

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. М. Турик

ГІДРОГАЗОДИНАМІКА

Курс лекцій

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями
142 Енергетичне машинобудування, 143 Атомна енергетика,
144 Теплоенергетика*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Рецензент	В.Ю.Кравець, д-р техн. наук, ст. наук. сп., проф. кафедри атомних електростанцій та інженерної теплофізики
Відповідальний редактор	О.Ф.Луговський, д-р. техн. наук, проф. кафедри прикладної гідроаеромеханіки і механотроніки

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 13.05.2021 р.)
за поданням Вченої ради Механіко-машинобудівного інституту (протокол № 7 від 22.02.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Турик Володимир Миколайович, канд. техн. наук, проф.

ГІДРОГАЗОДИНАМІКА

Курс лекцій

Гідрогазодинаміка. Курс лекцій [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 142 Енергетичне машинобудування, 143 Атомна енергетика, 144 Теплоенергетика, / В.М. Турик; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 8,37 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 145 с.
<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41225>

Курс лекцій в стислій, математично строгій формі містить основні закони рівноваги, одновимірного і просторового руху рідин і газів, викладені в розділах, які охоплюють: фізичні властивості і моделі рідин; гідрогазостатику; кінематику рідини; динаміку ідеальної і в'язкої рідини, включаючи елементи теорії примежового шару і відривних течій; потенціальні течії; елементи газової динаміки. Увага акцентується на фізичному розумінні гідромеханічних явищ, принципах складання і аналізу рівнянь процесів, умовах і методах їх інтегрування та застосування знайдених розв'язків.

Курс лекцій призначений для студентів теплоенергетичного факультету та може бути корисним студентам, що вивчають дисципліни «Механіка рідини і газу» і «Фізика суцільних середовищ» відповідно за спеціальностями 131 Прикладна механіка і 105 Прикладна фізика та наноматеріали.

© Турик В.М., 2021
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ВСТУП

Робочі процеси ядерних реакторів, котлів, парових і газових турбін, ракетних і авіаційних двигунів, двигунів внутрішнього згоряння, насосів і компресорних машин, трубопровідних систем, а також засобів автоматики та приладів контролю великою мірою визначаються закономірностями рівноваги і руху рідин і газів. Тому успішне проведення розрахунків, проектування та безаварійної експлуатації зазначених пристроїв і машин насамперед передбачає глибоке розуміння фізичних процесів, що відбуваються в них, а також володіння необхідною базою для можливості подальшого розвитку фізико-математичних моделей гідрогазодинамічних і теплових процесів в енергетичному устаткуванні. Умовою набування необхідних знань, умінь та професійних навичок є поглиблене засвоєння основних положень механіки рідини і газу, а також методів їх практичного застосування при розв'язанні задач, типових для атомної, теплової енергетики та енергомашинобудування.

Відомі літературні джерела мають значний обсяг, ряд перевантажених деталізацією місць, що не завжди виправдовується методичними міркуваннями з огляду на рівень підготовленості і спрямованості навчання студентів технічних університетів. У пропонованій масі матеріалу читачеві важко виділити ключові для світогляду спеціаліста-прикладника моменти, а також побудувати оптимальні методики щодо постановки й розв'язування тих чи інших задач. У зростаючому потоці інформації це робить існуючу літературу при її безумовно важливому фундаментальному значенні важкодоступною для досить швидкого й ефективного використання, особливо в умовах сучасної тенденції зменшення кількості лекційних годин у ВНЗ і приділення значної уваги самостійній роботі студентів. У даному навчальному посібнику пропонується така форма систематичного викладу найважливіших для передбачуваного читача розділів, при якій строгість фізичної і математичної постановок задач гідрогазодинаміки (ГГД) поєднується зі стислістю їх реалізації та проведенням аналізу знайдених результатів. Історичні відомості й перспективи розвитку ГГД, деякі подробиці та вказівки щодо інших шляхів виведення рівнянь, що описують рівновагу і рух рідин і газів (або тіл в них), можна знайти в [1-13].

У зв'язку з об'єктивно зростаючою потребою розв'язування задач обтікання різних тіл, в тому числі в регулюючій арматурі, пристроях управління енергетичними й технологічними процесами, в посібнику приділено увагу елементам потенціальних течій рідини, пограничного шару і відривних течій з кавернами.

Для зручності вивчення й можливості доповнення матеріалу посібника на початку кожного розділу подається його короткий план і пропонуються докладні посилання на найпридатніші за ступенем складності літературні джерела.

Навчальний посібник призначений для студентів, які вивчають дисципліни «Гідрогазодинаміка», "Механіка рідини та газу", «Фізика суцільних середовищ» та інші, у тому числі при їх самостійній роботі. Він може бути корисним спеціалістам в галузі енергетики, машинобудування, прикладної фізики, хімічної, нафтової і газової промисловості, приладобудування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основний

1. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. — Л.: Машиностроение, 1976. — 504 с.
2. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. — М.: Машиностроение, 1987. — 440 с.
3. Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И., Федяевский К.К. Гидромеханика. — Л.: Судостроение, 1982. — 456 с.
4. Аэрогидромеханика / А.М. Мхитарян, В.В. Ушаков, А.Г. Баскакова, В.Д. Трубенюк; Под общ. ред. А.М. Мхитаряна. — М.: Машиностроение, 1984. — 352 с.
5. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. — М.: Наука, 1976. — 888 с.

Додатковий

6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
7. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. — М.: Наука, 1964. — 816 с.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
9. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949. — 520 с.
10. Дейч М.Е. Техническая газодинамика. — М.: Энергия, 1974. — 592 с.
11. Самойлович Г.С. Гидроаэромеханика. — М.: Машиностроение, 1990. — 384 с.
12. Аэродинамика в вопросах и задачах / Н.Ф.Краснов, В.Н.Кошевой, А.Н.Данилов и др.; Под ред. Н.Ф.Краснова. — М.: Высш. шк., 1985. — 759 с.
13. Прикладная гидромеханика / А.Н. Патрашев, Л.А. Кивако, С.И. Гожий; Под ред. А.Н. Патрашева. — М.: Воениздат, 1970. — 688 с.
14. Самойлович Г.С., Нитусов В.В. Сборник задач по гидроаэромеханике. — М.: Машиностроение, 1986. — 152 с.

Розподіл лекційних годин за розділами і підрозділами

<i>№ лекції</i>	<i>№ та назва теми</i>	<i>№ підрозділу</i>	<i>Кількість годин</i>
1	1. Фізичні властивості й моделі рідин	1.1–1.4	2
2	1. Фізичні властивості й моделі рідин	1.5 –1.8	2
3	2. Гідрогазостатика	2.1 – 2.2	2
4	2. Гідрогазостатика	2.3 – 2.5	2
5	3. Кінематика рідини	3.1 – 3.5	2
6	3. Кінематика рідини	3.6 –3.8	2
7	4. Динаміка ідеальної рідини	4.1 – 4.3	2
8	4. Динаміка ідеальної рідини	4.4 – 4.5	2
9	5. Елементи гідравліки (динаміки одновимірних потоків в'язкої нестисливої рідини)	5.1 – 5.3	2
10	5. Елементи гідравліки (динаміки одновимірних потоків в'язкої нестисливої рідини)	5.4	2
11	5. Елементи гідравліки (динаміки одновимірних потоків в'язкої нестисливої рідини)	5.5	2
12	6. Потенціальні течії	6.1 – 6.2	2
13	6. Потенціальні течії	6.3.1 – 6.3.3	2
14	6. Потенціальні течії	6.3.4 – 6.3.5	2
15	6. Потенціальні течії	6.3.6 – 6.3.7	2
16	7. Динаміка в'язкої рідини	7.1 – 7.2	2
17	7. Динаміка в'язкої рідини	7.3 – 7.4	2
18	7. Динаміка в'язкої рідини	7.5 – 7.6	2
19	7. Динаміка в'язкої рідини	7.7 – 7.8	2
20	7. Динаміка в'язкої рідини	7.9 – 7.11	2
21	8. Поняття примежового шару та відривних течій	8.1	2
22	8. Поняття примежового шару та відривних течій	8.2	2
23	8. Поняття примежового шару та відривних течій	8.3, 8.4	2
24	9. Елементи теорії гідравлічного удару в трубах	9.1 – 9.3	2
25	10. Елементи газової динаміки	10.1 – 10.3	2
26	10. Елементи газової динаміки	10.4 – 10.5	2
27	10. Елементи газової динаміки	10.6 – 10.9	2
Всього:			54

1. ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ Й МОДЕЛІ РІДИН

Гіпотеза суцільності. Густина й питома вага рідини. Сили та напруження, що діють у рідині. Тиск. В'язкість. Стисливість. Термодинамічні моделі газів і рідин. Поверхневий натяг. Випаровуваність, тиск насичення, кавітація.

[1, с. 5-19; 2, с. 7-26, 60-64. 71-74; 3. с. 9-17; 4, с. 6-25]

1.1. Модель рідкого середовища

У механіці рідини та газу вивчаються рівноважні стани й такі макроскопічні процеси руху і силової взаємодії рідин та газів з твердими тілами, при яких конкретна молекулярна будова рідин і газів неістотна. Завдяки цьому правомірно розглядати модель рідини як суцільного середовища, довільний нескінченно малий об'єм якого характеризується тими самими властивостями, що й об'єм скінчених розмірів (гіпотеза неперервності, або суцільності).

Практика показала правомірність гіпотези неперервності для рідин. Виняток становить лише рух сильнорозріджених газів, багатофазних, багатокомпонентних і хімічно-реагуючих середовищ.

Зауважимо, що узагальнено в поняття «рідина» включаються як краплинні рідини, так і гази. Краплинні рідини в малому об'ємі під дією сил поверхневого натягу намагаються набрати сферичної форми, а в значних кількостях - утворити вільну поверхню. Гази займають увесь виділений об'єм, причому порівняно з краплинними рідинами вони мають набагато меншу густину та набагато більшу стисливість.

1.2. Густина й питома вага рідини

Основною характеристикою рідини як суцільного середовища є густина ρ , кг/м^3 . Для неоднорідних та неізотермічних середовищ вона визначається як границя відношення маси Δm , що міститься в елементарному об'ємі ΔV , до величини цього об'єму, коли відповідна поверхня стягується до деякої точки А (рис. 1): $\rho(A) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$.

Для однорідного середовища $\rho = \frac{m}{V}$, де m - маса рідини, що міститься

в об'ємі V .

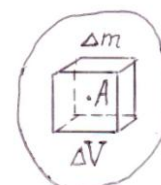


Рис. 1.

Зокрема, для води звичайно покладають $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$; густина повітря становить приблизно $1,25 \text{ кг/м}^3$, тобто густина повітря у 800 раз менша за густину води.

Важливою характеристикою рідини є її питома вага γ , Н/м^3 .

Для однорідного середовища

$$\gamma = \frac{G}{V},$$

де G – вага рідини в об'ємі V .

Зв'язок між густиною і питомою вагою: $\gamma = \rho g$, де $g=9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння.

Використовується також поняття питомого об'єму — об'єму, заповненого одиницею маси рідини: $V_{\text{пит}} = 1/\rho, \text{ м}^3/\text{кг}$ (найчастіше застосовується в термодинаміці).

1.3. Сили й напруження, що діють у рідині

Для розгляду сил, що діють у рідині, застосовується **метод перерізів**. Виділяють довільний рідкий об'єм V , обмежений поверхнею S , і мислено відкидають усю рідину поза цим об'ємом. При цьому внутрішні сили, які діють між виділеною і відкинутою частинами рідини, стають зовнішніми поверхневими силами. Крім того, у довільній точці об'єму діють масові, або об'ємні, сили.

Масовими називають сили, прикладені до кожної частинки (малого об'єму) рідини і пропорційні її масі. До масових сил належать: сила тяжіння, відцентрова та коріолісова сили інерції, а також сили електромагнітної природи (так звані пондеромоторні сили).

Одиничною масовою силою, або її напруженням, називається границя відношення масової сили $\Delta \vec{f}$, що діє на частинки, які містяться в елементарному об'ємі ΔV , до маси цього об'єму (рис. 2):

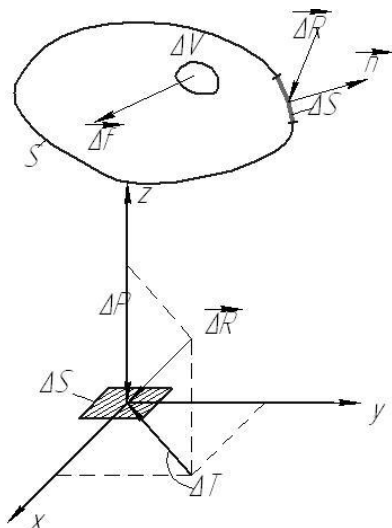


Рис. 2.

$$\vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\rho \Delta V}.$$

Одинична масова сила має розмірність прискорення $[F]=\text{LT}^{-2}$.

Поверхневими називаються сили, розподілені по поверхні, яка обмежує виділений об'єм рідини, і пропорційні її площі (наприклад, сили тиску на вільну поверхню рідини, сили тиску від поршня на газ в циліндрі).

Позначимо через $\Delta \vec{R}$ поверхневу силу, що діє в межах

елементарної площинки ΔS .

У загальному випадку $\Delta \vec{R}$ напрямлена під ненульовим кутом до нормалі $\vec{n}$ площинки ΔS (див. рис. 2). Вектор напруження поверхневої сили в точці, що належить площинці із зовнішньою нормаллю $\vec{n}$, визначається як

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta S}$$

та має розмірність $[p_n] = ML^{-1}T^{-2}$.

Проекцію $\Delta \vec{R}$ на зовнішню нормаль назовемо **нормальною поверхневою силою** і позначимо ΔP , а проекцію цього вектора на дотичну площину ΔT назовемо **дотичною поверхневою силою**.

Розглянемо границю відношення нормальної поверхневої сили ΔP , що діє на елементарну площинку ΔS , до площі цієї площинки, коли остання стягується в точку. Це — **нормальне напруження** поверхневої сили в точці:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S}.$$

У випадку стискаючої дії сили на площинку ця величина називається тиском. Аналогічно вводиться поняття **дотичного напруження** в точці

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta S}.$$

Одиницею вимірювання тиску в системі СІ є «Паскаль» (Pa), причому

$$1 Pa = 1 H/m^2.$$

Оскільки ця величина досить мала, то застосовуються похідні одиниці:

$$1 \text{ кілопаскаль (кПа)} = 1000 Pa \text{ і } 1 \text{ мегапаскаль (МПа)} = 10^6 Pa.$$

У техніці часто застосовується одиниця "технічна атмосфера":

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 98100 Pa = 0,0981 \text{ МПа} \sim 735,56 \text{ мм рт. ст} \sim 10 \text{ м вод. ст.}$$

Застосовується також позасистемна одиниця 1 бар = $10^5 Pa$. Крім того, використовується поняття «фізичної атмосфери», яка означає нормальний барометричний тиск:

$$1 \text{ фіз. атм} = 101325 Pa \approx 1,033 \text{ ат}, \text{ що відповідає } 760 \text{ мм рт. ст} \text{ та } 10,33 \text{ м вод. ст.}$$

Існують чотири види тиску.

1. Абсолютний тиск. Тиск в умовах безповітряного простору, або в порожнечі, дорівнює нулю. Тиск p , виміряний відносно тиску в порожнечі, називається абсолютним.

2. Атмосферний, або барометричний, тиск $p_{атм}$ — це абсолютний тиск атмосферного повітря. За нормальних умов урівноважується стовпчиком ртуті висотою 760 мм рт. ст.

3. Надлишковий, або манометричний, тиск p_m — це різниця між абсолютним і атмосферним тиском, коли абсолютний тиск більший за атмосферний: $p_m = p - p_{атм}$.

4. Вакуумметричний тиск, або розрідження, p_v — це різниця між атмосферним і абсолютним тиском, коли абсолютний тиск менший за атмосферний:

$$p_v = p_{атм} - p.$$

1.4. В'язкість рідин

Поява дотичних напружень у рідині зумовлена, насамперед, молекулярною в'язкістю.

В'язкістю називається властивість рідин чинити опір зсуву шарів. За **законом тертя Ньютона** при розшарованому і плоскопаралельному (ламінарному) русі рідини дотичне напруження, спричинене молекулярною в'язкістю,

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy},$$

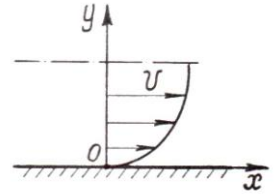


Рис.3.

де v – модуль швидкості руху рідини (рис. 3); μ – динамічний коефіцієнт в'язкості («динамічна в'язкість»); похідна dv/dy характеризує швидкість деформації зсуву в точці (цю величину часто позначають як $\dot{\gamma}$), $1/c$.

Одиницею динамічної в'язкості в СІ є «Паскаль-секунда» ($Pa \cdot s$).

До 1980 р. допускалася одиниця *пуаз* ($Pз$) на честь Ж.Л.М. Пуазейля ($1 Pз = 0,1 Pa \cdot s$), хоча вона і зараз зустрічається в науково-технічній документації і літературі.

Величину, обернену до динамічної в'язкості, називають текучістю: $\xi = \frac{1}{\mu}$.

Кінематичний коефіцієнт в'язкості («кінематична в'язкість»)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Одиницями вимірювання кінематичної в'язкості є m^2/s в системі СІ, а також «Стокс» в системі СГС: $1 St = 1 cm^2/s = 10^{-4} m^2/s$.

Зауважимо, що в'язкість краплинних рідин із зростанням температури і падінням тиску (в діапазоні $0 \div 100$ бар) зменшується, а газів – зростає, причому залежність від температури є більш істотною, ніж від тиску.

Величина кінематичної в'язкості газів, як правило, є більшою, ніж краплинних рідин. Наприклад, при $20^\circ C$: для води $\nu_v = 0,01 St$, для повітря $\nu_n = 0,15 St$, для технічних масел $\nu_m = 0,1 \dots 4,0 St$, зокрема для робочої рідини АМГ-10 (в авіаційних гідросистемах) $\nu = 0,16 St$.

Рідини, що не задовольняють закон тертя Ньютона, називають **неньютонівськими** (розчини та розплави гуми, пластичних мас, клеї, суспензії, будівельні розчини, кров людей і тварин, і т.п.). Властивості та рухи таких рідин вивчає дисципліна «**Реологія**».

Одновимірний плоскопаралельний рух ньютонівських рідин описується узагальненим реологічним рівнянням $\tau = \tau_0 + K \dot{\gamma}^m$, де τ_0 – порогове значення дотичного напруження (до початку зсувного руху шарів); K – коефіцієнт; m – індекс течії.

1.5. Стисливість рідин і газів

Під стисливістю розуміють здатність рідин (газів) змінювати свою густину під дією тиску.

Ступінь стисливості характеризується **коефіцієнтом об'ємного стиску**, $1/\text{Па}$:

$$\beta_v = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} = \frac{d\rho}{\rho dp},$$

де V – початковий об'єм рідини; ρ – початкова густина.

Знак "-" зумовлюється тим, що об'єм середовища із збільшенням тиску зменшується. Величину, обернену до β , називають **модулем об'ємної пружності**, Па :

$$E = \frac{1}{\beta_v}.$$

Краплинні рідини практично нестисливі. Для води $E \approx 2000 \text{ МПа}$, тобто в результаті зміни тиску на $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$ об'єм води змінюється приблизно на $1/20000$ його частину.

З курсу фізики відомо, що величину

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \approx \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}$$

називають **швидкістю звуку**, тобто швидкістю розповсюдження малих збурень, в середовищі. Тоді $E = \rho a^2$. Таким чином, a також є характеристикою стисливості рідини.

Стисливість газів істотна, якщо швидкості руху порівнювані із швидкістю звуку a , або перевищують її. Для повітря $a \approx 340 \text{ м/с}$, у воді $a \approx 1500 \text{ м/с}$. Якщо швидкість руху газу не перевищує $0,2 a$, газ можна вважати практично нестисливою рідиною. Але, строго кажучи, для цілком нестислової рідини $\Delta \rho \rightarrow 0$, тобто $a \rightarrow \infty$, що нездійсненно.

1.6. Термодинамічні моделі газів і рідин

Вибір тієї чи іншої термодинамічної моделі середовища визначається практично необхідною точністю термо- і гідрогазодинамічних розрахунків. Кожній моделі відповідає певна область станів, у межах якої існує однозначний зв'язок між параметрами стану (наприклад, термічними – абсолютними тиском p , температурою T і густиною ρ): $F(p, \rho, T) = 0$. Розглянемо моделі ідеального в термодинамічному розумінні газу і реальних газу та рідини.

1. **Ідеальний («термічно ідеальний»)** газ складається з цілком пружних молекул, розглядуваних як матеріальні точки, що не взаємодіють одна з одною на відстані, а взаємодіють лише при зіткненнях з певним обміном імпульсом. Ідеальний газ задовольняє рівнянню стану Клапейрона:

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

де $R = R_M / M$ – газова стала, Дж/(кг·К); $R_M = 8,314$ Дж/(моль·К) – універсальна газова стала; M – молярна маса газу, кг/моль. Для повітря $R = 287,14$ Дж/(кг·К).

Чим вища температура і нижчий тиск газу чи пари, тим ближчий їх стан до моделі ідеального газу. Наприклад, якщо $p < 1 \dots 3$ МПа, повітря й продукти згоряння вуглецевого полива вважають ідеальним газом.

Модель ідеального газу не виключає існування в'язкісних дотичних напружень у рухомому газі, обумовлених хаотичним переміщенням молекул із шару в шар і обміном відповідних кількостей руху при зіткненнях. Для подолання сили опору (внутрішнього тертя), що виникають при цьому, потрібно прикласти зовнішню силу.

2. **Реальні гази** — це гази, які не задовольняють рівняння Клапейрона, а отже, й закони Бойля-Маріотта, Гей-Люссака та Шарля.

Щоб врахувати реальні властивості газу, в рівняння Клапейрона вводять так званий **коефіцієнт стисливості** Z_c (надається в довідниках для різних газів та умов):

$$\frac{p}{\rho RT} = Z_c.$$

Для газів, що зустрічаються в природі, $Z_c \neq 1$, причому відхилення від одиниці тим істотніше, чим більша густина газу. Чим вище температура газу та нижче його тиск, тим ближче Z_c до 1, тобто остання формула перетворюється на рівняння Клапейрона.

3. **Стани реальних газів, у тому числі парів, а також рідин поблизу стану насичення** описуються напівемпіричними рівняннями стану, наприклад рівнянням стану Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{a}{(1/\rho)^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho} - b \right) = RT,$$

де a , b – сталі для даного середовища, які (разом з поправкою $a/(1/\rho)^2$) враховують сили притягання та відштовхування молекул і, відповідно, їх скінченні об'єми (поправкою b); ці сталі величини однозначно визначаються критичними параметрами речовини.

Рівняння стану Ван-дер-Ваальса є досить наближеним і застосовне для однофазного середовища, тобто лише для краплинної рідини чи для газу, причому при малих відхиленнях від стану термічно ідеального газу. Різні нахил та кривизна відомих

з термодинаміки ізотерм Ван-дер-Ваальса характеризують відмінності щодо стисливості середовищ. Так, для краплинних рідин похідна

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{1}{\rho} \right)_T \rightarrow 0,$$

що свідчить про їх малу, на відміну від газів, стисливість. При малих значеннях p , тобто для досить розріджених чи нагрітих газів, рівняння Ван-дер-Ваальса переходить в рівняння Клапейрона $p/\rho = RT$.

1.7. Поверхневий натяг

На межі розділу рідин з твердими тілами, парою та газами, а також з іншими рідинами, що не змішуються виникають сили поверхневого натягу завдяки некомпенсованим притягальним молекулярним силам з різних сторін поверхонь розділу по нормалі до цих поверхонь. У випадку контакту рідини з твердим тілом напрям викривлення залежить від змочуваності його рідиною. Внаслідок цього вільна поверхня може викривлятися, тобто поводити себе подібно до натягнутої перетинці. Через цю властивість поверхні розділу всередині сферичної рідкої частинки має місце додатковий тиск, зумовлений силами поверхневого натягу, який визначається за формулою Лапласа:

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

де r – радіус сфери; σ – коефіцієнт поверхневого натягу, H/m (на межі «вода—повітря» дорівнює приблизно $0,073 H/m$).

Сили поверхневого натягу істотно виявляють себе лише при течіях у вузьких каналах (капілярах), їх враховують при вивченні течій рідини в умовах невагомості, а також в задачах екології океану (розповсюдження нафтових плівок та інших забруднень). При розрахунках напірних течій в енергетичних та технологічних машинах і апаратах, а також в трубопровідних системах цими силами, як правило, нехтують через їх малість порівняно з рештою сил (сил тиску, інерції, тяжіння).

1.8. Випаровуваність. Тиск насичення. Кавітація

Випаровуваність тією чи іншого мірою властива краплинним рідинам. Чим вища температура кипіння при даному тиску, тим менша випаровуваність. Проте важливішою характеристикою є тиск насичених парів (**тиск насичення**) $p_{нас}$ при даній температурі. Тиск, при якому рідина закипає, маючи певну температуру, дорівнює тиску насиченої пари. Наприклад, при $t=20^\circ C$ для прісної води $p_{нас} \approx 2,27 \text{ кПа}$ (що відповідає 17 мм рт. ст.). Чим вищий тиск насичення при даній температурі, тим більша випаровуваність. Із зниженням тиску в краплинній рідині до $p \leq p_{нас}$ спостерігається пароутворення і виділення

розчинених у ній газів згідно із законом Генрі — явище так званої **кавітації** (менш строго — «холодного кипіння»). Негативні наслідки кавітації: 1) порушується суцільність потоків, що призводить до зриву робочих параметрів насосів, гідросистем, гребних гвинтів та підводних крил суден; 2) при потраплянні в зони підвищеного тиску бульбашки або їх об'єднання («каверни») з парою і газом різко захлопуються через конденсацію пари та зворотне розчинення газу в краплинній рідині, в результаті чого виникають локальні гідроудари (до 1000 *бар* і вище), що супроводжується підвищеними шумом та вібраціями елементів гідросистем і машин. Локальні гідроудари призводить до ерозії, пошкодження обтічних поверхонь, в результаті підсилюється корозія металевих деталей, а знакозмінні вібраційні навантаження на них в кінцевому рахунку можуть викликати аварійні ситуації. Але руйнівні властивості кавітації можна використовувати (і застосовують в новітніх технологіях) з метою інтенсифікації процесів нагріву та масотеплообміну в рідинних середовищах, процесів очищення деталей перед збиранням конструкцій в машинобудуванні, для очищення і стерилізації речовин та інструментів в харчових, медичних технологіях тощо.

Запитання для самоперевірки до розділу 1

1. Що вивчає гідрогазодинаміка?
2. В чому полягає модель рідини як суцільного середовища?
3. Що таке густина неоднорідної, однорідної рідини?
4. Що називають питомою вагою рідини?
5. Як пов'язані густина й питома вага рідини?
6. Що таке питомий об'єм?
7. Назвіть розмірність питомого об'єму середовища.
8. У чому полягає метод перерізів, застосовуваний при аналізі сил, що діють рідині?
9. Які види сил, що діють у рідині? Наведіть їх приклади.
10. Що таке напруження сил, навести їх розмірності?
11. Що називається тиском? Які є види тиску?
12. Сформулюйте закон тертя Ньютона. Які коефіцієнти в'язкості вам відомі?
13. Якими параметрами характеризують стисливість рідин (газів)?
14. Які термодинамічні моделі газів і рідин вам відомі?
15. Запишіть формулу Лапласа для оцінки сили поверхневого натягу.
16. Що таке кавітація в рідині і до чого вона призводить?

2. ГІДРОГАЗОСТАТИКА

Гідростатичний тиск. Диференціальні рівняння рівноваги. Поверхні рівня.
Основне рівняння гідростатики. Відносний спокій рідини. Формули Галлея.

[1, с. 16-27; 2, с. 60-76; 3, с. 14-22; 4, с. 25-33]

Гідрогазостатика вивчає закони рівноваги краплинних рідин і газів.

2.1. Напруження при рівновазі рідини

При рівновазі рідини дотичні напруження в ній відсутні, а діють лише нормальні напруження. Напруження нормальної стискаючої поверхневої сили при рівновазі рідини називається **гідростатичним тиском**.

Основна властивість гідростатичного тиску: у даній точці рідини він однаковий у всіх напрямках.

Для доведення розглянемо елементарний рідкий тетраедр з ребрами dx, dy, dz (рис. 4). По гранях тетраедра діють сили гідростатичного тиску, а отже, нормальні напруження:

p_x, p_y, p_z, p_n . Наведені індекси відповідають орієнтації кожної нормалі (координатної осі) до відповідної площинки, але останнє напруження p_n діє на похилу («зрізану» до нас) грань dS , яку ідентифікує нормаль n .

Крім того, на тетраедр діє одинична масова сила

$$\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}.$$

Запишемо умову рівноваги сил у проекціях на осі координат, маючи на увазі, що поверхнева сила $p_n dS$ має від'ємні проекції на ці осі.

Почнемо з балансу всіх сил в проекціях на вісь Ox :

$$\sum X_i \Rightarrow \frac{1}{2} p_x dydz - p_n \cos(n, x) dS + \frac{\rho}{6} F_x dx dy dz = 0.$$

Враховуючи, що $dS \cdot \cos(n, x) = dS_x = \frac{dydz}{2}$

і скорочуючи на $\frac{1}{2} dydz$, дістаємо $p_x - p_n + \frac{\rho}{3} F_x dx = 0$.

Коли елементарний тетраедр стягується в точку, маємо

$$p_x = p_n.$$

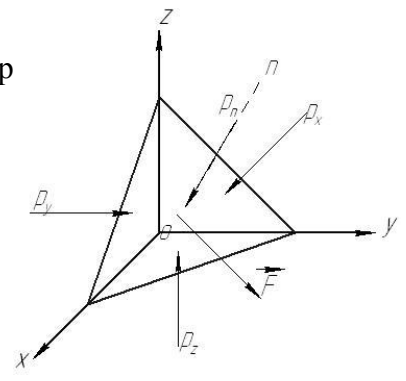


Рис. 4.

Аналогічні умови рівноваги сил у проекціях на решту осей координат дають рівності

$$p_y = p_n, p_z = p_n.$$

З останніх трьох співвідношень випливає

$$p_x = p_y = p_z = p_n,$$

тобто за відсутності в рідині дотичних напружень нормальні напруження, а отже, й тиск в даній точці не залежать від орієнтації площинки. Це доводить основну властивість гідростатичного тиску.

2.2. Диференціальні рівняння рівноваги рідин і газів Л. Ейлера

Гідростатичний тиск змінюється від точки до точки: $p = p(x, y, z)$. Розподіл його в рідині, що перебуває в полі масових сил, визначається диференціальними рівняннями рівноваги Леонарда Ейлера.

Розглянемо рівновагу (спокій) елементарного куба з довжинами ребер dx , dy , dz (рис. 5).

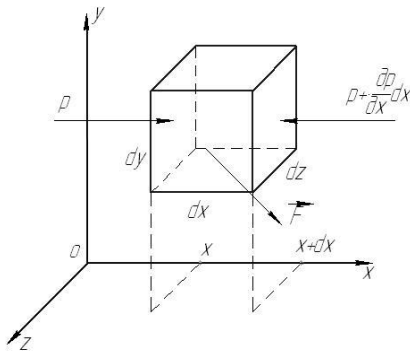


Рис. 5.

Наближено вважатимемо

$$p(x + dx, y, z) = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx;$$

$$p(x, y + dy, z) = p + \frac{\partial p}{\partial y} dy;$$

$$p(x, y, z + dz) = p + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Запишемо умову рівноваги силу проекціях на вісь Ox :

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho F_x dx dy dz = 0,$$

звідки після нескладних перетворень знайдемо

$$F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

Умови рівноваги в проекціях на осі Oy і Oz дають

$$F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (2.2)$$

$$F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (2.3)$$

Система (2.1) – (2.3) являє собою систему диференціальних рівнянь рівноваги Л. Ейлера, що виражають баланс одиничних масових і поверхневих сил при спокої рідини.

Цю систему рівнянь можна записати у векторній формі:

$$\boxed{\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = 0},$$

де $\text{grad} p \equiv \nabla p = \vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z}$ — градієнт тиску (із застосуванням символічного вектор-оператора (набла) $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$).

Диференціальним рівнянням рівноваги рідини можна надати іншого вигляду, помноживши (2.1) – (2.3) відповідно на dx , dy і dz , і додавши почленно утворені рівняння:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0,$$

або

$$\boxed{F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{1}{\rho} dp}, \quad (2.4)$$

де dp — повний диференціал функції $p = p(x, y, z)$.

Рівняння (2.4) являє собою **ще одну форму диференціального рівняння рівноваги**.

Поверхні рівного тиску $p = \text{idem}^*)$ називаються поверхнями рівня. Уздовж поверхонь рівня $dp = 0$, звідки випливає, що вони задовольняють рівнянню

$$\boxed{F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0} \Rightarrow (\vec{F}, d\vec{l}) = 0,$$

тобто в будь-якій точці векторного елемента поверхні рівня $d\vec{l} = \{dx, dy, dz\}$ відповідні вектори взаємно ортогональні: $\vec{F} \perp d\vec{l}$, а певна поверхня рівня в цілому нормальна до рівнодіючої масових сил.

Зокрема, поверхнею рівня є вільна поверхня рідини у будь-якій ємності, де $p = p_0$.

Усі поверхні рівня в одній і тій самій рідині є **конгруентними** (тобто, при суміщенні їх вони б повністю уклалися одна в одну).

Слід зауважити, що диференціальні рівняння (2.1) – (2.4) є однаково справедливими як для малостисливих (практично нестисливих) краплинних рідин, так і для газів.

*) Латинське слово **idem** означає «теж саме», «однакове».

2.3. Основне рівняння гідростатики

Розглянемо рівновагу краплинної рідини під дією самої лише сили тяжіння (рис. 6).

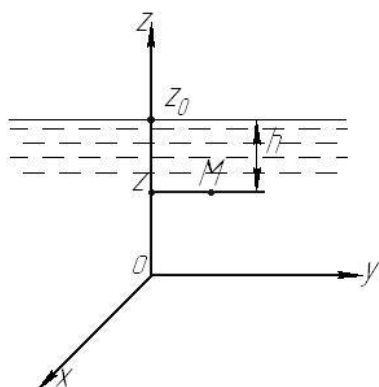


Рис. 6.

У цьому разі одиничні масові сили

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -g$$

і рівняння (2.4) набере вигляду

$$-g dz = \frac{1}{\rho} dp.$$

Інтегруючи це рівняння для нестисливої рідини, знаходимо

$$p + \rho g z = \text{const}.$$

Сталу інтегрування знайдемо з умови $p = p_o$ на вільній поверхні при $z = z_o$:

$$p + \rho g z = p_o + \rho g z_o.$$

Позначивши через $h = z_o - z$ глибину занурення точки M під вільною поверхнею, маємо

$$\boxed{p = p_o + \rho g h}. \quad (2.5)$$

Рівняння (2.5) називається **основним рівнянням гідростатики**. З нього випливають:

- 1) відомий закон Паскаля: тиск, прикладений до поверхні краплинної рідини, передається в усі точки однаково; 2) парадокс Галілея: тиск на дно посудини залежить не від форми її стінок, а лише від глибини розміщення дна відносно вільної поверхні h та тиску p_o на неї.

2.4. Відносна рівновага рідини

Абсолютна рівновага передбачає рівновагу відносно Землі, відносна — спокій рідини відносно системи відліку, яка рухається рівноприскорено. Прикладами відносної рівноваги є рівновага рідини в цистерні, яка рухається прямолінійно зі сталим прискоренням, а рідина покоїться відносно стінок, а також рівновага рідини в посудині, що рівномірно обертається (діє доцентрове прискорення).

У випадку відносної рівноваги до масових сил слід включати переносні сили інерції.

Для рідини, що обертається разом із циліндричною посудиною (рис. 7), це **відцентрова сила** $\vec{F}_u = \{\omega^2 x, \omega^2 y, 0\}$ (до одиниці маси), оскільки радіус-вектор $\vec{r} = \{x, y, 0\}$, $\omega = \text{const}$ — кутова швидкість.

Крім того, на кожну рідку частинку діє одинична **сила тяжіння**, що дорівнює $F_z = -g$.

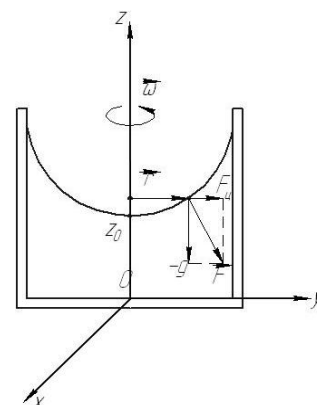


Рис. 7.

Спочатку з'ясуємо, яку форму приймають поверхні рівня в обертовій рідині, зокрема вільна поверхня. Запишемо диференціальне рівняння поверхні рівня з урахуванням зазначених вище масових сил:

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0.$$

Невизначений інтеграл цього рівняння

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz = C,$$

де в даному випадку z – поточна апліката будь-якої точки вільної поверхні.

Сталу інтегрування знайдемо, виходячи з **граничної умови**: для точки вільної поверхні на осі обертання маємо $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, $z = z_0$. Підстановка цих значень в попередню формулу дає $C = -gz_0$. Тоді остаточно ця формула приймає вигляд, що відповідає квадратичній параболі

$$z - z_0 = h = \frac{\omega^2 r^2}{2g}; \quad r^2 = |\vec{r}|^2 = x^2 + y^2, \quad (*)$$

Таким чином, для рідини, що обертається разом з циліндричною посудиною, поверхнями рівня є **параболоїди обертання**, форма яких залежить від кутової швидкості.

Тепер знайдемо розподіл тиску в обертовій рідині. Диференціальне рівняння рівноваги набуває вигляду:

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = \frac{1}{\rho} dp.$$

Інтегруючи за умови $p = p_0$ при $x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$ у точці A вільної поверхні на осі обертання, знаходимо

$$p = p_0 + \rho g \left(\omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2g} + z_0 - z \right),$$

де z – поточна апліката будь-якої точки в об'ємі рідини (рис. 7').

Отримана формула відповідає **основному рівнянню гідростатики**, оскільки, як бачимо з урахуванням (*), вираз в дужках є глибиною занурення по вертикалі будь-якої точки відносно вільної поверхні.

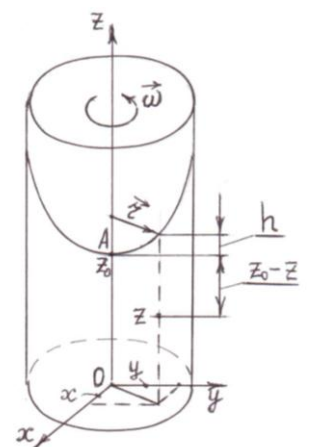


Рис. 7'.

Нагадаємо, що всі поверхні рівня в одній і тій самій рідині (зокрема, параболоїди в обертовій посудині) є **конгруентними**. Також важливою властивістю поверхонь рівня (зокрема й вільної поверхні) є перпендикулярність їх елементів до головних векторів масових сил.

2.5. Основи газостатики

Нехай рідина, що є ідеальним газом, перебуває в **баротропній** (тобто коли $\rho = \rho(p)$) рівновазі в полі сили тяжіння ($F_x = F_y = 0, F_z = -g$).

Тоді, з урахуванням рівняння Клапейрона $\frac{p}{\rho} = RT$, диференціальне рівняння рівноваги $F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{1}{\rho} dp$ зводиться до вигляду

$$-g dz = \frac{dp}{\rho} RT.$$

Зінтегруємо це рівняння, вважаючи, що на рівні z_0 земної поверхні тиск $p = p_0$, а також що при не надто великих висотах газового стовпа (атмосфери) R і g є незмінними:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_{z_0}^z \frac{dz}{T},$$

звідки отримаємо так звану «**барометричну формулу**»:

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{g}{R} \int_{z_0}^z \frac{dz}{T}\right).$$

Наприклад, приймаючи, що газовий стовп є ізотермічним $T = T_0 = \text{const}$ і $z_0 = 0$, отримаємо:

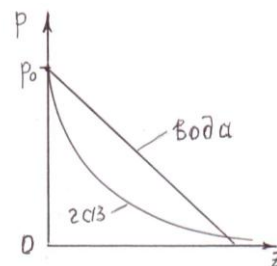
$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{gz}{RT_0}\right),$$

або, враховуючи закон Бойля-Маріотта, приходимо до співвідношень

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \exp\left(-\frac{\rho_0 gz}{p_0}\right).$$

Знайдені формули, що подають зв'язок тиску й густини газу з висотою, називаються **формулами Галлея**, що відображають експоненціальний закон (спадну експоненту), на відміну від лінійної залежності (2.5) для краплинної (практично нестисливої) рідини.

Наведемо схематичне порівняння розподілів тиску за висотою в нестисливій рідині (лінійний закон) та в газі (спадна експонента) $\rightarrow$



Як видно, зміна тиску з висотою в газоподібному середовищі є більш різкою порівняно з лінійною залежністю для краплинної рідини.

Запитання для самоперевірки до розділу 2

1. Чому дорівнюють дотичні напруження в рідині при її рівновазі?
2. Що таке гідростатичний тиск?
3. У чому полягає основана властивість гідростатичного тиску в точці рідини?
4. Принцип виведення і фізичний зміст диференціальних рівнянь рівноваги рідини.
5. Що таке поверхня рівня? Диференціальне рівняння поверхні рівня.
6. Як зорієнтована рівнодійна масових сил щодо поверхні рівня?
7. У чому полягають закон Паскаля і парадокс Галілея?
8. Що розуміють під абсолютною і відносною рівновагою рідини?
9. Опишіть форму поверхонь рівня в рідині, яка рівномірно обертається в циліндричній посудині.
10. Чи є справедливим основне рівняння гідростатики для рідини при відносному її спокої?
11. Опишіть рівновагу ідеального газу в полі сили тяжіння.
12. Яка модель рівноваги називається баротропною?

3. КІНЕМАТИКА РІДИНИ

Підходи Лагранжа й Ейлера. Поле швидкостей в потоці. Лінії течії. Гідравлічні елементи потоку. Витрата й середня швидкість. Рівняння нерозривності в гідравлічній формі. Режим течій рідини. Прискорення рідкої частинки. Диференціальні рівняння нерозривності.

[1. с. 35-43, 61-64, 242-245; 2. с. 27-41; 3. с. 24-31, 38-40, 164-169; 4. с. 42-50, 113-115]

Кінематика вивчає закономірності руху частинок рідини й газу в просторі та часі. Принципова відмінність кінематики рідини від кінематики абсолютно твердого тіла: під час руху рідини відстань між сусідніми частинками не зберігається.

3.1. Способи вивчення руху рідини

Спосіб Лагранжа передбачає спостереження за окремими рідкими частинками, координати, швидкості та прискорення яких змінюються. За способом Ейлера досліджуються зміни швидкостей, прискорень, тиску, а також густини рідини в окремих фіксованих точках чи областях простору з рухомою рідиною. Поширенішим є спосіб Ейлера, який у поєднанні з гіпотезою неперервності відкриває значні можливості для застосування різних математичних методів дослідження потоків.

Потік рідини — сукупність рідких частинок, що рухаються в просторі. Розподіли векторів швидкості частинок, а також температури, тиску, густини рідини від точки до точки в різних перерізах потоку визначають відповідні **поля** (або **профілі**) цих параметрів в кожний момент часу. Якщо зазначені поля не залежать від часу, то течія називається **стаціонарною** або **усталеною**. Якщо за таких умов профілі є незмінними вздовж потоку від перерізу до перерізу, то течія вважається **стабілізованою**.

3.2. Лінії течії

Найважливіше поняття кінематики — лінія течії (лінія току). З курсу математичного аналізу відомо, що таке векторна лінія. Векторна лінія векторного поля швидкостей $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ руху рідини і являє собою лінію течії.

Лінія течії — це лінія в просторі, у кожній точці якої в даний момент часу вектори швидкості **різних** частинок 1, 2, 3, ... рідини напрямлені по дотичних до цієї лінії (рис. 8).

Зауважимо, що при нестаціонарному русі (кінематичні параметри якого в різних точках простору залежать від часу)

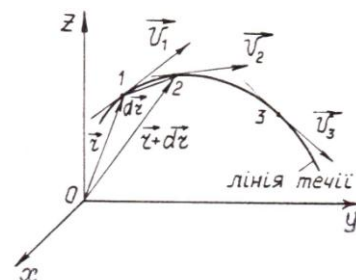


Рис. 8.

лінія течії відрізняється від траєкторії — сліду, утвореного в результаті руху даної частинки. Наприклад, очевидно, що певна рідка частинка у вільному неусталеному струмені, який витікає назовні з отвору резервуара по мірі зменшення рівня рідини в ньому, при русі по своїй траєкторії у будь-який момент часу належить різним лініям течії. Вони збігаються з траєкторією лише тоді, коли рух стаціонарний, або усталений (нагадуємо, коли у фіксованих точках простору швидкості, тиск, густина, температура рідини не змінюються за часом).

Щоб дістати **диференціальні рівняння лінії течії**, слід скористатися властивістю колінеарності її векторного елемента $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ і вектора швидкості $\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$: $d\vec{r} \parallel \vec{v} \Rightarrow [\vec{v}, d\vec{r}] = 0$, $[\vec{v}, d\vec{r}] = 0$, оскільки $\sin(\vec{v}, d\vec{r}) = 0$, звідки випливає

$$\boxed{\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}}. \quad (3.1)$$

Не можна плутати (3.1) з рівняннями траєкторії руху частинки: $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt$,

які відображають рух **окремої** рідкої частинки в просторі за нескінченно малий час dt .

3.3. Гідравлічні елементи потоку

Поверхня течії утворена сукупністю ліній течії через певну незамкнену лінію L .

Трубка течії. Візьмемо в рідині замкнений контур C і проведемо через кожен його точку лінію течії. Утворена трубчаста поверхня називається трубкою течії, а частина потоку, що міститься всередині цієї трубки, — рідкою струминкою.

Елементарна струминка. Частина потоку рідини, обмежена трубкою течії, що спирається на нескінченно малий контур, називається елементарною струминкою.

Постулюються дві важливі властивості елементарної струминки:

- 1) частинки рідини, що належать елементарній струминці, не залишають її, а ті, що знаходяться поза струминкою, до струминки не потрапляють;
- 2) у межах перерізу струминки параметри течії (зокрема, швидкість) незмінні від точки до точки цього перерізу.

Живим перерізом (S або, як іноді позначають, ω) називається поверхня в товщі потоку, нормальна до всіх ліній течії.

Змочений периметр (χ) - протяжність твердих меж живого перерізу.

Гідравлічний радіус дорівнює відношенню площі живого перерізу до змоченого периметру: $R_r = S/\chi$.

Гідравлічний (еквівалентний) діаметр дорівнює почетвереному гідравлічному радіусу: $D_r = 4S/\chi$.

Слід розрізняти **напірні** й **безнапірні** потоки, а також струмені. Напірні потоки заповнюють всі поперечні перерізи каналу з тиском, відмінним від тиску навколишнього середовища. При стабілізованому напірному русі рідини в трубі кожний живий переріз потоку збігається з геометричним перерізом.

Рух рідини у відкритих руслах чи каналах і трубах з утворенням вільної поверхні називається безнапірним. Струмені обмежені лише рідким чи газоподібним середовищем.

Для напірного руху у круглій трубі гідравлічний діаметр збігається з геометричним:

$$D_r = d.$$

3.4. Витрата. Середня швидкість рідини

Витрата — кількість рідини, що протікає через живий переріз за одиницю часу.

Залежно від того, у яких фізичних величинах вимірюється кількість рідини, розрізняють об'ємну, масову й вагову витрати. Якщо V , m і G — об'єм, маса і вага рідини, що протікає за час t через живий переріз, то відповідно визначаємо:

об'ємну витрату

$$Q = \frac{V}{t}, \quad \frac{m^3}{c}, \frac{m^3}{\text{год}}, \frac{л}{\text{хв}}; \quad (3.2)$$

масову витрату

$$Q_m = \frac{m}{t} = \frac{\rho V}{t} = \rho Q, \quad \text{кг/с}; \quad (3.2')$$

вагову витрату

$$Q_G = \frac{G}{t} = \frac{mg}{t} = gQ_m = \rho g Q, \quad \text{Н/с, кгс/с}. \quad (3.2'')$$

Щоб знайти залежність витрати від швидкості течії v , розглянемо елементарну об'ємну витрату рідини dQ через площинку dS живого перерізу елементарної струминки:

$$dQ = v dS, \quad \frac{m}{c} \cdot m^2 = \frac{m^3}{c}.$$

Повна витрата через живий переріз S цілого потоку обчислюється інтегруванням:

$$Q = \iint_S v dS. \quad (3.3)$$

Щоб знайти масову витрату, слід помножити підінтегральний вираз на густину ρ :

$$Q_m = \iint_S \rho v dS, \text{ кг/с.} \quad (3.4)$$

Нарешті, вагова витрата дорівнює

$$Q_G = \iint_S \gamma v dS = g \iint_S \rho v dS, \text{ Н/с.} \quad (3.5)$$

Уведемо поняття середньої швидкості v_{cp} потоку в живому перерізі S . За визначенням вона умовно прийнята однаковою від точки до точки перерізу, тоді її можна винести за інтеграли в (3.3) та отримати

$$Q = v_{cp} \iint_S dS = v_{cp} \cdot S.$$

Звідси маємо зв'язок середньої швидкості з об'ємною витратою:

$$\boxed{v_{cp} = \frac{Q}{S}}, \text{ м/с,} \quad (3.6)$$

або

$$v_{cp} = \frac{1}{S} \iint_S v dS, \quad (3.7)$$

що відображає відому з математики «теорему про середнє».

Щодо зв'язку середньої швидкості з масовою та ваговою витратами, то маємо очевидні вирази:

$$v_{cp} = \frac{Q_m}{\rho S}, \quad v_{cp} = \frac{Q_G}{\rho g S}.$$

3.5. Рівняння нерозривності в гідравлічній формі

Візьмемо два перерізи потоку нестисливої рідини. Ґрунтуючись на першій властивості кожної елементарної струминки, можна записати

$$dQ_1 = dQ_2 \quad \text{або} \quad v_1 dS_1 = v_2 dS_2.$$

Інтегруючи за відповідними перерізами S_1 і S_2 цілого потоку та користуючись законом збереження маси для нестисливої рідини, маємо

$$\iint_{S_1} v_1 dS_1 = \iint_{S_2} v_2 dS_2.$$

Вводячи середні швидкості за перерізами, запишемо

$$\boxed{v_{cp1} S_1 = v_{cp2} S_2}, \quad (3.8)$$

або

$$v_{cp} S = const. \quad (3.9)$$

Вирази (3.8) і (3.9) являють собою **рівняння нерозривності для потоку нестисливої рідини в гідравлічній формі**.

У випадку стислої рідини рівняння нерозривності має вигляд

$$\rho v_{cp} S = const. \quad (3.10)$$

Висновки

1) З рівняння нерозривності для потоку нестисливої рідини у формі (3.8) дістанемо

$$\frac{v_{cp2}}{v_{cp1}} = \frac{S_1}{S_2},$$

тобто середні швидкості за перерізами потоку нестисливої рідини обернено пропорційні площам перерізів.

2) З рівняння нерозривності для двох перерізів потоку стислої рідини — газу

$$\rho_1 v_{cp1} S_1 = \rho_2 v_{cp2} S_2$$

впливає, що потік можна прискорювати не тільки за рахунок зміни площі поперечного перерізу каналу (для дозвукових потоків зменшуючи S), а також за рахунок зменшення густини рідини ($\rho_2 < \rho_1$) при $S_1 = S_2$ — підведенням до газу теплоти. Але в газовій динаміці доведено, що підводом теплоти можна розігнати потік в циліндричному каналі тільки до швидкості, яка дорівнює місцевій швидкості звуку в газі (таку швидкість газу називають **критичною** і вводять позначення $v_* = a_*$). При подальшому підігріванні газу в циліндричному каналі швидкість потоку не збільшується. Ніяким підігрівом не можна перевести потік в надзвуковий ($v > a$) внаслідок виникнення так званого «**теплого опору**», або «**теплого замикання каналу**», оскільки зростання кількості підведеної теплоти q призводить до значного приросту ентропії $\left(\Delta s = \int_1^2 \frac{\delta q}{T} \right)$ і, отже, підвищених втрат енергії через необоротність термодинамічного процесу. До того ж, як ми дізнаємося пізніше, із зростанням швидкості потоку стислого газу температура його може зменшуватися, що також підвищує ентропію і, відповідно, втрати енергії.

3.6. Режими течії рідини

У дослідах Осборна Рейнольдса (1883 р.) ламінарний (розшарований, упорядкований) і турбулентний (хаотичний, не впорядкований) режими течії визначалися візуально за поведінням тонкого струменя фарби, що вводилася в потік рідини у скляних трубках.

При **ламінарній течії** (лат. *lāmina* – «шар»), тобто пошаровій, без перемішування та пульсацій частинок, струмінь фарби переміщується паралельно стінкам труби і можна виділити стаціонарні траєкторії руху окремих частинок потоку (рис. 9,а). Із збільшенням швидкості вздовж струменя заявляються хвилі, бо ламінарна течія втрачає стійкість (рис. 9,б). При подальшому збільшенні швидкості струмінь фарби зникає, замість нього тече рівномірно зафарбована рідина внаслідок хаотичної зміни в просторі і часі траєкторій руху частинок. Такий режим течії називається **турбулентним** (лат. *turbulentus* – бурхливий, безладний).

Таким чином, характерною особливістю турбулентної течії є поява в різних точках нерегулярних поперечних і поздовжніх пульсацій швидкості та інтенсивне перемішування шарів рідини.

Поздовжні швидкості, зазнаючи хаотичних пульсацій, все ж зберігають деяке середнє значення.

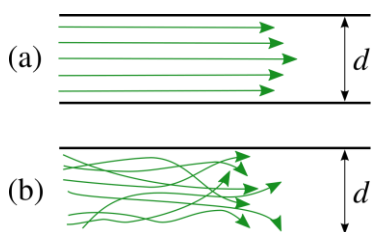


Рис. 9. Схематичне зображення ламінарної течії (а) та втрати її стійкості (б).

Як з'ясував Рейнольдс, режим течії залежить від величини **безрозмірного** комплексу параметрів, який пізніше відомий фізик Зоммерфельд назвав **числом Рейнольдса**:

$$\text{Re} = \frac{v_{cp} d}{\nu}, \quad (3.11)$$

де $v_{cp} = Q/S$ – середня за перерізом швидкість потоку; d – діаметр труби; ν – кінематична в'язкість рідини, яка залежить, головню, від температури. У загальному випадку для каналу некруглого перерізу замість d береться певний характерний лінійний розмір — найчастіше, гідравлічний діаметр, для крил чи лопатей турбомашин — хорда профілю як відстань між найбільш віддаленими точками, для поздовжньо обтічної пластини — її довжина і т.п.

Значення числа Рейнольдса, при якому відбувається перехід від одного режиму течії до іншого, називаються критичними.

Розрізняють нижнє ($Re_{кр}^H$) і верхнє ($Re_{кр}^6$) критичні значення числа Re .

Якщо $Re < Re_{кр}^H$, течія стійко ламінарна. Перехід від ламінарної течії до турбулентної може відбуватися в межах $Re_{кр}^H < Re < Re_{кр}^6$.

У цьому проміжку може існувати ламінарна течія, але вона нестійка. Будь-яке збурення, наприклад удар по трубі, може перетворити течію на турбулентну.

Якщо $Re > Re_{кр}^6$, течія завжди турбулентна. Зворотний перехід турбулентної течії в ламінарну відбувається, як правило, при $Re \leq Re_{кр}^H$. Для напірних течій $Re_{кр}^H \approx 2000$, $Re_{кр}^6 \approx 5 \cdot 10^4$. При $Re < Re_{кр}$ течію вважають ламінарною, а при $Re > Re_{кр}$ — турбулентною.

В інженерній практиці розрахунків трубопроводів використовується **одне критичне значення**: $Re_{кр} = 2320$ (за Шіллером і, практично, Рейнольдсом), оскільки в реальних конструкціях гідросистем і гідромашин завжди існують джерела збурення течії, наприклад місцеві мікро- і макровідриви потоку від обтічних стінок, вібрації їх, пульсації течії тощо. Для турбулентного потоку внаслідок хаотичного, випадкового характеру зміни місцевих миттєвих («актуальних») швидкостей течії згідно з «теоремою про середнє» в окремих точках простору вводяться усереднені за часом місцеві швидкості:

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{v}(t) dt, \quad (3.12)$$

де T – період усереднення; $\vec{v}(t)$ – миттєве значення швидкості, яке уявляють як суму

$$\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}', \quad (3.13)$$

де $\vec{v}'$ – пульсаційна швидкість (рис. 10).

Рисунок містить модулі швидкості.

Епюри усереднених швидкостей в **стабілізованому** ламінарному потоці мають вигляд параболи, а в турбулентному — "сплющеної" параболи за усередненими в часі швидкостями (як дізнаємося згодом, з логарифмічним профілем в ядрі потоку) (рис.11).

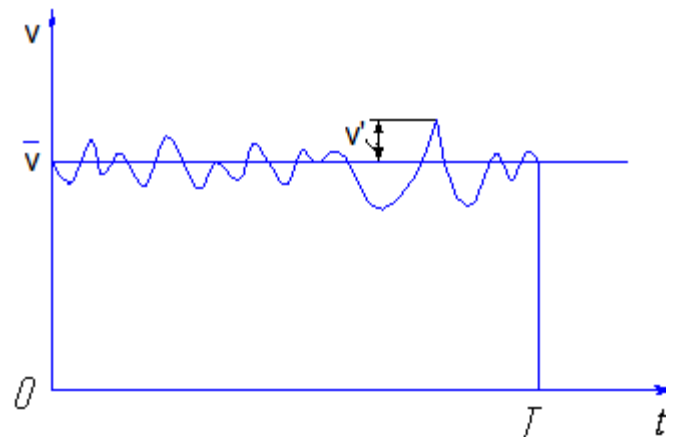


Рис. 10.

Стабілізований рух в трубах і каналах будь-якої форми перерізу настає тоді, коли після деформації якимось джерелом збурення (коліном, вентилем тощо) епюра (профіль) швидкості, завдяки наступній прямій і достатньо довгій ділянці гідродинамічної стабілізації, вже не змінює своєї форми при подальшому русі рідини і відповідає класичній формі, притаманній ламінарному чи турбулентному режиму течії (див. рис. 11).

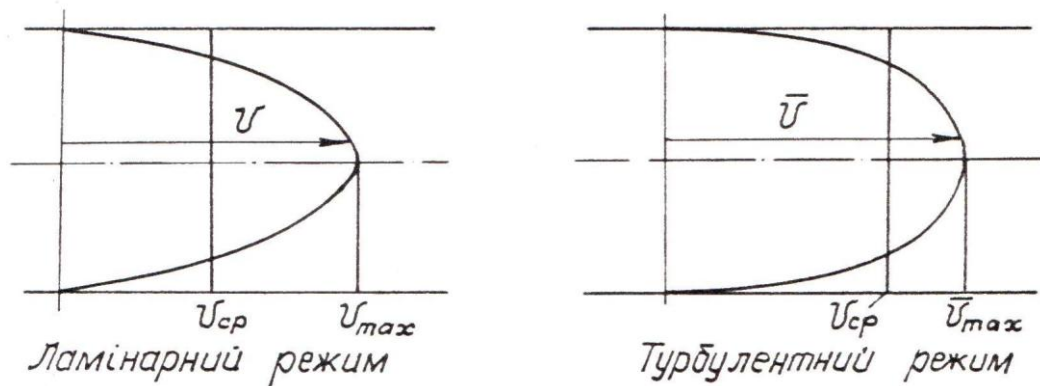


Рис. 11.

При стабілізованому русі рідини в трубі в ламінарному потоці $v_{cp} = 0,5v_{max}$,

а в турбулентному $v_{cp} = (0,75 \div 0,9)\bar{v}_{max}$. Як і в (3.12), риска (крім стрілки позначення

вектора) над літерою означає усереднення швидкості за часом при турбулентній течії.

Зауважимо, що в турбулентному потоці поблизу стінок завжди є тонка область в'язкого підшару з малими значеннями швидкості в цій області. На самій стінці при будь-якому режимі, виключаючи течію сильно розріджених газів, маємо умову $v = 0$, оскільки через явище адгезії спостерігається прилипання рідини до стінки («умова прилипання»).

3.7. Прискорення рідкої частинки

Коли вивчається прискорення індивідуальної рідкої частинки, доводиться звертатися до формули диференціювання швидкості як складеної функції часу t : $\vec{v} = \vec{v}[x(t), y(t), z(t), t]$. У векторній формі прискорення визначається як

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Розглянемо проекцію вектора прискорення на вісь Ox :

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Аналогічно можна отримати інші проекції прискорення на осі Oy і Oz :

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z};$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

В узагальненому векторному вигляді маємо:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \equiv \frac{D\vec{v}}{Dt}, \quad (3.14')$$

де, як бачимо, застосовано символічний вектор-оператор «набла» $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$.

Позначення похідної у вигляді $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ увів Д. Г. Стокс, запропонувавши називати її **субстанціональною** (або матеріальною, або індивідуальною в деяких редакціях) з огляду на те, що така похідна зв'язана з рухомою матерією або субстанцією. Але написання саме символів субстанціональної похідної у наведеному вище вигляді або у вигляді повної похідної не є принциповим. Головне — розуміти зміст такої похідної.

Перший доданок називається **локальним** прискоренням; воно відмінне від нуля тільки для неусталених (нестационарних) рухів, коли швидкість (а також тиск і густина) залежить від часу явно.

Інші три доданки становлять разом **конвективне**, або переносне, прискорення. Воно існує завжди, крім випадку стабілізованого прямолінійного руху рідини зі сталою швидкістю.

Субстанціональна похідна застосовується також для скалярних функцій, наприклад для густини ρ , температури T , ентропії s тощо. Наприклад, зміну абсолютної температури в часі і просторі для рухомої індивідуальної рідкої частинки можна записати у вигляді

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla T).$$

3.8. Диференціальні рівняння нерозривності

Закон збереження маси може описуватися в МРГ рівняннями нерозривності (неперервності) у різних формах.

Щоб дістати рівняння нерозривності в диференціальній формі, потрібно виділити деякий об'єм рідини V , обмежений поверхнею S .

Якщо відсутні джерела-стоки, то зміна маси рідини внаслідок зміни густини у виділеному об'ємі V і потік маси через поверхню S у сумі мають дорівнювати нулю з міркувань збереження матеріального балансу:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho v_n dS = 0, \quad (3.15)$$

де v_n — проекція вектора швидкості на зовнішню нормаль до елементарної площадки поверхні S .

Другий інтеграл перетворюється за допомогою формули Остроградського-Гаусса

$$\iint_S \rho v_n dS = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV.$$

Тоді рівняння збереження маси (3.15) набуває вигляду:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0.$$

Оскільки об'єм V обирався довільним, то маємо

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0}. \quad (3.16)$$

Цей вираз являє собою **рівняння нерозривності в диференціальній формі** для нестационарного руху стисливої рідини.

Якщо рідина нестислива, то $\rho = \text{const}$ і рівняння нерозривності набуває вигляду

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}, \quad (3.17)$$

або

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.18)$$

Вводячи вектор-оператор ∇ , (3.18) можна записати у вигляді

$$\operatorname{div} \vec{v} = (\nabla, \vec{v}) = 0.$$

У випадку стаціонарного руху ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) стисливої рідини ($\rho = \text{var}$ в просторі)

диференціальне рівняння нерозривності записується так:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Запитання для самоперевірки до розділу 3

1. У чому полягає відмінність рухів абсолютно твердого тіла та рідини?
2. Охарактеризуйте підходи Лагранжа й Ейлера до вивчення течій рідини.
3. Що таке лінія течії?
4. Чим відрізняється лінія течії від траєкторії руху рідкої частинки?
5. Запишіть диференціальне рівняння лінії течії.
6. Що таке стаціонарний та нестационарний рух рідини?
7. Що таке трубка течії?
8. Елементарний струмінь, його основні властивості.

9. Дайте означення живого перерізу та змоченого периметра потоку.
10. Як знайти гідравлічні радіус та діаметр потоків?
11. Види потоків та їх коротка характеристика.
12. Що таке витрата рідини?
13. Які види витрат вам відомі?
14. Пов'яжіть окремі види витрат між собою.
15. Що таке середня за перерізом швидкість потоку в трубі?
16. Поясніть рівняння нерозривності в гідравлічній формі для потоків стисливої й нестисливої рідин.
17. Які режими течій рідини вам відомі? Охарактеризуйте їх.
18. Що таке число Рейнольдса?
19. Критичні значення числа Re , їх застосування.
20. Принцип усереднення швидкостей в турбулентному потоці.
21. Що таке місцеві миттєві та пульсаційні швидкості турбулентної течії?
22. Накресліть епюри усереднених швидкостей в стабілізованих ламінарному та турбулентному потоках в трубі. Як пов'язані середні й максимальні швидкості?
23. Що таке субстанціальна похідна параметрів течії? Наведіть приклади її.
24. Назвіть складові прискорення рідкої частинки.
25. Принцип виведення, зміст і форми запису диференціального рівняння нерозривності.

4. ДИНАМІКА ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ

Модель ідеальної рідини. Рівняння Л.Ейлера руху ідеальної рідини. Початкові та крайові умови. Інтеграли Бернуллі та Ейлера. Фізичний зміст і геометрична Інтерпретація рівнянь Бернуллі та Ейлера – Бернуллі.

[1, с.85-95, 130-133, 482-484; 2, с.106-113; 3, с.46-63; 4, с.62-74; 7, с.89-92]

Динаміка — розділ механіки рідини і газу, який вивчає зв'язок між рухом рідини та зовнішніми силами, що його зумовили.

4.1. Модель ідеальної рідини

Ідеальна рідина - це гіпотетична рідина, якій не притаманна в'язкість і теплопровідність. Введення такої моделі виправдане двома обставинами:

1) для малов'язких рідин, таких як вода й повітря, численні висновки з розвинутої теорії ідеальної рідини в багатьох випадках задовільно узгоджуються з практикою, особливо на певних відстанях від обтічних поверхонь;

2) результати, знайдені для ідеальної рідини, в потрібних випадках можна уточнити введенням поправочних коефіцієнтів або додаткових доданків.

4.2. Рівняння Л. Ейлера динаміки ідеальної рідини

Щоб вивести рівняння руху ідеальної рідини стосовно одиниці її маси, скористаємося відомим з теоретичної механіки принципом Д'Аламбера: у кожний момент руху будь-якої матеріальної системи всі сили, що прикладені до неї, включаючи й сили інерції, взаємно зрівноважуються:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \vec{a} = 0, \quad (*)$$

де $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ — вектор одиничної даламберової сили інерції (з протилежним знаком), або

вектор прискорення; $\vec{F}$, $\frac{1}{\rho} \text{grad} p$ — вектори одиничних сил: масової і поверхневої (сили тиску) відповідно.

Розв'язуючи рівняння (*) відносно прискорення, дістанемо **рівняння руху ідеальної рідини Л. Ейлера** у векторній формі:

$$\boxed{\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{d\vec{v}}{dt}}. \quad (4.1)$$

Поділяючи даламберову силу інерції рідкої частинки на локальну і конвективну частини, рівняння Л. Ейлера можна подати у вигляді

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v}. \quad (4.2)$$

За допомогою рівняння Л. Ейлера можна описати рух як стисливої, так і нестисливої рідин.

Спроекуємо рівняння (4.2) на осі координат

$$\begin{cases} F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Ця система рівнянь руху ідеальної рідини є **нелінійною** (через конвективні сили інерції) і містить в загальному випадку стисливої рідини 5 невідомих: v_x, v_y, v_z, p, ρ .

Щоб виконати замикання системи рівнянь, потрібно для нестисливої рідини звернутися до рівняння нерозривності, а для стисливої — ще й до рівняння стану (наприклад, для термічно ідеального газу — рівняння Клапейрона $\frac{p}{\rho} = RT$).

4.3. Початкові і крайові умови

Математичні моделі задач гідрогазодинаміки складаються не тільки з диференціальних рівнянь, а ще й з початкових та крайових (граничних) умов.

Початкові умови задаються лише для нестационарних рухів і полягають у завданні розподілів параметрів потоку в початковий момент часу. Наприклад, для нестисливої рідини задаються початкові (в момент часу t_0) розподіли швидкостей і тиску, що позначають як

$$\vec{v}(x, y, z, t_0) = \vec{v}^0(x, y, z);$$

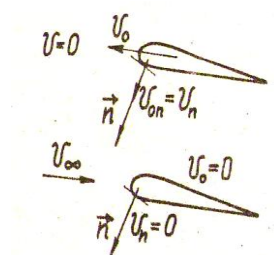
$$p(x, y, z, t_0) = p^0(x, y, z).$$

Крайові умови потрібні при вивченні як стаціонарних, так і нестационарних рухів. Крайові умови поділяються на кінематичні й динамічні.

Кінематичні крайові умови накладають обмеження на швидкості течії. **Динамічні крайові умови** у загальному випадку пов'язують тиск і швидкість.

Важливим видом крайових умов є **умова непротікання і безвідривного обтікання** тіла (рис. 12, верхня частина рисунку відповідає рухомому тілу, нижня — нерухомому).

Фізично ця умова означає рівність нормальних проекцій швидкості руху кожної точки тіла та нормальних швидкостей частинок рідини, що прилягають до тіла: $U_{0n} = U_n$.



Якщо тіло нерухоме, а потік, що набігає на нього, має швидкість U_∞ , то нормальні проекції швидкості частинок рідини вздовж обтічного тіла є відсутніми: $U_n = 0$. У цьому разі контур тіла при плоскому обтіканні є лінією течії (нульовою).

Рис. 12.

Особливим видом крайових умов є **умова на нескінченності**. У випадку нерухомої рідини на нескінченності $U = 0$, а у випадку, коли потік набігає на тіло, $U = U_\infty$.

Прикладом найпростішої динамічної умови є умова на вільній поверхні $p = p_0$.

4.4. Інтеграли Бернуллі та Ейлера

Ці інтеграли й відповідні їм рівняння являють собою фундаментальні співвідношення механіки рідини і газу.

Розглядається стаціонарний рух ідеальної нестисливої рідини. Припускається, що зовнішні масові сили мають потенціал (силову функцію) U :

$$\vec{F} = \text{grad}U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z},$$

тобто проекції одиничних масових сил дорівнюють $F_x = \partial U / \partial x$, $F_y = \partial U / \partial y$, $F_z = \partial U / \partial z$.

Рівняння руху Л. Ейлера інтегруються вздовж лінії течії, яка в даному випадку збігається з траєкторією (елемент якої $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$), оскільки рух стаціонарний.

Запишемо перше з рівнянь Ейлера (4.3), лекція № 7, і помножимо обидві частини його на проекцію векторного елемента певної лінії течії $dx = v_x dt$:

$$F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot (dx = v_x dt);$$

$$F_x dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z dt \right);$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \right).$$

Оскільки вираз в дужках для стаціонарного руху є повний диференціал dv_x , то останнє рівняння можна записати для нестисливої рідини ($\rho = \text{const}$) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) dx = d \left(\frac{v_x^2}{2} \right). \quad (4.4)$$

Аналогічні перетворення після множення другого з рівнянь (4.3) на $dy = v_y dt$ і третього на $dz = v_z dt$ приведуть до співвідношень

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) dy = d \left(\frac{v_y^2}{2} \right); \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) dz = d \left(\frac{v_z^2}{2} \right). \quad (4.6)$$

Додавши співвідношення (4.4) – (4.6), дістанемо

$$d\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right) = 0.$$

Звідки випливає, що вздовж ліній течії

$$\boxed{U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} = C(\psi)}, \quad (4.7)$$

де параметр ψ ідентифікує лінію течії, тобто величина C є сталою для певної лінії течії, але змінюється від однієї лінії течії до другої (іноді ψ не указують, але мають на увазі).

Це співвідношення називається **інтегралом Данієла Бернуллі**.

Зокрема, у випадку дії сил тяжіння $dU = F_z dz = -g dz$ і $U = c - gz$, звідки дістанемо рівняння Д. Бернуллі для стаціонарного руху нестисливої рідини вздовж лінії течії

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C. \quad (4.8)$$

Інтеграл Бернуллі виражає закон збереження енергії при русі ідеальної рідини. При цьому співвідношення (4.7) і (4.8) записані для одиниці маси. Якщо взяти на лінії течії дві точки, то можна записати рівняння Бернуллі у вигляді

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}}. \quad (4.9)$$

Це співвідношення виражає збереження питомої енергії (одиниці ваги) в ідеальній нестисливій рідині при її стаціонарному русі.

Зауважимо, що інтеграл Бернуллі можна дістати й для **баротропних течій** стисливих рідин, тобто коли $\rho = \rho(p)$. Тоді замість p/ρ розглядається функція тиску Громеки

$$P = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} \text{ і інтеграл Бернуллі набуває вигляду } U - P - \frac{v^2}{2} = C(\psi).$$

Можна показати, що коли течії безвихрові (потенціальні), константа Бернуллі не залежить від ліній течії і залишається однаковою для будь-якої точки в потоці. Відповідний інтеграл називається **інтегралом Ейлера**. Якщо підставити в нього вирази для потенціалу масових сил, поданих лише силами тяжіння, можна дістати **рівняння Ейлера-Бернуллі** для стаціонарного безвихрового руху нев'язкої нестисливої рідини [13]. За виглядом воно аналогічне рівнянню Бернуллі (4.8) або (4.9), але на відміну від нього виконується для всіх точок потоку рідини, тобто $C \neq f(\psi)$.

4.5. Фізичний зміст і геометрична інтерпретація рівнянь Бернуллі та Ейлера-Бернуллі

1. У рівнянні Бернуллі величина

$$E = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$$

являє собою питому механічну енергію (одиниці ваги) рідини, або **повний гідродинамічний напір** у деякій точці лінії течії, $Dж/H=м$. При цьому перші два доданки

$z + \frac{p}{\rho g} = \Pi$ становлять питому потенціальну енергію, або **гідростатичний напір**

(п'єзометричний напір — якщо замість абсолютного тиску p підставити надлишковий

(манометричний) тиск $p_n \equiv p_m$), а $\frac{v^2}{2g} = K$ — питому кінетичну енергію, або **швидкісний**

напір. Потенціальна енергія одиниці ваги рідини, у свою чергу, складається з питомої потенціальної енергії положення, або **геометричного напору**, що характеризується

величиною z , і питомої потенціальної енергії тиску $\frac{p}{\rho g}$, м.

Фізичний зміст рівняння Бернуллі полягає в тому, що питома механічна енергія рідини, яка являє собою суму потенціальної та кінетичної енергій, в усіх точках даної лінії течії незмінна при стаціонарному русі ідеальної нестисливої рідини.

Оскільки в такому разі лінії течії збігаються з траєкторіями руху частинок, то рівняння Бернуллі (4.9) справджується для будь-якої частинки ідеальної нестисливої рідини на всьому шляху її стаціонарного руху вздовж своєї траєкторії. Даниїл Бернуллі дістав це рівняння (1738 р.) за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії, застосованої до елементарної струминки.

Щоб дати наочне геометричне тлумачення членів рівняння Бернуллі, які мають розмірність висоти, в усталеному напірному потоці виділяють елементарну струминку, віссю якої є лінія течії, з двома перерізами 1–1 та 2–2 (рис. 13). На вертикалях, які

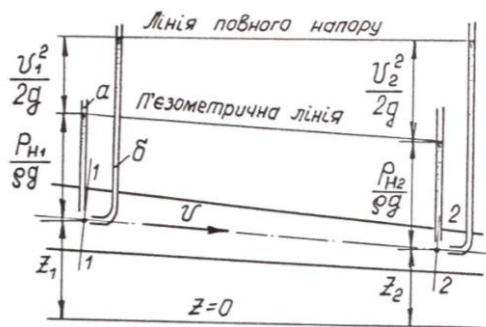


Рис. 13.

проходять через центри живих перерізів, можна послідовно відкласти такі висоти відносно нульової площини відліку $z = 0$:

геометричні z_1 , і z_2 ; п'єзометричні $\frac{p_{n1}}{\rho g}$ і $\frac{p_{n2}}{\rho g}$ (за показами скляних трубок – п'єзометрів “а”, які сполучаються з атмосферою); швидкісні $\frac{v_1^2}{2g}$ і $\frac{v_2^2}{2g}$ (різниця показів трубок повного напору Піто “б” і

п'езометрів "а").

Геометричний зміст рівняння Бернуллі полягає в тому, що в разі стаціонарного руху ідеальної нестисливої рідини сума трьох висот — геометричної, п'езометричної та швидкісної — вздовж ліній течії залишається сталою.

2. Фізичний і геометричний зміст членів рівняння Ейлера-Бернуллі, яке справджується в усьому безвихровому потоці ідеальної рідини, такий самий, як і членів рівняння Бернуллі.

Рівняння (4.8) можна записати «в тисках»: $\rho g z + p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0$, де $p = p_{ст}$ називають **статичним тиском**, вираз $\frac{\rho v^2}{2} = p_{дин}$ — **динамічним тиском**, а праву частину p_0 — **повним тиском**, або **тиском гальмування** (в даному випадку, нестисливої рідини).

Замість п'езометрів і трубок Піто значно більше для вимірювання швидкісних напорів придатні **трубки Піто-Прандтля** [1; 7], які встановлені на літальних апаратах та судах для вимірювання швидкості руху, а також застосовуються в аерогідродинамічних дослідженнях при вимірюваннях локальних і усереднених за часом швидкостей.

На рис. 13' зображено приклад вимірювання трубкою Піто-Прандтля місцевих швидкостей в повітряному потоці густиною $\rho_{пов}$. Імпульси повного і статичного тисків сприймає диференціальний манометр, заповнений спиртом густиною $\rho_{сп}$. Для визначення місцевої швидкості v в точці установки носика трубки запишемо коректну умову балансу тисків, що відповідає рівновазі системи «повітря—рідина диференціального манометра»:

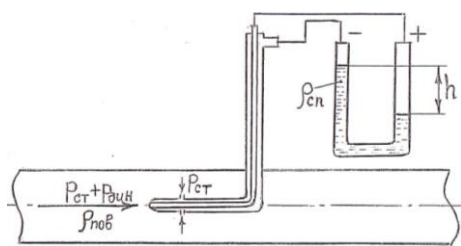


Рис. 13'.

$$p_{ст} + \frac{\rho_{пов} v^2}{2} + \rho_{пов} g h = \rho_{сп} g h + p_{ст},$$

звідки швидкість дорівнює

$$v = \sqrt{2gh \left(\frac{\rho_{сп}}{\rho_{пов}} - 1 \right)}, \text{ м/с.}$$

Запитання для самоперевірки до розділу 4

1. В чому полягає модель ідеальної рідини та чи можливе її застосування?
2. Який принцип лежить в основі виведення рівняння руху ідеальної рідини?
3. Запишіть і охарактеризуйте рівняння руху ідеальної рідини у векторній та координатній формах.

4. Які рівняння застосовуються для замикання системи диференціальних рівнянь руху?
5. Які умови однозначності при розв'язуванні систем диференціальних рівнянь гідромеханіки ви знаєте?
6. У чому полягають і в яких випадках висуваються початкові умови?
7. Які крайові умови вам відомі?
8. Сформулюйте умови непротікання і безвідривності обтікання для рухомого і нерухомого тіл в рідині.
9. Як формуються крайові умови "на нескінченності"?
10. Охарактеризуйте динамічні крайові умови при розв'язуванні задач гідромеханіки.
11. Зінтегруйте рівняння руху Ейлера вздовж лінії течії для стаціонарного руху ідеальної нестисливої рідини.
12. Перетворіть інтеграл Бернуллі (4.7) для випадку, коли на нестисливу рідину з масових сил діє тільки сила тяжіння.
13. Який фундаментальний закон виражає собою інтеграл Бернуллі?
14. Запишіть і поясніть рівняння Бернуллі для двох точок лінії течії.
15. Чи є сталим тричлен інтеграла Бернуллі для різних ліній течії?
16. Який вигляд має інтеграл Бернуллі для лінії течії при баротропному стаціонарному русі стислої рідини?
17. Охарактеризуйте інтеграл Ейлера.
18. У чому є фізичний і геометричний зміст рівнянь Бернуллі та Ейлера-Бернуллі?
19. Що таке статичний, динамічний та повний тиск в потоці нестисливої рідини?

5. ЕЛЕМЕНТИ ГІДРАВЛІКИ (ДИНАМІКИ ОДНОВИМІРНИХ ПОТОКІВ В'ЯЗКОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ)

Рівняння Д. Бернуллі. Коефіцієнт кінетичної енергії. Гідравлічні втрати напору.

Вимірювання витрати рідини за перепадом тиску.

[1, с. 95-101, 108-116; 2, с. 93-95, 145-160; 3, с. 179-190, 206-209; 4, с. 111-115, 172-179]

Рух реальної (в'язкої) рідини в гідросистемах часто можна розглядати в одновимірному наближенні. Наведемо енергетичні оцінки характеристик стаціонарних течій.

5.1. Рівняння Бернуллі для елементарної струминки в'язкої рідини

При стаціонарному русі реальної рідини від точки 1 до точки 2 вздовж лінії течії (струминки) внаслідок впливу в'язкості частина енергії витрачається на подолання гідравлічного опору руху. Ця «втрачена» енергія перетворюється в теплову і розсіюється в навколишньому просторі (має місце так звана **дисипація** механічної енергії).

Тому вниз за течією повний напір зменшується і рівняння балансу питомої енергії (його називають часто рівнянням Бернуллі для елементарної струминки в'язкої рідини) набуває вигляду

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_g \quad (5.1)$$

де h_g – втрата напору на подолання опору.

5.2. Рівняння Бернуллі для потоку в'язкої нестисливої рідини

У перерізі окремої елементарної струминки швидкість течії вважається сталою, проте для потоку в цілому як сукупності елементарних струминок місцеві швидкості U (усереднені за часом для турбулентного режиму) за живим перерізом неоднакові.

Відмінність відповідного істинного значення кінетичної енергії K потоку від обчисленого за середньою швидкістю в даному перерізі значення K_{cp} оцінюється коефіцієнтом кінетичної енергії (**коефіцієнтом Коріоліса**):

$$\alpha = \frac{K}{K_{cp}} = \frac{1}{v_{cp}^3 S} \iint_S v^3 dS \quad (5.2)$$

Тоді рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини можна записати у вигляді

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{cp1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{cp2}^2}{2g} + h_g. \quad (5.3)$$

Для вибраних розрахункових перерізів 1 і 2 мають виконуватися умови плавної змінюваності течії. Водночас між цими перерізами потік може бути й не плавно змінюваним. При цьому доданок h_g включає всі витрати напору на шляху потоку від першого перерізу до другого.

Коефіцієнт Коріоліса α характеризує ступінь нерівномірності реального розподілу швидкості за живим перерізом потоку, тому залежить від режиму течії, від форми поперечного перерізу каналу та конфігурації його вздовж течії. Для стабілізованих ламінарного та турбулентного потоків цей коефіцієнт становить відповідно $\alpha_L = 2$, $\alpha_T = 1,025 \dots 1,13$, або в середньому $\alpha_T \approx 1,1$. Якщо $v = v_{cp} = \text{const}$ (прямокутна епюра швидкості), то $\alpha = 1$.

5.3. Гідравлічні втрати напору (загальна характеристика)

Втрати напору зумовлені подоланням таких гідравлічних опорів:

1) опору тертя за довжиною каналів — дотичних в'язкісних напружень у ламінарному потоці, а також в'язкісних і додаткових турбулентних напружень, спричинених пульсаціями швидкості у турбулентному потоці при рівномірному в середньому русі в каналах сталого перерізу;

2) місцевих опорів, спричинених різкими деформаціями епюр швидкостей, місцевими відривами потоку від стінок з вихороутворенням та інтенсивним перемішуванням рідини на ділянках, де конфігурація каналів змінюється.

Експериментальним шляхом втрати напору на будь-якій ділянці трубопроводу, в тому числі з місцевим опором, можна визначити з рівняння (5.3) як різницю питомих енергій на початку та в кінці ділянки

$$h_g = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{cp1}^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{cp2}^2}{2g} \right),$$

або почленно:

$$h_g = (z_1 - z_2) + \left(\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} \right) + \left(\frac{\alpha_1 v_{cp1}^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_{cp2}^2}{2g} \right).$$

Таким чином, для експериментального визначення втрат напору досить виміряти різницю висот $z_1 - z_2$ положень центрів ваги поперечних перерізів потоку над площиною порівняння, різницю показів п'єзометрів $\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{m1}}{\rho g} - \frac{p_{m2}}{\rho g}$, а також різницю

швидкісних напорів у відповідних перерізах $\frac{\alpha_1 v_{cp1}^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_{cp2}^2}{2g}$. У випадку, коли рідина тече в горизонтальній ділянці ($z_1 = z_2$) змінного поперечного перерізу, втрати напору визначаються як

$$h_g = h_m = \left(\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} \right) + \frac{\alpha_1 v_{cp1}^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_{cp2}^2}{2g}.$$

Використання останніх формул ускладнюється необхідністю урахування величин коефіцієнта кінетичної енергії α у вхідному та вихідному перерізах досліджуваної ділянки трубопроводу, що передбачало б вимірювання в них просторових профілів швидкості в лабораторних умовах. При відсутності такої можливості на практиці приймається **припущення** $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$ в зазначених перерізах, що дає тим меншу похибку, чим більше значення числа Рейнольдса (нагадаємо, що у **стабілізованому** турбулентному потоці в круглій трубі $\alpha \approx 1,025 \dots 1,13$, причому нижня межа відповідає більшим величинам числа Рейнольдса).

Якщо вивчається **стабілізована** течія в горизонтальній трубі сталого перерізу ($v_{cp} = \text{const}$), то навіть за умов $\alpha \neq 1$ останнє рівняння дозволяє визначити втрати напору на тертя по довжині труби виключно за показами п'єзометрів:

$$h_g \equiv h_{mp} = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{m1}}{\rho g} - \frac{p_{m2}}{\rho g}.$$

Розрахункове визначення усіх втрат напору здійснюється за однотипною формулою, яка подає їх у частках швидкісного напору, визначеного за середньою в характерному перерізі швидкістю:

$$h_g = \zeta \frac{v_{cp}^2}{2g}, \quad (5.4)$$

де ζ - коефіцієнт втрат напору (гідравлічного опору), віднесений до того ж самого характерного перерізу, для якого визначена середня швидкість.

У випадку втрат напору на тертя (h_{mp}) за довжиною L каналу будь-якої форми поперечного перерізу (круглої, кільцевої, прямокутної ...) – так званих «**шляхових втрат**»:

$$h_g = h_{mp}, \quad \zeta = \lambda \frac{L}{D_r}, \quad (5.5)$$

де λ - коефіцієнт гідравлічного тертя, який тією чи іншою мірою залежить від числа Рейнольдса, форми поперечного перерізу каналу, а в турбулентному потоці - також від

відносної шорсткості каналу. Підстановка (5.5) у (5.4) дає відому в гідравліці **формулу Дарсі-Вейсбаха**.

У випадку місцевих втрат напору $h_g = h_m$, $\zeta = \zeta_m$ і формулу (5.4) називають **формулою Вейсбаха**. Коефіцієнт місцевого опору ζ_m залежить від геометрії меж каналу, а також (меншою мірою) від числа Re (величини ζ_m знаходять в довідниках).

Розв'язуючи внутрішню задачу гідромеханіки для систем трубопроводів, повні втрати напору знаходять за принципом накладання (суперпозиції) втрат

$$h_g = \sum_{i=1}^n h_{mpi} + \sum_{j=1}^m h_{mj},$$

де підсумовування відбувається відповідно за прямолінійними i -ми ділянками рівномірного руху і за j -ми ділянками місцевих опорів. Цей спосіб не враховує взаємного впливу (**інтерференції**) місцевих опорів, тому його слід вважати наближеним. Для деякої компенсації отриманої похибки на практиці отриманий за останньою формулою результат збільшують на 15–20%, що важливо для забезпечення певного енергетичного запасу при правильному виборі насосів або компресорних машин відповідно для подачі рідин і газів по трубопроводах.

5.4. Розрахунок втрат напору на тертя за довжиною труб

В інженерних розрахунках гідравлічних систем втрати напору на тертя за довжиною («шляхових втрат») будь-якої труби здійснюють за допомогою **формули Дарсі-Вейсбаха**

$$h_l = \lambda \frac{L}{d} \frac{v_{cp}^2}{2g}, \quad (5.6)$$

де $v_{cp} = Q/S$ — середня швидкість рідини в трубі; λ — коефіцієнт гідравлічного тертя.

Величина λ за фізичним змістом істотно відрізняється від коефіцієнта тертя для твердих тіл, коли сили тертя діють виключно на поверхні контакту тіл і залежать від нормального тиску. У потоці рідини різні її шари (при ламінарному русі) і різні елементарні об'єми — «рідкі частинки», особливо при турбулентному русі, рухаються з різною швидкістю і на різних відстанях від стінок, тому сили тертя мають різний механізм і розподіл за простором у межах потоку.

При ламінарному режимі течії рідини дотичні напруження τ_μ обумовлені лише **молекулярною або фізичною в'язкістю** рідини та визначаються вже відомим нам **законом тертя Ньютона**.

В турбулентному потоці дотичні напруження молекулярної природи τ_μ домінують тільки у безпосередній близькості до стінки (у достатньо тонкому так званому **«в'язкому підшарі»**, підгальмованому силами взаємного притягання між молекулами твердої стінки і рідини, а також між молекулами самої рідини). Товщина δ в'язкого підшару залежить від величини Re і наближено визначає товщину плавного обтікання виступів шорсткості поверхні.

Як ми знаємо, в **«турбулентному ядрі»** турбулентного потоку крім переміщення рідини в напрямку основної течії з деякою середньою швидкістю має місце неупорядкований від шару до шару пульсаційний рух рідких частинок з відповідним обміном кількістю руху, в результаті чого виникають **турбулентні дотичні напруження** $\tau_t > \tau_\mu$.

Поміж в'язким підшаром і турбулентним ядром потоку існує деяка **перехідна (так звана «буферна») зона** максимального породження турбулентності, у якій в'язкі й турбулентні напруження порівнювані між собою за величиною.

Таким чином, в турбулентних потоках переважне значення мають втрати енергії, що виникають у результаті перемішування рідини.

У загальному випадку втрати енергії на подолання сил тертя залежать від середньої швидкості рідини, її в'язкості, діаметра труби d (або гідравлічного діаметра каналу D_r), тобто від числа Рейнольдса $Re = v_{cp} d / \nu$ (або $Re = v_{cp} D_r / \nu$ для не круглоциліндричної труби), де $\nu = \mu / \rho$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості, від форми поперечного перерізу каналу, а також від відносної шорсткості внутрішньої поверхні трубопроводу. Це відображається функціональними залежностями вигляду

$$\lambda = f(Re, \Delta/d) \text{ (або } \lambda = f(Re, \Delta/D_r)), \quad (5.7)$$

де Δ – абсолютна еквівалентна шорсткість стінки труби, тобто висота виступів еквівалентної рівнозернистої шорсткості стінки, що забезпечує однаковий із реальною шорсткістю гідравлічний опір при тих самих довжині труби та середній швидкості потоку (у першому наближенні Δ – середня висота виступів шорсткості обтічної поверхні); Δ/d (або Δ/D_r) – відносна шорсткість поверхні. Для металевих труб еквівалентна шорсткість складає 0,5–0,7 максимальної висоти виступів природної шорсткості. В розрахунках можна приймати для сталених суцільнотягнутих (безшовних) труб: нових $\Delta \approx 0,02 \div 0,2 \text{ мм}$, після декількох років експлуатації $\Delta \approx 0,15 \div 0,3 \text{ мм}$.

При ламінарному русі рідини, а також турбулентному, але при відносно невеликих значеннях числа Re (так звана зона «гідравлічно гладкого тертя») вплив відносної шорсткості на коефіцієнт гідравлічного тертя λ вироджується, і $\lambda = \lambda(Re)$. При дуже великих величинах Re (зона «цілком шорсткого тертя») — навпаки: вироджується вплив числа Re на коефіцієнт λ , і $\lambda = \lambda(\Delta/d)$ (або $\lambda = \lambda(\Delta/D_r)$). В проміжному діапазоні чисел Re турбулентної течії (зоні «змішаного тертя») залишається найбільш загальний випадок, що відповідає залежностям вигляду (5.7).

Розглянемо це докладніше щодо стаціонарного стабілізованого руху в'язкої рідини в круглій циліндричній трубі. При будь-якому режимі течії швидкість руху рідини безпосередньо на стінці дорівнює нулю (виконується так звана умова «прилипання» частинок на стінці): $v_{cm} = 0$.

При ламінарному режимі найближчий до поверхні труби шар рідини досить плавно й повільно ковзає по прилиплим до стінки рідким частинкам. Інші шари рідини рухаються теж плавно, приблизно паралельно один одному, але із взаємним зсувом, тобто з характерним градієнтом поздовжньої швидкості по нормалі до стінки. Згідно з законом тертя Ньютона цей градієнт швидкості спричиняє появу сил в'язкості усередині рідини. Таким чином, при ламінарному русі має місце тільки тертя між шарами рідини, тому й коефіцієнт гідравлічного тертя λ залежить тільки від числа Рейнольдса та не залежить від

шорсткості обтічних поверхонь. Для круглої циліндричної труби є справедливою **формула Пуазейля**

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (5.8)$$

При турбулентному режимі течії характер функціональних залежностей (5.7) визначається співвідношенням між товщиною в'язкого підшару δ та (наближено) середньою висотою виступів шорсткості Δ стінки.

При цьому можливі три випадки (по мірі зростання чисел Re):

1) $\delta \gg \Delta$, тобто в'язкий підшар повністю покриває виступи шорсткості, а турбулентне ядро потоку ніби ковзає по в'язкому підшару (так звана «гладкостінна течія»). Ці умови спостерігаються при $4000 \leq Re \leq 20d/\Delta$ (на практиці часто приймають наближено при $2320 < Re \leq 10^5$), де d/Δ – відносна гладкість поверхні. Шорсткість стінки не впливає на втрати напору на тертя, тому труби в такій зоні руху рідини називаються «гідравлічно гладкими». Коефіцієнт λ може бути визначений, наприклад, за **формулою Блазіуса**

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}. \quad (5.9)$$

Більш точно в діапазоні $2320 \leq Re \leq 4000$ справедлива **формула Френкеля**

$$\lambda = 2,7 / Re^{0,53}.$$

2) $\delta \approx \Delta$, тобто товщина в'язкого підшару сумірна з висотою виступів шорсткості. Це спостерігається при $20d/\Delta < Re \leq 500d/\Delta$. Виступи шорсткості як погано обтічні геометричні неоднорідності все більше виходять за межі в'язкого підшару, це спричиняє додаткові вихороутворення і перемішування рідини, що збільшує втрати напору. Тому в цій зоні руху коефіцієнт λ залежить як від Re , так і від відносної шорсткості Δ/d . Таку зону називають перехідною, або «**зоною змішаного тертя**», що відповідає «доквадратичному закону опору». З достатньою для практики точністю коефіцієнт гідравлічного тертя в цій зоні визначається, наприклад, **формулою Альтшуля**

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}. \quad (5.10)$$

Значення числа Re початку перехідної зони (верхня межа гідравлічно гладкої зони) тим менше, чим більша відносна шорсткість стінки труби.

3) $\delta \ll \Delta$, що має місце при $Re > 500d/\Delta$. В'язкий підшар при великих Re значною мірою зруйновано і турбулентне ядро потоку практично досягає шорсткої стінки. При цьому посилюється вихороутворення за кожним виступом шорсткості, тому вплив сил

молекулярної в'язкості, а отже, числа Re , на характеристики течії та втрати напору стає зникаюче малим. Це є «зона турбулентної автомодельності за числом Рейнольдса», або «зона квадратичного закону опору», з огляду на квадратичну залежність $h_l \propto v_{cp}^2$ при $\lambda \neq \lambda(Re)$ (див. формулу (5.6)). В цій зоні коефіцієнт λ залежить тільки від відносної шорсткості (або від відносної гладкості d/Δ), тому труби називають «**цілком шорсткими**», або «**гідравлічно шорсткими**». Одною з найбільш зручних і достатньо точних для практики формул щодо таких труб є **формула Шифринсона**

$$\lambda = 0,11(\Delta/d)^{0,25}, \quad (5.11)$$

яка широко використовується в котельній техніці.

В інженерних розрахунках по визначенню опору тертя для всіх трьох зон турбулентного режиму течії можна використовувати формулу Альтшуля як достатньо універсальну, яка за умов гідравлічно гладких і цілком шорстких труб практично збігається з формулами (5.9) та (5.11) відповідно.

Треба пам'ятати, що застосування всіх наведених формул є цілком коректним лише для стабілізованих течій, які формуються в трубі з плавним входом тільки після початкової ділянки, довжина якої приблизно визначається наступним чином: для ламінарного режиму $L_{cm} \approx 0,029 Re \cdot d$ (наприклад, при $Re = 2000$: $L_{cm} \approx 60d$); для турбулентного режиму $L_{cm} \approx (30 \div 40)d$. В інших випадках формулами можна користуватися у деякому наближенні, втім яке є достатнім для більшості практичних розрахунків.

Першим системно дослідив вплив числа Рейнольдса і відносної шорсткості труб на їх опір **І. Нікурадзе** (Геттінген, Німеччина, 1932-1933 р.р.), але його дослідження (див. [1–7,13]) проводилися не для промислових труб, а для модельних гладких труб зі штучно рівномірно нанесеною піщиною шорсткістю $\Delta \equiv k$ (тобто труб з $r/k = \text{var}$, r – радіус).

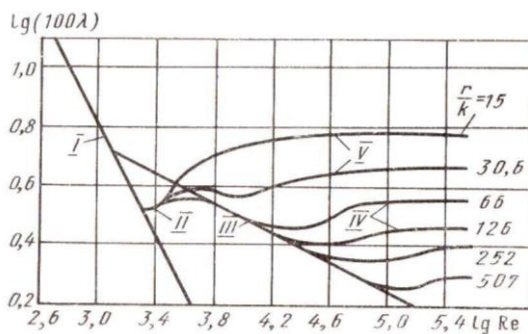


Рис.14. Графік І. Нікурадзе (лінії апроксимують дослідні точки при $Re = \text{var}$ і $r/k = \text{var}$)

Нікурадзе виявив, що рух рідини в гладких і шорстких трубах при різних режимах течії можна розділити на 5 характерних областей (рис. 14):

I – $\log Re \leq 3,3$ (або $Re \leq 2300$) – область ламінарного режиму (пряма **I** на графіку відповідає рівнянню $\lg \lambda = \lg 64 - \lg Re$); **II** – $3,3 < \lg Re < 3,6$ – перехідна область, що характеризується стрибкоподібним переходом від ламінарного режиму до турбулентного і навпаки (ця область практич-

ного значення не має); **III** – $\lg Re > 3,6$ – в гладких (в гідравлічному розумінні) трубах область турбулентного режиму (на графіку пряма **III** відповідає рівнянню $\lg \lambda = \lg a - n \lg Re$, де a і n – коефіцієнти); **IV**, **V** – перехід від гладких труб до шорстких, що відповідає залежності $\lambda = f(Re, r/k)$; **V** – $4,6 \leq \lg Re$ – рух рідини в гідравлічно шорстких трубах, коли існує тільки залежність $\lambda = f(r/k)$.

Для технічних труб з неоднорідною шорсткістю хід кривих на графіку для λ в зоні змішаного тертя дещо відрізняється від даних І. Нікурадзе, але наведені нами вище формули (5.9) – (5.11) враховують неоднорідність шорсткості і цілком придатні для розрахунків гідравлічного опору саме технічних трубопроводів (стальних, чавунних тощо).

5.5. Місцеві опори

Як зазначалось вище, місцеві опори спричинені, головним чином, процесами різкого перерозподілу полів швидкості в рідині, відривом потоку від стінок та вихроутворенням у зонах зміни конфігурації труб і будь-яких каналів, а також, частково, силами тертя на цих ділянках.

Приклади таких ділянок (рис. 15): плавний поворот труби (закруглене коліно) або «відвід» (рис. 15,а); різкий поворот — «просте» або «гостре коліно» (рис. 15,б); поступове розширення трубопроводу (рис. 15,в) (має назву «дифузор» при дозвуковій течії); поступове звуження трубопроводу (рис. 15,г) («конфузор» — при дозвуковій течії); раптові розширення та звуження трубопроводу (рис. 15,д,е); дросельний пристрій — діафрагма (рис. 15,є); запірні та регулюючі арматури (засувки, крани, вентиля, заслінки, клапани, дроселі, затвори) тощо. На рис. 15, 16 поперечні перерізи позначено як $\omega \equiv S$.

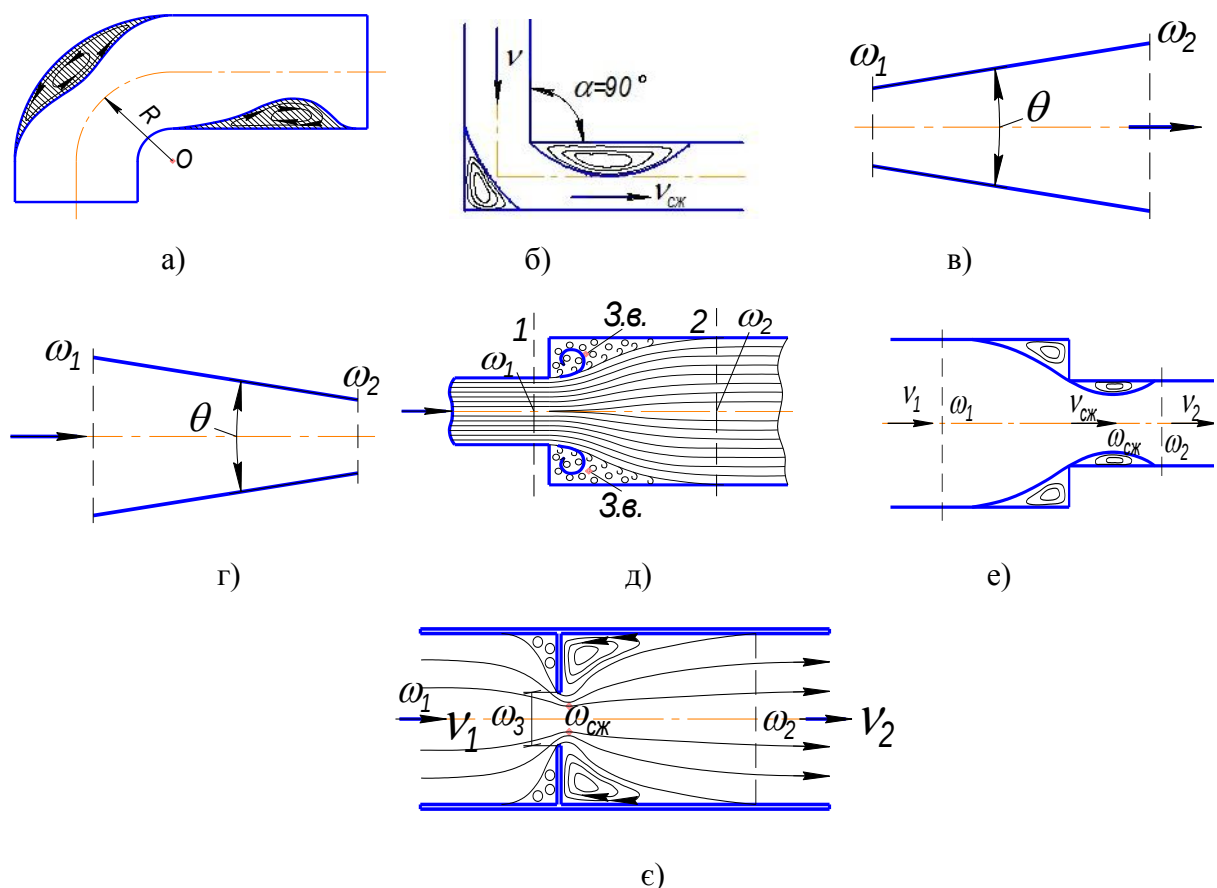


Рис. 15.

У наведених прикладах схематично показано деякі типові зони відриву (З. в.) та вихороутворення в потоці. Вони суттєво ускладнюють структуру течії, призводячи до взаємодії вихорів як між собою, так і з основним потоком, до інтенсифікації процесів

змішування рідини і турбулентної дифузії, що головним чином і спричиняє місцеві втрати напору в трубопровідних системах.

Розрахункове визначення місцевих втрат напору на будь-якій фасонній ділянці трубопроводу здійснюється за допомогою **формули Вейсбаха**, згідно з якою втрати енергії виражено у частках швидкісного напору (як і в формулі Дарсі-Вейсбаха):

$$h_m = \zeta_j \frac{v_{cpj}^2}{2g}, \quad (5.12)$$

де $v_{cpj} = Q/S_j$ — середня швидкість рідини у вхідному ($j=1$) чи вихідному ($j=2$) поперечних перерізах площею S_j досліджуваної ділянки трубопроводу; ζ_j — коефіцієнт місцевого опору, віднесений до відповідного перерізу j (тобто у загальному випадку, коли $S_1 \neq S_2$, існує два значення коефіцієнта місцевого опору: ζ_1 — відносно вхідного перерізу ділянки, та ζ_2 — відносно її вихідного перерізу, причому $\zeta_1 \neq \zeta_2$).

Важливо підкреслити: взаємна відповідність значень ζ_j та v_{cpj} , що підкреслено одним індексом j , має сенс лише для місцевих опорів змінного поперечного перерізу. Для ділянок з $S_1 = S_2$, тобто при $v_{cp1} = v_{cp2}$, задача спрощується: $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$.

Значення коефіцієнтів місцевих опорів в залежності від геометричних параметрів відповідної ділянки трубопроводу та числа Рейнольдса наводяться в гідравлічних довідниках. Слід зауважити, що наведені у довідниках величини коефіцієнтів місцевих опорів, а також формули та графіки для визначення їх відповідають випадкам, коли в ділянку місцевого опору входить стабілізований потік із сформованим при даному режимі течії профілем швидкості, а вихідний переріз ділянки розташовано на відстані, де під дією сил в'язкості наближено відбулося відновлення епюри швидкості, що була деформована місцевим опором.

На ділянці раптового розширення трубопроводу (див. рис. 13,д) втрати напору, за умов нехтування деформаціями епюр швидкості у вхідному та вихідному перерізах, теоретично можуть бути визначені згідно з **теоремою Борда-Карно**:

$$h_{p.p} = \frac{(v_{cp1} - v_{cp2})^2}{2g}, \quad (5.13)$$

тобто: «втрати напору при раптовому розширенні дорівнюють швидкісному напору від втраченої швидкості» (v_{cp1} та v_{cp2} — середні швидкості руху рідини до та після раптового розширення).

Формула (5.13) дає задовільні результати в квадратичній зоні опору у випадку турбулентної течії, коли переріз 2 береться достатньо далеко за місцем розширення.

Втрати напору при раптовому розширенні іноді умовно називають втратами "на удар" через різке зменшення середньої швидкості.

Виділимо коефіцієнт втрат при раптовому розширенні $\zeta_{p.p.}$ щодо перерізу S_1 :

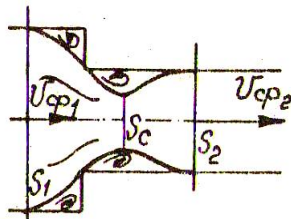
$$h_{p.p.} = \zeta_{p.p.} \frac{v_{cp1}^2}{2g}, \quad (5.14)$$

$$\text{де } \zeta_{p.p.} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2.$$

$$\text{Зокрема, якщо } S_2 \gg S_1, \quad \zeta_{p.p.} \approx 1, \quad h_{p.p.} \approx \frac{v_{cp1}^2}{2g}.$$

Застосовуючи аналогічний підхід до ділянки потоку між перерізами S_c та S_2 при раптовому звуженні трубопроводу (рис. 16), дістанемо

$$h_{p.z} = \zeta_{p.z} \frac{v_{cp2}^2}{2g}; \quad \zeta_{p.z} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2,$$



де $\varepsilon = S_c / S_2$ – коефіцієнт стиснення потоку.

Для практичних розрахунків використовується формула Ідельчика:

Рис. 16.

$$\zeta_{p.z} = 0,5 \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right). \quad (5.15)$$

Будь-яка різниця тисків, яка залежна від величини витрати середовища і така, що виникає на деякій ділянці трубопроводу внаслідок або гідравлічних втрат енергії (найчастіше на місцевих опорах), або перетворення потенціальної енергії в кінетичну (якщо поперечний переріз трубопроводу змінюється плавно), придатна для вимірювання витрати [1, с. 111 — 116].

Запитання для самоперевірки до розділу 5

1. Який вигляд має рівняння балансу питомої енергії при русі в'язкої нестисливої рідини вздовж лінії течії?
2. Як визначити питому кінетичну енергії рідини в живому перерізі потоку?
3. Який фізичний зміст і числові значення коефіцієнта Коріоліса для стабілізованих ламінарного і турбулентного потоків?
4. Запишіть рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини.
5. Які види гідравлічних опорів існують та яка їх фізична природа?

6. Як експериментальне визначити втрати напору в потоці на будь-якій ділянці трубопроводу?
7. Як розрахувати шляхові (на тертя) й місцеві втрати питомої енергії потоку рідини?
8. У чому полягає принцип накладання втрат напору?
9. Сформулюйте теорему Борда-Карно і орієнтовно визначте межі її застосовності.
10. Що таке коефіцієнт стиснення потоку?
11. Як наближено визначити втрати напору при раптовому звуженні каналу?
12. Які принципи вимірювання витрати рідини в трубопроводі за перепадом тиску вам відомі?

6. ПОТЕНЦІАЛЬНІ ТЕЧІЇ

Вихор вектора швидкості. Потенціал швидкості. Рівняння Лапласа. Еквіпотенціальні поверхні. Функція течії. Ортогональна сітка течії. Комплексний потенціал. Циркуляція швидкості. Найпростіші потенціальні течії. Парадокс Д'Аламбера-Ейлера і його значення. Формула Жуковського підйимальної сили. Постулат Жуковського – Чаплигіна.

[1, с.41-46, 158-183, 201-224; 2, с.225-260; 3, с.40-46, 63-105, 308-332; 4, с.50-56, 190-204]

Потенціальні течії – це безвихрові течії нев'язкої рідини. У строгому розумінні потенціальних течій у природі не існує. Проте за таких припущень розв'язування багатьох задач гідрогазодинаміки, особливо задач зовнішнього обтікання тіл, часто приводять до задовільних результатів. Потенціальність течії в'язкої рідини неможлива.

Далі розглядатиме потенціальний рух нестисливої рідини.

6.1. Потенціал швидкості

Вихором (ротором) вектора швидкості називається вектор

$$\text{rot } \vec{v} = [\nabla, \vec{v}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (6.1)$$

Якщо $\text{rot } \vec{v} = 0$, тобто рух **безвихровий**, тоді з (6.1) випливає, що існує така функція $\varphi(x, y, z)$ — так званий потенціал швидкості, що

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

і, відповідно,

$$\boxed{v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}} \quad (6.2)$$

з точністю до довільної сталої, оскільки при $\Phi = \varphi + C$: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Підставляючи в рівняння нерозривності

$$\text{div } \vec{v} = (\nabla, \vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

замість компонент швидкості їх вирази через потенціал швидкості (6.2), отримаємо рівняння Лапласа для потенціалу швидкості

$$\boxed{\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0}, \quad (6.3)$$

де $\Delta \equiv (\nabla, \nabla) = \nabla^2$ — оператор Лапласа.

Функція, що задовольняє рівнянню Лапласа, називається **гармонічною**. Таким чином, потенціал швидкості φ є гармонічною функцією і має відповідні властивості.

Поверхні однакового значення $\varphi(x, y, z) = C$ називаються еквіпотенціальними поверхнями («еквіпотенціалами»).

Вектор швидкості як градієнт потенціалу швидкості напрямлений вздовж нормалі до еквіпотенціальних поверхонь.

Завдяки застосуванню потенціалу швидкості вдається при розв'язуванні задач гідроаеродинаміки розглядати чисто кінематичну задачу визначення однієї функції потенціалу швидкості.

Для визначення розподілу тиску використовуватимуться рівняння руху Ейлера у формі інтеграла Ейлера.

6.2. Функція течії. Умови Коші – Рімана

Якщо картина течії рідини в будь-якій площині, паралельній площині xOy , є однаковою, то можна покласти $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z = 0$ (так звана плоска течія). При цьому потенціал швидкості задовольняє рівнянню Лапласа за двома змінними x, y :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Гармонічній функції φ можна поставити у відповідність **спряжену** до неї **гармонічну** функцію $\psi(x, y)$ — таку, що

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}. \quad (6.4)$$

Справедливість цих рівностей перевіряється простою підстановкою похідних (6.4) в рівняння Лапласа: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$. Крім того, існування функції ψ впливає (з точністю до довільної сталої) з диференціального рівняння нерозривності

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

якщо прийняти $\boxed{v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$. Порівняння цих виразів з (6.2) підтверджує (6.4).

Функція ψ називається функцією течії, оскільки зберігає стале значення вздовж ліній течії. Справді, з диференціального рівняння ліній плоскої течії $\frac{\partial x}{v_x} = \frac{\partial y}{v_y}$ випливає

$$v_y dx - v_x dy = -\frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -d\psi = 0.$$

Отже, вздовж ліній течії $\psi = \text{const}$.

Для плоскої потенціальної течії маємо підтвердження встановленого раніше факту:

$$\text{rot} \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \text{ або } \boxed{\Delta \psi = 0},$$

тобто функція течії ψ задовольняє рівняння Лапласа і, отже, є **гармонічною**.

Через взаємну спряженість функцій φ і ψ , сімейства еквіпотенціалей $\varphi = \text{const}$ і ліній течії $\psi = \text{const}$ утворюють *ортогональну* $(\varphi - \psi)$ -*сітку течії* на площині.

Умови (6.4) являють собою **умови Коші-Рімана**, тобто умови існування такої **аналітичної (регулярної) функції комплексної змінної**:

$$\boxed{W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)}, \quad (6.5)$$

$$(z = x + iy, \quad i^2 = -1),$$

яку називають **комплексним потенціалом** течії.

Будь яка однозначна функція $f(z)$ комплексної змінної z називається **аналітичною в точці z_0** , якщо вона диференційована в кожній точці деякого околу точки z_0 . Функція $f(z)$ називається **аналітичною в області D** , якщо вона аналітична в кожній точці цієї області.

Величина $\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - i v_y = \bar{v}$ називається **комплексно-спряженою**

швидкістю [використано властивість похідної $\frac{dW}{dz} : \frac{\partial W(z)}{\partial x} = \frac{dW(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$, де $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$;

аналогічно $\frac{\partial W(z)}{\partial (iy)} = \frac{dW(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial (iy)}$, де $\frac{\partial z}{\partial (iy)} = 1$].

Зауважимо, що в потенціальному потоці

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_{AB} d\varphi = \int_{AB} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) = \int_{AB} (v_x dx + v_y dy) = \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \Gamma_{AB},$$

де Γ_{AB} — **циркуляція швидкості** по контуру AB ;

$$\psi_B - \psi_A = \int_{AB} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \int_{AB} (v_x dy - v_y dx).$$

Якщо розглянути дуговий елемент ds живого перерізу одиничної висоти струминки між двома лініями течії ψ_1 і ψ_2 , то останній вираз можна записати так (рис. 17):

$$\begin{aligned} \psi_B - \psi_A &= \int_{AB} [v_x \cos \alpha \cdot ds - v_y (-\sin \alpha \cdot ds)] = \\ &= \int_{AB} (v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha) ds = \int_{AB} (v_x n_x^0 + v_y n_y^0) \cdot 1 \cdot ds = \int_{AB} \vec{v} \cdot \vec{n}^0 \cdot 1 \cdot ds = Q_{AB}, \end{aligned}$$

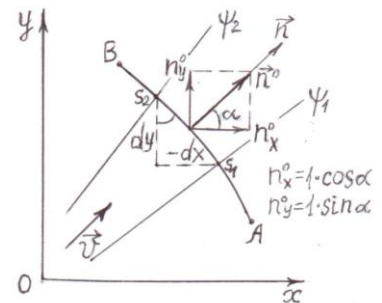


Рис. 17.

де Q_{AB} – об’ємна витрата поміж двома зазначеними лініями течії; $\vec{n}^o = \{n_x^o, n_y^o\}$ – одиничний вектор (орт) зовнішньої нормалі до площинки $1 \cdot ds$ живого перерізу елементарної струминки, причому $\cos \alpha \cdot ds = dy$, $\sin \alpha \cdot ds = -dx$; s_1 і s_2 – границі перерізу на його перетинах з лініями течії ψ_1 і ψ_2 .

Зауважимо, що величини циркуляції Γ_{AB} і витрати Q_{AB} не залежать від шляху, за яким здійснюється інтегрування.

В механіці рідини і газу щодо теорії потенціальних течій ставляться дві задачі:

1) по заданим контурам поверхонь обтічних тіл, стінок каналів і значенням швидкості v_∞ потоку, що набігає, треба побудувати картину $[(\varphi - \psi)\text{—сітку}]$ течії та знайти її комплексний потенціал;

2) по заданій функції $W(z)$ побудувати картину течії, тобто знайти функції φ, ψ , поле швидкості, а також поле тиску й сили, що виникають при обтіканні певних об’єктів.

Перша задача є значно складнішою і трудомісткою, тому в подальшому будемо вивчати картини важливих плоских потенціальних течій в межах і підходах другої задачі. При цьому треба відмітити певні переваги уведення функції $W(z)$: а) замість двох функцій двох змінних $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$, які описують плоску потенціальну течію сіткою $(\varphi - \psi)$, маємо одну функцію $W(z)$ одної змінної z , яка повністю характеризує течію; б) при завданні комплексного потенціалу $W(z)$ та виділенні його дійсної і уявної частин одразу визначаються функції φ і ψ , а за їх похідними по x і y – поле швидкості, яке можна знайти й безпосередньо з комплексно-спряженої швидкості $\bar{v} = \frac{dW(z)}{dz} = v_x - i v_y$ при врахуванні відповідних знаків.

Важлива властивість гармонічних функцій полягає в наступному:

якщо кожна з функцій $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ і $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ задовольняє диференціальне рівняння Лапласа, то і їх лінійні комбінації $\varphi = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + \dots$ і $\psi = B_1 \psi_1 + B_2 \psi_2 + \dots$, а також $\varphi + i\psi$, теж задовольняють це рівняння, тобто є гармонічними функціями.

Висновок: можна накладати потенціальні потоки один на другий, сумуючи відповідні функції $\varphi, \psi, W(z)$ простих потоків. В цьому полягає **принцип суперпозиції плоских потенціальних течій**, який дає можливість описувати більш складні картини течії.

6.3. Найпростіші плоскі потенціальні течії

6.3.1. Поступальний потік із сталою швидкістю

Розглянемо течію з комплексним потенціалом

$$W = (a + ib)z = (a + ib)(x + iy), \quad a, b \in \mathbf{R} \quad (a = \text{const}, b = \text{const}). \quad (6.6)$$

Розділяючи дійсну та уявну частини, знаходимо

$$\varphi = ax - by; \quad \psi = bx + ay.$$

Таким чином, еквіпотенціали та лінії течії являють собою сім'ю паралельних прямих

$$\varphi = \text{const} \Rightarrow y = \frac{a}{b}x + C_1;$$

$$\psi = \text{const} \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + C_2,$$

де $\frac{a}{b} = k_1$, $-\frac{b}{a} = k_2$ – відповідні кутові коефіцієнти прямих; вони взаємно перпендикулярні, оскільки $k_1 k_2 = -1$, тобто утворюють ортогональну $(\varphi - \psi)$ -сітку.

З формули спряженої швидкості $\frac{dW}{dz} = \frac{d}{dz}(a + ib)z = a + ib = v_x - iv_y$ випливає:

$$v_x = a, \quad v_y = -b. \quad (6.7)$$

Зокрема, якщо потік спрямований під кутом α до додатної осі Ox , то

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \cdot \sin \alpha.$$

Рис. 18 ілюструють приклади картин плоскої поступальної течії.

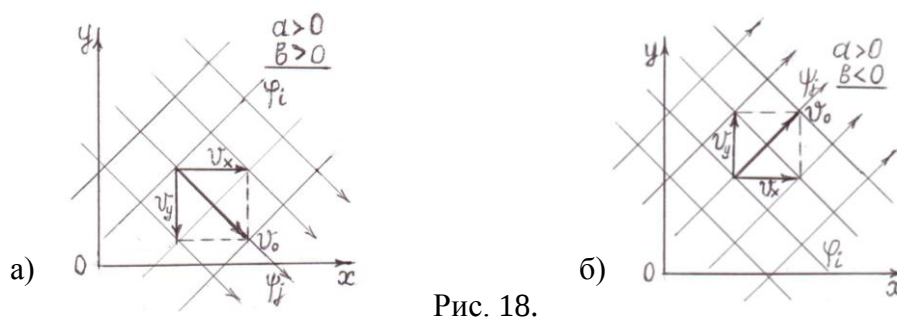


Рис. 18.

Таким чином, комплексний потенціал такого потоку можна записати у вигляді

$$W = (a + ib)z = (v_x - iv_y)z = v_0 (\cos \alpha - i \sin \alpha)z = v_0 e^{-i\alpha} z,$$

де $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ – модуль комплексного числа (швидкості).

6.3.2. Течія навколо точкового джерела (стоку)

Нехай комплексний потенціал течії заданий формулою

$$W = a \ln z, \quad a \in \mathbf{R} \quad (a = \text{const}). \quad (6.8)$$

Скористаємося показниковою формою комплексної змінної і полярними координатами

$z = re^{i\theta}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль, $\theta = \text{Arctg} \frac{y}{x} = \text{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ – аргумент, де $\arg z$ – головна вітка аргументу: $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Тоді з $W = a \ln(r \cdot e^{i\theta}) = a \ln r + ia\theta$ маємо потенціал швидкості й функцію течії:

$$\varphi = a \cdot \ln r, \quad \psi = a \cdot \theta.$$

З першої формули випливає, що еквіпотенціалами є сім'я концентричних кіл $r = \text{const}$, оскільки

$$\frac{\varphi}{a} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = e^{\frac{2\varphi}{a}} = r^2; \text{ лініями течії є сім'я променів}$$

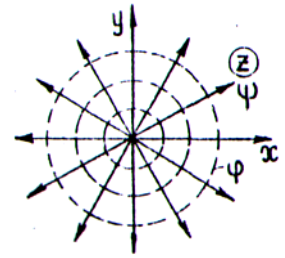


Рис.19.

$\theta = \text{const}$, що проходять через початок координат, що дає друга формула:

$$\frac{\psi}{a} = \theta = \text{Arctg} \frac{y}{x} \Rightarrow y = \text{tg} \left(\frac{\psi}{a} \right) \cdot x \text{ (рис.19). Розглянемо радіальну } v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \text{ та дотичну}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \text{ швидкості, використовуючи радіанну міру кута (рис. 20):}$$

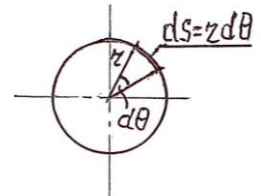


Рис. 20.

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(a \ln r) = \frac{a}{r}, \quad v_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(a \ln r) = 0.$$

Таким чином, швидкість течії спадає вздовж променів обернено

пропорційно відстані r від початку координат. При $r \rightarrow 0$: $|v_r| \rightarrow \infty$, тобто маємо **особливу точку** в початку координат (так звану **сингулярність**).

Обчислимо витрату через циліндричну поверхню, утворену замкненим колом C_r довільного радіуса r при одиничній висоті циліндра по нормалі до площини рисунку:

$$Q = \int_{C_r} v_r \cdot ds = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} r d\theta = a \cdot 2\pi,$$

де ds – малий елемент дуги еквіпотенціалі.

Звідси зрозуміло фізичний зміст коефіцієнта a :

$$a = \frac{Q}{2\pi}.$$

Розглянутий рух можна назвати течією навколо точкового **джерела** ($a > 0$) або **стоку** ($a < 0$) потужністю (інтенсивністю, об'ємною витратою) Q .

В початку координат функція v_r зазнає розриву, тому розглянуту течію узагальнено називають «**гідродинамічною особливістю**».

Остаточно комплексний потенціал течії навколо джерела потужністю Q , розташованого в початку координат, є $W = \frac{Q}{2\pi} \ln z$. Можна показати, що при розташуванні точкового джерела (стоку) в довільній точці $z_0 = x_0 + iy_0$ площини комплексної змінної z комплексний потенціал визначається як

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0). \quad (6.9)$$

6.3.3. Точковий вихор («вихрова точка»)

Нехай комплексний потенціал течії є

$$W = \frac{b}{i} \ln z = -ib \ln(r \cdot e^{i\theta}) = -ib \ln r + b \cdot \theta, \quad b \in \mathbf{R} (b = \text{const}). \quad (6.10)$$

Таким чином, у цьому разі вилучення дійсної та уявної частин дає

$$\varphi = b \cdot \theta; \quad \psi = -b \cdot \ln r.$$

Порівняно з рухом навколо джерела еквіпотенціалі й лінії течії поміняються ролями (рис. 21). Тепер лініями течії є концентричні кола, а еквіпотенціалами є прямі промені через початок координат.

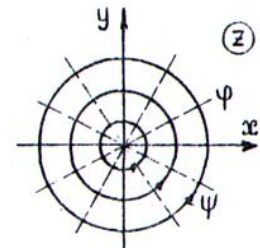


Рис. 21.

Відшукаємо проекції швидкості в полярних координатах:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{— радіальна складова швидкості відсутня;}$$

$$v_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (b \cdot \theta) = \frac{b}{r} \quad \text{— колова складова швидкості.} \quad (6.11)$$

Бачимо, що швидкість спадає обернено пропорційно відстані від центра вихору, а при $r \rightarrow 0$: $|v_\theta| \rightarrow \infty$, тобто функція швидкості зазнає розриву. Формально, згідно з інтегралом Ейлера, це потребує необмеженого зменшення тиску при $r \rightarrow 0$: $p \rightarrow -\infty$, що фізично не є можливим. Таким чином, маємо **сингулярну точку** в початку координат, де порушується потенціальний характер течії, що дає підстави називати цю точку вихровою, або **точковим вихором**. Навколо вихрової точки течія потенціальна!

Розглянемо циркуляцію швидкості (інтенсивність вихрової точки) вздовж будь-якого кола радіуса r :

$$\Gamma = \int_{C_r} v_\theta ds = \int_0^{2\pi} \frac{b}{r} r d\theta = b \cdot 2\pi,$$

де ds — елемент дуги лінії течії.

Звідси коефіцієнт b дорівнює

$$b = \frac{\Gamma}{2\pi}. \quad (6.12)$$

На підставі (6.11) і (6.12) маємо

$$\boxed{\Gamma = v_\theta \cdot 2\pi r = \text{Const}},$$

тобто $\Gamma = \text{Const}$ на будь-якому радіусі r . Тому таку течію навколо точкового вихору називають **циркуляційним потоком** навколо вихрової нитки згідно із законом $\boxed{v_\theta r = \text{const}}$. В теоретичній гідромеханіці показано, що обертання рідини в такій течії в строгому розумінні немає — при русі малих рідких об'ємів по концентричних колах у полі точкового вихору ці об'єми так деформуються, що їх головні осі деформації рухаються поступально паралельним переносом. Таку течію ще називають «вільним вихором» (на відміну від «вимушеного», або квазітвердотільного, вихору в рідині за законом твердого тіла $\boxed{\frac{v_\theta}{r} = \text{const} = \omega}$, або $v_\theta = \omega r$, де ω — кутова швидкість).

Якщо циркуляцію Γ навколо вихрової точки задано, то комплексний потенціал такої течії є: при розташуванні точкового вихору в початку координат

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad (6.13),$$

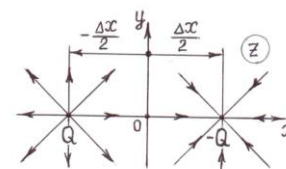
при розташуванні його в довільній точці $z_o = x_o + iy_o$

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_o).$$

6.3.4. Гідродинамічний диполь

Розглядається течія в площині комплексної змінної z , утворена двома близько розміщеними на дійсній осі і на однакових відстанях $\Delta x/2$ від осі y джерелом потужністю $Q > 0$ – на від’ємній півосі, та стоком $Q < 0$ – на додатній півосі (рис. 22).

Комплексний потенціал результуючої течії знайдемо згідно з принципом суперпозиції потенціальних потоків, враховуючи формулу (6.9) попередньої лекції:



$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \left[\ln \left(z - \frac{-\Delta x}{2} \right) - \ln \left(z - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] = \frac{Q \cdot \Delta x}{2\pi} \frac{\ln \left(z + \frac{\Delta x}{2} \right) - \ln \left(z - \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x}. \quad \text{Рис. 22 } (Q = |Q|).$$

Якщо, зближуючи джерело і стік, збільшувати модулі їх потужності, щоб $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ |Q| \rightarrow \infty}} |Q\Delta x| = M$ (Δx – відстань між джерелом і стоком; M – **момент диполя**, величина стала), то після граничного переходу, враховуючи, що на дійсній осі $\Delta x \equiv \Delta z$, дістанемо так звану **течію від гідродинамічного диполя**

$$W_o = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}. \quad (6.14)$$

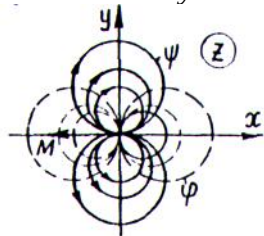
Напрямок зближення від стоку до джерела називається **віссю диполя**.

Лініями течії для диполя, вісь якого напрямлена вздовж від’ємної осі Ox , є кола з центрами на уявній осі, дотичні до дійсної (рис. 23).

$$\text{Відокремлення дійсної та уявної частин в (6.14) дає: } \varphi = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{Mx}{2\pi\varphi} = R_\varphi^2 \text{ – сім’я колових еквіпотенціалів з центрами на дійсній осі;}$$

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{\psi} = R_\psi^2 \text{ — сім’я колових ліній течії з центрами на уявній осі.}$$



Розглянуті найпростіші потенціальні течії є основою для розв’язування задач гідродинаміки методом суперпозиції течій.

Рис.23.

6.3.5. Безциркуляційне обтікання циліндра.

Парадокс Д’Аламбера - Ейлера

Розглянемо течію, утворену накладанням на течію від диполя поступального

безмежного потоку зі швидкістю v_∞ вздовж дійсної осі. З урахуванням (6.6), (6.7) лекції № 13 при $v_y = 0$ та (6.14) комплексний потенціал течії такої течії є

$$W = v_\infty \cdot z + \frac{M}{2\pi \cdot z} = v_\infty (x + iy) + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{x + iy}, \quad (6.15)$$

звідки отримаємо функцію потенціалу швидкості та функцію течії:

$$\varphi = x \left(v_\infty + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \right); \quad \psi = y \left(v_\infty - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \right). \quad (6.16)$$

Візьмемо «нульову» лінію течії: $\psi = 0 \Rightarrow y \left(v_\infty - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0$; звідси випливає,

що їй відповідають 2 вітки:

1) $y=0$, тобто лінія течії збігається з дійсною віссю;

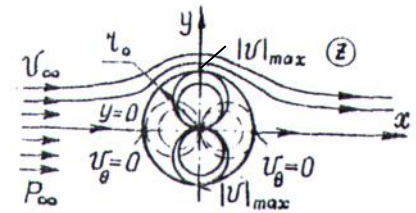
2) $v_\infty = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2}$, звідси $x^2 + y^2 = \frac{M}{2\pi \cdot v_\infty} = r_0^2$, тобто «нульова» лінія течії

відповідає колу радіуса r_0 , величина якого залежить від

співвідношення $\frac{M}{v_\infty}$.

Таким чином, «нульова» лінія течії складається з частини дійсної осі $\theta = 0$ і $\theta = \pi$, та кола радіуса

$r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi \cdot v_\infty}}$ (рис. 24, знизу картина обтікання ідентична верхній). Рис. 24.



Оскільки на лініях течії нормальна складова швидкості $v_n = 0$, то будь-яку лінію течії (або її частину) в нев'язкій рідині можна замінити твердою стінкою, не порушивши граничної умови непротікання. Замінив частину «нульової» лінії течії, яка має радіус r_0 , умовною твердою стінкою, можна вважати, що ми отримали плоску картину обтікання перпендикулярного до площини течії **колового циліндра** нескінченного розмаху і відповідного радіуса r_0 .

Для переходу до полярних координат враховуємо, що $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,

$x^2 + y^2 = r^2$, де r — поточний радіус; θ — полярний кут. Тоді вирази (6.16) можна записати у вигляді

$$\varphi = v_\infty r \cos \theta \left(1 + \frac{M}{2\pi v_\infty r^2} \right) = v_\infty r \cos \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right); \quad \psi = v_\infty r \sin \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right). \quad (6.17)$$

Знайдемо поле швидкостей:

$$\text{радіальна проекція швидкості } v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = v_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right);$$

$$\text{дотична проекція швидкості } v_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -v_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right).$$

На поверхні циліндра $r = r_0$, тому

$$\boxed{v_r = 0; \quad v_\theta = -2v_\infty \cdot \sin \theta}. \quad (6.18)$$

Знак мінус свідчить про те, що напрямок швидкості протилежний додатному напрямку відліку кутів.

Очевидно, при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ маємо максимальну швидкість $|v_\theta|_{\max} = 2v_\infty$ (див. рис. 24).

Точки потоку на поверхні циліндра, в яких швидкість дорівнює нулю $v_\theta \equiv v = 0$, називаються критичними. Якщо обтікання безциркуляційне, критичні точки розміщені на горизонтальному діаметрі $\theta = 0$ і $\theta = \pi$. Визначимо розподіл тиску по поверхні циліндра. Скористаємося інтегралом Ейлера, знехтувавши масовими силами:

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}.$$

На його підставі уведемо **коефіцієнт тиску** $\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho \frac{v_\infty^2}{2}} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2$ та підставимо $v = v_\theta$ з

(6.18). Отримаємо для кругового циліндра при безциркуляційному обтіканні

$$\bar{p} = 1 - 4 \sin^2 \theta.$$

Знайдемо рівнодійну сили тиску (відносно p_∞) для циліндра одиничної висоти:

$$\vec{R} = - \int_0^{2\pi r_0} (p - p_\infty) \vec{n}^\circ 1 \cdot ds = - \frac{\rho v_\infty^2}{2} r_0 \int_0^{2\pi} \bar{p} \cdot \vec{n}^\circ d\theta,$$

де ds – елемент дуги колової поверхні циліндра; знак мінус обумовлений різними напрямками орта зовнішньої нормалі $\vec{n}^\circ = \{n_x^\circ, n_y^\circ\}$ до кожної елементарної площинки $1 \cdot ds = r_0 d\theta$ на поверхні циліндра та сили тиску до цієї поверхні (в механіці рідини та газу прийнято, що орієнтація в просторі елемента будь-якої поверхні визначається положенням орта саме зовнішньої нормалі до цього елемента).

Знайдемо проекції повної сили тиску відповідно на осі x і y :

сила опору

$$R_x = - \frac{\rho v_\infty^2}{2} r_0 \int_0^{2\pi} (1 - 4 \sin^2 \theta) \cos \theta \cdot d\theta = 0;$$

підймальна сила

$$R_y = -\rho \frac{v_\infty^2}{2} r_0 \int_0^{2\pi} (1 - 4 \sin^2 \theta) \sin \theta \cdot d\theta = 0.$$

Тут враховано, що орт нормалі $\vec{n}_0$ до поверхні циліндра має проекції $n_x^o = 1 \cdot \cos \theta$ та $n_y^o = 1 \cdot \sin \theta$.

Отже, при безциркуляційному обтіканні циліндра потенціальним потоком ідеальної рідини опір та підймальна сила дорівнюють нулю. Звідси випливає, що й рівнодіюча сил тиску по поверхні циліндра теж дорівнює нулю. З позицій теорії безвихрового руху ідеальної рідини цей результат є цілком логічним, оскільки теоретична конфігурація ліній течії (див. рис. 24), а отже, і розподіл тиску є симетричними відносно осей x і y .

Однак при обтіканні циліндра в'язкою рідиною симетрія обтікання порушується відносно осі y , оскільки за циліндром утворюється зона зниженого тиску, яка заповнена вихорами, що відірвалися від його задньої поверхні (рис. 25). Виникаюча різниця тисків між лобовою та задньою поверхнями циліндра обумовлює силу **лобового опору**, до якого додаються **сили тертя** за рахунок дії в'язкісних дотичних напружень на обтічній поверхні. Такий механізм утворення сил опору є значною мірою спільним при обтіканні в'язкою рідиною кулі та інших тіл.

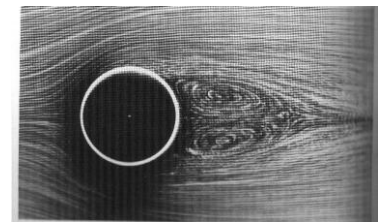


Рис. 25.

В нашому ж випадку безциркуляційного обтікання круглого циліндра рівномірним в нескінченності безвихровим потоком невіязкої рідини сила опору відсутня, причому це положення поширюється і на випадки безвідривного обтікання тіл нескінченного розмаху та довільної форми за тих самих умов. Отриманий результат, що різко суперечить практичному досвіду, має назву **парадокса Д'Аламбера-Ейлера**. Але цей парадокс має велике значення, оскільки він дозволяє виявити фактори, які спричиняють появу сил опору при обтіканні тіл або при русі тіл в рідині (згідно з принципом обернення руху).

Для цього потрібно розглянути припущення, за яких дістали нульовий опір. Таким чином можна встановити можливі чинники виникнення сил опору:

- 1) в'язкість рідин;
- 2) нестационарність течій;*)
- 3) обмеженість потоку та вплив хвильової вільної поверхні рідини;*)
- 4) відривний характер течії;
- 5) стисливість рідини при коло- та надзвукових швидкостях;
- 6) циркуляційне обтікання тіл скінченних розмірів.

Однак при цьому важливо з'ясувати: чи можна отримати теоретичні вирази для деяких гідроаеродинамічних сил, які існують в реальних умовах, якщо, залишаючись в межах теорії ідеальної рідини, внести в потік дискретні (окремі) або неперервно розподілені вздовж контуру обтічного тіла вихори або інші точкові особливості (так званий метод гідродинамічних особливостей, широко застосований при розрахунках обтікання крил літальних апаратів та елементів суден, що складає предмет окремих курсів)? В подальшому ми зупинимося на першому варіанті накладання на плоский безмежний і безциркуляційний потік, що обтікає циліндр, одиначного точкового вихору в центрі колової основи циліндра.

*) При безвихровому (потенціальному) нестационарному русі безмежної або обмеженої вільною поверхнею нестисливої ідеальної рідини, що обтікає тверде тіло, потенціал швидкості задовольняє рівняння Лапласа при заданих умовах на поверхні тіла і в нескінченності, визначаючи залежний від часу потенціал швидкості нестационарного руху. При цьому головний вектор сил тиску потоку на симетричне тіло **не дорівнює нулю** на відміну від випадку стаціонарного обтікання .

6.3.6. Циркуляційне обтікання циліндра. Формула Жуковського

Розглянемо випадок циркуляційного обтікання круглого циліндра. Оскільки лініями течії поблизу точкового вихору є кола, то до комплексного потенціалу безциркуляційного обтікання циліндра згідно з принципом суперпозиції можна додати комплексний потенціал точкового вихору в центрі «основи» циліндра:

$$W = v_{\infty} z + \frac{M}{2\pi z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Якщо врахувати одну з відомих нам віток «нульової» лінії течії, що відповідає колу радіуса $r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi \cdot v_{\infty}}}$, утвореного при обтіканні поступальним безвихровим потоком диполя, то комплексний потенціал складної течії можна записати у вигляді

$$W = v_{\infty} \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (6.19)$$

Вилучення дійсної та уявної частин в (6.19) або безпосереднє використання формул для потенціалів швидкості φ та функцій течії ψ (6.17) при циркуляційному обтіканні циліндра, а також виразів $\varphi = b \cdot \theta$, $\psi = -b \cdot \ln r$ для точкового вихору при $b = \frac{\Gamma}{2\pi}$ згідно з (6.12), дозволяє отримати функції φ і ψ даної складної течії:

$$\varphi = v_{\infty} r \cos \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta; \quad \psi = v_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Знайдемо поле швидкостей:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = v_{\infty} \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right); \quad v_{\theta} = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -v_{\infty} \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Звідси видно, що при $r = r_0$, тобто на поверхні циліндра,

$$v_r = 0; \quad v_{\theta} = -2v_{\infty} \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \quad (6.20)$$

і симетрія картини течії відносно горизонтального діаметра циліндра порушується.

Останній вираз дає можливість визначити положення **критичних точок** на циліндрі, виходячи з умови $v_{\theta} = 0$, тобто

$$\boxed{\sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty} r_0}}. \quad (6.21)$$

В залежності від величини циркуляції Γ можливі такі варіанти розташування критичних точок (рис. 26).

1) $\Gamma = 0$, тобто $\sin \theta_{кр} = 0 \Rightarrow \theta_{кр1} = 0; \theta_{кр2} = \pi$ — критичні точки лежать на кінцях горизонтального діаметра циліндра, що відповідає вже відомому нам випадку безциркуляційного обтікання циліндра (а).

2) $\Gamma < 4\pi v_\infty r_0$; $\sin \theta_{кр} < 1$ — розв'язання рівняння (6.21) дає дві критичні точки K_1, K_2 на циліндрі, що розташовані симетрично відносно осі y та визначаються кутами $\theta_{кр1}$ і $\theta_{кр2}$ в діапазоні $0 < \theta_{кр} < \pi$ (б).

3) При $\Gamma \rightarrow 4\pi v_\infty r_0$ критичні точки зливаються в одну при $\theta_{кр} = \pi/2$ (в).

Очевидно, при симетрії розташування критичних точок відносно осі y вони розташовані несиметричні відносно осі x .

4) Ціком можлива умова $\Gamma > 4\pi v_\infty r_0$ потребувала б нерівності $\sin \theta_{кр} > 1$, але тригонометричне рівняння (6.21) в цьому випадку не має розв'язку. Фізично це означає, що критичні точки K_1, K_2 на поверхні циліндра відсутні — знаходяться із зовнішньої та внутрішньої

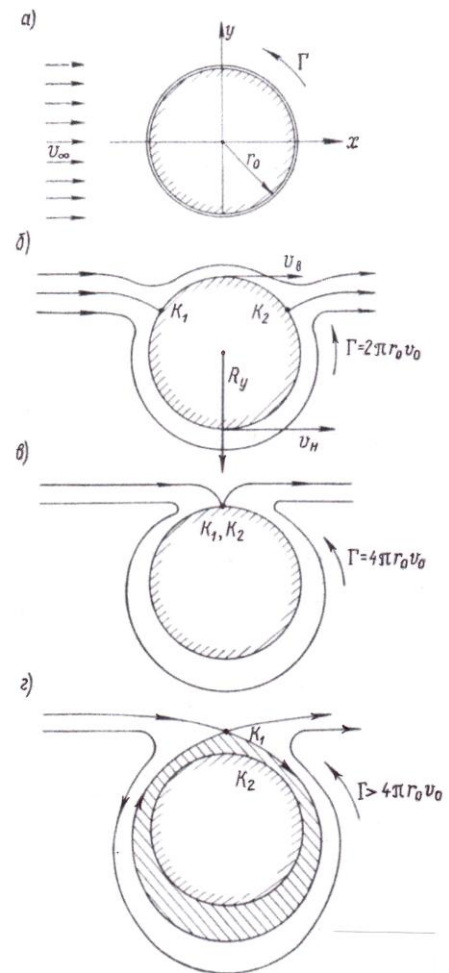


Рис. 26 ($v_0 \equiv v_\infty$).

її сторін (г). В заштрихованій зоні навколо циліндра рідина здійснює замкнений коловий циркуляційний рух, а точка з нульовою швидкістю знаходиться всередині потоку на петлеподібній лінії течії, яка охоплює зазначену замкнену область поблизу поверхні циліндра.

Загальний висновок — накладання циркуляції призводить до зміщення критичних точок. Треба відмітити, що цей висновок, зроблений щодо круглого циліндра, зберігає силу і для обтікання довільного профілю.

У випадку обтікання обертового циліндра потоком в'язкої рідини можуть спостерігатися 2, 3 і 4 варіанти зазначених вище течій в залежності від кутової швидкості обертання.

Знайдемо розподіл тиску по поверхні циліндра, використовуючи **коефіцієнт тиску**

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho \frac{v_\infty^2}{2}} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2 \text{ при підстановці в нього колової швидкості } v \equiv v_\theta \text{ згідно з (6.20).}$$

Остаточного отримаємо

$$\bar{p} = 1 - 4 \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma}{\pi v_\infty r_0} \sin \theta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi v_\infty r_0} \right)^2. \quad (6.22)$$

Знайдемо рівнодійну сили тиску (відносно p_∞) для циліндра одиничного розмаху:

$$\vec{R} = - \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) \vec{n} r_0 d\theta = - \frac{\rho v_\infty^2}{2} r_0 \int_0^{2\pi} \bar{p} \cdot \vec{n} d\theta.$$

Підстановкою формули (6.22) під інтеграл знайдемо проекції головного вектора сил тиску відповідно на осі x і y . Отримаємо, що сила опору як і раніше $R_x = 0$, оскільки лінії течії в усіх розглянутих випадках (1÷4) є симетричними відносно осі y . Але з несиметричності ліній течії відносно осі x випливає, що проекція головного вектора сил тиску на вісь y не дорівнює нулю, її називають **підйимальною силою** і її можна обчислити наступним чином:

$$\begin{aligned} R_y &= -\rho \frac{v_\infty^2}{2} r_0 \int_0^{2\pi} \bar{p} \sin \theta d\theta = -\rho \frac{v_\infty^2}{2} r_0 \int_0^{2\pi} \left(1 - 4 \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma \cdot \sin \theta}{\pi v_\infty r_0} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 v_\infty^2 r_0^2} \right) \sin \theta d\theta = \\ &= -\rho \frac{v_\infty^2}{2} r_0 \left\{ \left(1 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 v_\infty^2 r_0^2} \right) \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta - 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta + \frac{2\Gamma}{\pi v_\infty r_0} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right\}. \end{aligned}$$

Врахуємо значення визначних інтегралів

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta &= -\cos \theta \Big|_0^{2\pi} = 0; \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta = \pi - \frac{1}{2 \cdot 2} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} = \pi; \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \theta) \cdot \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Підстановка інтегралів дає **формулу М.Є. Жуковського**: $R_y = -\rho v_\infty \Gamma$. (6.23)

Підйимальна сила за модулем дорівнює добутку густини рідини, швидкості потоку, що набігає, і циркуляції навколо циліндра одиничного розмаху.

Напрямок підйимальної сили визначається поворотом вектора швидкості на $\pi/2$ проти напрямку циркуляції (рис. 27). За додатний напрямок циркуляції приймається напрямок проти годинникової стрілки.

Утворення підйимальної сили спричинене

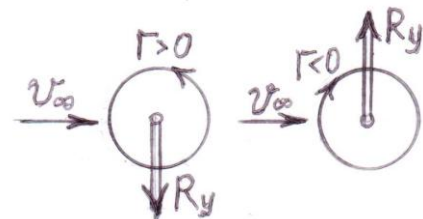


Рис.27.

перерозподілом тисків по поверхні циліндра, який викликаний дією точкового вихору, приєднаного до потенціальної течії від поступального потоку та диполя.

Знайдений результат, що виражений формулою (6.23) для колового циліндра з циркуляцією, відображає частинний випадок **теорему М.Є. Жуковського** про підймальну силу крила, однак він поширюється на безвідривне обтікання профілів довільної форми в частині утворення, розрахунку та визначення напрямку сили R_y . Існує і більш загальне доведення теореми М.Є. Жуковського про підймальну силу при обтіканні ідеальною рідиною довільного тіла, зокрема крилового профілю та решіток профілів (щодо робочих коліс турбомашин).

При обтіканні реальною рідиною будь-яких обертових тіл, циркуляція утворюється силами в'язкості – через захоплення рідких частинок, які прилипають до поверхні тіл. Виникаюча при цьому підймальна сила має назву **ефекту Магнуса** (проявляється при характерному викривленні траєкторії польоту обертових тіл — снаряда, кулі, закрученого м'яча тощо).

6.3.7. Постулат Жуковського – Чаплигіна

Вивчаючи циркуляційне обтікання циліндра, циркуляцією Γ ми вважали відомою. Але при розв'язуванні задач обтікання аеродинамічних профілів величину Γ потрібно знаходити в процесі розв'язування. Для цього використовується постулат Жуковського – Чаплигіна: циркуляція Γ обирається такою, щоб гострий задній край профілю був точкою плавного сходження потоку, причому швидкість у цій точці має бути обмеженою (рис. 28).



Рис. 28.

Запитання для самоперевірки до розділу 6

1. Що називається вихором (ротором) вектора швидкості?
2. У чому полягає фізичний зміст вихору вектора швидкості?
3. Яке векторне поле називається потенціальним?
4. Доведіть теорему: поле градієнта будь-якої скалярної функції є потенціальним.
5. Дайте визначення потенціалу швидкості.
6. Який зміст має рівняння Лапласа для потенціалу швидкості?
7. Дайте визначення гармонійної функції і наведіть відповідні приклади.

8. Що таке еквіпотенціальні поверхні?
9. Як напрямлений вектор швидкості рідини до еквіпотенціальної поверхні?
10. Що дає застосування потенціалу швидкості при розв'язуванні задач гідроаеродинаміки?
11. Яким шляхом знаходять розподіл тиску в потоці ідеальної рідини за відомою функцією потенціалу швидкості?
12. Яку течію рідини можна вважати плоскою?
13. Що таке функція течії?
14. Як утворена ортогональна сітка плоского перерізу?
15. У чому полягають умови Коші – Рімана для потенціалу швидкості і функції течії?
16. Яка функція називається комплексним потенціалом?
17. Що таке комплексно-спряжена швидкість?
18. Як пов'язанні між собою потенціал швидкості і циркуляція, функція течії та об'ємна витрата рідини?
19. Наведіть приклади плоских потенціальних течій.
20. Побудуйте рух (знайдіть φ , ψ та поле швидкостей) плоскопаралельного потоку.
21. Побудуйте картину течії навколо точкового джерела.
22. Побудуйте картину течії навколо точкового вихору.
23. Побудуйте картину течії, утвореної диполем.
24. У чому полягає парадокс Д'Аламбера – Ейлера?
25. Які причини виникнення опору при обтіканні тіл?
26. Побудуйте картини циркуляційного обтікання циліндра.
27. Виведіть формулу Жуковського для визначення підймальної сили.
28. Який зміст і значення постулату Жуковського – Чаплигіна?

7. ДИНАМІКА В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

Теорема Коші - Гельмгольца. Тензор швидкостей деформації. Тензор напружень у рідині. Рівняння руху рідини в напруженнях. Узагальнений закон Ньютона. Рівняння Нав'є-Стокса. Подібність і моделювання гідродинамічних явищ. Ламінарна течія в трубах і опір. Рівняння Рейнольдса. Турбулентна течія в трубах і опір.

[1. с. 46-51, 64-74, 224-231, 242-252, 262-289; 2. с. 41-45, 60-67, 85-106, 126-144, 154-183; 3. с. 31-38, 137-206; 4. с. 50, 96-131].

7.1. Модель руху малої рідкої частинки

Рух рідкої частинки порівняно з рухом абсолютно твердого тіла має складніший характер, оскільки в процесі руху вона може значно деформуватися.

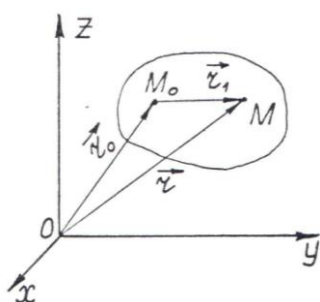


Рис. 29.

Нехай довільна точка M в малій рідкій частинці має радіус-вектор $\vec{r} = \{x, y, z\}$ (рис. 29). Точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ візьмемо за **полюс** з радіусом-вектором $\vec{r}_0$. Тоді вектор $\overline{M_0M} = \vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\} = \vec{r} - \vec{r}_0$; його проекціями є $x_1 = x - x_0$, $y_1 = y - y_0$, $z_1 = z - z_0$.

Розкладемо швидкість точки M в ряд Тейлора в околі полюса M_0 у фіксований момент часу t (тобто t розглядається як параметр), причому через малість координат x_1, y_1, z_1 обмежимося їх першими степенями, що означає справедливості здійснюваного аналізу **для частинок малих розмірів**:

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(x_0, y_0, z_0, t) + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right)_0 z_1 + o(r_1).$$

Індекс «0» при похідних, визначених в точці полюса M_0 , у подальшому опускаємо.

Розглянемо проекцію швидкості v_x

$$v_x(x, y, z, t) = v_x(x_0, y_0, z_0, t) + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_x}{\partial z} z_1.$$

Додамо й віднімемо вираз $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} y_1 + \frac{\partial v_z}{\partial x} z_1 \right)$:

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z) = & v_{0x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) y_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) z_1 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) z_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) y_1. \end{aligned} \quad (7.1)$$

За умовою перший доданок v_{0x} – проекція швидкості поступального руху полюса.

Вирази в дужках в останніх двох доданках являють собою проекції вектора вихору

$$\text{rot}_y \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}; \quad \text{rot}_z \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Вони характеризують обертання точок рідкої частинки відносно полюса з кутовою швидкістю $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} [\nabla, \vec{v}]$, що є локально справедливим для наче отверділого нескінченно малого об'єму рідини в даний момент часу.

Розглядаючи детально швидкості розтягування (стиснення), а також скошування прямокутного елементарного об'єму рідини (обмежуючись малими кутами скосу), можна показати, що решта доданків характеризує деформаційний рух частинки. Так, величина

$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx}$ характеризує швидкість відносного видовження елемента рідкої частинки в

напрямі осі Ox (аналогічно $\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ в напрямках осей Oy і Oz). Множник виду

$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xy}$ означає швидкість зміни кута прямокутного елемента з початковими

гранями, паралельними осям Oy і Ox . Аналогічний зміст мають множник

$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xz}$ щодо граней, паралельних осям Oz і Ox , а також решта схожих

параметрів ε_{ij} ($i \neq j$, $i, j = x, y, z$), які в скобках містять суми навхрест взятих похідних швидкості по координатах, в формулах для проекцій швидкостей $v_y(x, y, z)$ і $v_z(x, y, z)$.

Таким чином, (7.1) можна записати у вигляді

$$v_x = v_{0x} + \varepsilon_{xx}x_1 + \varepsilon_{xy}y_1 + \varepsilon_{xz}z_1 + \omega_y z_1 - \omega_z y_1.$$

Аналогічно для інших проекцій швидкості маємо

$$v_y = v_{0y} + \varepsilon_{yx}x_1 + \varepsilon_{yy}y_1 + \varepsilon_{yz}z_1 + \omega_z x_1 - \omega_x z_1;$$

$$v_z = v_{0z} + \varepsilon_{zx}x_1 + \varepsilon_{zy}y_1 + \varepsilon_{zz}z_1 + \omega_x y_1 - \omega_y x_1.$$

Згідно з відомими з теоретичної механіки формулами Ейлера, останні два доданки в наведених рівняннях відображають проекції вектора колової швидкості обертального руху даної точки M відносно миттєвої осі, що проходить через полюс M_0 : $\vec{v}_{об} = [\vec{\omega}, \vec{r}_1]$.

Аналіз показує, що сукупність дев'ятьох доданків з множниками ε_{ij} ($i, j = x, y, z$) визначає швидкість деформаційного руху $\vec{v}_{деф}$ рідкої частинки.

У векторній формі останні три рівняння системи можна записати так:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_1] + \vec{v}_{def}. \quad (7.2)$$

Знайдений результат формулюється як теорема Коші-Гельмгольца: швидкість будь-якої точки рідкої частинки в даний момент часу складається із швидкості полюса $\vec{v}_0$, швидкості обертального руху навколо полюса $\vec{v}_{об}$ і швидкості деформаційного руху $\vec{v}_{def}$.

Величини швидкостей деформації можна виписати у матричній формі, і вони становлять так званий **тензор швидкостей деформації** (другого рангу, симетричний, оскільки очевидно, що $\varepsilon_{i,j} \equiv \varepsilon_{j,i}$, де $i, j = x, y, z$):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{S}}. \quad (7.3)$$

7.2. Тензор напружень

Напруження в даній точці визначається як границя відношення поверхневої сили до площі поверхні, коли розміри вибраної площинки прямують до нуля. Кожна площинка характеризується зовнішньою нормаллю. Поверхнева сила в загальному випадку напрямлена під ненульовим кутом до нормалі.

Виберемо в малому околі даної точки O три взаємно перпендикулярні площинки, нормальми до яких є осі Ox , Oy і Oz .

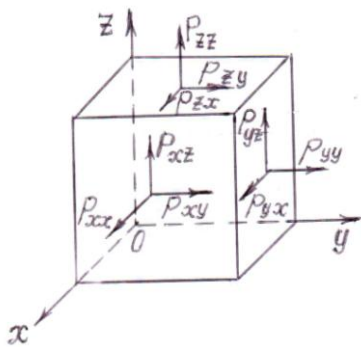


Рис. 30.

Площинки можна розглядати як паралельні координатним площинам грані малого кубічного елемента, побудованого від точки O (рис. 30). Відповідні поверхневі сили, що прикладені до граней та віднесені до одиниці площі, тобто вектори напружень, позначимо через $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$.

Кожне з цих напружень можна розкласти на проекції в напрямках осей координат. При цьому p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} будуть

нормальними, а p_{xy} , p_{xz} , p_{yx} , p_{yz} , p_{zx} , p_{zy} — **дотичними напруженнями**.

Прийнято, що додатні напрямки складових дотичних напружень є такими, що збігаються з додатними напрямками координатних осей, якщо розтягувальні нормальні напруження на тій самій грані збігаються з напрямком відповідної осі. Якщо ж розтягувальні напруження мають протилежний напрямок (як на гранях, паралельних зазначеним вище), то додатні напрямки складових дотичних напружень змінюються на протилежні.

Можна показати, що для ізотропних рідин на кожній грані малого куба має місце **властивість взаємності дотичних напружень**: $p_{xy} = p_{yx}$, $p_{xz} = p_{zx}$, $p_{yz} = p_{zy}$.

Кожна з граней куба має протилежну, причому з розподілом напружень та їх напрямків відповідно до наведеного вище правила. Тому при стягуванні рідкого елемента до точки О сукупність напружень в даній точці може бути представлена в матричній формі, утворюючи **тензор напружень** (другого рангу, симетричний, оскільки $p_{ij} = p_{ji}$, $i, j = x, y, z$ — властивість взаємності дотичних компонент напружень, що можна довести):

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = \mathbf{P}. \quad (7.4)$$

Одна з основних властивостей тензора напруження полягає в тому, що при відсутності дотичних напружень (абсолютна або відносна рівновага, рух ідеальної рідини) $p_{xy} = p_{xz} = p_{yz} = 0$, але $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$, де p — тиск.

Знак "—" зумовлений тим, що тиск спрямований проти прийнятих напрямків нормальних напружень. Крім того, в краплинній рідині можуть проявлятися лише стискаючі зусилля, оскільки розтягування рідини практично призводить до розриву її суцільності, коли тиск знижується до рівня тиску насиченої пари $p_{нас}$ (при $p \leq p_{нас}$ виникає **кавітація**, тобто в рідині утворюються порожнини, заповнені парою і газом).

Резюме щодо тензорів швидкостей деформації $\dot{\mathbf{S}}$ і напружень $\mathbf{P}$: перший відображає деформаційний (в сенсі швидкостей деформації) стан малої рідкої частинки в даний момент часу; другий відображає напружений стан рідин і газів в точці.

7.3. Рівняння руху рідини в напруженнях

Візьмемо елементарний рідкий об'єм dV , обмежений поверхнею dS , і запишемо для нього другий закон динаміки Ньютона:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \rho \vec{F} dV + \vec{p}_n dS,$$

де права частина містить векторну суму масових і поверхневих сил, відповідно виражених через вектори одиничної масової сили $\vec{F}$ (тобто віднесеної до одиниці маси) і напруження $\vec{p}_n$ поверхневої сили.

Для довільного об'єму V , обмеженого поверхнею S , відповідне рівняння руху матиме вигляд

$$\iiint_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint_V \rho \vec{F} dV + \iint_S \vec{p}_n dS. \quad (7.5)$$

Вектор напруження $\vec{p}_n$, прикладеного до малої площинки із зовнішньою нормаллю $\vec{n}$, подамо через вектори напружень на взаємно перпендикулярних гранях малого тетраедра, утвореного проектуванням даної площинки на координатні площини, при стягуванні його об'єму до точки в початку координат:

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x \cdot \cos(\vec{n}, x) + \vec{p}_y \cdot \cos(\vec{n}, y) + \vec{p}_z \cdot \cos(\vec{n}, z). \quad (7.6)$$

Формула (7.6) відома як **формула Коші**.

Величина напруження $\vec{p}_n$ не є звичайним вектором, оскільки в даній точці залежить не тільки від радіуса-вектора точки і часу, але й від орієнтації площинки, що виділена всередині об'єму і якій належить точка: $\vec{p}_n = \vec{p}_n(\vec{r}, t, \vec{n})$. Така фізична величина, що характеризується в даній точці вектором, який приймає безліч значень в залежності від орієнтації площинки дії, називається **тензорною**.

Застосовуючи до останнього інтеграла в рівнянні (7.5) формулу Остроградського-Гаусса, отримаємо

$$\iiint_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint_V \rho \vec{F} dV + \iiint_V \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV, \text{ де } \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} = \text{Div} \mathbf{P}.$$

Оскільки дане відношення має виконуватися для довільного об'єму, то маємо

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right), \text{ де } \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v},$$

або

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right). \quad (7.7)$$

Знайдене рівняння називається **рівнянням руху рідини в напруженнях**. Воно відображає принцип Д'Аламбера, справедливий для будь-якого моменту руху, причому ліва частина (7.7) характеризує одиничну даламберову силу інерції, прикладеної до малої рідкої частинки.

Спроекуємо векторне рівняння (7.7) на осі координат, що дає можливість виділити явно в ньому нормальні та дотичні складові напружень

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right); \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right); \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Як видно, ми отримали нелінійну систему диференціальних рівнянь (нелінійність створюють конвективні члени даламберової сили інерції) з десятьма невідомими, до складу яких входять: густина ρ , шість складових напружень p_{ij} ($i, j = x, y, z$) та три проекції вектора швидкості $\vec{v}$. Таким чином, система рівнянь є незамкненою навіть при додаванні до неї рівнянь нерозривності та термодинамічного стану. Це робить неможливим безпосереднє інтегрування даної системи рівнянь, не кажучи вже про практичну неможливість завдання початкових і граничних умов щодо складових напружень. Частковий вихід із цієї ситуації може дати припущення про певний зв'язок напружень із складовими швидкостями деформації рідких частинок.

7.4. Узагальнена гіпотеза Ньютона

Вивчаючи в'язкість рідини, ми познайомились із законом тертя Ньютона для дотичного напруження при одновимірному ламінарному русі рідини вздовж осі x

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy},$$

де $v = v_x$ – швидкість течії; y – поперечна координата; $\frac{dv}{dy}$ – відносна швидкість кутової деформації частинки; μ – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини.

У термінах тензорів напружень і швидкостей деформації цьому співвідношенню можна надати вигляду

$$p_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy}, \quad (7.9)$$

оскільки при русі рідини вздовж осі x

$$v_y = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_x}{dy} + \frac{dv_y}{dx} \right) = \frac{1}{2} \frac{dv_x}{dy}.$$

В'язкісні напруження, що виникають при зсуві одного шару рідини відносно другого, спричиняють не тільки появу дотичних напружень, але й впливають на величину нормальних напружень. Тому припускають, що кожне з нормальних напружень в точці вздовж будь-якої осі p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} можна уявити як суму двох складових, одна з яких нормальна до площинки і це є тиск p у в'язкій рідині, а друга обумовлена тільки молекулярною в'язкістю і не залежить від тиску (тобто має містити тільки добуток подвійного динамічного коефіцієнта в'язкості 2μ на одну з нормальних компонент тензора швидкостей деформації ε_{xx} , або ε_{yy} , або ε_{zz}).

Закон Ньютона гіпотетично узагальнюють на довільну тривимірну течію будь-якого режиму руху нестисливої рідини, вважаючи, що напруження, які залежать від в'язкості, пропорційні відповідним відносним швидкостям деформації рідкої частинки, а коефіцієнт пропорційності залишають саме таким, як і в формулі (7.9), тобто 2μ , для запобігання розбіжності з законом тертя Ньютона. Застосовуючи вже відомі нам позначення для відносних швидкостей лінійних ($\varepsilon_{ij}, i=j$) та кутових ($\varepsilon_{ij}, i \neq j$) деформацій, згідно з гіпотезою випишемо проекції напружень на координатні осі:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu\varepsilon_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; \\ p_{yy} &= -p + 2\mu\varepsilon_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; \\ p_{zz} &= -p + 2\mu\varepsilon_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ p_{xy} &= p_{yx} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \\ p_{xz} &= p_{zx} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \\ p_{yz} &= p_{zy} = 2\mu\varepsilon_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Узагальнену гіпотезу Ньютона для нестисливої рідини можна записати в тензорному вигляді:

$$\boxed{\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + 2\mu\dot{\mathbf{S}}}, \quad (7.11)$$

де $\mathbf{P}$ – тензор напружень; $\dot{\mathbf{S}}$ – тензор швидкостей деформації; p – тиск у в'язкій рідині;

$$I - \text{одиничний тензор: } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В прикладних галузях науки **тензорний запис виразів** застосовують там, де треба отримати рівняння, які не залежать від використаної системи координат. Тому переваги тензорної форми запису **узагальненої гіпотези Ньютона** пов'язані не тільки і не стільки з її компактністю, а головне — з **інваріантністю** (незмінністю) такого рівняння при зміні системи координат на іншу.

Знак мінус у першому доданку (7.11) враховує, що тиск завжди діє проти зовнішніх нормалей.

Надамо рівнянню (7.11) матричну форму:

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Пригадавши операцію множення скалярів на матриці, можна переконатися, що вирази (7.10) містять усі частинні випадки напружень відповідно до місцеположення тих чи інших елементів квадратних матриць одного порядку.

Доречно нагадати відоме вам з «Опору матеріалів» твердження узагальненого закону Гука для пружного тіла, за яким механічні напруження пропорційні відповідним відносним деформаціям. Натомість, у випадку рідини і газів гіпотетично прийнято, що напруження пропорційні відносним **швидкостям деформацій**.

З перших трьох виразів системи (7.10) знайдемо середнє арифметичне від величин нормальних напружень за трьома взаємно перпендикулярними напрямками

$$\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} = -p + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v}.$$

Для нестисливої рідини відповідно до рівняння нерозривності $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, тому маємо $\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} = -p$, де тиск p називають **гідродинамічним тиском**.

Таким чином, нормальні і дотичні складові тензора напружень $\mathbf{P}$ в залежності від відповідних швидкостей деформації повністю даються виразами системи (7.10).

Однак треба пам'ятати, що при наявності турбулентних пульсацій і макромасштабного переносу імпульсів рідких частинок пропорціональну залежність (7.11) тензорів $\mathbf{P}$ і $\dot{\mathbf{S}}$ не можна строго довести, а тому її слід вважати **якоюсь мірою робочою гіпотезою**, не доведеною, але й поки що не спростованою практикою.

7.5. Рівняння Нав'є-Стокса

Запишемо рівняння руху рідини в напруженнях в проекції на вісь Ox :

$$\frac{dv_x}{dt} = F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right).$$

Замінімо компоненти тензора напруження виразами через тиск і компоненти тензора швидкостей деформації згідно з прийнятою узагальненою гіпотезою Ньютона:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x + \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] = \\ &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \\ &+ \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \Delta v_x + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кінематичний коефіцієнт в'язкості.

Для нестисливої рідини вираз у дужках, згідно з рівнянням нерозривності, дорівнює нулю. Тоді

$$\frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \Delta v_x.$$

У проекціях на осі Oy і Oz аналогічним шляхом дістанемо рівняння

$$\frac{dv_y}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \Delta v_y;$$

$$\frac{dv_z}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \Delta v_z,$$

або у векторній формі

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \cdot \Delta \vec{v}} \quad (7.12)$$

Ці рівняння називаються **рівняннями Нав'є-Стокса**. Вони описують рух в'язкої нестисливої рідини і можуть бути трактовані як рівняння другого закону механіки Ньютона щодо одиниці маси рідини. Зауважимо, що при виведенні цих рівнянь не було зроблено будь-яких припущень про режим течії. Для замикання отриманої системи рівнянь Нав'є-Стокса з невідомими v_x , v_y , v_z , p (як правило, вважають кінематичний коефіцієнт в'язкості $\nu \approx \text{const}$; густина $\rho = \text{const}$ і відома за умовою) до них додають

$$\text{рівняння нерозривності } \text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Розв'язок рівнянь Нав'є-Стокса має бути підпорядкований граничним (крайовим) та початковим умовам. Зауважимо, що у випадку в'язкої рідини до умов однозначності, які мають виконуватися для ідеальної рідини, додається **умова прилипання** на стінці, тобто не лише нормальні складові швидкості рідких частинок, а й дотичні швидкості на межі нерухомого твердого тіла обертаються на нуль ($v_n = 0$; $v_\tau = 0$) незалежно від змочуваності рідини, матеріалу й ступеня чистоти непроникненої обтічної поверхні. Прилипання рідини на стінці відбувається за рахунок молекулярної дифузії з боку твердої стінки, а далі взаємодія молекул рідини зі стінкою завдяки силам в'язкості передається і на прилеглу рідину. Цей факт доведено багатьма фізичними вимірюваннями. Згідно з умовою прилипання у випадку в'язкої рідини лінію течії не можна замінювати твердою межею. Точні розв'язки сформульованої задачі гідрогазодинаміки вдається отримати тільки для найпростіших граничних умов.

Одна з основних невирішених в гідромеханіці та математиці проблем полягає в тому, щоб довести або спростувати твердження, що тривимірні розв'язки диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса нестисливого руху при великих числах Рейнольдса (турбулентний режим) існують у будь-який момент часу. Але часто апріорно вважається це твердження доведеним і на цій підставі будуються математичні моделі турбулентних течій, доповнені штучними співвідношеннями з певним фізичним змістом, а також залежностями, отриманими експериментально.

7.6. Елементи теорії подібності й моделювання гідродинамічних явищ

Рівняння Нав'є-Стокса разом з рівнянням нерозривності та іншими співвідношеннями, що замикають систему, утворюють систему нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку. Труднощі розв'язування її зумовлюють потребу ставити фізичні експерименти на моделях реальних об'єктів (натурні випробування далеко не завжди можливі) — літаків, ракет, суден, підводних апаратів, елементів парових котлів і ядерних реакторів тощо.

Моделювання гідромеханічних процесів насамперед передбачає додержання **геометричної подібності** натурального і модельного об'єктів (n – "натури" і m – "моделі").

Якщо l_m і l_n – схожі лінійні величини двох потоків, а L_m і L_n – характерні лінійні розміри обтічних тіл або перерізів каналів (зокрема, труб), то мають виконуватися такі рівності:

$$\frac{l_m}{l_n} = \frac{L_m}{L_n} = m_l = idem,$$

де m_l — масштаб довжини; *idem* (лат.) означає «теж саме», «однакове».

Наведену пропорцію можна перебудувати:

$$\frac{l_m}{L_m} = \frac{l_n}{L_n} = \bar{l} = idem,$$

де $\bar{l}$ — безрозмірна довжина. Отже, у геометрично подібних модельних і натурних системах (для потоків в каналах, потоків біля обтічних тіл) безрозмірні довжини на схожих сторонах геометричних образів моделі і натури мають бути однаковими при аналізі характеристик течії.

Кінематична подібність означає подібність полів (профілів) швидкостей в схожих перерізах модельного і натурального потоків:

$$\frac{v_m}{v_n} = \frac{v_{0m}}{v_{0n}} = m_v = idem — \text{масштаб швидкості для моделі і натури,}$$

де v_m, v_n — поточні величини швидкостей модельного і натурального потоків в схожих точках; v_{0m}, v_{0n} — характерні швидкості моделі і натури (наприклад, середні швидкості потоків v_{cp} в каналах; швидкості незбурених потоків v_∞ , що набігають на тіла).

Перепишемо останню пропорцію у еквівалентному вигляді:

$$\frac{v_m}{v_{0m}} = \frac{v_n}{v_{0n}} = \bar{v} = idem — \text{безрозмірна швидкість в схожих точках моделі і натури.}$$

Для нестационарних течій потрібна подібність процесів течії у часі. Якщо, наприклад, для коливальних процесів за характерний час прийняти період коливань T , то $\bar{t} = \frac{t}{T}$ буде означати безрозмірний час, якщо t — поточний час. Тоді подібність модельної течії до натурної має спостерігатися в однакові моменти безрозмірного часу.

Геометрична та кінематична подібності визначають необхідні, але не достатні умови моделювання. Важливо також додержувати й **умови динамічної подібності**, яка передбачає однаковість безрозмірних значень сил у схожих точках (або перерізах) натурального і модельного потоків. Це досягається тоді, коли для двох потоків є рівними деякі безрозмірні комплекси параметрів, так звані **критерії подібності**. Отримаємо основні з них щодо нестационарного руху в полі сили тяжіння нестисливої рідини.

Візьмемо рівняння Нав'є-Стокса в загальному вигляді, априорно припускаючи, що йому підпорядкований рух рідини в схожих точках подібних потоків:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (7.13)$$

Введемо безрозмірні величини параметрів, що характеризують модельну і натурну течії в схожих точках у будь-який момент часу:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}; \quad \bar{z} = \frac{z}{L}; \quad \bar{v}_x = \frac{v_x}{v_0}; \quad \bar{v}_y = \frac{v_y}{v_0}; \quad \bar{v}_z = \frac{v_z}{v_0}; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}; \quad \bar{t} = \frac{t}{T}.$$

Тут характерні параметри, у тому числі введений характерний тиск p_0 , є сталими.

Вважаючи, що з масових сил у рідині діє лише сила тяжіння, запишемо рівняння (7.13) у проекціях на вісь Oz

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z$$

та виразимо всі параметри в ньому через безрозмірні й характерні величини

$$\frac{v_0}{T} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{t}} + \frac{v_0^2}{L} \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{y}} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} \right) = -g - \frac{p_0}{\rho L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \nu \frac{v_0}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{z}^2} \right).$$

Зауважимо, що кожний із множників при безрозмірних похідних, що складається з характерних параметрів, певною мірою відображає відповідні сили рівняння Нав'є-Стокса, які «породили» ці множники.

Щоб отримати рівняння руху рідини повністю в безрозмірному вигляді, поділимо всі його члени на розмірну величину v_0^2/L , яка характеризує конвективні сили інерції:

$$\frac{L}{v_0 T} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{y}} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} = -\frac{gL}{v_0^2} - \frac{p_0}{\rho v_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\nu}{v_0 L} \Delta \bar{v}_z.$$

Ми отримали безрозмірні комплекси — **критерії (числа) гідродинамічної подібності**, складені з характерних для даного процесу величин:

$$\frac{L}{v_0 T} = Sh \text{ — число Струхалія; } \frac{gL}{v_0^2} = \frac{1}{Fr^2} \Rightarrow \frac{v_0}{\sqrt{gL}} = Fr \text{ — число Фруда;}$$

$$\frac{p_0}{\rho v_0^2} = Eu \text{ — число Ейлера; } \frac{\nu}{v_0 L} = \frac{1}{Re} \Rightarrow \frac{v_0 L}{\nu} = Re \text{ — число Рейнольдса.}$$

Кожний критерій (число) подібності можна подати як міру відношення сил. За такого тлумачення **число Струхалія** характеризує міру співвідношення інерційних гідродинамічних сил, пов'язаних з локальним (зумовленим нестационарністю процесу) і конвективним прискореннями, **число Фруда** — міру співвідношення конвективних сил інерції та сили тяжіння, число Ейлера — міру співвідношення сил тиску і конвективних сил інерції, число Рейнольдса — міру співвідношення конвективних сил інерції та сил в'язкісного тертя.

Таким чином, потоки **нестисливої рідини** будуть динамічно подібними за умови

$$Sh = idem; \quad Fr = idem; \quad Eu = idem; \quad Re = idem \quad \text{для моделі і натури.}$$

Можна показати [1, с. 227–229], [2, 4–7], що потоки **стисливої рідини** (газу) будуть подібними, якщо $Sh = idem$; $Fr = idem$; $Re = idem$; $k = \frac{c_p}{c_v} = idem$; $M = \frac{v_0}{a} = idem$.

Тут k — показник адіабати (ізоентропи); v_0 і $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ — відповідно місцеві швидкість

течії і швидкість звуку в рідині (при $\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k} = const$ за адіабатною моделлю Лапласа-

Пуассона (ентропія $s = const$) $a = a_s = \sqrt{k \frac{p}{\rho}}$; M — **число Маха-Маїєвського**, причому

автоматично виконується рівність $Eu = \frac{p_0 \cdot k}{\rho_0 v_0^2 \cdot k} = \frac{1}{M \cdot k} = idem$. Ці критерії подібності є

особливо важливими в аеродинаміці високих швидкостей — **газодинаміці**.

В експериментальній аеродинаміці прийнято розділяти такі діапазони швидкості газів: при $0 < M < 0,8$ — **дозвуковий діапазон**; при $0,8 \leq M < 1,2$ — **колозвуковий діапазон**, в тому числі при $0,8 < M \leq 1$ — **трансзвуковий діапазон**; при $1,2 \leq M < 5$ — **надзвуковий діапазон**; при $M \geq 5$ — **гіперзвукові швидкості**.

Іноді, більш узагальнено, при $M < 1$ течію газу називають дозвуковою, причому при $M < (0,2 \div 0,3)$ вона майже аналогічна течії нестисливої рідини, тобто впливом стисливості можна нехтувати ($\rho \approx const$); при $M > 1$ течію називають надзвуковою, яка якісно відрізняється від течії нестисливої рідини, оскільки $\rho = var$ істотно.

Якщо потрібно враховувати сили поверхневого натягу та пружні властивості стінок конструкції, вводять відповідно **число Вебера**

$$We = \frac{\rho v_0^2 L}{\sigma}, \text{ дотримуючи } W = idem,$$

і **число Коші**

$$Ca = \frac{\rho v_0^2}{E}, \text{ дотримуючи } Ca = idem \text{ для моделі і натури,}$$

де σ — коефіцієнт поверхневого натягу рідини; E — модуль пружності матеріалу стінок.

При дослідженнях обтікання моделей літальних апаратів, автомобілів, локомотивів, лопаткових апаратів турбін і компресорів в аеродинамічних трубах (АДТ), а також надводних, підводних суден і апаратів в гідродинамічних трубах (ГДТ) і опитових басейнах використовують безрозмірні **коефіцієнти сили опору** R_x і **підіймальної сили** R_y :

$$c_x = \frac{R_x}{\rho \frac{v_0^2}{2} S}, \quad c_y = \frac{R_y}{\rho \frac{v_0^2}{2} S}, \text{ дотримуючи } c_x = idem \text{ і } c_y = idem \text{ для моделі і натури,}$$

де S – характерна площа (наприклад, площа міделевого перерізу – максимального перерізу, нормального до вектору швидкості потоку, що набігає; площа крила в плані).

Ці коефіцієнти мають бути безрозмірними функціями безрозмірних величин (наприклад, чисел Re , M та ін.).

Однією з важливих умов експериментального дослідження обтікання модельних тіл турбулентними потоками є дотримання наближених до натурних потоків рівнів **відносної інтенсивності турбулентності**, яку позначають як ε або Tu :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{3}(\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2})} / U_\infty,$$

або за окремими компонентами $\varepsilon_x = \sqrt{\overline{v_x'^2}} / U_\infty$, $\varepsilon_y = \sqrt{\overline{v_y'^2}} / U_\infty$, $\varepsilon_z = \sqrt{\overline{v_z'^2}} / U_\infty$, де U_∞ — середня швидкість основної течії в АДТ або ГДТ [6, 8] (іноді відносять до місцевих усереднених в часі компонент швидкості [3, 4]); в чисельниках – середні квадратичні значення компонент пульсаційної швидкості в даній точці. Якщо в ній $\overline{v_x'^2} = \overline{v_y'^2} = \overline{v_z'^2}$, турбулентність називають **ізотропною**, а за такої умови для всього потоку – **однорідною**. До прикладу, в АДТ $\varepsilon \approx 0,02 \div 1\%$; у вільній атмосфері $\varepsilon \approx 0,03 \div 0,3\%$; в машинах $\varepsilon \geq 8\%$.

Параметри, отримані експериментально на моделях, перераховують на реальні, що відповідають натурним умовам, за допомогою введених масштабів подібності.

Зробимо два важливих зауваження.

1. Умови однаковості безрозмірних диференціальних рівнянь, умов однозначності, критеріїв подібності для натурних і модельних потоків є необхідними, але не завжди достатніми для гідромеханічної і теплової подібності процесів. Це пов'язано, перш за все, з проблемою існування і єдності розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса, яка розв'язана хоча й для багатьох, але все ж таки окремих класів руху рідини.

2. У випадках, коли досліджуване явище ще не дає змоги обґрунтовано скласти рівняння процесу, або при великій різниці в розмірах моделі й натури (коли не можна забезпечити потрібні швидкості модельного потоку або дібрати відповідну рідину за в'язкістю, щоб гарантувати однаковість критеріїв подібності) використовують **принцип часткової подібності** за геометрією й кінематикою, а також за найістотнішими в цьому процесі силами.

7.7 Ламінарна течія в круглий трубі

Розглянемо стаціонарний і стабілізований рух вздовж осі x в'язкої рідини в круглій трубі внутрішнім діаметром $d=2r_0$, причому $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$, $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$. Запишемо відповідно x -компоненту рівнянь Нав'є-Стокса, враховуючи $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$ і нульову проекцію сили тяжіння на вісь x :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \nu \Delta v_x. \quad (7.14)$$

При стабілізованій течії $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, $v_y = v_z = 0$ і рівняння (7.14) набуває вигляду

$$\frac{dp}{dx} = \mu \Delta v_x. \quad (7.15)$$

Перейдемо до циліндричної системи координат, записавши в ній лапласіан швидкості $\Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$, де r – поточний радіус, θ – полярний кут.

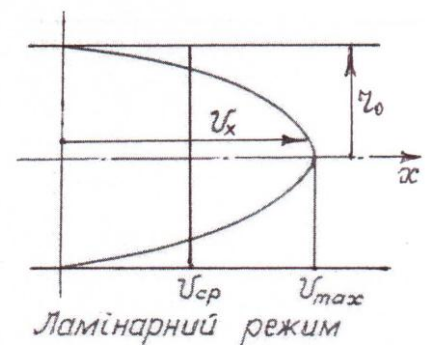
При стабілізованому русі рідини в трубі $\frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} = 0$ і $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$. Тоді рівняння (7.15) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

з крайовими умовами

$$v_x = 0, \text{ якщо } r = r_0;$$

$$\frac{dv_x}{dr} = 0, \text{ якщо } r = 0.$$



Розв'язок задачі подвійним інтегруванням дається формулою

Рис. 31.

$$v_x = -\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} (r_0^2 - r^2). \quad (7.16)$$

Таким чином, отримали **параболічний профіль швидкості** при ламінарному режимі течії в круглій трубі («параболу Пуазейля») (рис. 31).

Максимальна швидкість досягається на осі труби, тобто при $r=0$:

$$v_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r_0^2.$$

Середня швидкість $v_{cp} = Q/S$, що з урахуванням (7.16) приводить до формули

$$v_{cp} = \frac{2\pi}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} v_x r dr = -\frac{1}{8\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r_0^2 = \frac{v_{\max}}{2}. \quad (7.17)$$

Втрата напору на ділянці труби довжиною L

$$h_{mp} = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{L}{\rho g}.$$

З іншого боку, відома формула Дарсі-Вейсбаха: $h_{mp} = \lambda \frac{L}{d} \frac{v_{cp}^2}{2g}$.

На підставі цих формул, виразивши $-\frac{dp}{dx}$ з (7.17), знайдемо коефіцієнт гідравлічного тертя

$$\lambda = \frac{64\nu}{v_{cp} d} = \frac{64}{\text{Re}}.$$

Дістали **формулу Пуазейля** для випадку ламінарної течії в круглій трубі.

При лінійному законі падіння тиску потоку в трубі $\frac{dp}{dx} = -\frac{p_1 - p_2}{L}$, де $p_1 - p_2 = \Delta p$ —

перепад тиску на довжині L труби. При підстановці $\frac{dp}{dx}$ в формулу (7.17) отримаємо

$$v_{cp} = \frac{\Delta p}{8\mu L} r_0^2. \quad (7.18)$$

Об'ємна витрата потоку в трубі $Q = v_{cp} \cdot \pi r_0^2 \Rightarrow Q = \frac{\Delta p}{8\mu L} \pi r_0^4. \quad (7.19)$

Формули (7.18) і (7.19) відомі як **формули Хагена-Пуазейля** (1839–1841).

Треба пам'ятати, що тільки при ламінарному режимі можливе отримання точних розв'язків рівнянь руху Нав'є-Стокса, але повна адекватність реальним картинам течії спостерігається не завжди, що потребує постановки фізичних експериментів.

7.8. Рівняння Рейнольдса для турбулентних потоків

На сьогодні при розв'язанні інженерних задач прийнято вважати, що у випадку турбулентних течій рівняння Нав'є-Стокса справджуються. Але пошуки коректних розв'язків цих рівнянь без залучення емпіричних даних практично не можуть використовуватися для визначення параметрів потоку принаймні з двох причин:

1) якщо числа Рейнольдса великі, то математичне розв'язування згаданих рівнянь стикається к принциповими математичними труднощами (відсутність доведень теорем існування та єдиності тривимірного розв'язку рівнянь нестисливої течії у будь-який момент часу — **одна з основних невирішених проблем математики і гідромеханіки!**);

2) неможливо коректно задати початкові умови з урахуванням хаотичності пульсації швидкості й тиску, але навіть якщо б вони були задані у всій області течії, то знайдені миттєві значення швидкості використати на практиці було б практично неможливо.

Тому для аналізу турбулентних потоків важливо виділити деякі усереднені значення швидкостей і напружень, які разом з пульсаційними складовими визначають місцеві миттєві значення параметрів.

Наприклад, модуль вектора швидкості можна подати у вигляді $v = \bar{v} + v'$, де $\bar{v}$ – усереднена місцева швидкість; v' – пульсаційна швидкість.

Усереднення може бути або за часом, або за ансамблем, тобто статистичним (останнє практично здійснити дуже важко). Для довільної пульсуючої величини f (швидкості, тиску тощо) усереднення за часом, згідно з теоремою «про середнє», визначається формулою

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (T - \text{період усереднення}). \quad (7.20)$$

Період усереднення обирається таким, що згладжування пульсуючого параметра за часом приводить до усередненої величини, яка вже не змінюється при повторному згладжуванні: $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$. За наявності ще одної функції f_1 , що змінюється (пульсує), маємо на підставі (7.20) $\overline{\bar{f} f_1} = \bar{f} \cdot \bar{f}_1$, оскільки при підстановці $\bar{f} f_1$ до формули (7.20) величина $\bar{f}$ виноситься за знак інтеграла, а для функції f_1 отримаємо дію формули (7.20).

Властивості операції усереднення за Рейнольдсом:

1) $\overline{f'} = 0$; 2) $\overline{C} \equiv C$ (C – константа); 4) $\overline{Cf} = C\bar{f}$; 5) $\overline{f + f_1} = \bar{f} + \bar{f}_1$; 6) $\overline{\frac{\partial}{\partial x} f} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}$, оскільки операції диференціювання по координаті та інтегрування за часом є незалежними; 7) $\overline{\frac{\partial}{\partial t} f} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}$, що легко довести наступним чином:

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial t} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i}{n} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{n} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}.$$

Запишемо перше з рівнянь руху рідини в напруженнях:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right). \quad (7.21)$$

Переконаємося, що для нестисливої рідини ($\text{div } \vec{v} = 0$) має місце рівність

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (v_x v_z).$$

Правильність цього співвідношення пропонуємо читачам перевірити самостійно.

Тоді можна записати рівняння (7.21), застосовуючи усереднення всіх доданків:

$$\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v_x v_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v_x v_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v_x v_z}) = F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{p_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{p_{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{p_{zx}}}{\partial y} \right).$$

У цьому рівнянні для турбулентної течії потрібно покласти

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x, \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y, \quad v_z = \bar{v}_z + v'_z;$$

$$p_{xx} = \bar{p}_{xx} + p'_{xx}, \quad p_{yx} = \bar{p}_{yx} + p'_{yx}, \quad p_{zx} = \bar{p}_{zx} + p'_{zx}.$$

З огляду на властивість 1 операцій усереднення, в результаті дістанемо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}_x \bar{v}_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v'_x v'_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}_x \bar{v}_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'_x v'_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_x \bar{v}_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v'_x v'_z}) = \\ & = F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_{zx}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи рівняння нерозривності для усередненого потоку

$$\text{div } \bar{\vec{v}} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0,$$

дістанемо **рівняння Рейнольдса турбулентного руху рідини** в проекції на вісь x

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} = F_x + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_{xx} - \rho \overline{v'_x v'_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{p}_{yx} - \rho \overline{v'_x v'_y}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{p}_{zx} - \rho \overline{v'_x v'_z}) \right]. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Аналогічно записуються й інші два рівняння в проекціях на осі Oy та Oz :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} = F_y + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_{xy} - \rho \overline{v'_y v'_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{p}_{yy} - \rho \overline{v'_y v'_y}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{p}_{zy} - \rho \overline{v'_y v'_z}) \right]; \\ & \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = F_z + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_{xz} - \rho \overline{v'_z v'_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{p}_{yz} - \rho \overline{v'_z v'_y}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{p}_{zz} - \rho \overline{v'_z v'_z}) \right]. \end{aligned} \right\} (7.22)'$$

Як бачимо, в усередненому турбулентному потоці до звичайних в'язкісних напружень в рівняннях Рейнольдса додаються додаткові напруження поверхневих сил виду $-\rho \overline{v'_i v'_j} = \tau_{ij}$, де $i = x, y, z; j = x, y, z$, які називаються **турбулентними напруженнями**, або **напруженнями Рейнольдса**, і роблять систему рівнянь незамкненою. Вони виникають в турбулентному потоці через взаємний обмін кількістю руху між окремими ділянками турбулентного потоку при перемішуванні рідких частинок

завдяки їх пульсаційному руху. Це викликає додаткове підгальмовування або прискорення окремих мас рідини і спричиняє значні втрати енергії при русі рідини.

Повна сукупність турбулентних нормальних і дотичних напружень утворює, за аналогією з в'язкісними напруженнями $\bar{p}_{ij}$, симетричну матрицю, яку називають **тензором турбулентних напружень**

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho v'_x v'_x} & -\overline{\rho v'_x v'_y} & -\overline{\rho v'_x v'_z} \\ -\overline{\rho v'_y v'_x} & -\overline{\rho v'_y v'_y} & -\overline{\rho v'_y v'_z} \\ -\overline{\rho v'_z v'_x} & -\overline{\rho v'_z v'_y} & -\overline{\rho v'_z v'_z} \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

Підсумовуючи, треба сказати, що диференціальні рівняння Рейнольдса певною мірою відображають фізичну сутність явища турбулентної течії. Але на сьогодні точних виразів, які б визначали зв'язок між турбулентними напруженнями і розподілом усереднених параметрів потоку, немає. Вважають, що побудова моделей для визначення тензора напружень Рейнольдса є основною проблемою моделювання турбулентних течій. Одним з найбільш перспективних наразі уявляється напрямок, заснований на застосуванні рівнянь збереження маси, імпульсу та енергії, які описують поведінку напружень Рейнольдса. Такий підхід найбільш повно відображатиме фізичну сутність явищ: пульсуючі малі рідкі об'єми, названі «**турбулентними молями**», переносяться середнім рухом турбулентного потоку, підсилюються через взаємодію із деформаційними процесами (що відбуваються з певною середньою швидкістю деформації), руйнуються внаслідок взаємодії вихорів між собою і дифундують за рахунок власних пульсаційних швидкостей.

7.9. Деякі гіпотези про турбулентні напруження. Турбулентна течія в трубі

Спочатку розглянемо квазіплоскопаралельну в середньому і безнапірну турбулентну течію рідини (відповідно з двовимірними пульсаціями v'_x і v'_y) вздовж пластини, паралельній осі x . В даному випадку, як видно з рівняння (7.22) попередньої лекції, повне дотичне напруження на площинці, складається з двох доданків

$$\tau = \mu \frac{d\bar{v}_x}{dy} - \rho \overline{v'_x v'_y} = \tau_\mu + \tau_t,$$

де $\tau_\mu = \mu \frac{d\bar{v}_x}{dy}$ — дотичне напруження, зумовлене молекулярною в'язкістю; $\tau_t = -\rho \overline{v'_x v'_y} > 0$ — турбулентне напруження тертя; знак мінус компенсується від'ємністю добутку $v'_x v'_y$ (як і інших різнойменних пульсаційних складових швидкості), оскільки, наприклад при $v'_x > 0$, другий множник, який діє на елементарний об'єм, $v'_y < 0$ внаслідок незмінності маси в цьому об'ємі.

Для замикання системи рівнянь турбулентного потоку існують певні гіпотези, які виражають турбулентні напруження через усереднені швидкості течії.

Згідно з Ж. Буссінеском (Франція, 1877 р.), за аналогією з в'язким тертям турбулентне напруження записується у вигляді

$$\tau_t = A \frac{d\bar{v}_x}{dy}, \quad (7.24)$$

де $A = \nu_t \rho$ — **коефіцієнт турбулентного обміну** (турбулентного переносу, «турбулентної в'язкості»); ν_t — **кінематичний коефіцієнт турбулентної в'язкості**.

Коефіцієнт A є турбулентним аналогом відомого вам динамічного коефіцієнта молекулярної в'язкості $\mu = \nu \rho$, що визначається фізичними властивостями і термодинамічними параметрами рідин і газів. Однак, на відміну від останнього, коефіцієнт A визначається статистичними особливостями течії, оскільки він викликаний макропереносом кількості руху ($m\vec{v}$) скінченних об'ємів рідини хаотичними поперечними пульсаціями швидкості. Якщо припустити, що $A = idem$ по поперечному перерізу плоскої труби і визначити величину A по вимірюваному опору труби при турбулентному режимі течії, то вийде, що $A \gg \mu$ в десятки тисяч разів! Відомий вчений в

галузі динаміки атмосферних рухів Л. Річардсон підрахував, що коефіцієнт турбулентної в'язкості A повітря дорівнює динамічному коефіцієнту молекулярної в'язкості μ сиропу, а відповідний кінематичний коефіцієнт турбулентної в'язкості $\nu_t = A/\rho$ повітря дорівнює кінематичному коефіцієнту молекулярної в'язкості ν взуттєвої вакси.

Л. Прандтль (Німеччина, 1925 р.) запропонував модель для визначення турбулентного напруження тертя, використовуючи так звану **довжину шляху перемішування** $l = l(y)$,

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2. \quad (7.25)$$

Нагадаємо, що малі рідкі об'єми (малі вихрові «клубочки» більших масштабів, ніж молекули), що переносяться під впливом пульсацій, прийнято називати «**турбулентними молями**», а відповідний турбулентний обмін – **молярним обміном**.

Довжину шляху перемішування l можна трактувати як умовну відстань, на якій характеристики (зокрема, кількість руху) турбулентного моля зберігаються однаковими.

Л. Прандтль припустив, що довжина шляху перемішування лінійно залежить від відстані y до твердої стінки $l = \alpha y$, де α («каппа») — коефіцієнт пропорційності.

І. Нікурадзе дослідним шляхом підтвердив можливість такого припущення і встановив, що коефіцієнт $\alpha \approx 0,41$ і є практично постійним для гідравлічно гладких та шорстких стінок і труб, тому його називають **універсальною сталою Прандтля-Кармана**. Однак, поблизу осі труби формула Л. Прандтля дещо втрачає адекватність і, все ж, введення поняття довжини шляху перемішування $l(y)$ виявилось достатньо ефективним.

Теодор фон Карман (1881–1963) — видатний вчений в галузі гідрогазодинаміки і механіки (Німеччина–США).

Наступний істотний внесок в теорію турбулентності належить А. Колмогорову (1941, 1942) і Л. Прандтлю (1945), які запропонували зв'язок турбулентних напружень

тертя $\tau_t = -\rho \overline{v'_x v'_y} = \rho \nu_t \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}$ (за Буссінеском) з питомою кінетичною енергією

пульсаційного руху $e = \frac{\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}}{2}$ та інтегральним масштабом турбулентності L , що

характеризує певний середній розмір турбулентних вихорів, причому, згідно з цією теорією, кінематичний коефіцієнт турбулентної в'язкості $\nu_t = k\sqrt{e} \cdot L$, де k – **емпірична функція місцевого турбулентного числа Рейнольдса**. Але останнє співвідношення саме по собі не дозволяє замкнути систему рівнянь руху рідини, бо містить невідомі величини

e та L . Тому в роботах А. Колмогорова, Л. Прандтля і І. Ротта (1951) уведені гіпотези про механізми дифузії і дисипації турбулентних вихорів, а також отримані диференціальні рівняння для визначення e та L . Розв'язки цих рівнянь враховують залежність коефіцієнта ν_t від передісторії течії, що не властиво формулам Л. Прандтля через локальний характер зв'язку турбулентного тертя та турбулентної в'язкості, який не враховує механізми конвективного або дифузійного переносу пульсацій в дану точку потоку. До того ж теорія Колмогорова-Прандтля дозволила адекватно описати турбулентну течію на осі симетрії потоку (наприклад, на осі симетрії труби), на відміну від теорій Буссінеска та «шляху перемішування» Прандтля: на осі труби перша дає $\nu_t \rightarrow \infty$, а друга $\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right| \rightarrow 0$, де l – довжина шляху перемішування, що не відповідає дійсності.

На сьогодні існують і розвиваються більш складні багатопараметричні диференціальні моделі турбулентних напружень, наприклад на базі $(k - \varepsilon)$ -моделей. Тут параметр k характеризує кінетичну енергію пульсацій, а параметр ε — швидкість дисипації енергії.

Дотичне напруження тертя в турбулентному потоці в цілому залишається сталим ($\tau_\mu + \tau_t = \tau_0$) в так званій **пристінній зоні** труби, яка не перевищує відносної відстані від стінок $\frac{y}{r_0} \approx 0,15 \div 0,2$, де r_0 – внутрішній радіус труби. Згідно з **двошаровим уявленням Л. Прандтля**, безпосередньо поблизу стінок основну роль відіграє молекулярна в'язкість: $\tau_\mu \gg \tau_t$, тобто поблизу від стінок існує тонкий **в'язкий підшар**, у якому вважається, що $\tau_0 \approx \tau_\mu$; натомість, у **турбулентному ядрі** $\tau_t \gg \tau_\mu$, тому приймається $\tau_t \approx \tau_0$.

7.10. Профіль усередненої швидкості турбулентного потоку

Л. Прандтль запропонував поняття "динамічної швидкості":

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \text{ м/с.} \quad (7.26)$$

Також для аналізу пошарової макроструктури турбулентної течії вводиться безрозмірна ордината в поперечному перерізі потоку, відлічувана від обтічної поверхні пластини або від нижньої внутрішньої поверхні труби: $y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$.

Профіль швидкості в межах пристінної зони $0 < y^+ \leq 100$ спочатку будувався відповідно до зазначеного двошарового підходу Л. Прандтля:

1. В'язкий підшар: на підставі (7.26) і закону тертя Ньютона маємо

$$\tau_0 \approx \tau_\mu \Rightarrow \rho u_\tau^2 = \rho \nu \frac{d\bar{v}_x}{dy}, \text{ звідки } \frac{d\bar{v}_x}{u_\tau} = \frac{u_\tau}{\nu} dy, \text{ або інтегруючи, } \frac{\bar{v}_x}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} + C_1.$$

Константу інтегрування знаходимо, виходячи з граничної умови: на обтічній поверхні пластини або на нижній внутрішній поверхні труби (при $y = 0$) $\bar{v}_x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

Звідси випливає лінійний закон розподілу швидкості у в'язкому підшарі:

$$\boxed{\frac{\bar{v}_x}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} = y^+}. \quad (7.27)$$

Згідно з дослідями, цей закон справджується при $0 < y^+ < 5 \div 8$. При $y^+ \approx 11 \div 15$ зароджуються основні вихрові структури, які поширюються у вигляді гвинтоподібних вихрових «волокон» (торнадо подібних «смужок») вище стінки до $y^+ \approx 40$, де вони розпадаються на більш дрібні «дисипативні» вихори колмогорівських масштабів.

2. Турбулентне ядро: у турбулентному ядрі $\tau_\tau \approx \tau_0$, тому згідно з (7.25) і (7.26)

маємо $\rho u_\tau^2 = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2$, що при врахуванні $l = \alpha y$ зводиться до $\frac{d\bar{v}_x}{u_\tau} = \frac{1}{\alpha} \frac{dy}{y}$; звідси, інтегруючи, отримаємо

$$\frac{\bar{v}_x}{u_\tau} = \frac{1}{\alpha} \ln y + C_2. \quad (7.28)$$

Константа інтегрування C_2 знаходиться наступним чином. Якщо умовно вважати, що товщина в'язкого підшару δ визначає межу, що розділяє його і турбулентне ядро, то прийнявши для цієї межі $y = \delta$ і $\bar{v}_x = \bar{v}_\delta$, на підставі (7.27) маємо $\bar{v}_\delta = \frac{u_\tau^2 \delta}{\nu}$, звідки

$\delta = \frac{\bar{v}_\delta \nu}{u_\tau^2}$. Підстановка $\bar{v}_\delta$ та δ до формули (7.28) дозволяє визначити константу C_2 :

$$C_2 = \frac{\bar{v}_\delta}{u_\tau} - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\bar{v}_\delta \nu}{u_\tau^2}.$$

З урахуванням цієї константи формула (7.28) остаточно набуває вигляду

$$\boxed{\frac{\bar{v}_x}{u_\tau} = \frac{1}{\alpha} \ln y^+ + C}. \quad (7.29)$$

де константа $C = \frac{\bar{v}_\delta}{u_\tau} - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\bar{v}_\delta \nu}{u_\tau^2}$ потребує визначення експериментальним шляхом.

Формула (7.29) відображає логарифмічний закон розподілу швидкості в турбулентному ядрі потоку (так звана «логарифміка»). Цю формулу отримав **І. Нікурадзе**. Його досліді показали, що логарифмічний закон практично не залежить від числа Re (звісно, при $Re > Re_{кр}$), тому отриманий профіль швидкості в турбулентному ядрі потоку називають **універсальним профілем**. За дослідями І. Нікурадзе та інших дослідників встановлено, що для гідравлічно гладких труб і стінок $C = 5,5$; для шорстких — $C = 8,48$. Але ретельні експериментальні дослідження показали, що турбулентне ядро спостерігається не одразу за межами в'язкого підшару, а в діапазоні $30 < y^+ \leq 100$. За межами пристінної зони, тобто при $y^+ > 100$, має місце відхилення від «логарифміки».

Ліквідуючи певну невизначеність проміжної зони між в'язким підшаром і турбулентним ядром, **Т. Карман** увів поняття «**буферної**» (перехідної) області течії, де молекулярні і турбулентні дотичні напруження сумірні: $\tau_\mu \sim \tau_\tau$. Це зона максимального породження турбулентності, починаючи від верхньої межі в'язкого підшару.

Згідно з Т. Карманом, при $5 \leq y^+ \leq 30$ розподіл швидкості відповідає формулі

$$\frac{\bar{v}_x}{u_\tau} = 5 \ln y^+ - 3. \quad (7.30)$$

Плавне з'єднання епюр усередненої швидкості течії в трьох зазначених вище зонах дає остаточний профіль швидкості в трубі, схематично показаний на рис. 32.

Прийнято області в'язкого підшару, буферної зони та турбулентного ядра з логарифмічним законом розподілу, тобто в пристінній зоні над обтічною поверхнею, вважати такими, що підпорядковуються так званому «закону стінки»,

який узагальнено записують як $\frac{\bar{v}_x}{u_\tau} = f(y^+)$. Однак, він

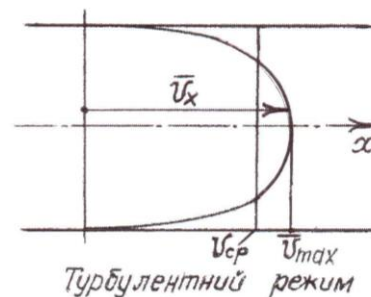


Рис. 32.

порушується в закручених потоках та поблизу криволінійних стінок через сукупну дію відцентрових сил, сил в'язкості і сил тиску. Під їх впливом утворюються вторинні течії, які змінюють структуру потоків і, як результат, гідроаеродинамічний опір та тепломасообмін в енергетичному обладнанні.

Враховуючи, що в трубі зона найбільших швидкостей потоку наближена до осі труби, на підставі формули (7.29) легко визначити відносну максимальну швидкість в гідравлічно гладкій трубі:

$\frac{\bar{v}_{max}}{u_\tau} = 2,5 \ln \frac{u_\tau r_0}{\nu} + 5,5$. Також з «логарифміки», усереднюючи $\bar{v}_x$

за перерізом, можна отримати формулу для відносної середньої швидкості в гладкій трубі:

$$\frac{v_{cp}}{u_{\tau}} = \frac{\bar{v}_{\max}}{u_{\tau}} = 3,75. \quad (7.31)$$

На практиці часто використовують емпіричну формулу («степеневий закон») для розподілу швидкості в турбулентному потоці. **Т. Карман** з міркувань розмірності встановив, що степеневому закону опору $\lambda = 0,3164 / \text{Re}^{0,25}$ відповідає і степеневий «закон кореня 7-ї степені», або, як кажуть, «закон $\frac{1}{7}$ -ї» для гідравлічно гладких труб:

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/7},$$

де y – поточна радіальна відстань від внутрішньої стінки труби.

Наступні дослідження встановили більш загальний і уточнений вигляд степеневі формули Кармана:

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^n,$$

де $n \approx 0,1$ для гладких труб; $n \approx 0,25$ для шорстких труб.

7.11. Деякі закони опору для турбулентних течій у трубах

З рівняння балансу сил тиску, що діють на певний відсік рідини при рівномірному русі в трубі, виразивши дотичні напруження, які спричиняють опір, з одного боку через динамічний тиск і коефіцієнт тертя $\tau_0 = c_f \frac{\rho v_{cp}^2}{2}$, а з другого – через «динамічну швидкість» згідно з (7.26), приходимо до формули

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u_{\tau}^2 = \frac{1}{8} \lambda v_{cp}^2, \quad (7.32)$$

де λ — відомий вам з гідравліки коефіцієнт гідравлічного тертя.

На підставі формул (7.31) і (7.32) після перетворень Л. Прандтль отримав формулу для розрахунку коефіцієнта гідравлічного тертя в гладких трубах

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (\text{Re} \sqrt{\lambda} - 0,8).$$

Ця формула досить добре відповідає дослідним даним, проте не дуже зручна для обчислень.

Для цілком шорстких труб Л. Прандтль пропонував зв'язок між λ і відносною гладкістю стінки труби у вигляді $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \lg \frac{d}{\Delta} + B$, де A і B – емпіричні коефіцієнти.

В лекції № 10, п. 5.4, наведено графік І. Нікурадзе для модельних гладких труб зі штучною, рівномірно нанесеною піщаною шорсткістю, а також більш практичні формули для розрахунку коефіцієнта гідравлічного тертя λ в технічних трубах з неоднорідною шорсткістю.

Запитання для самоперевірки до розділу 7

1. Як формулюється теорема Коші - Гельмгольца?
2. Яка складова швидкості точки рідкої частинки характеризує її обертання?
3. Випишіть і поясніть тензор швидкостей деформації рідкої частинки.
4. Випишіть і поясніть тензор напруження малої рідкої частинки.
5. Які властивості тензора напруження вам відомі?
6. У чому полягає суть теореми Остроградського-Гаусса?
7. Виведіть рівняння руху рідини в напруженнях.
8. Сформулюйте узагальнений закон Ньютона в термінах тензорів напружень і швидкостей деформації.
9. Виведіть рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої рідини і поясніть їх фізичний зміст.
10. Сформулюйте початкові та крайові умови, яким має бути підпорядкований розв'язок рівнянь Нав'є-Стокса.
11. Що ви розумієте під моделюванням гідродинамічних процесів?
12. Яких умов необхідно дотримуватися при моделюванні течій?
13. Дістаньте основні критерії гідродинамічної подібності (Sh, Fr, Eu, Re).
14. Дайте фізичне тлумачення знайдених критеріїв.
15. Які основні критерії подібності для потоків стисливої рідини?
16. Який критерій подібності враховує сили поверхневого натягу в рідині?
17. Поясніть фізичний зміст критерію Коші.
18. Значення критеріїв подібності під час аналізу сили опору та підйимальної сили при обтіканні тіл.
19. Необхідність і достатність умов подібності гідродинамічних процесів.
20. У чому полягає принцип часткової подібності?
21. Який закон розподілу швидкостей за перерізом ламінарного потоку в круглій трубі?

22. Як визначити максимальну швидкість в живому перерізі ламінарного потоку?
23. Виведіть формулу Пуазейля для коефіцієнта тертя.
24. Які можливості практичного застосування рівнянь Нав'є-Стокса?
25. Які види усереднення параметрів турбулентної течії середовищ вам відомі?
26. Назвіть основні правила усереднення параметрів течії.
27. Запишіть і поясніть рівняння нерозривності та руху через усереднені параметри для турбулентних потоків.
28. У чому полягає зміст напружень Рейнольдса?
29. Як аналітично визначається дотичне напруження у турбулентному потоці рідини?
30. Охарактеризуйте модель Прандтля для визначення турбулентного напруження.
31. Який розподіл складових дотичного напруження за перерізом труби ви знаєте?
32. Охарактеризуйте профіль усередненої швидкості в турбулентному потоці.
33. Сформулюйте «закон кореня 7-ї степені» Т. Кармана.
34. Які закони опору справджуються для турбулентних течій у трубах?

8. ПОНЯТТЯ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ ТА ВІДРИВНИХ ТЕЧІЙ

Примежовий шар та його характеристики. Відрив примежового шару. Рівняння Прандтля. Задача Блазіуса. Відривні течії: схеми Гельмгольца, Кірхгофа, Рябушинського, Жуковського-Рошко, Туліна.

[1, с. 293-388; 2, с. 357-427, 271-275; 3, с. 226-229, 432-440; 4, с. 132-152; 6, с. 439-544; 7, с. 659-814; 8, с. 36-54, 124-190, 571-645; 9, с. 137-142, 170-186; 12, с. 669-726]

8.1. Примежовий шар та його характеристики

Точне теоретичне розв'язування задачі руху в'язкої рідини можливе лише в найпростіших частинних випадках, наприклад для дуже великих і дуже малих числах Рейнольдса Re .

Для повільних ("повзучих") рухів при $Re < 1$ інерційні сили в рівняннях Нав'є-Стокса значно менші за сили в'язкості і ними нехтують (відомий розв'язок Стокса для кулі, який справджується при русі досить малих крапель) або враховують їх наближено (розв'язки Озеєна, Гольдштейна) [3, с. 147 - 148, 226; 7, с. 660 - 662; 9, с. 137 - 138].

Якщо значення Re досить великі, силами в'язкості порівняно з інерційними силами можна знехтувати і відшукувати розв'язок за допомогою теорії руху ідеальної рідини, зокрема теорії потенціальних течій. Проте такі рухи не задовольняють крайовій умові прилипання реальної рідини до стінок тіла, що обтікається, і можуть справджуватися лише в "зовнішньому" потоці на деякій відстані по зовнішній нормалі від тіла, де швидкість рідини стає близькою до швидкості v_∞ потоку, що набігає.

Область великих поперечних градієнтів швидкості поблизу обтічного тіла, де сили в'язкості настільки виразно виявляються, що мають такий самий порядок, як і решта сил, що враховуються рівняннями руху, називається **гідродинамічним примежовим шаром (ПШ)**. За тілом примежовий шар переходить у гідродинамічний (або аеродинамічний) слід — підгальмований супутній струмінь (рис. 33).



Рис. 33.

Ідея примежового шару була висловлена ще в XIX столітті В. Ренкіним (1864 р.), Д.І. Менделєєвим (1880 р.) та М.Є. Жуковським (1890 р.), і згодом розвинута в працях Л. Прандтля, Т. Кармана, Н. Є. Кочіна, К. К. Федяєвського, Л. Г. Лойцяньського, Г. Шліхтінга та інш.

Розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса для примежового шару можна знайти лише після деяких спрощень, запропонованих **Людвігом Прандтлем** (1904 р.).

Таким чином, розраховуючи течії з великими числами Re , розглядають спрощені рівняння руху рідини в примежовому шарі та зовнішньому потоці, "зшиваючи" потім знайдені розв'язки в єдине ціле.

Основними характеристиками примежового шару є його товщина δ , а також δ^* — товщина витіснення, δ^{**} — товщина втрати імпульсу, δ^{***} — товщина втрати енергії.

Товщина примежового шару δ — умовна величина, вимірювана вздовж нормалі від тіла як відстань, на якій швидкість рідких частинок відрізняється від швидкості зовнішнього потенціального потоку v_∞ на $0,5 \div 1\%$. Згідно з цим, зовнішня межа примежового шару не є лінією течії потоку, а виконує роль умовної границі зони впливу в'язкості. Іноді розглядається безрозмірна товщина примежового шару $\bar{\delta} = \delta / L \ll 1$, де L — характерний поздовжній розмір тіла, що обтікається (для крила – хорда, для пластини – її довжина).

Внаслідок в'язкості і перетворення на нуль швидкості на поверхні твердого тіла, лінії течії відтісняються від обтічної поверхні (рис. 34).

Візьмемо лінію течії, яка при $x \rightarrow -\infty$ збігається з прямою $y = \delta$. Якщо розмір за нормаллю до креслення дорівнює одиниці, то витрата між двома лініями течії

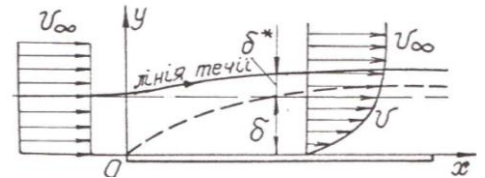


Рис. 34.

з прямою $y = \delta$. Якщо розмір за нормаллю до креслення дорівнює одиниці, то витрата між двома лініями течії $y = 0$ та $y = \delta$ в нескінченності дорівнює $Q = v_\infty \delta \cdot 1$. Витрата через переріз примежового шару товщиною δ є меншою через певне підгальмовування течії силами в'язкості:

$$\int_0^\delta v dy < v_\infty \delta.$$

Для того щоб витрата зберігалася, лінія течії відтіснитиметься на величину δ^* . Тоді баланс витрати можна записати у вигляді

$$\int_0^\delta v dy + v_\infty \delta^* = v_\infty \delta,$$

звідки

$$\delta^* = \int_0^{\delta, \infty} \left(1 - \frac{v}{v_\infty} \right) dy.$$

Альтернативна верхня границя інтеграла ∞ не змінює його значення, оскільки за межами ПШ $\delta < y < \infty$ матимемо $v \rightarrow v_\infty$, що дає $\delta^* \rightarrow 0$; натомість в межах ПШ $\delta^* > 0$.

Товщина витіснення δ^* є відстань, на яку відсуваються від тіла лінії течії зовнішнього руху внаслідок витісняючої дії утвореного примежового шару. Для ламінарно обтічної пластини $\delta^* \approx \frac{1}{3} \delta$.

Товщинами втрати імпульсу та втрати енергії називають відповідно величини

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta, \infty} \frac{v}{v_{\infty}} \left(1 - \frac{v}{v_{\infty}}\right) dy, \quad \delta^{***} = \int_0^{\delta} \frac{v}{v_{\infty}} \left[1 - \left(\frac{v}{v_{\infty}}\right)^2\right] dy.$$

Вони характеризують втрати кількості руху і кінетичної енергії на подолання сил тертя всередині примежового шару.

Число Рейнольдса для примежового шару можна обчислювати у вигляді

$$\text{Re}_{\delta} = \frac{v_{\infty} \cdot \delta}{\nu}, \quad \text{Re}^* = \frac{v_{\infty} \cdot \delta^*}{\nu}, \quad \text{Re}^{**} = \frac{v_{\infty} \cdot \delta^{**}}{\nu}, \quad \text{Re}_{L, \infty} = \frac{v_{\infty} \cdot L}{\nu}.$$

Незалежно від зовнішнього потоку, примежовий шар може бути ламінарним, турбулентним і мішаним. Ламінарна течія в ПШ можлива аж до великих чисел Рейнольдса при русі частинок з додатним прискоренням до точки мінімуму тиску. Перехід від ламінарного режиму до турбулентного в ПШ при обтіканні плоскої поверхні або поверхні малої кривизни пов'язаний із зростанням товщини ПШ через підгальмовування рідини, а отже, при збільшенні числа Re_{δ} до критичного значення (того ж порядку, що й $\text{Re}_{\text{кр}}$ для труб), яке відповідає втраті стійкості ламінарної течії (рис. 35).

На розміщення перехідної зони (умовно "точки" переходу) впливають:

число Рейнольдса $\text{Re}_{\infty} = \frac{v_{\infty} \cdot L}{\nu}$, ступінь

турбулентності $\varepsilon = \sqrt{v'^2} / v_{\infty}$ потоку, що

набігає, ступінь шорсткості Δ/L , геометричні

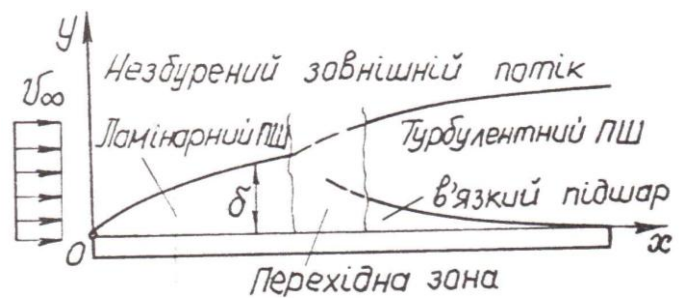


Рис. 35.

характеристики поверхні. Її кривизна, наявність перешкод, зміна поперечного перерізу потоку зумовлюють відмінний від нуля поздовжній градієнт тиску. Падіння тиску

(наприклад, якщо течія конфузрна: $\frac{dp}{dx} < 0$) сприяє стійкості ламінарного примежового

шару, а підвищення тиску (наприклад, якщо течія дифузрна: $\frac{dp}{dx} > 0$, а також у потоці

перед виступом на поверхні тощо) сприяє нестійкості ПШ.

Процес ламінарно-турбулентного переходу починається з утворення плоскої хвилі Толлміна-Шліхтінга у вертикальній площині, потім на них накладаються трансверсальні коливальні рухи в площині пластини. Їх сукупність приводить до утворення поздовжніх вихрових систем, а також складних тривимірних хвиль (амплітуда яких стає періодичною функцією поперечної координати z в площині обтічної поверхні). Зривання периферійних частин згинних по z вихорів, а також точкові елементи шорсткості поверхні є причиною

появи «турбулентних плям Еммонса», інтенсивний розвиток яких в кінцевому рахунку призводить до утворення турбулентного примежового шару з відносно дрібними вихровими структурами.

У турбулентному примежовому шарі в безпосередній близькості до стінки, яка обмежує поперечні та поздовжні пульсаційні швидкості, існує **в'язкий підшар** (аналогічно турбулентній течії в трубах).

Важливо пам'ятати, що при безвідривному обтіканні тіл ламінарний примежовий шар забезпечує менший опір тертя, а тому вигідно зберігати його на більшій частині поверхні. Для цього всемірно зменшують шерехатість поверхні, проектують "ламінаризовані" крилові профілі та обводи тіл обертання, зміщуючи назад міделевий переріз, а отже й точку мінімуму тиску. Часткове відсмоктування примежового шару також сприяє ламінаризації примежового шару, оскільки це зменшує його товщину і забезпечує отримання стійких щодо зовнішніх збурень профілів швидкостей.

8.2. Рівняння Прандтля прилежого шару. Задача Блазіуса

Теорію ламінарного прилежого шару Л. Прандтль будував дедуктивно, на підставі рівнянь Нав'є-Стокса. Теорія турбулентного прилежого шару досі є напівемпіричною.

Проводиться оцінка порядку величин доданків рівнянь руху й нерозривності для стаціонарного плоскопаралельного (ламінарного) руху в'язкої нестисливої рідини вздовж пластини довжиною L (або тіла малої кривизни) враховуючи, що вплив масових сил на рух у прилежому шарі товщиною $\delta \ll L$ незначний [2, с. 362; 7, с. 667–670]. Використовуючи знак порядку величин $\sim$, вважають, що абсциси $x \sim L$, ординати у ПШ $y \sim \delta$, проекції швидкості вздовж обтічного контуру $v_x \sim v_\infty$. Порядки доданків рівнянь розташуємо під ними:

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{Скінченна величина}} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right); \\ \frac{v_\infty^2}{L} \quad \frac{v_\infty^2}{L} \quad \nu \frac{v_\infty}{L^2} \square \nu \frac{v_\infty}{\delta^2}; \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}}_{\substack{\text{Див. далі} \\ (8.3)}} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right); \\ \frac{v_\infty^2}{L^2} \delta \quad \frac{v_\infty^2}{L^2} \delta \quad \nu \frac{v_\infty}{L^3} \delta \square \nu \frac{v_\infty}{L} \frac{1}{\delta} \\ \text{оскільки } v_y &= \int_0^\delta \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_{cp} \int_0^\delta dy \square \frac{v_\infty}{L} \delta; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{v_\infty}{L} \quad \frac{v_\infty}{L} \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

З першого рівняння випливає, що при $\nu \frac{v_\infty}{L^2} \ll \nu \frac{v_\infty}{\delta^2}$ є справедливим $\frac{v_\infty^2}{L} \sim \nu \frac{v_\infty}{\delta^2}$,

звідки відносна товщина ПШ

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{v_\infty \cdot L}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_\infty}}. \quad (8.2)$$

Таким чином, товщина пограничного шару δ буде тим більшою, чим більша кінематична в'язкість рідини й поздовжні розміри тіла (що видно при внесенні L під

корінь в чисельник) і чим менша швидкість потоку, що набігає. Оцінюючи порядок величин доданків другого рівняння системи (8.1), враховуємо, що

$$\nu \frac{v_{\infty}}{L^3} \delta \ll \nu \frac{v_{\infty}}{L} \frac{1}{\delta}.$$

Використовуючи співвідношення (8.2) у вигляді

$$\nu \sim \frac{v_{\infty}}{L} \delta^2, \quad (8.2')$$

можна дістати порядок правої частини другого рівняння (8.1):

$$\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{v_{\infty}^2}{L^2} \delta,$$

який, як видно, збігається з порядком лівої частини цього ж рівняння.

Тоді можна зробити висновок і про порядок величини $\frac{\partial p}{\partial y}$ у другому рівнянні системи (8.1), оскільки одиничні конвективні сили інерції і сили в'язкості пропорціональні $v_{\infty}^2 \delta / L^2$. Таким чином, має виконуватися співвідношення

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{v_{\infty}^2}{L^2} \delta.$$

Для двох точок – одна на обтічній поверхні, а друга на умовній межі ПШ і зовнішнього потоку, тобто на відстані δ від стінки, на підставі останнього співвідношення можна записати

$$p_2 - p_1 = \int_0^{\delta} \frac{\partial p}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{cp} \int_0^{\delta} dy = \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{cp} \cdot \delta \sim v_{\infty}^2 \frac{\delta^2}{L^2}.$$

Отже, зміна тиску по нормалі до контуру тіла навіть поміж максимально віддаленими межами товщині ПШ є величина мала, порядку $(\delta/L)^2$, не кажучи вже про зміну тиску на більш близькій відстані по нормалі від тіла до поточної ординати в границях ПШ. Таким чином, тиск у примежовому шарі вздовж нормалі до поверхні практично не змінюється: $p_2 - p_1 = 0$, тобто $\boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = 0}$.

Цей результат є одним з найбільш визначних в теорії примежового шару. Саме він пояснює причину достатньо точного збігу експериментальних даних розподілу тиску вздовж поверхонь добре обтічних тіл з розрахунками зовнішньої («нев'язкої») течії за теорією потенціального обтікання. Обчислення поля швидкості за цією теорією дає можливість знайти розподіл тиску лише зовні ПШ, оскільки всередині його рух вихровий.

На зовнішньому краї примежового шару, якщо знехтувати масовими силами, справджується одновимірне рівняння стаціонарного руху ідеальної рідини Л. Ейлера (що можна отримати також диференціюючи інтеграл Л. Ейлера)

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = v \frac{dv}{dx}, \quad (8.3)$$

де $v(x)$ — швидкість потоку на зовнішній межі ПШ, тобто зовнішнього відносно примежового шару потенціального потоку ідеальної рідини (може бути визначена розв'язанням рівняння для потенціалу швидкості ϕ або за експериментальними даними — за розподілом тисків по поверхні тіла).

Оскільки рівність $p = \text{const}$ у всіх точках однієї й тієї самої нормалі до поверхні всередині ПШ можна розглядати як загальний інтеграл другого рівняння системи (8.1), то з урахуванням (8.3) приходимо до **рівнянь параболічного типу Л. Прандтля (1904 р.) плоского ламінарного примежового шару**

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= v \frac{dv}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \\ \frac{dv_x}{dx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

при таких крайових умовах:

- 1) прилипання рідини до поверхні тіла, тобто при $y=0$: $v_x = v_y = 0$;
- 2) на значній відстані від тіла, тобто при $y=\infty$: $v_x = v$, $v_y = 0$;
- 3) у початковому поперечному перерізі $x = x_0$ має бути заданий початковий профіль швидкості $v_x(x_0, y)$.

Хоча перше рівняння з отриманої Л. Прандтлем системи (8.4) все ж залишається нелінійним, ці рівняння є простішими за рівняння Нав'є-Стокса, тому їх розв'язання можливе в багатьох випадках.

Інтегрування системи рівнянь (8.4) можна звести до інтегрування одного рівняння, якщо врахувати, що для плоских потоків існує відома нам **функція течії** $\psi(x, y)$ — така,

що $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$; $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Підстановка цих співвідношень в перше рівняння системи (8.4)

дає

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = v \frac{dv}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}} \quad (8.5)$$

при наступних крайових умовах:

$$1) \text{ на поверхні тіла } (y=0) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad 2) \text{ при } y \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = v.$$

Точний метод розв'язання задачі про ламінарний примежовий шар вздовж напівнескінченної (нескінченних розмаху та довжини) тонкої пластини при двосторонньому стаціонарному обтіканні її нестисливою рідиною вперше застосував у 1908 р. **Г. Блазіус**. Оскільки у такої пластини опір виникає тільки від дотичних напружень, вона може розглядатися як дуже добре обтічне тіло. Це дає можливість користуватися у першому наближенні результатами розрахунку опору такої пластини і для оцінок опору інших добре обтічних тіл, наприклад крил великого видовження при малих кутах атаки.

В досліджуваному Блазіусом випадку прийнято, що швидкість зовнішнього потенціального потоку всюди постійна, перепад тиску відсутній, отже й $\frac{dv}{dx} = 0$.

Розв'язання задачі передбачає інтегрування рівнянь Прандтля (8.4) з урахуванням крайових умов: $v_x = v_\infty$ при $y \rightarrow \infty$; $v_x = v_y = 0$ при $y = 0$ і $x > 0$. Для цього Блазіус шукає розв'язок рівняння (8.5) (без першого доданку його правої частини) відносно функції течії. Приймаючи до уваги, що $x \sim L$ і $y \sim \delta$, а також різновид співвідношення

(8.2') у вигляді $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{v_\infty}}$, можна записати, що $y \sim \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}$. Вводячи безрозмірний коефіцієнт

пропорційності η , Блазіус отримав рівність $y = \eta \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}$, або

$$\eta = y \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}. \quad (8.6)$$

Прийнявши η за **нову незалежну змінну**, тепер швидкість відшукується у вигляді $v_x = v_\infty f(\eta)$. Але для отримання функції течії ψ , похідні якої по координатах визначають швидкості, замість $f(\eta)$ вводиться первісна функція $\varphi(\eta) = \int f(\eta) d\eta$. Оскільки $\varphi'(\eta) = f(\eta)$, то $\boxed{v_x = v_\infty \varphi'(\eta)}$. Таким чином, розв'язок шукається у вигляді функції **тільки одної змінної η** . Використовуючи її у формі (8.6), остання рівність може бути записана як

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = v_\infty \varphi'(\eta), \quad (8.7)$$

звідки

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \sqrt{v_{\infty} v_x} \cdot \varphi'(\eta).$$

Інтегруючи з точністю до довільної сталої, маємо

$$\boxed{\psi = \sqrt{v_{\infty} v_x} \cdot \varphi(\eta)}. \quad (8.8)$$

Диференціюючи цей вираз, можна знайти похідні, які входять до рівняння функції течії (8.5). З рівності (8.8) знаходимо

$$-v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_{\infty} v}{x}} \varphi(\eta) + \sqrt{v_{\infty} v_x} \varphi'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_{\infty} v}{x}} [\varphi(\eta) - \eta \varphi'(\eta)], \quad (8.9)$$

оскільки $x \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} y \sqrt{\frac{v_{\infty}}{v_x}} = -\frac{1}{2} \eta$.

Аналогічно можна отримати решту похідних:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = v_{\infty} \sqrt{\frac{v_{\infty}}{v_x}} \varphi''(\eta); \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{v_{\infty}^2}{v_x} \varphi'''(\eta); \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \frac{v_{\infty}}{x} \eta \varphi''(\eta). \quad (8.10)$$

Підстановка виразів (8.7), (8.9) і (8.10) до рівняння (8.5), у якому $\frac{dv}{dx} = 0$, дає

$$-\frac{v_{\infty}^2}{2x} \eta \varphi'(\eta) \varphi''(\eta) + \frac{v_{\infty}^2}{2x} \varphi''(\eta) [\eta \varphi'(\eta) - \varphi(\eta)] = \frac{v_{\infty}^2}{x} \varphi'''(\eta).$$

Після скорочень приходимо до звичайного нелінійного диференціального рівняння

$$\boxed{2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0}. \quad (8.11)$$

Отже, підтверджено припущення, що для поздовжньої швидкості v_x існує розв'язок у вигляді тільки одної змінної η .

Блазіус зінтегрував це нелінійне рівняння третього порядку за допомогою степеневих рядів для малих значень η та асимптотичного виразу для великих η при таких крайових умовах:

- 1) на поверхні пластини $\eta = 0$ і $\varphi = 0$; $\varphi' = 0$ ($v_x|_{y=0} = 0 \Rightarrow f(\eta) = 0, \varphi(\eta) = 0 \Rightarrow \psi = 0$);
- 2) удалині від пластини $\eta \rightarrow \infty$ і $\varphi' \rightarrow 1$ ($y \rightarrow \infty \Rightarrow v_x = v_{\infty} \cdot \varphi'(\eta) \rightarrow v_{\infty}$).

Диференціальне рівняння (8.11), **отримане Блазіусом**, згодом інтегрувалось Л. Хоуартом чисельними методами з більшим ступенем точності. В результаті було побудовано таблицю [2, 3, 6], у якій при різних значеннях η від 0 до 8,8 (з кроком 0,2) наведені значення функції $\varphi(\eta)$ і двох її похідних $\varphi' = \frac{v_x}{v_{\infty}}$ (див. (8.7)) і φ'' .

Задавшись значенням швидкості v_x , що відрізняється від v_{∞} на 0,5%, тобто $\varphi' = 0,995$, згідно з таблицею знаходимо відповідне значення $\eta \approx 5,2$. Підставив це

значення до (8.6), можна знайти товщину примежового шару ($y \approx \delta$) за наближеною формулою

$$\delta = 5,2 \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}, \quad (8.12)$$

тобто товщина ламінарного ПШ зростає униз за течією вздовж пластини пропорційно до кореня квадратного з абсциси x , тобто за параболічним законом: $\bar{\delta} \sim \sqrt{x}$.

Переходячи до відносної товщини ПШ, маємо «деталізацію» формули (8.2):

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{L} = 5,2 \sqrt{\frac{x}{L} \frac{1}{\text{Re}}}, \quad (8.13)$$

де число Рейнольдса $\text{Re} = \frac{v_\infty L}{\nu}$.

Отже, відносна товщина ламінарного ПШ у будь-якому перерізі обернено пропорційна до кореня квадратного з числа Рейнольдса, що відповідає співвідношенню (8.2), отриманому аналізом порядку величин першого рівняння системи (8.1).

Вирази для товщин витіснення та втрати імпульсу в позначеннях даного підрозділу $\delta^* = \int_0^{\delta, \infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy$, $\delta^{**} = \int_0^{\delta, \infty} \frac{v_x}{v_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy$ при $\frac{v_x}{v_\infty} = \varphi'(\eta)$, а також формула (8.6) дали можливість за допомогою таблиці Хоурта знайти відповідні величини при обтіканні плоскої пластини:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy = \int_0^{\delta} [1 - \varphi'(\eta)] \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}} d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}} [\eta - \varphi(\eta)] \Big|_0^{\delta}, \text{ або } \boxed{\delta^* = 1,73 \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}};$$

аналогічним шляхом можна визначити $\boxed{\delta^{**} = 0,664 \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}}$.

Таблиця Хоурта дає можливість розрахувати дотичне напруження на пластині, тобто при $\eta = 0$. Отримаємо **формулу Блазіуса для напруження тертя**, покладаючи в основу закон тертя Ньютона і формулу (8.6) для переходу до змінної η :

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}, \text{ де } \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi' v_\infty)}{\sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}} \partial \eta} = \sqrt{\frac{v_\infty^3}{\nu x}} \varphi''(\eta).$$

Використовуючи значення $\varphi''(0) = 0,332$, наведене в таблиці при $\eta = 0$, остаточно можна отримати

$$\tau_0 = \mu \sqrt{\frac{v_\infty^3}{\nu x}} \varphi''(0) = 0,332 \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}}. \quad (8.14)$$

Таким чином, напруження тертя на поверхні пластини спадає обернено пропорційно до кореня квадратного з відстані від передньої кромки пластини.

Умова існування ламінарного примежового шару визначається числом Рейнольдса:

$$\text{Re}_\infty = \frac{v_\infty \cdot L}{\nu} < (5 \cdot 10^5 \div 10^6).$$

Звичайно в розрахунках замість дотичного напруження використовують місцевий коефіцієнт тертя

$$c_{TP} = \frac{\tau_0}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}},$$

який при підстановці (8.14) приймає вигляд залежності його від місцевого числа Рейнольдса $\text{Re}_x = v_\infty x / \nu$ для ламінарного ПШ

$$c_{TP} = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

Силу в'язісного тертя на ділянці L з одної сторони пластини шириною, що дорівнює одиниці, розраховують, інтегруючи дотичні напруження зп формулою

$$R_{TP} = \int_0^L \tau_0 dx = 0,332 \int_0^L \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}} dx = 0,332 \cdot 2 \sqrt{\rho \mu v_\infty^3} \Big|_0^L = 0,664 \sqrt{\rho \mu v_\infty^3 \cdot L}.$$

Сила тертя на обтічній з обох сторін ділянці тонкої пластини довжиною L дорівнює

$$W_{TP} = 2 \int_0^L \tau_0 dx = 2R_{TP} = 1,328 \sqrt{\rho \mu v_\infty^3 \cdot L}.$$

Тоді загальний коефіцієнт опору тертя з обох сторін обтічної пластини не відрізняється від коефіцієнта для однобічного обтікання пластини одиничної ширини:

$$C_{TP} = \frac{W_{TP}}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} 2L \cdot 1} = \frac{R_{TP}}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} L \cdot 1} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_{\infty,L}}},$$

оскільки сумарна обтічна поверхня з обох сторін пластини є $S = 2L \cdot 1$.

Теорія турбулентного примежового шару базується на загальних уявленнях про властивості ПШ, викладених вище. Вважається, що і для турбулентного примежового шару є справедливою оцінка порядків окремих доданків рівнянь руху рідини щодо потоку всередині ПШ. Але для турбулентного примежового шару треба враховувати, що під швидкостями і напруженнями гідродинамічних сил слід розуміти їх усереднені в часі значення. При цьому напруження внутрішніх сил мають складатися з в'язкісних і турбулентних складових. Виходячи з цього, можна вважати, що для плоского

турбулентного ПШ будуть справедливими диференціальні рівняння Л. Прандтля за умови, що в них проведені операції усереднення миттєвих швидкостей і напружень за часом.

В результаті такого усереднення отримана **система рівнянь турбулентного ПШ**:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y}; \\ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (8.15)$$

де дотичні напруження визначаються як сума ньютонівських і турбулентних дотичних напружень $\bar{\tau} = \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \rho \overline{v'_x v'_y}$. Якщо підставити ці величини в перше рівняння отриманої системи, то фактично прийдемо до зрізаної x-компоненти рівнянь Рейнольдса щодо квазіплоскопаралельного в середньому турбулентного руху рідини з двовимірними пульсаціями v'_x і v'_y вздовж пластини (див. формули (7.22) в лекції 19, (7.10) в лекції 17).

Важливо, що і в турбулентному примежовому шарі зберігається властивість постійності тиску в даному поперечному перерізі ПШ, тобто $\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$. Це дає підстави визначати градієнт тиску (як і загальний перепад тиску вздовж турбулентного ПШ), який входить до першого рівняння системи (8.15), розрахунком тиску вздовж зовнішньої його межі за аналогією з тим, як це було зроблено вище вздовж ламінарного ПШ (див. формулу (8.3)).

Зауважимо, що у випадку стисливого турбулентного примежового шару коефіцієнт тертя $C_{tp} = C_{tp}(\text{Re}, M_\infty, \frac{\Delta}{L}, \dots)$. В квадратичному режимі опору тертя, якщо обтікання відбувається нестисливою рідиною, $C_{tp} = C_{tp} \left(\frac{\Delta}{L} \right)$. Звідси впливає важливість створення гладких обтічних поверхонь елементів різних транспортних засобів і протічних частин турбомашин.

В інженерних розрахунках застосовують також методи, які базуються не безпосередньо на рівняннях примежового шару Л. Прандтля, а **на інтегральних співвідношеннях**. Останні отримують або спеціальними перетвореннями рівнянь Л. Прандтля, або шляхом інтегрального застосування до ПШ законів кількості руху і збереження енергії. Але при цьому треба задаватися формою профілю швидкості в ПШ. Це відомі методи **К. Польгаузена, Н.Є. Кочіна і Л.Г. Лойцянского** та інші.

8.3. Відрив примежового шару

Якщо маємо течію навколо погано обтічних тіл (циліндра, кулі з поверхнями великої кривизни $K = 1/R$, уступу тощо), а також у дифузорах з великими кутами розкриття примежовий шар істотно потовщується, а рідкі частинки можуть набути від'ємного прискорення вздовж обтічної стінки у бік зростання тиску (внаслідок геометрії поверхні та дії сил тертя). В результаті кінетична енергія частинок поблизу стінки дорівнюватиме нулю, спостерігається відрив ПШ при $\frac{dv_x}{dy} = 0$, $\frac{dp}{dx} > 0$ (рис. 36). За точкою О під впливом

додатного поздовжнього перепаду тиску утворюється течія з винесенням частини рідини, загальмованої в примежовому шарі, у зовнішній потік, який відтісняється від тіла. Утворювана поверхня, що розділяє потоки з різними напрямками швидкостей, нестійка і руйнується з утворенням вихорів.

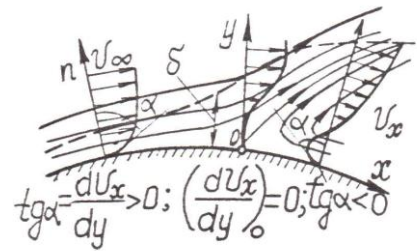


Рис. 36.

Вихори відриваються від поверхні тіла і формують одразу за кормовою його частиною застійну вихрову область із сильно зниженим тиском $p < p_\infty$, яка в сліді переходить у так звану **вихрову доріжку Кармана** (для циліндрів невеликого діаметра при помірних швидкостях обтікання частота відриву вихорів і відповідні збурення тиску в доріжках Кармана перебувають в області частот звукових коливань, які ми відчуваємо у вітряну погоду від електричних проводів, суднових снастей, різного роду розтяжок, тросів).

Несиметричний розподіл тиску по поверхні тіла, відрив ПШ, кінетична енергія вихрового руху рідини навколо тіла та в сліді за ним — основна причина **"опору тиску"**. Останній робить значно більший внесок до повного лобового опору погано обтічних тіл, ніж опір тертя вздовж їх поверхні. Поняття лобового опору читач може доповнити уявленнями про інерційний, індуктивний, хвильовий види опору тощо [4, с. 217 - 220, 252; 7, с. 535, 536; 9, с. 218 - 234, 257 - 267].

Теоретично можливість відриву примежового шару, а також розміщення точки відриву на поверхні, визначаються інтегруванням диференціальних рівнянь Прандтля. Фактично припущення, покладені в основу складання цих рівнянь, роблять реально можливим розрахунок примежового шару саме до точки відриву, у якій $\left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$.

Особливості відриву, його опису та способи запобігання відриву

До точки відриву примежового шару $\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} > 0$, за точкою відриву $\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} < 0$.

При наближенні потоку до точки відриву на криволінійній поверхні гальмуюча дія стінки різко зменшується до нуля, і переважаюче значення похідних поздовжньої швидкості по нормалі до стінки порівняно з похідними в напрямку, паралельному стінці, зникає. Строго кажучи, втрачаються підстави нехтувати членом $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ порівняно з $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ у в'язкісній частині рівнянь Нав'є-Стокса, як це робилося при аналізі порядків доданків цих рівнянь. До того ж, поперечний розмір ПШ зростає, з'являються поперечні величини складової швидкості і зміни тиску. Підстановка до умови відриву ПШ $\left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$ в якості швидкості v_x розв'язку рівнянь Прандтля з метою формального визначення положення точки відриву не може дати точної відповіді, оскільки самі рівняння Прандтля не є справедливими поблизу точки відриву. Набуває також великого значення факт істотного скривлювання зовнішнього потенціального потоку при відтискуванні його ліній течії в напрямку від обтічної поверхні. Таким чином, на поверхні за точкою мінімуму тиску вниз за течією, а особливо за наступною точкою відриву **О** (див. рис. 36), має місце **зворотний вплив примежового шару на зовнішній потік**, чого не спостерігається при плавному обтіканні відносно тонких тіл на малих кутах атаки.

Для випадків ускладненого турбулентного обтікання погано обтічних тіл мають бути застосовані інші методи з використанням можливостей сучасних комп'ютерних технологій. Наприклад, це такі методи: «метод прямого чисельного моделювання» (DNS=Direct Numerical Simulation) на базі системи рівнянь Нав'є-Стокса; методи моделювання на базі рівнянь Рейнольдса (RANS=Reynolds Averaging Based Numerical Simulation); «метод моделювання крупних вихорів» (LES=Large Eddy Simulation) та інш.

Трапляються відривання як ламінарного, так і турбулентного примежових шарів. У випадку досить малого ступеня турбулентності ε_∞ потоку, що набігає, примежовий шар може залишатися ламінарним аж до точки відриву. Виникнення турбулентності дещо нижче або вище за потоком від цієї точки (зокрема штучними засобами) може призвести або до повторного притискання відірваного потоку до тіла, що обтікається, або до повного попередження відриву. Це пов'язано із підживленням кінетичної енергії частинок у примежовому шарі завдяки турбулентному обміну енергією із зовнішнім потоком. Турбулізація ПШ спричинює переміщення точки відриву потоку ближче до заднього

(кормового) краю тіла і значно звужує застійну вихрову область. У результаті відбувається різке зниження гідравлічного опору руху — так звана **"криза опору"**.

Відрив потоку при ламінарному ПШ, або ж перехід ламінарного ПШ в турбулентний залежить, насамперед, від форми й розміщення поверхні по відношенню до потоку, що набігає, відповідних чисел Re_∞ , M_∞ і ступеня турбулентності потоку ε_∞ .

Відривні явища негативно впливають на гідроаеродинамічні характеристики крил, лопаток турбомашин, а також на робочі характеристики теплообмінних і гідравлічних пристроїв. Слід пам'ятати, що безвідривне обтікання крила — необхідна умова виникнення підйімальної сили — можливе лише при турбулентній течії в примежовому шарі, оскільки ламінарний шар може подолати без відриву лише досить незначне підвищення тиску. Відрив буває навіть на відносно тонких тілах (рис. 37).

При невеликих кутах атаки $\alpha \leq 10^\circ$ безвідривне обтікання крила забезпечує досить значну підймальну силу при малому лобовому опорі (рис. 37, а). При збільшенні α більш різке зростання тиску у потоці на верхньому боці

профілю наближає небезпеку відриву. Нарешті, при $\alpha \geq 15^\circ$ відбувається відривання поблизу носика профілю з утворенням великої застійної області, заповненої вихорами (рис. 37, б). У результаті різко зростає лобовий опір крила. Початок відриву течії

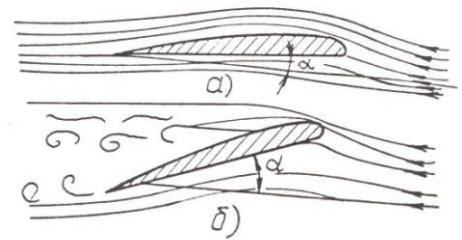


Рис. 37.

приблизно збігається з моментом, коли крило досягає максимальної підйімальної сили [1, с. 203]. Але при подальшому, навіть малому, збільшенні α підймальна сила різко падає. Наочно співвідношення між коефіцієнтами підйімальної сили і лобового опору у вигляді графічних залежностей $C_y(C_x)$ при різних α крила дають так звані **поляри Лілієнтала**.

Щоб уникнути відриву потоку, або для "затягання" точки відриву ближче до кінця обтічної поверхні, вдаються до керування примежовим шаром за допомогою турбулізаторів, вихорогенераторів, щілин та отворів для відсмоктування примежового шару, соплових апаратів для його здування, спеціальної механізації крил, поступового розширення каналів тощо.

8.4. Відривні кавітаційні течії

На прикладі обтікання в'язкою рідиною криволінійних тіл зазначалося, що в області додатного градієнта тиску вздовж обтічної твердої межі може відбуватися відрив примежового шару (рис. 38). Дослідами встановлено, що відрив ламінарного примежового шару з кругового циліндра відбувається тоді, коли значення полярного кута $\varphi = 82^\circ$. Перехід відірваного ламінарного шару в турбулентний відбувається лише поза циліндром.

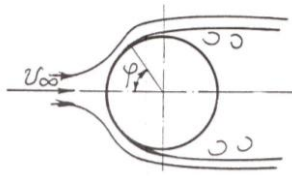


Рис. 38.

Коли число Re_∞ потоку, що набігає, зростає, тобто коли примежовий шар стає турбулентним на більшій частині поверхні, відрив "затягується" і відбувається при $\varphi = 115^\circ$. Коефіцієнт опору тіл при цьому зменшується — спостерігається "криза опору".

Розрахунок відривних течій за моделями в'язкої рідини надзвичайно складний. Тому ще в XIX столітті були зроблені спроби розрахувати опори тіл за схемами ідеальної рідини. Спочатку Гельмгольц, а потім Кірхгоф теоретично розглянули схему струминного обтікання плоскої пластини (рис. 39), де вздовж межі струменя швидкість частинок рідини $v = v_\infty$ і тиск $p = p_\infty$. Значення коефіцієнта опору за схемою Кірхгофа ($C_{x0} = 0,88$) виявилося значно меншим за експериментальні.

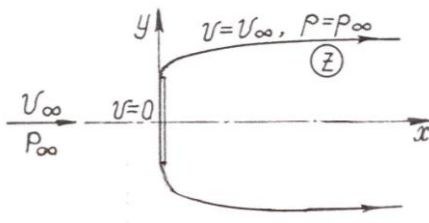


Рис. 39.

Подальші дослідження показали, що структурна схема Кірхгофа є частинним випадком схем кавітаційного обтікання. У випадку кавітаційного обтікання на

каверни, заповненою парою та газом, $v = v_k > v_\infty$,

$p = p_k < p_\infty$, де v_k і p_k — сталі: v_k — швидкість

початку кавітації; p_k — тиск у каверні при кавітації; $p_k = (1,2 \div 2) p_{нас}$, $p_{нас}$ — тиск насиченої пари.

Критерієм подібності для кавітаційних течій є **число кавітації** (різновид числа Ейлера):

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_k}{\rho \frac{v_\infty^2}{2}}.$$

Кавітація (процес переходу до розвиненої каверни і, особливо, до плівкової кавітації) при обтіканні тіла спостерігається при малих значеннях σ . Число кавітації, при якому виникає кавітація при обтікання тіла даної форми, називається **критичним** $\sigma_{кр}$, причому $\sigma_{кр} = f(Re_\infty, Sh, We, \text{газовмісту рідини})$ і відповідає мінімальному тиску p_{min} на поверхні тіла, близькому до тиску насиченої пари $p_{нас}$ (в повністю дегазованій рідині має бути $p_{min} = p_{нас}$) [3, 13].

Схема Кірхгофа відповідає випадку $p_k = p_\infty$, або $\sigma = 0$. Коефіцієнт опору обчислюється за формулою

$$C_x = C_{x0}(1 + \sigma).$$

При розгляді кавітаційних схем обтікання виникає **парадокс Бриллюена**: з одного

боку, на межах каверни швидкість має бути сталою ($v = v_k$), з другого — швидкість у деякій точці каверни має дорівнювати нулю і в цій точці має відбуватися сходження потоку з межі каверни. Для розв'язування згаданого парадокса запропоновано ряд **схем замикання**. Найпоширенішими є схеми Рябушинського, Жуковського-Рошко, Туліна.

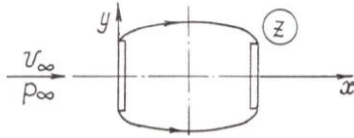


Рис. 40.

За пропозицією Рябушинського, каверна замикається на фіктивне тіло (рис. 40).

За схемою Жуковського-Рошко каверна переходить у дві паралельні тверді стінки (рис. 41). До цих стінок швидкість на межі каверни визначається рівнянням Бернуллі

$$p_{\infty} + \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} = p_{нас} + \frac{\rho v_k^2}{2} \Rightarrow v_k = v_{\infty} \sqrt{1 + \frac{p_{\infty} - p_{нас}}{\frac{\rho v_{\infty}^2}{2}}}.$$

На нескінченності позаду тіла швидкість досягає значення швидкості потоку, що набігає. Вздовж паралельних ліній течії тиск зростає від величини $p_{нас}$ до p_{∞} . Хоча за цією схемою принципово можна розраховувати сили, що діють на тіло при будь-яких значеннях σ , але визначення розмірів каверни викликає певні труднощі.

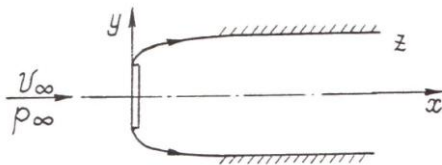


Рис. 41.

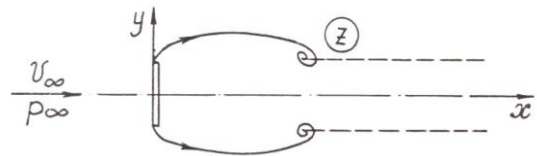


Рис. 42.

Схема Туліна (рис. 42) забезпечує перехід від швидкості v_k вздовж внутрішньої межі каверни до швидкості v_{∞} в кінці її та в сліді за нею. За схемою Туліна каверна замикається двома спіральними вихорами з протилежним напрямком обертання, у яких відбувається стрибкоподібна зміна швидкості від значення v_k до v_{∞} . Лінії течії зі швидкостями v_{∞} , що виходять із центрів вихорів, зникають на нескінченності та утворюють слід за каверною — деякий аналог турбулентного сліду, який спостерігається експериментально в області за каверною.

Розміщення точок відриву на тілі з плавними обрисами наперед невідоме, а тому його треба визначити в процесі розв'язування за умовою гладкого відриву, згідно з якою дотичні до тіла та каверни в точці відриву мають збігатися.

За схемою Кірхгофа при $\sigma = 0$ для циліндра $\varphi = 55^\circ$. Коли число кавітації збільшується, цей кут зростає і наближається до значення для ламінарного відриву.

У випадку обтікання диска $C_{x0} = 0,82$.

Запитання для самоперевірки до розділу 8

1. У яких випадках можна теоретично розв'язати задачу руху в'язкої рідини?
2. На які області поділяється потік в'язкої рідини, що обтікає тіло?
3. Що таке гідродинамічний примежовий шар (ПШ)?
4. Кому належать ідеї введення поняття ПШ?
5. Які основні характеристики має ПШ?
6. Чи є зовнішня межа ПШ лінією течії?
7. Що розуміють під товщиною ПШ?
8. Виведіть формулу для товщини витіснення.
9. Наведіть формули для товщин витіснення, втрати імпульсу та енергії і поясніть фізичний зміст цих понять.
10. Як можна визначити число Рейнольдса для ПШ?
11. Охарактеризуйте режими руху рідини в ПШ, умови їх існування та зміни.
12. Які фактори впливають на розміщення "перехідної" зони в ПШ?
13. Охарактеризуйте конфузорну та дифузорну течії з точки зору стійкості ламінарного ПШ.
14. Яка структура турбулентного ПШ?
15. Значення ламінаризації ПШ при безвідривному обтіканні тіл.
16. Фактори, що сприяють ламінаризації ПШ.
17. Запишіть у загальному вигляді диференціальні рівняння Нав'є-Стокса і нерозривності для двовимірного стаціонарного руху стосовно ПШ.
18. Дайте оцінку величин доданків, що входять в записані рівняння.
19. Наведіть залежність товщини ПШ від основних параметрів, що її визначають.
20. Як змінюється тиск у ПШ по нормалі до поверхні, що обтікається рідиною?
21. Запишіть рівняння Прандтля для плоского ПШ і відповідні крайові умови.
22. Наведіть розв'язання Блазіуса задачі про ламінарний ПШ на напівнескінченній пластині.
23. Які параметри чи їх комплекси впливають на коефіцієнт опору тертя пластини в умовах ламінарного нестисливого і турбулентного стисливого ПШ?
24. Охарактеризуйте явище відриву ПШ навколо тіл, що обтікаються.
25. Що таке "вихрова доріжка Кармана"?
26. Які складові визначають повний лобовий опір тіла, що погано обтікається, і як вони пов'язані між собою?
27. Які умови відриву ламінарного і турбулентного ПШ?
28. Яка роль турбулізації ПШ?

29. Поясніть явище "кризи опору" при обтіканні тіл.
30. У яких випадках відбувається відрив ПШ навколо крила?
31. Вплив відривання ПШ на гідроаеродинамічні характеристики крил.
32. Для чого і як відбувається керування ПШ?
33. Які моделі відривних течій рідини вам відомі?
34. У чому полягає суть схем відривного обтікання Гельмгольца та Кірхгофа?
35. Поясніть механізм відривного кавітаційного обтікання тіл.
36. Що таке кавітація і число кавітації?
37. У чому полягає парадокс Бриллюена?
38. Охарактеризуйте схеми кавітаційного обтікання Рябушинського, Жуковського-Рошко, Туліна.

9. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГІДРАВЛІЧНОГО УДАРУ В ТРУБАХ

[1, с. 119-126; 2, с. 192-208; 3, с. 222-226]

9.1. Загальні поняття

Гідравлічний удар (гідроудар) — це явище швидкої зміни тиску при напірному русі краплинної рідини, яке викликане різкою зміною швидкості в одному з перерізів трубопроводу за дуже короткий відрізок часу. Гідроудар характеризується виникненням наперемінних хвиль підвищеного та зниженого тиску, які починають поширюватися від зони різкої зміни швидкості рідини в напрямку, протилежному попередньому рухові, а потім в зворотному напрямку і т.д. Це спричиняє у кожному перерізі коливання тиску та відповідні деформації стінок трубопроводу.

Наприклад, при різкій зміні швидкості води в сталевих трубах (швидким переключенням «на закриття» положень клапана, засувки тощо) на 1 м/с тиск в трубі зростає приблизно на $1,0\text{--}1,2 \text{ МПа}$ ($\approx 10\text{--}12 \text{ ат}$). У багатьох випадках це призводить до ускладнень в нормальній роботі трубопроводів, пов'язаних з розривом їх стінок, і до важких аварійних ситуацій при експлуатації устаткування.

Але гідроудар можливий також при різкому падінні тиску в гідросистемі. При зниженні тиску до тиску насиченої пари рідини $p_{\text{нас}}$ при даній температурі, і навіть при дещо більшому тиску $p \geq p_{\text{нас}}$ (враховуючи зменшення розчинності газів в рідині при зменшенні тиску — закон Генрі), виникає розрив суцільності потоку рідини, так званий «розрив колони». Це може траплятися при різкому скиданні теплоносія через запобіжний або перепускний клапан, при раптовій зупинці насоса, що без певних мір забезпечування також порушує нормальну експлуатацію трубопроводів та робочі характеристики устаткування.

Основні причини виникнення гідроудару

1. Швидке закриття або відкриття запірних та регулюючих пристроїв (кранів, клапанів, засувок). а) Після миттєвого закриття запірного пристрою в кінці труби, з'єднаної з живильним резервуаром, тобто при раптовій зупинці потоку рідини, його кінетична енергія витрачається на роботу стиснення рідини на величину Δp і роботу деформації стінок труби біля запірного пристрою. Локальний стан надлишкових пружних напружень в стінці труби та підвищеного тиску рідини створює ударну хвилю, фронт якої поширюється із скінченною швидкістю по трубі від запірного пристрою в бік живильного резервуару. За час досягання фронту хвилі гідроудару резервуару відбудеться повна

зупинка «колони» води. Але під дією підвищеного тиску частина ущільненої рідини виштовхується із труби в резервуар, тому «колона» рідини, намагаючись відірватися від запірного пристрою, викликає від'ємну хвилю зниженого тиску. Після досягнення нею резервуару починається процес вирівнювання тиску з утворенням попередньої швидкості. Процес чергування підвищення та зниження тиску в трубі повторюється з поступовим зменшенням Δp через дисипацію енергії внаслідок демпфувальних ефектів в матеріалі стінки труби, в'язкості рідини в трубі та в резервуарі. б) При різкому відкритті запірного пристрою в кінці трубопроводу гідроудар починається із зниження тиску, яке потім змінюється зростанням тиску.

На практиці процес гідроудару і його інтенсивність залежать від швидкості закриття або відкриття органу, що регулює швидкість руху рідини.

Вперше явища зазначених видів неусталеного руху рідини при швидких переключеннях запірних пристроїв в трубопроводах були теоретично і експериментально досліджені М.Є. Жуковським у 1897–98 р.р.

2. Раптова зупинка насоса. Подача рідини насосом припиняється, а рух рідини по інерції ще продовжується. До місць розриву суцільності спрямовуються зворотні хвильові рухи мас рідини. При швидкому стисненні порожнин зниженого тиску відбуваються співударання мас («колон») рідини, що супроводжується різким зростанням тиску.

3. Різде скидання повітря або пари при заповненні трубопроводів рідиною.

Це призводить до прямого гідроудару супутньою «колоною» рідини.

4. Пуск насоса при відкритому запірному органі на лінії нагнітання.

Інерція раптово виникаючої «колони» рідини може справити руйнуючу дію на елементи гідросистеми.

9.2. Схематичний опис типового явища гідроудару

Розглянемо спрощений механізм гідроудару при раптовому закритті запірного пристрою (наприклад, крану «Кр.») в трубопроводі довжиною l , що під'єднаний до резервуару великих розмірів з постійним рівнем рідини (рис. 43).

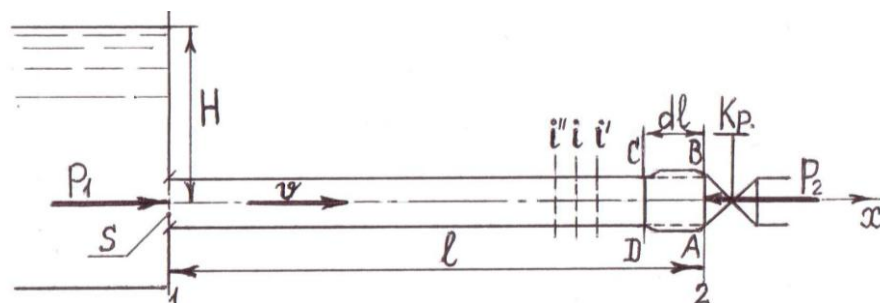


Рис. 43.

При раптовому закритті крану в перерізі AB на виході з труби відбудеться різка зупинка рідини, яка до того рухалась рівномірно з середньою швидкістю v . Зростання тиску в рідині, що утворилося в перший момент перед краном, викличе певну деформацію труби на умовній ділянці $ABCD$. Границя області підвищених тиску та енергії пружного стану стінки труби передається через сусідні шари рідини і матеріалу стінки по всій довжині труби до резервуару зі швидкістю c **поширення хвилі гідроудару**. За час $t = l/c$ зазначена хвиля досягає початку труби і вся рідина в ній зупиниться. Якби рідина була нестисливою (у якій швидкість звуку дорівнює нескінченності) і стінка труби була б абсолютно жорсткою, то процес зупинки рідини мав би поширюватися миттєво. Проте через стисливість рідини та пружність матеріалу стінки труби процес зупинки рідини має певні фази розвитку в часі. Спочатку зупиняться поперечні шари рідини, найближчі до крану Кр. Внаслідок стисливості рідини та деякого розширення стінок труби, особливо біля крану (див. рис. 43), будь-який поперечний переріз i в рідині переміститься в положення i' , що станеться і з іншими перерізами. По закінченню деформації вся рідина в трубі опиниться стислою, а отже такою, що отримала запас підвищеної енергії, ніж рідина в резервуарі. Тому почнеться зворотний рух рідини та переріз i' , минувши своє початкове положення i , займе місце i'' . Аналогічний рух здійснять інші перерізи, внаслідок чого в трубі знизиться тиск, і рідина рушить від резервуару знов до крану. Ці явища будуть повторюватися знов і знову, рідкі частинки здійснюватимуть затухаючі коливання з відповідною зміною тиску, доки під впливом внутрішнього тертя в рідині і матеріалі стінки труби коливальні процеси не згаснуть. Узагальнено в цьому й полягає явище гідравлічного удару при миттєвому закритті крану.

Величину максимального зростання тиску в трубі при гідроударі можна визначити на підставі **теореми про зміну кількості руху**: приріст кількості руху будь-якої системи за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної сил на напрямок руху.

Розглянемо відсік рідини густиною ρ між перерізами 1 і 2 площею S . До самого моменту закриття крану Кр. кількість руху рідини складала величину mv , де $m = \rho Sl$ – маса рідини. Через проміжок часу $t = l/c$ кількість руху дорівнює нулю, оскільки за цей час рідина в трубі зупиниться. Приріст кількості руху за час t дорівнюватиме $(-\rho Slv)$.

Врахуємо сили, які діяли на відсік рідини за той саме час t :

- 1) в перерізі 1 — сила p_1S ;
- 2) в перерізі 2 в момент раптового закриття крану — сила реакції запірного пристрою $(-p_2S)$, протилежна напрямку попереднього руху рідини вздовж додатного напрямку осі x ;

тут p_1, p_2 – тиски в перерізах 1 і 2;

3) сила тяжіння відсіку 1–2 рідини — внеску до сумарного імпульсу сил не дає, оскільки вертикальна.

Сума проекцій імпульсів сил тиску на напрямок x руху рідини складає $(p_1 - p_2)S \frac{l}{c}$.

Згідно з теоремою про зміну кількості руху маємо

$$-\rho S l v = (p_1 - p_2) S \frac{l}{c}, \text{ або } \rho S l v = (p_2 - p_1) S \frac{l}{c},$$

звідки, позначивши $p_2 - p_1 = \Delta p$, отримаємо остаточно **ударне зростання тиску**

$$\boxed{\Delta p = \rho v c}. \quad (9.1)$$

Ми отримали формулу **гідроудару М.Є. Жуковського**.

Час пробігу хвилі гідроудару від крану до початку труби та назад до крану називається тривалістю (періодом) **фази гідроудару** $t_\phi = 2l/c$.

Як відмічалось раніше, інтенсивність гідравлічного удару залежить від часу закриття запірного пристрою (в розглянутому випадку крану) $t_{закр}$.

При $t_{закр} \leq \frac{2l}{c}$ приріст тиску дорівнює $\Delta p = \rho v c$ — маємо так званий **прямий гідроудар**;

при $t_{закр} > \frac{2l}{c}$ зростання тиску $\Delta p_n < \rho v c$ — маємо **непрямий гідроудар** (послаблений).

Величину Δp_n можна знайти на підставі рівняння збереження щільності імпульсів*) незалежно від часу закриття крану: $\Delta p_n t_{закр} = \Delta p t_\phi$, звідки

$$\boxed{\Delta p_n = \Delta p \frac{t_\phi}{t_{закр}}}. \quad (9.2)$$

*) $\text{Сила} \times \text{час} = \text{імпульс сили}; \quad \frac{\text{сила}}{\text{площа}} \times \text{час} = \text{щільність імпульсу}.$

На підставі (9.1) і (9.2), враховуючи період фази гідроудару $t_\phi = 2l/c$, можна отримати практичну рекомендацію щодо тривалості закриття запірного пристрою

$$\boxed{t_{закр} \geq \frac{2\rho v l}{\Delta p_{дон}}},$$

де $\Delta p_{дон}$ — допустиме зростання тиску.

9.3. Визначення швидкості поширення хвилі гідроудару

Швидкість c поширення хвилі визначимо з урахуванням пружних деформацій в матеріалі стінки труби і стисливості рідини.

Знайдемо величину зміни маси в об'ємі ABCD (див. рис.43) за нескінченно малий час dt при різкому підвищенні тиску. Вона дорівнює різниці кінцевої і початкової мас

рідини з урахуванням її стисливості ($\rho = \text{var}$) та зміни площі перерізу труби dS внаслідок деформації стінки труби:

$$(\rho + d\rho)(S + dS)dl - \rho S dl \approx (\rho dS + S d\rho)dl,$$

при нехтуванні добутком $d\rho dS dl$ через його малість порівняно з іншими членами.

З іншого боку, отримана зміна маси має дорівнювати масі рідини, яка потрапила через недеформовану частину труби перерізом S за той саме час:

$$(\rho dS + S d\rho)dl = \rho v S dt. \quad (9.3)$$

Враховуючи, що первинна деформація труби відбулася за нескінченно малий час dt зі швидкістю c саме на ділянці довжиною $dl = c dt$, після підстановки dl до (9.3) можна отримати

$$c = \frac{v}{\frac{dS}{S} + \frac{d\rho}{\rho}}. \quad (9.4)$$

Відносна зміна круглого перерізу труби під дією зростання внутрішнього тиску

$$\frac{dS}{S} = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = 2 \frac{dr}{r}, \quad (9.5)$$

де r – внутрішній радіус труби.

Пригадаємо відому з курсу «Опір матеріалів» «котельну формулу» (формулу Маріотта) для нормальних напружень розтягування σ в найбільш небезпечному поздовжньому перерізі циліндричної посудини (які вдвічі більші за напруження розтягування в поперечному перерізі). Цю формулу для досліджуваного нами випадку зростання тиску в трубі на величину Δp можна записати як

$$\sigma = \frac{\Delta p r}{\delta}, \quad (9.6)$$

де δ – товщина стінки труби.

На підставі закону Гука $\sigma = E_{cr} \frac{dr}{r}$ та формули (9.6) легко отримати

$$\frac{dr}{r} = \frac{\Delta p r}{\delta E_{cr}}, \quad (9.7)$$

де E_{cr} – модуль пружності І-го роду матеріалу стінки труби.

Підстановка виразу для $\frac{dr}{r}$ із формули (9.7) до формули (9.5) дає

$$\frac{dS}{S} = \frac{2\Delta p r}{\delta E_{cr}}. \quad (9.8)$$

З Лекції № 2 нам відома формула для модуля об'ємної пружності рідини

$E = \rho \frac{dp}{d\rho}$. Приймаючи $dp \approx \Delta p$, знайдемо відносну зміну густини:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{E}. \quad (9.9)$$

Підставивши вирази (9.8) і (9.9) до формули (9.4), з урахуванням формули М.Є. Жуковського (9.1) можна остаточно отримати вираз для швидкості поширення хвилі c :

$$c = \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{E}{E_{\text{ст}}} \cdot \frac{2r}{\delta}}}. \quad (9.10)$$

Модулі пружності деяких рідин і металів

Рідина	$E, 10^9 \text{ Па}$	Метал	$E_{\text{ст}}, 10^9 \text{ Па}$
Вода	2,06	Сталь вуглецева	206
Нафта	1,28	Сталь легована	216
Керосин (гас)	1,37	Чавун чорний	152
Масло турбінне 30	1,72	Чавун білий	134
Спирт	0,98	Латунь, бронза	118
Гліцерин	4,08	Дюралюміній	70

9.4. Рекомендації для запобігання руйнуванню трубопроводів при гідроударі

1. Не слід допускати великих швидкостей краплинної рідини. Це стосується як трубопроводів, транспортуючих рідину, так і теплообмінних апаратів (не дивлячись на те, що інтенсивність процесів тепломасообміну в останніх зростає із зростанням швидкості в певних межах числа Рейнольдса). Як правило, високими швидкостями руху краплинних рідин вважаються $v \geq 4 \div 5 \text{ м/с}$ (до прикладу, в трубках конденсаторів парових турбін середня швидкість води порядку $1,2 \div 1,5 \text{ м/с}$). Слід пам'ятати не тільки про небезпеку гідроударів в системах, але й про те, що високі швидкості руху рідин спричиняють великі втрати енергії на їх прокачування (лекції №№ 9, 10).

2. Не допускати швидких закриття чи відкриття запірних і регулюючих органів (клапанів, кранів, засувки).

3. При запланованій необхідності аварійного перекриття подачі рідини в гідросистемі слід передбачати установку запобіжних клапанів або повітряних ковпаків (із замкненим об'ємом повітря для демпфування закидів тиску) перед запірними пристроями для запобігання чи істотного зм'якшення ударного зростання тиску.

10. ЕЛЕМЕНТИ ГАЗОВОЇ ДИНАМІКИ

Основні рівняння газової динаміки. Адіабатний та ізоентропійний процеси течії. Швидкість звуку для адіабатного процесу. Рівняння Бернуллі для ідеального газу. Параметри гальмування. Ізоентропійні формули. Витікання газу з резервуара. Способи одержання надзвукових швидкостей. Прямий стрибок ущільнення. Адіабата Гюгоніо.
[1, с. 126-157; 2, с. 428-455; 4, с. 74-95; 5, с. 9-34, 46-48. 117-160, 181-184, 202-218]

10.1. Вихідні рівняння газової динаміки

Газова динаміка вивчає рух газів з великими швидкостями, коли їх стисливість відіграє вже досить істотну роль (у багатьох випадках більшу, ніж в'язкість, вплив якої обмежується тонким примежовим шаром). Внаслідок змінності густини ρ рівняння руху та нерозривності не становлять замкненої системи (Лекція № 7) і потребують застосування термодинамічних співвідношень. Оскільки густина газів відносно мала, то в газовій динаміці, як правило, нехтують масовими силами. Розглянемо рух нев'язкого стисливого газу. Для нього справджуються:

рівняння руху Л. Ейлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (10.1)$$

і рівняння нерозривності для стисливої рідини

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Наведені рівняння (в координатній формі їх 4) містять 5 невідомих (3 проекції швидкості, тиск і густину). Тому ці рівняння потрібно доповнити рівнянням стану. Для

термічно ідеального газу це рівняння Клапейрона $\frac{p}{\rho} = RT$, де p — абсолютний тиск, Па;

T — термодинамічна температура за Кельвіном, К; $R = \frac{R_m}{M}$ — газова стала, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$; R_m —

універсальна газова стала, $R_m = 8,3143 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$; M — маса 1 моля (молярна маса), $\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

1 моль — кількість речовини в системі, що складається з такої кількості атомів, молекул, іонів, яка дорівнює кількості атомів в 12 г чистого ізотопу вуглецю ^{12}C . Молярні маси: повітря $M_{\text{пов}} \approx 0,029 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; кисню $M_{\text{O}_2} \approx 0,032 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; водню $M_{\text{H}_2} \approx 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; азоту $M_{\text{N}_2} \approx 0,028 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; вуглекислого газу $M_{\text{CO}_2} \approx 0,044 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; 1-атомного інертного газу гелію $M_{\text{He}} \approx 0,004 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

У випадку **ізотермічного процесу** $T = T_0 = \text{const}$, тоді $\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = RT_0$, тобто для двох

станів маємо **закон Бойля-Маріотта** $\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$, де p_0, ρ_0, T_0 — фіксовані значення в деякій точці.

В енергетичному машинобудуванні часто розглядається **адіабатний процес** (процес без теплообміну з навколишнім середовищем). В гіпотетичному «адіабатному процесі без тертя» має зберігатися постійність ентропії ($s = \text{const}$). В реальності таке припущення прийнято для наближено енергоізованих швидких течій на невеликих протяжностях (в горловині ракетного двигуна, в міжлопатковому просторі компресора, турбіни при безвідливому їх обтіканні тощо). Вважають, що за таких умов теплообмін з оточуючими стінками і тертя не встигають істотно вплинути на характеристики течії. Для такого **ізоентропійного процесу** є справедливим **рівняння оборотної адіабати (ізоентропи)**

Пуассона $\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$, де $k = \frac{c_p}{c_v}$ — показник адіабати (ізоентропи); c_p — питома

теплоємність при сталому тиску; c_v — питома теплоємність при сталому об'ємі.

Зазначені питомі теплоємності пов'язані **формулою Майєра**: $c_p - c_v = R$. З двох останніх співвідношень для k і R легко отримати

$$c_p = \frac{k}{k-1} R; \quad c_v = \frac{1}{k-1} R. \quad (10.2)$$

Для повітря $k \cong 1,4$; $R_{\text{пов}} \cong 287,14 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Для двох станів газу рівнянням адіабати Пуассона є $\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}$, де, як і раніше, індекс

«0» мають деякі фіксовані параметри, наприклад параметри адіабатно загальмованого повністю потоку (так звані **параметри гальмування**).

Враховуючи формули для питомих ентальпії $h = u + \frac{p}{\rho}$ та внутрішньої енергії u термічно ідеального газу, за допомогою співвідношень (10.2) і рівняння Клапейрона маємо

$$\boxed{h = c_p T = \frac{k}{k-1} RT = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}}; \quad u = c_v T = \frac{1}{k-1} RT = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}. \quad (10.3)$$

У випадку загальнішого **політропного процесу** рівняння політропи має вигляд

$\frac{p}{\rho^n} = \text{const}$, де $n = \frac{c - c_p}{c - c_v}$ — показник політропи; c — питома теплоємність політропного процесу.

10.2. Швидкість звуку в газі

Під швидкістю звуку a розуміють швидкість поширення малих (слабких) збурень ($\Delta\rho \ll \rho$), які ще називають акустичними:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Приймають ізоентропійну модель поширення звуку в газі (нехтуючи втратами енергії і передачею теплоти, що виділяється при швидкому стисненні газу звуковою хвилею, до суміжних шарів газу). Підставимо до похідної тиск p з адіабати Пуассона

$\frac{p}{\rho^k} = C \Rightarrow p = C\rho^k$. Звідси за **Лапласом і Пуассоном** отримаємо $a^2 = Ck\rho^{k-1} = k\frac{p}{\rho}$, або

$$a = \sqrt{k\frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}. \quad (10.4)$$

Для нерухомого повітря при $t = 15^\circ\text{C}$ і нормальному атмосферному тиску $a \approx 341$ м/с. Швидкість звуку у воді значно більша: $a \approx 1500$ м/с.

Для нестисливої рідини ($\rho = \text{const}$): $a \rightarrow \infty$.

10.3. Рівняння Д. Бернуллі для термічно ідеального газу при адіабатному русі

Для одновимірної стаціонарної течії газу зі швидкістю v диференціальне рівняння руху нев'язкого газу Л. Ейлера, якщо знехтувати масовими силами, можна записати у

повних похідних: $v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$. Оскільки знаменники містять повні диференціали, то

маємо право на них скоротити та отримати рівняння $v dv = -\frac{dp}{\rho}$, або

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{dp}{\rho}. \quad (10.5)$$

Інтегрування в скінченному вигляді можливе лише для **баротропного руху газу, тобто коли $\rho = \rho(p)$** . Цю вимогу задовольняють рухи газу, якщо термодинамічні процеси, наприклад, ізотермічний, політропний, адіабатний. Як було зазначено вище, для газодинамічних процесів течії та поширення малих збурень частіше приймають **модель ідеальної адіабати (ізоентропи) Пуассона**

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k} = C,$$

де p_0, ρ_0 — параметри загальмованого газу при $v = v_0 = 0$.

Інтегруємо рівняння (10.5) для двох перерізів елементарної струминки, що наближено еквівалентно інтегруванню для цілого потоку нев'язкого газу, в границях від параметрів гальмування до поточних параметрів

$$\int_{v_0=0}^v d\left(\frac{v^2}{2}\right) = - \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}.$$

Підставимо величину $\rho = \rho(p)$ з рівняння адіабати (ізоентропи)

$$\frac{v^2}{2} + C^{\frac{1}{k}} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{k}} dp = 0,$$

і після інтегрування дістаємо **рівняння (інтеграл) Бернуллі для ідеального газу**:

$$\boxed{\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (10.6)$$

Відповідно до шляху отримання, воно справджується за умови адіабатного (ізоентропійного) процесу стаціонарного вихрового руху нев'язкого газу.

З урахуванням формули (10.4) для швидкості звуку, рівняння (10.6) можна записати в еквівалентному вигляді

$$\boxed{\frac{a^2}{k-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{k-1}}, \quad (10.7)$$

де a_0 — швидкість звуку в загальмованому газі.

Отриманий вираз має назву **інтеграла Бернуллі–Сен-Венана**, оскільки, як і рівняння (10.6), фактично і є інтегралом диференціального рівняння руху Л. Ейлера. З нього випливає, що швидкість звуку в газі зменшується при зростанні швидкості течії.

Критична швидкість досягається, коли швидкість течії дорівнює звуковій: $v_* = a_*$. У цій точці (або перерізі) решта параметрів течії також має назву «критичних» з відповідною позначкою: $p_*, \rho_*, T_*, Q_{m*}, \dots$. Підставивши величини $v_* = a_*$ до інтеграла Бернуллі–Сен-Венана, можна отримати зв'язок критичної швидкості зі швидкістю звуку в нерухомому («загальмованому») газі a_0 :

$$a_* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}. \quad (10.8)$$

З інтеграла Бернуллі–Сен-Венана (10.7) також легко знайти так звану «максимальну теоретичну швидкість», яка б гіпотетично мала місце при витіканні газової струминки в абсолютний вакуум, де тиск $p=0$, а отже й швидкість звуку $a=0$:

$$v_{\max} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}}. \quad (10.9)$$

Крім того, досягнення максимуму швидкості у будь-якій зоні струминки газу потребувало б умови $p \rightarrow 0$ (див. (10.6)), що викликало б виникнення пустот (повних розривів) в струминці.

Наприклад, для повітря ($k=1,4$) при $t_0=15^\circ\text{C}$, $p_0=101325\text{ Па}$ маємо $v_{\max} \approx 760\text{ м/с}$. Це означає, що максимальна швидкість витікання повітря принципово не може перевищувати швидкість звуку в нерухомому повітрі більше, ніж в $\sqrt{\frac{2}{k-1}} \approx 2,24$ разу.

Гіпотетичність «максимальної теоретичної швидкості» $v_{\max}$ можна наочно підтвердити і іншим шляхом. На підставі першого виразу співвідношень (10.3) інтеграл Бернуллі зводиться до еквівалентного йому **рівняння ентальпії** (частинного випадку **Першого закону термодинаміки для потоків**):

$$\boxed{h + \frac{v^2}{2} = h_0}, \quad (10.10)$$

де h_0 — ентальпія гальмування (загальмованого потоку), $h_0 = a_0^2/(k-1)$.

Теоретично максимум швидкості можна було б досягти, якби вдалося всю ентальпію (внутрішню енергію, яка для ідеального газу визначається інтенсивністю хаотичного теплового руху молекул, і енергію тиску) повністю перетворити на кінетичну енергію напрявленого руху газу: при $h \rightarrow 0$ мали б $\frac{v^2}{2} \rightarrow \frac{v_{\max}^2}{2} = h_0$, звідки $v_{\max} = \sqrt{2h_0}$. Певна річ, досягти цього фізично неможливо!

Треба зазначити, що рівняння ентальпії (10.10), як і еквівалентний йому інтеграл Бернуллі (10.6), які відображають закон збереження та перетворення енергії, справедливі і для течії в'язкого газу за відсутності теплообміну з оточуючим середовищем. Через дію сил внутрішнього тертя частина механічної енергії перетворюється в теплоту, що спричиняє зростання внутрішньої енергії u , а отже, ентальпії h , але при цьому зберігається умова $h_0 = \text{const}$.

Рівняння ентальпії можна записати у вигляді $c_p T + \frac{v^2}{2} = c_p T_0 = h_0$, звідки температура гальмування

$$\boxed{T_0 = T + \frac{v^2}{2c_p}}. \quad (10.11)$$

Звідси впливають такі висновки:

1) в енергоізолюваному потоці ідеального газу зростання швидкості v завжди супроводжується падінням температури T , оскільки $h_0 = \text{const}$;

2) якщо у двох перерізах енергоізолюваного потоку $v = \text{idem}$, то в них і $T = \text{idem}$ незалежно від будь-яких процесів, що здійснюються між цими перерізами;

3) при $v \rightarrow 0$ газ приймає однакову температуру гальмування T_0 незалежно від особливостей гальмування та виникаючих незворотних енергетичних втрат (приклади: температура гальмування у передній критичній точці обтічного тіла, де $v = v_0 = 0$; при гальмуванні газу силами в'язкості біля стінки без теплообміну її температура $T_{ст}$ буде близькою до T_0 в газі).

Формула (10.11) пояснює причину «аеродинамічного нагріву» високошвидкісних тіл в газі або тіл, що обтікаються потоками газу з великими швидкостями. В **критичних точках** таких тіл, де $v \rightarrow 0$ (головні частини ракет, лобові частини космічних апаратів, метеоритів при їх спуску у щільних шарах атмосфери Землі, обшивки літаків тощо) спостерігається наближення $T \rightarrow T_0$. Приклад наслідку: у літака SP-71 «Чорний дрозд», Локхід, найшвидшого в 1960–70 р.р., який долав відстань від Нью-Йорка до Лондона за 114 хв., розігрів корпусу при швидкості $v = 2200 \frac{\text{миль}}{\text{год}} \approx 3542 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, спричиняв збільшення загальної довжини літака приблизно до 1 фути ($\approx 30,5$ см). Звідси випливає наскільки є важкою проблема врахування відповідних температурних напружень у сукупності з величезними аеродинамічними навантаженнями!

Важливо пам'ятати, що при вимірюванні температури швидкісного потоку газу треба одночасно вимірювати і його швидкість, оскільки показ температури буде близьким до температури T_0 через гальмування газу в лобовій частині приладу для вимірювання температури (звичайного термометра, термопар, термометра опору). Тільки після цього можна вирахувати температуру рухомого газу: $T = T_0 - \frac{v^2}{2c_p}$.

Наведемо дані щодо температури гальмування потоку повітря при зустрічі з тілом, якщо до неї температура повітря складала $T = 300 \text{ K}$ (27°C), $a = \sqrt{kRT} \approx 347 \text{ м/с}$ (табл.1).

Таблиця 1

$v, \text{ м/с}$	100	350	1 000 ($M \approx 2,9$)
$T_0, \text{ K}$	305	360	800
$t_0, ^\circ\text{C}$	32	87	527

10.4. Важливі газодинамічні співвідношення

1) З рівняння ентальпії $h + \frac{v^2}{2} = h_0$ можна отримати швидкість газу $v = \sqrt{2(h_0 - h)}$,

де h_0 — ентальпія загальмованого потоку; h — поточне значення ентальпії.

2) Зв'язок критичної і максимальної теоретичної швидкостей випливає з формул

$$(10.8) \text{ і } (10.9): v_* = v_{\max} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}.$$

3) Зв'язок термодинамічних параметрів гальмування з поточними величинами їх отримаємо на підставі інтеграла Бернуллі для адіабатної течії з урахуванням рівняння стану Клапейрона

$$\frac{k}{k-1} RT + \frac{v^2}{2} = \frac{k}{k-1} RT_0. \quad (10.12)$$

а) Як нам відомо, при великих колозвуківих і надзвуківих швидкостях обтікання газом твердого тіла відбувається «аеродинамічний нагрів». З рівняння (10.12) можна отримати температуру гальмування в передній критичній точці тіла, у якій газ повністю адіабатно загальмовується:

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right),$$

де T і M — температура і число Маха-Маєвського потоку, що набігає.

Звідси маємо

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2}. \quad (10.13)$$

Середня температура обтічного тіла є дещо меншою порівняно з температурою гальмування в передній точці, що звичайно враховують **коефіцієнтом неповноти гальмування** $\beta' = T'/T_0$, причому $\beta' \approx 0,8 \div 0,85$. Тоді середня температура тіла, що обтікається коло- або надзвуківим потоком газу, знаходиться як $T' = \beta' T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$.

б) З рівнянь адіабати Пуассона і Клапейрона випливає $\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}}$ і, згідно з (10.13),

$$\boxed{\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (10.14)$$

в) З рівняння ж адіабати Пуассона маємо $\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^k$, що з урахуванням (10.14) дає

$$\boxed{\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (10.15)$$

4) На підставі формули швидкості звуку за Лапласом і Пуассоном при ізоентропійному поширенні його в газі $a = \sqrt{kRT}$ маємо $\frac{a_0}{a} = \left(\frac{kRT_0}{kRT}\right)^{1/2}$, звідки випливає

$$\boxed{\frac{a_0}{a} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (10.16)$$

де a_0 , a — швидкості звуку відповідно в нерухомому та рухомому газі.

5) Оскільки в термічно ідеальному газі питома ентальпія $h = c_p T$, то згідно з формулою (10.13) маємо

$$\boxed{\frac{h_0}{h} = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2}. \quad (10.17)$$

6) Для критичних параметрів, при яких місцева швидкість потоку дорівнює місцевій швидкості звуку ($M=1$), з формул (10.13) – (10.15) легко отримати

$$T_* = \frac{2}{k+1} T_0; \quad \rho_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \rho_0; \quad p_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} p_0. \quad (10.18)$$

7) Звернемося до загального випадку необоротного процесу течії термічно ідеального газу. При течії в'язкого газу, коли робота сил тертя необоротно переходить в теплоту, або, як дізнаємося пізніше, при ударному адіабатному стисканні газу в стрибку ущільнення, відбувається зростання ентропії. Визначимо зростання ентропії спочатку при нескінченно малій зміні параметрів газу в такому потоці.

Запишемо рівняння **Першого принципу термодинаміки**, згідно з яким елементарна кількість підведеної до газу іззовні теплоти δq (теплоти «зовнішнього теплообміну») витрачається на зростання внутрішньої енергії du і на виконання «зовнішньої роботи» — роботи проти зовнішнього тиску $\delta l'$ (в питомих величинах):

$$\delta q = du + \delta l'. \quad (10.19)$$

Рівняння (10.19) справджується як для оборотних, так і для необоротних процесів.

Ефективну «зовнішню роботу» $\delta l'$ можна розглядати як різницю між термодинамічною роботою зміни об'єму (тобто, роботи розширення газу як робочого тіла) $\delta l = p d(1/\rho)$ та незворотними втратами роботи δl_r , які витрачаються на роботу тертя і на кінетичну енергію завихрень в газі. Останні після їх згасання^{*)} переходять в еквівалентну кількість теплоти (теплоти «внутрішнього теплообміну»)

$$\delta l_r = \delta q_r.$$

*) Фактично це передбачає припущення про те, що процес такого переходу є рівноважний, але необоротний за умовами перетворення частини роботи в теплоту!

Теплота «внутрішнього теплообміну» по відношенню до робочого тіла є завжди додатною ($\delta q_r > 0$) і наче додається до теплоти «зовнішнього теплообміну», але по факту призводить до зростання внутрішньої енергії. Отже, при підведенні до газу елементарної кількості теплоти $\delta q = idem$ в необоротному процесі «зовнішня робота» зменшується на величину, еквівалентну δq_r , але на таку саме величину зростає внутрішня енергія газу.

Якщо вважати, що термодинамічна робота зміни об'єму повністю витрачається на подолання зовнішнього тиску (тобто, тиск робочого тіла (газу) є однаковий із зовнішнім тиском): $\delta l = p d(1/\rho) = \delta l'$, то тоді **Перший принцип термодинаміки** запишеться як

$$\boxed{\delta q = du + p d(1/\rho)}. \quad (10.20)$$

Це строго виправдано для оборотних процесів ($\delta l_r = \delta q_r = 0$), але у багатьох випадках різницею між оборотними та реальними процесами можна нехтувати, що значно спрощує практичні розрахунки, і вважати, що повна кількість підведеної до газу іззовні теплоти включає і теплоту «внутрішнього теплообміну» δq_r .

При переході від елементарної до повної кількості підведеної до газу теплоти виявляється, що інтеграл від лівої частини рівняння (10.20) залежить від шляху процесу зміни стану газу, тобто від виду кривої, яка з'єднує початкову та кінцеву точки процесу на поверхні $F(p, \rho, T) = 0$. Отже, δq в (10.20) не є повним диференціалом. Як відомо з термодинаміки, після множення (10.20) на так званий **інтегруючий множник** $\frac{1}{T}$, вираз (10.20) стає повним диференціалом деякої функції s — **ентропії**:

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{du + p d(1/\rho)}{T}. \quad (10.21)$$

Треба пам'ятати, що ця формула є справедливою як для ідеальних (оборотних), так і реальних (необоротних) систем з тією різницею, що для останніх умовно приймається, що підведена до газу теплота враховує і теплоту «внутрішнього теплообміну» δq_r .

Використання закону Джоуля $du = c_v dT$ і рівняння Клапейрона $\frac{p}{\rho} = RT$ для термічно ідеального газу дозволяє формулу (10.21) звести до вигляду

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{du}{T} + \frac{p}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}.$$

Інтегруючи останній вираз в границях від параметрів гальмування T_0, ρ_0, p_0 до поточних величин параметрів T, ρ, p за умови постійності теплоємності c_v , отримаємо відповідне зростання питомої ентропії при необоротному адіабатному процесі руху газу:

$$s - s_0 = c_v \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} - R \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = c_v \ln T \Big|_{T_0}^T - R \ln \rho \Big|_{\rho_0}^{\rho} = c_v \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Після підстановки питомої ізохорної теплоємності $c_v = \frac{R}{k-1}$ та врахування рівняння

Клапейрона легко отримати

$$s - s_0 = \frac{R}{k-1} \left[\ln \frac{T}{T_0} - \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} \right] = \frac{R}{k-1} \left[\ln \frac{p \cdot \rho_0}{\rho \cdot p_0} - \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} \right],$$

або остаточно

$$\boxed{s - s_0 = \frac{R}{k-1} \ln \frac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^k}}. \quad (10.22)$$

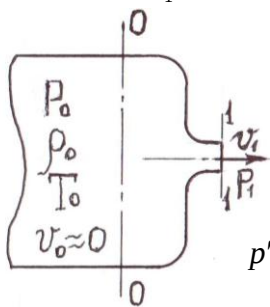
Для адіабатних (ізоентропійних) течій невязкого газу без стрибків ущільнення з рівняння адіабати Пуассона маємо

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k,$$

тоді з формули (10.22) випливає незмінність ентропії для таких процесів: $s_0 = s$.

10.5. Ізоентропійне витікання газу з резервуара

Нехай невязкий газ з параметрами p_0, ρ_0, T_0 гальмування витікає адіабатно з резервуара великого об'єму ($v_0 \approx 0$) через сопло, що звужується за формою струменя, зі швидкістю v_1 на зрізі сопла в простір із тиском p' (так званим протитиском) (рис. 44).



Розв'яжемо інтеграл Бернуллі для ідеального газу, записаний для перерізів 0-0 і 1-1

$$\boxed{\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}},$$

Рис. 44.

відносно швидкості газу на зрізі сопла: $v_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_1} \right)}$.

Використовуючи рівняння адіабати Пуассона у формі $\rho_0/\rho = (p_0/p)^{1/k}$, отримаємо

$$v_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (10.23)$$

Масова витрата газу в струмені при площі зрізу S сопла дорівнює $Q_m = \rho_1 v_1 S$, що після підстановки швидкості з (10.23) після перетворень дає

$$Q_m = S \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_0 \rho_0 \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (10.24)$$

Формули (10.23) і (10.24) мають назву **формул Сен-Венана і Вантцеля** (1839 р.).

Проведемо дослідження на екстремум (максимум) виразу в дужках під коренем при введенні позначення $\beta = \frac{p_1}{p_0}$:

$$\frac{d}{d\beta} \left(\beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}} \right) = 0 \Rightarrow \beta = \beta_{extr} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (10.25)$$

Перевірка показує, що друга похідна функції $\beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}}$ в точці β_{extr} від'ємна. Таким чином можна стверджувати, що при досяганні співвідношення тисків $p'/p_0 = p_1/p_0$ знайденого значення β_{extr} масова витрата газу на виході сопла буде максимальною. Легко довести, що величина β_{extr} дорівнює критичному співвідношенню тисків: $\beta_{extr} \equiv \beta_* = p_*/p_0$. Для цього достатньо в інтеграл Бернуллі–Сен-Венана підставити критичні величини $a_*^2 = kp_*/\rho_*$, $a_0^2 = kp_0/\rho_0$, а також одне

з наведених вище співвідношень (10.18) $\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}$.

В результаті переконуємося, що саме величина β_* забезпечує максимум масової витрати газу: $Q_m/Q_{m*} = \max$.

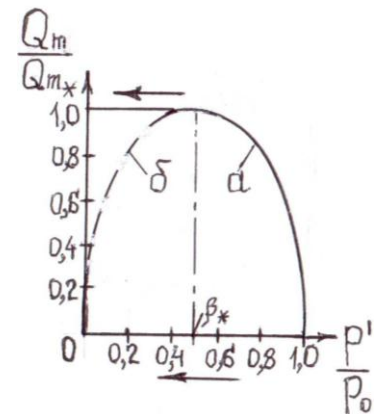


Рис. 45.

Якщо уявити, що в формулі (10.24) тиск в струмені на зрізі сопла p_1 дорівнює протитиску в оточуючому просторі p' , то розрахунком масової витрати, представленій в безрозмірному вигляді Q_m/Q_{m*} , в діапазоні $0 \leq \frac{p'}{p_0} \leq 1$ можна побудувати криву, наведену на рис. 45. Коли різниця тисків $p_0 - p'$ є відносно невеликою ($v_1 < a$), то при повільному зменшенні протитиску $\frac{p'}{p_0} < 1$ за ходом нижньої стрілки на

рис. 45 швидкість витікання і масова витрата на виході сопла зростатимуть доти, доки швидкість на зрізі сопла сягатиме місцевої швидкості звуку $v_* = a_*$ і, відповідно, $\frac{p'}{p_0}$ досягне значення β_* (для повітря $k \approx 1,4$ і $\beta_* \approx 0,528$). Цьому відповідає права вітка **a** на рис. 45, зростання якої зумовлене тим, що при $M < 1$ відносна зміна (зменшення) густини за модулем є меншою, ніж відносне зростання швидкості: $\left| \frac{d\rho}{\rho} \right| < \left| \frac{dv}{v} \right|$. Для доведення цієї нерівності можна скористатися рівнянням (10.5) лекції № 25, згідно з яким $dp + \rho v dv = 0$ і на підставі якого, при врахуванні формул $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$ і $M = \frac{v}{a}$, можна отримати $M^2 = -\frac{(d\rho/\rho)}{(dv/v)}$. Звідси випливає справедливність наведеної вище нерівності при $M < 1$.

Після досягнення струменем критичної швидкості $v_* = a_*$ на зрізі сопла подальше зменшення протитиску p' , що супроводжується відповідними збуреннями, поширюваними зі швидкістю звуку, вже не мають змоги потрапляти до резервуару, оскільки вони зноситимуться потоком, який сам досяг швидкості звуку. Тому подальше зниження протитиску на ділянці $0 \leq \frac{p'}{p_0} < \beta_*$ не призводить до зміни величин як швидкості витікання v_1 (яка залишається постійною і рівною a_*), так і відносної масової витрати, причому $Q_m/Q_{m*} = 1$ (див. горизонтальну ділянку під верхньою стрілкою на рис. 45). Таке явище називають «газодинамічним замиканням» вихідного перерізу сопла або, як кажуть, «звуковим бар'єром». Спадна вітка **б** на графіку рис. 45 відповідає **уявному** і недосяжному реально процесу витікання, формально отриманому за формулою (10.24) в діапазоні співвідношень тиску $0 \leq \frac{p'}{p_0} < \beta_*$, коли **б** мале місце зменшення густини газу відповідно до нерівності $\left| \frac{d\rho}{\rho} \right| > \left| \frac{dv}{v} \right|$ в міру наближення $\frac{p'}{p_0}$ до 0.

Режим витікання газу в діапазоні співвідношень тисків $1 > \frac{p'}{p_0} > \beta_*$ (коли $p' = p_1$) називають **докритичним**, а в діапазоні тисків $0 < \frac{p'}{p_0} < \beta_*$ (коли $p_1 = p_* = \text{idem}$) — **надкритичним**.

Для отримання надзвукових швидкостей витікання газу замість звужувальних сопел з циліндричною вихідною частиною застосовують спеціальні геометричні сопла (сопла Лаваля), теплові (термічні), витратні (масові), механічні та комбіновані види сопел.

10.6. Одновимірні течії газу в трубі змінного перерізу

Для газу рівняння нерозривності в гідравлічній формі означає збереження масової витрати $Q_m = \rho v S = \text{const}$. Логарифмічним диференціюванням вздовж осі x знаходимо

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = 0. \quad (10.26)$$

Рівняння руху Л. Ейлера для одновимірної течії при нехтуванні масовими силами

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} = -\frac{a^2}{\rho} \frac{d\rho}{dx},$$

звідки маємо

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -\frac{v}{a^2} \frac{dv}{dx}.$$

Підстановка останнього виразу до (10.26) дає

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{v}{a^2} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dx},$$

або

$$\boxed{\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} (M^2 - 1)}. \quad (10.27)$$

Ми отримали **формулу Гюгоніо**.

Аналіз цього співвідношення показує, що при дозвукових швидкостях ($M < 1$) зменшення площі перерізу труби спричинює збільшення швидкості. При надзвукових швидкостях ($M > 1$) для збільшення швидкості потрібно збільшити площу перерізу каналу.

10.7. Способи одержання надзвукових швидкостей

На згаданому вище принципі працює геометричне сопло Лавалю. Його розраховують так, щоб у найвужчому перерізі швидкість течії була критичною (рис. 46).

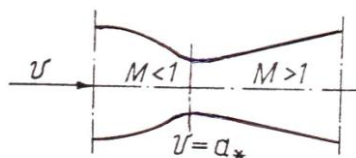


Рис. 46.

Тоді в частині каналу, що розширюється, швидкість потоку стане надзвуковою і буде зростати.

Надзвукові швидкості можна дістати також у теплових і витратних циліндричних соплах підведенням і відведенням

теплоти Q_T або маси m газу на різних ділянках каналу (рис. 47).

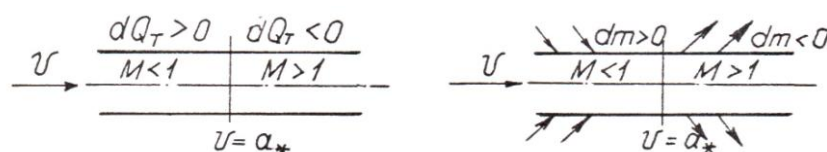


Рис. 47.

10.8. Стрибки ущільнення

В каналах за певних умов при переході течії газу від дозвукового режиму до надзвукового, а також перед тілами, що рухаються з надзвуковою швидкістю, утворюється фронт досить потужного збурення — **ударна хвиля**, яка поширюється з надзвуковою швидкістю відносно потоку. Можна показати, що швидкість поширення фронту ударної хвилі

$$a_{y0} = \sqrt{\frac{\rho + \Delta\rho}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta\rho}},$$

звідки випливає, що завжди $a_{y0} > a = \sqrt{\Delta p / \Delta\rho}$.

На відміну від малих (акустичних) хвиль, в яких зміна густини газу $\Delta\rho \ll \rho$, в ударних хвилях (сильних збуреннях) $\Delta\rho$ сумірне з ρ або перевищує її аж до $\Delta\rho \gg \rho$ (вибух снаряда, бомби). Ширина подібних зон збурення має порядок довжини вільного пробігу молекули, і в них відбувається різка зміна густини, тиску, температури, швидкості і ентропії на скінченні величини. Оскільки зміна параметрів газу (зменшення швидкості, зростання тиску, густини, температури) трапляється практично «миттєво» до деяких певних значень, то ударну хвилю називають також **стрибком ущільнення**. Такі «розриви» параметрів течії в межах теорії ізоентропійного руху пояснити неможливо. Як побачимо нижче, утворення розривів у стрибку ущільнення навіть в ідеальному середовищі призводить до втрат механічної енергії, що виділяється у вигляді теплоти, тобто до дисипації енергії. Тому рух газу із стрибком ущільнення не є ізоентропійним і рівняння ідеальної адіабати Пуассона $p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^k$ на стрибку здійснюватись не буде.

Вперше можливість виникнення поверхонь розриву в газових потоках при $v \geq a$ теоретично показав німецький математик Г. Ф. Б. Рیمان (1860 р.), але припустив неточність, вважаючи, що густина ρ і тиск p з обох сторін стрибка ущільнення пов'язані адіабатою Пуассона. Ця неточність була виправлена англійським вченим У. Дж. М. Ренкіним (1870 р.) і французьким вченим П.-А. Гюгоніо (1887 р.). Словацький механік і теплотехнік А. Стодола, а також Е. В. Й. В. Мах і Дж. У. Релей (Стретт) досліджували стрибки ущільнення в соплах Лавалю.

1) Для розуміння механізму утворення ударних хвиль, розглянемо спочатку найпростіший приклад розповсюдження **малих збурень** в потоці газу.

При поширенні **малих збурень** сферичними звуковими хвилями, генерованими точкою **О**, центри хвиль збурень зносяться потоком в надзвуковому потоці $v > a$: оскільки $vt > at$, то хвилі збурень не можуть поширюватися проти течії (рис. 48).

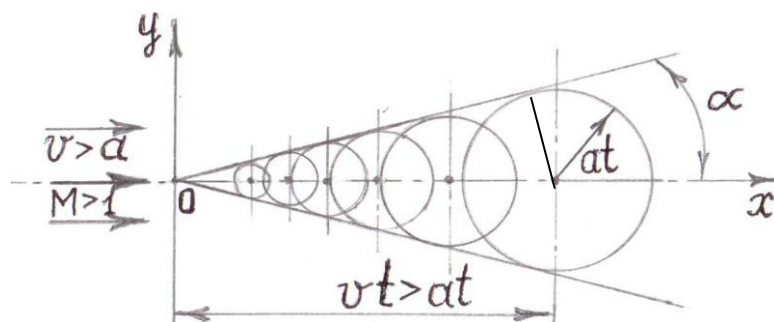


Рис. 48.

Поки за час t сферична хвиля пошириться на відстань at від точки-джерела збурень за радіусом, самий центр хвилі від цього джерела збурень буде знесений надзвуковим потоком від свого початкового положення O на відстань $vt > at$ вздовж осі x . Концентрація малих збурень буде відбуватися всередині деякої кінчної поверхні, що огинає сферичні хвилі. Цю поверхню з вершиною в точці O називають **граничною хвилею слабких збурень, конусом збурень Маха** (або просто **конусом Маха**), а також **характеристичним конусом**. Перетин бічної поверхні конуса з площиною течії, що проходить через джерело збурення, утворює слід на цій площині, який називають **лінією збурення**, або **характеристикою**. Кут при вершині конуса Маха називають **кутом збурення** α , таким, що

$$\sin \alpha = \frac{at}{vt} = \frac{1}{M}.$$

Як видно з наведеної формули, при збільшенні числа Маха-Маієвського M кут збурення α зменшується, при зменшенні числа M кут α збільшується, а при $M = 1$ конус збурень перетворюється на площину, оскільки $\alpha = 90^\circ$.

Суттєва різниця між до- та надзвуковими потоками, що набігають на джерело збурень, полягає в існуванні в надзвуковій течії так званої «**зони мовчання**»: частинки газу поза зоною конуса Маха «не знають» про збурення, які поширюються всередині цього конуса, оскільки уперед збурення не проникають, а зносяться у деяку область униз за потоком.

2) Тепер припустимо, що в надзвуковому потоці існує джерело збурень, яке створює не акустичні, а **скінченні ударні хвилі**, що поширюються зі швидкістю $a_{y0} > a$ (рис. 49).

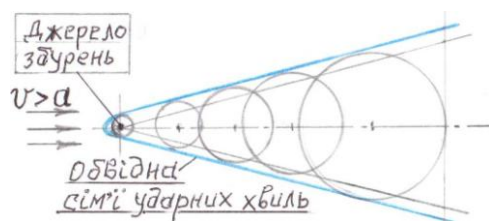


Рис. 49.

У перший момент хвиля, що відходить від джерела збурення, буде розповсюджуватися і проти потоку. Але при зустрічі з потоком і розширюючись, хвиля буде слабнути, її швидкість зменшуватиметься, наближаючись гранично до швидкості звуку a .

За цих умов обвідна сім'я сферичних ударних хвиль замість простої конічної форми в головній частині буде нагадувати гіперболоїд, який потім переходить в конус слабких (акустичних) збурень. Виникнення граничних хвиль, тобто концентрація збурень в деякій області простору, є характерною відзнакою надзвукового потоку. Реально кожна точка обтічного тіла є слабким джерелом збурень. Але, оскільки таких точок є велика множина, сукупність збурень у деякій обмеженій області течії **інтегрально породжує ударну хвилю**. Вона розташовується певним чином відносно тіла і супроводжує його рух як тінь доти, доки швидкість потоку, що набігає, залишається надзвуковою. В надзвукових потоках стрибки ущільнення звичайно зустрічаються там, де надзвукова течія зазнає гальмування або відбувається поворот потоку на деякий кут. Але хвилі збурення все ж повністю заповнюють всю область потоку, що лежить позаду *конуса збурення*, який починається від передньої точки всього тіла.

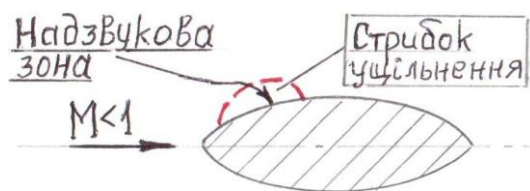


Рис. 50.

Навіть при обтіканні тіла з $v < a$, тим паче при колових швидкостях, можуть локально утворюватися області надзвукових швидкостей (рис. 50), які звичайно закінчуються стрибками ущільнення, а це викликає додатковий — так

званий, хвильовий опір. Явище виникнення хвильового опору при локальному досяганні критичної швидкості на поверхні обтічного тіла називають **хвильовою кризою**.

Наприклад, при обтіканні крила літака дозвуковим потоком, але близьким до $M=1$, на верхній і нижній поверхнях крила виникають надзвукові зони потоку, у яких місцеві швидкості перевищують місцеві швидкості звуку. Ці зони, як правило, закінчуються (обриваються) стрибком. По мірі віддалення від крил інтенсивність збурень під дією в'язкості і теплопровідності послаблюється і віддалік від тіла стрибок ущільнення плавно переходить в граничну хвилю слабких збурень.

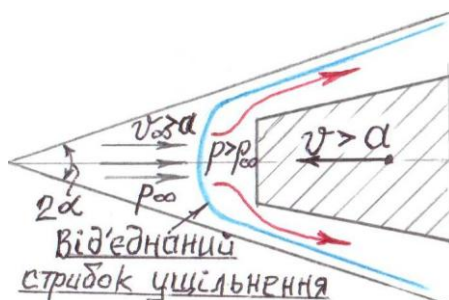


Рис. 51.

Розглянемо обтікання нерухомого або рухомого тупоногого тіла надзвуковим потоком (рис. 51). Перед головною частиною газ стискається і утворюється зона підвищеного тиску $p > p_\infty$ і підвищеної густини $\rho > \rho_\infty$. В результаті виникає ударна хвиля, яка поширюється зі швидкістю, більшою за швидкість звуку: $a_{y0} > a$.

Однак швидкість хвилі буде не більше і не менше швидкості рухомого тіла, (або швидкості потоку, що на нього набігає), оскільки хвиля не може відірватися від тіла і побігти уперед. Якщо відстань між фронтом хвилі і передньою частиною тіла збільшиться, то із зони підвищеного тиску $p > p_\infty$ почнеться інтенсивне витікання газу в напрямку стрілок вздовж бічної поверхні тіла. Але тоді перепад тиску на хвилі, тобто її сила, упаде, швидкість витікання по стрілках зменшиться і відстань між хвилею та обтічним тілом буде поновлена. Таким чином, за умов усталеного обтікання тіла з

надзвуковою швидкістю попереду його буде **постійно знаходитись ударна хвиля, що має ту саму швидкість, що й тіло**. Відстань між ударною хвилею і головною частиною тіла залежить від форми цієї частини та швидкості v_∞ потоку, що набігає. За межами головної частини тіла фронт ударної хвилі нахилиється, її інтенсивність зменшується та кут нахилу ударної хвилі відносно вектора швидкості гранично стає рівним куту Маха — ударна хвиля вироджується у **звичайну акустичну**.

Коли ми чуємо звук літака, що наближається, це означає, що його швидкість дозвукова ($v < a$). Якщо ж літак летить з надзвуковою швидкістю ($v > a$), то при його наблизенні ми не отримаємо ніяких звукових сигналів, аж поки повз нас не пройде ударна хвиля зі швидкістю ($a_{v0} > a$), яка сприймається вухом як потужних постріл.

Добре обтічні форми тіл, які відповідають найменшому опору у дозвуковому потоці, стають погано обтічними у надзвуковому потоці. В останньому випадку перед



Рис. 52.

перед профілем тіла встановлюється криволінійний «від'єднаний стрибок ущільнення» (рис. 52), в центральній передній частині близький до прямого, тобто нормального до швидкості потоку, що набігає.

Це суттєво збільшує хвильовий опір.

Для зниження хвильового опору обтічному тілу з $v_\infty \geq a$ або з $v_\infty \leq a$, коли є небезпека хвильової кризи, доцільно надавати загострену форму (рис. 53), щоб неминучі стрибки ущільнення розташовувалися не як прямі, а скісні стрибки, які поглинають менше енергії.

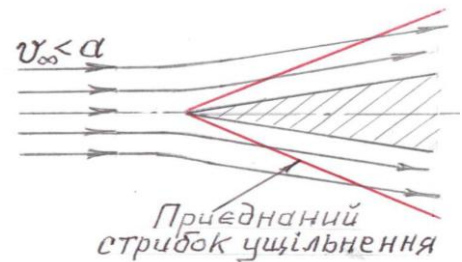


Рис. 53.

10.9. Прямий стрибок ущільнення. Ударна адіабата

Отже, найбільший хвильовий опір виникає при утворенні прямих стрибків ущільнення при надзвуковому обтіканні тупоносих тіл, при переході від надзвукової швидкості до дозвукової на обтічних поверхнях, на нерозрахункових режимах в соплах Лаваля і т.п.

Отримаємо співвідношення параметрів газу до та після прямого стрибка. Скористуємося тим, що за деяких обмежень закони збереження газової динаміки в інтегральному вигляді припускають розриви функціональних залежностей параметрів газу усередині області інтегрування. Обмеження на функціональні залежності: розрив має бути скінченним і мають існувати ліві і праві похідні. Звернемося до моделі стрибка ущільнення (С.У.) в одновимірному потоці у певному умовному перерізі S теплоізолюваної труби однакового діаметра (рис. 54). Стрибок може бути створений,

наприклад, раптовим і достатньо різким рухом проти ходу потоку поршня з автоматичним зворотним клапаном.

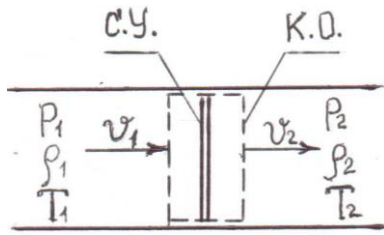


Рис. 54.

У найближчому до поршня шарі тиск є найвищим через максимальне ущільнення газу, тому й місцева швидкість звуку буде вищою порівняно з більш віддаленими шарами.

В наступні моменти часу найбільш щільні задні шари газу будуть доганяти менш щільні передні шари за ходом руху

поршня. В результаті полога в початковий момент хвиля стиску трансформується в настільки круту хвилю, на фронті якої матиме місце фактично «розрив» параметрів — стрибкоподібна зміна тиску, густини і температури. Отриманий «самосформований» стрибок ущільнення можна уявити як нерухомий відносно стінок труби фронт ударної хвилі стиснення, яка поширюється проти течії за умови, коли швидкість фронту хвилі дорівнює швидкості руху газу. Дуже мала товщина ударної хвилі дозволяє нехтувати теплообміном з оточуючим середовищем, силами тертя і масовою силою тяжіння в зоні стрибка, охопленої контрольним об'ємом (К.О.) (див. рис. 54).

Прямий стрибок ущільнення в трубі сталого перерізу розраховується за допомогою трьох співвідношень: збереження маси, збереження щільності імпульсу та збереження енергії. Задача про прямолінійний рух стрибка ущільнення в рухомому газі може бути зведена до задачі про нерухомий стрибок (поверхню розриву швидкості і термодинамічних параметрів) уведенням системи координат, зв'язаною із стрибком, по відношенню до якої рух газу спрямований в протилежну сторону. Будемо вважати розподіли тисків і швидкостей рівномірними в перерізах контрольного об'єму, яким відповідатимуть і застосовані нижче індекси: 1 – до стрибка ущільнення, 2 – після стрибка. Покажемо це.

На підставі рівняння енергії (рівняння Д. Бернуллі) для одновимірної адіабатної течії газу, записаного для вхідного і вихідного перерізів контрольного об'єму

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}, \quad (10.28)$$

отримаємо

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right). \quad (10.28a)$$

Застосуємо **закон зміни кількості руху** в інтегральному вигляді щодо прямолінійного потоку газу, згідно з яким рівнодійна всіх сил, прикладених до потоку на ділянці 1—2, дорівнює приросту секундної кількості руху вздовж осі труби на цій ділянці:

$P = Q_m (v_2 - v_1)$, або $(p_1 - p_2)S = \rho_1 v_1 S (v_2 - v_1)$. Враховуючи збереження маси газу за умови $S = idem$ (рівняння нерозривності $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$), остаточно отримаємо

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (10.29)$$

яке є **рівнянням збереження щільності імпульсу**. Відсутність у явному вигляді дотичних напружень на межах ділянки 1—2 потоку не виключає можливості дисипації

енергії. Помноживши рівняння (10.29) на $\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right)$ та враховуючи рівняння

нерозривності і рівняння (10.28а), після перетворень дістанемо **формулу Ренкіна-Гюгоніо** для прямого стрибка ущільнення:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}. \quad (10.30)$$

Це рівняння ще називають «ударною адіабатою Гюгоніо», на відміну від ідеальної адіабати, або «ізоентропійної адіабати Пуассона»:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k.$$

Користуються також і іншою формою ударної адіабати:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_2}{p_1}}. \quad (10.31)$$

З рівняння (10.30) випливає, що ударна адіабата має вертикальну асимптоту $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}$, тобто співвідношення $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ не може перевищити величину $\frac{k+1}{k-1}$ (при $k=1,4$

для повітря $\frac{k+1}{k-1} = 6$) навіть при $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty$. Натомість, рівняння ідеальної адіабати

Пуассона дає $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty$ при $\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \infty$. Рис. 55 ілюструє

зазначену вище особливість обох порівнюваних адіабат.

Однак, наведена теорія простої ударної хвилі, яка базується на рівнянні енергії для адіабатної течії, не враховує явищ дисоціації (розпаду) молекул на атоми при дуже високих температурах ($t \geq 5000^\circ \text{C}$).

Як впливає з рис. 55, при будь-якому фіксованому значенні $p_2/p_1 > 1$ величина ρ_2/ρ_1 , що відповідає ударній адіабаті, є меншою, ніж для ідеальної адіабати

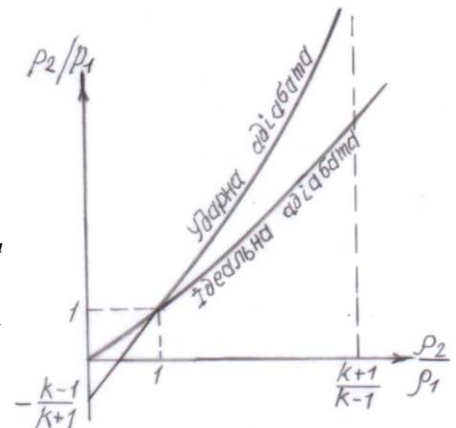


Рис. 55.

Пуассона. Отже, при ударному адіабатному стисканні газу в стрибку ущільнення і його русі через стрибок має місце певна незворотна втрата механічної енергії, яка переходить в теплову. Відповідне зростання питомої ентропії на прямому стрибку ущільнення можна знайти на підставі Першого принципу термодинаміки і формули (10.22) для необоротного адіабатного процесу (лекція № 26), застосовуючи відповідні індекси:

$$s_2 - s_1 = \frac{R}{k-1} \ln \frac{p_2/p_1}{(\rho_2/\rho_1)^k}. \quad (10.32)$$

Рис. 55 і формула (10.32) показують, що за адіабатних умов утворення стрибків розрідження є фізично неможливим, оскільки спричинило б нерівність $s_2 < s_1$, що суперечить Другому принципу термодинаміки. Доведемо це. Для ідеальної адіабати $\ln \frac{p_2/p_1}{(\rho_2/\rho_1)^k} = 0$, в той час як для ударної адіабати при уявному існуванні «стрибка розрідження», тобто в діапазоні $0 < \rho_2/\rho_1 < 1$, ми б отримали, відповідно до рис. 55, менші значення чисельника в (10.32) порівняно із значенням p_2/p_1 для ідеальної адіабати (оскільки крива ударної адіабати проходить нижче кривої ідеальної адіабати). А це призвело б до нерівності $s_2 - s_1 < 0$, що неможливо.

Рівняння (10.28), (10.29) разом з рівнянням нерозривності $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ (при $S = idem$) називають умовами Ренкіна-Гюгоніо, або умовами динамічної сумісності на розриві.

Виразив p_1/ρ_1 і p_2/ρ_2 в рівнянні енергії для вхідного і вихідного перерізів контрольного об'єму через критичну швидкість $a_* = a_0 \sqrt{2/(k+1)}$ і підставивши отримані співвідношення в рівняння зміни кількості руху у вигляді

$$v_1 - v_2 = \frac{(p_2 - p_1)S}{Q_m} = \frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1}, \quad \text{Л. Прандтль дістав формулу}$$

$$v_1 \cdot v_2 = a_*^2. \quad (10.33)$$

Це означає, що якщо до прямого стрибка швидкість v_1 була надзвуковою, то за ним швидкість руху газу v_2 — дозвукова.

Але важливо пам'ятати, що за умов необоротного енергоізолюваного процесу переходу через стрибок ущільнення тиск, густина і ентропія газу завжди зростають.

Запитання для самоперевірки до розділу 10

1. Чи може ідеальний в термодинамічному розумінні газ бути неідеальним в гідромеханічному розумінні?

2. Запишіть основні рівняння газової динаміки (рівняння руху, нерозривності, стану ідеального газу).
3. У чому полягає відмінність адіабатного процесу руху рідини від ізоентропійного?
4. Що таке ентропія системи?
5. Запишіть рівняння політропи і сформулюйте умови його переходу в рівняння адіабати Пуассона і в аналітичний вираз закону Бойля-Маріотта.
6. Як пов'язані між собою питомі теплоємності газу при сталих тиску та об'ємі?
7. Що розуміють під швидкістю звуку в газі?
8. Наведіть формулу для визначення швидкості звуку в адіабатному процесі поширення його.
9. Чому дорівнює швидкість звуку в нестисливій рідині?
10. Який рух газу називають баротропним?
11. Дістаньте інтеграл Бернуллі для стаціонарного баротропного руху нев'язкого газу.
12. Дістаньте рівняння Бернуллі для адіабатного процесу стаціонарного вихрового руху нев'язкого газу на лінії течії.
13. Чим відрізняється попереднє рівняння від рівняння Ейлера-Бернуллі для всієї області адіабатного стаціонарного безвихрового руху нев'язкого газу?
14. Як змінюється "адіабатна" швидкість звуку в ідеальному газі із зростанням швидкості його руху?
15. Що таке параметри гальмування газу?
16. Які параметри рухомого газу називають критичними?
17. Виведіть ізоентропійні формули для температури, тиску і густини рухомого газу, у тому числі для їх критичних значень.
18. Як визначити швидкість адіабатного витікання нев'язкого газу з резервуара?
19. Проаналізуйте зміну відносної масової витрати газу, що витікає ізоентропійно, залежно від відносного тиску на виході сопла.
20. Обґрунтуйте аналітичне геометрію сопла Лавалю для одержання надзвукової швидкості витікання газу.
21. Які ще способи одержання надзвукових швидкостей газу ви знаєте?
22. Що таке стрибки ущільнення?
23. На основі яких співвідношень можна розрахувати прямий стрибок ущільнення в трубі, або в чому полягають *умови динамічної сумісності на розриві*?
24. Що таке ударна адіабата Гюгонію?

ЗМІСТ

Вступ

1. Фізичні властивості і моделі рідин	
Лекція № 1	6
Лекція № 2	10
2. Гідрогазостатика	
Лекція № 3	14
Лекція № 4	17
3. Кінематика рідини	
Лекція № 5	21
Лекція № 6	26
4. Динаміка ідеальної рідини	
Лекція № 7	32
Лекція № 8	35
5. Елементи гідравліки (динаміки одновимірних потоків в'язкої нестисливої рідини)	
Лекція № 9	40
Лекція № 10	44
Лекція № 11	49
6. Потенціальні течії	
Лекція № 12	53
Лекція № 13	57
Лекція № 14	61
Лекція № 15	66
Динаміка в'язкої рідини	
Лекція № 16	71
Лекція № 17	75
Лекція № 18	79
Лекція № 19	85
Лекція № 20	90
8. Поняття примежового шару та відривних течій	
Лекція № 21	98
Лекція № 22	102
Лекція № 23	110
9. Елементи теорії гідравлічного удару в трубах	
Лекція № 24	117
10. Елементи газової динаміки	
Лекція № 25	123
Лекція № 26	129
Лекція № 27	136