УДК 534.2

В. Г. Савин, Ж. В. Сотула, Н. И. Штефан

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ИЗЛУЧЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ

Введение

Пьезокерамические преобразователи находят широкое практическое применение в различных областях прикладной гидроакустики для возбуждения и приёма акустических импульсов.

Большинство исследований по данной тематике выполнены для случаев, когда заданному нестационарному электрическому напряжению ставится в соответствие искомый акустический импульс (режим излучения). Это так называемые «прямые задачи» нестационарной гидроэлектроупругости пьезокерамических преобразователей. Среди публикаций по этой тематике отметим следующие: [1-7], [9]. В некоторых случаях разработчикам гидроакустической аппаратуры необходимо наряду с прямыми постановками рассматривать и обратные, которые позволяют определять неизвестное электрическое напряжение, которым необходимо возбуждать преобразователь для того, чтобы во внешнюю среду излучать акустические импульсы требуемой конфигурации. Другими словами, необходимо решать «обратную задачу» нестационарной гидроэлектроупругости.

Такие публикации по данной тематике практически отсутствуют [10, 11]. Целью настоящей работы является постановка и решение прямой и обратной задач нестационарной гидроэлектроупругости цилиндрических пьезокерамических преобразователей.

Математическая постановка задачи

Рассматривается пьезокерамический цилиндрический преобразователь, который находится в акустической среде. Преобразователь представляет собой бесконечно длинную тонкостенную пьезокерамическую оболочку, поляризованную в радиальном направлении металлическими электродами, которые полностью покрывают его внутреннюю и внешнюю поверхности. Пусть к преобразователю подводится электрический импульс, который вызывает его нестационарные механические колебания, за счёт чего во внешней среде распространяются акустические волны. Подобного класса задачу нестационарной гидроэлектроупругости рассмотрим в прямой и обратной постановках.

В обоих случаях исходными являются:

—уравнение движения пьезокерамической оболочки, которая совершает пульсирующие колебания [8]

$$W+\frac{Re_{31}}{C_{11}^{E}}E_r^{(0)}+\frac{R^2}{hC_{11}^{E}}q-\frac{R^2\gamma}{C_{11}^{E}}\frac{d^2W}{dt^2}=0, \tag{1}$$

где W-радиальные перемещения серединной поверхности (прогибы) оболочки; e_{31} – пьезомодуль керамики; C_{11}^{E} - её модуль упругости; $E_r^{(0)}$- электрическая напряженность пьезокерамики, которая связана с разницею электрического потенциала ψ на её электродах соотношением $E_r^{(0)}=-\frac{\psi}{h}$; R,h-серединный радиус и толщина оболочки; γ – её плотность; q - действующее на оболочку гидродинамическое нагружение; t – время;

—волновое уравнение для акустической среды [14]

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}=\frac{1}{c_0^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{2}$$

где φ – волновой потенциал среды, c_0 – скорость звука в нём, r - радиальная координата.

Связь между акустическим давлением P и волновым потенциалом имеет вид

$$P=-\rho\frac{d\varphi}{dt},$$

где ρ – плотность акустической среды.

Учитывая то, что во внутренней полости оболочки находится вакуум, гидродинамическое нагружение, которое действует на пьезокерамику, определяется следующим образом.

$$q=-P_{|r=R}=\rho\frac{d\varphi}{dt}|_{r=R}. \tag{3}$$

В прямой задаче q и P являются искомыми величинами, а в обратной задаче— задаваемыми.

На поверхности пьезокерамической оболочки должно выполняться граничное условие, при котором обеспечивается безотрывный контакт оболочки со средой

$$\frac{d\varphi}{dr}|_{r=R}=\frac{dW}{dt}. \tag{4}$$

Начальные условия нулевые

$$\varphi_{|t=0} = \frac{d\varphi}{dt}|_{t=0} = W_{|t=0} = \frac{dW}{dt}|_{t=0} = 0. \tag{5}$$

До начала возбуждения система находится в состоянии покоя. Учитывая импульсный характер электрического возбуждения оболочки, электрическая напряжённость на ней задаётся в виде

$$E_r^0 = -\frac{\psi(t)}{h} H(t), \tag{6}$$

где $H(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Выражения (1) – (6) являются математической записью нестационарной постановки задачи, записанной в размерном виде.

Запишем постановку задачи (1) – (6) в безразмерном виде. Для этого расстояние r, прогиб W и толщину оболочки h отнесём к её радиусу R, время t к R / c_0, волновой потенциал φ к Rc_0, электрическую напряжённость E_r^0 к $1 / d_{33}$, акустическое давление P и гидродинамическое нагружение q к ρc_0^2.

С учётом выполненных замен в безразмерном виде уравнение колебаний пьезокерамической оболочки и волновое уравнение движения акустической среды имеют следующий вид:

$$\frac{d^2W}{dt^2} + \frac{C_{11}^E}{\gamma c_0^2} W = \frac{e_{31}}{d_{33}\gamma c_0^2} E_r^{(0)} + \frac{\rho}{\gamma h} q, \tag{7}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{8}$$

Гидродинамическое нагружение, которое действует на оболочку, акустическое давление, электрическая напряжённость, а также условие безотрывного контакта с внешней средой в безразмерном виде запишутся в виде:

$$q = \frac{d\varphi}{dt}|_{r=1};\ P = -\frac{d\varphi}{dt};\ E_r^{(0)} = -\frac{\psi}{h} H(t); \tag{9}$$

$$\frac{d\varphi}{dr}|_{r=1} = \frac{dW}{dt}. \tag{10}$$

Решение задачи

При решении используется интегральное преобразование Лапласа по времени [13].

Запишем постановку задачи (7) – (10) в области изображений:

$$(s^2+a)W^L(s)=bq^L(s)+cE_r^{(0)L}(s); \tag{11}$$

$$\frac{d^2\varphi^L(s,r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d^L(\varphi,r)}{dr}-s^2\varphi^L(s,r)=0; \tag{12}$$

$$q^L(s)=s\varphi^L(s,r)|_{r=1};\ P^L(s,r)=-s\varphi^L(s,r); \tag{13}$$

$$E_r^{(0)L}=-\frac{\psi(s)}{h}; \tag{14}$$

$$\frac{d\varphi^L(s,r)}{dr}|_{r=1}=sW^L(s), \tag{15}$$

где индекс L обозначает соответствующую трансформатну, s – параметр преобразования,

$$a=\frac{C_{11}^E}{\gamma c_0^2};\ b=\frac{\rho}{h\gamma};\ c=\frac{e_{31}}{d_{33}\gamma c_0^2}.$$

Решение для акустической среды запишем с привлечением модифицированных функций Бесселя (Макдональда)

$$\varphi^L(s,r)=A^L(s)\frac{1}{s}e^sK_0(s,r); \tag{16}$$

где $A^L(s)$ – неизвестные функции параметра преобразования s ,

$K_0(s,r)$ – функция Макдональда нулевого порядка.

Решение(16) записано при условии, что при $r\to\infty$ волны, которые распространяются в среде— затухают.

Акустическое давление на поверхности оболочки имеет вид

$$P^L_{|r=1}(s,r)=-A^L(s)e^sK_0(s). \tag{17}$$

Рассмотрим сначала обратную задачу, когда следует определить необходимый закон возбуждения оболочки. Из выражения (17) имеем

$$A^L(s)=\frac{P^L_{|r=1}}{e^sK_0(s)}. \tag{18}$$

Запишем выражение для прогиба оболочки, используя формулу (11)

$$W^L(s)=\frac{b}{s^2+a}q^L(s)+\frac{c}{s^2+a}E_r^{(0)^L}(s). \tag{19}$$

Тогда с учётом выбранного решения (16), граничное условие (15) на поверхности контакта оболочки со средой преобразуется к виду

$$sW^L(s) = -A^L(s)e^s K_1(s), \tag{20}$$

где $K_1(s)$ – функция Макдональда первого рода

Подставляя (17) и (18) в (19) с учётом (18) имеем

$$\frac{cs}{s^2+a} E_r^{(0)^L}(s) = \frac{bs}{s^2+a} P^L_{|r=1}(s,r) + \frac{P^L_{|r=1}(s,r)}{e^s K_0(s)} e^s K_1(s). \tag{21}$$

Далее, домножая обе части равенства (21) на $\dfrac{K_0(s)(s^2+a)}{cs^2}$ получим

$$E_r^{(0)^L}(s) g^L_{10}(s) = F^L(s) P^L_{|r=1}(s), \tag{22}$$

где

$$F^L(s) = \frac{b}{c} g^L_{10}(s) + \frac{1}{c} g^L_{01}(s) + \frac{a}{c} g^L_{21}(s),$$

$$g^L_{10}(s) = \frac{1}{s} e^s K_0(s)\,;\, g^L_{01}(s) = e^s K_1(s)\,; \quad g^L_{21}(s) = \frac{1}{s^2} e^s K_1(s).$$

Используем операцию свертка к выражению (22). Получим интегральное уравнение Вольтера 1-го рода относительно неизвестной величины $E_r^{(0)^L}$

$$\int_0^t E_r^{(0)}(\tau) g_{10}(t-\tau) d\tau = \int_0^t F(t-\tau) P(\tau)_{|r=1} d\tau, \tag{23}$$

где $F(t) = \dfrac{b}{c} g_{10}(t) + \dfrac{1}{c} g_{01}(t) + \dfrac{a}{c} g_{21}(t).$

Оригиналы функций (23) приведены в работе [14]:

$$g_{10}(t) = arch(1+t);$$

$$g_{01}(t) = \frac{1+t}{\sqrt{(1+t)^2-1}};\; g_{21}(t) = \frac{1}{2}[arch(1+t) + (1+t)sharch(1+t)].$$

В интегральном уравнении (23) $P_{|r=1}(t)$, (в дальнейшем будем писать $P(t)$) является заданной функцией, а $E_r^{(0)}$ – искомой.

Выражение (23) представляет собой граничное условие, при котором обеспечивается безотрывный контакт акустической среды с оболочкой, записанное в области оригиналов.

Решение для напряжённости электрического поля $E_r^{(0)}(t)$ представим в виде

$$E_r^{(0)}(t) = A_0 \delta(t) + E_r^{*(0)}(t), \tag{24}$$

где первое слагаемое отвечает за скачок электрической напряжённости в начальной стадии переходного процесса, а другое слагаемое описывает нестационарный характер возбуждения на всём рассматриваемом временном интервале; δ – функция Дирака; A_0 – асимптотическое решение (23), которое при $t \to 0$ равно $A_0 = \frac{1}{c}$.

Подставив выбранное решение (24) в интегральное уравнение (23) получим

$$\int_0^t (A_0\delta(\tau) + E_r^{*(0)}(\tau))g_{10}(t-\tau)d\tau = \int_0^t F(t-\tau)P(\tau)d\tau. \quad (25)$$

С учётом особенностей дельта-функции имеем

$$\int_0^t E_r^{*(0)}(\tau)g_{10}(t-\tau)d\tau = G_2(t),$$

где

$$G_2(t) = F_2(t) - A_0 g_{10}(\tau), \qquad F_2(t) = \int_0^t F(t-\tau)P(\tau)d\tau.$$

Найденное решение (25) справедливо для акустических импульсов произвольной конфигурации.

Определим закон изменения прогиба оболочки $W(t)$, считая что $E_r^{(0)}(t)$ уже ранее определено. Обратимся к выражению (19).После инверсии (19), при условии, что $q^L(s) = -P^L(s)$, получим

$$W(t) = -b\int_0^t \frac{\sin(\sqrt{a}(t-\tau))}{\sqrt{a}}P(\tau)d\tau + c\int_0^t \frac{\sin(\sqrt{a}(t-\tau))}{\sqrt{a}}E_r^{(0)}(\tau)d\tau. \quad (26)$$

Взяв производную по t от (26), запишем формулу для вычисления колебательной скорости $\dot{W}(t)$ поверхности оболочки

$$\dot{W}(t) = \int_0^t [-P(\tau)b + cE_r^{(0)}(\tau)]\cos(\sqrt{a}(t-\tau))d\tau. \quad (27)$$

Приведенные выше соотношения (24) – (27) полностью описывают поведение основных физических характеристик $E_r^{(0)}$, $W(t)$, $\dot{W}(t)$ электроупругой системы, когда рассматривается обратная задача.

При рассмотрении прямой задачи, когда задающему электрическому напряжению ставится в соответствие излученный акустический импульс, основные характеристики $P(t)$, $W(t)$, $\dot{W}(t)$ определяются следующим образом.

В случае, когда к преобразователю приложено электрическое импульсное напряжение произвольной конфигурации $\psi(t)$, интегральное уравнение приобретает вид

$$\int_0^t A(t)F_1(t-\tau)d\tau = d\int_0^t \psi(t)d\tau. \qquad (28)$$

Уравнение (28) было найдено после инверсии граничного условия (15), предварительно подставив в него (16), (19), а также положив, что $\psi = H(t)\psi(t)$.

Акустическое давление на поверхности преобразователя ($r=1$)после инверсии (13), предварительно подставив в него (16), находится из выражения

$$P(t) = -\int_0^t A(\tau)g_{00}(t-\tau)d\tau, \qquad (29)$$

где $g_{00}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+2t}}$.

Прогиб и колебательная скорость, как и раньше, определяются по формулам (26), (27).

Выводы

Исследовано нестационарное поведение находящегося в жидкости тонкостенного цилиндрического пьезокерамического преобразователя (пьезокерамической оболочки), поляризованного в радиальном направлении электродами, которые полностью покрывают его внутреннюю и наружную поверхности.

Рассмотрены два варианта нестационарного возбуждения, когда по заданному нестационарному электрическому возбуждению преобразователя вычисляется искомый акустический импульс, распространяющий во внешней среде (прямая задача), а также решена обратная задача, позволяющая определять неизвестное электрическое напряжение, которым необходимо возбуждать преобразователь для того, чтобы во внешнюю среду излучать акустические импульсы требуемой конфигурации.

Для решения задач привлекается линейная теория электроупругих оболочек, для динамического описания которых оправдано привлечение гипотез Киргофа-Лява, а также уравнение идеально сжимаемой среды (акустическое приближение).

Решение выполнено с привлечением преобразования Лапласа по времени, а также операции свертка, позволяющей свести рассматриваемые задачи к интегральным уравнениям Вольтера первого рода относительно акустического давления (прямая задача) или искомого нестационарного электрического напряжения в пьезокерамике (обратная задача).

Приведены основные физические параметры нестационарного процесса: искомое акустическое давление во внешней среде (прямая задача) и обратная задача, когда по известной конфигурации акустического импульса устанавливается требуемый нестационарный характер электрического возбуждения преобразователя.

При решении нестационарных задач рекомендуется использовать одну из численных схем её решения с привлечением метода квадратурных формул, например, теоремы о среднем или формулы трапеции.

Список использованной литературы

1. Бабаев, А. Э. Действие нестационарного электрического сигнала на пьезокерамическую цилиндрическую оболочку, контактирующую с жидкостью [Текст]/ А. Э. Бабаев// Акустический журнал. -1987. -35, №3, -С.938-940.
2. Бабаев, А. Э. Излучение звука системой пьезокерамических сферических оболочек при электрическом импульсном излучении [Текст]/ А. Э. Бабаев, В. Г. Савин, А. И. Стадник// Прикладная механика. -1988. -24, №10, -С.34-40.
3. Савин, В. Г. Излучение акустических импульсов сферическимпьезовибратором[Текст]/ В. Г. Савин// Акустический журнал. -1991. -37, №6, -С.1194-1198.
4. Савин, В. Г. Преобразование акустических импульсов в электрические цилиндрической пьезокерамической оболочкой [Текст]/ В. Г. Савин// Акустический журнал. -1992. -38, №1. –С.144-149.
5. Бабаев, А. Э. Нестационарные режимы излучения системами двух многомодовых цилиндрических преобразователей [Текст]/ А. Э. Бабаев, В. Г. Савин, А. А. Лейко// Акустический журнал. -1995. -41, №4, -С.554-558.
6. Савин, В. Г. Излучение акустических импульсов сферическим тонкостенным пьезокерамическим преобразователем, находящимся в упругом экране [Текст]/В. Г. Савин, И. О. Моргун// Электроника и связь. -2006, №1, -С.58-63.
7. Савин, В. Г. Гидроакустический информационный канал, содержащий сферические пьезоэлектрические преобразователи [Текст]/ В. Г. Савин, В. Т. Маципура, И. О. Моргун// Інформ. сист., механіка та керування. -2011, №6 , -С.15-27.

8. Савин, В. Г. Уравнениеколебанийпьезокерамических сферических и цилиндрических оболочек [Текст]/ В. Г. Савин, И. О. Моргун// Інформ. сист., механіка та керування. -2010, №5, -С.85-87.
9. Бабаев, А. Э. Аналитический метод решения задач излучения нестационарных волн сферическимпьезообразователем[Текст]/ А. Э. Бабаев, В. Г. Савин, А. В. Джулинский// Теоретическая и прикладная механика. -2003, №37, -С.195-199.
10. Бабаев, А. Э. Излучение акустических импульсов заданного профиля электроупругой цилиндрической оболочкой [Текст]/ А. Э. Бабаев, В. Г. Савин, Ю. В. Кожемяка// Теоретическая и прикладная механика. -2001,№33. –С.186-191.
11. Савин, В. Г. Режимы электрического возбуждения сферического пьезпреобразователя, обеспечивающие излучение акустических импульсов заданного профиля[Текст]/ В. Г. Савин, А. Э. Бабаев, А. В. Джулинский// Электроника и связь. -2001,№12. –С.3-7.
12. Гринченко, В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций [Текст] Т.5/ В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга// Электроупругость. –К.: Наукова думка, 1989. -280 с. ISBN 5-12-000378-8
13. Дидкин, В. А. Операционное исчисление [Текст]/ В. А. Дидкин, А. П. Прудников. –М. : Высшая школа, 1966. -406 с.
14. Бабаев, А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах [Текст]/ А. Э. Бабаев. –К.: Наукова думка, 1990. -176 с.