержання когерентних пучків світла поділом хвильового фронту**

За цими методами один і той самий фронт хвилі геометрично розділяють у просторі, щоб з нього утворилися два пучки. Поділ здійснюється або проходженням пучка світла через два близько розташованих отвори в непрозорому екрані, або заломленням у біпризмах, або відбиванням від дзеркальних поверхонь.

Розглянемо декілька прикладів.

**1) Метод Юнга**

Схема установки Юнга показана на Рис. 4.6. Джерелом світла є яскраво освітлена щілина S, від якої світлова хвиля падає на дві вузькі щілини S<sub>1</sub> та S<sub>2</sub>, симетрично розміщені відносно S. Таким чином, щілини S<sub>1</sub> і S<sub>2</sub> відіграють роль вторинних джерел, когерентних між собою. Тоді на екрані спостерігається інтерференційна картина у вигляді світлих та темних смуг, що чергуються.

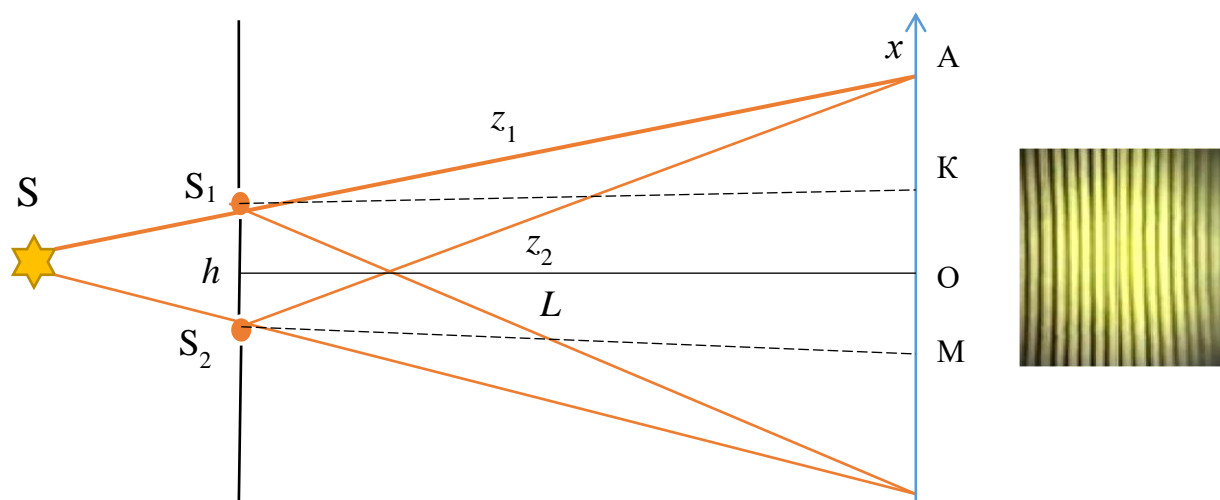


Рис. 4.6

Визначимо ширину інтерференційних смуг та відстань між ними. Нехай  $L$  – відстань від когерентних джерел до екрану,  $h$  – відстань між джерелами,  $OA = x$  – координата *min* або *max* інтерференції порядку  $m$ . З трикутників  $\Delta(AS_1K)$  і  $\Delta(AS_2M)$  визначаємо  $z_1^2$  та  $z_2^2$ :

$$z_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{h}{2}\right)^2; \quad z_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{h}{2}\right)^2;$$

$$z_2^2 - z_1^2 = 2xh;$$

$$(z_2 - z_1)(z_2 + z_1) = 2xh.$$

Різниця відстаней  $z_1$  та  $z_2$  є різницею ходу променів:  $z_2 - z_1 = \Delta$ , а для їх суми можна використати наближення  $z_2 + z_1 \approx 2L$  оскільки  $L \gg x$  та  $L \gg h$ .

Одержуємо

$$\Delta \cdot L = xh.$$

Використовуємо умови *max* або *min* інтерференції (4.18) – (4.19) та отримуємо формулу для координати  $x$ :

$$x_{\max} = \frac{m\lambda L}{h}; \quad x_{\min} = \frac{(2m+1)\lambda L}{2h}. \quad (4.20)$$

Ширина інтерференційної смуги визначається як відстань між двома сусідніми максимумами (або мінімумами) порядку  $m$  та  $m + 1$  і дорівнює

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{h}. \quad (4.21)$$

## 2) За допомоги біпризми Френеля

Біпризма Френеля (рис. 4.7) має вигляд двох однакових призм із показником заломлення  $n$  і дуже малим заломлюючим кутом  $\vartheta$ , які з'єднані малими основами. Світло від джерела  $S$  заломлюється в обох призмах, в результаті чого за призмою поширюються пучки  $1-1'$  і  $2-2'$ , які ніби випромінюються уявними джерелами  $S_1$  та  $S_2$ , які є когерентними. Таким чином, на екрані, в області  $1-2$  де пучки накладаються (зона інтерференції), спостерігається інтерференційна картина у вигляді світлих і темних смуг [2].

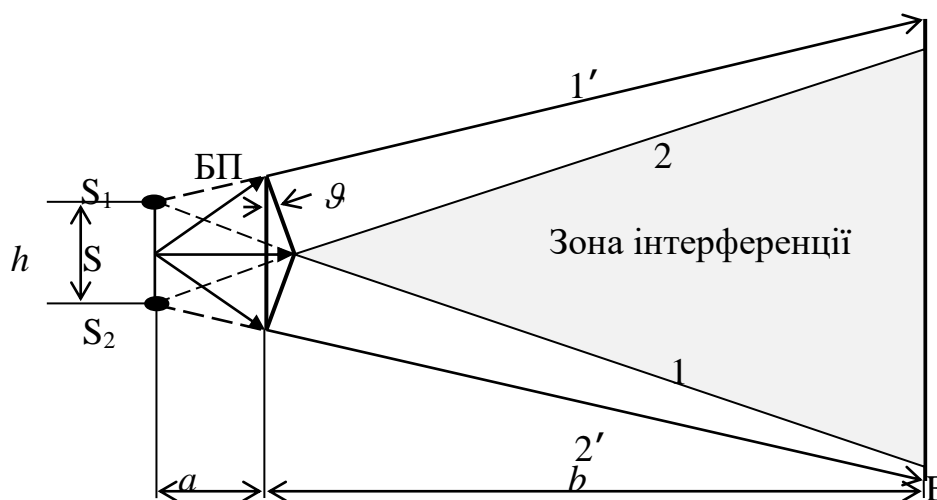


Рис. 4.7

Ширину смуги можна визначити аналогічно до попереднього прикладу за формулою (4.21), в якій  $L$  – відстань від площини уявних джерел  $S_1$  та  $S_2$  до екрану, а відстань  $h$  між  $S_1$  та  $S_2$  визначається із закону заломлення і при малому заломлюючому куті біпризми  $\vartheta$  дорівнює  $h = 2a(n-1)\vartheta$ , де  $a$  – відстань від площини уявних джерел до біпризми.

### 4.3.2. Часова та просторова когерентність

Описані вище методи одержання інтерференції передбачають наявність ідеально монохроматичного точкового джерела світла. Натомість, реальні джерела мають певні лінійні розміри і випромінюють хвилі не однієї частоти

$\omega$ , а «хвильовий пакет» зі спектральною шириною від  $\omega - \frac{\Delta\omega}{2}$  до  $\omega + \frac{\Delta\omega}{2}$ . Якщо

$\Delta\omega \ll \omega$ , хвилі вважаються квазімонохроматичними.

Проаналізуємо як це впливає на спостереження реальної інтерференційної картини.

1) **Часова когерентність** пов'язана з немонохроматичністю реального джерела, через яку у дослідах з поділом хвильового фронту різниця фаз поділених і формально когерентних променів насправді змінюється з часом.

Припустимо, що у спектрі випромінювання джерела  $S$  присутні дві частоти хвилі  $\omega - \frac{\Delta\omega}{2}$  і  $\omega + \frac{\Delta\omega}{2}$ :

$$E_1 = E_0 \cos\left(\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k - \frac{\Delta k}{2}\right)z\right); E_2 = E_0 \cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)z\right).$$

Тоді в результаті накладання одержуємо

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \cos(\omega t - kz)$$

(тут використані тригонометричні перетворення для суми косинусів), тобто, результуюча хвиля з частотою  $\omega$  модулюється по амплітуді змінним з часом множником  $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)$  і має вигляд, схематично показаний на рис. 4.8.

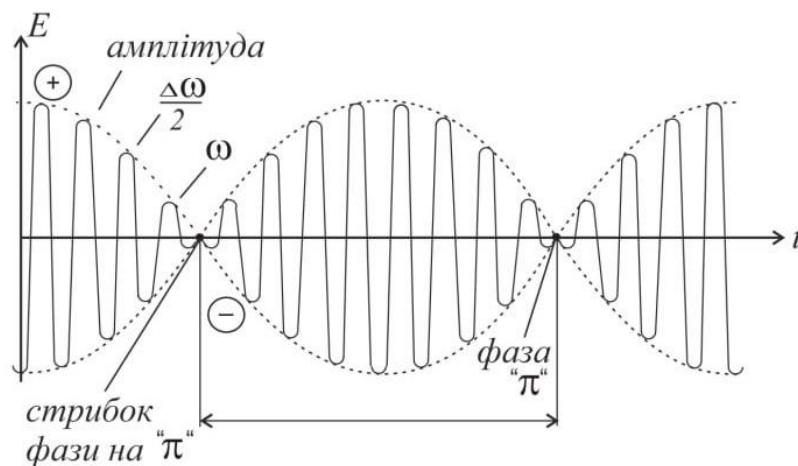


Рис. 4.8

Коли множник  $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) = -1$ , фаза основного коливання на

частоті  $\omega$  зазнає стрибка. Це відбувається коли  $\frac{\Delta\omega}{2}t = \pi$ , тобто

$$t_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (4.22)$$

**Період когерентності**  $t_{\text{ког}}$  – це проміжок часу, протягом якого початкова фаза коливань не змінюється. Немонохроматичну хвилю можна наближено вважати когерентною на протязі часу  $\Delta t \leq t_{\text{ког}}$ .

Виразимо час когерентності через спектральну ширину по довжині хвилі  $\Delta\lambda$ . Як відомо,  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ . Продиференціюємо цей вираз:  $d\omega = d\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right) = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda$ .

Знак «мінус» вказує на те, що коли частота збільшується, довжина хвилі зменшується. Отже, величина  $\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda$ , і

$$t_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}. \quad (4.23)$$

**Довжина когерентності**  $l_{\text{ког}}$  – це відстань, на яку поширюється хвиля за період когерентності:

$$l_{\text{ког}} = c \cdot t_{\text{ког}} = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (4.24)$$

У межах цієї відстані хвилю можна вважати когерентною.

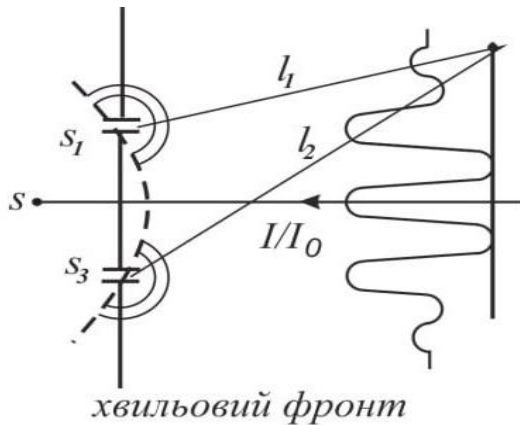


Рис. 4.9

Якщо в реальному досліді Юнга (Рис. 4.9) різниця ходу променів від двох щілин  $\Delta l = l_2 - l_1$  менша за довжину когерентності, то інтерференційна картина спостерігається.

Якщо ж  $\Delta l > l_{\text{ког}}$ , то інтерференція зникає, і екран переходить у режим рівномірного освітлення.

Найвищий порядок інтерференційного максимуму, який можна спостерігати у реальній картині, знайдемо із умов (4.18) і (4.24):

$$\Delta l_{\text{max}} = m_{\text{max}} \lambda \Rightarrow m_{\text{max}} = \frac{l_{\text{ког}}}{\lambda};$$

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (4.25)$$

- Для видимого сонячного світла, що має спектр частот від  $4 \cdot 10^{14}$  Гц до  $8 \cdot 10^{14}$  Гц ( $\lambda = 760$  нм та  $380$  нм), ширина спектру  $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu = 2\pi(8-4) \cdot 10^{14} = 8\pi \cdot 10^{14}$  Гц, тому  $t_{\text{коз}} = 2,5 \cdot 10^{-15}$  с,  $l_{\text{коз}} = 0,75 \cdot 10^{-6}$  м;
- Для високостабільних лазерів неперервної дії  $t_{\text{коз}}$  досягає  $10^{-2}$  с, а  $l_{\text{коз}} \approx 10^6$  м, але через неоднорідність атмосфери вдається спостерігати інтерференцію при різниці ходу в декілька кілометрів.

**2) Просторова когерентність** пов'язана зі скінченними лінійними розмірами реального джерела світла. Внаслідок цього когерентні промені, які приходять у точку спостереження від різних ділянок протяжного джерела, мають не однакові різницю ходу та різницю фаз. Тому в інтерференційній формулі (4.14) значення  $\cos\varphi$  є усередненим не тільки по часу, а й по всіх елементарних ділянках джерела, від яких приходять промені в точку спостереження. В результаті в усіх точках спостереження величина  $\cos\varphi$  виявляється меншою, ніж у випадку ідеального точкового джерела. Через це зменшується різниця інтенсивностей максимумів і мінімумів, тобто погіршується контрастність інтерференційних смуг. Таким чином при великих розмірах джерел смуги взагалі зникають навіть при дуже високому ступені монохроматичності випромінювання.

Нехай в досліді Юнга джерело світла має кутовий розмір  $\varphi$  (див. Рис. 4.10). Інтерференційна картина зникне якщо на положення 0-го мінімуму картини, створеної точкою S джерела, буде накладатись 0-й максимум картини, створеної точкою S<sub>1</sub> цього ж джерела. Згідно з формулами (4.20), координата 0-го  $\min$   $x_{\min} = \frac{\lambda L}{2h}$ . Положення 0-го  $\max$  знаходиться в початку координат, проте для точки S<sub>1</sub> початок координат зсунутий на  $\Delta x = L \cdot \text{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \approx L \frac{\varphi}{2}$  (дивись Рис. 4.10). При накладанні  $\min$  та  $\max$

$$\frac{\lambda L}{2h} = L \frac{\varphi}{2} \Rightarrow h = \frac{\lambda}{\varphi}.$$

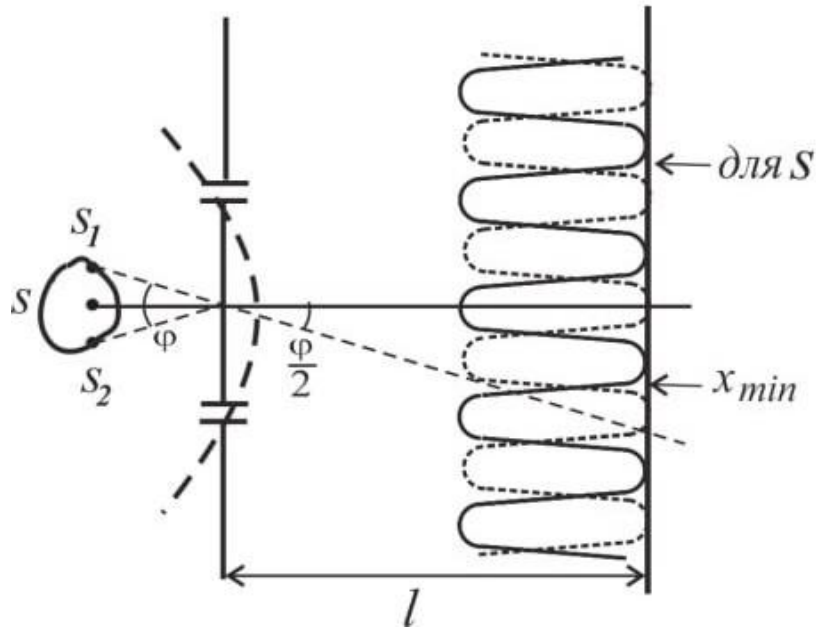


Рис. 4.10

**Радіус когерентності**  $\rho_{\text{ког}}$  – це параметр джерела випромінювання, що характеризує максимальну відстань між двома точками хвильового фронту, вторинні хвилі яких здатні створити інтерференційну картину:

$$\rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\varphi}. \quad (4.26)$$

#### 4.3.3. Методи одержання когерентних пучків світла поділом амплітуди

Ці методи полягають у поділі одного пучка світла за інтенсивністю (амплітудою), що здійснюється напівпрозорими поверхнями, які частково відбивають і частково пропускають світло. Вони придатні як для точкових джерел, так і для джерел скінченних розмірів і здатні забезпечити значно більшу інтенсивність інтерференційних смуг, ніж у методі поділу хвильового фронту.

**Плоскопаралельна пластинка.** Когерентні пучки можна одержати за допомогою плоскопаралельної прозорої пластинки за рахунок відбивання падаючого на пластинку світла від її верхньої і нижньої поверхонь. Прикладом такої інтерференції у природі може бути веселкове забарвлення тонких плівок (мильних бульбашок, плівок нафти або олії на поверхні води, прозорих плівок оксидів на поверхнях загартованих металевих деталей тощо).

Розглянемо плоскопаралельну пластинку товщиною  $h$  з показником заломлення  $n$ , яка розташована в повітрі, показник заломлення якого можна вважати рівним одиниці (Рис. 4.11). Нехай пучок світла падає на пластинку під кутом  $\alpha$ . При досягненні поверхні пластинки світло частково відбивається (промінь 1), а частково заломлюється під кутом  $\beta$  й проходить до другої поверхні, де також частково заломлюється і частково відбивається; відбите світло досягає першої поверхні, де, заломившись, виходить із пластинки (промінь 2). Оскільки промені 1 та 2 одержані з однієї хвилі, вони будуть когерентними, і ми можемо спостерігати їх інтерференцію у відбитому світлі.

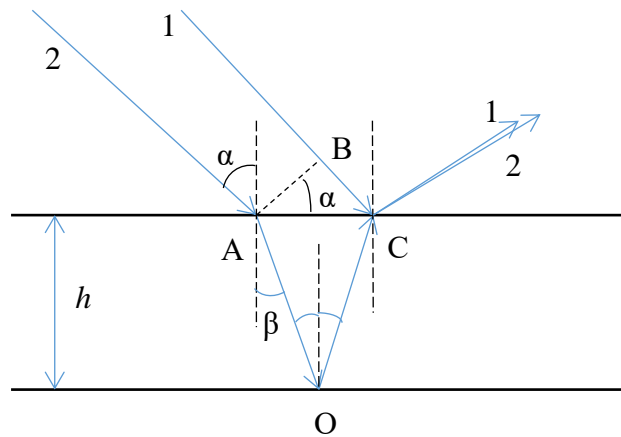


Рис. 4.11

Положенню фронту хвилі на рис. 4.11 відповідає лінія  $AB$ , перпендикулярна до напрямку поширення променів. Тоді за час, коли промінь 2 пройде шлях із точки  $A$  в точку  $C$ , промінь 1 пройде шлях із точки  $B$  в точку  $C$ . При цьому оптична різниця ходу, яку набувають промені 1 і 2 до того, як вони зйдуться в точці  $C$ , дорівнює

$$\Delta = (AO + OC)n - (BC + \lambda/2). \quad (4.27)$$

Тут враховано що при відбиванні хвилі від оптично густішого середовища фаза коливань вектора  $\vec{E}$  змінюється на протилежну (див. формулу (4.11)), тобто збільшується на  $\pi$ . Отже, за (4.17), оптичний шлях при цьому збільшується на  $\frac{\lambda}{2}$ . У випадку плоскопаралельної пластинки на

Рис. 4.11 таке відбиття відбувається для променя 1 у точці С, тому до його оптичного шляху додається  $\frac{\lambda}{2}$ .

З Рис. 4.11 маємо

$$AO+OC = 2 \frac{h}{\cos\beta}; \quad BC = AC \cdot \sin\alpha = 2h \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\alpha;$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Підстановка співвідношень у формулу (4.27) дасть наступний вираз оптичної різниці ходу променів у плоскопаралельній пластинці:

$$\Delta = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2}, \quad (4.28)$$

який далі застосовується до умов інтерференційного максимуму або мінімуму.

**Смуги рівного нахилу** - спостерігаються в тих випадках, коли на плоскопаралельну тонку плівку падає під різними кутами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  пучок світла, що сходиться (або розходить). Умови інтерференції для всіх променів, що падають на поверхню плівки і відбиваються від неї під одним і тим же кутом, однакові. Тому інтерференційна картина в цьому випадку називається смугами рівного нахилу.

**Смуги рівної товщини** – спостерігаються при відбиванні паралельного пучка променів (кут падіння  $\alpha$ ) від тонкої прозорої плівки, товщина якої  $h$  неоднакова в різних місцях. Умови інтерференції будуть однакові в тих точках, яким відповідають однакові значення  $h$ . Тому дана інтерференційна картина називається смугами рівної товщини.

Якщо роль пластини змінної товщини відіграє повітряний прошарок між лінзою з великою фокусною відстанню і плоскопаралельною пластинкою, то інтерференційну картину називають **кільцями Ньютона** [2] (Рис. 4.12).

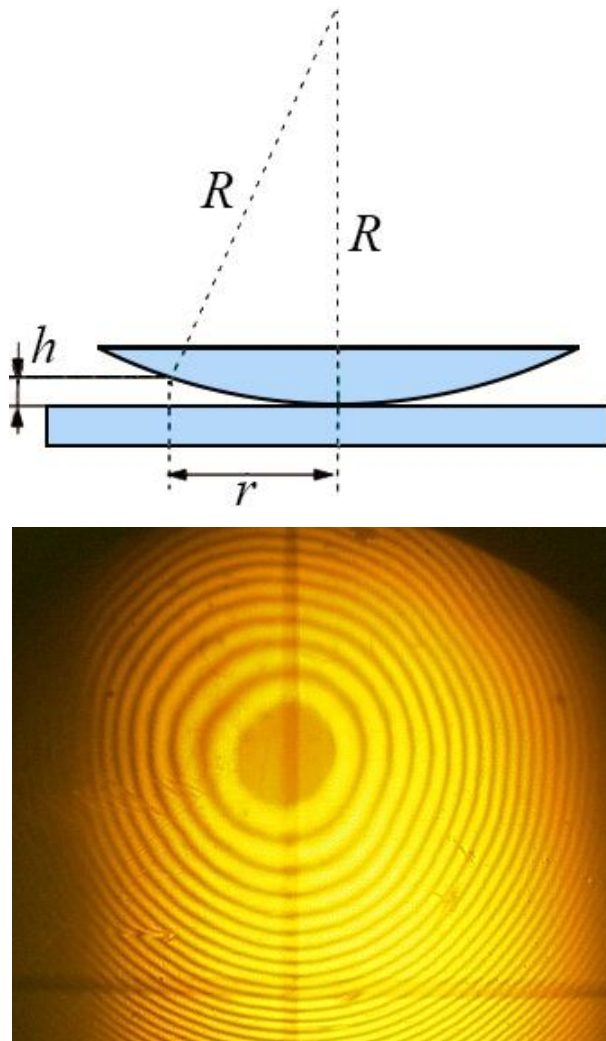


Рис. 4.12

Якщо на лінзу падає пучок монохроматичного світла, то світлові хвилі, відбиті від верхньої і нижньої меж цього повітряного прошарку, інтерферуватимуть між собою. При цьому у відбитому світлі виходить наступна картина: у центрі – темна пляма, оточена рядом концентричних світлих і чорних кілець спадаючої ширини.

Для нормального падіння світла на поверхню лінзи одержимо формулу для радіусу  $m$ -го темного кільця Ньютона у відбитому світлі.

При цьому в формулі (4.28)  $\alpha = 0$ , а  $n = 1$ , оскільки роль плівки грає повітряний клин між лінзою та горизонтальною поверхнею. Більш того, відбиватись від оптично густішого середовища буде другий промінь а не перший, отже  $\lambda/2$  буде додаватись до оптичного шляху променя 2. Таким чином,

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2},$$

де  $h$  – товщина повітряного клина на відстані  $r$  від осі.

За умовою (4.19) інтерференційного мінімуму,  $2h + \frac{\lambda}{2} = m\lambda + \frac{\lambda}{2}$ ,  
 $\Rightarrow h = \frac{m\lambda}{2}$ . З Рис. 4.12,  $R^2 = r^2 + (R-h)^2$ , де малою величиною  $h^2$  можна знехтувати, а отже  $r^2 \approx 2Rh$ , і

$$r = \sqrt{m\lambda R}. \quad (4.29)$$

#### 4.3.4. Застосування інтерференції

- *Просвітлення оптики* – технологія нанесення тонких інтерференційних плівок на поверхню лінз та призм для зменшення відбиття світла та підвищення світлопропускання оптичних систем;
- *Інтерференційні фільтри*: дають можливість вибирати вузький діапазон довжин хвиль (наприклад, у лазерах, спектроскопії, телекомунікаціях);
- *Голографія*: створення об'ємних зображень на основі інтерференційних картин лазерного світла;
- *Інтерферометри* (Жамена, Мікельсона, Фабрі–Перо та інші) використовуються для надточних вимірювань фізичних величин: товщини тонких плівок, показників заломлення, концентрації хімічних сполук, тиску, вібрації, механічного навантаження та деформації, температури, вологості тощо.
- Дослідження структури кристалів за допомогою інтерференції рентгенівських променів;
- Інтерференція радіохвиль використовується в антенних решітках.

#### *Контрольні запитання і завдання*

1. Яка область спектру електромагнітного випромінювання називається оптичною?
2. Що таке світловий промінь?
3. В яких оптичних явищах проявляється хвильова природа світла?
4. Доведіть закони відбивання та заломлення світла
5. Виведіть співвідношення між амплітудами заломленої та падаючої хвилі спираючись на закон збереження енергії та граничні умови на межі двох середовищ
6. Виведіть співвідношення між амплітудами відбитої та падаючої хвилі спираючись на закон збереження енергії та граничні умови на межі двох середовищ
7. Дайте визначення поняття «інтерференція»
8. Які хвилі називаються когерентними?

9. Чому випромінювання від незалежних джерел є некогерентним?
10. Які методи використовують для отримання когерентних хвиль?
11. Як при інтерференції використовується принцип суперпозиції?
12. Як між собою взаємопов'язані світловий вектор та інтенсивність хвилі?
13. Виведіть формулу для інтенсивності результуючої хвилі при інтерференції
14. Чому для некогерентних хвиль результуюча інтенсивність дорівнює сумі інтенсивностей, що створює кожна з хвиль окремо, а для когерентних хвиль підвищується та знижується в різних точках простору?
15. Виведіть формулу для різниці фаз двох хвиль
16. Що таке геометрична і що таке оптична різниця ходу променів?
17. При якій різниці фаз двох когерентних хвиль інтенсивність максимальна? Сформулюйте умову максимумів інтерференції
18. При якій різниці фаз двох когерентних хвиль інтенсивність мінімальна? Сформулюйте умову мінімумів інтерференції
19. В чому суть методів одержання когерентних пучків світла поділом хвильового фронту?
20. Яка схема установки Юнга для спостереження інтерференції?
21. Виведіть формулу для ширини інтерференційної смуги
22. В чому полягає метод біпризми Френеля?
23. Як і чому впливає на інтерференційну картину неповна монохроматичність світла? Отримайте вираз для максимальної кількості смуг у досліді Юнга. Приймаючи в досліді Юнга для довжини хвилі в максимумі пропускання  $\lambda = 560$  нм та ширини смуги пропускання  $\Delta\lambda = 80$  нм, оцінити ширину зони інтерференції на екрані, віддаленому від щілин на відстань  $L = 1$  м при відстані між когерентними джерелами  $h = 1$  мм.
24. Як і чому впливають на інтерференційну картину лінійні розміри джерела світла?
25. Що таке радіус когерентності?
26. В чому суть методів одержання когерентних пучків світла поділом амплітуди? Наведіть приклади.

27. Виведіть формулу для оптичної різниці ходу променів у плоскопаралельній пластинці.
28. В якому випадку оптичний шлях променя додатково збільшується на  $\frac{\lambda}{2}$ ?
29. Чим відрізняється спостереження інтерференційних смуг рівного нахилу та смуг рівної товщини?
30. Дослід спостереження кілець Ньютона відповідає смугам рівного нахилу чи смугам рівної товщини?
31. Виведіть формулу радіусу  $m$ -го темного кільця Ньютона у відбитому світлі.
32. Поясніть поняття «просвітлення оптики» та його фізичну основу. Якою має бути товщина та показник заломлення просвітлювальної плівки для максимального зменшення відбивання світла певної довжини хвилі?
33. Задача: Плоскопаралельна скляна пластина ( $n=1,5$ ) освітлюється монохроматичним світлом ( $\lambda=600$  нм). Визначте мінімально можливу товщину плівки, за якої спостерігатиметься інтерференційний максимум у відбитому світлі (нормальне падіння). Врахуйте зміну фази при відбиванні.

## 5. Дифракція світла

### 5.1. Дифракція. Принцип Гюйгенса - Френеля

**Дифракція** – це сукупність явищ, які обумовлені хвилевою природою світла і спостерігаються при його поширенні в середовищі з різко вираженими неоднорідностями. У вузькому сенсі дифракція – це здатність світлової хвилі огинати перешкоди, розміри яких співрозмірні з довжиною хвилі, і потрапляти в область геометричної тіні.

Між інтерференцією і дифракцією немає істотної фізичної відмінності. Обидва явища полягають в перерозподілі світлового потоку, який відбувається при накладенні когерентних хвиль (суперпозиції хвиль).

- *Перерозподіл інтенсивності, що виникає в результаті суперпозиції хвиль, що порушуються кінцевим числом дискретних когерентних джерел, прийнято називати інтерференцією хвиль.*
- *Перерозподіл інтенсивності, який виникає в результаті суперпозиції хвиль, що порушуються когерентними джерелами, розташованими безперервно, прийнято називати дифракцією хвиль.*

**Вирізняють два види дифракції:** дифракцію Френеля і дифракцію Фраунгофера [2].

У першому випадку джерело світла, перешкода та екран для спостереження розташовані на порівняно невеликій відстані одне від одного. Через це на перешкоду та на екран падають не паралельні промені, тобто не плоскі хвилі. При дифракції Фраунгофера на перешкоду спрямовують плоскі хвилі і на екрані спостерігають результат дифракції теж плоских хвиль. Плоским хвилям відповідають паралельні промені, тому це вид дифракції ще називають дифракцією в паралельних променях.

Розглянемо дифракцію від ділянки хвильового фронту площею  $S$  (Рис. 5.1.). Наближений метод, за допомогою якого можна розрахувати закономірності дифракційних картин, називається принципом Гюйгенса - Френеля.

### Основні положення принципу Гюйгенса - Френеля:

1. Кожну точку фронту хвилі можна розглядати, як джерело вторинних сферичних хвиль;
2. Вторинні хвилі когерентні, тому вони інтерферують між собою;
3. Амплітуда коливань в будь-якій точці визначається як результат інтерференції вторинних хвиль від нескінченної безлічі вторинних джерел.

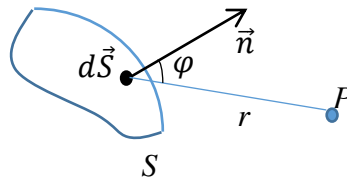


Рис.5.1

Тобто, в точці спостереження  $P$  на Рис. 5.1 накладається безліч променів. При цьому коливання від різних точок на хвильовому фронті долають різну відстань  $r$  до точки  $P$ , а отже досягають її з різними фазами. Величина елементарного світлового вектора, що створюється точковою площадкою  $dS$  хвильового фронту, буде пропорційна величині світлового вектора первинної хвилі (2.5), що приходить до елемента  $dS$ , а також площі самого елемента  $dS$ , і обернено пропорційна відстані  $r$  від елемента  $dS$  до точки  $P$ :

$$dE = k(\varphi) \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS, \quad (5.1)$$

де коефіцієнт  $k(\varphi)$  визначається кутом  $\varphi$  між нормаллю до площадки  $dS$  і напрямом на точку спостереження  $P$ ,  $a_0$  – коефіцієнт пропорційності.

Після інтегрування по поверхні хвильового фронту отримаємо поле в точці  $P$ :

$$E_p = \int_S dE = \int_S k(\varphi) \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS, \quad (5.2)$$

це і є аналітичний вираз принципу Гюйгенса - Френеля, який фактично є принципом суперпозиції хвиль, що приходять в точку  $P$ . Для більш якісного

розуміння принципу Гюйгенса - Френеля розглянемо практичні задачі дифракції.

### 5.1.1. Метод зон Френеля

Обчислення явищ дифракції з застосуванням принципу Гюйгенса - Френеля в загальному випадку є дуже важким завданням. Однак, як показав Френель, у випадках, що характеризуються симетрією, знаходження амплітуди результуючого коливання може бути виконано простим алгебраїчним або геометричним підсумовуванням.

Щоб зрозуміти сутність методу, який був розроблений Френелем (*метод зон Френеля*), визначимо амплітуду світлового коливання, яке збуджується в точці  $P$  сферичною хвилею, що поширюється в однорідному й ізотропному середовищі із точкового джерела  $S$ . Хвильові поверхні такої хвилі симетричні відносно прямої  $SP$  (Рис.5.2). Скориставшись цим, розіб'ємо зображену на рисунку хвильову поверхню на кільцеві зони, побудовані так, що відстані від країв кожної зони до точки  $P$  відрізняються на  $\frac{\lambda}{2}$  ( $\lambda$  – довжина хвилі в тому середовищі, у якому поширюється хвиля). Зони, що мають таку властивість, називаються *зонами Френеля*.

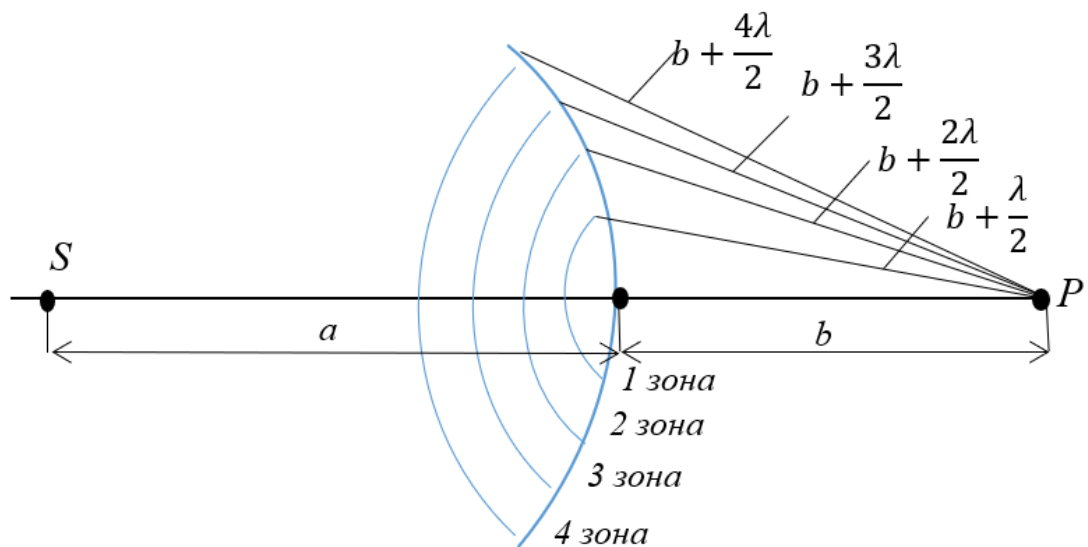


Рис. 5.2

З рисунку 5.2 випливає, що відстань  $b_m$  від зовнішнього краю  $m$ -ї зони до точки  $P$  дорівнює  $b_m = b + m \frac{\lambda}{2}$ , де  $b$  – відстань від вершини хвильової поверхні до точки  $P$ .

Коливання, що надходять у точку  $P$  від аналогічних точок двох сусідніх зон (тобто від точок, що лежать усередині зон або біля зовнішніх країв зон і т.п.), перебувають у протилежних фазах (бо різниця ходу між ними  $\frac{\lambda}{2}$ ). Тому й результуючі коливання, які створюються кожною із зон у цілому, будуть для сусідніх зон відрізнятися за фазою на  $\pi$ .

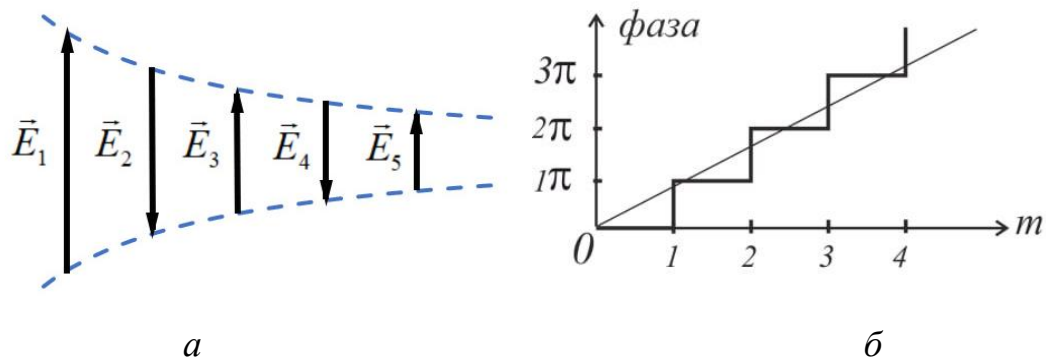


Рис. 5.3

На рис. 5.3, *a* представлено положення векторів від перших зон Френеля: вектори від сусідніх зон повернуті на  $180^\circ$ . Тобто, при переміщенні точки по сферичній фазовій поверхні з кроком від краю однієї зони Френеля до краю наступної, фаза стрибкоподібно змінюється на  $\pi$  з кожним кроком (Рис. 5.3, *б*). Якщо ж переміщатись по фазовій поверхні неперервно, треба розглянути апроксимацію графіка зміни фази (пряма лінія на Рис.5.3, *б*).

Поділимо зони Френеля на нескінченно вузькі кільцеві підзони. Амплітуду коливань, створюваних кожною з таких підзон, зобразимо графічно вектором  $d\vec{E}$  (Рис. 5.4, *a*). Унаслідок збільшення відстані  $r$  і зменшення коефіцієнта  $k$  амплітуда коливань, створюваних кожною наступною вузькою кільцевою підзоною, буде зменшуватися за модулем і відставати за фазою від коливань, створюваних попередньою підзоною. Зобразивши відставання за фазою поворотом кожного вектора  $d\vec{E}$  проти годинникової стрілки на

відповідний кут, отримаємо ланцюжок векторів, векторна сума яких і є результуючою амплітудою коливань у точці  $P$ .

Наприклад, на рис. 5.4, *а*, амплітуда коливань  $d\vec{E}_N$  від вузького кільця, що прилягає до краю першої зони Френеля, відстає за фазою на  $\pi$  від амплітуди коливань  $d\vec{E}_1$ , які приходять у точку  $P$  із центра першої зони, тому відповідні цим амплітудам вектори взаємно протилежні за напрямком, а результат дії першої зони Френеля в цілому – вектор  $\vec{E}_1$ , що їх з'єднує.

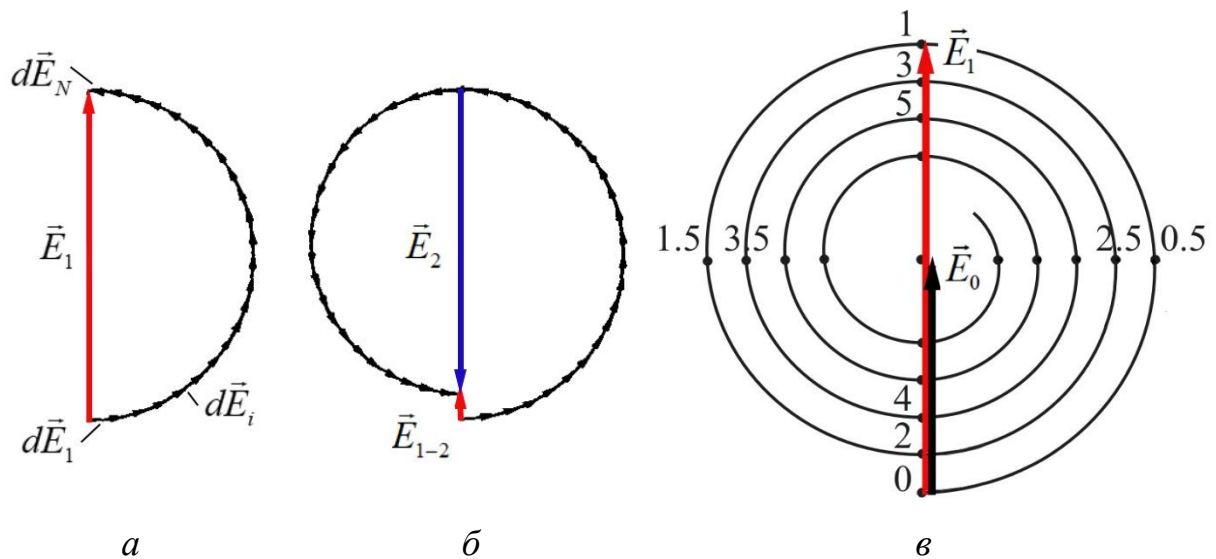


Рис. 5.4

Так само при розбивці кожної зони Френеля на підзони кожен вектор буде мати вигляд суми елементарних векторів. Продовжуючи побудову, одержимо векторну діаграму для результуючих коливань у точці  $P$  від дії перших двох зон Френеля  $\vec{E}_{1-2}$  (Рис. 5.4, б), який являє собою суперпозицію вектора  $\vec{E}_1$  від центра до краю першої зони та  $\vec{E}_2$  від початку до краю другої зони. Вектор  $\vec{E}_{1-2}$  відмінний від нуля тому що амплітуди коливань, що приходять у точку  $P$  від підзон, повільно монотонно зменшуються через збільшення відстані  $r$  до точки  $P$  від кожної наступної підзони та зростання кута  $\varphi$  між нормаллю до елементів зони і напрямком на точку  $P$ . Тому ланцюжок не замикається, а закручується у неперервну спіраль з фокусом в центрі – **спіраль Френеля** (Рис. 5.4, в, де цифри означають положення країв відповідних зон та підзон).

Проведемо додавання векторів від всіх зон Френеля:

$$E_p = \frac{E_1}{2} + \left( \frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2} \right) + \left( \frac{E_3}{2} - E_4 + \frac{E_5}{2} \right) + \dots \approx \frac{E_1}{2}. \quad (5.3)$$

Вирази в дужках прямують до нуля. Тому, коли проходять в т.  $P$  хвилі від всіх зон, результуюча амплітуда  $E_p = \frac{E_1}{2}$ . Результуючий вектор  $E_p = \frac{E_1}{2}$  позначимо як  $\vec{E}_0$ , що зображено на Рис. 5.4, в.

*Приклад.*

- 1) Непрозора кільцева пластинка закриває повністю другу зону Френеля (Рис. 5.5, а). Обчислимо світловий вектор та інтенсивність в точці  $P$ . Для цього на спіралі Френеля побудуємо вектори, що відповідають відкритим зонам: повністю перша зона ( $\vec{E}_1$ ) та від початку третьої зони (початок 3ї зони – це край 2ї зони на спіралі) до нескінченності ( $\vec{E}_{3,\infty}$ ) (Рис. 5.5, б). Результат додавання цих двох векторів дає результуючий вектор (Рис. 5.5, в):

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_{3,\infty} \approx 3\vec{E}_0.$$

Інтенсивність

$$I_p = 9I_0.$$

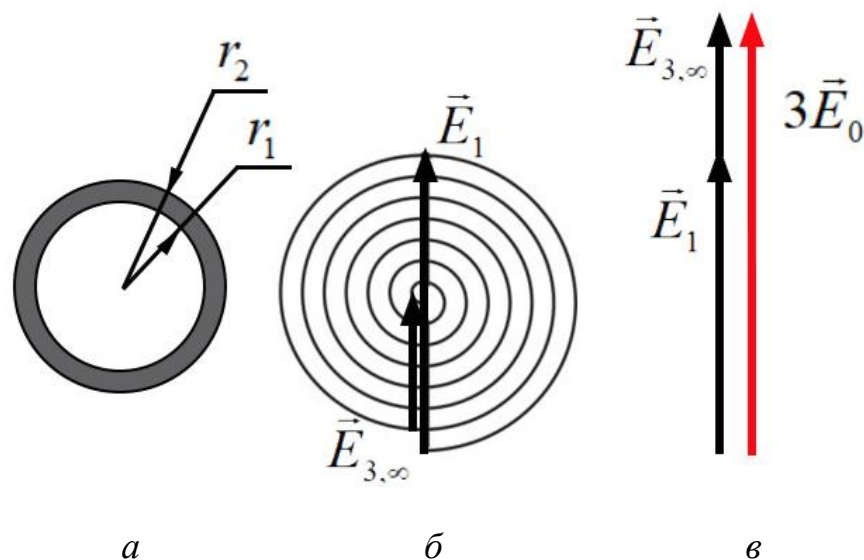


Рис. 5.5

2) Непрозора кільцева пластинка закриває половину ширини другої зони Френеля (Рис. 5.6, а). Обчислимо світловий вектор та інтенсивність в точці Р.

Для цього на спіралі Френеля побудуємо вектори, що відповідають відкритим зонам: повністю перша зона ( $\vec{E}_1$ ), від половини до краю другої зони ( $\vec{E}_{2/2}$ ) та від початку третьої зони до нескінченності ( $\vec{E}_{3,\infty}$ ) (Рис. 5.6, б). Результат додавання цих трьох векторів дає результуючий вектор (Рис. 5.6, в):

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_{2/2} + \vec{E}_{3,\infty}.$$

При цьому довжини цих векторів, як видно із побудови,

$$E_1 \approx 2E_0; \quad E_{2/2} \approx \sqrt{2}E_0; \quad E_{3,\infty} \approx E_0.$$

Тоді за теоремою косинусів,

$$\begin{aligned} E_P &= \sqrt{(E_1 + E_{3,\infty})^2 + (E_{2/2})^2 + 2(E_1 + E_{3,\infty})E_{2/2} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \\ &= \sqrt{(3E_0)^2 + (\sqrt{2}E_0)^2 - 2(3E_0)\sqrt{2}E_0 \frac{\sqrt{2}}{2}} = E_0\sqrt{9+2-6} = \sqrt{5}E_0. \end{aligned}$$

Інтенсивність

$$I_P = 5I_0.$$

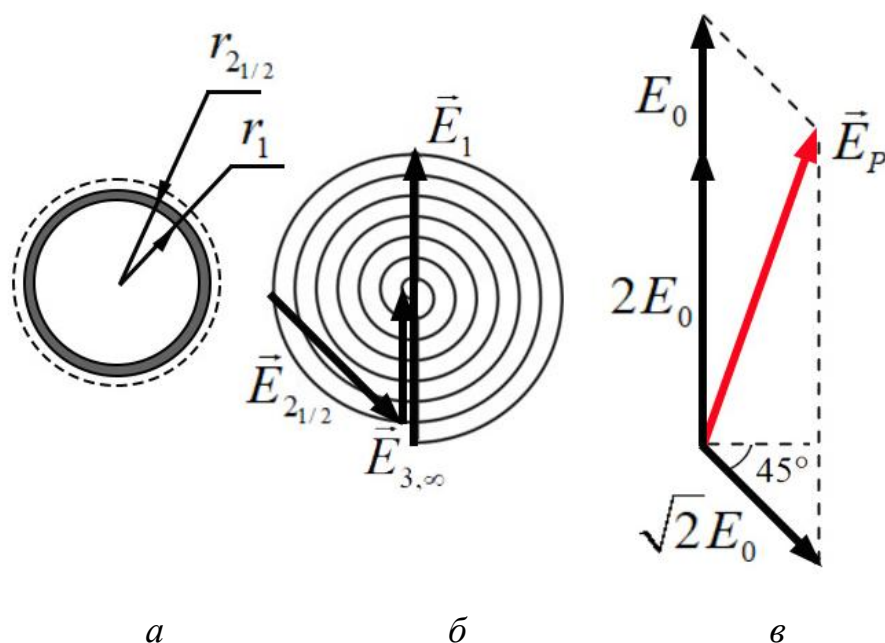


Рис. 5.6

Обчислимо площу і радіус зон Френеля (Рис. 5.7). Зовнішня границя  $m$ -ї зони виділяє на хвильовій поверхні сферичний сегмент висоти  $h_m$ . Позначимо площу цього сегмента через  $S_m$ . Тоді площу  $m$ -ї зони можна подати у вигляді  $\Delta S_m = S_m - S_{m-1}$ , де  $S_{m-1}$  – площа сферичного сегмента, який виділяється зовнішньою границею  $(m-1)$ -ї зони.

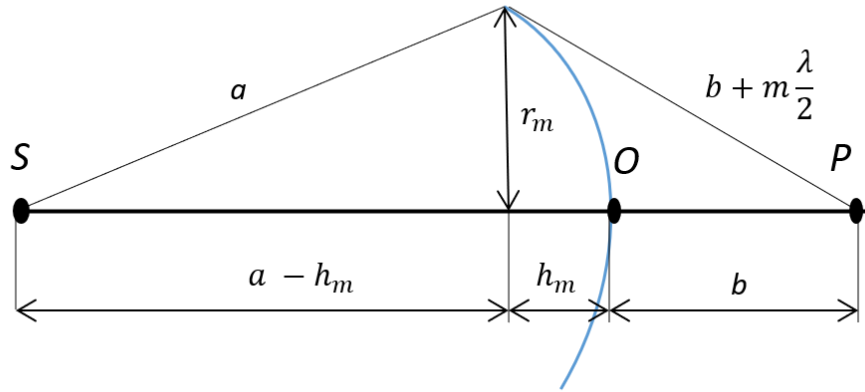


Рис.5.7

З рисунка 5.7 випливає, що

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2, \quad (5.4)$$

де  $a$  – радіус хвильової поверхні;  $r_m$  – радіус зовнішньої межі  $m$ -ї зони Френеля.

Підвівши вирази у дужках до квадрата, отримаємо:

$$r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = bm\lambda + m^2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 2bh_m - h_m^2,$$

звідки

$$h_m = \frac{bm\lambda + m^2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)}.$$

Обмежившись розглядом не занадто великих  $m$ , можна, через те, що довжина хвилі  $\lambda$  є малою величиною, знехтувати доданками, які мають  $\lambda^2$ . У цьому наближенні

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \quad (5.5)$$

Площа сферичного сегмента дорівнює  $2\pi Rh$  ( $R$  – радіус сфери;  $h$  – висота сегмента). Тоді, використовуючи (5.5), площа сегмента хвильової поверхні радіусом  $a$  буде дорівнювати

$$S_m = 2\pi ah_m = \frac{\pi ab}{(a+b)} m\lambda, \quad (5.6)$$

а площа  $m$ -ї зони Френеля

$$dS_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{(a+b)} (m - (m-1)) = \frac{\pi ab\lambda}{(a+b)}. \quad (5.7)$$

Отриманий вираз не залежить від  $m$ . Це означає, що при не занадто великих  $m$  площі зон Френеля приблизно однакові. З рівності (5.4) можна знайти радіуси зон. При не занадто великих  $m$  висота сегмента  $h_m \ll a$ . Тому можна вважати, що  $r_m^2 = 2ah_m$ . Підставивши значення (5.5) для  $h_m$ , отримаємо для радіуса зовнішньої межі  $m$ -ї зони Френеля вираз:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}. \quad (5.8)$$

## 5.2. Дифракція Фраунгофера на щілині

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на щілині (*дифракцією Фраунгофера називають дифракцію в паралельних променях*). Візьмемо дуже довгу вузьку прямокутну щілину шириною  $b$ , на яку падає нормально плоска світлова хвиля [2]. Помістимо за щілиною збиральну лінзу, а у фокальній площині лінзи екран. Хвильові поверхні падаючої хвилі, площина щілини й екран паралельні один одному.

Відповідно до принципу Гюйгенса-Френеля, елементарні ділянки відкритої частини хвильової поверхні є джерелами вторинних хвиль, а світлове поле за щілиною знаходиться як результат інтерференції цих когерентних вторинних хвиль. Знайдемо, використовуючи принцип Гюйгенса-Френеля, амплітуду і інтенсивність світла на екрані як функцію кута відхилення від прямолінійного напрямку поширення  $\varphi$ .

Розіб'ємо відкриту частину хвильової поверхні на  $N$  однакових, паралельних краям щілини, елементарних зон шириною  $dx = \frac{b}{N}$  (Рис. 5.8). Кожна однакова зона створює в точці  $P$  коливання з однаковими амплітудами, які обернено пропорційні числу зон  $N$ :

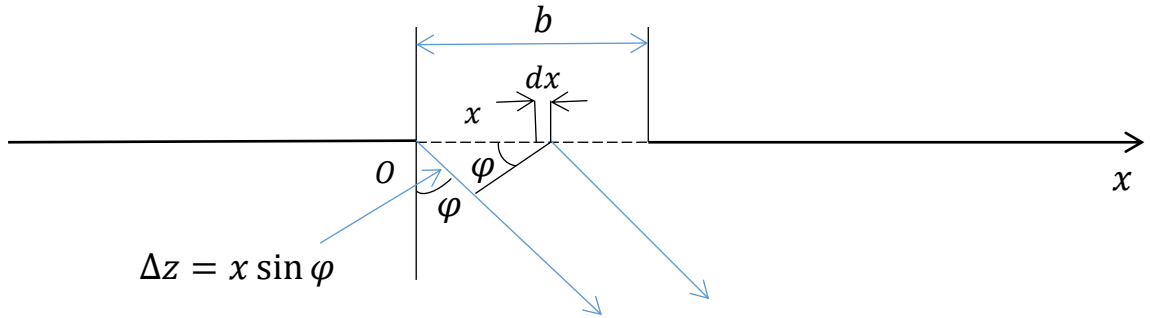


Рис. 5.8

Світловий вектор елементарної зони дорівнює

$$dE = dE_{амп} \cos(\omega t - kz),$$

де  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , а амплітуда, створена елементарною зоною, пропорційна її ширині  $dE_{амп} \sim dx$ . В той же час амплітуда, створена всією щілиною  $E_0 \sim b$ , і можна скласти пропорцію  $dE_{амп} = \frac{E_0 dx}{b}$ . Тоді

$$dE = \frac{E_0 dx}{b} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \sin \varphi\right), \quad (5.9)$$

де різниця ходу для променя від елементарної зони, яку ми розглядаємо,  $\Delta z = x \sin \varphi$  (див. Рис. 5.8).

Проінтегруємо (5.9) щоб одержати світловий вектор, створений всією щілиною в точці  $P$ :

$$E_P = \int dE = \frac{E_0}{b} \int_0^b \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \sin \varphi\right) dx = \frac{E_0}{b} \frac{\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \sin \varphi\right)}{-\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin \varphi} \Bigg|_0^b =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E_0}{b \left( -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin \varphi \right)} \left( \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot b \sin \varphi \right) - \sin(\omega t) \right) = \\
&= \frac{E_0}{b \left( -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin \varphi \right)} 2 \sin \left( -\frac{2\pi}{2\lambda} \cdot b \sin \varphi \right) \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{2\lambda} \cdot b \sin \varphi \right) = \\
&= \frac{E_0 \sin \left( \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi \right)}{\left( \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi \right)} \cos \left( \omega t - \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi \right).
\end{aligned}$$

Інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди. Отже,

$$I_P = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi \right)}{\left( \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi \right)^2}, \quad (5.10)$$

де  $I_0$  – інтенсивність усередині інтерференційної картини (при  $\varphi = 0$ ).

*Проаналізуємо отриманий результат:* порівнюючи чисельник до нуля, знаходимо умову мінімуму інтенсивності:

$$\sin^2 \left( \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi \right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi = \pm m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$b \cdot \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.11)$$

Таким чином, умова (5.11) визначає *положення мінімумів інтенсивності*.

Між мінімумами інтенсивності, які визначаються умовами (5.11), знаходяться максимуми різних порядків. Досліджуючи функцію (5.10) на екстремум, можемо знайти їх положення. Наближено можна вважати, що максимуми знаходяться посередині між сусідніми мінімумами. З дифракційної формули (5.10) для інтенсивності побічних максимумів виходить:

$$I'_{\max} = I_0 / \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2, \quad I_0 : I'_{\max} = 1 : \left( m + (1/2) \right)^2 \pi^2.$$

Звідси впливає таке співвідношення інтенсивностей центрального та перших побічних максимумів:

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : \dots = 1 : \frac{1}{22} : \frac{1}{62} : \frac{1}{125} : \dots$$

Отже, побічні максимуми є слабкими: навіть найсильніший з них за інтенсивністю складає лише 4,5% від центрального. Тому при малих інтенсивностях опромінюючого світла можна побачити тільки близькі до центрального побічні максимуми.

Графік функції (5.10) зображений на рисунку 5.9. Вздовж осі абсцис відкладені значення  $\sin\varphi$ , осі ординат – інтенсивність  $I_p$ .

З умови (5.11) випливає, що  $\sin\varphi = \pm \frac{m\lambda}{b}$ . Модуль синуса не може перевищити одиницю. Тому  $\left| \frac{m\lambda}{b} \right| < 1$ , звідки  $|m| \leq \frac{b}{\lambda}$ . Таким чином, кількість мінімумів інтенсивності визначається відношенням ширини щілини  $b$  до довжини хвилі  $\lambda$ . При ширині щілини, меншій за довжину хвилі, мінімуми взагалі не виникають. У цьому випадку інтенсивність світла монотонно зменшується від середини дифракційної картини до її країв.

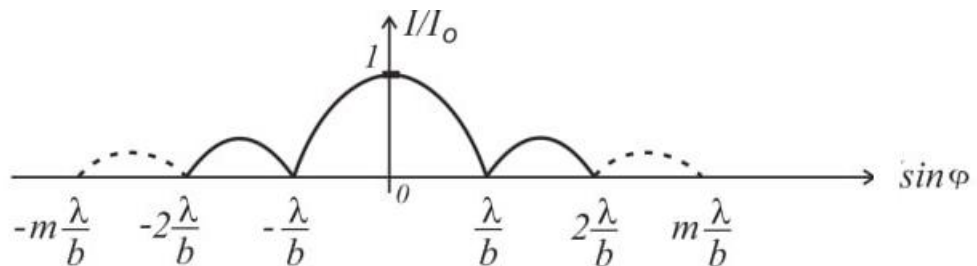


Рис.5.9

### 5.3. Дифракція Фраунгофера на дифракційних ґратках

*Дифракційною ґраткою* називається оптичний прилад, що складається з великого числа однакових, віддалених одна від одної на однакову відстань щілин. Відстань між серединами сусідніх щілин називається періодом ґратки  $d$  (Рис. 5.10).

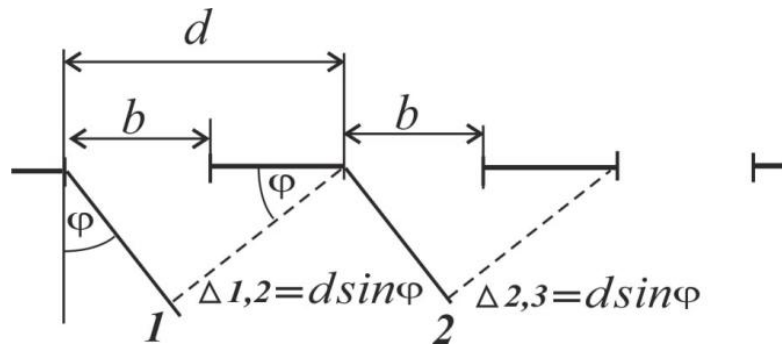


Рис. 5.10

Розмістимо паралельно ґратці збиральну лінзу, у фокальній площині якої помістимо екран. З'ясуємо характер дифракційної картини, яка утворюється на екрані під час падіння на ґратку плоскої світлової хвилі (для спрощення математичних розрахунків будемо вважати, що хвиля падає на ґратку нормально). Дифракційну картину від усіх щілин знайдемо, використовуючи принцип Гюйгенса-Френеля.

Будемо припускати, що довжина просторової когерентності хвилі, що падає, набагато перевищує довжину ґратки, так що коливання від усіх щілин можна вважати когерентними. У цьому випадку результуюче коливання в точці  $P$ , положення якої визначається кутом  $\varphi$ , являє собою суперпозицію  $N$  коливань, які мають однакову амплітуду та зміщені одна відносно одної за фазою на однакову величину  $\delta$ ,  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$ . Таким чином, амплітуда результуючого коливання від ґратки буде визначатися співвідношенням:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= E_0 e^{i(\omega t + 0)}; \\ \dot{E}_2 &= E_0 e^{i(\omega t + \delta)}; \\ \dot{E}_3 &= E_0 e^{i(\omega t + 2\delta)}; \dots, \\ \dot{E}_N &= E_0 e^{i(\omega t + (N-1)\delta)}. \end{aligned}$$

Скористаємося формулою суми членів ряду геометричної прогресії:

$$\dot{E}_P = \sum_{i=1}^N \dot{E}_i = E_0 e^{i\omega t} \sum_{i=1}^N e^{i(N-1)\delta} = E_0 e^{i\omega t} \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}.$$

## Інтенсивність

$$I \sim E^2 = \dot{E}\dot{E}^* = E_0^2 e^{i\omega t} e^{-i\omega t} \left( \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} \right) \left( \frac{1 - e^{-iN\delta}}{1 - e^{-i\delta}} \right) = E_0^2 \left( \frac{1 + 1 - e^{iN\delta} - e^{-iN\delta}}{1 + 1 - e^{i\delta} - e^{-i\delta}} \right) =$$

$$= E_0^2 \left( \frac{2 - 2\cos N\delta}{2 - 2\cos \delta} \right).$$

Зрозуміло, що інтенсивність в цьому випадку буде визначатися такою формулою:

$$I_\varphi = I_1 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = I_1 \frac{\sin^2((N\pi d \sin \varphi)/\lambda)}{\sin^2((\pi d \sin \varphi)/\lambda)}.$$

Оскільки щілини мають однакову ширину  $b$ , дифраговані пучки мають однакову інтенсивність  $I_1$ , яка внаслідок дифракції залежить від кута  $\varphi$  і

визначається формулою (5.10):  $I_1 = I_0 \frac{\sin^2((\pi b \sin \varphi)/\lambda)}{((\pi b \sin \varphi)/\lambda)^2}$ , де  $I_0$  – інтенсивність,

що створюється однією щілиною проти центра лінзи. Отже,

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2((\pi b \sin \varphi)/\lambda)}{((\pi b \sin \varphi)/\lambda)^2} \cdot \frac{\sin^2((N\pi d \sin \varphi)/\lambda)}{\sin^2((\pi d \sin \varphi)/\lambda)}. \quad (5.12)$$

*Проведемо аналіз отриманого результату (5.12).*

Перший множник у (5.12) перетворюється в нуль у точках, для яких

$$b \cdot \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

відповідно до (5.11). У цих точках інтенсивність, яка створюється кожною із щілин окремо, дорівнює нулю. Вираз (5.11) визначає умову мінімумів дифракційної ґратки.

Коли ж

$$d \cdot \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.13)$$

то чисельник та знаменник другого множника стають такими, що дорівнюють нулю. Тобто вираз (5.12) стає невизначеним. Розкриваючи невизначеність за допомогою правила Лопітала, отримуємо:

$$\begin{aligned} \lim_{d \sin \varphi \rightarrow m\lambda} \left( \frac{\sin((N\pi d \sin \varphi)/\lambda)}{\sin((\pi d \sin \varphi)/\lambda)} \right) &= \lim_{x \rightarrow m\pi} \left( \frac{\sin(Nx)}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow m\pi} \left( \frac{(\sin(Nx))'_x}{(\sin(x))'_x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow m\pi} \left( \frac{N \cos(Nx)}{\cos(x)} \right) = \frac{N \cos(Nm\pi)}{\cos(m\pi)} = \pm \frac{N \cdot 1}{1} = \pm N. \end{aligned}$$

Це означає, що другий множник у (5.12) набуває значення  $N^2$  в точках, що задовольняють умову (5.13).

З фізичної точки зору це означає, що для напрямків, які визначаються умовою (5.13), коливання від окремих щілин взаємно підсилюють одна одну, внаслідок чого амплітуди коливань у відповідній точці екрана додаються:

$$E_{\max} = NE_{\varphi}, \quad (5.14)$$

де  $E_{\varphi}$  – амплітуда коливання, що утворюється однією щілиною під кутом  $\varphi$ . Відповідно, інтенсивність

$$I_{\max} = N^2 I_{\varphi}. \quad (5.15)$$

Рисунок 5.11 ілюструє положення максимумів інтенсивності в залежності від синуса кута дифракції  $\sin\varphi$  відповідно до умов (5.13). Ці максимуми називаються головними, а число  $m$  дає порядок головного максимуму.

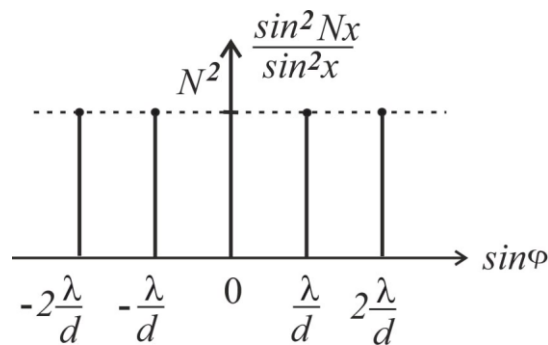


Рис. 5.11

Зрозуміло, що коли умови (5.11) та (5.13) збігаються, то має місце мінімум інтенсивності. Це пов'язано з тим, що в цьому випадку інтенсивність від кожної щілини дорівнює нулю. Сума нульових інтенсивностей дасть також нульову інтенсивність.

Крім мінімумів, що обумовлені співвідношенням (5.11), у проміжках між сусідніми головними максимумами є  $N - 1$  додаткових мінімумів. Вони

виникають у тих напрямках, для яких коливання від окремих щілин взаємно гасять один одного. Умову додаткових мінімумів можна легко знайти, прирівнявши чисельник другого множника (5.12) до нуля:

$$\sin\left(\frac{N\pi d \sin \varphi}{\lambda}\right) = 0.$$

Звідси знаходимо умову додаткових мінімумів:

$$d \cdot \sin \varphi = \pm \frac{k'}{N} \lambda, \quad k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, 2N-1, 2N+1, \dots, \quad (5.16)$$

У формулі (5.16)  $k'$  набуває всіх цілих значень, крім  $0, N, 2N, \dots$

На рисунку 5.12 наведений графік функції (5.12) для  $N=4$  та  $\frac{d}{b}=3$ .

Штрихова лінія, що проходить через вершини головних максимумів, зображує інтенсивність від однієї щілини, яка помножена на  $N^2$ . При  $\frac{d}{b}=3$  головні максимуми 3-го, 6-го і т.д. порядків збігаються з мінімумами інтенсивності від однієї щілини, внаслідок чого ці максимуми зникають. Кількість головних максимумів, які можливо спостерігати, визначається відношенням періоду ґратки до довжини хвилі. Виходячи з того, що модуль  $\sin \varphi$  не може перевищити одиниці, отримуємо  $m \leq \frac{d}{l}$ .

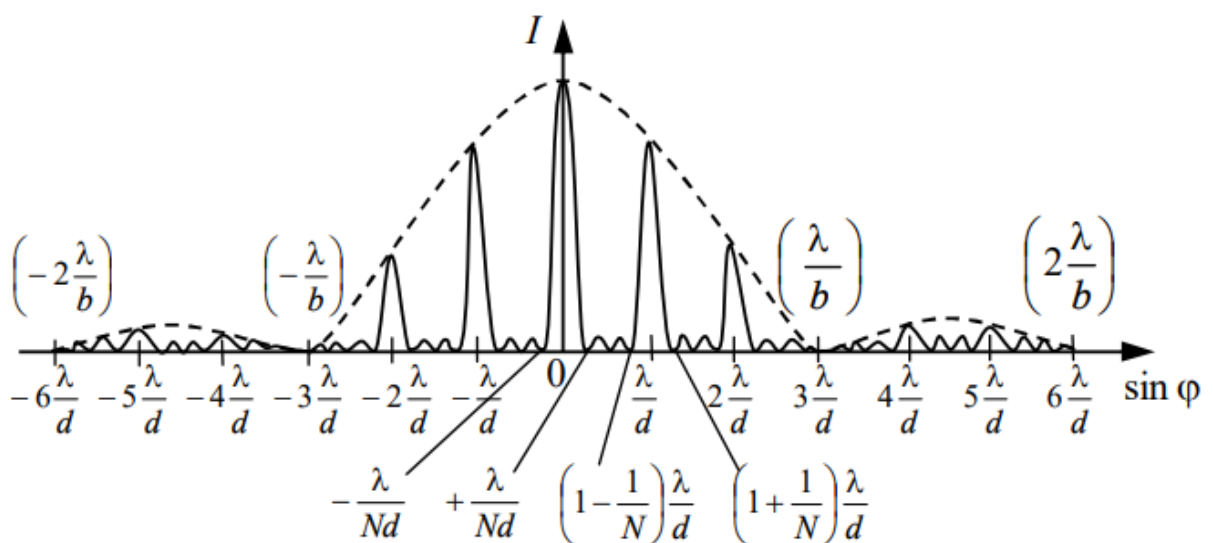


Рис. 5.12

#### 5.4. Дисперсія і роздільна здатність дифракційних ґраток

Відомо, що дифракційна ґратка, як і призма, використовують у якості спектрального прилада, задача якого розрізнити спектральні компоненти з близькими довжинами хвиль, Рис. 5.13.

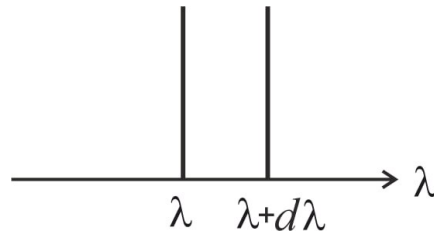


Рис.5.13

Характеристиками спектрального приладу є його дисперсія й роздільна здатність.

**Дисперсія** визначає кутову (або лінійну) відстань між двома спектральними лініями, які відрізняються за довжиною хвилі на одиницю (наприклад, на 1 нм).

**Кутовою дисперсією** називається величина

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}, \quad (5.17)$$

де  $\delta\varphi$  – кутова відстань між спектральними лініями, які відрізняються за довжиною хвилі на  $\delta\lambda$ .

**Лінійною дисперсією** називають величину

$$D = \frac{\delta x}{\delta\lambda}, \quad (5.18)$$

де  $\delta x$  – відстань на екрані або на фотопластинці між спектральними лініями, довжини хвиль яких відрізняються на  $\delta\lambda$ .

Щоб знайти кутову дисперсію дифракційної ґратки, продиференціюємо умову (5.13) головного максимуму за  $\varphi$ :  $d \cdot \sin \varphi = m\lambda$ . Вважаючи, що  $\lambda = \lambda(\varphi)$

є функцією від  $\varphi$ , отримаємо  $d \cdot \cos \varphi d\varphi = m d\lambda$ . Звідси  $D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}$ . У

межах невеликих кутів  $\cos \varphi \approx 1$ , тому

$$D \approx \frac{m}{d}. \quad (5.19)$$

Таким чином, кутова дисперсія дифракційної ґратки обернено пропорційна періоду  $d$ . Чим вище порядок спектра  $m$ , тим більше дисперсія.

**Роздільна здатність дифракційної ґратки.** Роздільна здатність визначає мінімальну різницю довжин хвиль  $d\lambda$ , при якій дві лінії сприймаються в спектрі роздільно (Рис. 5.14).

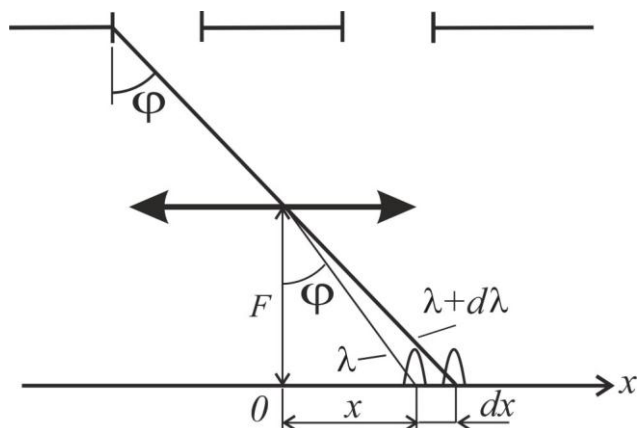


Рис. 5.14

Роздільною здатністю спектрального приладу називають безрозмірну величину:

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda}, \quad (5.20)$$

де  $d\lambda$  – мінімальна різниця довжин хвиль двох спектральних ліній, при якій ці лінії сприймаються роздільно.

Можливість роздільного сприйняття двох близьких спектральних ліній залежить не тільки від відстані між ними (яке визначається дисперсією приладу), але також і від ширини спектрального максимуму.

Два близьких максимуми сприймаються оком роздільно в тому випадку, якщо інтенсивність у проміжку між ними становить не більше 80 % від інтенсивності максимуму. Відповідно до критерію, запропонованого Релеєм, таке співвідношення інтенсивності має місце в тому випадку, якщо середина одного максимуму збігається із найближчим мінімумом іншого (Рис. 5.15).

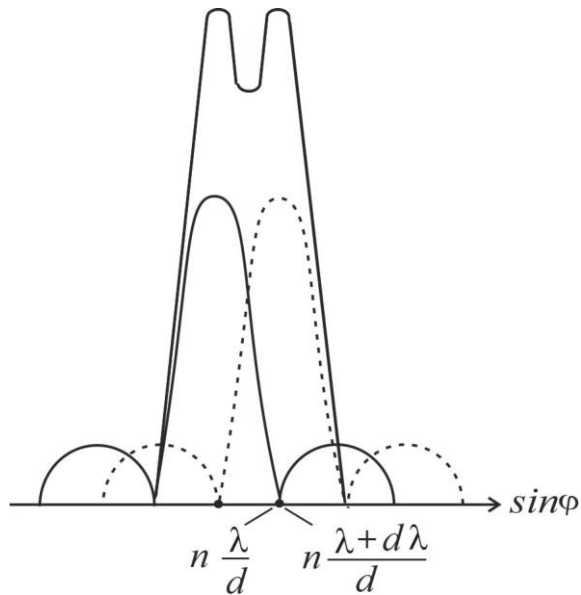


Рис. 5.15. Пояснення критерію Релея: фрагмент розподілу інтенсивності на екрані після дифракційної ґратки; в спектрі випромінювання є дві спектральні компоненти з довжинами хвиль  $\lambda$  та  $\lambda + d\lambda$

Тобто виконується умова:

$$\sin \varphi_{\max}(\lambda) = \sin \varphi_{\min}(\lambda + d\lambda).$$

Використаємо відповідні умови для максимумів та мінімумів,

$$\sin \varphi_{\max}(\lambda + d\lambda) = n \frac{\lambda + d\lambda}{d};$$

$$\sin \varphi_{\min}(\lambda) = l \frac{\lambda}{Nd} = (nN + 1) \frac{\lambda}{Nd},$$

і отримаємо рівняння:

$$n \frac{\lambda + d\lambda}{d} = (nN + 1) \frac{\lambda}{Nd}.$$

З останнього рівняння маємо

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = nN.$$

Отже, роздільна здатність дифракційної ґратки:

$$R = nN. \tag{5.21}$$

Таким чином, роздільна здатність дифракційної ґратки пропорційна числу щілин  $N$  і порядку спектра  $n$ .

*Приклад:*

- Довжина хвилі  $\lambda = 600 \text{ нм}$ ,
- Кількість щілин ґратки  $N = 10\,000$ ,
- Розглянемо другий порядок  $n = 2$ .

Тоді мінімально роздільне  $\Delta\lambda = 0,03 \text{ нм}$ .

*Контрольні запитання і завдання*

1. Що таке дифракція світла і за яких умов вона стає помітною?
2. Що спільного та відмінного між явищами інтерференції та дифракції?
3. У чому полягає різниця між дифракцією Фраунгофера та Френеля?
4. Сформулюйте основні положення принципу Гюйгенса - Френеля
5. Як будуються зони Френеля?
6. Яка властивість коливань, що надходять у точку спостереження від країв сусідніх зон Френеля?
7. Поясніть як будується спіраль Френеля
8. Як визначається інтенсивність світла при дифракції Фраунгофера на щілині?
9. Яка умова виникнення дифракційних мінімумів та максимумів при дифракції Фраунгофера на одній щілині?
10. Чим визначається кількість мінімумів інтенсивності, які можна спостерігати при дифракції Фраунгофера на одній щілині?
11. Що являє собою дифракційна ґратка? Що таке період дифракційної ґратки?
12. Сформулюйте умову мінімумів та максимумів дифракції Фраунгофера на ґратці
13. Як впливає збільшення кількості щілин у ґратці на інтенсивність та ширину максимумів?

14. Чому нульовий максимум дифракційної ґратки є найінтенсивнішим?
15. Як зміниться картина дифракції, якщо освітити ґратку світлом іншої довжини хвилі?
16. Що таке дисперсія дифракційної ґратки?
17. Що впливає на роздільну здатність дифракційної ґратки?
18. Як використовується дифракція світла в спектральних приладах?
19. Чому зменшення ширини щілини одночасно робить центральний максимум ширшим, хоча інтуїтивно здається, що вузька щілина «звужує» пучок?
20. Чому дифракція проявляється сильніше для червоного світла, ніж для фіолетового?
21. Чому дифракційна ґратка може «розділити» дві близькі довжини хвилі, а одна щілина — ні?
22. Як би змінилась дифракційна картина, якщо замінити світло на хвилі значно більшої довжини (наприклад, радіохвилі), але залишити ту саму ґратку?

## 6. Поляризація світла

### 6.1. Поляризоване й природне світло

Світло, у якого напрями коливань упорядковані будь-яким чином, називається **поляризованим**.

Якщо коливання світлового вектора відбуваються тільки в одній площині, яка проходить через напрямок поширення променя, то таке світло називається **плоско- (або лінійно) поляризованим** (Рис. 6.1). Площина, в якій відбуваються коливання світлового вектора, називається **площиною коливань**, або **площиною поляризації**.

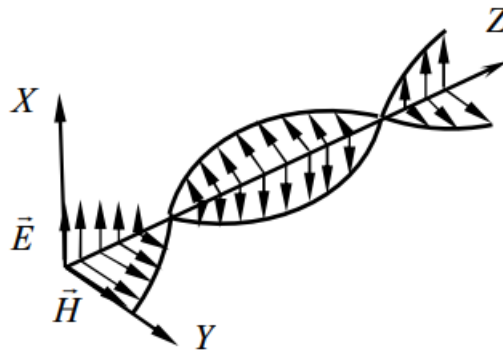


Рис. 6.1

Упорядкованість коливань може полягати й у тому, що вектор  $\vec{E}$  може обертатися відносно променя, одночасно змінюючись за величиною. У результаті кінець вектора  $\vec{E}$  описує еліпс. Таке світло називається **еліптично поляризованим**.

Якщо кінець вектора  $\vec{E}$  описує коло, то таке світло називається **поляризованим по колу**.

Зрозуміло, що еліптично поляризоване світло можна подати як сукупність двох взаємно перпендикулярних лінійнополяризованих променів світла.

У природному світлі коливання різних перпендикулярних до променя напрямків неупорядковано змінюють один одного. Всі напрями коливань природного світла мають однакову ймовірність. Таким чином, природне світло можна подати як сукупність двох некогерентних електромагнітних

хвиль, які поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах і мають однакові інтенсивності. Таке уявлення про природне світло суттєво спрощує розгляд проходження природного світла через поляризаційні пристрої.

Плоскополяризоване світло можна отримати із природного за допомогою приладів, які називаються **поляризатори**. Поляризатори вільно пропускають коливання, паралельні площині, яку називають **площиною поляризатора**, і повністю або частково затримують коливання, які перпендикулярні до цієї площини. Поляризатор, що затримує перпендикулярні до його площини коливання тільки частково, будемо називати *неідеальним*. Просто поляризатором ми будемо називати *ідеальний поляризатор*, який повністю затримує коливання, перпендикулярні до його площини, і не послабляє коливань, паралельних площині. На виході з неідеального поляризатора отримуємо світло, у якому коливання одного напрямку переважають над коливаннями інших напрямків. Таке світло називається **частково поляризованим**. Його можна розглядати як суміш природного й плоскополяризованого. Частково поляризоване світло, як і природне, можна подати у вигляді накладення двох некогерентних плоскополяризованих хвиль із взаємно перпендикулярними площинами коливань. Відмінність полягає в тому, що у випадку природного світла інтенсивність цих хвиль однакова, а у випадку частково поляризованого – різна. Зазначимо, що поляризатор, який використовуваний для дослідження характеру поляризації світла, називають **аналізатором**.

Якщо пропустити частково поляризоване світло з лінійною поляризацією через поляризатор, то при його обертанні навколо напрямку поширення світлового променя інтенсивність світла на виході буде змінюватися в межах від  $I_{max}$  до  $I_{min}$ , причому перехід від одного із цих значень до іншого буде відбуватися при повороті на кут, що дорівнює  $\frac{\pi}{2}$ .

**Ступінь поляризації** визначається як

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (6.1)$$

Для плоскополяризованого світла  $I_{min} = 0$  і  $P = 1$ ; для природного світла  $I_{max} = I_{min}$  і  $P = 0$ . До еліптично поляризованого світла поняття ступеня поляризації не застосовується.

### 6.2. Закон Малюса. Проходження природного світла через поляризатор

Розглянемо, як змінюється інтенсивність лінійно поляризованого світла при проходженні через поляризатор [2,3].

Нехай на поляризатор падає світло, в якому амплітуда коливання світлового вектора  $\vec{E}_0$  відбувається в площині, що утворює із площиною поляризатора кут  $\varphi$ . Розкладемо амплітуду коливання  $\vec{E}_0$  на два коливання з амплітудами  $E_{\parallel} = E_0 \cos \varphi$  та  $E_{\perp} = E_0 \sin \varphi$  (Рис. 6.2.).

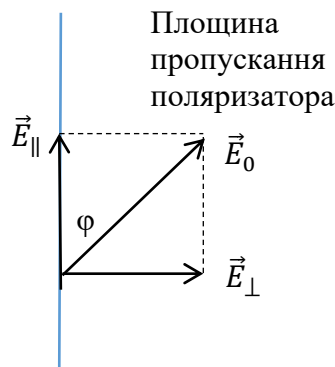


Рис. 6.2

Зрозуміло, що коливання, яке є паралельним площині поляризатора, повністю пройде через поляризатор, а коливання, яке є перпендикулярним до площини поляризатора, буде затримано. Інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди. Тому якщо на поляризатор падає плоскополяризоване світло інтенсивності  $I_0 \sim E_0^2$ , то інтенсивність світла на виході поляризатора буде визначатися виразом:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (6.2)$$

де  $I_0$  – інтенсивність плоскополяризованого світла, що падає на поляризатор. Співвідношення (6.2) називають **законом Малюса**.

### 6.3. Поляризація світла при відбитті та заломленні. Закон Брюстера

З'ясуємо, за яких умов можлива поляризація світла. Коли кут падіння світла на межу розділу двох прозорих діелектриків (наприклад, на поверхню скляної пластинки) відмінний від нуля, то відбитий і заломлений промені виявляються частково поляризованими. У відбитому промені переважають коливання, що перпендикулярні до площини падіння, у заломленому промені – коливання, які паралельні площині падіння. Ступінь поляризації залежить від кута падіння (Рис. 6.3).

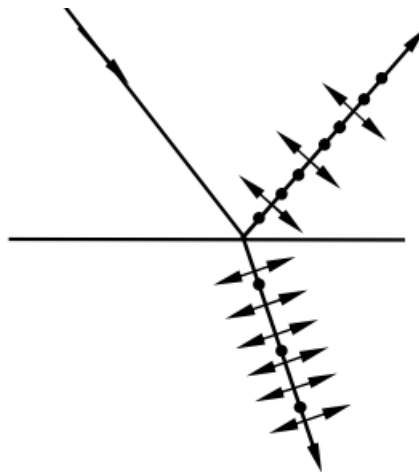


Рис. 6.3

Позначимо через  $\theta_{БР}$  кут, який визначається умовою:

$$\operatorname{tg}\theta_{БР} = n_{12} - \text{закон Брюстера,} \quad (6.3)$$

тут  $n_{12}$  – показник заломлення другого середовища відносно першого.

При куті падіння, що дорівнює куту Брюстера  $\theta_{БР}$ , відбитий промінь є повністю поляризованим (він містить тільки коливання, які перпендикулярні до площини падіння). Ступінь поляризації заломленого променя при куті падіння, що дорівнює  $\theta_{БР}$ , досягає найбільшого значення, однак цей промінь залишається поляризованим тільки частково. *При падінні світла під кутом Брюстера відбитий і заломлений промені взаємно перпендикулярні.*

#### 6.4. Формули Френеля

**Формули Френеля** визначають амплітуди й інтенсивність заломленої й відбитої хвилі при проходженні світла через плоску границю розділу двох середовищ із різними показниками заломлення [3].

При падінні на плоску границю розрізняють дві поляризації світла:

- s-поляризація – це поляризація світла, для якої напруженість електричного поля перпендикулярна площині падіння.
- p-поляризація – поляризація світла, для якої вектор напруженості електричного поля лежить в площині падіння.

Формули Френеля для s-поляризації та p-поляризації різні. Оскільки світло із різними поляризаціями різним чином відбивається від поверхні, то відбите світло завжди частково поляризоване.

Постановка задачі: Плоска електромагнітна хвиля падає на плоску границю поділу двох непровідних середовищ (Рис. 6.4). Визначим електромагнітне поле яке виникне в обох середовищах унаслідок падіння на згадану межу.

Будемо виходити з граничних умов для тангенціальних складових напруженостей поля:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} ; H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (6.4)$$

Нехай

- напруженість електричного поля падаючої хвилі

$$\vec{E}^i = \vec{E}_0^i e^{-i(\omega t - \vec{k}^i \cdot \vec{r})}; \quad (6.5)$$

- напруженість електричного поля відбитої хвилі

$$\vec{E}^r = \vec{E}_0^r e^{-i(\omega t - \vec{k}^r \cdot \vec{r})}; \quad (6.6)$$

- напруженість електричного поля заломленої хвилі

$$\vec{E}^\theta = \vec{E}_0^\theta e^{-i(\omega t - \vec{k}^\theta \cdot \vec{r})}, \quad (6.7)$$

де верхні індекси вказують на падаючу ( $i$ ), відбиту ( $r$ ), та заломлену ( $\theta$ ) хвилі.

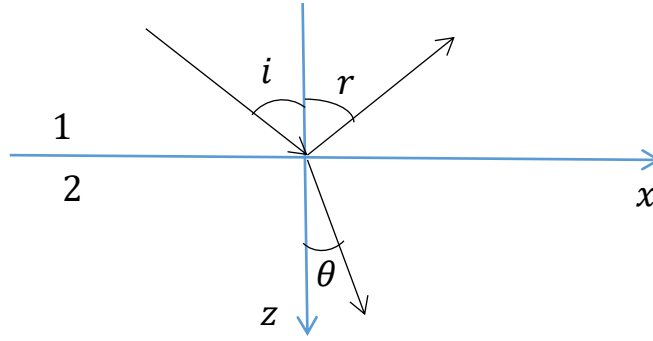


Рис. 6.4

У будь-який момент часу в усіх точках границі поділу для тангенціальних складових виконується рівність:

$$E_0^i e^{-i(\omega^i t - \vec{k}^i \cdot \vec{r})} + E_0^r e^{-i(\omega^r t - \vec{k}^r \cdot \vec{r})} = E_0^\theta e^{-i(\omega^\theta t - \vec{k}^\theta \cdot \vec{r})}.$$

Це можливо лише тоді, коли:

$$\omega^i t = \omega^r t = \omega^\theta t \Rightarrow \omega^i = \omega^r = \omega^\theta = \omega; \quad (6.8)$$

$$\vec{k}^i \vec{r} = \vec{k}^r \vec{r} = \vec{k}^\theta \vec{r}, \quad (6.9)$$

значить всі три вектори  $\vec{k}^i$ ,  $\vec{k}^r$ ,  $\vec{k}^\theta$  лежать в одній площині, перпендикулярній до границі поділу.

Доцільно вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  подати у вигляді складових паралельних та перпендикулярних до площини падіння, яка є площиною симетрії задачі (Рис. 6.5). Розкладемо електричний вектор падаючої хвилі  $\vec{E}^i$  на дві складові:  $\vec{E}_\parallel^i$  та  $\vec{E}_\perp^i$ , аналогічно зробимо для відбитої і заломленої:

$$\vec{E}^i = \vec{E}_\parallel^i + \vec{E}_\perp^i; \quad \vec{E}^r = \vec{E}_\parallel^r + \vec{E}_\perp^r; \quad \vec{E}^\theta = \vec{E}_\parallel^\theta + \vec{E}_\perp^\theta. \quad (6.10)$$

Тоді граничні умови (6.4) для вектора  $\vec{E}$  в проекціях на осі координат

$$\text{OX:} \quad -E_\parallel^i \cos i + E_\parallel^r \cos r = -E_\parallel^\theta \cos \theta; \quad (6.11)$$

$$\text{OY:} \quad E_\perp^i + E_\perp^r = E_\perp^\theta. \quad (6.12)$$

В той же час, для вектора  $\vec{H}$ ,

$$\vec{H} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{H}_\perp \parallel \vec{E}_\parallel; \quad \vec{H}_\parallel \parallel \vec{E}_\perp;$$

та відповідно до (2.9),  $H_0 = n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$ , тобто

$$H_0 \sim nE_0. \quad (6.13)$$

Тоді в проекціях на осі координат

$$\text{ОХ:} \quad -H_{\perp}^i \cos i + H_{\perp}^r \cos r = -H_{\perp}^{\theta} \cos \theta; \quad (6.14)$$

$$-n_1 E_{\perp}^i \cos i + n_1 E_{\perp}^r \cos r = -n_2 E_{\perp}^{\theta} \cos \theta; \quad (6.15)$$

$$\text{ОУ:} \quad H_{\parallel}^i + H_{\parallel}^r = H_{\parallel}^{\theta}. \quad (6.16)$$

$$n_1 E_{\parallel}^i + n_1 E_{\parallel}^r = n_2 E_{\parallel}^{\theta}. \quad (6.17)$$

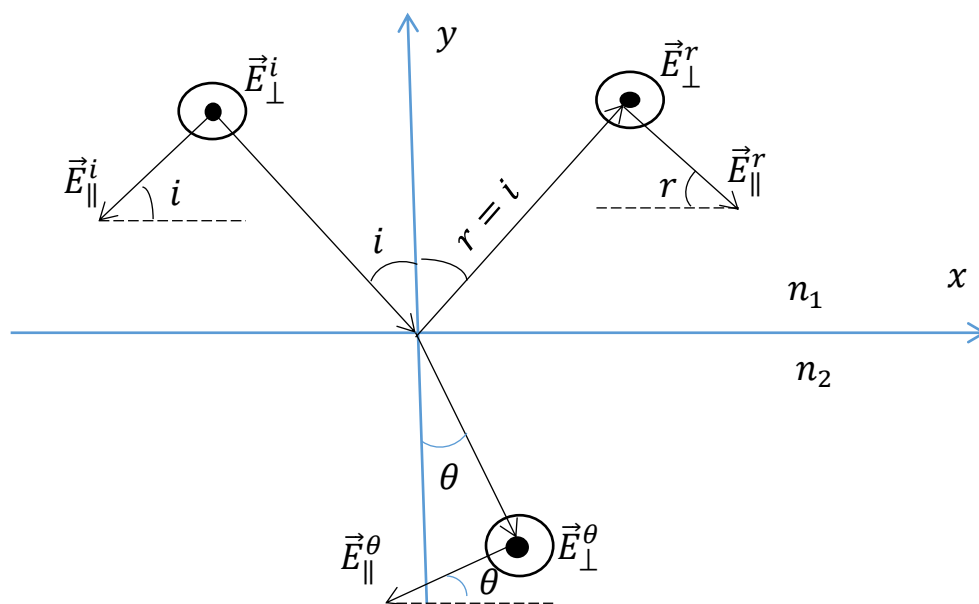


Рис. 6.5

Використавши вирази (6.11) та (6.17) та умову що кут падіння дорівнює куту відбивання  $i = r$ , отримаємо:

$$-E_{\parallel}^i \cos i + E_{\parallel}^r \cos i = -\left(\frac{n_1}{n_2} E_{\parallel}^i + \frac{n_1}{n_2} E_{\parallel}^r\right) \cos \theta;$$

$$-\cos i + \frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}^i} \cos i = -\left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_1}{n_2} \frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}^i}\right) \cos \theta,$$

звідки

$$\frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}^i} = \frac{\cos i - \frac{n_1}{n_2} \cos \theta}{\cos i + \frac{n_1}{n_2} \cos \theta}.$$

Використовуючи закон заломлення світла (4.1),

$$\frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}^i} = \frac{\cos i - \frac{\sin \theta}{\sin i} \cos \theta}{\cos i + \frac{\sin \theta}{\sin i} \cos \theta} = \frac{\sin 2i - \sin 2\theta}{\sin 2i + \sin 2\theta} = \frac{\operatorname{tg}(i - \theta)}{\operatorname{tg}(i + \theta)}.$$

Таким чином, одержуємо **формули Френеля для  $E_{\parallel}$  та  $I_{\parallel}$**  :

$$\frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}^i} = \frac{\operatorname{tg}(i - \theta)}{\operatorname{tg}(i + \theta)} \Rightarrow \frac{I_{\parallel}^r}{I_{\parallel}^i} = \frac{\operatorname{tg}^2(i - \theta)}{\operatorname{tg}^2(i + \theta)}. \quad (6.18)$$

Використавши вирази (6.12) та (6.15), отримаємо:

$$-n_1 E_{\perp}^i \cos i + n_1 E_{\perp}^r \cos i = -n_2 (E_{\perp}^i + E_{\perp}^r) \cos \theta;$$

$$-n_1 \cos i + n_1 \frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}^i} \cos i = -n_2 \left( 1 + \frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}^i} \right) \cos \theta,$$

звідки, з використанням закону заломлення, одержуємо

$$\frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}^i} = \frac{\cos i \sin \theta - \sin i \cos \theta}{\cos i \sin \theta + \sin i \cos \theta} = \frac{\sin(\theta - i)}{\sin(\theta + i)} = -\frac{\sin(i - \theta)}{\sin(\theta + i)}.$$

Таким чином, одержуймо **формули Френеля для  $E_{\perp}$  та  $I_{\perp}$**  :

$$\frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}^i} = -\frac{\sin(i - \theta)}{\sin(\theta + i)} \Rightarrow \frac{I_{\perp}^r}{I_{\perp}^i} = \frac{\sin^2(i - \theta)}{\sin^2(\theta + i)}. \quad (6.19)$$

Залежність від кута падіння для відношення інтенсивності відбитої хвилі до інтенсивності падаючої на основі одержаних формул (6.18) та (6.19) приведена на Рис. 6.6. З формули (6.18) видно, що при падінні світла під кутом Брюстера  $\theta_{\text{Бр}}$ , коли  $i + \theta_{\text{Бр}} = \pi/2$ , а отже  $\operatorname{tg}(i + \theta_{\text{Бр}}) \rightarrow \infty$ , відношення  $I_{\parallel}^r / I_{\parallel}^i = 0$ . Це означає що паралельна складова світлового вектора зникає, і відбите світло буде повністю лінійно поляризованим у площині, перпендикулярній до площини падіння.

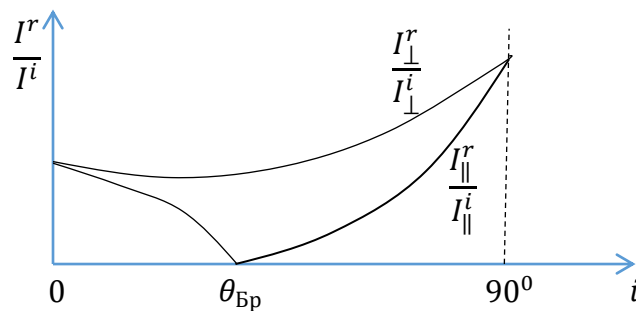


Рис. 6.6

При проходженні світла через всі прозорі кристали, за винятком тих, що належать до кубічної системи, спостерігається явище, яке полягає у тому, що падаючий на кристал промінь розділяється всередині кристала на два промені, які поширюються в загальному випадку з різними швидкостями й у різних напрямках. Це явище отримало назву *подвійної променезаломлюваності*.

Кристали, у яких спостерігається явище подвійної променезаломлюваності, розділяються на *одновісні й двовісні*. В одновісних кристалах один із заломлених променів підлягає звичайному закону заломлення. Цей промінь називається звичайним і позначається буквою *o*. Для іншого променя, який називають незвичайним (його позначають буквою *e*), відношення синусів кута падіння й кута заломлення не залишається сталим при зміні кута падіння. Навіть при нормальному падінні світла на кристал незвичайний промінь у загальному випадку відхиляється від нормалі. Крім того, незвичайний промінь не лежить, як правило, в одній площині з падаючим променем і нормаллю до заломлювальної поверхні. Прикладами одновісних кристалів можуть бути ісландський шпат, кварц і турмалін. У двовісних кристалів (слюда, гіпс) обидва промені незвичайні – показники заломлення в них залежать від напрямку в кристалі. Дослідження звичайного й незвичайного променів показує, що обидва промені повністю поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках.

#### *Контрольні запитання і завдання*

1. Чим відрізняється природне (неполяризоване) світло від поляризованого?
2. Які типи поляризації світла ви знаєте?
3. Що таке площина поляризації?
4. Чим відрізняються поляризатор та аналізатор?
5. Яке світло називається частково поляризованим? Як обчислюється ступінь поляризації?
6. Сформулюйте закон Малюса

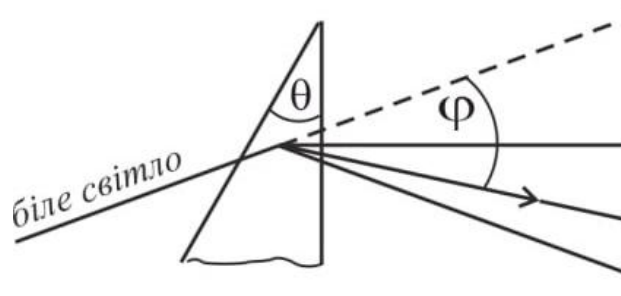
7. Яким чином можна визначити площину поляризації світла за допомогою аналізатора?
8. Яким є фізичний механізм поляризації при відбиванні?
9. Що називають кутом Брюстера?
10. Яке співвідношення між кутом падіння та кутом заломлення при куті Брюстера?
11. Як виконуються граничні умови для тангенціальних складових світлового вектора на границі розділу двох середовищ із різними показниками заломлення?
12. Що показують формули Френеля?
13. Чому неполяризоване світло після відбивання від діелектрика частково поляризується? Поясніть механізм.
14. Як би змінилась яскравість відбитого світла, якби кут падіння був меншим або більшим за кут Брюстера? Поясніть залежність.
15. Які матеріали називають двопроменезаломлюючими?

## 7. Дисперсія світла в речовині

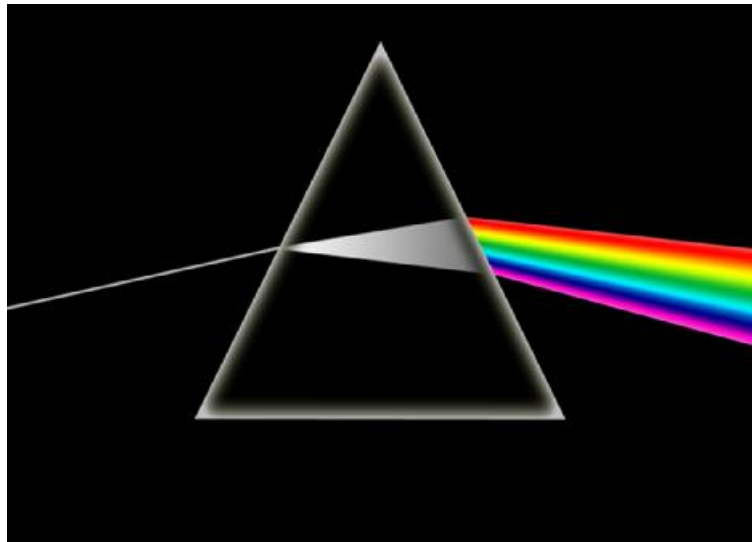
Під дисперсією світла в речовині (не плутати с поняттям дисперсія дифракційної ґратки) розуміють залежність показника заломлення речовини від частоти або довжини хвилі. Тобто має місце залежність

$$n = n(\lambda). \quad (7.1)$$

Прояв дисперсії світла можна побачити якщо спрямувати біле світло (тобто світло в спектрі котрого містяться всі довжини хвиль) на призму. При малому заломлюючому куті  $\theta \ll 1$  має місце відхилення променя від прямолінійного розповсюдження на кут  $\varphi = (n - 1)\theta$ , рис. 7.1 а, б.



а



б

Рис. 7.1

Розрізняють наступні типи дисперсії:

- $\frac{dn}{d\lambda} < 0$  – нормальна дисперсія. Для всіх прозорих безбарвних речовин зі збільшенням довжини хвилі показник заломлення зменшується. У цьому випадку дисперсія називається *нормальною*;
- $\frac{dn}{d\lambda} > 0$  – аномальна дисперсія (проявляється в діапазоні частот поглинання ЕМХ). Якщо речовина поглинає частину променів, то в області поглинання дисперсія виявляє аномалію – показник заломлення при збільшенні довжини хвилі зростає.

Графіки залежності  $n = n(\lambda)$  схематично представлені на Рис. 7.2.

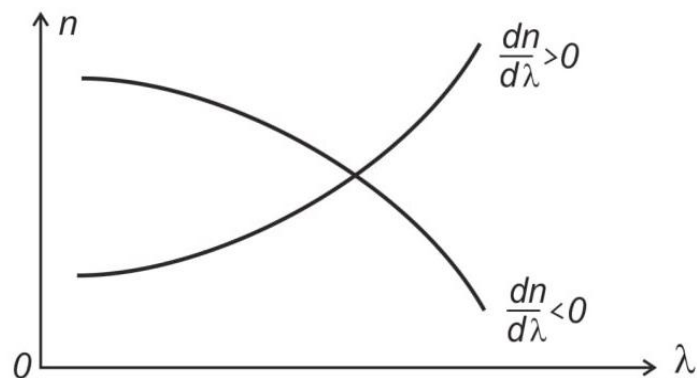


Рис. 7.2

### 7.1. Прояви дисперсії при розповсюдженні ЕМХ. Фазова та групова швидкості

Монохроматична хвиля описується рівнянням виду (2.10)  $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$ , де величина  $(\omega t - kz)$  представляє собою фазу ЕМХ.

Для всіх точок хвильового фронту

$$\omega t - kz = const. \quad (7.2)$$

Візьмемо диференціал від виразу (7.2):

$$\omega dt - k dz = 0;$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_{\text{фазова}}. \quad (7.3)$$

**Фазова швидкість** – швидкість, яка визначає переміщення хвильового фронту. Наприклад, для точкового джерела ЕМХ хвильовий фронт у вигляді сфери збільшує свій радіус з фазовою швидкістю  $v_{\text{фазова}}$ .

В реальності монохроматичних хвиль не існує, як зазначалось в пункті 4.3.2. Розглянемо хвильовий пакет, який для спрощення пояснень містить дві складові з частотами  $\omega$  та  $\omega + \Delta\omega$ . Напишемо рівняння для ЕМХ:

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t - kz);$$

$$E_2 = E_0 \cos((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)z).$$

За принципом суперпозиції:

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)z\right).$$

Множник  $2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)$  представляє собою амплітуду

результуючої ЕМХ. Інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди, отже

$$I \sim 2E_0^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right). \quad (7.4)$$

Інтенсивність (7.3) буде максимальною при умові

$$\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) = \pm 1, \text{ тобто}$$

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z = \pi m. \quad (7.5)$$

Візьмемо диференціал від останнього виразу:  $\frac{\Delta\omega}{2}dt - \frac{\Delta k}{2}dz = 0$ ; звідки

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = u_{\text{групова}}.$$

**Групова швидкість** – швидкість переносу енергії ЕМХ.

$$u_{\text{групова}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (7.6)$$

Знайдемо зв'язок між фазовою та груповою швидкостями. Напишемо

$$u_{\text{групова}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v \cdot k)}{dk} = \frac{dv}{dk}k + v. \quad (7.7)$$

Для того, щоб обчислити вираз (7.7), пригадаємо, що згідно з законом дисперсії, швидкість  $v$  поширення світла в середовищі буде залежати від довжини хвилі  $\lambda$ :  $v = \frac{c}{n(\lambda)}$ , тому похідну  $\frac{dv}{dk}$  можна представити як

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk}. \quad (7.8)$$

Оскільки  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , то другий множник у виразі (7.8)  $\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2}$ .

Перший множник у виразі (7.8) можна представити як

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{dv}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

Одночасно  $v = \frac{c}{n}$ , тому  $\frac{dv}{dn} = -\frac{c}{n^2}$ . Отже, (7.8) запишеться як

$$\frac{dv}{dk} = -\frac{c}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \cdot \left(-\frac{2\pi}{k^2}\right) = \frac{2\pi c}{k^2 n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}. \quad (7.9)$$

Підставимо (7.9) у (7.7):

$$\begin{aligned} u_{\text{групова}} &= \frac{dv}{dk}k + v = \frac{2\pi c}{k^2 n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}k + v = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{c}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda} + v; \\ u_{\text{групова}} &= v + \frac{c\lambda}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Одержана формула (7.10) представляє собою вираз групової швидкості, в якому  $\frac{dn}{d\lambda}$  – це показник дисперсії.

## 7.2. Елементарна теорія дисперсії

Дисперсію світла можна пояснити на основі електромагнітної теорії й електронної теорії речовини. Для цього потрібно розглянути процес взаємодії світла з речовиною. Рух електронів в атомі підлягає законам квантової механіки. Однак, як показав Г.А. Лоренц, для якісного розуміння багатьох оптичних явищ можна застосувати методи класичної фізики і використати

гіпотезу про існування усередині атомів електронів, які пов'язані квазіпружно з ядром. Будучи виведеними з положення рівноваги, такі електрони починають коливатися, поступово втрачаючи енергію коливання на випромінювання електромагнітних хвиль. Зрозуміло, що такі коливання будуть загасаючими. Загасання можна врахувати, ввівши «силу тертя випромінювання», яка є пропорційною швидкості електрона.

Розглянемо атом, що вміщений в зовнішнє поле ЕМХ  $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$ . Для простоти будемо вважати, що це атом водню. Скористаємося борівською теорією будови атома водню.

На електрон з боку ЕМХ діє сила Лоренца  $\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$ .

Відношення величин магнітної та електричної складової, з використанням співвідношення (2.9) для ЕМХ, дорівнює

$$\frac{F_M}{F_{el}} = \frac{qvB \sin 90^\circ}{qE} = \frac{v\mu_0 H}{E} = \frac{v\mu_0 \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E}{E\sqrt{\mu\mu_0}} = v\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}.$$

Зважаючи що  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$  та середовище всередині атома вважається

вакуумом  $\epsilon = 1, \mu = 1$ , одержуємо

$$\frac{F_M}{F_{el}} = \frac{v}{c}.$$

Так як  $v \ll c$ , то  $F_M \ll F_{el}$ , і магнітною складовою сили Лоренца можна знехтувати:  $\vec{F}_L = q\vec{E}$ .

За основним рівнянням динаміки для матеріальної точки

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

За відсутності поля ЕМХ  $E = 0$ , і сила Кулона, що діє на електрон в атомі з боку ядра, врівноважується відцентровою силою:  $\vec{F}_k + \vec{F}_{вц} = 0$ .

В присутності поля ЕМХ  $\vec{E} \neq 0$ , і  $\vec{F}_\kappa + \vec{F}_{\text{вц}} = k\vec{r}$ , де  $\vec{r}$  – радіальне відхилення електрона від стаціонарної орбіти,  $k$  – коефіцієнт пропорційності. Тоді основне рівняння динаміки приймає вигляд

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = eE_0 \cos \omega t - kr. \quad (7.11)$$

Зважаючи, що косинус являє собою дійсну частину комплексної експоненти,  $\cos \omega t = \text{Re} e^{i\omega t}$ , рівняння (7.11) зручніше переписати у вигляді

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = eE_0 e^{i\omega t} - kr. \quad (7.12)$$

Тоді загальний розв'язок одержаного диференціального рівняння матиме вигляд  $r = r_0 e^{i\omega t}$ . Знайдемо похідні:

$$\frac{dr}{dt} = i\omega r_0 e^{i\omega t}; \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -\omega^2 r_0 e^{i\omega t}$$

та підставимо їх в (7.12), отримаємо

$$m(-\omega^2 r_0 e^{i\omega t}) = eE_0 e^{i\omega t} - kr_0 e^{i\omega t};$$

$$-\omega^2 r_0 + \frac{k}{m} r_0 = \frac{eE_0}{m}.$$

Позначимо  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  – власна частота коливань системи без втрат енергії.

Тоді амплітуда змінної складової коливань електрона на орбіті складе

$$r_0 = \frac{eE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Відповідно,  $\dot{r} = r_0 e^{i\omega t} = \frac{eE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t}$ , а його дійсна частина

$$\text{Re} \dot{r} = \frac{eE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (7.13)$$

З теорії діелектриків пригадаємо властивості електричного диполя. Електричний момент диполя  $\vec{p}_e = q\vec{l}$ , де в якості плеча диполя у нас виступає

відхилення електрона від значення стаціонарного радіусу його орбіти, дане виразом (7.13):

$$\rho_i = \frac{e^2 E_0 / m}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (7.14)$$

Поляризованість речовини визначається повним дипольним моментом одиниці об'єму:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_i.$$

Тоді, з врахуванням того, що ми маємо справу з атомом, який має зарядове число  $Z$ , рівне кількості електронів в атомі,

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^Z \frac{e^2 E_0 / m}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} n_0 \cos \omega t, \quad (7.15)$$

де  $n_0$  – концентрація атомів.

З іншого боку,

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (7.16)$$

де  $\chi$  – діелектрична сприйнятливість середовища.

Прирівняємо (7.15) та (7.16):  $\frac{e^2 E_0 n_0}{m} \cos \omega t \sum_{i=1}^Z \frac{1}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} = \chi \varepsilon_0 E_0 \cos \omega t$ ;

$$\chi = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \sum_{i=1}^Z \frac{1}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}. \quad (7.17)$$

Сприйнятливість середовища зв'язана з його відносною діелектричною проникністю:  $1 + \chi = \varepsilon$ , а показник заломлення середовища  $n = \sqrt{\varepsilon}$  ( $\mu$  вважаємо рівним 1);  $n^2 = \varepsilon$ . Тоді,

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \sum_{i=1}^Z \frac{1}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} = n^2. \quad (7.18)$$

Залежність квадрата показника заломлення від частоти показана на рис. 7.3. На графіку можна виділити області, де похідна  $\frac{dn}{d\lambda}$  має різні знаки. В області резонансних частот коливань електрона в атомі нескінченності

фізично не можуть існувати. Така ситуація склалась завдяки використанню нами спрощеної моделі коливань електрона без врахування втрат на перевипромінювання атомом ЕМХ.

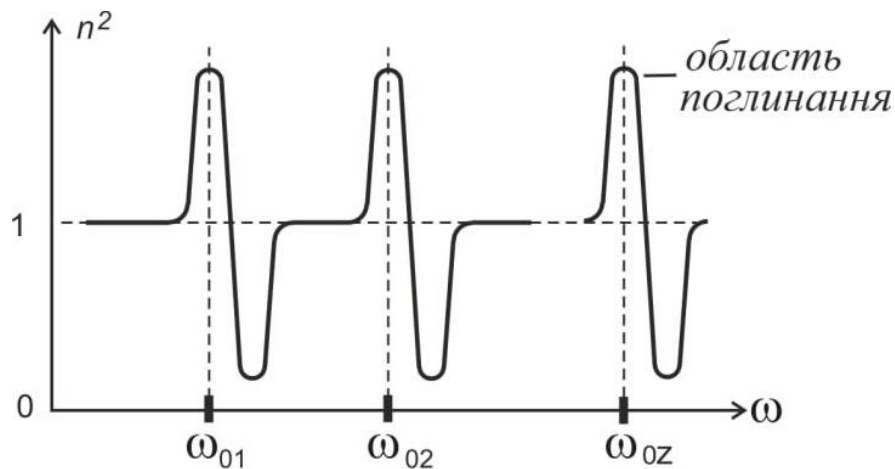


Рис. 7.3. Залежність квадрату показника заломлення від частоти

### Контрольні запитання і завдання

1. Що таке дисперсія світла?
2. Чим відрізняються нормальна та аномальна дисперсія?
3. Яка залежність між показником заломлення та довжиною хвилі характерна для нормальної дисперсії?
4. Чим пояснюється поява спектра білого світла у призмі?
5. Які частини видимого спектра заломлюються найсильніше, а які – найслабше?
6. Чому веселка має саме такий порядок кольорів – від червоного до фіолетового?
7. Поясніть, чому під час аномальної дисперсії порядок кольорів може змінюватися
8. Що таке показник дисперсії?
9. Чому для реальних ЕМХ необхідно ввести поняття групової швидкості?
10. Як обчислюється групова швидкість?
11. Одержіть формулу взаємозв'язку між фазовою та груповою швидкостями

## РОЗДІЛ 2. КВАНТОВА ОПТИКА

### 8. Квантові властивості світла. Фотони

**Корпускулярно-хвильовий дуалізм світла** – це фундаментальна властивість світла, яка полягає в тому, що світло може проявляти як хвильові, так і корпускулярні (квантові) властивості залежно від умов експерименту.

- **Хвильові властивості** – світло поводить себе як електромагнітна хвиля. Це проявляється в таких явищах:

- Інтерференція;
- Дифракція;
- Поляризація;
- Дисперсія.

- **Корпускулярні властивості** – світло поводить себе як потік частинок – **фотонів**, кожен із яких несе певну «порцію» енергії. Це проявляється в таких явищах:

- Фотоелектричний ефект;
- Рентгенівське випромінювання;
- Ефект Комптона;
- Тиск світла;
- Спектри поглинання або випромінювання атомів;
- Закони теплового випромінювання.

#### 8.1. Фотони. Властивості фотонів

Ейнштейн висунув гіпотезу, що світло поширюється у вигляді дискретних квазічастинок, які спочатку назвали світловими квантами, а пізніше – **фотонами**.

Властивості фотонів:

- Енергія фотона відповідно до гіпотези Ейнштейна визначається його частотою:

$$E = h\nu, \quad \text{або} \quad E = \hbar\omega, \quad (8.1)$$

де  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка,  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·с

– зведена стала Планка.

- Фотон рухається з такою самою швидкістю, як і електромагнітна хвиля у вакуумі. Це означає, що швидкість фотона  $v$  дорівнює швидкості світла  $c$ . Слід взяти до уваги, що фотони рухаються зі швидкістю  $c$  не тільки у вакуумі, але й у речовині. «Уповільнення» світла в речовині обумовлене тим, що при проходженні через речовину фотони поглинаються атомами й слідом за цим випромінюються знову. Між актами поглинання й випромінювання проходить деякий час, внаслідок чого середня швидкість фотонів у речовині виявляється меншою за  $c$ .
- Взаємозв'язок між енергією  $E$  та імпульсом  $p$  фотона впливає зі спеціальної теорії відносності. Імпульс релятивістської частинки

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Маса спокою фотона дорівнює нулю  $m_0 = 0$ , але  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \neq 0$ .

Повна енергія релятивістської частинки

$$E = c\sqrt{p^2 + (m_0 c)^2},$$

але для фотонів  $m_0 = 0$ , тому  $E = cp$ , і імпульс фотона

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h\nu}{c}; \quad (8.2)$$

$$p = \frac{h}{\lambda}; \quad (8.3)$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (8.4)$$

- При взаємодії з речовиною фотони можуть випромінюватися, поглинатися й розсіюватися. Закони збереження енергії й імпульсу для фотонів виконуються.

## 8.2. Зовнішній фотоефект

**Фотоелектричним ефектом**, або фотоефектом називається вибивання електронів із речовини під дією світла. Це явище було відкрите та досліджене Г. Герцом у 1887 р. (Рис. 8.1 – Рис. 8.2). Він помітив, що проскакування іскри між кульками розрядника значно полегшується, коли одну з кульок освітити ультрафіолетовими променями.

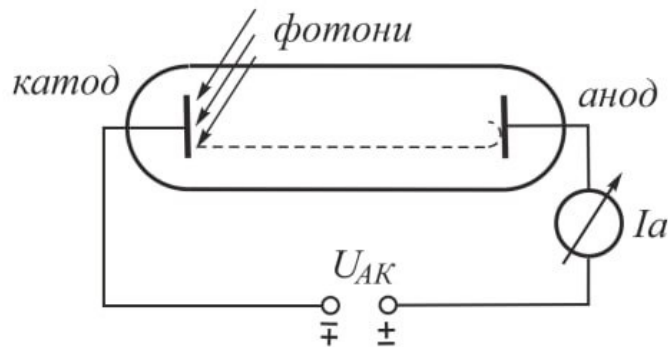


Рис. 8.1. Схема дослідження фотоефекту

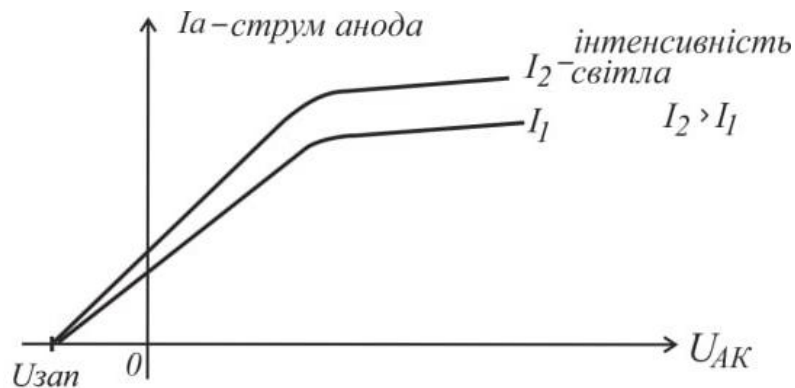


Рис. 8.2. Вольт-амперні характеристики фотоефекту при різних інтенсивностях світла та однаковій довжині хвилі

Дослідним шляхом були встановлені три закони фотоефекту:

- 1) Максимальна початкова швидкість фотоелектронів визначається частотою світла й не залежить від його інтенсивності.
- 2) Для кожної речовини існує червона межа фотоефекту, тобто така найменша частота світла  $\omega_0$ , при якій ще можливий фотоефект.
- 3) Число фотоелектронів, що вириваються з катода за одиницю часу (струм насичення  $I_n$ ), прямо пропорційне інтенсивності світла.

Установлені експериментально залежності не вкладаються в рамки класичних уявлень. Наприклад, швидкість фотоелектронів за класичними

поняттями повинна зростати з амплітудою, а, отже, і з інтенсивністю електромагнітної хвилі.

У 1905 р. А. Ейнштейн показав, що всі закономірності фотоефекту легко пояснюються, якщо припустити (**гіпотеза Ейнштейна**), що світло поглинається такими самими порціями  $\hbar\omega$  (квантами), якими він, за припущенням Планка, випромінюється. На думку Ейнштейна, енергія, отримана електроном, передається йому у вигляді кванта  $\hbar\omega$ , який ним поглинається повністю. Частина цієї енергії, яка дорівнює роботі виходу  $A_{\text{вих}}$ , витрачається на те, щоб електрон міг покинути тіло. Якщо електрон звільняється світлом не біля поверхні, а на деякій глибині, то частина енергії, може бути загублена внаслідок випадкових зіткнень у речовині. Залишок енергії утворює кінетичну енергію  $E_k$  електрона, який покинув речовину (Рис. 8.3).

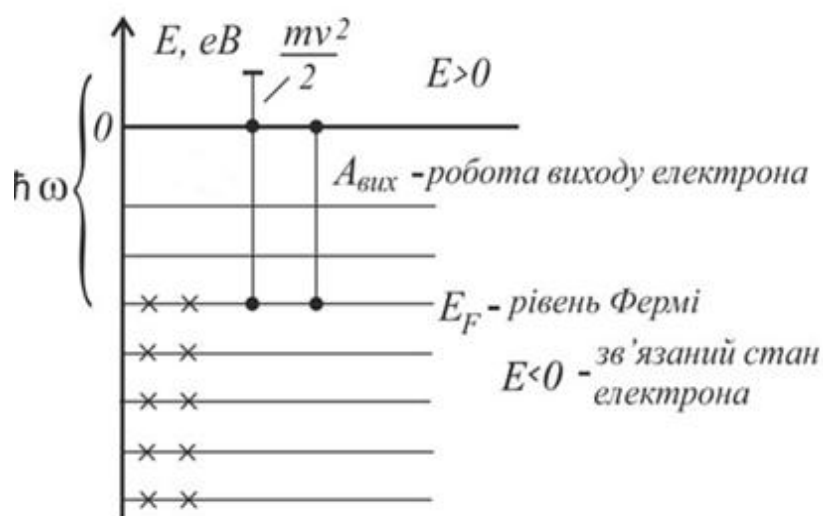


Рис. 8.3. Енергетична діаграма електронів в металах

Таким чином, за законом збереження енергії, отримуємо **формулу Ейнштейна для фотоефекту**

$$\hbar\omega = \frac{mv^2}{2} + A_{\text{вих}} \quad (8.5)$$

Запираюча напруга, при якій фотострум припиняється, знаходиться з умови

$$U_{\text{зан}} e = \hbar\omega - A_{\text{вих}} \Rightarrow$$

$$U_{\text{зан}} = \frac{\hbar\omega - A_{\text{вих}}}{e}. \quad (8.6)$$

З формули (8.5) також випливає, що у випадку, коли робота виходу із поверхні металу  $A_{\text{вих}}$  перевищує енергію кванта світла  $\hbar\omega$ , електрони не можуть покинути метал. Отже, для виникнення фотоефекту необхідне виконання умови:

$$\omega \geq \omega_0 = \frac{A_{\text{вих}}}{\hbar}. \quad (8.7)$$

Відповідно для довжини хвилі маємо умову:

$$\lambda \leq \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{A_{\text{вих}}}. \quad (8.8)$$

Частота  $\omega_0$  або довжина хвилі  $\lambda_0$  називаються **червоною межею фотоефекту**.

### 8.3. Гальмівне рентгенівське випромінювання (зворотній фотоефект)

У 1895 р. Рентген виявив, що при бомбардуванні скла й металів швидкими електронами виникає випромінювання, яке має велику проникну здатність (Рис. 8.4). Сам Рентген назвав відкрите ним випромінювання X-променями (ікс-променями). Потім воно отримало назву рентгенівських променів. Подальші дослідження показали, що рентгенівське випромінювання є електромагнітним випромінюванням з довжиною хвилі в межах від  $10^{-2}$  нм до 10 нм.

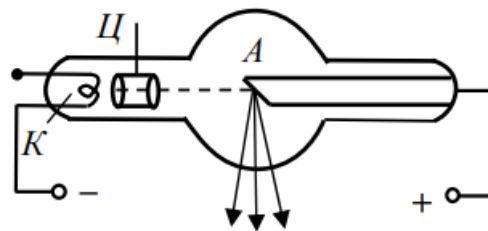


Рис. 8.4

Якщо між катодом і анодом прикладена напруга  $U$ , електрони розганяються до енергії  $eU$ . Потрапивши в речовину анода, електрони сильно

гальмуються, тобто рухаються з великим прискоренням і тому стають джерелом електромагнітних хвиль. При достатньо великій початковій швидкості електронів, крім гальмівного випромінювання (тобто випромінювання, яке обумовлене гальмуванням електронів), збуджується також характеристичне випромінювання (викликане збудженням внутрішніх електронних оболонок атомів анода). Відповідно до класичної електродинаміки при гальмуванні електрона повинні виникати хвилі всіх довжин – від нуля до нескінченності. Довжина хвилі, на яку припадає максимум потужності випромінювання, повинна зменшуватися зі збільшенням швидкості електронів, тобто напруги  $U$  на трубці.

Існує одне принципове неузгодження з класичною електродинамікою. Воно полягає у тому, що криві розподілу потужності не йдуть до початку координат, а обриваються при скінченних значеннях довжини хвилі  $\lambda_{min}$  (Рис. 8.5). Ці значення довжини хвиль називають *короткохвильовою межею рентгенівського випромінювання*.

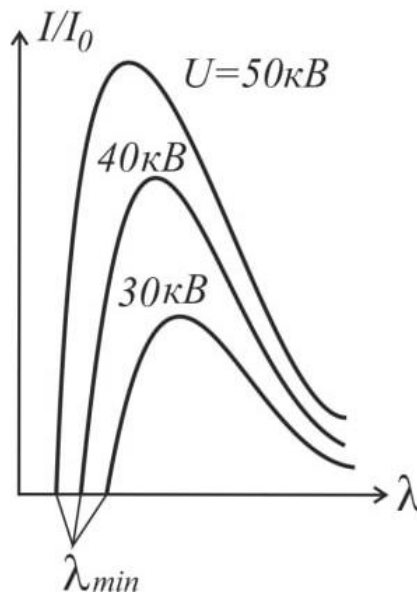


Рис. 8.5. Спектр випромінювання рентгенівської трубки;  $\lambda_{min}$  – короткохвильова границя в спектрі рентгенівського випромінювання

Експериментально встановлено, що короткохвильова межа гальмівного рентгенівського спектра  $\lambda_{min}$  (у нанометрах) пов'язана із прискорювальною напругою  $U$  (у вольтах) співвідношенням:

$$\lambda_{\min} = \frac{1239}{U}.$$

Існування короткохвильової межі є одним з підтверджень уявлень про випромінювання електромагнітних хвиль порціями  $\hbar\omega$ . Дійсно, якщо випромінювання виникає за рахунок енергії, що втрачається електроном при гальмуванні, то величина кванта  $\hbar\omega$  не може перевищувати енергію електрона  $eU$ :

$$\hbar\omega \leq eU.$$

Звідси випливає, що частота випромінювання не може перевищувати  $\omega_{\max} = \frac{eU}{\hbar}$ , а довжина хвилі не може бути меншою ніж

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi\hbar c}{eU}. \quad (8.9)$$

Звідси експериментально отримано значення  $\hbar$ :

$$\hbar = \frac{1239 \cdot 10^{-9} e}{2\pi c} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

#### **8.4. Ефект Комптона**

Особливо виразно проявляються корпускулярні властивості світла в явищі, яке отримало назву *ефекту Комптона*.

У 1923 р. Комптон, досліджуючи розсіювання рентгенівських променів різними речовинами (Рис. 8.6), виявив, що в розсіяних променях разом з випромінюванням початкової довжини хвилі  $\lambda$  містяться також промені більшої довжини хвилі  $\lambda'$  (Рис. 8.7). Різниця  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  виявилася залежною тільки від кута  $\theta$  між напрямками розсіяного випромінювання та первинного пучка. Виявилось, що від довжини хвилі  $\lambda$  й від природи речовини, на якій відбувається розсіювання,  $\Delta\lambda$  не залежить (Рис. 8.7).

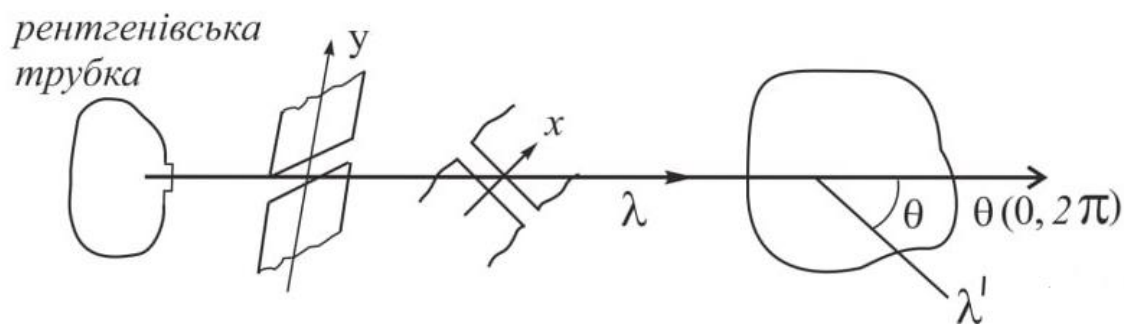


Рис. 8.6. Схема дослідів в ефекті Комптона

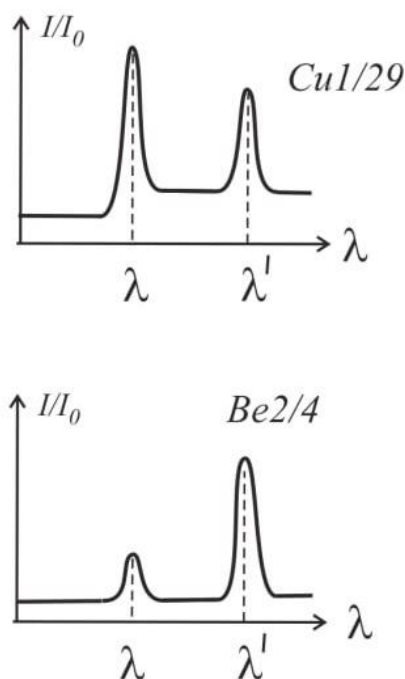


Рис. 8.7. Залежність інтенсивності розсіяної компоненти випромінювання від співвідношення кількості валентних електронів до загальної кількості електронів в атомі

Усі особливості ефекту Комптона можна пояснити, розглядаючи розсіювання як процес пружного зіткнення рентгенівських фотонів із практично вільними електронами. Вільними можна вважати електрони, які слабо зв'язані з атомами, енергія зв'язку яких значно менша від тієї енергії, яку фотон може передати електрону при зіткненні.

Нехай на вільний електрон, який у початковому стані перебуває у стані спокою, падає фотон з енергією  $\hbar\omega$  й імпульсом  $\hbar\vec{k}$  (Рис. 8.8).

- Закон збереження енергії:

$$\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p_e^2 + (m_0c)^2}, \quad (8.10)$$

де  $\hbar\omega$  – енергія фотона до зіткнення;

$m_0c^2$  – енергія спокою електрона до зіткнення;

$\hbar\omega'$  – енергія фотона після зіткнення;

$c\sqrt{p_e^2 + (m_0c)^2}$  – енергія електрона після зіткнення, відповідно до спеціальної теорії відносності.

- Закон збереження імпульсу:

$$\vec{p}_\phi + 0 = \vec{p}'_\phi + \vec{p}_e,$$

де  $\vec{p}_\phi = \hbar\vec{k}$  – імпульс фотона до зіткнення;

імпульс електрона до зіткнення дорівнює нулю;

$\vec{p}'_\phi = \hbar\vec{k}'$  – імпульс фотона після зіткнення;

$\vec{p}_e$  – імпульс електрона після зіткнення.

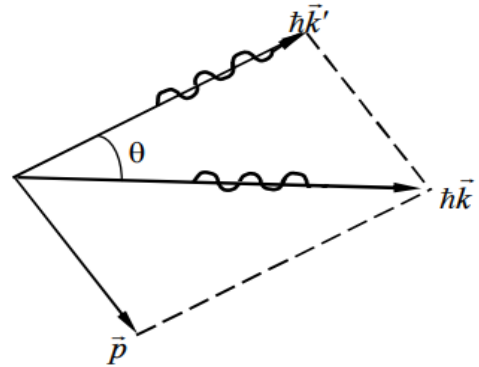


Рис. 8.8. Векторна діаграма до закону збереження імпульсу в ефекті Комптона

Тоді

$$\hbar\vec{k} = \vec{p}_e + \hbar\vec{k}'. \quad (8.11)$$

Розділимо (8.10) на  $c$ , напишемо у вигляді

$$\sqrt{p_e^2 + (m_0c)^2} = \hbar(k - k') + m_0c, \quad \left(\frac{\omega}{c} = k\right),$$

і піднесемо до квадрату:

$$\begin{aligned} p_e^2 + (m_0c)^2 &= (\hbar(k - k') + m_0c)^2 = \\ &= \hbar^2(k^2 - 2kk' + k'^2) + 2m_0c\hbar(k - k') + (m_0c)^2 \Rightarrow \\ p_e^2 &= \hbar^2(k^2 - 2kk' + k'^2) + 2m_0c\hbar(k - k'). \end{aligned}$$

Піднесемо до квадрату рівність (8.11), записавши у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{p}_e^2 &= \hbar^2(\vec{k} - \vec{k}')^2 = \hbar^2(\vec{k}^2 - 2\vec{k}\vec{k}' + \vec{k}'^2) = \\ &= \hbar^2(k^2 - 2kk'\cos\theta + k'^2), \end{aligned}$$

де  $\theta$  – кут між векторами  $\vec{k}$  і  $\vec{k}'$ .

Прирівнявши дві отримані рівності, одержуємо

$$\hbar^2(k^2 - 2kk' + k'^2) + 2m_0c\hbar(k - k') = \hbar^2(k^2 - 2kk'\cos\theta + k'^2),$$

$$m_0c(k - k') = \hbar k k' (1 - \cos\theta),$$

домножаємо ліву та праву частину рівності на  $2\pi$  і ділимо на  $kk'$

$$\frac{2\pi}{k'} - \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{m_0c} (1 - \cos\theta),$$

і, в результаті, формула для **ефекту Комптона**

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta), \quad (8.12)$$

де  $\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{m_0c}$  називається **комptonівською довжиною хвилі** тієї частинки, маса

$m_0$  якої розглядається. Підстановка значень  $\hbar$ ,  $c$  і  $m_0$  для електрона дає значення  $\lambda_c = 0,00243$  нм.

#### *Контрольні запитання і завдання*

1. В чому полягає корпускулярно-хвильовий дуалізм світла?
2. В яких фізичних явищах світло поводить себе як потік частинок?
3. Що таке фотон? Яка швидкість його руху?
4. Який взаємозв'язок між енергією фотона та частотою світла?
5. Що називають імпульсом фотона?
6. Чому фотон не може бути зупинений і не має маси спокою, але має імпульс?  
Поясніть.
7. Який взаємозв'язок між імпульсом фотона та довжиною хвилі світла?  
Виведіть цю формулу на основі спеціальної теорії відносності
8. У чому полягає явище зовнішнього фотоефекту?
9. Як записується формула Ейнштейна для фотоефекту?
10. Чому збільшення інтенсивності світла не впливає на максимальну швидкість фотоелектронів?
11. Що таке червона межа фотоефекту?
12. Що таке запираюча напруга?
13. У чому полягає явище зворотнього фотоефекту?

14. Як можна експериментально визначити планківську сталу, використовуючи фотоефект?
15. Чому короткохвильове ультрафіолетове випромінювання є більш небезпечним для живих організмів, ніж інфрачервоне? Поясніть на основі квантових властивостей.
16. В чому суть ефекту Комптона?
17. Як одержати формула для ефекту Комптона на основі законів збереження енергії та імпульсу?

## РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

### 9. Борівська теорія атома

#### 9.1. Дослід Резерфорда

**Дослід Резерфорда.** У той час, коли Резерфорд приступав до своїх дослідів, було відомо, що  $\alpha$ -частинки випромінюються деякими речовинами при радіоактивному розпаді. Швидкості  $\alpha$ -частинок мають порядок  $10^7$  м/с. Вони мають додатний заряд, що дорівнює подвоєному елементарному заряду. При втраті цього заряду (при приєднанні двох електронів)  $\alpha$ -частинка перетворюється в атом гелію.

Дослід виконувався наступним чином (Рис. 9.1):  $\alpha$ -частинки випромінювалися радіоактивною речовиною  $P$ , проходили через вузький отвір і потрапляли на тонку металеву фольгу  $\Phi$ . При проходженні через фольгу  $\alpha$ -частинки відхилялися від початкового напрямку руху на різні кути. Розсіяні  $\alpha$ -частинки вдарялися об екран  $E$ , який був покритий сірчистим цинком, і викликане ударами світіння спостерігалось в мікроскоп  $M$ . Мікроскоп і екран можна було обертати навколо осі, що проходить через центр розсіювальної фольги, і встановлювати під будь-яким кутом  $\theta$ . Весь прилад розміщувався у посудині, з якої було відкачано повітря. Це було зроблено для того, щоб усунути розсіювання  $\alpha$ -частинок за рахунок зіткнень із молекулами повітря.

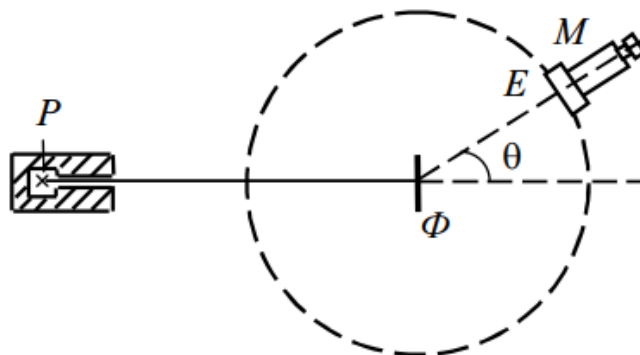


Рис. 9.1

**Ядерна модель атома.** Виявилося, що деяка кількість  $\alpha$ -частинок розсіюється на дуже великі кути (майже до  $180^\circ$ ). Проаналізувавши результати досліду, Резерфорд дійшов висновку, що настільки сильне відхилення  $\alpha$ -частинок можливо тільки в тому випадку, коли усередині атома є надзвичайно сильне електричне поле, що створюється зарядом, який пов'язаний з великою масою й сконцентрований у дуже малому об'ємі. Ґрунтуючись на цьому висновку, Резерфорд запропонував у 1911р. *ядерну модель атома*. За Резерфордом, атом являє собою систему зарядів, у центрі якої розміщене важке додатне ядро із зарядом  $Z \cdot e$  та розміром не більше  $10^{-14}$  м, а навколо ядра розміщені  $Z$  електронів, що розподілені в усьому об'ємі атому. Майже вся маса атома зосереджена в ядрі.

**Формула Резерфорда** для відносної кількості  $\alpha$ -частинок, розсіяних в інтервалі кутів від  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ :

$$\frac{dN_\theta}{N} = na \left( \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{4 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)}, \quad (9.1)$$

де  $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$  – тілесний кут, у межах якого знаходяться напрями, що відповідають кутам розсіювання від  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ ,  $\frac{m_\alpha v^2}{2}$  – кінетична енергія  $\alpha$ -частинки вдалині від ядра,  $n$  – число атомів в одиниці об'єму,  $a$  – товщина фольги.

## 9.2. Постулати Бора. Правило квантування орбіт

Ядерна модель атома з точки зору класичної механіки й електродинаміки виявилася нездатною пояснити стійкість атома. Вихід з цього ускладнення був знайдений в 1913р. датським фізиком Нільсом Бором, ціною введення припущень, що суперечать класичним уявленням. Припущення, запропоновані Бором, містяться у двох сформульованих ним постулатах (*постулати Бора*).

1. Атом (і будь-яка атомна система) може перебувати не у всіх станах, що допускаються класичною механікою, а тільки в деяких вибраних (квантових) станах, що характеризуються певними перервними, дискретними значеннями енергії  $E_1, E_2, E_3, \dots$ . У цих станах, всупереч класичній електродинаміці, атом не випромінює. Тому вони називаються стаціонарними станами.
2. Випромінювання випускається або поглинається у вигляді світлового кванта енергії  $\hbar\omega$  при переході електрона з одного стаціонарного стану в інший (Рис. 9.2). Величина світлового кванта дорівнює різниці енергій стаціонарних станів, між якими відбувається квантовий перехід електрона:

$$\hbar\omega_{mn} = E_n - E_m. \quad (9.2)$$

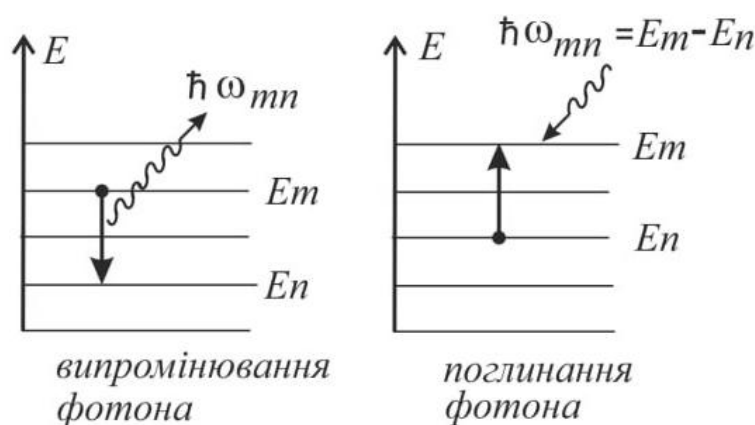


Рис. 9.2. Енергетична діаграма переходу електронів при випромінюванні/поглинанні фотонів атомом водню

**Правило квантування орбіт:** у стаціонарному стані атома електрон, рухаючись по орбіті, повинен мати дискретні, квантовані значення моменту імпульсу:

$$L = m_e v r = n \hbar, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (9.3)$$

Тут  $m_e$  – маса електрона,  $v$  – його швидкість,  $r$  – радіус кругової орбіти,  $n$  – ціле число, що отримало назву **головного квантового числа**.

Розглянемо обертання електрона по стаціонарній орбіті навколо ядра в атомі водню (Рис. 9.3).

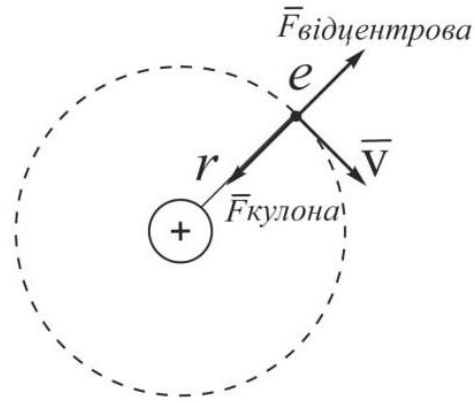


Рис. 9.3. Розподіл сил для електрона на стаціонарній орбіті в атомі водню

При цьому сила Кулона, що діє на електрон, врівноважується відцентровою силою:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \cdot e}{r^2} = m \frac{v^2}{r}. \quad (9.4)$$

Звідси кінетична енергія електрона  $\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r}$ .

Повна енергія електрона є сумою кінетичної енергії та потенціальної енергії в електростатичному полі:

$$E_{нов} = E_{кін} + E_{потенц} = \frac{mv^2}{2} + \left( -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r}. \quad (9.5)$$

Те, що повна енергія електрона в атомі є меншою нуля, означає, що він перебуває у зв'язаному стані.

Обчислимо радіус орбіти електрона. Піднесемо (9.3) до квадрату

$$m^2 v^2 r^2 = n^2 \hbar^2 \Rightarrow v^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 r^2} \text{ і підставимо у (9.4) } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{m}{r} \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 r^2} \Rightarrow$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m} n^2. \quad (9.6)$$

При  $n = 1$

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m} = 0,0529, \text{ нм}. \quad (9.7)$$

Енергія електрона на  $n$ -й орбіті, відповідно до (9.5) з урахуванням (9.6),

$$E_n = -\left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{e^4 m}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}, \text{ еВ}. \quad (9.8)$$

### 9.3. Спектральні закономірності у випромінюванні атома водню

За постулатами Бора, при переході електрона з  $n$ -го на  $m$ -й енергетичний рівень буде випромінюватись (або поглинатись) квант енергії з частотою

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar},$$

і, враховуючи (9.8),

$$\omega_{nm} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{e^4 m}{2\hbar^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Множник  $R = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{e^4 m}{2\hbar^3} = 2,07 \cdot 10^{-16} \text{ 1/с}$  називається **сталю Рідберга**.

Таким чином,

$$\omega_{nm} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (9.9)$$

Енергетична діаграма, що ілюструє формулу (9.9), приведена на рисунку 9.4.

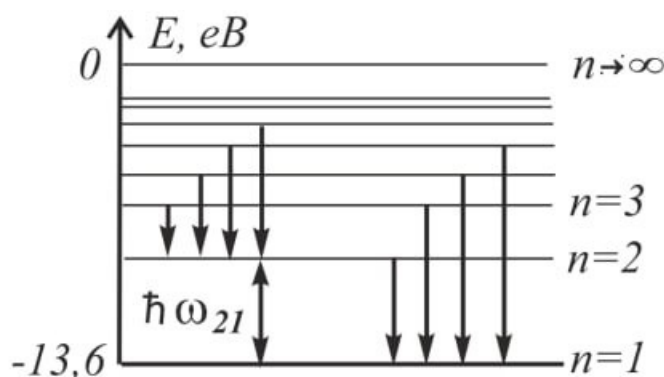


Рис. 9.4. Енергетична діаграма електронів для пояснення появи лінійчастих спектрів для атома водню

Випромінювання незваєomodіючих один з одним атомів складається з відокремлених спектральних ліній. Відповідно до цього спектр випромінювання атомів називається **лінійчастим**. Вивчення атомних спектрів стало ключем до пізнання будови атомів. Насамперед було помічено, що лінії в спектрах атомів розміщені не безсистемно, а поєднуються в групи або, як їх називають, **серії ліній**. Краще всього це проявляється в спектрі найпростішого атома – водню.

На рисунку 9.5 показана частина спектра атомарного водню у видимій і близькій ультрафіолетовій області. Символами  $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$  і  $H_\delta$  позначені видимі лінії.  $H_\infty$  вказує межу серії. Очевидно, що лінії розміщені у певному порядку. Відстань між лініями закономірно зменшується при переході від більш довгих хвиль до більш коротких.

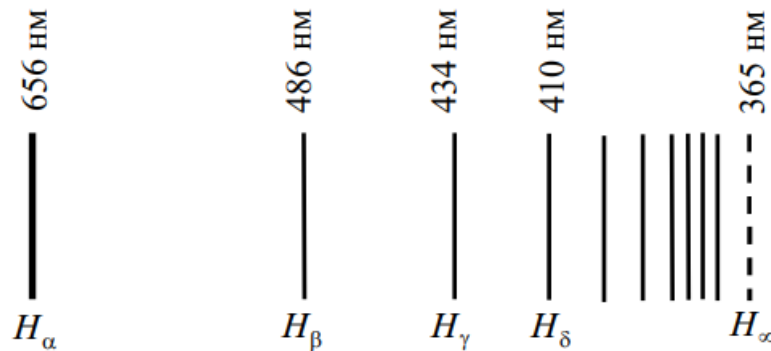


Рис. 9.5

Швейцарський фізик Бальмер (1885) виявив, що довжини хвиль цієї серії ліній водню можуть бути визначені формулою:

$$\omega = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n = 3, 4, 5, \dots). \quad (9.10)$$

де  $n$  – ціле число, що набуває значень 3, 4, 5 і т.д.

Формула (9.10) називається **формулою Бальмера**, а відповідна серія спектральних ліній водневого атома – **серією Бальмера**. Подальші дослідження показали, що у спектрі водню є ще кілька серій:

$$\text{серія Лаймана: } \omega = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n = 2, 3, 4, \dots); \quad (9.11)$$

$$\text{серія Пашена: } \omega = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n = 4, 5, 6, \dots); \quad (9.12)$$

$$\text{серія Брекета: } \omega = R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n = 5, 6, 7, \dots); \quad (9.13)$$

$$\text{серія Пфунда: } \omega = R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n = 6, 7, 8, \dots). \quad (9.14)$$

*Контрольні запитання і завдання*

1. Які основні постулати запропонував Нільс Бор у своїй теорії атома?
2. Що таке стаціонарні стани атома?
3. У якому випадку атом випромінює або поглинає квант енергії?
4. Як квантується момент імпульсу електрона в атомі?
5. Виведіть формулу радіуса орбіти електрона в атомі
6. Що таке перший борівський радіус (радіус Бора)?
7. Виведіть формулу для енергії електрона на  $n$ -й орбіті в атомі водню
8. Як зміниться енергія електрона, якщо головне квантове число збільшити вдвічі?
9. Як пояснити лінійчаті спектри випромінювання (або поглинання) атомів?
10. Що називають серіями в спектрі атома водню (серії Лаймана, Бальмера тощо)?
11. Чому спектральні лінії в серії Лаймана лежать в ультрафіолетовій частині спектра?

## 10. Хвилі де Бройля

### 10.1. Хвильові властивості мікрочастинок. Гіпотеза де Бройля

У 1924 р. де Бройль висунув гіпотезу, що існують інші матеріальні об'єкти окрім світла, які мають подвійну природу: корпускулярну та хвильову. Він припустив, що частинки речовини (електрони, протони і т.д.) поряд з корпускулярними властивостями мають також і хвильові (корпускулярно-хвильовий дуалізм частинок). Де Бройль переніс на частинки речовини такі самі правила переходу від корпускулярних характеристик до хвильових, які є справедливими у випадку фотонів і описуються формулами (8.1) – (8.4).

Таким чином, за гіпотезою де Бройля рух будь-якої частинки пов'язаний із хвильовим процесом, довжина і частота хвилі визначається аналогічно до світлової хвилі:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}, \quad (10.1)$$

де  $p$  – імпульс частинки (електрона)

Формула (10.1) визначає довжину хвилі де Бройля (хвилі, що відповідає частинці речовини).

Експериментальним підтвердженням гіпотези де Бройля став **дослід Девіссона та Джермера (1927р.)** – один із найважливіших експериментів у квантовій фізиці, який підтвердив хвильові властивості електронів. Електрони прискорювалися у вакуумному діоді за допомогою електричного поля (прискорююча напруга  $U_{AK}$  кілька десятків вольт), рис. 10.1.

Інтенсивність пучка електронів, відбитих під різними кутами, вимірювалась за допомогою детектора, в ролі якого виступав торець дроту. Сила струму, яку створювали відбиті електрони, фіксувалась мікроамперметром. Вочевидь, сила струму була пропорційна кількості електронів  $dN_e$ , що падали в одиницю часу на торець провідника

$I = \frac{dq}{dt} = \frac{e dN_e}{dt}$ . В очікуванні було, що сила струму не мала залежати від кута ковзання  $\theta$  (Рис. 10.2), але при певних кутах  $\theta_0$  та прискорюючих напругах

спостерігалось резонансне збільшення струму. Це нагадувало явище дифракції рентгенівських променів на вузлах кристалічної ґратки. Але зараз мова йшла про електрони.

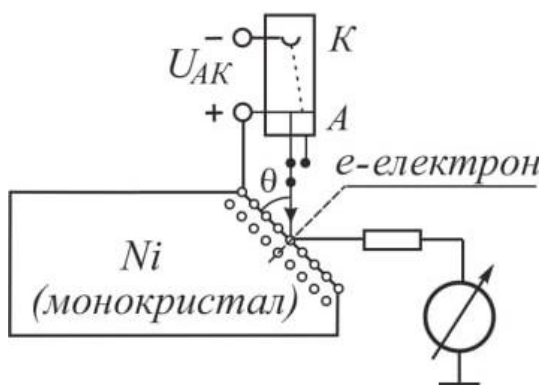


Рис. 10.1. Схема досліду Девіссона та Держмера

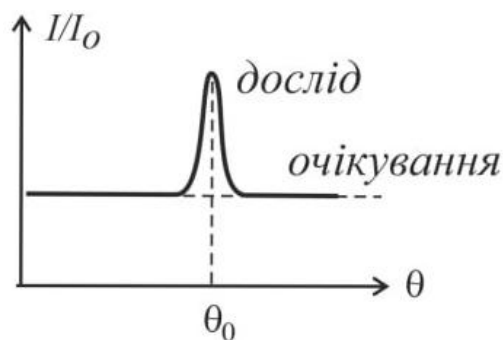


Рис. 10.2. Характеристика розсіювання електронів з поверхні монокристалу Ni

В пошуках пояснення цього неочевидного факту згадали про гіпотезу де Бройля відносно хвильових властивостей частинок (електронів). Пучок електронів спрямовувався на кристал нікелю, який діяв як дифракційна ґратка (Рис. 10.3).

Електрони, досягаючи поверхні кристала нікелю, розсіюються на атомарних площинах кристалічної структури. При цьому різницю ходу пучків 1 та 2, відбитих від сусідніх площин, можна обчислити за формулою (4.28) для плоскопаралельної пластинки, в якій міжатомне середовище вважається вакуумом з показником заломлення  $n_{зал} = 1$ , а відстань між сусідніми кристалічними площинами  $d$  є відомою. Максимуми інтенсивності відбитого пучка спостерігатимуться за умови, що різниця ходу променів 1 та 2 має дорівнювати цілому числу довжин хвилі:

$$\Delta_{12} = 2d \sin \theta = n\lambda \text{ – умова Брегівської дифракції,}$$

де  $n$  – ціле число (порядок дифракції),

$d$  – відстань між розсіювальними центрами (атомними площинами).

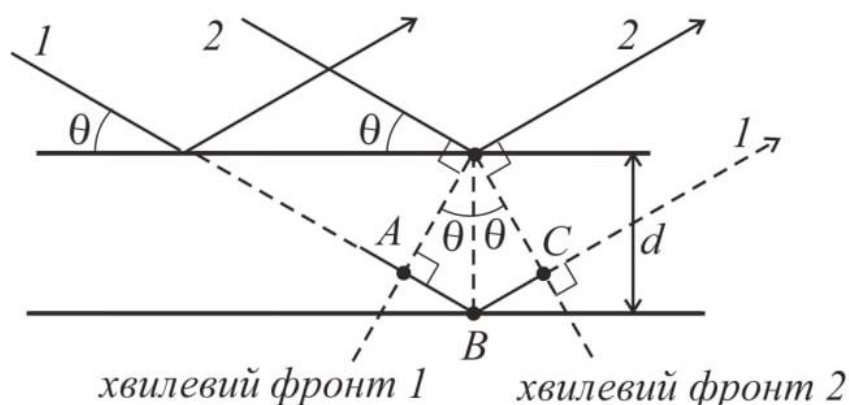


Рис. 10.3. До пояснення резонансного відбиття електронів як хвилі де Бройля від кристалічної ґратки нікелю;  $d$  – відстань між атомними площинами

При цьому довжина хвилі визначається за формулою де Бройля  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$ ,

в якій імпульс визначимо через прискорюючу напругу для пучка електронів:

$$eU_{AK} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2meU_{AK}}. \text{ Тоді } \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU_{AK}}}; \text{ Умова дифракційного}$$

$$\text{максимуму: } 2d \sin \theta = n \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU_{AK}}}.$$

Змінюючи напругу  $U_{AK}$  на електронній гарматі, Девіссон і Джермер встановили, що при певних енергіях спостерігався чіткий максимум інтенсивності відбитих електронів під певним кутом. (близько  $50^\circ$  при напрузі 54 В), що свідчить про інтерференцію хвиль електронів, подібно до дифракції рентгенівських променів на кристалічній ґратці. Цей кут збігався з розрахованим за умовою дифракції Брега, а розрахована за співвідношення де Бройля довжина хвилі співпала з експериментальною. Це було першим прямим доказом гіпотези де Бройля про хвильові властивості матеріальних частинок, передбачену гіпотезою де Бройля.

Іншим важливим доказом є дослід по дифракції електронів на щілині (Рис. 10.4). У цьому досліді електрони випускаються з електронної гармати та

спрямовуються на тонку пластинку з щілиною шириною  $b$  нанометрового масштабу (ширина щілини має бути порівняна з довжиною хвилі де Бройля електронів). За цією перешкодою розміщується флуоресцентний екран або детектор, на якому реєструються місця падіння електронів. В результаті експерименту на екрані спостерігається розмита смуга, яка є наслідком дифракції.

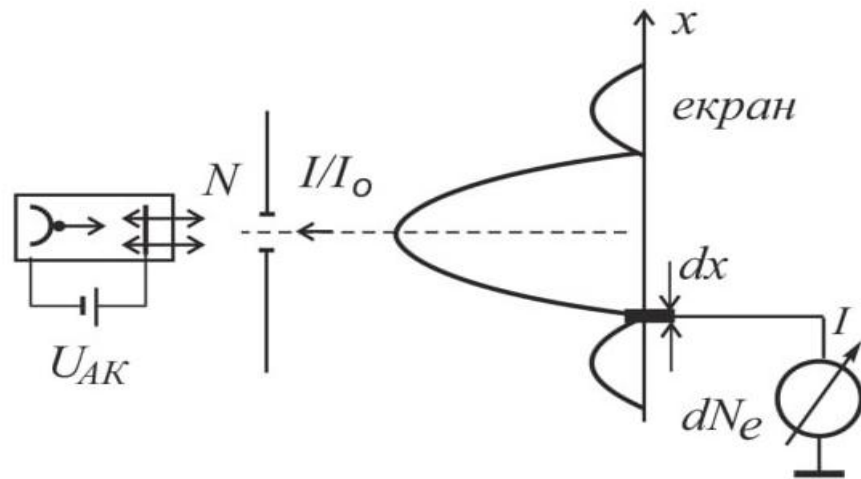


Рис. 10.4. Схема досліду по дифракції електронів на одновимірній щілині

В досліді вимірюється струм, що виникає за рахунок розподілу електронів в кількості  $dN_e$  на провіднику шириною  $dx$ :  $I = \frac{edN_e}{dt}$ .

При цьому залежність від кута спостереження  $\varphi$  описується таким самим законом, як і для інтенсивності світла при фраунгоферовій дифракції на щілині:

$$I_\varphi = I_0 \left( \frac{\sin((\pi b \sin \varphi)/\lambda)}{(\pi b \sin \varphi)/\lambda} \right)^2.$$

$$\text{Умова мінімуму } \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} = \pi n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Особливо вражаючим є те, що інтерференційна картина поступово утворюється навіть тоді, коли електрони випускаються по одному. Це означає, що кожен електрон має хвильові властивості і поводить себе не лише як частинка, а й як хвиля, а розподіл точок на екрані відображає ймовірність його виявлення в певному місці.

## 10.2. Статистична інтерпретація хвиль де Бройля. Хвильова функція

1. Не можна сказати куди падає певний електрон в області щілини та в області екрану.

2. Розподіл електронів на екрані носить статистичний характер. Можна казати лише про області на екрані де вірогідність появи електронів більша (умова *max*) або менша (умова *min*).

Згідно з корпускулярно-хвильовим дуалізмом світла, енергія пучка з одного боку дорівнює добутку енергії фотона на кількість фотонів, а з іншого пропорційна квадрату амплітуди електромагнітної хвилі (за формулою (3.10)):

$$\hbar\omega dN \rightarrow \langle |\vec{P}| \rangle = I \sim E^2.$$

Аналогічно, згідно з корпускулярно-хвильовим дуалізмом частинок, сила струму, яка пропорційна кількості електронів  $I \sim dN$ , має бути пропорційна квадрату амплітуди хвилі де Бройля електрона. По аналогії з формулою (2.5) для ЕМХ, опишемо хвилю де Бройля частинки **хвильовою функцією** виду

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (10.2)$$

Замінивши відповідно до гіпотези де Бройля  $\omega$  й  $\lambda$  через  $E$  і  $p$ , рівняння хвилі де Бройля для вільної частинки, що рухається в напрямку осі  $x$ , запишемо у вигляді:

$$\Psi = \Psi_0 \exp(i\hbar(px - Et)). \quad (10.3)$$

Функцію  $\Psi$  називають **хвильовою функцією (або псі-функцією)**. Вона описує стан частинки. Функція  $\Psi$ , як правило, буває комплексною й у ряді випадків (коли частинка рухається в силовому полі) має не властивий для хвилі неперіодичний характер.

Правильну інтерпретацію хвильової функції дав у 1926р. Борн. Згідно з Борном, *квадрат модуля хвильової функції визначає ймовірність  $dP$  того, що частинка буде виявлена в межах об'єму  $dV$ :*

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi^* \Psi dV. \quad (10.4)$$

Співвідношення (10.4) визначає фізичну сутність хвильової функції: **квадрат модуля хвильової функції в деякій точці простору є густиною ймовірності знаходження частинки в цій точці простору** ( $\frac{dP}{dV} = |\Psi|^2$ ).

В одновимірному випадку, ймовірність потрапляння електрона в інтервал  $dx$ :  $p = \frac{dN}{N}$ , а густина ймовірності  $\rho = \frac{dN}{Ndx}$ .

Оскільки густина ймовірності пропорційна кількості частинок, які несуть собою енергію, то по аналогії з електромагнітною хвилею можна говорити про пропорційність інтенсивності хвилі, або про пропорційність квадрату амплітуди  $\Psi$  функції, тобто  $\frac{dN}{Ndx} \sim |\Psi|^2$ . В останньому виразі коефіцієнт пропорційності прирівнюють одиниці. Тому

$$\rho = |\Psi|^2 = \Psi^* \Psi. \quad (10.5)$$

#### **Властивості хвильової функції:**

- 1) функція повинна бути однозначною, неперервною й скінченною (за винятком особливих точок, за їх наявності);
- 2) функція повинна мати однозначну, неперервну та скінченну похідну;
- 3) для  $\Psi$ -функції та її похідної повинні виконуватись граничні умови

$$\Psi_I(a) = \Psi_{II}(a); \quad \Psi'_I(a) = \Psi'_{II}(a).$$

- 4) умова нормування: оскільки загальна кількість частинок  $N$  розподіляється на інтервалі  $x(-\infty; \infty)$ , то можемо записати

$$N = \int dN = \int_{-\infty}^{\infty} \rho N dx = N \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx,$$

отже  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho dx = 1$ , і остаточно умова нормування виглядає як

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = 1. \quad (10.6)$$

Якщо рух частинки відбувається у всьому просторі в об'ємі  $V$ , то інтеграл від виразу (10.5), узятий в усьому просторі, повинен дорівнювати одиниці:

$$\int \Psi^* \Psi dV = 1. \quad (10.7)$$

Співвідношення (10.6) або (10.7) називають **умовою нормування**. Цей інтеграл дає ймовірність того, що частинка знаходиться в одній із точок простору, що є подією достовірною.

Сукупність перелічених вище вимог називають **стандартними умовами для хвильової функції**.

### 10.3. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга

Повернемося до дослідів з дифракцією електронів на щілині (Рис. 10.5).

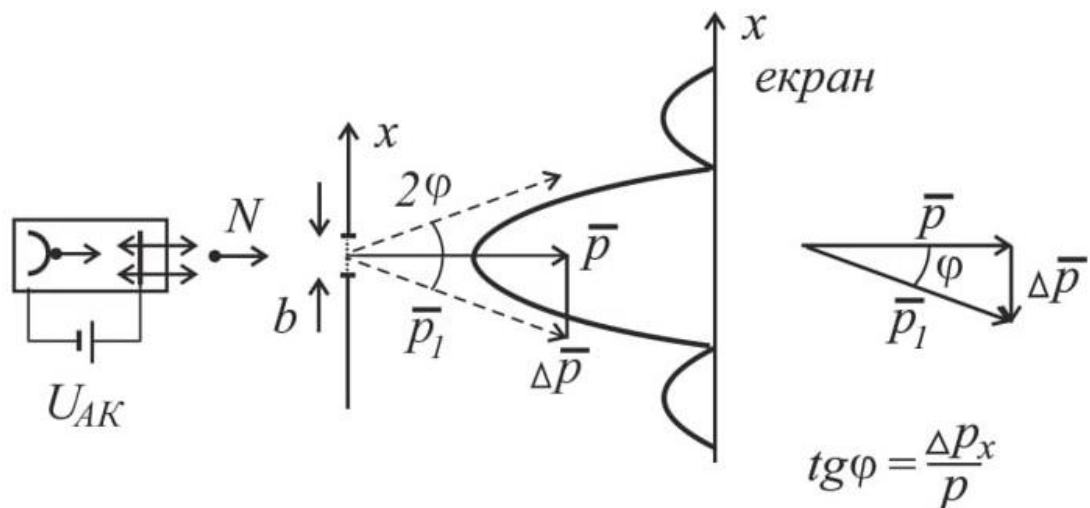


Рис. 10.5. Інтерпретація дослідів по дифракції електронів на щілині з точки зору співвідношення невизначеностей

У цьому досліді не можна сказати достеменно куди потрапить на екрані конкретний електрон. Тобто, можна казати про статистичний характер такого розподілу. Якщо врахувати електрони, що попадають до центрального максимуму, можна говорити, що ці електрони характеризуються розбіжностями в напрямку їх імпульсів вздовж осі  $OX$ , що складає  $\Delta p_x$ . Цю розбіжність називають невизначеністю імпульсу (див. Рис. 10.5).

Тангенс кута дифракції електрона

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta p_x}{p}.$$

Границя центрального максимуму визначається умовою першого мінімуму:

$$\frac{\pi b \sin \varphi_1}{\lambda} = \pi n = \pi, \quad n = 1.$$

Звідси  $\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{b}$ . Для малих кутів  $\sin \varphi_1 \approx \operatorname{tg} \varphi_1$ , отже  $\frac{\lambda}{b} = \frac{\Delta p_x}{p}$ , і,

використовуючи формулу (10.1), одержуємо  $\frac{2\pi\hbar}{pb} = \frac{\Delta p_x}{p} \Rightarrow$

$$b = \frac{2\pi\hbar}{\Delta p_x}.$$

Величина  $b = \Delta x$  являє собою невизначеність координати  $x$  електрона: не можна однозначно сказати де даний електрон пролітає в області щілини шириною  $b$ . Величина  $\Delta p_x$  являє собою невизначеність  $x$ -компоненти імпульса електрона. Таким чином,

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq 2\pi\hbar \quad (10.8)$$

*– співвідношення невизначеностей Гейзенберга для координати й імпульсу частинки.*

Співвідношення Гейзенберга визначає допустиму принципову межу неточностей  $\Delta x$  і  $\Delta p_x$ , з якими стан частинки можна характеризувати класично, тобто координатою  $x$  й імпульсом  $p_x$ . Чим точніше  $x$ , тим з меншою точністю можливо характеризувати  $p_x$ , і навпаки. Неможливо одночасно точно виміряти координату і імпульс частинки.

У тривимірному випадку класична частинка характеризується трьома прямокутними координатами  $x, y, z$  й пов'язаними з ними імпульсами  $p_x, p_y, p_z$ . У цьому випадку співвідношення невизначеностей Гейзенберга виражаються трьома нерівностями:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h; \quad (10.9)$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq h; \quad (10.10)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq h. \quad (10.11)$$

Разом зі співвідношеннями (10.9), (10.10), (10.11) у хвильовій теорії виводиться також формула:

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq 2\pi \hbar. \quad (10.12)$$

Формула (10.12) називається співвідношенням *невизначеностей Гейзенберга для часу й енергії*.

Зміст цього співвідношення полягає в тому, що обмежений у часі хвильовий процес не може бути монохроматичним.

Вимірювання у квантовій області принципово відрізняються від класичних вимірів. Звичайно, і ті й інші вимірювання супроводжуються помилками. Однак класична фізика вважала, що шляхом поліпшення методики й техніки вимірів помилки в принципі можуть бути зроблені як завгодно малими. Навпроти, відповідно до квантової фізики існує принципова межа точності вимірювань. Вона лежить у природі речей і не може бути зменшена ніяким удосконалюванням приладів і методів вимірювань. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга встановлюють одну з таких меж. Взаємодію між макроскопічним вимірювальним приладом і мікрочастинкою під час вимірювання принципово не можна зробити як завгодно малою. Якщо вимірюється, наприклад, координата частинки, то вимірювання неминуче приводить до принципово непереборної неконтрольованої зміни початкового стану частинки, а отже, і до невизначеності в значенні імпульсу при подальшому вимірюванні. Те саме відбувається, якщо порядок вимірювання координати й імпульсу частинки поміняти місцями.

*Контрольні запитання і завдання*

1. В чому полягає гіпотеза де Бройля?
2. Запишіть формулу для довжини хвилі де Бройля частинки.
3. Які об'єкти можуть мати хвилі де Бройля?
4. Чому для макроскопічних тіл хвильові властивості непомітні?
5. Чому хвильові властивості легше виявити в електронів, ніж у протонів?
6. Які експериментальні підтвердження гіпотези де Бройля?
7. Яким має бути період ґратки, щоб на ній можна було спостерігати дифракцію електронів?
8. Якщо частинка має більший імпульс, ніж інша, яка з них матиме помітніший дифракційний ефект? Аргументуйте.
9. У чому полягає сутність квантової інтерференції частинок, якщо вони пролітають через щілину поодиночі?
10. В чому полягає фізична сутність хвильової функції?
11. В чому відмінність між хвильовими властивостями світла та хвильовими властивостями матеріальних частинок?
12. Які властивості (стандартні умови) повинна мати хвильова функція частинки?
13. Як одержати співвідношення невизначеностей для координати й імпульсу частинки на основі досліду з дифракцією електронів на щілині?
14. В чому суть співвідношення невизначеностей Гейзенберга?
15. Чому при зменшенні енергії електронів якість їх дифракційної картини погіршується?

## 11. Рівняння Шредінгера

Розвиваючи ідеї де Бройля про хвильові властивості речовини, Шредінгер отримав у 1926р. рівняння для визначення хвильової функції. Воно дозволяє знайти хвильові функції частинок, які рухаються в різних силових полях.

### 11.1. Часове та стаціонарне рівняння Шредінгера

Як відомо, повна енергія частинки є сумою її кінетичної енергії руху та потенціальної енергії у зовнішньому силовому полі:

$$E_{\text{повна}} = E_{\text{кін}} + U_{\text{потенц}}.$$

Розглянемо енергію руху частинки відповідно до корпускулярно-хвильового дуалізму:

- з корпускулярної точки зору

$$E_{\text{кін}} = \frac{p^2}{2m},$$

де імпульс  $p$  можна представити аналогічно до формули (8.4)

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \text{ де } \vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z.$$

Тоді

$$E_{\text{кін}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2).$$

- з хвильової точки зору

$$E_{\text{кін}} = \hbar \omega.$$

Прирівнюючи два підходи, маємо

$$\hbar \omega = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (11.1)$$

Нехай частинка описується хвильовою функцією вигляду

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \Psi_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}.$$

Обчислимо похідну за часом від  $\Psi$ -функції

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi_0 i \omega e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = i \omega \Psi \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{1}{i \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (11.2)$$

та другу похідну за координатою  $x$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\Psi_0 i k_x e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} = -i k_x \Psi \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \Psi_0 (-i k_x)^2 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} = -k_x^2 \Psi \Rightarrow$$

$$k_x^2 = -\frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}; \quad (11.3)$$

аналогічно,

$$k_y^2 = -\frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}; \quad (11.4)$$

$$k_z^2 = -\frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (11.5)$$

Підставимо (11.2) – (11.5) у рівність (11.1):

$$\hbar \frac{1}{i \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right).$$

Позначимо в одержаному виразі  $\nabla^2$  – оператор Лапласа, результат дії якого на деяку функцію є сумою других частинних похідних за координатами,

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2},$$

та домножимо і поділимо на комплексну одиницю  $i$ . Тоді,

$$\nabla^2 \Psi = i \frac{2m}{\hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (11.6)$$

– *часове рівняння Шредінгера для  $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ .*

Для випадку, коли

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi_0(x, y, z)e^{i\omega t} \quad (11.7)$$

При  $\omega = 0$  стаціонарний стан для  $\Psi$ -функції, або змінюється за законом  $\sin(\omega t)$  або  $\cos(\omega t)$ .

Підставимо (11.7) у часове рівняння Шредінгера (11.6).

$$\nabla^2 \Psi = \nabla^2 (\Psi_0(x, y, z))e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi_0(x, y, z)(i\omega e^{i\omega t}) \Rightarrow$$

$$\nabla^2 (\Psi_0(x, y, z))e^{i\omega t} = i \frac{2m}{\hbar} \Psi_0(x, y, z)(i\omega e^{i\omega t}),$$

$$\nabla^2 \Psi_0 = -\frac{2m}{\hbar} \omega \Psi_0,$$

і, зважаючи що  $\omega = \frac{E_{кин}}{\hbar} = \frac{E_{повна} - U}{\hbar}$ , одержуємо

$$\nabla^2 \Psi_0 + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{повна} - U) \Psi_0 = 0 \quad (11.8)$$

– рівняння Шредінгера для стаціонарних станів (стаціонарне рівняння Шредінгера).

## 11.2. Рух квантової частинки в одновимірній потенціальній ямі

У нерелятивістській квантовій механіці основним принципом є рівняння Шредінгера. Пошук розв'язків цього рівняння, які задовольняють стандартні умови, приводить до дискретності енергетичних рівнів. Продемонструємо це на прикладі задачі про частинку, яка знаходиться в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі (Рис.11.1).

*Постановка задачі:*

Частинка знаходиться в основному стані в одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною  $l$  з абсолютно непроникними стінками ( $0 < x < l$ ). Знайти ймовірність перебування частинки в області

$$0 < x < \frac{l}{3}; \quad \frac{l}{3} < x < \frac{2l}{3}; \quad \frac{2l}{3} < x < l.$$

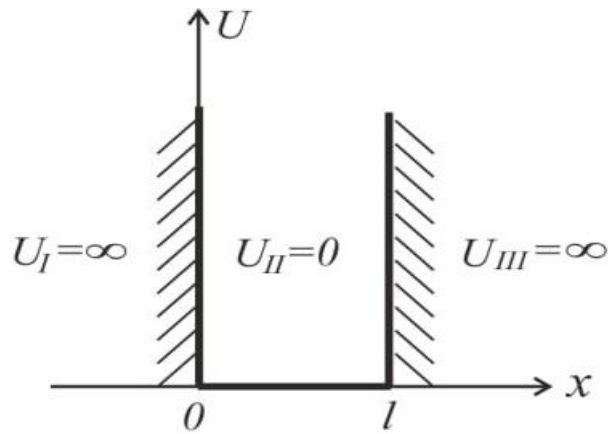


Рис. 11.1. Частинка в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками

З точки зору співвідношення невизначеностей  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq 2\pi\hbar$ , а це означає що частинка не може зупинитись, інакше  $p_x = 0 \Rightarrow \Delta p_x = 0$  і невизначеність  $\Delta x$  стає нескінченною. Тому в обмеженому проміжку  $(0, l)$  частинка зобов'язана рухатись.

Методика використання рівняння Шредінгера

Запишемо стаціонарне рівняння Шредінгера в загальному вигляді:

$$\nabla^2\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E_{\text{повна}} - U)\Psi = 0, \text{ де } \Psi \equiv \Psi_0.$$

- **Зовні потенціальної ями**, в області I та III, потенціальна енергія  $U = \infty$ , і

$$\nabla^2\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E_{\text{повна}} - \infty)\Psi = 0, \text{ отже}$$

$$\Psi_I = 0; \quad \Psi_{III} = 0.$$

- **Всередині потенціальної ями**, в області II, потенціальна енергія  $U = 0$ , і

$$\nabla^2\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0.$$

Введемо позначення:  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ , де  $k^2$  – енергетичний коефіцієнт (може

приймати будь-які додатні значення). Тоді, для **одновимірної потенціальної ями**, рівняння Шредінгера набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + k^2\Psi = 0. \tag{11.9}$$

Рішення рівняння (11.9) будемо шукати у загальному вигляді

$$\Psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

Використовуємо формули Ейлера  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  та  $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$  для хвильової функції у неявному вигляді. Перетворюємо отриманий вираз:

$$\begin{aligned} \Psi &= A(\cos kx + i \sin kx) + B(\cos kx - i \sin kx) = \\ &= (A + B)\cos kx + (A - B)i \sin kx. \end{aligned}$$

Використовуючи граничні умови, знайдемо значення  $k$  і  $E$ .

Однією з умов, що накладаються на  $\Psi$ -функцію, є умова безперервності, тому  $\Psi(0) = \Psi(l) = 0$ , тому що  $\Psi(x) = 0$  при  $x < 0$  і  $x > l$  (частинка знаходиться в потенціальній ямі, тобто за її межами частинки точно немає).

Тоді

$$\begin{cases} \Psi(0) = (A + B)\cos(k \cdot 0) + (A - B)i \sin(k \cdot 0) = (A + B) = 0 \\ \Psi(l) = (A + B)\cos(k \cdot l) + (A - B)i \sin(k \cdot l) = (A - B)i \sin(k \cdot l) = 0 \end{cases}.$$

З першого рівняння випливає, що  $A = -B$ .

З другого рівняння отримуємо, оскільки  $(A - B)i \neq 0$ , то  $\sin(k \cdot l) = 0$ ,

значить  $k \cdot l = \pi n$ , тоді

$$k = \frac{\pi n}{l}, \quad (11.10)$$

де  $n$  – головне квантове число.

Враховуючи що  $k^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}$ , отримуємо

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ml^2} \quad (11.11)$$

– власні значення енергії частинки.

**Висновок: енергія частинки в потенціальній ямі є квантовою, тобто приймає лише визначені шириною ями  $l$  та квантовим числом  $n$  дискретні значення, що складають енергетичний спектр.**

Враховуючи що  $k = \frac{\pi n}{l}$  та  $A = -B$ , хвильова функція запишеться у вигляді:  $\Psi = 2Ai \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ .

Скориставшись умовою нормування  $\Psi$ -функції, знайдемо коефіцієнт  $A$ . Хвильова функція має бути однозначною, тобто задовольняти наступному рівнянню (умова нормування):  $P = \int_0^l |\Psi|^2 dx = 1$ , де  $P$  – ймовірність знаходження частки у заданій області простору. В нашому випадку частинка точно знаходиться в області  $0 < x < l$ , тому ймовірність її перебування у потенціальній ямі дорівнює одиниці.

Підставимо вираз  $\Psi = 2Ai \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$  в умову нормування та розв'яжемо отримане рівняння:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^l 4A^2 i^2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx = 4A^2 i^2 \int_0^l \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{l}x\right)\right) dx = \\ &= 4A^2 i^2 \left( \int_0^l \frac{1}{2} dx - \frac{l}{2\pi n} \int_0^l \cos\left(\frac{2\pi n}{l}x\right) d\left(\frac{2\pi n}{l}x\right) \right) = 2A^2 i^2 l; \\ 2A^2 i^2 l &= 1, \quad \text{тоді} \quad A = \frac{1}{i\sqrt{2l}}. \end{aligned}$$

Запишемо вираз для  $\Psi$ -функції у явному вигляді (з урахуванням знайдених коефіцієнтів):

$$\Psi = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad \text{де } n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.12)$$

Скориставшись явним виглядом  $\Psi(x)$  функції, запишемо густину ймовірності

$$\rho(x) = |\Psi|^2 = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (11.13)$$

Графіки  $|\Psi|^2$  для квантових чисел  $n = 1, 2, 3$  показані на рис.11.2

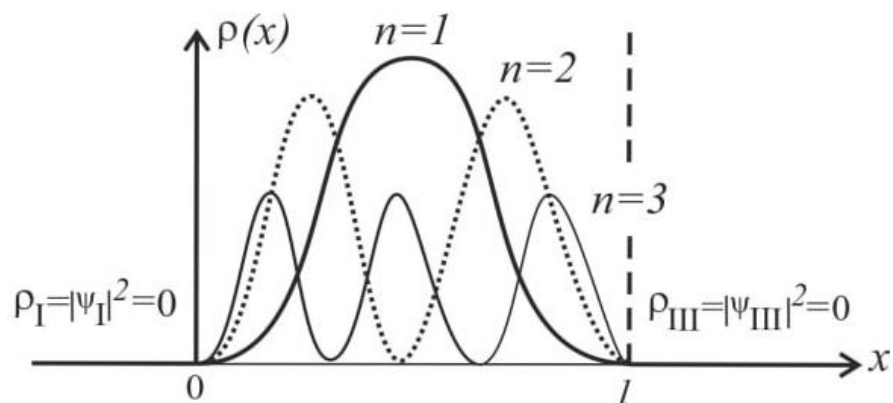


Рис. 11.2. Функція густини ймовірності знаходження частинки в одновимірній потенціальній ямі нескінченної глибини при різних значеннях головного квантового числа  $n$ :

- $\rho_{n=1}(x) = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ ;
- $\rho_{n=2}(x) = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{2\pi}{l}x\right)$ ;
- $\rho_{n=3}(x) = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right)$ .

Висновок: існують області, де частинка при заданому квантовому числі  $n$  (або енергії) може з'являтися часто, або навпаки ніколи. Наприклад, при  $n = 1$  найбільш ймовірне положення буде в центрі потенціальної ями, а при  $n = 2$  ймовірність перебування в центрі дорівнює нулю.

У якості *прикладу* визначимо ймовірність знаходження частинки у заданих областях у межах одновимірної потенціальної ями:  $P = \int |\Psi|^2 dx$ .

Для основного стану  $n = 1$

$$P\left(0 < x < \frac{l}{3}\right) = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) dx \approx 0,195, \text{ або } 19,5\%;$$

$$P\left(\frac{l}{3} < x < \frac{2l}{3}\right) = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) dx \approx 0,61, \text{ або } 61\%;$$

$$P\left(\frac{2l}{3} < x < l\right) = \frac{2}{l} \int_{2l/3}^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) dx \approx 0,195, \text{ або } 19,5\%.$$

**11.3. Рух квантової частинки у дво- та тривимірній потенціальній ямі**

Розглянемо двовимірну прямокутну потенціальну яму ( $0 < x < a$ ); ( $0 < y < b$ ) з абсолютно непроникними стінками.

Хвильова функція частинки буде мати вигляд

$$\Psi(x, y) = \Psi(x) \cdot \Psi(y), \quad (11.14)$$

де

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n_1}{a} x\right); \quad \Psi(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{\pi n_2}{b} y\right)$$

відповідно до виразу (11.12)  $\Psi$ -функції, одержаного для одновимірної потенціальної ями.

Енергія частинки

$$E = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n_1^2}{2ma^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_2^2}{2mb^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right). \quad (11.15)$$

У випадку квадратної ями  $a = b = l$ , енергія становить

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} (n_1^2 + n_2^2). \quad (11.16)$$

Однакові значення енергії на одному рівні можуть бути отримані при різних комбінаціях квантових чисел  $n_1$  та  $n_2$ . Наприклад, другий рівень забезпечується при комбінаціях  $n_1 = 1; n_2 = 2$  або  $n_1 = 2; n_2 = 1$  (Рис. 11.3).

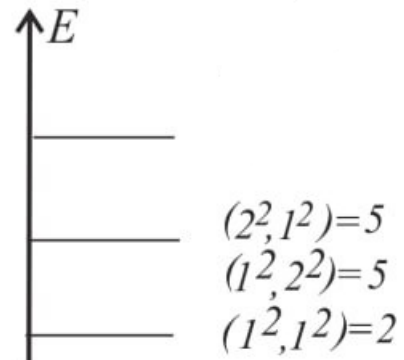


Рис. 11.3. Енергетична діаграма частинок в двовимірній потенціальній ямі

Густина ймовірності знаходження частинки в області у двовимірній потенціальної ямі

$$\rho(x, y) = |\Psi|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi n_1}{a} x\right) \frac{2}{b} \sin^2\left(\frac{\pi n_2}{b} y\right). \quad (11.17)$$

У випадку тривимірної потенціальної ями, кінетична енергія частинки

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right). \quad (11.18)$$

Для випадку, коли потенціальне поле має вид кубічного ящика  $a = b = c = l$ , всередині якого потенціальне поле відсутнє, а зовні прямує до нескінченності, енергія частинки всередині ящика теж квантована

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad (11.19)$$

У випадку тривимірного ящика однакові значення енергії на одному рівні можуть бути отримані при різних комбінаціях квантових чисел  $n_1, n_2$  та  $n_3$  (Рис. 11.4).

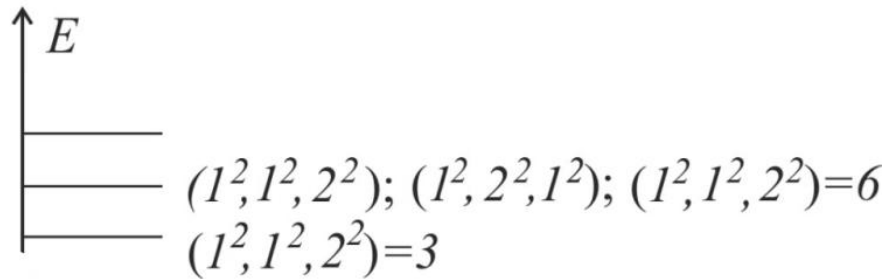


Рис. 11.4. Енергетична діаграма частинки в кубічному ящику. Показані перші два рівні енергії

Густина ймовірності знаходження частинки в області  $u$  в тривимірній потенціальній ямі

$$\rho(x, y, z) = \frac{2}{a} \sin^2 \left( \frac{\pi n}{a} x \right) \frac{2}{b} \sin^2 \left( \frac{\pi n}{b} y \right) \frac{2}{c} \sin^2 \left( \frac{\pi n}{c} z \right). \quad (11.20)$$

В останніх двох прикладах з двовимірною ямою та тривимірним ящиком ми спостерігаємо можливість забезпечення однакової енергії частинки при різних значеннях квантових чисел. Кількість способів отримання однакової енергії при різних комбінаціях квантових чисел носить назву **ступінь виродження енергетичного рівня**. Іншими словами, якщо кілька різних станів (із різними квантовими числами чи просторовими формами хвильових функцій) відповідають одній і тій самій енергії, то енергетичний рівень є **виродженим**, а ступінь виродження показує, скільки саме таких станів існує.

*Контрольні запитання і завдання*

1. Що описує рівняння Шредінгера в квантовій механіці?
2. Як можна одержати часове рівняння Шредінгера на основі корпускулярно-хвильового дуалізму енергії частинки?
3. У чому відмінність між стаціонарним та нестаціонарним рівнянням Шредінгера?
4. Розв'яжіть стаціонарне рівняння Шредінгера для випадку одновимірної потенціальної ями
5. Як використовуються властивості  $\Psi$ -функції (умова неперервності, умова нормування) при розв'язанні рівняння Шредінгера для частинки в одновимірній потенціальній ямі?
6. Чому хвильова функція частинки, що знаходиться у нескінченно глибокій потенціальній ямі, дорівнює нулю на її межах?
7. Що називають власними значеннями енергії?
8. Яку енергію може мати частинка в одновимірній потенціальній ямі?
9. Як обчислити ймовірність знаходження частинки у певній області у межах потенціальної ями?
10. Чому не можна безпосередньо інтерпретувати  $\Psi$  як імовірність, а лише  $|\Psi|^2$ ?
11. Який вигляд має  $\Psi$ -функція у дво- та тривимірній потенціальній ямі?
12. Які власні значеннями енергії частинки у дво- та тривимірній потенціальній ямі?
13. Що таке степінь виродження енергетичного рівня?
14. Чому вільна частинка не має дискретних енергетичних рівнів?

## 12. Потенціальні бар'єри

Припустимо, що задано потенціальне поле, рис. 12.1. Зліва на право рухається куля масою  $m$  зі швидкістю  $v$ .

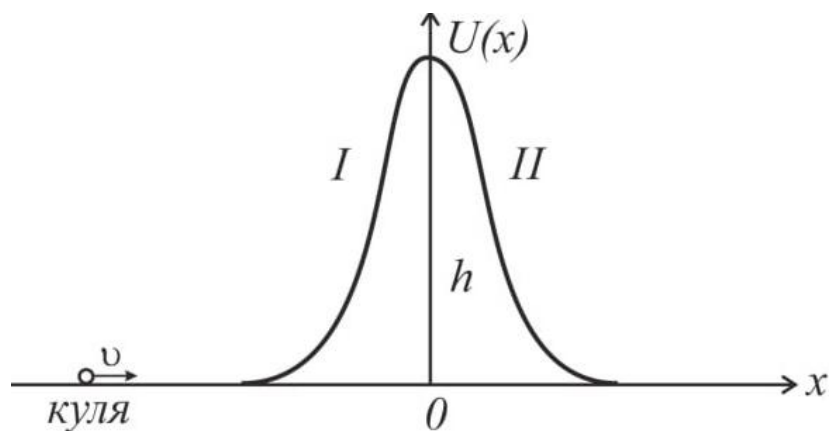


Рис. 12.1. До пояснення можливості проходження кульки через потенціальний бар'єр

З точки зору класичної механіки можливі два варіанти:

- Якщо  $E_k = \frac{mv^2}{2} \geq mgh$ , то ймовірність проходження частинки через перешкоду  $P = 100\%$ ;
- Якщо  $E_k = \frac{mv^2}{2} < mgh$ , то ймовірність проходження частинки через перешкоду  $P = 0$ .

З'ясуємо як буде виглядати ситуація з проходженням квантової частинки.

### 12.1. Бар'єр у вигляді сходинок

Розглянемо потенціальний бар'єр у вигляді прямокутної сходинок висотою  $U_0$ , на який налітає частинка з енергією  $E < U_0$  (Рис. 12.2).

Запишемо рівняння Шредінгера для області II

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \Psi = 0$$

та позначимо  $\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) = -\alpha^2$ . Тоді

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \alpha^2 \Psi = 0. \quad (12.1)$$

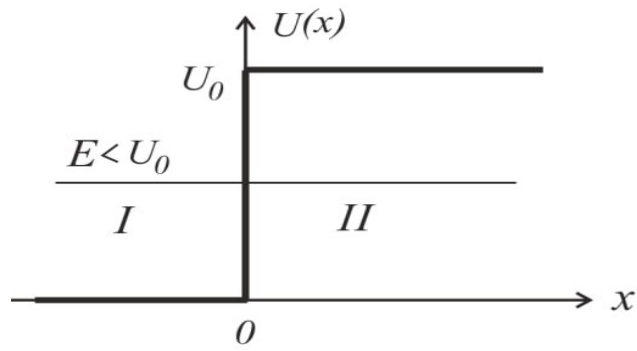


Рис. 12.2

Загальний розв'язок диференціального рівняння (12.1) шукається у вигляді

$$\Psi_{II}(x) = Ae^{-\alpha x} + Be^{\alpha x}. \quad (12.2)$$

В області II  $x_{II} \in (0; +\infty)$ . Тому для того щоб  $\Psi$ -функція була скінченною, коефіцієнт  $B$  має дорівнювати 0, і

$$\Psi_{II}(x) = Ae^{-\alpha x}. \quad (12.3)$$

Густина ймовірності (Рис. 12.3):

$$\rho_{II}(x) = |\Psi|^2 = A^2 e^{-2\alpha x}. \quad (12.4)$$

З умови нормування випливає що  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = 1$ .

Висновок: квантова частинка може проникати (знаходитись) в області II.

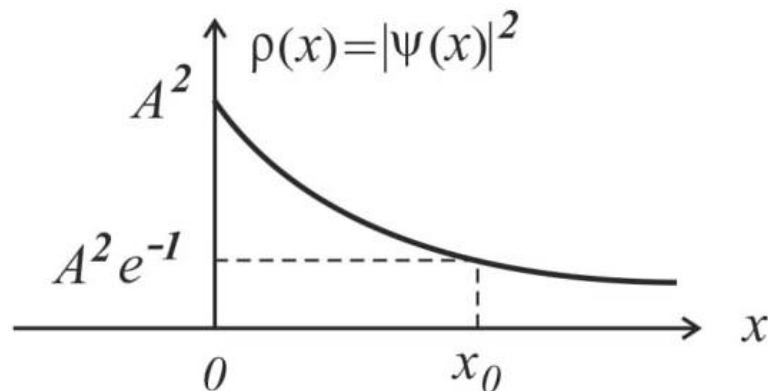


Рис. 12.3. Вигляд функції густини ймовірності для бар'єра у вигляді сходинок

Зазвичай проникнення частинки в область бар'єра визначають за критерієм коли густина ймовірності зменшується в  $e$  разів. Ця точка на графіку позначається як  $x_0$  – глибина проникнення частинки.

$$A^2 e^{-2\alpha x_0} = A^2 e^{-1}.$$

Розв'язавши останнє рівняння, знаходимо

$$x_0 = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)}}. \quad (12.5)$$

*Приклад*

$U_0 - E = 1 \text{ еВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ . Тоді для електрона

$$x_0 = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{2\sqrt{8,9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \approx 0,1 \text{ нм}$$

## 12.2. Проходження частинки крізь бар'єр прямокутної форми

Розглянемо прямокутний потенціальний бар'єр висотою  $U_0$  та шириною  $l$ , на який налітає частинка з енергією  $E < U_0$  (Рис. 12.4).

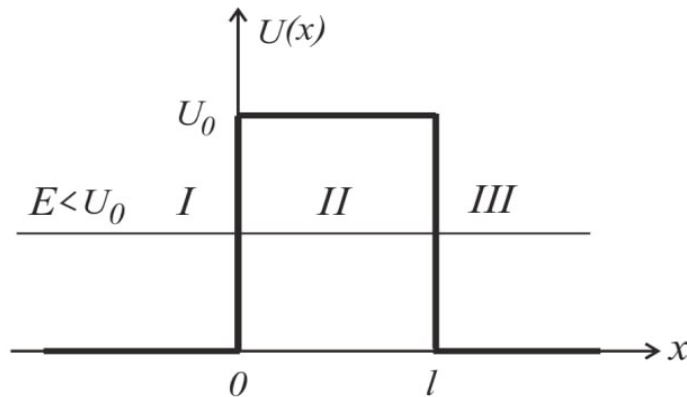


Рис. 12.4

Запишемо рівняння Шредінгера з врахуванням енергії потенціального поля по областях.

Області I, III:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - 0) \Psi = 0, \quad (12.6)$$

де позначимо  $\frac{2m}{\hbar^2} E = \alpha^2 > 0$ .

Область II:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \Psi = 0, \quad (12.7)$$

де позначимо  $\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) = -\beta^2$ .

Загальний розв'язок:

- Область I

$$\Psi_I(x) = A_1 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x}, \quad (12.8)$$

де перший доданок описує хвилю, що падає на бар'єр, а другий – хвилю, що відбита від бар'єра.

- Область II

$$\Psi_{II}(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x}, \quad (12.9)$$

- Область III

$$\Psi_{III}(x) = A_3 e^{i\alpha x} + B_3 e^{-i\alpha x}, \quad (12.10)$$

де перший доданок описує хвилю, що пройшла крізь бар'єр, а другий – хвилю, відбиту від нескінченності, тоді її амплітуда має дорівнювати нулю:  $B_3 = 0$ .

Знайдемо **ймовірність  $D$  проходження крізь бар'єр (прозорість бар'єру)**, що дорівнює відношенню кількості частинок, що пройшли, до кількості падаючих частинок:

$$D = \frac{N_{\text{пройшли}}}{N_{\text{над}}} = \frac{A_3^2}{A_1^2} = a_3^2. \quad (12.11)$$

Використаємо властивості неперервності  $\Psi$ -функції та її похідної для виразів (12.8) – (12.10):

$$\begin{cases} \Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \\ \Psi_{II}(l) = \Psi_{III}(l) \\ \Psi'_I(0) = \Psi'_{II}(0) \\ \Psi'_{II}(l) = \Psi'_{III}(l) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ A_2 e^{\beta l} + B_2 e^{-\beta l} = A_3 e^{i\alpha l} \\ i\alpha A_1 - i\alpha B_1 = \beta A_2 - \beta B_2 \\ \beta A_2 e^{\beta l} - \beta B_2 e^{-\beta l} = i\alpha A_3 e^{i\alpha l} \end{cases}.$$

Позначимо:  $\frac{B_1}{A_1} = b_1$ ;  $\frac{A_2}{A_1} = a_2$ ;  $\frac{B_2}{A_1} = b_2$ ;  $\frac{A_3}{A_1} = a_3$ .

Тоді, 
$$\begin{cases} 1 + b_1 = a_2 + b_2 \\ a_2 e^{\beta l} + b_2 e^{-\beta l} = a_3 e^{i\alpha l} \\ i\alpha - i\alpha b_1 = \beta a_2 - \beta b_2 \\ \beta a_2 e^{\beta l} - \beta b_2 e^{-\beta l} = i\alpha a_3 e^{i\alpha l} \end{cases} .$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь, одержуємо

$$\dot{a}_3 = \frac{4i\alpha\beta e^{-i\alpha l}}{(\alpha + i\beta)^2 e^{\beta l} - (\alpha - i\beta)^2 e^{-\beta l}}, \quad (12.12)$$

але оскільки  $\beta l \gg 1$ , то  $e^{\beta l} \gg e^{-\beta l}$ , і другим доданком в знаменнику (12.12) можна знехтувати. Тоді

$$\dot{a}_3 = \frac{4i\alpha\beta e^{-i\alpha l}}{(\alpha + i\beta)^2 e^{\beta l}}. \quad (12.13)$$

Підставимо одержаний вираз (12.13) у формулу (12.11), тоді ймовірність проходження крізь бар'єр (проникність бар'єра) буде дорівнювати

$$D = \dot{a}_3 \dot{a}_3^* = \frac{4i\alpha\beta e^{-i\alpha l} \cdot 4(-i)\alpha\beta e^{+i\alpha l}}{(\alpha + i\beta)^2 e^{\beta l} \cdot (\alpha - i\beta)^2 e^{\beta l}} = \frac{16\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 e^{2\beta l}}. \quad (12.14)$$

Пригадаємо введені позначення  $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$  та  $-\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)$ .

Підставивши їх в одержаний вираз (12.14), отримуємо

$$D = \frac{16E(U_0 - E)}{(E + (U_0 - E))^2} e^{-2\beta l}, \quad (12.15)$$

в якому множник

$$A = \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} = 16 \left( \frac{E}{U_0} - \left( \frac{E}{U_0} \right)^2 \right). \quad (12.16)$$

Позначимо в (12.16)  $E/U_0 = z$ , тоді

$$A = 16(z - z^2). \quad (12.17)$$

Графік параболи, що описує поведінку множника  $A$ , зображено на рис. 12.5. Ми не будемо брати до уваги випадки, коли значення енергії  $E$  наближені до нуля, або до значень потенціальної енергії рівної  $U_0$ . Тоді можна наближено прийняти  $A=1$ .

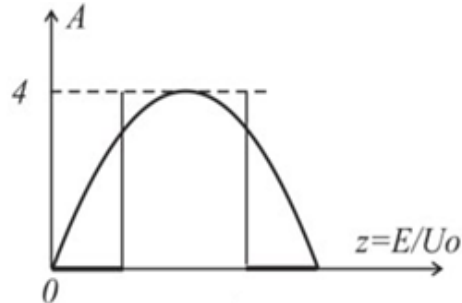


Рис. 12.5. Графік коефіцієнта  $A$  в залежності від співвідношення  $E/U_0 = z$

Тоді

$$D \approx 1 \cdot e^{-2\beta l} = e^{-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}} \quad (12.18)$$

В таблиці 12.1 наведені значення прозорості бар'єру прямокутної форми згідно до формули (12.18) в залежності від значень  $U_0 - E$  для різної ширини бар'єру.

Таблиця 12.1

Прозорість бар'єру  $D$

	$l, \text{Å}$	$U_0 - E = 1 \text{ eV}$	$U_0 - E = 5 \text{ eV}$
Атом водню	1	0,36	0,1
Тверде тіло	2	0,1	0,01
	5	$6 \cdot 10^{-3}$	$10^{-5}$
Гази	10	$4 \cdot 10^{-5}$	$10^{-12}$
	50	$6 \cdot 10^{-23}$	$10^{-49}$

### 12.3. Проходження частинки крізь бар'єр довільної форми

Нехай частинка з повною механічною енергією  $E$  зустрічає потенціал довільної форми  $U(x)$  (Рис.12.6). Значення  $x_1$  та  $x_2$ , у яких виконується рівність  $U(x) = E$ , задають межі інтервалу, всередині якого  $U(x) > E$  і частинка перебуватиме в області потенціального бар'єра. Розділимо інтервал  $(x_1 ; x_2)$  на

нескінченно малі ділянки шириною  $\Delta x$ . У межах кожної такої вузької ділянки бар'єр можна наближено розглядати як прямокутні й визначити ймовірність проходження крізь кожен такий бар'єр  $D_i$  за формулою (12.18):

$$D_i = e^{-\frac{2\Delta x_i}{\hbar} \sqrt{2m(U(x)-E)}} \quad (12.19)$$

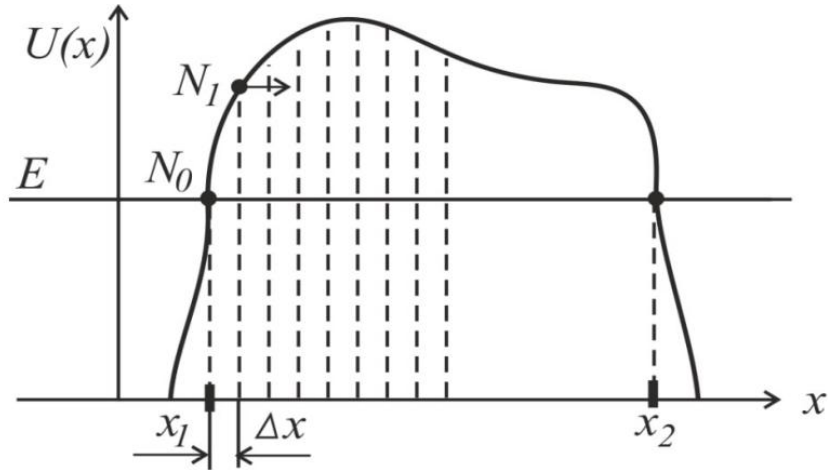


Рис. 12.6

Тоді послідовно визначимо кількість частинок після проходження відповідного бар'єру як:

$$N_1 = N_0 D_1, \quad N_2 = N_1 D_2, \dots, \quad N_{вих} = N_0 D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_i \cdot \dots \cdot D_N.$$

Позначимо добуток  $D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_i \cdot \dots \cdot D_N = D$ , тоді, згідно з (12.19),

$$D = e^{\sum \left( -\frac{2dx}{\hbar} \sqrt{2m(U(x)-E)} \right)}. \quad (12.20)$$

Замінивши суму у показнику експоненти виразу (12.20) на інтеграл, отримаємо формулу для прозорості бар'єру довільної форми

$$D = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x)-E)} dx}. \quad (12.21)$$

### 12.3.1. Контактна різниця потенціалів в металах

**Контактна різниця потенціалів** – це різниця електричних потенціалів, що виникає на межі двох різних речовин (зазвичай двох металів або напівпровідників), коли вони стикаються між собою. Коли два матеріали

контактують, електрони починають переходити з одного в інший, поки їхні рівні Фермі не зрівняються (Рис. 12.7):

- Якщо один матеріал має меншу роботу виходу, а інший – більшу, то електрони переходять з матеріалу з меншою роботою виходу в той, де вона більша;
- У результаті один матеріал заряджається позитивно (зліва), інший – негативно (справа).

Для здійснення такого переходу зліва-направо потрібно, щоб на зразку були вільні енергетичні рівні (див. Рис 12.7), тому переходи електронів у зворотньому напрямку неможливі. В результаті рівні Фермі стають однаковими (вирівнюються) і утворюється різниця потенціалів, яка отримала назву контактної.

Контактна різниця потенціалів

$$\Delta\varphi = \frac{E_{F1} - E_{F2}}{e} = \frac{A_1 - A_2}{e}, \quad (12.22)$$

де  $E_F$  – енергія Фермі металів,  $A$  – робота виходу із поверхні металу,  $e$  – заряд електрона.

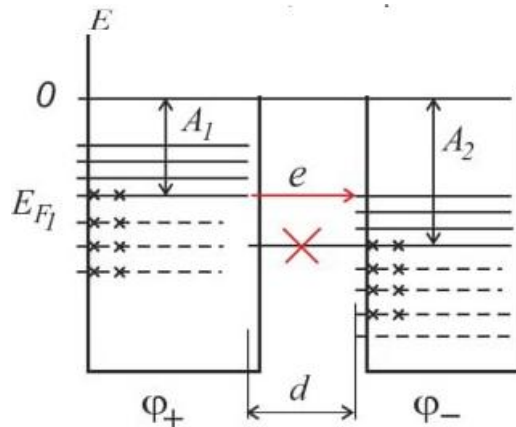


Рис. 12.7. Енергетична діаграма для електронів для пояснення утворення контактної різниці потенціалів

При переході електронів між зразками металів відбувається проходження електронів крізь потенціальний бар'єр шириною  $d$ . На користь того, що перехід відбувається саме тунельним образом може свідчити малий час (майже миттєво) появи контактної різниці потенціалів. При використанні

моделі переходу електронів через потенційний бар'єр за рахунок теплового руху випадковим чином знадобився би певний час.

Контактна різниця потенціалів відіграє ключову роль у:

- термоелектричних ефектах (ефект Зеебека, Пельтьє);
- роботі напівпровідникових приладів (діоди, транзистори);
- електронних схемах, де важлива поведінка межі метал–напівпровідник.

### **12.3.2. Автоелектронна емісія**

**Автоелектронна емісія** (або **польова емісія**) – це явище, при якому електрони вириваються з поверхні металу під дією дуже сильного електричного поля, навіть без нагрівання [4].

У звичайних умовах електрони в металі утримуються потенціальним бар'єром, що відповідає роботі виходу  $A_{вих}$ . Коли біля поверхні металу створюється дуже сильне електричне поле (понад  $10^7 - 10^9$  В/м), цей бар'єр стає тоншим, і електрони можуть тунелювати крізь нього у вакуум.

Це чисто квантово-механічний ефект: класично електрон не мав би достатньо енергії, щоб подолати бар'єр, але завдяки квантовому тунелюванню – може.

Умови виникнення:

- Сильне електричне поле (зазвичай створюється між загостреним катодом і анодом);
- Високий вакуум, щоб електрони не втрачали енергію при зіткненнях з атомами газу.

Струм автоелектронної емісії описується рівнянням Фаулера-Нордгейма:

$$j = A \frac{E^2}{A_{вих}} \exp\left(-B \frac{A_{вих}^{3/2}}{E}\right), \quad (12.23)$$

де  $j$  – густина емісійного струму;  $E$  – напруженість електричного поля;  $A_{вих}$  – робота виходу електронів (в еВ);  $A, B$  – сталі Фаулера-Нордгейма.

Ця формула показує, що навіть невелике збільшення поля  $E$  різко збільшує емісійний струм (через експоненту).

Для розрахунку струму при автоелектронній емісії електронів з поверхні металів, представимо енергетичну діаграму електронів в металі (Рис. 12.8), а з правого боку за рахунок прикладеного електричного поля  $\vec{E}_0$  утворюється потенціальний бар'єр.

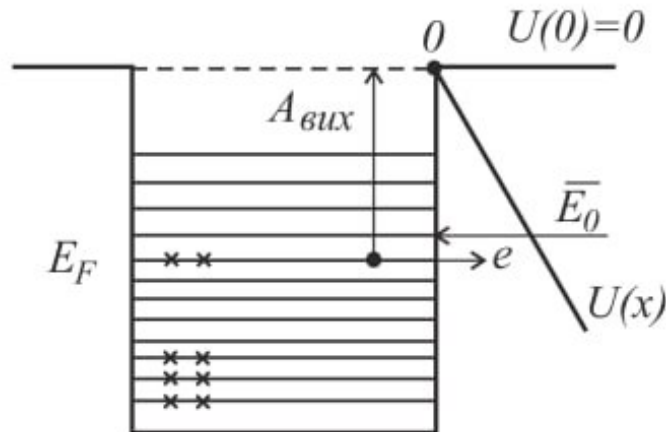


Рис. 12.8

На електрон в катоді діє сила Кулона

$$\vec{F} = e\vec{E}_0 = -gradU = -\vec{\nabla}U,$$

де  $\vec{E}_0$  – вектор напруженості електричного поля. Використаємо зв'язок між напруженістю електричного поля і потенціалом та отримаємо рівняння в проекції на вісь  $OX$ :

$$eE_0 = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Проінтегруємо

$$\int_0^x eE_0 dx = - \int_{U(0)=U_0}^{U(x)} dU \Rightarrow eE_0 x = -(U(x) - U_0) \Rightarrow$$

$$U(x) = U_0 - eE_0 x. \quad (12.24)$$

Графік потенціального поля (12.24), що утворює потенціальний бар'єр, показаний на рис 12.9.

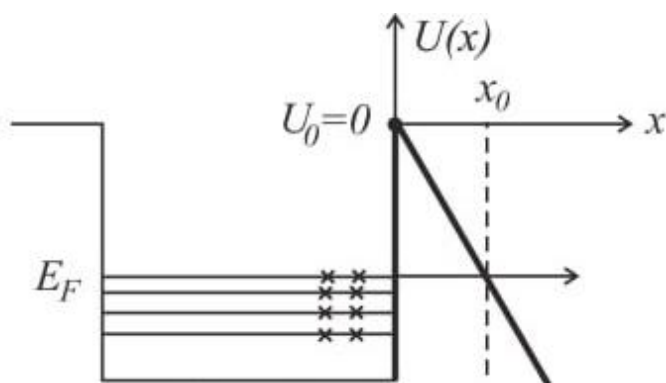


Рис. 12.9. Форма та межі потенціального бар'єру

Електрон на рівні Фермі в металі зустрічає потенціальний бар'єр шириною  $(0; x_0)$ . Координату  $x_0$  знайдемо з умови

$$U(x_0) = E_F \Rightarrow E_F = U_0 - eE_0x_0 \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{U_0 - E_F}{eE_0} = \frac{A_{\text{вих}}}{eE_0}. \quad (12.25)$$

Проникність бар'єра розрахуємо за формулою (12.21)

$$D = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx},$$

в якій  $U(x)$  визначається формулою (12.24),  $E = E_F$ , а  $U_0 - E_F = A_{\text{вих}}$ . Інтеграл в показнику експоненти обчислюється як

$$\int_0^{x_0} \sqrt{U_0 - eE_0x - E_F} dx = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{(U_0 - E_F) - eE_0x}}{-eE_0} d(-eE_0x + (U_0 - E_F)) =$$

$$= -\frac{1}{eE_0} \left. \frac{((U_0 - E_F) - eE_0x)^{3/2}}{3/2} \right|_0^{x_0} = -\frac{2}{3eE_0} \left( (A_{\text{вих}} - eE_0x_0)^{3/2} - A_{\text{вих}}^{3/2} \right) =$$

$$= -\frac{2}{3eE_0} \left( \left( A_{\text{вих}} - eE_0 \frac{A_{\text{вих}}}{eE_0} \right)^{3/2} - A_{\text{вих}}^{3/2} \right) = \frac{2A_{\text{вих}}^{3/2}}{3eE_0}.$$

Підставляючи одержаний вираз у формулу проникності бар'єра, отримуємо формулу для прозорості бар'єра при автоелектронній емісії:

$$D = e^{-\frac{4\sqrt{2m}A_{\text{вих}}^{3/2}}{3e\hbar} \cdot \frac{1}{E_0}} \quad (12.26)$$

Густина струму пропорційна кількості електронів, що подолали бар'єр. Тому можна казати, що  $j \sim D$  (Рис. 12. 10).

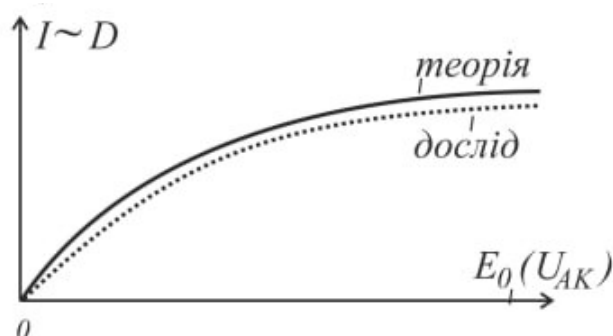


Рис. 12.10. Залежність струму анода (прозорості бар'єру  $D$ ) від напруги анод-катод (напруженості поля  $E_0$ )

Наявність множника перед експонентою за формулою Фаулера-Нордгейма не вийде за рахунок використання спрощеної моделі потенціального бар'єру. Для більш коректного отримання залежності прозорості бар'єру від напруженості електричного поля слід врахувати дзеркальне відображення електрона після виходу з поверхні металу, що створює додатково появу сили Кулона [4].

Приклади застосування:

- Електронні мікроскопи з польовою емісією (FESEM) – джерела електронів із надзвичайно високою яскравістю;
- Польові емітери у вакуумній електроніці;
- Мікроелектроніка та наноелектроніка, зокрема у вуглецевих нанотрубках.

### 12.3.3. Ефект Рамзауера

Ефект Рамзауера (ефект Рамзауера–Таунсенда) – це квантово-механічне явище, яке полягає в аномально малому розсіянні повільних електронів на атомах інертних газів (наприклад, аргону, неону, ксенону) при певних енергіях електронів.

Коли пучок електронів проходить через газ інертних атомів (Рис. 12.11), електрони зазвичай розсіюються на атомах, змінюючи напрямок руху. Проте експериментально було виявлено, що при певних енергіях електронів (кілька

електрон-вольт), розсіяння різко зменшується – електрони майже вільно проходять крізь атоми.

Існує пояснення ефекту з точки зору, що електрон у квантовій фізиці поводить як хвиля. Коли хвиля проходить через потенціальну яму, що відповідає потенціалу атома, частина її відбивається, а частина проходить крізь.

При певних енергіях хвилі відбиті хвилі інтерферують деструктивно (тобто гасять одна одну). У результаті – повне проходження хвилі крізь атом без розсіяння. Це схоже на явище резонансного прозорого шару у хвильовій оптиці.

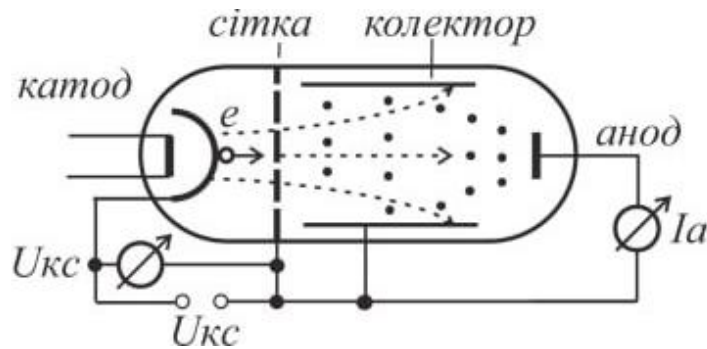


Рис. 12.11. Схема дослідження ефекту Рамзауера

Атом інертного газу в квантовій механіці можна подати як потенціальну яму, над якою пролітає електрон (Рис. 12.12).

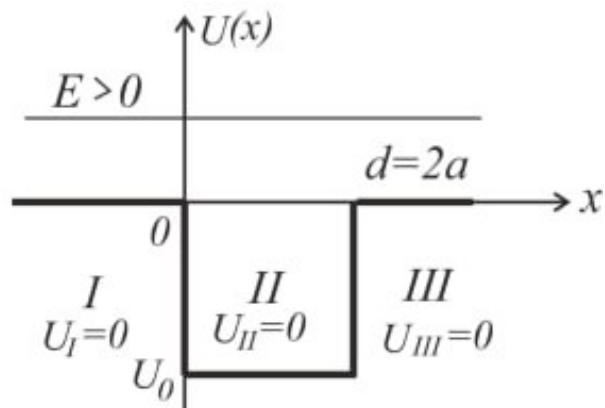


Рис. 12.12. Форма потенціальної ями та енергія електрону, що рухається поруч з атомом інертного газу

Запишемо рівняння Шредінгера та його загальний розв'язок по трьох областях окремо:

- Область I:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0, \quad (12.27)$$

де позначимо  $\frac{2m}{\hbar^2} E = k_1^2$ .

Загальний розв'язок рівняння (12.27):

$$\Psi_I(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}, \quad (12.28)$$

де перший доданок описує хвилю, що падає на стінку ями, а другий – хвилю, що відбита від стінки.

- Область II:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \Psi = 0, \quad (12.29)$$

де позначимо  $\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) = k_2^2$ .

Загальний розв'язок рівняння (12.29):

$$\Psi_{II}(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}. \quad (12.30)$$

- Область III:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0, \quad (12.31)$$

де позначимо  $\frac{2m}{\hbar^2} E = k_1^2$ .

Загальний розв'язок рівняння (12.31):

$$\Psi_{III}(x) = A_3 e^{ik_1 x} + B_3 e^{-ik_1 x}, \quad (12.32)$$

де перший доданок описує хвилю, що пройшла над ямою, а другий – хвилю, відбиту від нескінченності, тобто має дорівнювати нулю:  $B_3 = 0$ .

Ймовірність  $D$  проходження над ямою, згідно з (12.11):

$$D = \frac{N_{\text{пройшли}}}{N_{\text{над}}} = \left( \frac{A_3}{A_1} \right)^2 = a_3^2.$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\text{I}} &= \frac{\Psi_{\text{I}}}{A_1}; & \tilde{\Psi}_{\text{II}} &= \frac{\Psi_{\text{II}}}{A_1}; & \tilde{\Psi}_{\text{III}} &= \frac{\Psi_{\text{III}}}{A_1}; \\ \frac{B_1}{A_1} &= b_1; & \frac{A_2}{A_1} &= a_2; & \frac{B_2}{A_1} &= b_2; & \frac{A_3}{A_1} &= a_3. \end{aligned}$$

Тоді рівняння по областях (12.28), (12.30) та (12.32) приймають вигляд:

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_{\text{I}}(x) = e^{ik_1x} + b_1 e^{-ik_1x} \\ \tilde{\Psi}_{\text{II}}(x) = a_2 e^{ik_2x} + b_2 e^{-ik_2x} \\ \tilde{\Psi}_{\text{III}}(x) = a_3 e^{ik_1x} \end{cases}$$

Використаємо властивості неперервності  $\Psi$ -функції та її похідної:

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_{\text{I}}(0) = \tilde{\Psi}_{\text{II}}(0) \\ \tilde{\Psi}_{\text{II}}(d) = \tilde{\Psi}_{\text{III}}(d) \\ \tilde{\Psi}'_{\text{I}}(0) = \tilde{\Psi}'_{\text{II}}(0) \\ \tilde{\Psi}'_{\text{II}}(d) = \tilde{\Psi}'_{\text{III}}(d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + b_1 = a_2 + b_2 \\ a_2 e^{ik_2d} + b_2 e^{-ik_2d} = a_3 e^{ik_1d} \\ ik_1 - ik_1 b_1 = ik_2 a_2 - ik_2 b_2 \\ ik_2 a_2 e^{ik_2d} - ik_2 b_2 e^{-ik_2d} = ik_1 a_3 e^{ik_1d} \end{cases}.$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь, одержуємо

$$\dot{a}_3 = \frac{4k_1 k_2 e^{-ik_1d}}{(k_1 + k_2)^2 e^{-ik_2d} - (k_1 - k_2)^2 e^{ik_2d}}. \quad (12.33)$$

Ймовірність проходження крізь бар'єр

$$D = \dot{a}_3 \dot{a}_3^* = \frac{16k_1^2 k_2^2}{(k_1 + k_2)^4 + (k_1 - k_2)^4 - 2(k_1^2 - k_2^2) \cos(2k_2d)} \quad (12.34)$$

Ймовірність (12.34) буде максимальною коли

$$\cos(2k_2d) = 1 \Rightarrow 2k_2d = 2n\pi.$$

Значить,

$$k_{2\text{max}} = \frac{\pi n}{d} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)}; \quad (12.35)$$

$$D_{\max} = \frac{16k_1^2 k_2^2}{(k_1 + k_2)^4 + (k_1 - k_2)^4 - 2(k_1^2 - k_2^2)} = 1 \quad (12.36)$$

Ймовірність (12.34) буде мінімальною коли

$$\cos(2k_2 d) = -1 \Rightarrow 2k_2 d = (2n+1)\pi.$$

Бачимо, що

$$D_{\min} = \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \neq 0. \quad (12.37)$$

Графіки залежності ймовірності  $D$  проходження електрона над потенціальною ямою представлені на Рис. 12.13 та Рис. 12.14.

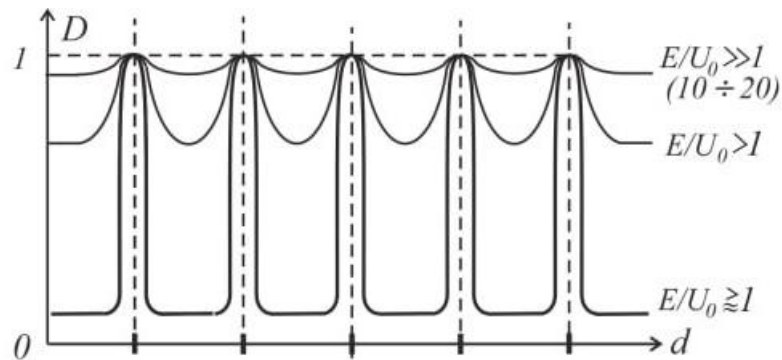


Рис. 12.13. Графік залежності вірогідності проходження електрона над потенціальною ямою в залежності від ширини ями  $d$  при різних співвідношеннях енергії електрона та глибини ями  $E/U_0$

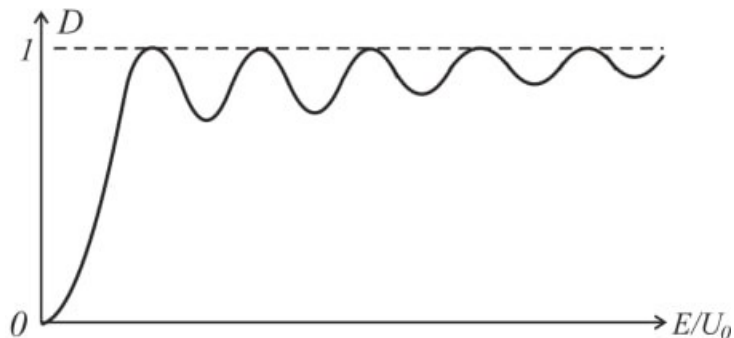


Рис. 12.14. Графік залежності вірогідності проходження електрона над потенціальною ямою в залежності від співвідношеннях енергії електрона та глибини ями  $E/U_0$

Сила струму анода пропорційна кількості електронів, що пройшли над ямою і визначаються функцією  $D$ .

Ефект Рамзауера по-перше підтвердив хвильову природу електронів, передбачену де Бройлем. По-друге є важливим експериментом у розвитку квантової механіки.

*Контрольні запитання і завдання*

1. Що називають потенціальним бар'єром у квантовій механіці?
2. Чому класична частинка не може подолати бар'єр із висотою, більшою за її енергію, а квантова – може?
3. Що таке тунелювання частинки?
4. Як визначається глибина проникнення частинки?
5. Як визначається ймовірність проходження частинки крізь бар'єр прямокутної форми?
6. Яким є загальний вигляд стаціонарного рівняння Шредінгера для частинки, що налітає на одновимірний прямокутний бар'єр? Яким є загальний розв'язок для трьох областей?
7. Як використовуються властивості  $\Psi$ -функції (умова неперервності, умова нормування) при розв'язанні рівняння Шредінгера для частинки, що налітає на одновимірний прямокутний бар'єр?
8. Як залежить ймовірність проходження через прямокутний бар'єр (прозорість бар'єру) від висоти бар'єру? ; від ширини бар'єру? ; від енергії частинки?
9. Як зміниться ймовірність тунелювання, якщо ширину бар'єра збільшити вдвічі, але висоту залишити сталою?
10. Поясніть, чому при  $E > U_0$  частина хвилі все одно відбивається від бар'єра.
11. Як зміниться коефіцієнт проходження, якщо енергія частинки збільшиться?
12. Чому зменшення маси частинки збільшує ймовірність тунелювання?
13. Як на основі виразу для прозорості прямокутного бар'єру одержати ймовірність проходження через бар'єр довільної форми?
14. Що таке контактна різниця потенціалів?

15. В чому полягає явище автоелектронної емісії?
16. Який вигляд має потенціальна енергія електричного поля поблизу поверхні катода?
17. Яку форму має потенціальний бар'єр для виходу електронів з поверхні металу в явищі польової емісії?
18. Як обчислити проникність бар'єра в явищі польової емісії?
19. В чому полягає ефект Рамзауера?
20. Як пояснити ефект Рамзауера з точки зору хвильових властивостей електрона?

## Перелік посилань

1. Лінчевський, І. В. Фізика [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за технічними спеціальностями / І. В. Лінчевський, В. В. Хіст ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,5 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 141 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/56864>.
2. Лінчевський, І. В. Загальна фізика. Оптика. Лабораторний практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник / І. В. Лінчевський ; КПІ ім. Ігоря Сікорського ; за заг. ред. І. В. Лінчевського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,95 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 38 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/39749>.
3. Лінчевський, І. В. Модуляційна поляриметрія [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня доктора філософії за освітньою науковою програмою «Фізика» спеціальності 104 «Фізика та астрономія» / І. В. Лінчевський, Л. П. Пономаренко, М. В. Чурсанова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3.0 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 116 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/55605>.
4. Пономаренко, Л. П. Фізика – 2. Елементи квантової фізики. Автоелектронна емісія. Розрахункова робота [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів, які навчаються за спеціальністю 153 «Мікро та наносистемна техніка», освітня програма «Електронні мікро- і наносистеми та технології», за спеціальністю 163 «Біомедична інженерія», освітня програма «Медична інженерія» / Л. П. Пономаренко, І. В. Лінчевський ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,16 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 25 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/45677>
5. Оптика. Квантова фізика. Молекулярна фізика. Збірник задач до розділів «Оптика. Квантова фізика. Молекулярна фізика» [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. В. П. Бригінець, О. В. Дімарова, Л. П. Пономаренко, І. М. Репалов, Н. О. Якуніна.

– Електронні текстові дані (1 файл: 1,61 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 62 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46050>.

### Список літератури

6. Кучерук І.М., Горбачук І.І. Загальний курс фізики. Т.3. Оптика. Квантова фізика. – К: Техніка, 1999.
7. Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф.. Курс фізики: навчальний посібник, Кн. 2. Оптика. Фізика атома і атомного ядра. Молекулярна фізика і термодинаміка К. - Либідь 2001.
8. Колобродов, В. Г. Хвильова оптика. Частина 1. Електромагнітна теорія світла та інтерференція [Електронний ресурс] : підручник для студентів / КПІ ім. Ігоря Сікорського; В. Г. Колобродов. – Електронні текстові данні (1 файл: 6,33 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 210 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/20753>
9. Колобродов В.Г. Хвильова оптика. Частина 2. Дифракція і поляризація світла [Електронний ресурс] : підручник для студентів / В. Г. Колобродов ; КПІ ім. І. Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 5,22 Мбайт). – Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2018. – 230 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/23244>

## References

1. Linchevskiy, I. V. Fizyka [Physics] [Electronic resource]: a study aid for applicants of the first (bachelor's) level of higher education in technical specialties / I. V. Linchevskiy, V. V. Hist ; Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. – Electronic text data (1 file: 3.5 MB). – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2023. – 141 p. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/56864> [in Ukrainian]
2. Linchevskiy, I. V. Zahal'na fizyka. Optyka. Laboratornyy praktykum [General Physics. Optics. Laboratory Practicum] [Electronic resource]: study aid / I. V. Linchevskiy; Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute; ed. by I. V. Linchevskiy. – Electronic text data (1 file: 1.95 MB). – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2021. – 38 p. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/39749> [in Ukrainian]
3. Linchevskiy, I. V. Modulyatsiyna polyaryometriya [Modulation polarimetry] [Electronic resource]: a study aid for candidates for the Doctor of Philosophy degree under the educational and scientific program “Physics”, Specialty 104 “Physics and Astronomy” / I. V. Linchevskiy, L. P. Ponomarenko, M. V. Chursanova; Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. – Electronic text data (1 file: 3.0 MB). – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2023. – 116 p. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/55605> [in Ukrainian]
4. Ponomarenko, L. P. Fizyka - 2. Elementy kvantovoyi fizyky. Avtoelektronna emisiya. Rozrakhunkova robota [Physics - 2. Elements of quantum physics. Autoelectron emission. Calculation work] [Electronic resource]: a study aid for students in the specialty 153 “Micro and nanosystems engineering”, educational program “Electronic micro- and nanosystems and technologies”, in the specialty 163 “Biomedical engineering”, educational program “Medical engineering” / L. P. Ponomarenko, I. V. Linchevskiy; Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. – Electronic text data (1 file: 1.16 MB). – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2021. – 25 p. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/45677> [in Ukrainian]

5. Optyka. Kvantova fizyka. Molekulyarna fizyka. Zbirnyk zadach do rozdiliv «Optyka. Kvantova fizyka. Molekulyarna fizyka» [Optics. Quantum Physics. Molecular Physics. Collection of Problems for the Sections “Optics. Quantum Physics. Molecular Physics”] [Electronic Resource]: A study aid for students / Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute; Compiled by V. P. Bryginets, O. V. Dimarova, L. P. Ponomarenko, I. M. Repalov, N. O. Yakunina. – Electronic Text Data (1 File: 1.61 MB). – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2021. – 62 p. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46050> [in Ukrainian]
6. Kucheruk I.M., Gorbachuk I.I. Zahal'nyy kurs fizyky. T.3. Optyka. Kvantova fizyka [General course of physics. V.3. Optics. Quantum physics]. – K: Tekhnika, 1999. [in Ukrainian]
7. Bushok G.F., Wenger E.F.. Kurs fizyky: navchal'nyy posibnyk, Kn. 2. Optyka. Fizyka atoma i atomnoho yadra. Molekulyarna fizyka i termodynamika [Physics Course: Textbook, Book 2. Optics. Physics of the Atom and Atomic Nucleus. Molecular Physics and Thermodynamics] K. -Lybid 2001. [in Ukrainian]
8. Kolobrodov, V. G. Khvyl'ova optyka. Chastyna 1. Elektromahnitna teoriya svitla ta interferentsiya [Wave optics. Part 1. Electromagnetic theory of light and interference] [Electronic resource]: a textbook for students / Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute; V. G. Kolobrodov. – Electronic text data (1 file: 6.33 MB). – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2017. – 210 p. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/20753> [in Ukrainian]
9. Kolobrodov V.G. Khvyl'ova optyka. Chastyna 2. Dyfraktsiya i polyaryzatsiya svitla [Wave optics. Part 2. Diffraction and polarization of light] [Electronic resource]: textbook for students / V. G. Kolobrodov; I. Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. – Electronic text data (1 file: 5.22 MB). – Kyiv: I. Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2018. – 230 p. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/23244> [in Ukrainian]

## Предметний покажчик

Аналізатор 75	Дисперсія
Бальмера	– дифракційної ґратки 69
– серія 108	– кутова 69
– формула 108	– лінійна 69
Бора постулати 104	– світла в речовині 84
Брюстера	Дифракція
– закон 77	– Брегівська 112
– кут 77	– електронів на щілині 113
Виродження енергетичного	– світла 53
рівня 128	– Фраунгофера 53
Власні значення енергії 124	– Фраунгофера на ґратці 64
Гаусса теорема	– Фраунгофера на щілині 61
– для електричного поля 9	– Френеля 53
– для магнітного поля 9	Довжина хвилі 20
Граничні умови 10, 33	Ейнштейна
Ґратка дифракційна 64	– гіпотеза 95
Густина ймовірності 115	– формула для фотоефекту 95
Гюйгенса - Френеля принцип 54	Електромагнітні хвилі 14
де Бройля	Емісія
– гіпотеза 110	– автоелектронна 138
– хвилі 110	– польова 138
Девіссона та Джермера дослід 110	Закон
Дисперсії	– відбиття світла 30, 33
– показник 87	– заломлення світла 30, 33
– теорія елементарна 87	Інтенсивність електромагнітної
Дисперсійне співвідношення 17	хвилі 27

<p>Інтерференційні</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– максимуми 39</li> <li>– мінімуми 39</li> </ul> <p>Інтерференція 36</p> <p>Ймовірність</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– проходження крізь бар'єр 133</li> <li>– проходження над потенціальною ямою 144</li> </ul> <p>Квантове число 105</p> <p>Квантування орбіт 105</p> <p>Кільця Ньютона 48</p> <p>Когерентність</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– просторова 45</li> <li>– хвиль 36</li> <li>– часова 43</li> </ul> <p>Когерентності</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– довжина 44</li> <li>– період 44</li> <li>– радіус 46</li> </ul> <p>Комплексна експонента 20</p> <p>Комптона ефект 98</p> <p>Комптонівська довжина хвилі 101</p> <p>Контактна різниця потенціалів 136</p> <p>Корпускулярно-хвильовий дуалізм</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– світла 92</li> <li>– частинок 110</li> </ul>	<p>Максвелла система рівнянь</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– в диференціальній формі 10</li> <li>– в інтегральній формі 8</li> </ul> <p>Малюса закон 76</p> <p>Матеріальні рівняння 9</p> <p>Метод</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– біпризми Френеля 42</li> <li>– зон Френеля 55</li> <li>– поділу амплітуди 46</li> <li>– поділу хвильового фронту 40</li> <li>– Юнга 40</li> </ul> <p>Монохроматична хвиля 20</p> <p>Неперервності рівняння 11</p> <p>Оптика</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– геометрична 29</li> <li>– квантова 92</li> <li>– хвильова 31</li> </ul> <p>Пластинка плоскопаралельна 46</p> <p>Плоска хвиля 18</p> <p>Пойнтінга</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– вектор 24</li> <li>– теорема 25</li> </ul> <p>Показник заломлення</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– абсолютний 31</li> <li>– відносний 30</li> </ul> <p>Поляризатор 75</p> <p>Поляризатора площина 75</p>
--	--

<p>Поляризації</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– площина 74</li> <li>– ступінь 75</li> </ul> <p>Поляризація</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– еліптична 74</li> <li>– колова 74</li> <li>– лінійна 74</li> <li>– плоска 74</li> <li>– р- 78</li> <li>– s- 78</li> </ul> <p>Поперечність хвилі 17</p> <p>Потенціальна яма</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– двовимірна 127</li> <li>– одновимірна 122</li> <li>– тривимірна 128</li> </ul> <p>Потенціальний бар'єр</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– довільної форми 135</li> <li>– прямокутної форми 132</li> <li>– у вигляді сходинок 130</li> </ul> <p>Прозорість бар'єру 133</p> <p>променезаломлюваність подвійна 82</p> <p>пси-функція 114</p> <p>Рамзауера ефект 141</p> <p>Резерфорда</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– дослід 103</li> <li>– формула 104</li> </ul> <p>Рентгенівське випромінювання</p> <p>гальмівне 96</p>	<p>Рентгенівського випромінювання</p> <p>короткохвильова межа 97</p> <p>Рідберга стала 107</p> <p>Різниця ходу 38</p> <p>Роздільна здатність дифракційної гратки 70</p> <p>Світло</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– поляризоване 74</li> <li>– природне 74</li> <li>– частково поляризоване 75</li> </ul> <p>Світловий</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– промінь 29</li> <li>– вектор 31</li> </ul> <p>Смуги</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– рівного нахилу 48</li> <li>– рівної товщини 48</li> </ul> <p>Спектр</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– електромагнітний 21</li> <li>– лінійчастий 107</li> </ul> <p>Спектральна серія 108</p> <p>Співвідношення</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– між амплітудою відбитої та падаючої хвилі 35</li> <li>– між амплітудою заломленої та падаючої хвилі 35</li> <li>– невизначеностей Гейзенберга 116</li> <li>– невизначеностей Гейзенберга для координати й імпульсу 117</li> <li>– невизначеностей Гейзенберга для часу й енергії 118</li> </ul>
--	--

<p>Степінь виродження енергетичного рівня 128</p> <p>Теорема про</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– циркуляцію вектора <math>E</math> 8</li> <li>– циркуляцію вектора <math>H</math> 9</li> </ul> <p>Умови</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– нормування для псі-функції 115</li> <li>– стандартні для псі-функції 116</li> </ul> <p>Фаза хвилі 16</p> <p>Фотоефект</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– зворотній 96</li> <li>– зовнішній 94</li> </ul> <p>Фотоефекту червона межа 96</p> <p>Фотон 92</p> <p>Френеля</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– зона 55</li> <li>– спіраль 57</li> <li>– формули 78</li> </ul> <p>Хвильова функція 114</p> <p>Хвильове рівняння 15</p> <p>Хвильове число 20</p> <p>Хвильовий вектор 16</p> <p>Швидкість</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– групова 86</li> <li>– фазова 85</li> </ul> <p>Ширина інтерференційної смуги 41</p> <p>Шлях оптичний 38</p>	<p>Шредінгера рівняння</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– стаціонарне 122</li> <li>– часове 121</li> </ul>
--	--

UDC 535(075)

L59

Authors: *Linchevskiy Ihor Valentinovich*, Doctor of Physical and Mathematical Sc., Professor  
*Hist Viktoriia Volodymyrivna*, PhD of Physical and Mathematical Sc.  
*Maryna Valeriivna Chursanova*, PhD of Physical and Mathematical Sc.

Reviewer *Savchenko D. V.*, Doctor of Physical and Mathematical Sc., Associate Professor, Head of the Department of General Physics and Modeling of Physical Processes

Editor *Reshetniak S. O.*, Doctor of Physical and Mathematical Sc., Professor

*Approved by the Methodological Council of Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute  
(Protocol No. 5 dated 05.03.2026)  
upon submission by the Academic Council of the Faculty of Physics and Mathematics  
(Protocol No. 1 dated 11.02.2026)*

L59 **Linchevskiy I. V.**

Physics. Part 2. Optics. Quantum Physics [Electronic resource]: a study aid for bachelor's degree students of all educational programs in natural and technical specialties / I. V. Linchevskiy, V. V. Hhist, M. V. Chursanova; Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. – Electronic text data (1 file). – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2026. – 156 p.

The study aid “Physics. Part 2. Optics. Quantum Physics” covers the following sections: Electromagnetic Waves. Wave and Quantum Optics. Elements of Quantum Mechanics as parts of the General Physics course. The study aid contains theoretical and methodological materials in the discipline “Physics.” Special attention is paid to examples, problems, and control questions, which contribute to better mastery of the theoretical material. The study aid is intended for training students of the first (bachelor's) level of higher education in the educational and professional program, Specialty G22 “Biomedical Engineering.”

The study aid may also be useful for students and lecturers of other physical and technical specialties of higher technical educational institutions as well as classical and pedagogical universities.

UDC 535(075)

Registration No NP 25/26-218. Extent 7 author's sheets.

National Technical University of Ukraine  
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”  
37 Beresteyskyi Avenue, Kyiv, 03056  
<https://kpi.ua>

Certificate of entry into the State Register of Publishers, Manufacturers,  
and Distributors of Publishing Products DK No. 5354 dated May 25, 2017

© I. V. Linchevskiy, V. V. Hist, M. V. Chursanova, 2026

© Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2026