

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ. ФІЗИКА МАКРОСИСТЕМ

Конспект лекцій

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Технічні та програмні засоби автоматизації» спеціальності
174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка
та за освітньою програмою «Інформаційні вимірювальні технології» спеціальності
175 Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка

Укладач: О.М. Генкін

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2024

УДК 531.1 – 6; 534.1; 536
Ф 48

Укладач *Генкін Олексій Михайлович, канд. техн. наук*

Рецензент *Якуніна Н.О., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри загальної фізики*
фізико-математичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Савченко Д. В., докт. фіз.-мат. наук, доцент*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 1 від 26.09.2024 р.)
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 8 від 26.06.2024 р.)*

Ф 48 Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Фізика макросистем [Електронний ресурс] : конспект лекцій : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Технічні та програмні засоби автоматизації» спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка та за освітньою програмою «Інформаційні вимірювальні технології» спеціальності 175 Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О.М. Генкін – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024 – 147 с.

Викладено розширений конспект лекцій з курсу загальної фізики, розділи «Фізичні основи механіки» та «Фізика макросистем». Лекції читались на протязі багатьох років для усіх спеціальностей приладобудівного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського. Приділено особливу увагу походженню фізичних законів та логічним зв'язкам між усіма питаннями, що необхідно для побудови у свідомості фізичної картини світу. Також детально пояснюється зміст усіх застосованих математичних операцій. Посібник може також бути корисним для студентів усіх технічних спеціальностей НТУУ КПІ ім. Ігоря Сікорського.

УДК 531.1 – 6; 534.1; 536

Реєстр. № 24/25-040. Обсяг 9,2 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

Зміст

Вступ.....	5
Фізичні основи механіки.....	7
1 Математика у загальній фізиці.....	8
1.1 Похідні.....	8
1.2 Інтеграли.....	11
1.3 Диференціальні рівняння.....	13
2 Кінематика.....	15
2.1 Кінематика матеріальної точки.....	15
2.1.1 Відомості з векторної алгебри.....	17
2.1.2 Характеристики руху матеріальної точки.....	21
2.1.3 Визначення рівняння руху точки та швидкості по відомій залежності від часу вектора прискорення.....	27
2.1.4 Середнє арифметичне значення функції у певному інтервалі значень аргументу.....	30
2.2 Кінематика твердого тіла.....	31
2.2.1 Обертальний рух навколо нерухомої осі.....	31
2.2.2 Векторний добуток.....	35
3 Закони динаміки Ньютона.....	38
3.1 Перший закон динаміки.....	38
3.2 Другий закон динаміки Ньютона.....	39
3.3 Третій закон динаміки Ньютона.....	40
3.4 Принцип відносності.....	40
3.5 Закони для сил різної природи.....	41
3.5.1 Сила спротиву.....	41
3.5.2 Сила тертя ковзання.....	41
3.5.3 Всесвітнє тяжіння.....	42
3.5.4 Електрична сила.....	43
3.5.5 Молекулярні сили (сили пружності).....	45
3.5.6 Сили інерції.....	46
4 Закони збереження.....	49
4.1 Робота. Кінетична енергія.....	50
4.2 Консервативні сили. Поля.....	51
4.3 Потенціальна енергія частинки у силовому полі.....	52
4.4 Потенціальна енергія взаємодії.....	55
4.5 Загальний закон збереження механічної енергії.....	58
4.6 Закон збереження імпульсу.....	59
4.7 Центр мас.....	60
5 Динаміка обертального руху.....	65
5.1 Обертання навколо нерухомої осі.....	65
5.1.1 Момент сили.....	66
5.1.2 Момент імпульсу.....	68
5.1.3 Момент інерції.....	69
5.1.4 Сили інерції у обертальній системі відліку.....	72
5.2 Обертання у просторі.....	74

6. Механічні коливання.....	77
6.1 Кінематика гармонічних коливань.....	77
6.2 Динаміка гармонічних коливань.....	78
6.2.1 Тягарець на пружині.....	78
6.2.2 Математичний маятник.....	78
6.2.3 Фізичний маятник.....	80
6.3 Енергія гармонічного осцилятора.....	84
6.4 Енергія та рівняння руху.....	85
6.5 Додавання гармонічних коливань.....	85
6.6 Загасаючі коливання.....	89
6.7 Вимушені коливання.....	91
7. Спеціальна теорія відносності (СТВ).....	96
7.1 Перетворення Лоренца.....	97
7.2 Перетворення швидкості у рухомій системі відліку.....	100
7.3 Динаміка теорії відносності.....	101
7.4 Перетворення енергії та імпульсу у рухомій системі відліку.....	105
7.5 Частинки з нульовою масою спокою.....	106
7.6 Дослід Майкельсона – Морлі.....	106
Фізика макросистем.....	112
1 Основи термодинаміки (на прикладі ідеального газу).....	113
1.1 Рівняння стану ідеального газу.....	113
1.2 Перший принцип термодинаміки.....	113
1.2.1 Внутрішня енергія системи	113
1.2.2 Кількість тепла та робота.....	113
1.2.3 Перший принцип термодинаміки.....	114
1.3 Робота, яку виконує ідеальний газ над зовнішніми тілами.....	114
1.4 Теплоємність ідеального газу.....	115
1.5 Адіабатний процес.....	117
1.6 Політропічні процеси.....	117
1.7 Робота при політропічних процесах.....	119
2 Основи статистичної фізики на прикладі ідеального газу.....	119
2.1 Тиск ідеального газу на стінки посудини.....	119
2.2 Ступені свободи механічної системи.....	122
2.3 Гіпотеза про рівне розподілення енергії за ступенями свободи.....	122
2.4 Розподіл молекул за величиною швидкості.....	123
2.4.1 Основи теорії імовірності.....	123
2.4.2 Функція розподілу Максвелла проекцій вектора швидкості молекул.....	128
2.4.3 Функція розподілу модуля вектора швидкості.....	133
2.5 Розподіл Больцмана.....	136
3 Другий принцип термодинаміки.....	142
3.1 Ентропія.....	142
3.2 Статистичний зміст другого принципу термодинаміки.....	143
3.3 Ентропія і імовірність.....	145

Вступ

У загальному об'ємі знань, які здобуло людство за останні 2000 років, фізиці належить особливе місце. Це фундамент сучасного природознавства. Фізика вивчає самі основи будови Всесвіту. Наприклад, вона вивчає властивості та механізми взаємодії найбільш малих частинок, з яких побудовано оточуючий світ.

Без перебільшення можливо сказати, що успіхи фізичної науки визначають обличчя людської цивілізації.

Сама фізика як наука демонструє ідеал, до якого повинні наближатися усі галузі знань. Коли на основі порівняно невеликої кількості добре експериментально обґрунтованих принципів, з використанням потужного математичного апарату, можливо вивести масу наслідків та передбачити результати величезної кількості процесів по вихідним даним.

Послідовне вивчення курсу фізики формує специфічний логічний образ мислення (фізичну інтуїцію), який є надзвичайно ефективним і у інших науках.

В умовах бурхливої науково-технічної революції, яка відбувається у наші часи, роль фізики надзвичайно зростає і не тільки як технічної науки, що створює цілі галузі виробництва, а і фундаментальної, формуючої світогляд.

Сучасна освіта зустрічає великі труднощі, намагаючись встигнути за бурхливим зростанням об'єму знань. Швидка зміна поколінь знань, взаємопроникнення наук приводять до того, що вузькі спеціалісти – прагматики опиняються безсилими при вирішенні нових задач. Тільки фундаментальна фізична та математична освіта здатні виховати сучасне наукове мислення, що дозволяє швидко налаштовуватися на вирішення будь-яких проблем.

Що таке фундаментальна фізична освіта? Усі елементи фізичних знань взаємно пов'язані. Практично неможливо розібратися у якомусь питанні не розглянувши його зв'язки з багатьма іншими. Якщо при цьому вдається побудувати у свідомості струнку, логічно об'єднану фізичну картину світу, то це можливо вважати фундаментальною фізичною освітою.

Час та зусилля, що витрачені на побудову у свідомості фізичної картини світу, окупляться сторицею.

По-перше, багато предметів, які вивчають у КПП, прямо чи опосередковано використовують відомості із курсу загальної фізики. Наприклад, це теоретична механіка, електротехніка та електроніка, оптика та багато інших.

По-друге, специфічний логічний образ мислення, багато аналогій, які виникають у свідомості при вивченні фізики, здатні дуже допомогти при вивченні багатьох інших наук.

Та, головне, без фундаментальної фізичної освіти, не варто розраховувати на успіхи у професійній діяльності в науково-технічній галузі.

Яким чином побудувати у свідомості фізичну картину світу?

Необхідно послідовно та наполегливо вивчати літературу, вирішувати самостійно якомога більше задач, вдумливо відноситися до лабораторних робіт. Корисно відвідувати лекції та записувати на них основні визначення, формули та рисунки. Це вмикає зорову пам'ять та допомагає краще засвоїти матеріал. А, головне, треба постійно ставити собі запитання та знаходити на них відповіді. Наприклад, у фізиці розглядається безліч формул. З приводу кожної з них доцільно спитати себе: що означає кожна величина, що входить до формули, як і чому вона вводиться; яке походження даної формули із загальних принципів; яке фізичне явище описує формула; який фізичний зміст взаємного зв'язку величин, що входять до формули; як конкретно виконуються математичні дії, передбачені даною формулою (іноді за простими позначеннями криються досить складні математичні операції). Спроби відповісти на такі питання, можливо, приведуть до необхідності пройти по довгій та іноді розгалуженій логічній мережі. Але уявляється, що це єдиний спосіб по справжньому розібратися з будь-якою наукою, не тільки з фізикою.

Окрім того, такі питання будуть ставитися на екзамені. Таким чином можна за 10 хвилин визначити рівень підготовки студента по усьому, досить великому об'єму матеріалу.

В очному режимі учбовий процес відбувається наступним чином.

Раз на тиждень викладач проводить лекцію у великій аудиторії, одночасно для декількох груп (60 – 100 студентів). На лекції студенти ведуть конспект, у який записують усі визначення, формули, малюють рисунки. Матеріали лекцій викладач створює на основі інформації з різних підручників, іншої літератури. Якість лекцій залежить від кваліфікації викладача.

Матеріал лекцій, як правило, досить складний. Існує логічний зв'язок між різними питаннями. Кожне окреме питання можна зрозуміти тільки базуючись на попередній інформації. Як правило на лекції не все вдається одразу зрозуміти. Логічний зв'язок втрачається. Нерозуміння накопичується. Добре, якщо вдається на лекції засвоїти хоча б процентів 50 матеріалу. Дуже важливим є написання конспекту. При цьому вмикається зорова пам'ять, виникає певна зосередженість. Написання конспекту від руки є необхідним етапом справжнього засвоєння матеріалу.

Як правило, можливість задавати питання лектору є дуже обмеженою. Доречним є щось з'ясувати тільки на перерві.

У подальшому студенти працюють самостійно з літературою, спираючись на матеріали конспекту.

Якщо повністю доступними є гарно оформлені матеріали лекцій, то проведення лекцій у певній мірі втрачає сенс. Набагато ефективнішою є самостійна робота з матеріалами лекцій з обов'язковим написанням конспекту від руки.

У дистанційному режимі лекції проводяться у Zoom. Можливість виводити зображення з екрану комп'ютера дозволяє демонструвати як файли з лекціями, детально розглядаючи при цьому найбільш важливі та складні питання, так і файли з додатковими матеріалами, що збільшують наочність сприймання інформації. У цілому, користь від таких лекцій видається набагато більшою ніж від лекцій в очному режимі.

Але, у будь-якому випадку, основним етапом освіти є самостійна робота.

Матеріалу, який потрібно засвоїти, дійсно дуже багато. Він набагато складніший, ніж у школі. Якщо не почати одразу, з самого початку семестру, займатися фізикою, буде упущено важливий етап освіти. Ви не зможете потім розібратися у багатьох наступних питаннях. Це дуже ускладнить ваш шлях до диплому. Час втрачати не можна!

Фізичні основи механіки

Механіка вивчає рух тіл. Рухом можна назвати зміна положення тіла у просторі із плином часу. Тому усі закони механіки прямо, чи опосередковано містять просторово–часові співвідношення, тобто відстані та проміжки часу.

Простір та час є найважливішими фізичними категоріями. Їх властивості можна визначити при вивченні руху тіл у різних умовах.

Коротко зупинимося на питанні, що таке час? Складається враження, що це плавний, рівномірний потік, що містить усі події. Час це те, що відділяє одну подію від іншої. Дослід вчить, що на цей потік неможливо вплинути. Але з'ясувалося, що це не так. Швидкість потоку часу залежить від швидкості руху тіл у просторі, також вона змінюється у полі сил тяжіння. Що, конкретно, є часом? Ми його впевнено вимірюємо, наприклад, за допомогою годинника. Що, конкретно, вимірює годинник? Він вимірює число періодів періодичного процесу (число коливань маятника, чи коливань струму у електричному колі). Наразі визначенням часу вважають метод його вимірювання. Проміжок часу це число періодів періодичного процесу, який визнано еталонним.

Як визначити положення тіла у просторі? У просторі немає місця, відносно якого можливо визначати положення тіл. Положення тіла у просторі можливо визначити тільки відносно іншого тіла.

Тіло (чи група тіл), відносно якого визначається положення тіл у просторі, має назву *тіла відліку*. Зручно зв'язати з тілом відліку систему координат, наприклад, декартову. Для визначення проміжків часу потрібні годинники. Сукупність тіла відліку, пов'язаної з ним системи координат та синхронізованих годинників має назву *системи відліку*. Поняття системи відліку є фундаментальним у фізиці. Без системи відліку неможливо описати рух тіл.

Рух реальних тіл є досить складним. Аналіз руху можна спростити шляхом використання деяких абстракцій.

Поширеною абстракцією є поняття матеріальної точки. *Матеріальна точка* це тіло, розмірами якого можна знехтувати в умовах даної задачі. У різних задачах одне й те ж тіло може бути, чи не бути матеріальною точкою. Наприклад, розглядаючи рух Землі навколо Сонця її можна вважати матеріальною точкою тому, що відстань між Землею та Сонцем набагато більша за розміри Землі. А коли ми розглядаємо рух тіл відносно Землі, її не можна вважати матеріальною точкою.

Іншою поширеною абстракцією є *абсолютно тверде тіло*. Це тіло, конфігурація якого у процесі руху не змінюється. Тобто нехтуємо деформацією тіла.

Механіка ставить перед собою дві основні задачі:

1 Вивчення різних рухів та узагальнення отриманих результатів у вигляді законів руху – законів, за допомогою яких можна передбачити характер руху у кожному конкретному випадку.

2 Знаходження загальних механічних властивостей, тобто загальних теорем чи принципів, притаманних будь-якій системі, незалежно від конкретного роду взаємодії між тілами системи.

Вирішення першої задачі привело до встановлення Ньютоном та Ейнштейном так званих законів динаміки, вирішення другої задачі – до виявлення законів збереження таких фундаментальних величин, як енергія, імпульс та момент імпульсу. Закони динаміки та закони збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу є основними законами механіки. Вивчення їх і складає зміст курсу механіки.

1 Математика у загальній фізиці

У шкільному курсі фізики намагаються уникнути використання диференціального та інтегрального числення. Це приводить до багатьох негативних явищ. Зокрема розглядаються лише окремі частинні випадки, порушуються логічні зв'язки між різними питаннями, розгляд деяких питань сильно ускладнюється. Напроти, використання згаданої математики, у багатьох випадках, спрощує аналіз явищ, створює струнку логічну фізичну картину світу. У курсі загальної фізики це є обов'язковим.

Нажаль курс загальної фізики у КПІ йде попереду курсу математики. тобто використовує відомості, які ви ще не розглянули у курсі математики. Зокрема, активно використовується диференціальне та інтегральне числення, векторний аналіз, математика векторних полів, доведеться ознайомитися з основами теорії імовірності (при вивченні молекулярної фізики). Дещо ви повинні були вивчати у школі, але далеко не все і надії на це мало. Доведеться розбиратися з математикою самостійно. Це не так безнадійно, як може здаватися. Потрібно лише добре усвідомити математичний зміст усіх операцій. А їх конкретне виконання передбачено лише у окремих найпростіших випадках, зокрема, при вирішенні задач. Уся необхідна інформація міститься у моїх лекціях. Можливо це вам допоможе.

Розібратися з математикою завчасно буде вам дуже корисним при вивченні математики. Ви вже будете мати уявлення про практичне застосування математичних операцій. Це важливо.

Закликаю Вас відійти від шкільного курсу фізики та почати вивчати фізику спочатку, на новій основі.

Думаю, варто розглянути деякі відомості з математики, а саме математичний зміст основних операцій диференціального та інтегрального числення.

1.1 Похідні

Похідна від функції $f(x)$ по аргументу x .

Позначення:

$$\frac{df}{dx} \text{ «де } f \text{ по де } x\text{»}$$

За визначенням це відношення нескінченно малого приросту функції df до відповідного приросту dx аргументу. Ми надаємо аргументу малий приріст dx , розраховуємо відповідний приріст функції df та знаходимо їх відношення. Значок « d » означає диференціал, але на даному етапі варто вважати диференціалом нескінченно малий приріст. Тобто:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

Наприклад, $f(x) = x^2$. Надаємо аргументу приріст Δx , визначаємо відповідний приріст функції Δf та знаходимо відношення цих величин:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 = 2x \end{aligned}$$

Аналогічно можна знайти похідні від усіх функцій.

Варто запам'ятати формули для знаходження похідних від основних функцій.

Степенева функція:

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}$$

Експонента:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

Логарифм:

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Синус:

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

Косинус:

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

Цих формул достатньо у більшості випадків.

Розглянемо геометричний зміст похідної. Це тангенс кута нахилу дотичної до графіку функції відносно осі, на якій відкладено аргумент (рисунок).

Для точки 1 приблизне значення похідної дорівнює:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi$$

Для точки 2 :

$$\frac{df}{dx} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\operatorname{tg} \varphi$$

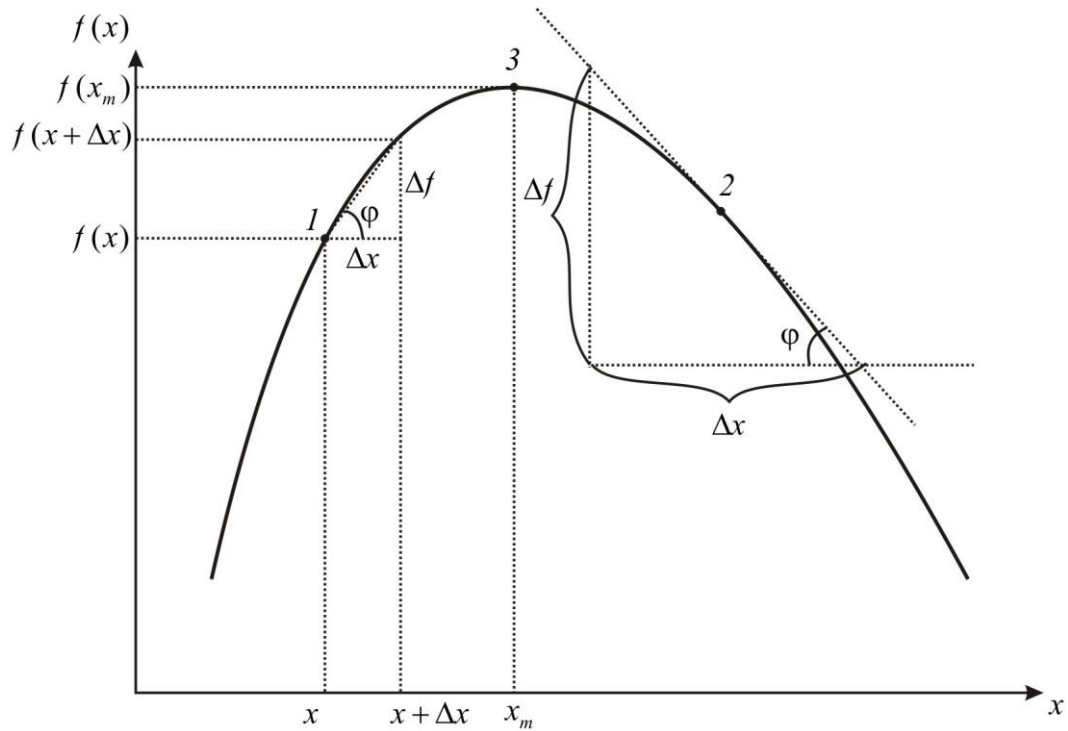
У даному випадку від'ємний знак для $\operatorname{tg} \varphi$ відображає зменшення значення функції при збільшенні значення аргументу, тобто Δf має від'ємний знак.

Слід підкреслити, що геометричне значення кута φ нахилу дотичної залежить від масштабу осей. Нас же цікавить не сам кут φ , а його тангенс, який дорівнює значенню Δf , поділеному на значення Δx . У побудованому на дотичній прямокутному трикутнику довжина катетів Δf та Δx враховується у масштабі відповідних осей.

У точці 3, яка відповідає максимуму кривої, тангенс кута нахилу дотичної та похідна дорівнюють нулю. Відповідно, визначити положення точки екстремуму можна вирішивши відносно x рівняння:

$$\frac{df}{dx} = 0.$$

Рішенням цього рівняння буде значення x_m . Максимальне значення функції дорівнює $f(x_m)$.



Приріст функції $f(x)$, який відповідає приросту аргументу dx , очевидно дорівнює:

$$df = \frac{df}{dx} dx.$$

Якщо приріст аргументу не є нескінченно малим, а має кінцеве значення, для розрахунку відповідного приросту аргументу використовують аналогічну формулу, яка дає приблизне значення:

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx} \Delta x.$$

Ця формула, зокрема, використовується при визначенні похибки при непрямих вимірюваннях.

Припустимо, що в нас є функція декількох змінних $f(x, y, z)$. Похідна цієї функції по одній змінній (при диференціюванні усі інші змінні приймаємо сталими) має назву *частинна похідна* та має спеціальне позначення:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

Часто використовується формула для похідної добутку двох функцій:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot \varphi(x)] = \frac{df}{dx} \varphi + \frac{d\varphi}{dx} f.$$

Приріст добутку двох функцій, який відповідає приросту аргументу dx , відповідно, дорівнює:

$$d(f \cdot \varphi) = df \cdot \varphi + d\varphi \cdot f$$

Похідну від складної функції (аргументом якої є інша функція) можна визначити за очевидною формулою:

$$\frac{df(\varphi(x))}{dx} = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

1.2 Інтеграли

Поняття «інтеграл» означає завжди суму нескінченно великої кількості нескінченно малих доданків. Визначати такі суми необхідно на кожному кроці.

Розглянемо визначений інтеграл від функції $f(x)$ по змінній x .

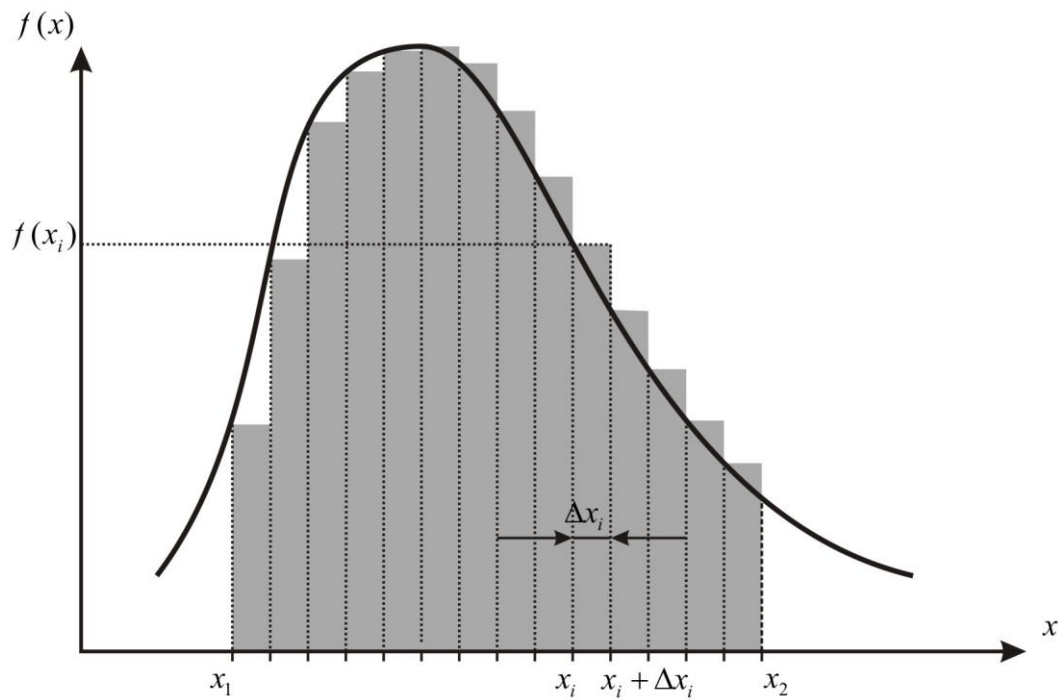
Позначення:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad x_1, x_2 - \text{межі (границі) інтегрування}$$

Розділимо інтервал $x_1 \div x_2$ на маленькі частки Δx . Визначимо значення функції $f(x_i)$ у якійсь точці кожного i -того інтервалу Δx_i . Визначимо для кожного інтервалу добуток $f(x_i)\Delta x_i$. Визначимо суму усіх добутків. Таким чином ми отримаємо приблизне значення інтегралу. Точне значення ми отримаємо при наближенні кожного з інтервалів Δx_i до нуля. При цьому ми отримаємо суму нескінченно великої кількості нескінченно малих доданків:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \sum_{x_1}^{x_2} f(x_i) \Delta x_i \quad \text{при } \Delta x_i \rightarrow 0$$

Геометричний зміст: площа під кривою графіка функції у межах $x_1 \div x_2$ (рисунок).



Інтеграли бувають різних типів:
 по одній змінній (ми розглянули),
 контурний (криволінійний) – кожен доданок інтегральної суми містить елемент довжини якогось контуру,
 інтеграл по поверхні – кожен доданок інтегральної суми містить елемент поверхні,
 інтеграл по об'єму – кожен доданок інтегральної суми містить елемент об'єму і таке інше.

Існують певні прийоми для розрахунку інтегралів усіх типів. Але у курсі загальної фізики усі ці прийоми не використовуються. Достатньо знати, що це просто сума. У всіх випадках інтеграл можна розрахувати з потрібною точністю чисельним методом, використовуючи формулу типу:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \sum_{x_1}^{x_2} f(x_i) \Delta x_i$$

Розрахунок в ексел інтеграла від не занадто складної функції – справа декількох хвилин.

Інтеграли по одній змінній потрібно визначати у простих випадках конкретно. То ми розглянемо як це робиться.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1), \text{ де } F(x) \text{ – первісна функція до функції } f(x).$$

За визначенням первісної функції:

$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ Існує позначення $F(x) = \int f(x)dx$ (інтеграл без меж інтегрування – невизначений інтеграл).

Є правила для знаходження первісної функції від простих функцій, які варто запам'ятати (так звані табличні інтеграли):

$$\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

В більшості випадків цього достатньо.

1.3 Диференціальні рівняння

Доведеться вирішувати найпростіші диференціальні рівняння. Це рівняння, які пов'язують похідну від функції та саму функцію.

Наприклад:

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{x}$$

Потрібно знайти функцію $x(t)$.

Прості диференціальні рівняння вирішуються методом розділення змінних. Потрібно, шляхом алгебраїчних перетворень, зосередити змінні величини у різних частинах рівняння. Розділяємо змінні:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = k dt$$

Визначаємо первісні функції для кожної частини рівняння та прирівнюємо їх:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int k dt.$$

Використавши формулу для інтеграла від степеневої функції, отримаємо:

$$2\sqrt{x} = kt + const$$

До рівняння додається константа. Незалежно від величини цієї константи похідна від обох частин рівняння буде дорівнювати функціям, які ми інтегрували, бо похідна від константи дорівнює нулю.

Знаходимо константу з так званої початкової умови. Потрібно знати значення функції при якомусь певному значенні аргументу. Без початкової умови отримати рішення диференціального рівняння неможливо.

Наприклад, при $t=0$ $x=0$. Підставляємо дані значення у попереднє рівняння та отримуємо значення константи, яка, у даному випадку, дорівнює нулю.

Остаточно:

$$x = \frac{k^2 t^2}{4}$$

2 Кінематика

Кінематика це розділ механіки, який вивчає рух тіл без урахування причин, які цей рух викликають.

2.1 Кінематика матеріальної точки

Як визначити положення матеріальної точки відносно декартової системи координат.

За умовчанням використовують праву систему декартових координат. Напрямок осі Z відносно площини XY визначається правилом правого гвинта, чи свердлика. Якщо обернути вісь X у напрямку до осі Y по короткому шляху, то напрямок переміщення тіла гвинта при такому обертанні вкаже додатний напрямок осі Z .

Розташування точки P у просторі можна задати трьома координатами x, y, z (рис.1).

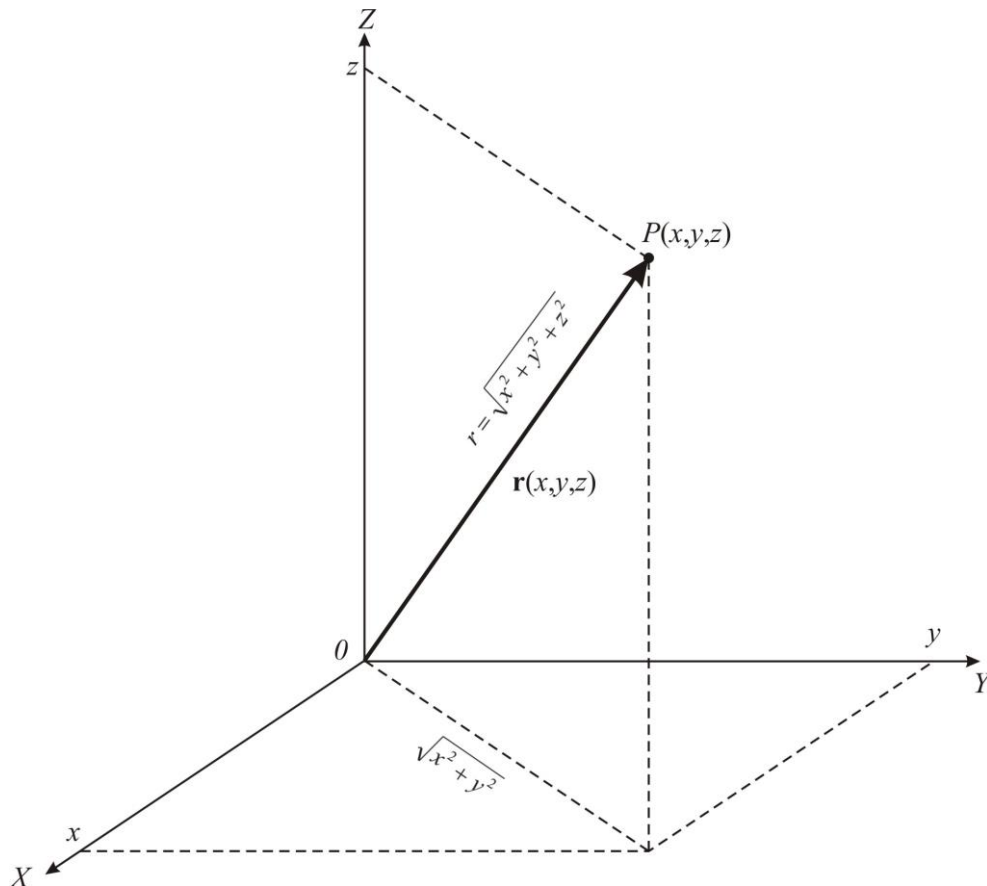


Рис.2.1 Визначення положення точки у декартовій системі координат.

Рівняння руху: $x(t), y(t), z(t)$. Рівняння руху повністю визначають рух тіла, тобто положення тіла у просторі у кожний момент часу. Але використовувати рівняння руху для опису фізичних законів незручно – вони залежать від вибору координатних осей.

Фізичні закони не залежать від вибору координатних осей. Ця властивість фізичних законів настільки важлива, що для її урахування розроблена ціла математична техніка, яка має назву *векторний аналіз*.

Важливо розрізняти векторні та скалярні фізичні величини. Векторні величини характеризуються числовим значенням та напрямком у просторі, а скалярні тільки числовим значенням. У обох випадках числове значення і напрямок не залежать від вибору системи координат.

Наприклад, крок у просторі від початку координат до даної точки має певний напрямок та довжину. Якщо ми розвернемо координатні вісі, він залишиться на місці. Цей крок від початку координат до даної точки має назву радіус–вектор та позначається $\mathbf{r}$. Радіус–вектор повністю визначає положення точки у просторі. Радіус–вектор $\mathbf{r}$ (його довжину та напрямок) можна однозначно визначити трьома проекціями на координатні вісі x , y , z . Пишуть так $\mathbf{r}(x, y, z)$. Символ $\mathbf{r}$ є представником трьох чисел x , y , z , але він є також представником нескінченної кількості інших трійок чисел, якщо ми надумаємо змінити координатні вісі. Для того, щоб радіус–вектор залишився на місці при зміні координатних осей, трійка чисел x , y , z повинна при цьому змінюватися по строго визначеному закону. Корисно побачити цей закон хоча б для простішого частинного випадку (рис. 2.1).

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= y \cos \theta - x \sin \theta \\z' &= z\end{aligned}\tag{2.1}$$

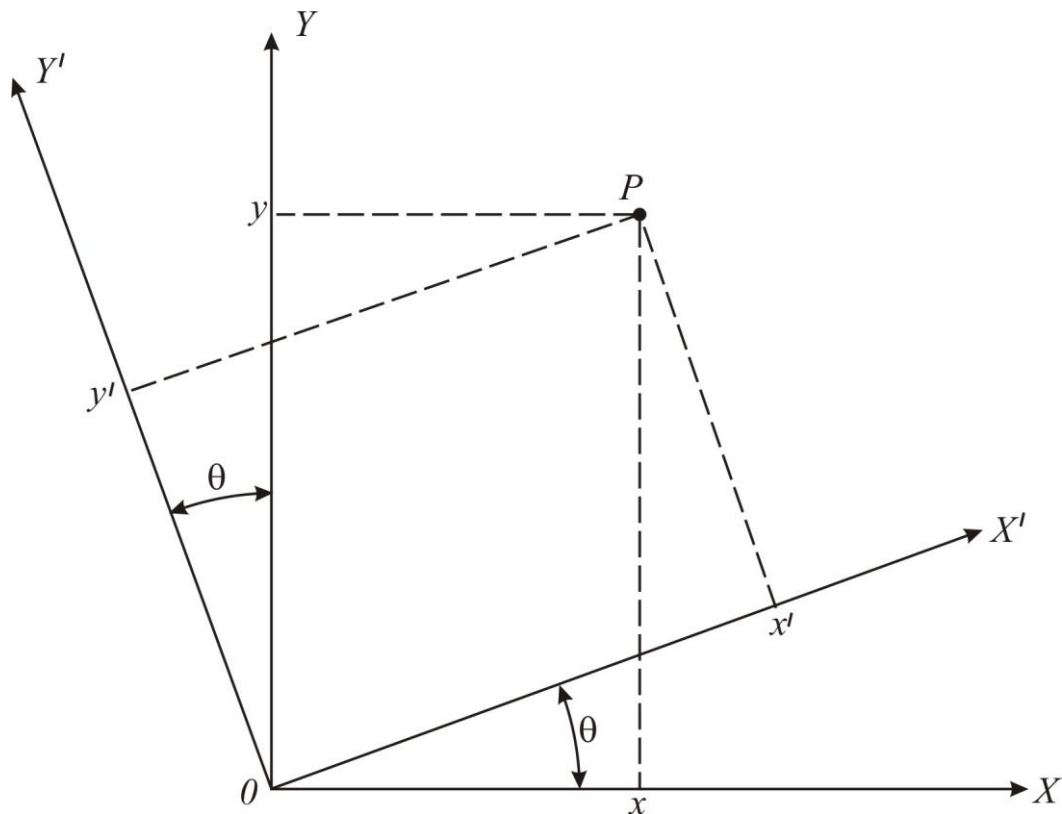


Рис.2.2 Зміна координат точки при повороті координатних осей.

Закони перетворення лінійні, старі координати у цих перетвореннях переміщуються. Для кроку у просторі є очевидним, що це об'єкт, який не залежить від вибору координатних осей. Напрямок цієї величини та її числове значення (модуль вектора) при повороті осей залишаються незмінними. Тобто це вектор.

Але є багато випадків, коли напрям величини не є очевидним. Та навіть сама наявність напрямку не зрозуміла. Наприклад, вектор кутової швидкості тіла. Кутовою швидкістю ω називають відношення нескінченно малого кута повороту тіла $\Delta\phi$ до відповідного цьому повороту проміжку часу Δt : $\omega = \Delta\phi/\Delta t$. Розмірність ω [рад/с]. Зовсім не зрозуміло, чому ця величина має напрям у просторі та яким може бути цей напрям. Але виявилось, що ω математично веде себе як вектор, який має напрям осі обертання. Те, що

величина ω має певний напрям у просторі виявляється і фізично. Наприклад, візьмемо у руки працюючу кавомолку та спробуємо змінити напрям осі обертання. Ми відчуємо, що для цього потрібно прикласти зусилля. Дивно, але зусилля потрібно прикладати у напрямі, що перпендикулярний тому, у якому хочемо повернути вісь кавомолки. Якщо б кутова швидкість обертання барабану кавомолки не була вектором, то ніяких зусиль для зміни напрямку осі обертання прикладати було б непотрібно. Отже числове значення кутової швидкості при повороті осі не змінюється.

Як можна визначити є фізична величина векторною, чи ні?

Визначимо вектор математично як величину, що визначається трьома числами, які перетворюються при зміні системи координат по такому ж закону, як і трійка чисел x, y, z (співвідношення (1)). Згадані три числа – компоненти вектора. Те, що фізичні співвідношення між якимись величинами можна виразити у формі векторних рівнянь відображає той факт, що ці співвідношення є вірними у будь якій системі координат.

Часто вектор зручно зображати у вигляді стрілки. Довжина цієї стрілки у певному масштабі відображає числове значення величини, а напрям відповідає напрямку величини. Проекції стрілки на координатні вісі у відповідному масштабі – компоненти вектора. При повороті координатних осей ці проекції змінюються по правильному закону (співвідношення (2.1)). Тобто зобразивши величину у вигляді стрілки, не потрібно турбуватися щодо координатних осей.

Увага!

Векторні величини позначаються у рукопису рисочкою, чи стрілочкою над літерою (наприклад, $\vec{r}$, чи $\vec{r}$). Якщо такої рисочки немає, то це скалярна величина, чи модуль (числове значення) векторної величини.

У надрукованому матеріалі векторні величини позначаються просто жирним шрифтом. Якщо шрифт звичайний, то це скалярна величина, чи модуль (числове значення) векторної величини.

2.1.1 Відомості з векторної алгебри

Опишемо закони, чи правила, що регулюють можливі сполучення різних векторів.

Додавання та віднімання векторів

Поперед усього розглянемо *суму двох векторів*. Нехай вектори **a** та **b** задані у якійсь системі координат компонентами a_x, a_y, a_z та b_x, b_y, b_z . Припустимо, що комусь прийшло на ум скласти три числа $a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z$. Чи отримаємо ми у результаті вектор? Вектор утворюють *не будь які* три числа! Щоб задати вектор, ми повинні пов'язати задані нам три числа з координатною системою так, щоб при повороті координатних осей ці числа перетворювалися по описаним раніше правилам (співвідношення (2.1)). Таким чином, ми повинні з'ясувати, у що перетворюються числа $a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z$, якщо відомо, що при зміні системи координат числа a_x, a_y, a_z переходять у a'_x, a'_y, a'_z , а b_x, b_y, b_z переходять у b'_x, b'_y, b'_z ? Чи отримаємо ми після повороту координатних осей числа $a'_x + b'_x, a'_y + b'_y, a'_z + b'_z$, які пов'язані з числами $a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z$ співвідношенням (2.1)? Відповідь, звісно буде ствердною тому, що рівняння для закону перетворення (2.1) є лінійними.

«Додаючи» вектори **a** та **b** по тільки що наведеному правилу, ми отримаємо новий вектор **c**. Ми запишемо це так:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Вектор **c** має властивість:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$

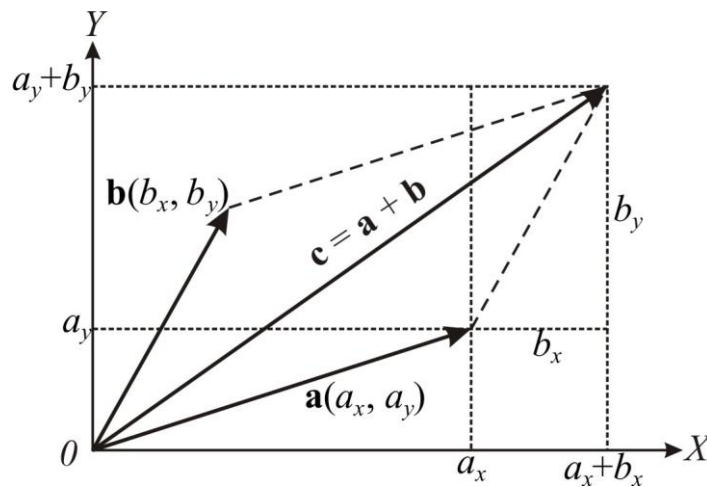
це легко перевірити, написавши компоненти вектора **c**. Крім того,

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Вектори можна додавати у будь якому порядку.

Якій геометричний зміст має сума векторів $\mathbf{a} + \mathbf{b}$? Як буде виглядати вектор **c**, якщо ми зобразимо **a** та **b** за допомогою стрілок? Відповідь на це питання дає рис.2.3. Ми бачимо, що додавати компоненти вектора **b** до компонентів вектора **a** простіше за все, приклавши відповідним чином прямокутник, що визначається компонентами **b**, до такого ж прямокутника, що визначається компонентами **a**. Це все одно, що поставити вектор **b** «ногами» на «голову» вектору **a**. Стрілка, що з'єднує «ноги» вектора **a** та «голову» вектора **b**, і буде вектором **c**. Можна поступити інакше: поставити «ноги» **a** на «голову» **b**. Згадавши геометричні властивості паралелограма, можна пересвідчитися у тому, що ми знову отримаємо той же вектор **c**. Зважимо, що, встановлюючи вектори друг на друга, ми додаємо їх без допомоги координатних осей.

Якщо ми додаємо декілька векторів, то об'єднавши стрілки, що відповідають цим векторам, у ланцюг, ми отримаємо суму цих векторів, як стрілку, що з'єднує початок та кінець ланцюга (рис.2.3).



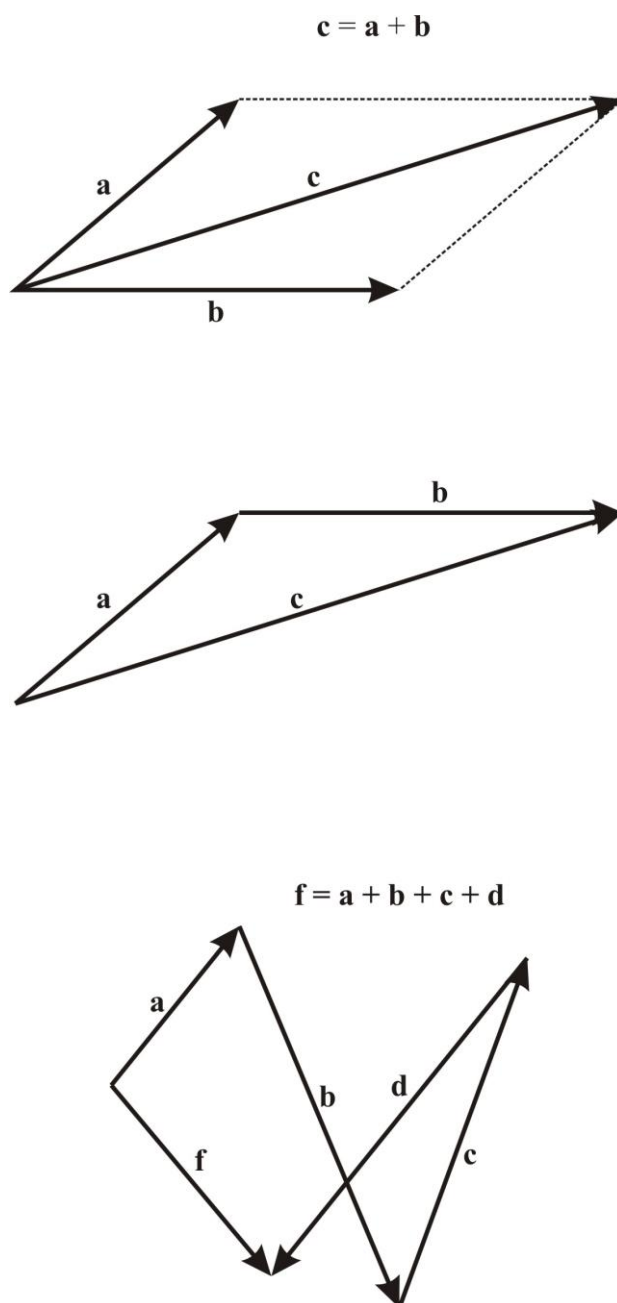


Рис.2.3 Геометричний зміст додавання векторів.

Розглянемо тепер віднімання векторів. Можна визначити віднімання тим самим способом, що і додавання, але замість того, щоб додавати, будемо віднімати компоненти.

Множення вектора на число

Припустимо, що ми помножили вектор a на число α . Що потрібно розуміти під таким добутком? Домовилися розуміти під цим вектор з компонентами $\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z$. Легко побачити з законів перетворення (2.1), що це дійсно вектор.

Скалярний добуток векторів

Легко зрозуміти, що довжина кроку у просторі однакова у всіх координатних схемах. Відповідно, якщо якомусь кроку r відповідають компоненти x, y, z у одній

системі координат та компоненти x', y', z' у іншій системі, то відстань $|\mathbf{r}| = r$ одна і та ж у обох системах:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

Легко довести за допомогою законів перетворення (2.1), що ці відстані рівні. Зручніше порівнювати квадрати відстаней:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Непомітно ми отримали новий тип величин. Ми можемо побудувати функцію координат x, y, z , що має назву *скалярна функція*, – величина, яка не має напрямку, та однакова у всіх системах координат. З вектора можна побудувати скаляр. Правило для цього ми вже знайшли: потрібно возвести в квадрат кожен з компонентів вектора та додати отримані числа. Визначимо тепер нову величину, яку позначимо $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. Це не вектор, а скаляр; це число, однакове у всіх координатних системах, що визначається як сума квадратів трьох компонентів вектора:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad (2.2)$$

Ви спитаєте: «У якій системі координат?». Але якщо число не залежить від системи координат, то відповідь однакова у *будь якій* системі координат. Ми маємо справу з новим *видом* величини, з *інваріантом*, чи *скаляром*, отриманим «возведенням вектора в квадрат».

Якщо тепер визначити, виходячи з векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, величину

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (2.3)$$

то можна пересвідчитися, що ця величина є однаковою у штрихованій та не штрихованій системі координат. Щоб довести це, урахуємо інваріантність величин $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$, де $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Ми вже знаємо, що інваріантом є сума квадратів:

$$(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2 = (a_{x'} + b_{x'})^2 + (a_{y'} + b_{y'})^2 + (a_{z'} + b_{z'})^2$$

Розкриємо дужки у обох сторонах цього рівняння. Перехресні добутки дадуть нам вирази типу (2.3), а суми квадратів компонентів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ – вирази типу (2.3). Інваріантність доданків типу (2.2) приводить до інваріантності перехресних добутків типу (2.3).

Величина $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ називається скалярним добутком двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ та має багато цікавих та корисних властивостей.

Наприклад, легко довести, що

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

Є ще дуже простий геометричний спосіб розрахунку $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, при якому не потрібно використовувати компоненти векторів. Просто $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ є добутком модулів цих векторів на косинус кута між ними. Чому? Припустимо, що ми вибрали таку систему координат, у

якій вектор **a** направлений уздовж осі x ; у цьому випадку вектор **a** має єдину не рівну нулю компоненту a_x , яка дорівнює модулю (довжині) вектора **a** (рис.2.4). Таким чином, рівняння (2.3) зводиться у цьому випадку до $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x$, що дорівнює добутку модуля вектора **a** на проекцію вектора **b** на напрямок **a**, яка у свою чергу дорівнює $b \cos \theta$, тобто

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta.$$

Таким чином, у цій частинній системі координат ми довели, що $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ є добуток модулів векторів **a** та **b** на косинус кута між ними. Але якщо це вірно у одній системі координат, то це вірно і в усіх системах, тому що $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ не залежить від вибору системи координат.

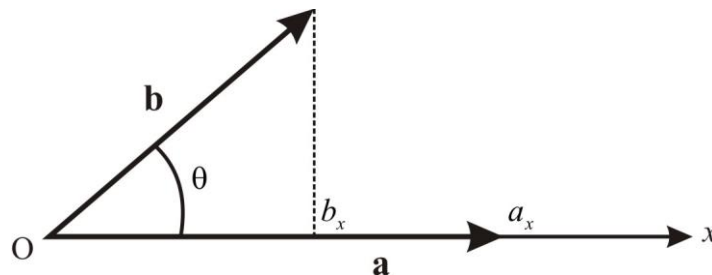


Рис.2.4 Геометричний спосіб розрахунку скалярного добутку векторів.

Що хорошого може дати нам ця нова величина? Чи потрібна вона у фізиці? Так, вона є необхідною постійно. З прикладами ми неодноразово зустрінемося. Скалярний добуток широко використовується не тільки у фізиці та математиці, а і у багатьох інших науках.

2.1.2 Характеристики руху матеріальної точки

Нехай матеріальна точка рухається по якійсь лінії. Ця лінія має назву траєкторія (рис.5). Нас цікавить ділянка між точками $1(x_1, y_1, z_1)$ та $2(x_2, y_2, z_2)$. У точці 1 частинка знаходиться у момент часу t_1 , а у точці 2 – у момент t_2 . Інтервал часу $t_2 - t_1 = \Delta t$. Вектор, що з'єднує точку 1 та 2 має назву вектор переміщення $\Delta \mathbf{r}$ (чи $\mathbf{r}_{12}$). Радіус-вектори $\mathbf{r}_1$ та $\mathbf{r}_2$, що визначають положення точок 1 та 2 у просторі, а також вектор переміщення $\Delta \mathbf{r}$ утворюють трикутник, з якого бачимо, що вектор переміщення $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

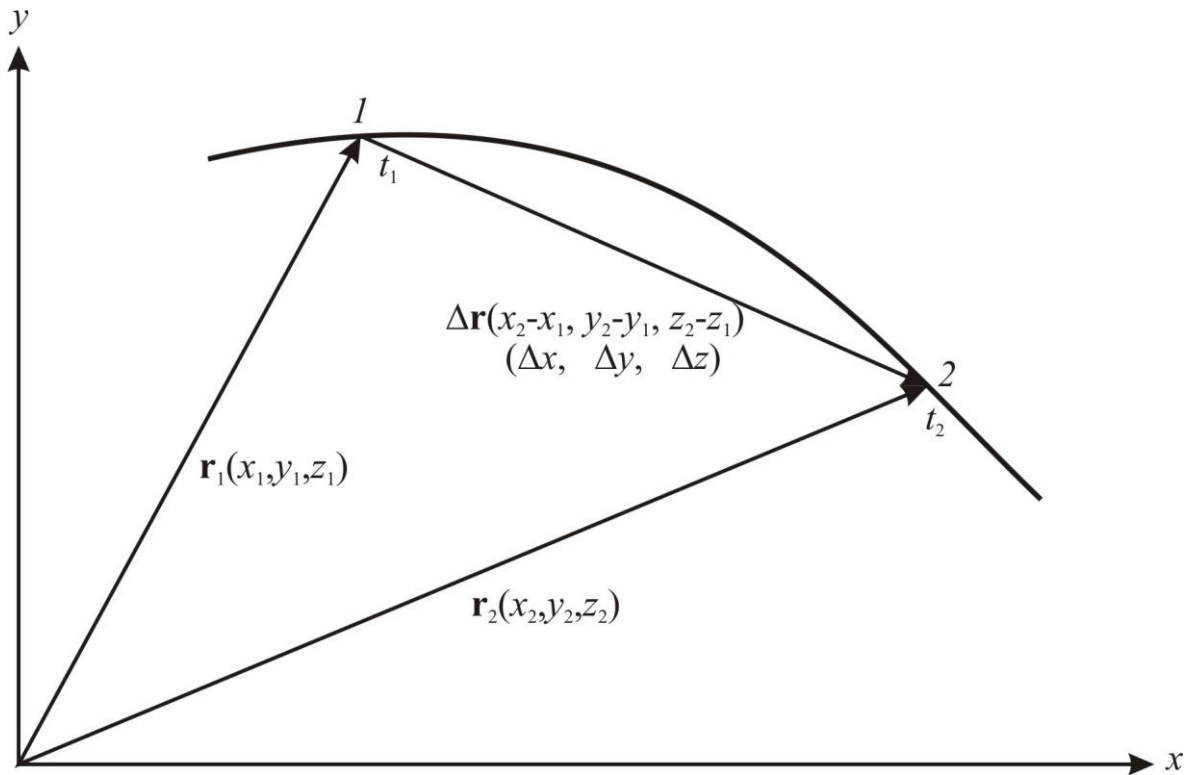


Рис.2.5 Траєкторія руху. Вектор переміщення.

Середній вектор швидкості, що відповідає інтервалу часу $\Delta t = t_2 - t_1$ дорівнює:

$$\langle \mathbf{v} \rangle_{t_1 \div t_2} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}; \text{ компоненти середнього вектора швидкості } \langle \mathbf{v} \rangle_{t_1 \div t_2} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right).$$

Вектор швидкості за визначенням дорівнює:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \text{ Така операція у математиці має назву похідна – відношення нескінченно}$$

малого приросту функції до, відповідного цьому приросту, нескінченно малого приросту аргументу. Позначення цієї операції:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \text{ компоненти вектора швидкості } \mathbf{v} \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

$$\text{Інше позначення компонент} \quad \mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$$

$$\text{Для спрощення похідні по часу} \\ \text{позначають крапкою над символом} \quad \mathbf{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\text{Спрощене позначення } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Маленька літера d у позначеннях $d\mathbf{r}$ та dt означає – диференціал (алгоритм певної математичної операції). На даному етапі можна сприймати диференціал як нескінченно малий приріст.

Напрямок вектора швидкості відповідає напрямку нескінченно малого вектора переміщення $d\mathbf{r}$. Це напрям дотичної до траєкторії.

Модуль вектора швидкості, як і будь-якого іншого вектора дорівнює кореню квадратному від суми квадратів його компонентів:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Напрямок вектора швидкості – напрям дотичної до траєкторії.

Іноді корисно знати, як швидко змінюється із плином часу вектор швидкості. У зв'язку з цим виникає поняття *прискорення*.

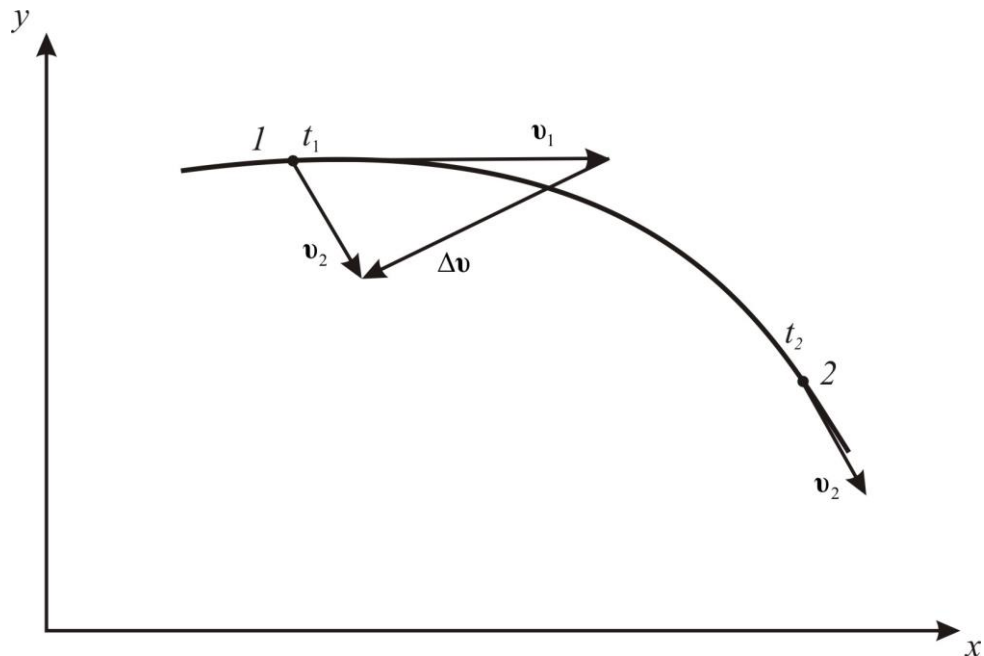


Рис.2.6. Зміна вектора швидкості у процесі руху точки.

Для того, щоб знайти різницю $\Delta \mathbf{v}$ векторів $\mathbf{v}_1$ та $\Delta \mathbf{v}$, потрібно перенести вектор $\mathbf{v}_2$ у точку 1 (рис.6). $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ – зміна вектора швидкості, що відповідає проміжку часу $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\text{Компоненти вектора } \Delta \mathbf{v} (v_{x2} - v_{x1}, v_{y2} - v_{y1}, v_{z2} - v_{z1})$$

$$\Delta \mathbf{v} (\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z)$$

Середній вектор прискорення у проміжку часу $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\langle \mathbf{a} \rangle_{t_1 \div t_2} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}; \quad \langle \mathbf{a} \rangle_{t_1 \div t_2} \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right).$$

Вектор прискорення:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

Компоненти вектора $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$$

$$\mathbf{a}\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

$$\mathbf{a}(\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z)$$

$$\mathbf{a}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

$$\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$$

Прискорення визначає швидкість зміни у часі вектора швидкості. Вектор швидкості може змінюватися у часі за рахунок двох факторів:

змінюється модуль вектора швидкості (числове значення швидкості);

змінюється напрям вектора швидкості.

Розглянемо окремо вплив цих факторів на вектор прискорення.

1. Змінюється у часі тільки модуль вектора швидкості, а напрям залишається сталим.

У такому випадку тіло рухається уздовж прямої. Вектор швидкості, зміна вектора швидкості та прискорення мають напрям уздовж цієї прямої (рис.2.7). У цьому частинному випадку модуль вектора прискорення дорівнює похідній по часу від модуля вектора швидкості (у загальному випадку це не так!):

$$a = \frac{dv}{dt}.$$



Рис.2.7 Випадок прямолінійного руху точки.

2. $v = \text{const}$. Змінюється у часі тільки напрям вектора швидкості. Розглянемо спочатку частинний випадок: тіло рухається зі сталою швидкістю по колу радіуса R (рис.2.8).

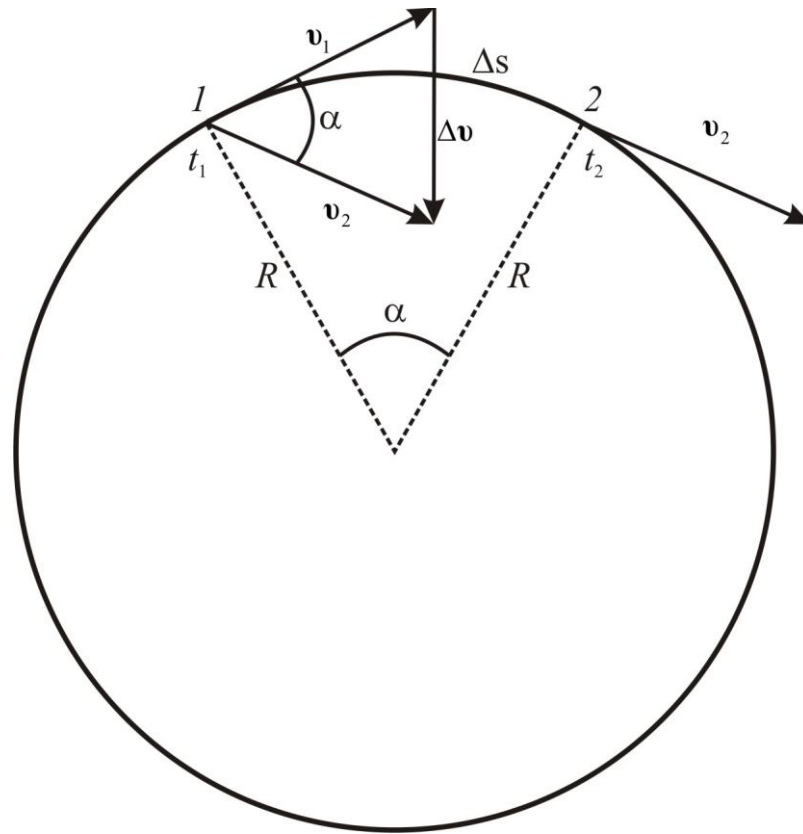


Рис.2.8 Випадок рівномірного руху точки по колу.

Точки 1 та 2 відповідають моментам часу t_1 та t_2 . Розглянемо зміну вектора швидкості, що відповідає періоду часу $\Delta t = t_2 - t_1$. Припустимо, що цей період часу устримляється до нуля. У нашому випадку модулі векторів швидкості у точках 1 та 2 рівні $v_1 = v_2 = v$. Модуль вектора Δv можна знайти, як основу рівнобічного трикутника с катетами v та кутом при вершині α :

$$\Delta v = 2v \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx v\alpha = v \frac{\Delta s}{R}, \text{ де } \Delta s - \text{довжина дуги, на яку спирається кут } \alpha.$$

Ми урахували, що при малому куті α синус приблизно дорівнює аргументу, причому тим точніше, чим менше аргумент.

Шлях (довжина траєкторії) Δs , який пройшло тіло за період часу $\Delta t = t_2 - t_1$ дорівнює у даному випадку $\Delta s = v\Delta t$. Звідки модуль вектора прискорення дорівнює

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}.$$

Напрямок прискорення при зменшенні періоду часу Δt до 0 наближається до перпендикулярного до дотичної, тобто вектор $\mathbf{a}$ має напрям уздовж радіуса до центра кола. Прискорення тіла, що рівномірно рухається по колу отримало назву *доцентрове прискорення*.

Розглянемо тепер загальний випадок, коли на прискорення впливають обидва фактора, тобто змінюється у часі і модуль і напрям вектора швидкості. Представимо вектор швидкості як добуток двох функцій часу – модуля вектора швидкості $v(t)$ та

одиничного вектора $\tau(t)$ (модуль цього вектора дорівнює безрозмірній одиниці), що визначає напрям вектора швидкості (це напрям дотичної до траєкторії):

$$\mathbf{v} = v\tau.$$

Для визначення прискорення потрібно визначити похідну по часу від вектора швидкості, тобто потрібна похідна від добутку двох функцій. Для диференціювання добутку двох функцій у диференціальному численні є правило:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot \varphi(x)] = \frac{df}{dx} \cdot \varphi + \frac{d\varphi}{dx} \cdot f.$$

Використовуючи це правило, отримаємо:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \tau + v \cdot \frac{d\tau}{dt}.$$

Нам потрібно виразити похідну $\frac{d\tau}{dt}$ через відомі величини (рис.2.9).

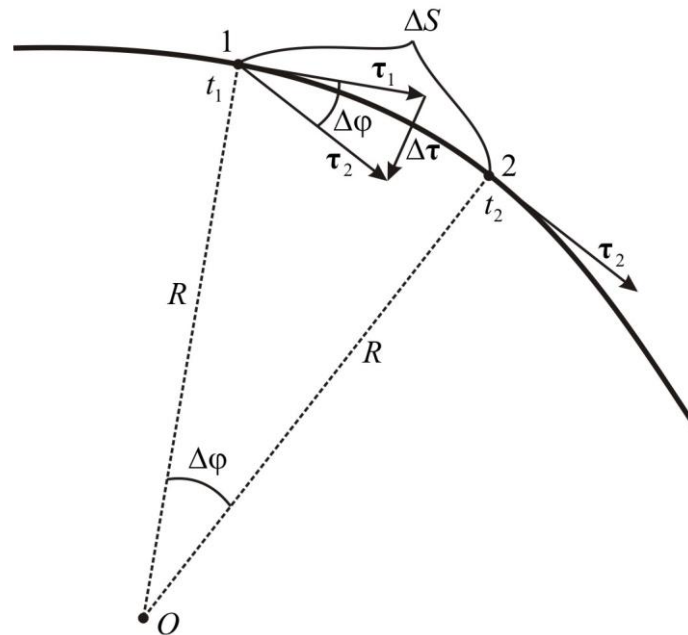


Рис.2.9 Випадок нерівномірного руху точки по довільній траєкторії.

З будь-якою точністю нескінченно малу ділянку між точками 1 та 2 ми можемо представити, як дугу кола. Центр та радіус кола можна знайти, побудувавши прямі, перпендикулярні до дотичної у точках 1 та 2. На місці їх перетину – центр кривизни траєкторії, R – радіус кривизни траєкторії.

Модуль вектора $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ це довжина основи рівнобічного трикутника зі сторонами $\tau_1 = \tau_2 = 1$ та кутом при вершині $\Delta\varphi$:

$$\Delta\tau = 2 \cdot 1 \cdot \sin(\Delta\varphi / 2) \approx \Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R} = \frac{v\Delta t}{R} \text{ (рівність стає точною при } \Delta t \rightarrow 0 \text{)}.$$

Отже, модуль похідної $\frac{d\tau}{dt}$ дорівнює:

$$\frac{d\tau}{dt} \approx \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{v}{R} \text{ (рівність стає точною при } \Delta t \rightarrow 0 \text{)}.$$

Напрямок похідної $\frac{d\tau}{dt}$ наближається до напрямку, перпендикулярного до дотичної при $\Delta t \rightarrow 0$. Введемо одиничний вектор $\mathbf{n}$ нормалі до дотичної, модуль якого дорівнює безрозмірній одиниці, а напрям є перпендикулярним до дотичної у кожній точці траєкторії. Тоді остаточний вираз для прискорення набуває вигляду:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n}.$$

Ми змогли представити вектор прискорення у вигляді суми двох взаємно перпендикулярних компонент. Модуль першої компоненти отримав назву – тангенціальне прискорення, а модуль другої – нормальне прискорення. Таким чином, формули для тангенціального та нормального прискорення мають вигляд:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Важливим є те, що a_τ визначається виключно тим, що змінюється у часі чисельне значення, тобто модуль вектора швидкості. Величина a_n визначається виключно тим, що змінюється у часі напрям вектора швидкості. Коли тіло рівномірно рухається по будь-якій траєкторії, є тільки нормальна компонента прискорення, а коли тіло рухається уздовж прямої лінії – є тільки тангенціальна компонента прискорення.

У загальному випадку є обидві компоненти (рис.2.10).

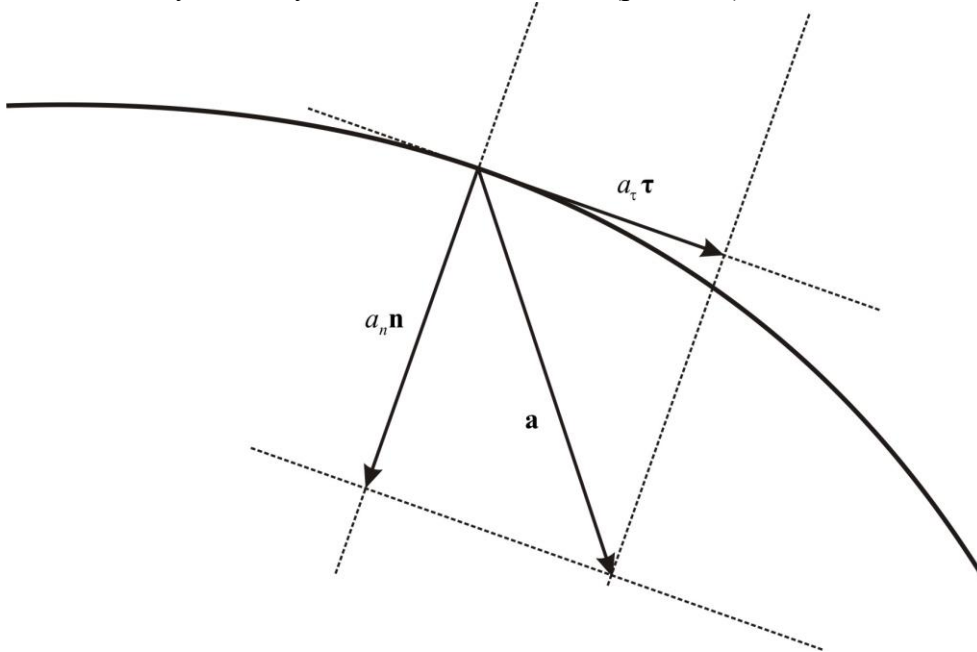


Рис.2.10 Тангенціальна та нормальна компоненти прискорення.

2.1.3 Визначення рівняння руху точки та швидкості по відомій залежності від часу вектора прискорення

До цього моменту ми займалися знаходженням цікавих та корисних характеристик руху за відомим рівнянням руху, тобто за відомою залежністю радіус-вектора точки від часу. Але актуальною є і обернена задача. Розглянемо її.

Нехай нам відома залежність вектора прискорення точки від часу, потрібно знайти залежність від часу вектора швидкості та залежність від часу радіус-вектора точки. Обмежимося частинним випадком сталого прискорення.

$$\mathbf{a}(t) = \text{const}$$

$$\mathbf{v}(t), \mathbf{r}(t) \rightarrow ?$$

Розіб'ємо увесь інтервал часу від 0 до t на безліч малих інтервалів dt . На кожному з цих інтервалів зміна вектора швидкості становить:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow d\mathbf{v} = \mathbf{a}dt$$

Загальна зміна $\Delta\mathbf{v}$ вектора швидкості за період $0 \div t$ дорівнює інтегральній сумі (сума нескінченно великої кількості нескінченно малих доданків):

$$\Delta\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a}dt = \mathbf{a}t$$

Припустимо, що нам відомий вектор швидкості $\mathbf{v}_0$ у момент часу $t=0$ (а інакше, задача не вирішується), тоді шукана залежність від часу вектора швидкості набуває вигляду:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t.$$

За відомою залежністю вектора швидкості від часу ми можемо знайти рівняння руху точки. Знову розіб'ємо увесь інтервал часу 0 до t на безліч малих інтервалів dt . На кожному з цих інтервалів зміна радіус-вектора точки (тобто вектор переміщення) становить:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rightarrow d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$$

Загальна зміна $\Delta\mathbf{r}$ радіус-вектора точки (вектор переміщення у інтервалі часу $0 \div t$) дорівнює інтегральній сумі:

$$\Delta\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}dt = \int_0^t (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t)dt = \mathbf{v}_0t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2} \quad (\text{для наочності сума векторів переміщення}$$

$d\mathbf{r}$ представлена на рис.2.11).

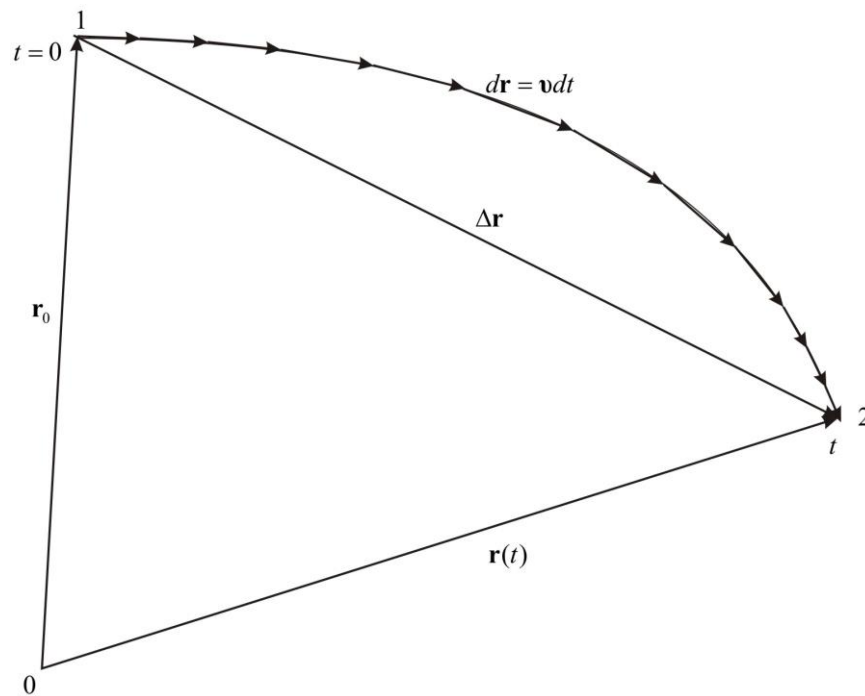


Рис.2.11 Сума ланцюга векторів переміщення $d\mathbf{r}$ дорівнює вектору $\Delta\mathbf{r}$, що з'єднує початок та кінець ланцюга.

Припустимо, що нам відоме значення радіус-вектора точки у момент $t=0$ (а інакше задачу не вирішити). Тоді залежність радіус-вектора точки від часу можна представити у вигляді:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}.$$

Іноді потрібно визначити шлях s , який пройшло тіло за певний період часу, наприклад, у даному випадку, $0 \div t$. Шлях це довжина траєкторії. Якщо ми за допомогою інтеграла додаємо не вектори переміщення за кожний нескінченно малий проміжок часу, а модулі цих векторів, то отримаємо суму довжини векторів переміщення, яка і є шляхом (рис.):

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt.$$

Як приклад, розглянемо рух тіла, кинутого під кутом до горизонту (рис.2.12). Тіло рухається зі сталим прискоренням $\mathbf{g}$, що має напрям вертикально униз. Вектор переміщення, що відповідає цьому руху, дорівнює $\frac{\mathbf{g}t^2}{2}$. Одночасно воно рухається по інерції з початковою швидкістю $\mathbf{v}_0$. Вектор переміщення, що відповідає цьому руху, дорівнює $\mathbf{v}_0 t$. Сумарний вектор переміщення у період $0 \div t$ дорівнює $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}.$$

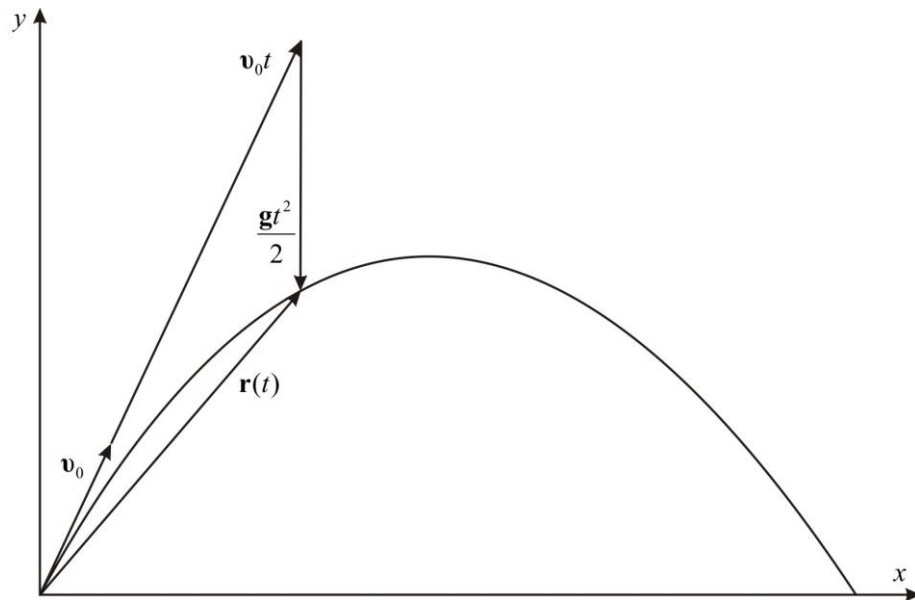


Рис.2.12 Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту.

2.1.4 Середнє арифметичне значення функції у певному інтервалі значень аргументу

У подальшому знадобиться дуже поширена формула з математики, що визначає середнє арифметичне значення функції у певному інтервалі значень аргументу. То розглянемо її.

Нехай є функція $f(x)$. Нас цікавить її середнє значення у інтервалі аргументу $x_1 \div x_2$ $\langle f(x) \rangle_{x_1 \div x_2}$. Спочатку визначимо приблизне значення. Для цього розділимо увесь інтервал $x_1 \div x_2$ на маленькі частки Δx . Будемо вважати, що у межах кожного інтервалу функція $f(x)$ має стале значення, яке відповідає, наприклад, початку інтервалу. Таким чином ми перетворили неперервну функцію у дискретну, що приймає значення з дискретного ряду. Тоді для середнього значення $f(x)$ можна записати (рис.2.13):

$$\langle f(x) \rangle_{x_1 \div x_2} \approx \frac{\sum_{x_1}^{x_2} f(x_i)}{\frac{x_2 - x_1}{\Delta x}}.$$

У чисельнику цього виразу записана сума усіх дискретних значень $f(x)$, а в знаменнику – кількість цих значень. Переносимо Δx , як сталий множник, у чисельник під знак суми:

$$\langle f(x) \rangle_{x_1 \div x_2} \approx \frac{\sum_{x_1}^{x_2} f(x_i) \Delta x}{x_2 - x_1}.$$

Якщо наближати Δx до нуля, сума перетвориться на інтегральну (сума нескінченно великої кількості нескінченно малих доданків):

$$\langle f(x) \rangle_{x_1 \div x_2} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}{x_2 - x_1}.$$

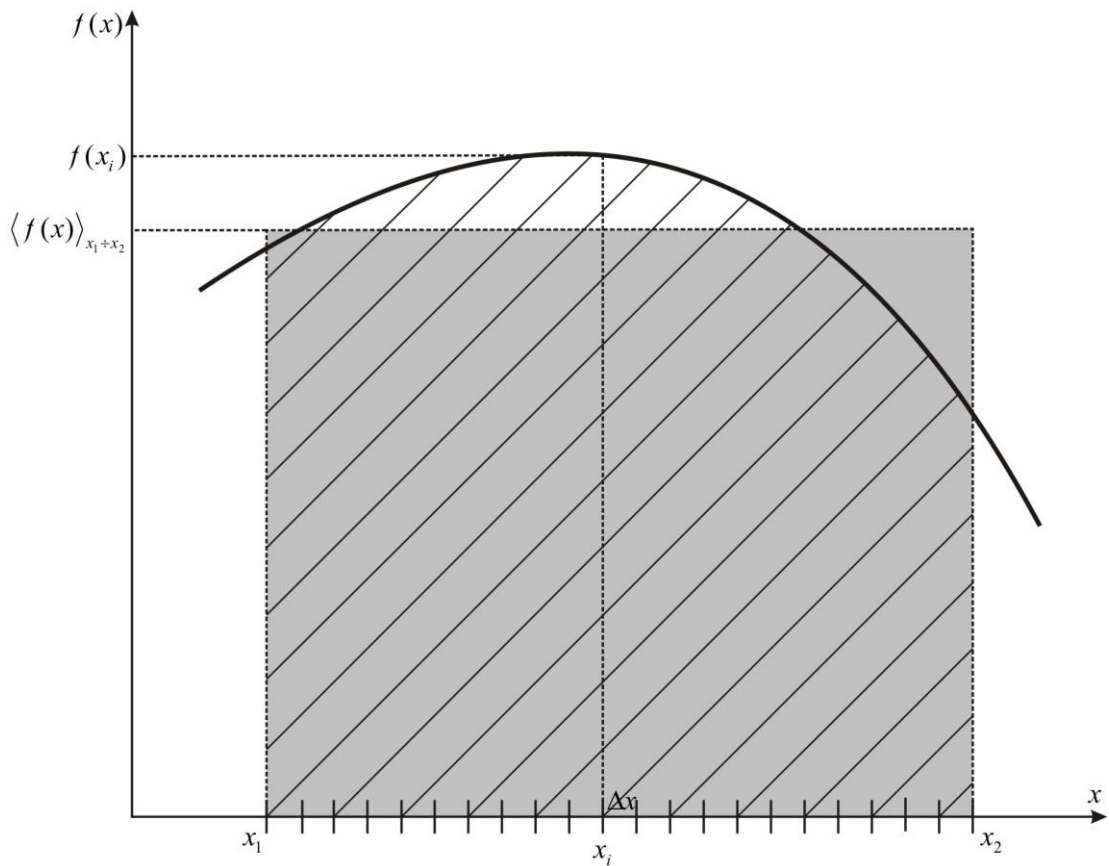


Рис.2.13 Визначення середнього арифметичного значення функції у певному інтервалі значень аргументу.

Геометричне значення цієї формули:

Середнє значення $\langle f(x) \rangle_{x_1 \div x_2}$ це висота прямокутника, що спирається на інтервал $x_1 \div x_2$, площа якого дорівнює площі під кривою $f(x)$ у тому ж інтервалі значень аргументу (рис.2.13).

Згадаємо формули для середнього значення швидкості та прискорення:

$$\langle \mathbf{v} \rangle_{t_1 \div t_2} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad \langle \mathbf{a} \rangle_{t_1 \div t_2} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t},$$

де $\Delta t = t_2 - t_1$.

Ці формули збігаються з отриманою нами формулою для середнього значення функції. Дійсно, раніше ми отримали формули:

$$\Delta \mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t) dt; \quad \Delta \mathbf{v} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t) dt.$$

2.2 Кінематика твердого тіла

З'ясовано, що будь-який складний рух твердого тіла можна представити як сукупність поступального руху та обертання навколо миттєвої осі.

Миттєва вісь може змінювати положення та напрям у просторі із плином часу.

Поступальний – це рух, при якому траєкторії усіх точок тіла однакові за формою та паралельні одна до одної. Поступальний рух можна описати, описавши рух будь-якої однієї його точки.

2.2.1 Обертальний рух навколо нерухомої осі

При такому русі усі точки тіла рухаються по колу різного радіуса, кожна у своїй площині. Центри усіх кіл створюють вісь обертання (рис.2.14).

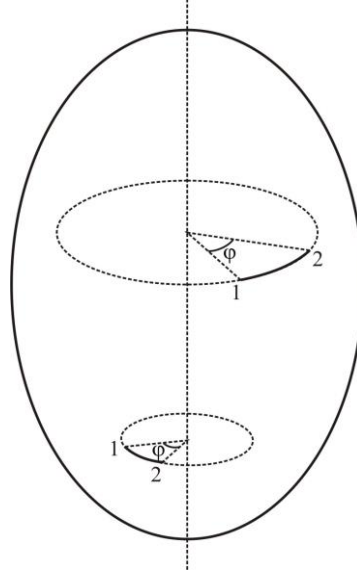


Рис.2.14 Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі.

Якщо якась точка здійснить поворот на кут φ , то і усі інші точки тіла повернуться на такий же кут. Можна сказати, що усе тіло повернулося на кут φ . Таким чином, кут повороту φ повністю визначає положення тіла у просторі при обертальному русі навколо нерухомої осі. Такий рух має аналогію з одномірним поступальним рухом, коли положення тіла задається однією координатою.

Кутова швидкість $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Кутове прискорення $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Корисно визначити зв'язок між кутом повороту точки та зміною її координат.

Нехай точка здійснює малий поворот на кут $\Delta\theta_z$ у площині xu навколо осі z (рис.2.15). радіус-вектор точки – $\mathbf{r}$, вектор переміщення – $\Delta\mathbf{r}$.

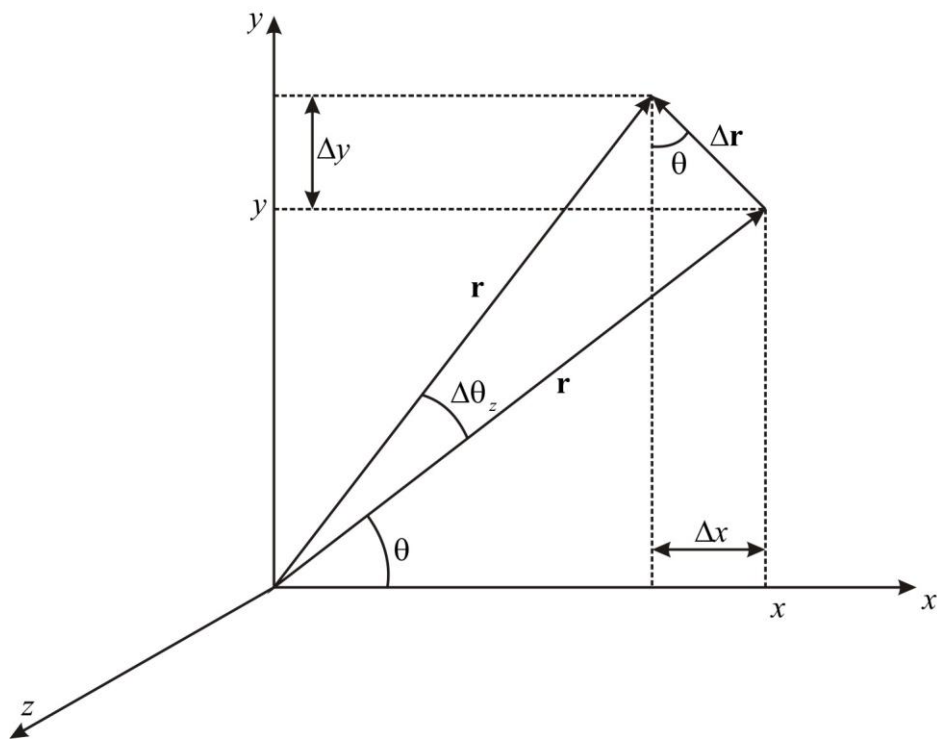


Рис.2.15 Визначення зв'язку між малим кутом повороту точки та зміною її координат.

З геометричних міркувань:

$$\Delta r = 2r \sin\left(\frac{\Delta\theta_z}{2}\right) \approx r\Delta\theta_z;$$

$$r \sin \theta = y;$$

$$\Delta x = -\Delta r \sin \theta = -\Delta\theta_z y;$$

Аналогічно:

$$\Delta y = \Delta\theta_z x$$

Остаточно:

$$\Delta x = -\Delta\theta_z y$$

$$\Delta y = \Delta\theta_z x$$

Уявимо, що точка здійснила 3 повороту:

навколо осі x на кут $\Delta\theta_x$;

навколо осі y на кут $\Delta\theta_y$;

навколо осі z на кут $\Delta\theta_z$.

З чисто геометричних міркувань, аналогічних наведеним вище, можна отримати формули для результируючої зміни координат точки:

$$\Delta x = \Delta\theta_y z - \Delta\theta_z y;$$

$$\Delta y = \Delta\theta_z x - \Delta\theta_x z;$$

$$\Delta z = \Delta\theta_x y - \Delta\theta_y x.$$

Як пов'язані кути $\Delta\theta_x$, $\Delta\theta_y$, $\Delta\theta_z$ з результуючим кутом повороту $\Delta\theta$? Як знайти напрям осі цього повороту?

Щоб відчувати це, розглянемо частинний випадок. Десять у далечині паралельно рисунку розташована площина xy (рис.2.16). У площині рисунку точка здійснює поворот навколо осі x на кут $\Delta\theta_1$. Відповідний вектор переміщення – $\Delta\mathbf{r}_1$ ($\Delta\mathbf{r}_1 \perp OX$). А також навколо осі y на кут $\Delta\theta_2$. Відповідний вектор переміщення – $\Delta\mathbf{r}_2$ ($\Delta\mathbf{r}_2 \perp OY$). Результуючий кут повороту $\Delta\theta$. Відповідний вектор переміщення – $\Delta\mathbf{r}$.

Якщо можна для малих кутів повороту синус прирівняти до аргументу у радіанах:

$$\Delta r_1 \approx r \Delta\theta_1$$

$$\Delta r_2 \approx r \Delta\theta_2$$

$$\Delta r \approx r \Delta\theta$$

$$\Delta r^2 = \Delta r_1^2 + \Delta r_2^2$$

$$\Delta\theta^2 = \Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2$$

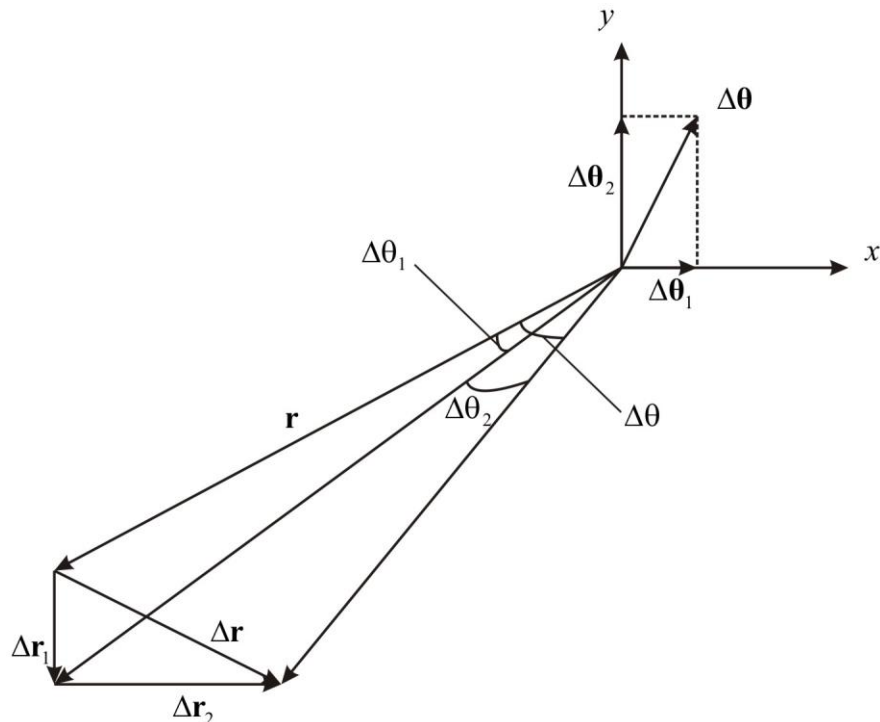


Рис.2.16 Визначення загального кута повороту точки, що здійснює малі повороти у двох взаємно перпендикулярних напрямках.

Останній вираз нагадує вираз для суми двох взаємно перпендикулярних векторів. Якщо уявити, що кут $\Delta\theta_1$ це вектор, що має напрям осі повороту (OX), а $\Delta\theta_2$ – вектор, що має напрям осі повороту (OY), то вектор сумарного повороту $\Delta\theta$ має правильний модуль.

Вектор $\Delta\theta$ також правильно вказує напрям осі сумарного повороту. Дійсно, можна побачити, що $\Delta\theta \perp \Delta\mathbf{r}$.

Виходить, що $\Delta\theta_x$, $\Delta\theta_y$, $\Delta\theta_z$ – компоненти вектора сумарного повороту $\Delta\theta$. Слід підкреслити, що векторами є тільки достатньо малі кути повороту, настільки, щоб можна було замінити синус аргументом у радіанах.

Розглянемо знову формули, що відображають зміну координат точки при потрібному повороті навколо координатних осей:

$$\begin{array}{l} \Delta x = \Delta\theta_y z - \Delta\theta_z y \\ \Delta y = \Delta\theta_z x - \Delta\theta_x z \\ \Delta z = \Delta\theta_x y - \Delta\theta_y x \end{array}$$

компоненти вектора переміщення $\Delta\mathbf{r}$

компоненти вектора кута повороту $\Delta\theta$

компоненти радіус-вектора $\mathbf{r}$

Фактично, ми з двох векторів $\Delta\theta$ та $\mathbf{r}$ зробили третій – $\Delta\mathbf{r}$. Ця математична операція є дуже важливою операцією векторного аналізу. Вона має назву та позначення. Розглянемо її.

2.2.2 Векторний добуток

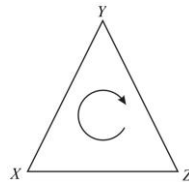
Існує два позначення векторного добутку двох векторів $\Delta\mathbf{r} = \Delta\theta \times \mathbf{r} = [\Delta\theta, \mathbf{r}]$. Можна вибирати будь-яке. Порядок векторів у векторному добутку має значення.

Якщо записано $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, це означає:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$



За допомогою зображеного справа трикутника можна просто запам'ятати цю, досить громіздку, комбінацію проекцій векторів. Позначаємо вершини трикутника X , Y , Z . Визначаємо напрям обходу за годинниковою стрілкою. При утворенні комбінації рухаємося за напрямом обходу. Наприклад, потрібна компонента c_x . Наступна за напрямом обходу вершина трикутника Y . Беремо відповідну компоненту першого вектора a_y та множимо її на наступну за напрямом обходу компоненту другого вектора b_z , мінус обернений добуток.

Можна отримати, що скалярний добуток $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$, а також $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$. Це означає, що $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, а також $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$.

Вектор, що є результатом векторного добутку двох векторів завжди перпендикулярний до обох цих векторів.

Визначимо модуль вектора $\mathbf{c}$, якщо відомі модулі векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ та кут між ними.

Виберемо зручну систему координат (рис.2.17). Ми можемо вибрати будь-яку. Результат усіх операцій векторного аналізу не залежить від вибору системи координат.

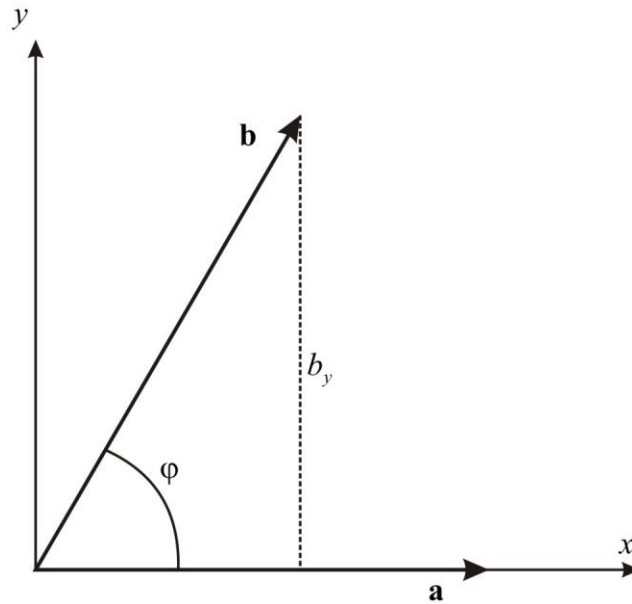


Рис.2.17 Визначення модуля векторного добутку векторів за допомогою модулів векторів та кута між ними.

У вибраній системі координат вектори мають компоненти: $\mathbf{a}(a,0,0)$, $\mathbf{b}(b_x, b_y, 0)$.

Отримуємо компоненти векторного добутку:

$$c_x = 0; c_y = 0; c_z = c = ab_y = ab \sin \varphi$$

Тобто:

$$c = ab \sin \varphi \text{ (згадаємо, що у випадку скалярного добутку } c = ab \cos \varphi \text{)}$$

Формулу $\Delta \mathbf{r} = \Delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} = [\Delta \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}]$ можна отримати з геометричних міркувань, без прив'язки до системи координат, не використовуючи компоненти векторів (рис.2.18).

$$R = r \sin \varphi;$$

$$\Delta r \approx R \Delta \theta = \Delta \theta \cdot r \cdot \sin \varphi;$$

$\Delta \mathbf{r} \perp \mathbf{r}, \Delta \mathbf{r} \perp \Delta \boldsymbol{\theta}$, тобто вектор $\Delta \mathbf{r}$ є перпендикулярним до площини, у якій знаходяться вектори $\Delta \boldsymbol{\theta}$ та $\mathbf{r}$; якщо обертати вектор $\Delta \boldsymbol{\theta}$ у напрямі до радіус-вектора $\mathbf{r}$, і представити, що ми у такому напрямі обертаємо гвинт у різьбі, то переміщення тіла гвинта здійснюється у напрямі вектора переміщення $\Delta \mathbf{r}$. Ураховуючи властивості векторного добутку, бачимо повний збіг отриманих результатів з векторним рівнянням:

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} = [\Delta \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}].$$

Якщо розділити рівняння $\Delta \mathbf{r} = \Delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$ на відповідний цьому переміщенню проміжок часу Δt , та визначити границю отриманого виразу при $\Delta t \rightarrow 0$, то отримаємо важливу формулу, що пов'язує вектор лінійної та кутової швидкості при обертальному русі точки:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

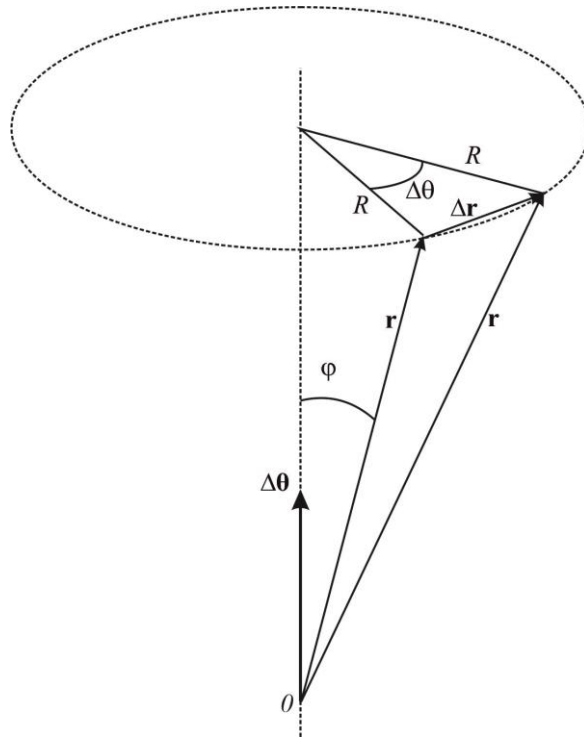


Рис.2.18 Вектор переміщення точки, яка здійснює малий поворот навколо певної осі.

Звертаю Вашу увагу на дуже важливу обставину, яка стосується відображення формул фізики у рукопису (наприклад, написання конспекту та рішень задач). Існує дуже велика різниця між математичними операціями із скалярними та векторними величинами. У той же час позначення цих операцій є майже ідентичними. Основна відмінність при відображенні цих операцій полягає у специфічному позначенні векторних величин.

Векторні величини позначаються у рукопису рисочкою, чи стрілочкою над літерою

(наприклад, $\vec{r}$, чи $\vec{r}$). Якщо такої рисочки немає, то це скалярна величина, чи модуль (числове значення) векторної величини.

У надрукованому матеріалі векторні величини позначаються просто жирним шрифтом. Якщо шрифт звичайний, то це скалярна величина, чи модуль (числове значення) векторної величини.

Якщо не дотримуватися неухильно цих правил, виникає жахлива плутанина.

Ігнорування різниці між скалярними та векторними величинами при написанні формул вважають грубою помилкою.

Приклад позначення скалярного добутку векторів у рукопису:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Приклад позначення векторного добутку векторів у рукопису:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}] \text{ (два варіанту позначення – можна вибрати будь-який)}$$

Дуже важливо застосовувати саме такі позначення!

3 Закони динаміки Ньютона

Відкриття Ньютоном законів динаміки у другій половині 17 сторіччя є одним з драматичніших епізодів у історії науки. Уперше вдалося на основі простих і універсальних законів пояснити величезну кількість явищ, до того не зрозумілих. З'явилася надія, що і за іншими, не механічними явищами криються такі ж прості і універсальні закономірності. Теорія Ньютона стала основою подальшої промислової революції. Згодом з'явилися уточнення цієї теорії. Закони динаміки Ньютона виявилися не універсальними. Але, не зважаючи на певну обмеженість кола явищ, для описання яких можна ефективно використовувати закони динаміки, теорія Ньютона і тепер не втратила величезної актуальності.

3.1 Перший закон динаміки

Відомий під назвою: принцип інерції Галілея–Ньютона.

Перший вагомий крок у розумінні закономірностей руху тіл зробив Галілей, який жив приблизно на сторіччя раніше Ньютона. Він запропонував принцип інерції приблизно у наступному формулюванні: якщо на тіло не діють інші тіла, то воно рухається прямолінійно і рівномірно, як рухалося до того, чи знаходиться у спокої, якщо раніше не рухалося. У подальшому цей принцип розвинув Ньютон. При цьому припускали, що система відліку, у якій описується рух тіла, є нерухомою відносно абсолютного нерухомого простору. Але у подальшому з'ясувалося, що ніяким способом неможливо визначити швидкість руху системи відліку відносно абсолютного нерухомого простору. Тому сучасна інтерпретація наступна.

Припустимо, що існують системи відліку, у яких виконується принцип інерції. Тобто, якщо на тіло не діють інші тіла, воно рухається відносно такої системи прямолінійно та рівномірно – по інерції. Такі системи відліку отримали назву *інерціальні*. Це дуже важливе поняття.

Твердження, що інерціальні системи відліку існують, є змістом першого закону динаміки Ньютона. Існування інерціальних систем відліку слідує з дослідів.

Раніше вважали, що системи відліку, пов'язані з поверхнею Землі, є інерціальними. Але згодом виявили, що принцип інерції не завжди виконується у таких системах відліку. Тіла отримують прискорення, не пов'язані з дією на них інших тіл. Такі прискорення обумовлені обертанням Землі навколо власної осі (обертання – це рух з прискоренням).

Зараз інерціальними вважають системи відліку, пов'язані з Сонцем – геліоцентричні.

Якщо існує одна інерціальна система відліку, то існує і безліч інших, які рухаються одна відносно іншої рівномірно і прямолінійно, без прискорення. Доведемо це.

Розглянемо систему відліку K , яку вважаємо нерухомою. Система K' рухається відносно системи K зі сталою швидкістю $\mathbf{u}$ (рис.3.1). Припустимо, що у початковий момент часу $t=0$ системи K та K' співпадали. У момент часу t вектор переміщення між початком координат систем K та K' дорівнює $\mathbf{ut}$. Розглянемо якусь точку P у просторі. Її положення відносно K та K' визначається радіус-векторами $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r}'$. Вектори $\mathbf{ut}$, $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r}'$ утворюють трикутник, з якого слідує:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{ut}.$$

Якщо взяти похідну по часу від обох частин рівняння, то отримаємо співвідношення між швидкостями точки у обох системах відліку:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}.$$

Якщо ще раз взяти похідну по часу від обох частин рівняння, отримаємо співвідношення між прискореннями точки у обох системах відліку – ці прискорення рівні (похідна від константи $\mathbf{u}$ дорівнює 0):

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}.$$

Тобто, якщо $\mathbf{a} = 0$ у якійсь інерціальній системі відліку, то воно дорівнює 0 і у всіх інших системах, що рухаються відносно даної зі сталою швидкістю, без прискорення.

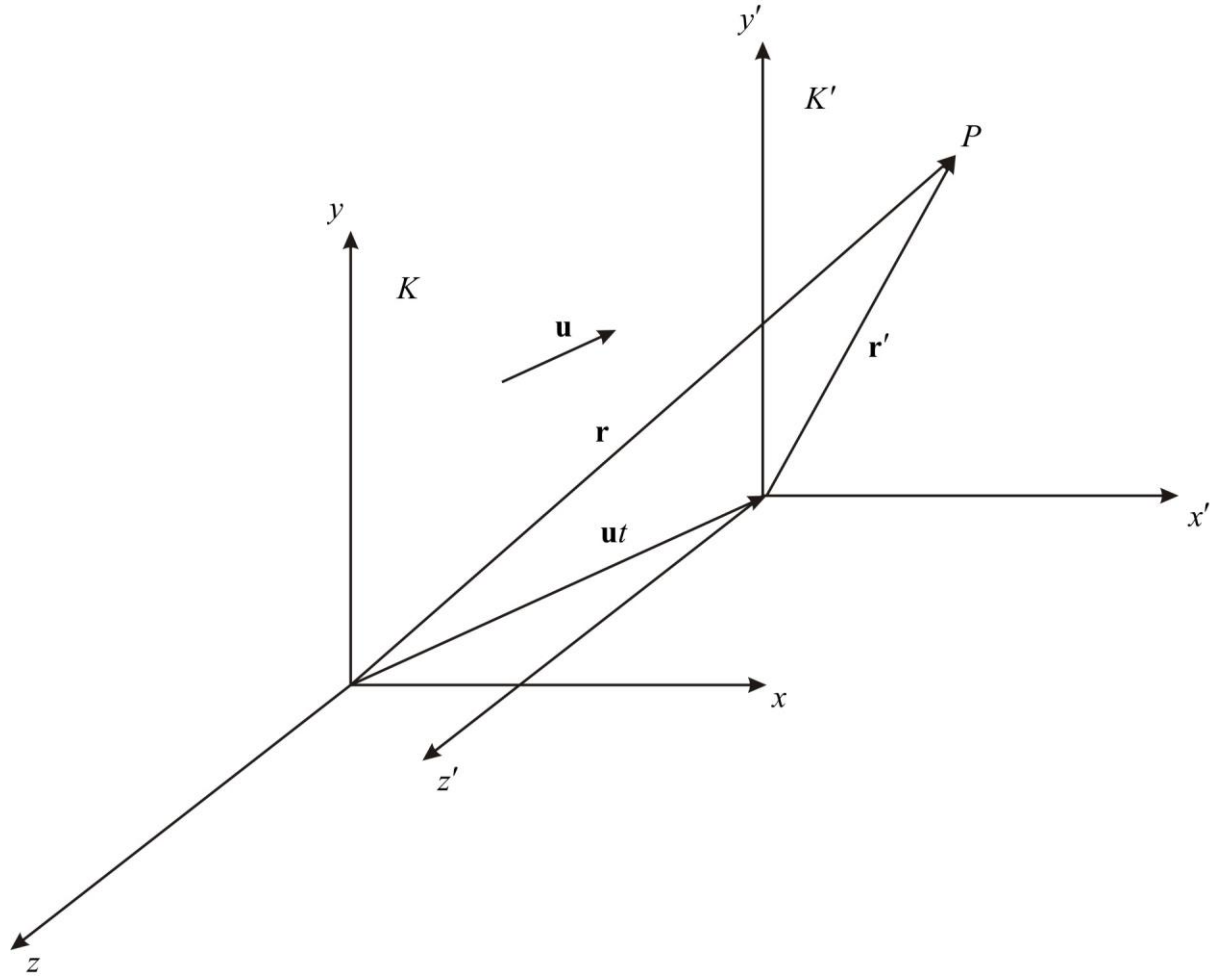


Рис.3.1 Зв'язок між координатами точки у рухомій та нерухомій системі відліку.

Виявлено, що у інерціальних системах відліку простір є однорідним та ізотропним, а час – однорідним.

3.2 Другий закон динаміки Ньютона

Як зміниться рух тіла, якщо на нього діють інші тіла? Вектор сили $\mathbf{F}$ це міра дії інших тіл на дане. Важливою величиною є кількість руху, чи імпульс тіла $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. m – маса тіла.

Другий закон Ньютона:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Розглянемо фізичний зміст величин, що входять до другого закону Ньютона.

Усі тіла опираються спробам змінити стан їх руху. Ця властивість тіл отримала назву *інерція*. Мірою інерції є маса. При однаковому впливі різні тіла отримують різні прискорення. Ці прискорення вважають обернено пропорційними до маси тіл:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (m_1 a_1 = m_2 a_2 = F).$$

При цьому не потрібно знати величину сили, а потрібно тільки володіти критерієм рівності впливу на тіла.

Одне з тіл можна прийняти за еталон маси та визначати маси інших тіл за пропорцією:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \text{ (при однаковому впливі на тіла).}$$

Сила є міра дії інших тіл на дане. Найкращим визначенням поняття сили є добуток ma :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \text{ за визначенням.}$$

Але визначивши таким образом силу, ми перетворили другий закон Ньютона просто на визначення поняття сили. Насправді другий закон Ньютона передбачає наявність додаткових незалежних законів для сил різної природи. Просто величина, яку ми визначили як ma , часто має прості та універсальні властивості і тому її варто вивчати та використовувати.

Математично другий закон Ньютона передбачає наявність відомої функції $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. І тоді він перетворюється на диференціальне рівняння другого порядку:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}.$$

Рішення цього рівняння дозволяє отримати залежність $\mathbf{r}(t)$, тобто рівняння руху тіла.

У багатьох випадках вирішити рівняння складно, навіть чисельним методом. У таких випадках намагаються використовувати деякі загальні теореми і принципи, які визначають стан системи у цілому, не враховуючи деталі її будови та механізми процесів. Це закони збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу.

Крім того, корисно вивчати деякі прості види руху, звикаючи до вирішення відповідних диференціальних рівнянь. Ураховуючи, що однакові рівняння можуть описувати велику кількість зовсім різних процесів, користь від такого розгляду багатократно зростає.

3.3 Третій закон динаміки Ньютона

Сили, з якими взаємодіють тіла, рівні за модулем та протилежні за напрямом.

З якою силою одне тіло діє на інше, з такою ж силою інше тіло діє на дане.

Сила дії дорівнює силі протидії.

Цей закон не зовсім точний. Неточність пов'язана з певною затримкою взаємодії віддалених одне від одного тіл у часі.

3.4 Принцип відносності

Оскільки прискорення тіла є однаковим у будь-якій інерціальній системі відліку, закони динаміки Ньютона є інваріантними до вибору інерціальної системи відліку. Тобто усі механічні явища відбуваються однаково відносно будь-якої інерціальної системи відліку. Це твердження відомо під назвою принцип відносності. Вперше принцип відносності запропонував Галілей. На цю тему є дуже яскравий опис у одному з його літературних творів. Цей опис італійські школярі вивчають на уроках літератури. Нижче наведений відповідний уривок з книги Галілея.

«Запріться з кимось із друзів у кают-компанії під палубою великого корабля, взявши з собою мух, метеликів та інших невеликих літаючих тварин. Візьміть і великий посуд з водою, де плавають риби. Повісьте пляшку, з якої крапля по краплі витікає вода в широку посудину вниз. Поки ваше судно стоїть на місці, уважно спостерігайте, як комахи

літають по приміщенню з однаковими швидкостями у всі сторони. Риби плавають як завгодно, не віддаючи перевагу якомусь особливому напрямку. Краплі падають у посудину під пляшкою. Якщо ж ви кинете щось вашому другові, то ви докладете однакове зусилля, у якому б напрямі не кидали, якщо відстані однакові. Стрибаючи обома ногами відразу, ви будете пролітати однакову відстань у будь-якому напрямку. Ретельно простеживши все це (хоча ви й не сумнівалися, що усе відбуватиметься саме так, поки корабель стоїть на місці), віддайте команду, щоб корабель почав рухатися з будь-якою швидкістю, аби його рух був рівномірним і не зазнав будь-яких змін. У жодному із зазначених процесів ви не виявите жодних змін і не зможете ні по одному з них дізнатися, рухається корабель, або стоїть на місці. Стрибаючи, ви пролітатимете над підлогою ті ж відстані, що й раніше, і ваші стрибки у бік корми не виявляться довшими за стрибки у бік носа корабля, незважаючи на те, що, поки ви знаходилися в повітрі, підлога під вами рухалася у напрямку, протилежному вашому. Для того щоб перекинути який-небудь предмет вашому другу, вам не знадобиться витратити більше зусилля, якщо ваш друг стоїть ближче до носа корабля, а не до корми, коли ви розташувались проти нього. Краплі продовжуватимуть падати в посудину, що стоїть унизу, не відхиляючись до корми, хоча, поки вони летять у повітрі, судно встигає пересунутись на кілька п'ядей. Риби будуть плавати у воді у своїй посудині з однаковою легкістю на всі боки і в рівній мірі хапати приманку, в який би кут посудини ми її не помістили. Нарешті, метелики та мухи будуть здійснювати польоти в усіх напрямках, і ви ніколи не виявите, що вони скупчилися біля корми, ніби втомившись встигати за ходом корабля, від якого вони були відокремлені, перебуваючи тривалий час у повітрі».

3.5 Закони для сил різної природи

3.5.1 Сила спротиву

Якщо середовище, що перешкоджає руху тіла, обтікає його турбулентно, тобто присутні вихрі, то сила спротиву є пропорційною до квадрату швидкості руху тіла:

$$F \sim v^2$$

Така закономірність має місце при русі літака, кулі що рухається у різних середовищах, тощо.

Нічого простого у такій взаємодії тіла та середовища немає. Це просто емпірична закономірність, до того ж не зовсім точна.

У випадку малих швидкостей руху тіла у середовищі, при ламінарному обтіканні:

$$F \sim v.$$

3.5.2 Сила тертя ковзання

У випадку ковзання одного тіла по поверхні іншого виникає сила спротиву, що має напрям, протилежний до напрямку швидкості руху тіла. Ця сила є пропорційною до сили, з якою одне тіло притискається до іншого. Останню називають також силою реакції опори. Тобто, сила тертя дорівнює:

$F_T = kN$, де N – сила реакції опори, k – коефіцієнт тертя, який залежить від властивостей поверхні взаємодіючих тіл.

Силу реакції опори N можна знайти, як проекцію усіх сил, що діють на тіло, на напрям перпендикулярний до поверхні опори.

Фундаментальні сили. Поля

Фундаментальні сили – це сили, закони для яких є простими та універсальними. Ці закони виконуються з величезною точністю і описують безліч явищ.

3.5.3 Всесвітнє тяжіння

Усі матеріальні тіла притягаються одне до одного. Ця сила (її називають гравітаційною) уперше описана Ньютоном.

Припустимо, що взаємодіють дві матеріальні точки (рис.3.2). Сила їх взаємодії визначається законом всесвітнього тяжіння:

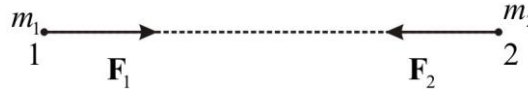


Рис.3.2 Гравітаційна взаємодія двох матеріальних точок.

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (3.1)$$

де G – стала всесвітнього тяжіння,

$\mathbf{r}_{12}$ – вектор переміщення з точки 1 до точки 2. Відношення $\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$ це одиничний вектор (модуль цього вектора дорівнює безрозмірній одиниці), що вказує напрям по прямій від точки 1 до точки 2.

У випадку взаємодії тіл певної конфігурації, які не можна вважати матеріальними точками, для знаходження вектора сили взаємодії потрібно розділити тіла на маленькі частки, кожна з яких можна вважати матеріальною точкою, знайти силу взаємодії кожної частки одного тіла з усіма частками іншого і усі вектори сил додати. Така сума нескінченно великої кількості нескінченно малих доданків у математиці має назву інтеграл. У даному випадку це подвійний інтеграл по об'єму тіл. У кожному доданку інтегральної суми, як змінні, фігурують елементи об'єму першого та другого тіл (маси матеріальних точок дорівнюють добутку густини речовини у місці їх розташування на елемент об'єму). У аналітичному вигляді такі інтеграли беруться лише у дуже обмеженій кількості випадків. Звичайно застосовують чисельні методи. Усі інтеграли це просто суми, які можна розрахувати чисельними методами. Для цього ділянки об'єму потрібно вибирати не нескінченно малими, і це обмежує їх кількість. Чим менші розміри матимуть ділянки, тим вище буде точність розрахунків.

Важливий для практики випадок – сила притягання однорідних куль, чи куль, маса яких розподілена по об'єму симетрично відносно центрів куль. У цьому випадку, як довів Ньютон, можна, для знаходження сили взаємодії, представити ці тіла матеріальними точками, розташованими у центрах куль, маса яких дорівнює загальній масі куль.

Наприклад, сила притягнення між Землею та тілами на її поверхні дорівнює:

$$F = G \frac{m M_3}{R_3^2} = mg, \text{ де } m - \text{маса тіла, } M_3 - \text{маса Землі, } R_3 - \text{радіус Землі}$$

Прискорення вільного падіння g дорівнює:

$$g = G \frac{M_3}{R_3^2}.$$

Прискорення вільного падіння g зменшується з висотою h над поверхнею Землі:

$$g = G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2}.$$

Ця зміна є помітною лише на висоті, що є порівняною з $R_3 \approx 6700$ км.

Закон всесвітнього тяжіння є наближенням у більш загальній теорії – загальна теорія відносності Ейнштейна. Ця теорія, зокрема, урахує запізнення у взаємодії тіл. Це дуже складна теорія.

Дивним наслідком загальної теорії Ейнштейна є можливість існування чорних дір. Розглянемо силу гравітаційної взаємодії однорідної кулі та тіла на її поверхні. Якщо зменшувати радіус кулі, не змінюючи її маси (за рахунок стиснення речовини), то сила взаємодії тіла та кулі буде усе більше відрізнятися від класичної у бік збільшення. Гравітаційний радіус кулі відповідає нескінченно великій силі взаємодії – утворюється чорна діра. Гравітаційний радіус Землі дорівнює декільком сантиметрам, Сонця – декільком кілометрам.

Іншим дивним наслідком загальної теорії відносності є наявність гравітаційної взаємодії з об'єктами, що не мають маси, а містять енергію (наприклад, світло притягається до небесних тіл).

Чому закон тяжіння такий простий? Що можна сказати про причину цього? Який механізм тяжіння? Ніхто до теперішнього часу ніякого механізму не відкрив. Як писав видатний теоретик Річард Фейнман «Усі фізичні закони відрізняються у цьому відношенні своїм абстрактним характером. Закон збереження енергії – це теорема про величини, які потрібно обчислити та додати, не думаючи про причини цього; точно так і великі закони механіки представляють собою кількісні математичні закономірності, про внутрішній механізм яких ніяких даних немає. Але чому ми можемо користуватися математикою для описаних законів не знаючи їх причини? Ніхто і цього не знає. Ми продовжуємо йти цією дорогою, тому що на ній все ще відбуваються відкриття».

3.5.4 Електрична сила

Є така властивість речовини – електричний заряд. Частинки речовини, що мають таку властивість, взаємодіють із силою, що має назву електрична.

Ця сила є неймовірно великою по людським міркам.

Заряди бувають двох сортів. Зручно назвати їх позитивними та негативними і ураховувати у формулах з відповідним знаком.

Закон Кулона

Закон Кулона визначає силу взаємодії між двома нерухомими точковими зарядами q_1 та q_2 (рис.3.3).

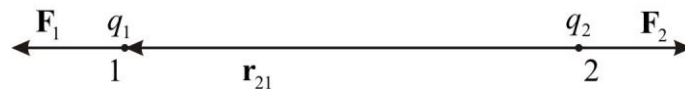


Рис.3.3 Електрична взаємодія двох нерухомих точкових зарядів.

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{21}^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}, \quad (3.2)$$

де $\mathbf{r}_{21}$ – вектор переміщення між точками 2 та 1,

ϵ_0 – електрична стала;

Відношення $\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}$ – одиничний вектор, що визначає напрям по прямій від точки 2 до точки 1.

Бачимо, що сила Кулона математично є ідентичною до гравітаційної.

Закон Кулона перестає виконуватися для рухомих зарядів. Одну з складових сили взаємодії, що залежить від руху зарядів, називають магнітною. Магнітна та електрична сили є різними у різних інерціальних системах відліку, але їх сумарна величина від системи відліку не залежить. Електрична та магнітна сила є сторонами єдиного цілого. По суті, магнітна сила є релятивістською поправкою до електричної.

Для визначення сили взаємодії зарядів зручно використовувати поняття поля. При цьому процес взаємодії розділяється на два етапу:

1 Заряд змінює властивості оточуючого простору – створює поле.

2 Поле діє з силою на інший заряд.

Зручно вважати, що поле існує незалежно від наявності заряду, на який воно діє.

Поле виявляє себе у тому, що діє з силою на заряд, розміщений на ділянці цього поля. Чим поле сильніше, тим більша сила, з якою воно діє на заряд. Причому сила також пропорційна до величини заряду. Природно за величину, що визначає силу поля (напруженість поля), прийняти відношення сили, що діє на заряд до величини цього заряду (сила на одиницю заряду):

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Така величина від q не залежить.

У такому випадку, враховуючи закон Кулона (3.2), для поля нерухомого точкового заряду q_2 , яке він створює у точці 1, можна записати:

$$\mathbf{E}(1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}.$$

Можна спростити позначення у цьому виразі (рис.3.4). Для поля точкового заряду q , яке він створює на відстані r від нього, можна записати:



Рис.3.4 Напруженість електричного поля, яке створює точковий заряд

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Розділення процесу взаємодії на два етапу у випадку нерухомих зарядів є тривіальним, просто інший запис закону Кулона (але розрахунки з використанням поля значно спрощуються). А у випадку рухомих зарядів електромагнітне поле поводить себе як самостійний фізичний об'єкт. Воно повністю втрачає зв'язок із джерелом поля (джерелом електромагнітної хвилі є заряди, що рухаються з прискоренням), несе енергію та імпульс.

Важливим є *принцип суперпозиції*: поле сукупності зарядів є векторною сумою полів, що створює кожний з них

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i .$$

У такому разі, для розрахунку поля заряду складної конфігурації потрібно розділити цей заряд на малі частки, кожна з яких можна вважати точковим зарядом, знайти внесок кожної частки у загальне поле і усі вектори додати. Ця сума є інтегралом по об'єму.

Тобто, якщо б в нас була формула для поля точкового заряду, що рухається довільним чином, ми могли б на основі цієї формули побудувати усю теорію електромагнетизму. Виявилося що ця формула є дуже складною та використовувати її варто лише у окремих частинних випадках. Поширеним є інший підхід. З'ясувалося, що зв'язок полів у сусідніх точках простору є досить простим. Виражений у формі чотирьох диференціальних рівнянь (рівняння Максвелла) він дозволяє аналізувати явища набагато простіше та ефективніше. Рідкі по красоті рівняння Максвелла дозволяють побудувати струнку теорію електромагнітного світу.

3.5.5 Молекулярні сили (сили пружності)

Механізми взаємодії молекул речовини є надзвичайно складними. Тут царить квантова механіка.

Експериментальна залежність сили взаємодії молекул F від відстані між ними r має характер, показаний на рис.3.5. Силу відштовхування будемо вважати додатною, притягання – від'ємною. При відстані між молекулами r_0 сила взаємодії дорівнює нулю. Ця відстань відповідає рівноважному стану. При відхиленні відстані від рівноважного стану виникає сила спротиву деформації. Поблизу r_0 залежність сили від величини деформації можна вважати лінійною. Це ділянка дії закону Гука для сили пружності:

$F = -kx$, де x – величина деформації (зміна розміру тіла від рівноважного значення), k – коефіцієнт пружності, який залежить від властивостей тіла.

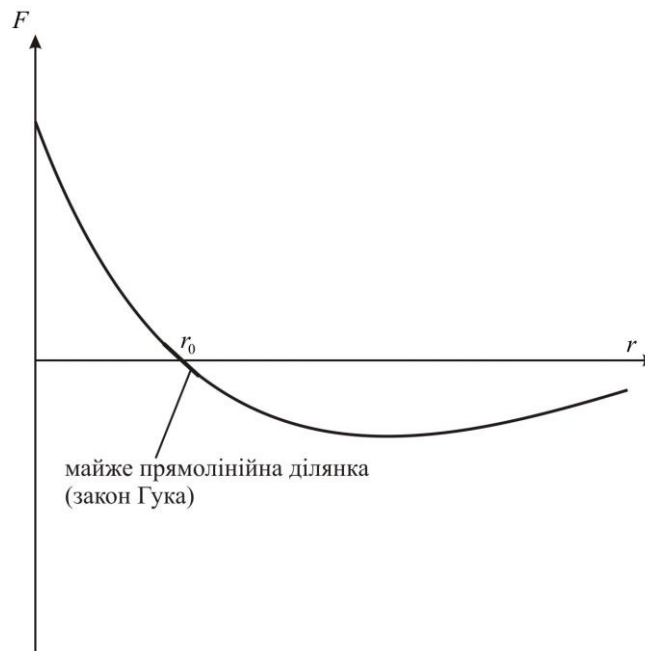


Рис.3.5 Залежність сили взаємодії молекул від відстані проміж ними.

3.5.6 Сили інерції

У неінерціальних системах відліку тіла отримують прискорення, що не пов'язані з дією на них інших тіл. Цим прискоренням можна поставити у відповідність уявні сили, чи сили інерції. Ми постійно зустрічаємося з такими силами при поїздках у транспорті. Сили інерції завжди мають напрям, протилежний напрямку прискорення системи відліку.

За допомогою простого прикладу отримаємо вираз для сили інерції. Розглянемо космічний корабель у просторі, на який не діє сила тяжіння (рис.3.6). Космонавт дивиться на тіло масою m , що нерухомо висить посередині каюти. Вмикаються двигуни і корабель отримує прискорення $\mathbf{a}$ (таке ж прискорення отримує космонавт). Космонавт бачить, що тіло рухається відносно нього з прискоренням $(-\mathbf{a})$. Він може вважати, що на тіло діє сила $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}$. Це і є сила інерції. Через деякий час тіло прилипне до задньої стінки корабля. Щоб рухатися разом з кораблем з прискоренням $\mathbf{a}$, стінка діє на тіло з силою $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Тіло відповідає стінці протилежною силою $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}$. Космонавт сприймає ситуацію навпаки – на тіло, як і раніше, діє сила $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}$, а стінка відповідає тілу протилежною силою. Таким чином, вираз для сили інерції:

$\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}$, де $\mathbf{a}$ – прискорення системи відліку, m – маса тіла.

Щоб скласти рівняння динаміки для тіла у неінерціальній системі відліку, потрібно до усіх сил, що діють на тіло, додати силу інерції.

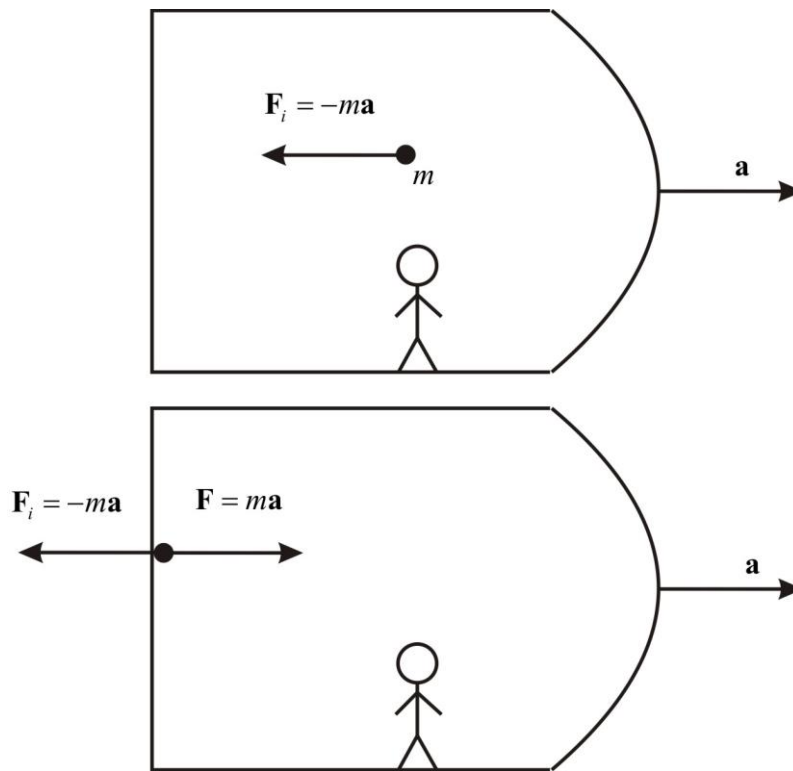


Рис.3.6 Сила інерції, що діє на тіло у космічному кораблі

Сили інерції у обертальній системі відліку

У обертальній системі відліку точки простору рухаються з різними прискореннями відносно нерухомого спостерігача. Дійсно, розглянемо, наприклад, диск, що обертається навколо своєї нерухомої осі (рис.3.7).

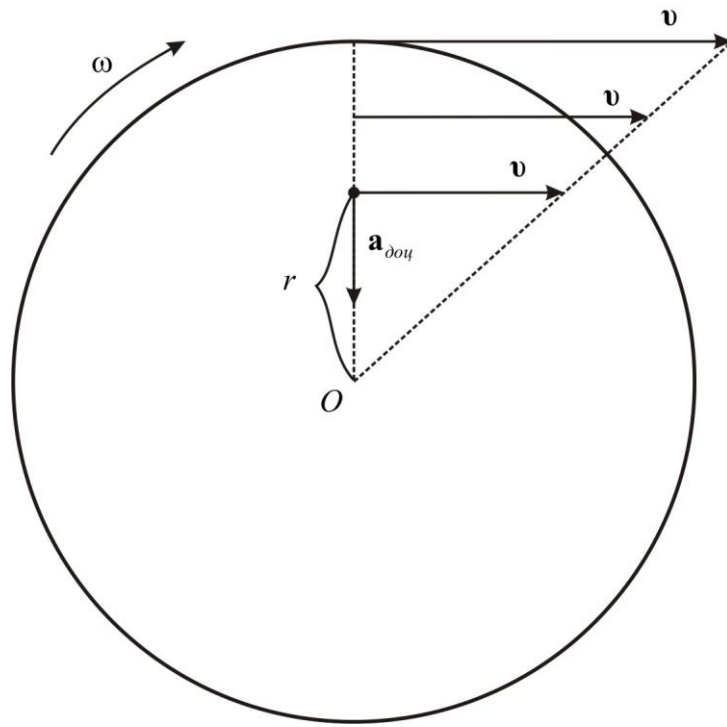


Рис.3.7 Рух точок колеса, що обертається навколо нерухомої осі.

Доцентрове прискорення точок диска є пропорційним до відстані r точки до осі обертання:

$$a_{\text{доц}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \text{ (кутова швидкість } \omega \text{ є однаковою для усіх точок диска).}$$

Лінійна швидкість обертального руху точок диска лінійно зростає із збільшенням відстані від осі обертання ($v = \omega \cdot r$).

Уявимо, що на диску лежить нерухоме (відносно диска) тіло масою m . Щоб тіло оберталося разом з диском, на нього, з боку диска, повинна діяти доцентрова сила:

$$F_{\text{доц}} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r, \text{ де } r \text{ – відстань точки від осі обертання}$$

Тіло відповідає диску такою ж силою протилежного напрямку – відцентровою силою інерції:

$$F_{\text{відц}} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

Ця сила має напрям по радіусу від центра диска. Спостерігачу, що обертається разом з диском, здається, навпаки, що на тіло діє сила інерції, яку тіло прикладає до диска, а диск відповідає тілу протилежною силою (доцентрова сила). Знову виходить, що $F_i = -ma$. Де a – прискорення точки системи відліку, у якій знаходиться тіло.

Але, у випадку, коли тіло рухається відносно обертальної системи відліку, воно попадає у точки простору системи відліку, що мають різні прискорення і це ускладнює картину.

Розглянемо, як приклад, частинний випадок, коли тіло рухається по радіусу диска, що обертається з певною кутовою швидкістю (рис.3.8). Припустимо, що швидкість тіла відносно диска становить v' . У процесі руху лінійна швидкість обертального руху тіла

зменшується ($v = \omega \cdot r$). Для того, щоб зменшувати лінійну швидкість обертального руху тіла, диск повинен прикладати до тіла силу $\mathbf{F}$ у напрямі, протилежному до $\mathbf{v}$. Тіло відповідає диску протилежною силою, яка є силою інерції. Складовою сили інерції, що діє на тіло у обертальній системі відліку, яка визначається рухом тіла відносно цієї системи, отримала назву – сила Коріоліса ($\mathbf{F}_K$).

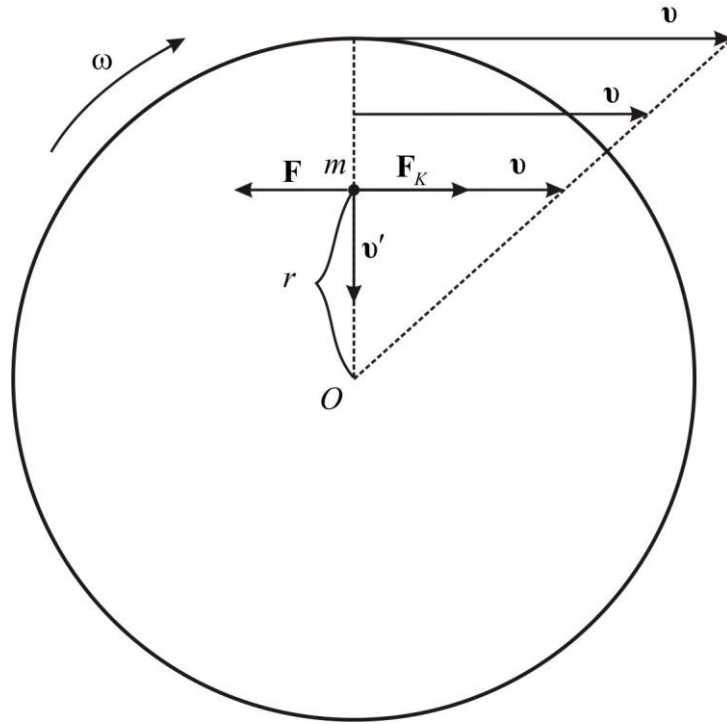


Рис.3.8

Ця сила є перпендикулярною до швидкості $\mathbf{v}'$, з якою тіло рухається відносно обертальної системи відліку.

У загальному вигляді вираз для сили Коріоліса має наступний вигляд:

$$\mathbf{F}_K = 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$$

Згідно до властивостей векторного добутку, *завжди*, сила Коріоліса є перпендикулярною до швидкості руху тіла відносно обертальної системи відліку та до вектора обертальної швидкості системи відліку:

$$\mathbf{F}_K \perp \mathbf{v}' \text{ та } \mathbf{F}_K \perp \boldsymbol{\omega}$$

4 Закони збереження

Є фундаментальний закон природи – закон збереження енергії. Наскільки відомо у наш час він абсолютно точний. Існує величина, яка має назву енергії, що не змінюється при будь-яких перетвореннях у природі. Енергія має багато форм (механічна, хімічна, теплова, тощо). Для кожної з форм існує своя формула. Обчисливши значення за усіма формулами та додавши їх, ми отримаємо стале число, що не змінюється у будь-яких процесах.

Науці сьогодення невідомо що таке енергія. Це зовсім абстрактна величина, яка нічого не говорить ні про механізми процесів, ні про причини появи у формулі для її розрахунку різних доданків.

На цю тему видатний американський теоретик Ричард Фейнман придумав наступну жартівну історію (вільний переклад).

Жили були мама з хлопчиком – маленьким бешкетником. Хлопчик був дуже винахідливим, а мама допитлива та дещо прискіплива. Мама купила хлопчику кубики, щоб він грався з ними, поки вона ходить на роботу. Кубиків було 30 штук. Кожний вечір мама приходила з роботи та перераховувала кубики.

Одного разу кубиків виявилось 29. На килимі, що лежав на підлозі, мама помітила опуклість. Кубик знайшовся під килимом.

Іншого разу кубиків виявилось 28. Пошуки у домі не дали результатів, але мама помітила відчинене вікно. Кубики знайшлися на клумбі під вікном, серед квітів.

Іншим разом кубиків виявилось 32. Ретельне розслідування показало, що приходив у гості сусідський хлопчик. А в нього такі ж кубики.

Вікна зачинили, гостей не пускали, але кубиків знову не вистачило. У домі не знайшли, але було одне місце, куди хлопчик маму не пускав – картонний ящик. Це був у хлопчика особистий простір. Але хитра мама зважила ящик без кубиків (P_0), зважила ящик з кубиками (P), зважила один кубик (P_K) та почала розраховувати кількість кубиків n у ящику за формулою:

$$n = \frac{P - P_0}{P_K}.$$

Додавши це число до наявних кубиків, вона знову отримувала 30.

Потім знов кубиків не вистачило. Але мама помітила, що збільшився рівень води у пральній машині. Тоді мама почала розраховувати кількість кубиків на дні пральної машини за формулою:

$$n = \frac{h - h_0}{\Delta h_K}, \text{ де } h - \text{ наявний рівень води у пральній машині, } h_0 - \text{ рівень води без}$$

кубиків, Δh_K – зміна рівня води від одного зануреного кубика.

Хлопчик ріс. Формула збагачувалась іншими доданками. Розрахунки давали загалом одне і те ж число – 30.

Аналогія з енергією зрозуміла. Якщо слідкувати за витокотом та надходженням енергії у систему, ураховувати усі види енергії, то загальна її величина не змінюється.

Принципова відмінність даної історії від ситуації з енергією полягає у тому, що насправді, ніяких кубиків не існує. І, взагалі, не існує нічого конкретного. Навіть якщо згадати мамину формулу, то деякі доданки мають до кубиків дуже слабе відношення (вага якихось ящиків, рівень води у пральній машині, тощо).

4.1 Робота. Кінетична енергія

Розглянемо другий закон Ньютона для матеріальної точки у вигляді:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Помножимо обидві частини рівняння скалярно на вектор переміщення $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, що відповідає проміжку часу dt :

$$m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

$m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$ – це приріст функції $\frac{mv^2}{2}$, що відповідає приросту аргументу $d\mathbf{v}$.

Дійсно, наприклад, для функції $f(x)$:

$$df = \frac{df}{dx} dx. \text{ Аналогічно: } d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

За визначенням, функція $\frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія частинки,

За визначенням, $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ – робота сили $\mathbf{F}$ на переміщенні $d\mathbf{r}$.

Таким чином, робота яку виконала сила $\mathbf{F}$, що діє на частинку, дорівнює приросту її кінетичної енергії:

$$dA = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Розглянемо більш детально поняття роботи.

Внесок у величину роботи вносить тільки проекція сили на напрям переміщення (рис.4.1): $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Fdr \cos \alpha$

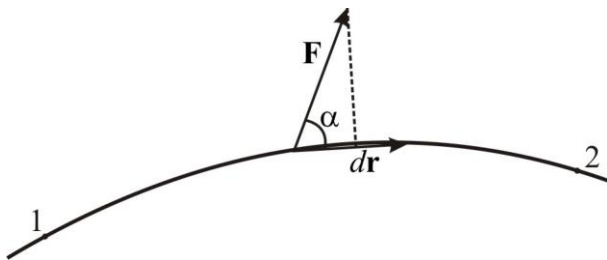


Рис.4.1 Визначення роботи, яку виконала змінна у просторі сила при переміщенні тіла по певній траєкторії між двома точками.

Якщо визначити роботу на кожній малій ділянці траєкторії від точки 1 до точки 2 та все додати, то отримаємо загальну роботу сили на ділянці траєкторії від точки 1 до точки 2. Така сума нескінченно великої кількості нескінченно малих доданків має назву криволінійний, чи контурний інтеграл. Кожний доданок суми містить елемент якоїсь кривої – траєкторії, по якій рухається тіло.

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1$$

В нас вийшов закон збереження енергії: робота, яку виконує сила, що діє на частинку, дорівнює приросту її кінетичної енергії.

Робота, що виконує сила за одиницю часу – потужність сили:

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

4.2 Консервативні сили. Поля

Якщо якась величина, векторна чи скалярна, задана як функція координат, то кажуть, що визначено поле цієї величини. Наприклад, якщо сила, що діє на частинку, відома у кожній точці простору, то кажуть, що задане силове поле, що діє на частинку.

Для стаціонарних (не залежних від часу) силових полів може статися, що робота сили, що діє на тіло при переміщенні його проміж двома точками, не залежить від шляху, по якому переміщується тіло, а залежить тільки від положення початкової та кінцевої точки шляху. Такі сили і відповідні поля мають назву *консервативні*.

Консервативним, наприклад, є *однорідне поле*, у якому сила, що діє на тіло, однакова у всіх точках простору. Наприклад, сила тяжіння біля поверхні Землі. Дійсно:

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \int_1^2 d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} - \text{отримана величина не залежить від шляху,}$$

по якому рухалося тіло між точками 1 та 2 (силу $\mathbf{F}$, як сталий множник, ми винесли за знак суми, тобто інтеграла).

Консервативним також є *центральне поле*. У такому полі сила, що діє на тіло, залежить лише від відстані тіла до певного центра та має напрям прямої, що з'єднує центр та точку, у якій знаходиться тіло. Наприклад, це електричне та гравітаційне поле.

Розглянемо, наприклад, випадок, коли поле створюється точковим зарядом q . Це поле діє з силою на заряд q' , який рухається між точками 1 та 2 простору по довільній траєкторії (рис.4.2). Сила F , що діє на заряд q' залежить лише від відстані r до центра (у якому розташований заряд q , який є джерелом поля). Напрямок сили – по прямій, що з'єднує заряд q' та центр (заряд q). Згідно до закону Кулона:

$$F(r) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

тоді робота сили F на шляху між точками 1 та 2 дорівнює:

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 F ds \cos \alpha = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr.$$

Отримали вираз, який не залежить від форми траєкторії переміщення заряду q' між точками 1 та 2, а залежить тільки від відстаней r_1 та r_2 від центра до початкової точки 1 та

кінцевої точки 2. На кожному елементі шляху ds суттєвим є тільки зміна dr відстані до центра.

У полі консервативних сил робота при переміщенні тіла по замкненому контуру дорівнює нулю (рис.4.3).

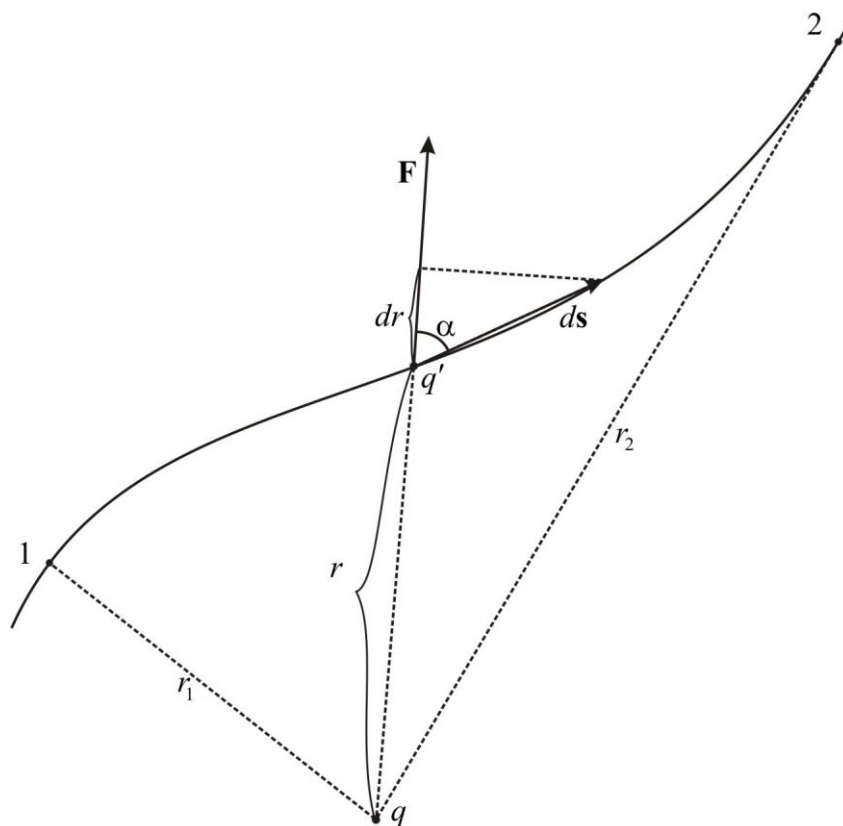


Рис.4.2 Робота сили взаємодії точкових зарядів при переміщенні одного з них між двома точками по певній траєкторії.

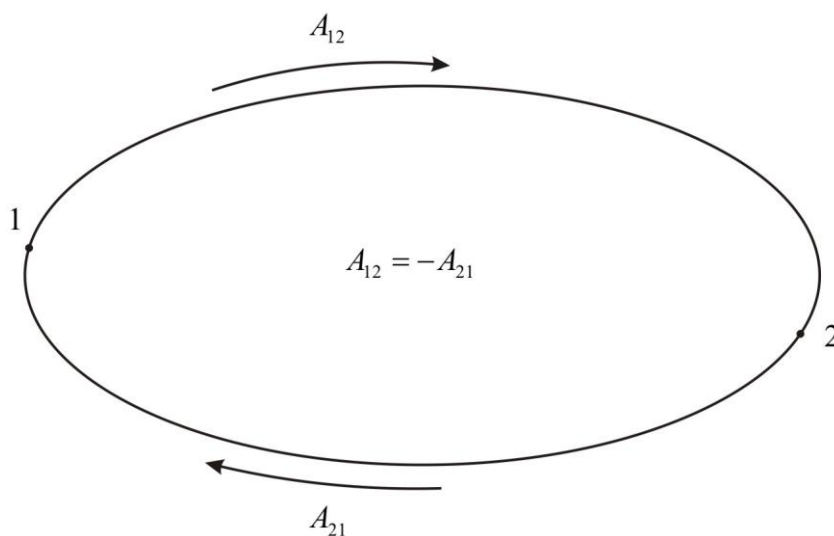


Рис.4.3 Робота у консервативному полі сил при переміщенні тіла по замкненому контуру.

4.3 Потенціальна енергія частинки у силовому полі

У полях консервативних сил робота при переміщенні тіла не залежить від шляху і тому цією роботою можна характеризувати поле. Це виявляється дуже зручним та корисним. В зв'язку з цим виникло поняття потенціальної енергії.

За визначенням, потенціальна енергія тіла у силовому полі це функція координат $U(x, y, z)$ різниця значень якої у двох точках ($U_1 - U_2$) дорівнює роботі A_{12} сили, що діє на тіло, при переміщенні його між цими точками:

$A_{12} = U_1 - U_2$ (шлях, по якому переміщується тіло, не має значення, бо робота від шляху не залежить).

З іншого боку робота, яку виконує сила, що діє на тіло, дорівнює приросту його кінетичної енергії:

$$A_{12} = U_1 - U_2 = T_2 - T_1.$$

Звідки отримуємо закон збереження енергії – сума кінетичної та потенціальної енергії тіла у силовому полі зберігається:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

Як визначити $U(x, y, z)$, якщо відоме силове поле $\mathbf{F}(x, y, z)$?

Розглянемо силове поле консервативних сил. Виберемо у просторі точки 1 та 2. Робота A_{12} при переміщенні тіла між цими точками не залежить від шляху (рис.4.4). Проведемо шлях між точками 1 та 2 через певну відправну точку P_0 (це може бути будь-яка точка). Позначимо роботу $A_{1P_0} = U_1$, а роботу $A_{2P_0} = U_2$. Тоді робота на шляху між точками 1 та 2, який проходить через точку P_0 , дорівнює: $A_{12} = U_1 - U_2$. Це повністю відповідає визначенню потенціальної енергії. Таким чином, потенціальна енергія тіла, розташованого у точці P, дорівнює:

$U(P) = \int_P^{P_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Контурний інтеграл береться по будь-якому шляху (для якого розрахунки простіші).

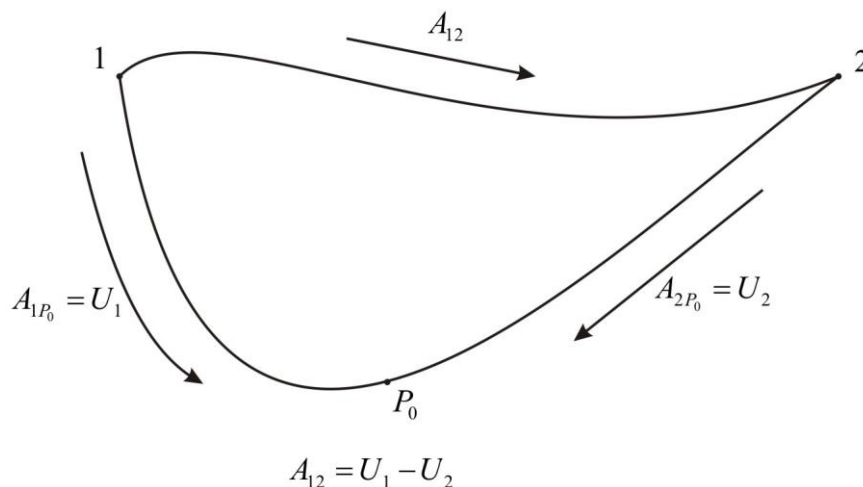


Рис.4.4 Визначення потенціальної енергії тіла у консервативному полі сил.

Значення $U(P)$ залежить від вибору відправної точки P_0 , тобто є неоднозначним. Але при зміні положення точки P_0 усі значення $U(P)$ змінюються на однакову величину. Виходить, що потенціальна енергія точки визначається з точністю до довільної константи. Але різниця значень потенціальної енергії між двома будь-якими точками не залежить від вибору відправної точки та визначається однозначно. Нас завжди цікавить саме різниця значень потенціальної енергії у певних точках. Абсолютне значення потенціальної енергії не має фізичного змісту.

Як приклад, розглянемо потенціальну енергію тіла на висоті h у полі сили тяжіння біля поверхні Землі (рис.4.5). Відправну точку P_0 розташуємо на поверхні Землі. Шлях між точками P та P_0 виберемо найбільш зручний для визначення контурного інтеграла

$U(P) = \int_P^{P_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ – спочатку паралельно поверхні Землі до точки P' , а потім вертикально униз до точки P_0 . Робота сили тяжіння $m\mathbf{g}$ на горизонталі $P-P'$ дорівнює нулю, бо сила не має проекції на напрям переміщення. Робота на шляху $P'-P_0$ дорівнює:

$$U(P) = - \int_h^0 mg dh = mgh \quad (\text{ми урахували, що величини } dh \text{ у інтегралі є від'ємними, бо}$$

на шляху $P'-P_0$ висота h зменшується).

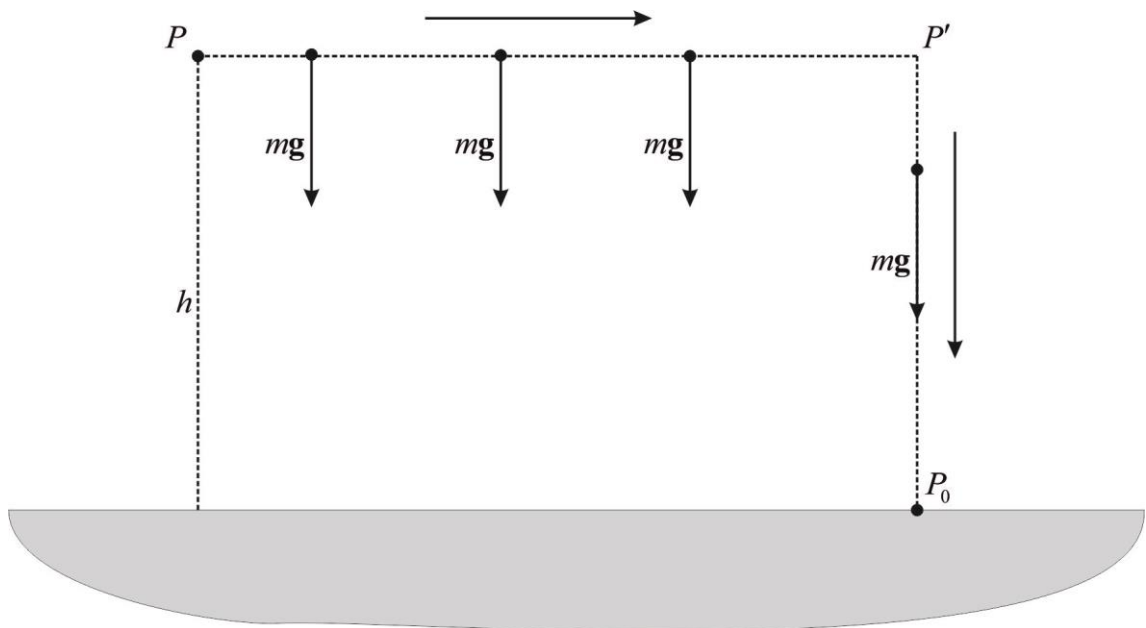


Рис.4.5 Потенціальна енергія тіла у полі сили тяжіння біля поверхні Землі.

Скалярне поле $U(x, y, z)$ однозначно визначає силове поле $\mathbf{F}(x, y, z)$. Визначимо, як саме.

Розглянемо дві нескінченно близькі точки 1 та 2 у силовому полі. Напрямок прямої, що з'єднує точки, зробимо паралельним до осі x . Тоді координати точок 1(x, y, z) та 2($x+dx, y, z$). За визначенням потенціальної енергії: $A_{12} = U_1 - U_2$. Можемо представити: $A_{12} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{12} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F_x dx$, $U_1 - U_2 = -dU$. Звідки отримуємо:

$$F_x = - \frac{dU}{dx}.$$

Аналогічно, $F_y = -\frac{dU}{dy}$ та $F_z = -\frac{dU}{dz}$. Та, взагалі, проекція сили на будь-який напрям дорівнює похідній потенціальної енергії тіла по координаті цього напрямку із зворотним знаком.

Звичайно пишуть не $\frac{dU}{dx}$, а $\frac{\partial U}{\partial x}$. Останній вираз це *частинна похідна* від функції багатьох змінних. Частинна похідна – похідна від функції багатьох змінних по одній з них. При цьому інші змінні при диференціюванні вважаються сталими.

Тоді можемо записати вектор сили, що діє на тіло, у вигляді:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}, \text{ де } \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} - \text{одичні вектори, що визначають напрям}$$

координатних осей (орти координатних осей).

Ми бачимо рецепт, як із скалярного поля $U(x, y, z)$ зробити векторне $\mathbf{F}(x, y, z)$. Цей рецепт є універсальною операцією векторного аналізу, яка отримала назву *градієнт*. Позначення такої операції:

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U = -\nabla U.$$

Значок ∇ – векторний оператор «набла». Це алгоритм певної операції.

4.4 Потенціальна енергія взаємодії

Розглянемо дві частинки, що взаємодіють з силою, яка залежить тільки від відстані між ними, та має напрям прямої, що їх з'єднує. Наприклад, це сила тяжіння (рис.4.6).

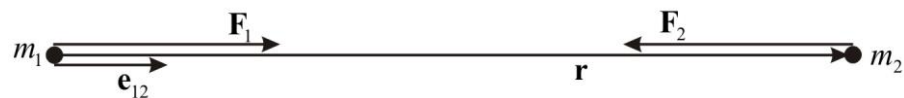


Рис.4.6

Силу взаємодії частинок представимо у вигляді:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = f(r)\mathbf{e}_{12}$$

Запишемо рівняння динаміки для частинки 1 та 2:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_2.$$

Помножимо скалярно обидві частини цих рівнянь на вектор переміщення кожної частинки, що відповідає інтервалу часу dt :

$$d\mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_1 dt, \quad d\mathbf{r}_2 = \mathbf{v}_2 dt$$

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot \mathbf{v}_1 dt = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \cdot \mathbf{v}_2 dt = \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$$

У лівих частинах двох останніх рівнянь бачимо приріст кінетичної кожної частинки, а у правій – роботу, що виконує сила взаємодії. Визначимо суму цих рівнянь:

$$d\left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$$

Зліва вийшов приріст загальної кінетичної енергії частинок, справа – загальна робота, яку виконала сила взаємодії кожної частинки. Перетворимо вираз для роботи:

$$dT = dA = f(r)\mathbf{e}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 - f(r)\mathbf{e}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2 = -f(r)\mathbf{e}_{12} \cdot d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -f(r)\mathbf{e}_{12} \cdot d\mathbf{r} = -f(r)dr = -dU_{\text{вз}}(r)$$

Отримали, що робота, яку виконує сила взаємодії над обома частинками, дорівнює приросту певної функції від відстані r між частинками, яка отримала назву – *потенціальна енергія взаємодії* частинок $U_{\text{вз}}(r)$.

Ми отримали:

$$dT = -dU_{\text{вз}}$$

Інтегрування останнього рівняння по відстані r між частинками у межах від r_1 до r_2 дає:

$$T_2 - T_1 = U_{\text{вз}}(r_1) - U_{\text{вз}}(r_2)$$

Отримали новий закон збереження:

$T_1 + U_{\text{вз}}(r_1) = T_2 + U_{\text{вз}}(r_2)$ – сума кінетичної енергії та потенціальної енергії взаємодії частинок зберігається.

Як знайти значення потенціальної енергії взаємодії?

Нас цікавить енергія взаємодії частинок при відстані r між ними.

Робота, яку виконує сила взаємодії над обома частинками при збільшенні відстані між ними від r до нескінченності дорівнює:

$$A_{r\infty} = U_{\text{вз}}(r) - U_{\text{вз}}(\infty).$$

Природно вважати, що $U_{\text{вз}}(\infty) = 0$.

Тоді $U_{\text{вз}}(r) = A_{r\infty}$. Тобто, *потенціальну енергію взаємодії частинок можна розрахувати як роботу, яку виконує сила взаємодії при рознесенні частинок на нескінченно велику відстань.*

Наприклад, енергія взаємодії Земної кулі та тіла на її поверхні. Це робота, яку виконує сила тяжіння при переміщенні тіла по прямій, що проходить через центр Землі, від відстані, що дорівнює радіусу Землі R_3 до ∞ :

$$U_{\text{вз}}(R_3) = - \int_{R_3}^{\infty} G \frac{mM_3}{r^2} dr = -G \frac{mM_3}{R_3} = -mgR_3 \quad (\text{знак «-» перед інтегралом ми поставили}$$

тому, що напрями сили та переміщення є протилежними). (Ми застосували формулу для інтегрування степеневої функції $\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \rightarrow \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}$).

Варто звернути увагу, що *потенціальна енергія взаємодії тіл у випадку їх притягання є завжди від'ємною, а у випадку відштовхування – додатною*.

Розрахуємо наприклад другу космічну швидкість. Це швидкість, яку потрібно надати тілу, щоб воно пододало силу тяжіння та віддалилося від Землі на нескінченну відстань.

Використаємо закон збереження:

на поверхні Землі сума кінетичної енергії тіла та потенціальної енергії його взаємодії з Землею дорівнює: $\frac{mv^2}{2} - mgR_3$. На нескінченності: $0 + 0$. Відповідно:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR_3, \quad v = \sqrt{2gR_3} \approx 11 \text{ км/с.}$$

Потенціальна енергія взаємодії багатьох частинок

Можна довести, що для системи з N взаємодіючих частинок потенціальна енергія взаємодії складається з енергій взаємодії частинок, узятих попарно:

$$U_{\text{вз}} = U_{12}(R_{12}) + U_{13}(R_{13}) + \dots + U_{1N}(R_{1N}) + U_{23}(R_{23}) + \dots + U_{2N}(R_{2N}) + \dots + U_{N-1,N}(R_{N-1,N}) =$$

$$= \sum_{(i \neq k)} U_{ik}(R_{ik}) = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} U_{ik}(R_{ik}) \quad (\text{множник } \frac{1}{2} \text{ у останній сумі з'явився тому, що при}$$

вибраному методі підсумовування – сума енергій взаємодії кожної частинки з усіма іншими – енергія взаємодії кожної пари частинок ураховується двічі).

Розглянемо це питання більш детально на прикладі енергії взаємодії електричних зарядів. Заряди взаємодіють. Цій взаємодії відповідає потенціальна енергія взаємодії. Ця енергія визначається роботою, яку виконує сила взаємодії при збільшенні відстані між зарядами до нескінченності.

Наприклад, енергія взаємодії двох точкових зарядів, розташованих на відстані r .



Рис.4.7 Потенціальна енергія взаємодії двох точкових зарядів.

Потенціальна енергія взаємодії зарядів W дорівнює роботі, яку виконує сила F_2 , що діє на заряд q_2 з боку заряду q_1 , при перенесенні заряду q_2 від відстані r до ∞ . Найбільш зручний шлях – уздовж прямої, що з'єднає заряди. На цій прямій сила та переміщення мають однаковий напрям. Тоді енергія взаємодії зарядів дорівнює:

$$W = \int_r^{\infty} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (\text{Ми застосували формулу для інтегрування степеневої}$$

$$\text{функції } \int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \rightarrow \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}).$$

Якщо зарядів декілька, наприклад, три, то потенціальна енергія їх взаємодії дорівнює роботі, яку виконує сила, що діє на заряд q_1 з боку заряду q_2 та з боку заряду q_3 при перенесенні заряду q_1 на нескінченність (ця робота дорівнює $W_{12} + W_{13}$), плюс робота, яку виконує сила, що діє на заряд q_2 з боку заряду q_3 при перенесенні заряду q_2 на нескінченність (W_{23}).

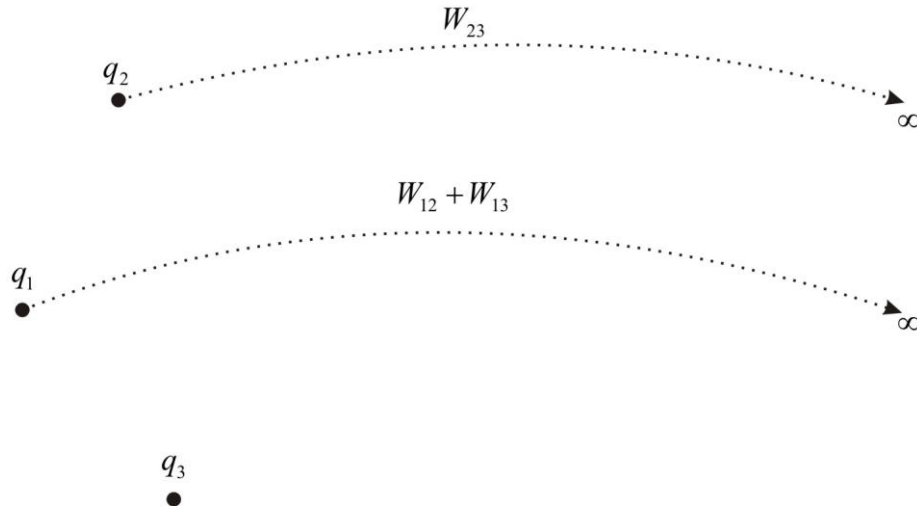


Рис.4.8 Енергія взаємодії трьох зарядів. Спочатку переносимо на нескінченність заряд q_1 , потім заряд q_2 .

Таким чином, енергія взаємодії трьох зарядів дорівнює сумі енергій взаємодії усіх трьох пар зарядів:

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23} = \sum_{i < j} W_{ij} .$$

У загальному випадку, енергія взаємодії сукупності точкових зарядів дорівнює сумі енергій взаємодії усіх пар зарядів:

$$W = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Більш зручним для реалізації програмним шляхом є інший алгоритм додавання значень енергій взаємодії пар зарядів. Додаються енергії взаємодії кожного з зарядів з усіма іншими. При цьому виникає загальний множник $1/2$, бо у такій сумі кожна пара зарядів зустрічається двічі. Наприклад, для трьох зарядів:

$$W = \frac{1}{2} (W_{12} + W_{13} + W_{21} + W_{23} + W_{31} + W_{32}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} .$$

4.5 Загальний закон збереження механічної енергії

Узагальнюючи попередні результати на систему взаємодіючих частинок, які знаходяться у полі зовнішніх консервативних сил, отримуємо закон збереження повної

причин так вважати немає. І дійсно, закони динаміки Ньютона є «хвостом» (певним наближенням) більш загальних законів квантової механіки, які царюють у мікросвіті.

При відсутності зовнішніх сил $d\mathbf{p}/dt = 0$.

Звідки випливає закон збереження імпульсу:

Імпульс замкненої системи матеріальних точок залишається сталим.

Якщо система не замкнена, але сумарна сила, що діє на неї, дорівнює нулю, то імпульс також зберігається.

Якщо проекція зовнішніх сил на якийсь напрямок дорівнює нулю, то проекція імпульсу на цей напрямок зберігається.

Слід підкреслити, що закон збереження імпульсу зовсім не передбачає збереження механічної енергії при взаємодії тіл системи. Бо, незалежно від природи сил взаємодії, усі вони взаємно компенсуються і нездатні змінити стан руху системи. Наприклад, сумарний імпульс уламків снаряда, при його вибуху у повітрі, дорівнює імпульсу того ж снаряда перед вибухом, чи при взаємодії тіл шляхом тертя, коли механічна енергія переходить у теплову, загальний імпульс системи зберігається.

4.7 Центр мас

Імпульс системи частинок може бути представлений у вигляді добутку сумарної маси частинок M на швидкість $\mathbf{v}_C$ певної точки, що має назву *центра мас системи*:

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v}_C$$

Центром мас системи називають точку C , положення якої задається радіус-вектором $\mathbf{r}_C$, який визначається наступним чином:

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{M}, \text{ де } m_i - \text{маси матеріальних точок, з}$$

яких складається система, $\mathbf{r}_i$ – радіус-вектори, що визначають положення матеріальних точок.

Швидкість центра мас можна отримати шляхом диференціювання радіус-вектора по часу:

$$\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i\mathbf{v}_i}{M} = \frac{\mathbf{p}}{M}, \text{ що збігається з вихідною формулою } \mathbf{p} = M\mathbf{v}_C.$$

Декартові координати центра мас дорівнюють проекціям $\mathbf{r}_C$ на координатні вісі:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M}; y_C = \frac{\sum m_i y_i}{M}; z_C = \frac{\sum m_i z_i}{M}.$$

У випадку суцільного неоднорідного тіла, густина речовини якого є різною у різних точках та визначається функцією координат $\rho(\mathbf{r})$, для знаходження центра мас потрібно розділити об'єм тіла на маленькі частки dV , кожен з яких можна вважати матеріальною точкою. Маса такої точки $dm = \rho dV$, де ρ – густина речовини у місці розташування

об'єму dV . Тоді суми у формулі, що визначає положення центра мас, перетворюються на інтегральні (інтеграли по об'єму V тіла):

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \rightarrow \mathbf{r}_C = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV}{\int_V \rho(\mathbf{r}) dV} \quad (\text{об'єм } dV \text{ у кожному}$$

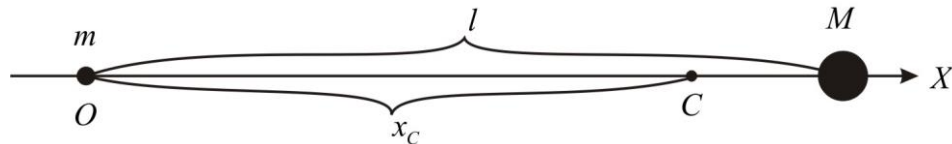
доданку інтегральної суми містить точку, положення якої визначається радіус-вектором $\mathbf{r}$).

У загальному вигляді інтеграли по об'єму рідко вдається визначити у аналітичному вигляді. Звичайно їх розраховують чисельним методом. Але у випадках наявності певної симетрії у розподіленні мас у просторі, вдається звести інтеграл по об'єму до звичайного визначеного інтеграла по одній змінній.

Для замкненої системи $\mathbf{p} = M\mathbf{v}_C = \text{const}$. Отже, центр мас замкненої системи чи рухається рівномірно та прямолінійно, чи залишається нерухомим.

Система відліку, у якій центр мас є нерухомим, називається *системою центра мас*.

Як приклад, визначимо положення центра мас системи з двох матеріальних точок (рисунок).



Вибираємо зручну систему координат – матеріальні точки з масами m та M розташовані уздовж осі X . Припустимо, що матеріальна точка m розташована на початку координат, а точка M на відстані l від неї. Визначимо координату x_C центра мас C :

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m \cdot 0 + M \cdot l}{m + M} = \frac{M}{m + M} l.$$

Бачимо, що центр мас розташований тим ближче до матеріальної точки M , чим більшу частку складає її маса по відношенню до загальної маси системи з двох матеріальних точок.

Властивості центра мас

«Існує чудова точка – центр мас. Вона чудова тим, що якщо на частинки, з яких складається тіло (неважливо, чи буде воно твердим, чи рідиною, зірковим скупченням чи чимось іншим), діють безліч сил (маються на увазі лише зовнішні сили, оскільки усі внутрішні сили компенсують одна одну), то результуюча сила приводить до такого прискорення цієї точки, ніби у ній зосереджена уся маса тіла». Наприклад, координата x_C цієї точки визначається виразом:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

Що означає цей вираз?

Припустимо, що тіло розділене на N однакових маленьких кусочків масою m : $M = Nm$. Тоді $x_C = m \sum x_i / mN = \sum x_i / N$ – середньоарифметична координата $\langle x \rangle$ усіх кусочків.

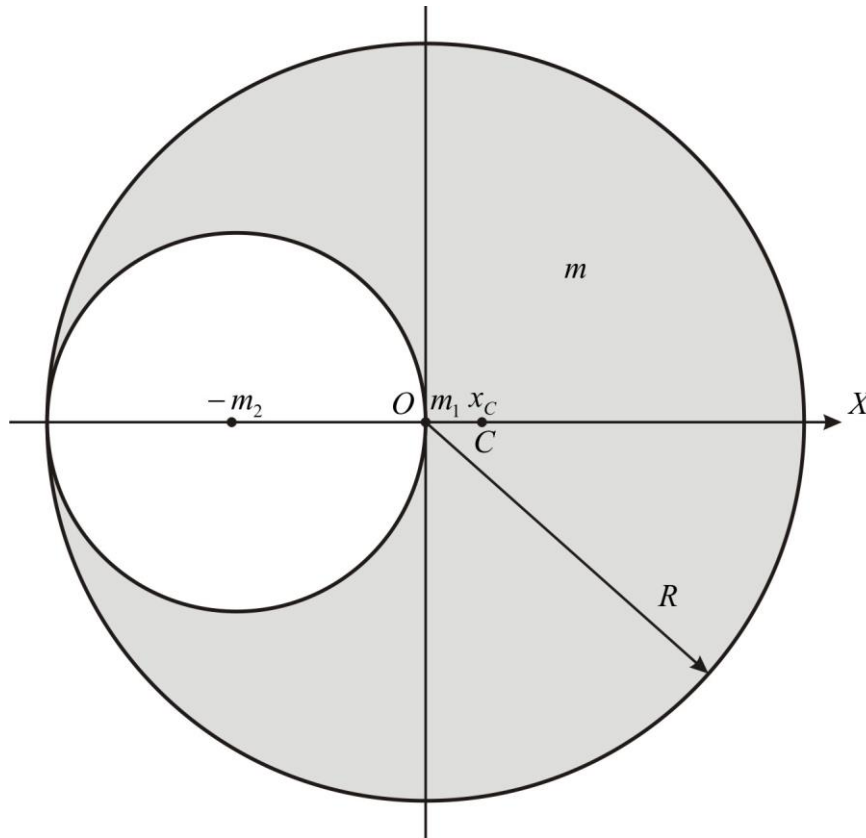
Існує спосіб, що спрощує знаходження центра мас складного тіла. Припустимо, що тіло складається з двох кусків A та B . Знаходимо спочатку окремо центри мас складових A та B , їх повні маси M_A та M_B . Після цього знаходимо центр мас двох точкових тіл, одне з яких має масу M_A та розташоване у центрі мас частини A , а інше – масу M_B та розташоване у центрі мас частини B . Отримана точка і буде центром мас усього тіла.

Розглянемо приклад застосування цієї теореми.

1.260-1

Умова: однорідний диск радіуса R має круглий виріз (рисунок). Маса частини диска, що залишилася, дорівнює m .

Знайти положення центра мас тіла.



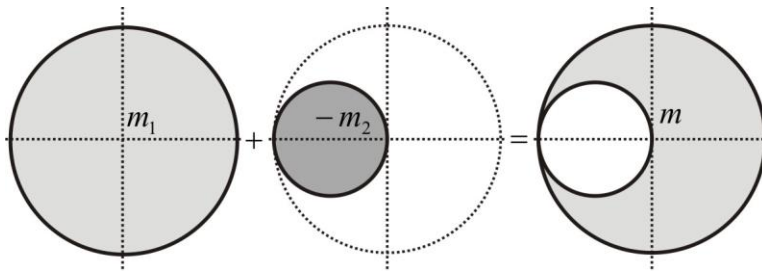
У випадку суцільного неоднорідного тіла, густина речовини якого є різною у різних точках та визначається функцією координат $\rho(\mathbf{r})$, для знаходження центра мас потрібно розділити об'єм тіла на маленькі частки dV , кожен з яких можна вважати матеріальною точкою. Маса такої точки $dm = \rho dV$, де ρ – густина речовини у місці розташування об'єму dV . Тоді суми у формулі, що визначає положення центра мас, перетворюються на інтегральні (інтеграли по об'єму V тіла):

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \rightarrow \mathbf{r}_C = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV}{\int_V \rho(\mathbf{r}) dV} \quad (\text{об'єм } dV \text{ у кожному}$$

доданку інтегральної суми містить точку, положення якої визначається радіус-вектором $\mathbf{r}$).

У загальному випадку інтеграли по об'єму рідко вдається визначити у аналітичному вигляді. Звичайно їх розраховують чисельним методом. Але у випадках наявності певної симетрії у розподіленні мас у просторі, вдається звести інтеграл по об'єму до звичайного визначеного інтеграла по одній змінній.

У даній задачі відсутня симетрія у розташуванні мас у просторі, яка б дозволила розрахувати в аналітичному вигляді інтеграли по об'єму. Ситуація здається безнадійною. Але вихід існує. Тіло, задане умовою задачі, можна представити як сукупність двох тіл простої форми у вигляді дисків, момент інерції яких можна визначити за допомогою відомих формул (рисунок). Це однорідний диск радіуса R , без вирізу, що має масу m_1 , та однорідний диск радіуса $R/2$, що має форму та розташування вирізу, зроблений з матеріалу такої ж питомої густини як і матеріал великого диска, але з від'ємною масою $-m_2$. Це чисто абстрактний, розрахунковий прийом, отже тіл з від'ємною масою у природі не існує.



Визначимо маси дисків:

$$m_1 \sim \pi R^2, \quad m_2 \sim \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 4$$

Отримуємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\frac{m_1}{m_2} = 4; \quad m_1 - m_2 = m.$$

Система має рішення:

$$m_1 = \frac{4}{3} m, \quad m_2 = \frac{1}{3} m$$

Визначаємо положення центра мас тіла (точка C) як сукупності двох матеріальних точок масами m_1 та $-m_2$, що розташовані у центрах великого та малого дисків (перший рисунок):

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{(-m_2)\left(-\frac{R}{2}\right) + m_1 \cdot 0}{m} = \frac{R}{6}$$

5 Динаміка обертального руху

Існує повна аналогія між законами та формулами, що описують поступальний та обертальний рух. Це дуже зручно. Кожній формулі, що описує поступальний рух, відповідає така ж сама формула для обертального руху. Тільки формули для обертального руху містять специфічні величини, кожна з яких має аналогію з відповідною величиною для поступального руху. Фізичний зміст цих величин та законів – однаковий. Розглянемо ці величини.

5.1 Обертання навколо нерухомої осі

Почнемо розглядати динаміку обертального руху з важливого частинного випадку – обертання навколо нерухомої осі. Положення тіла при такому обертанні визначається лише однією величиною – кут повороту. Такий рух має повну аналогію з одномірним поступальним рухом (рух уздовж прямої).

5.1.1 Момент сили

Згадаємо формули, що визначають зміну координат точки при повороті її у площині xy навколо осі z (рис.5.1).

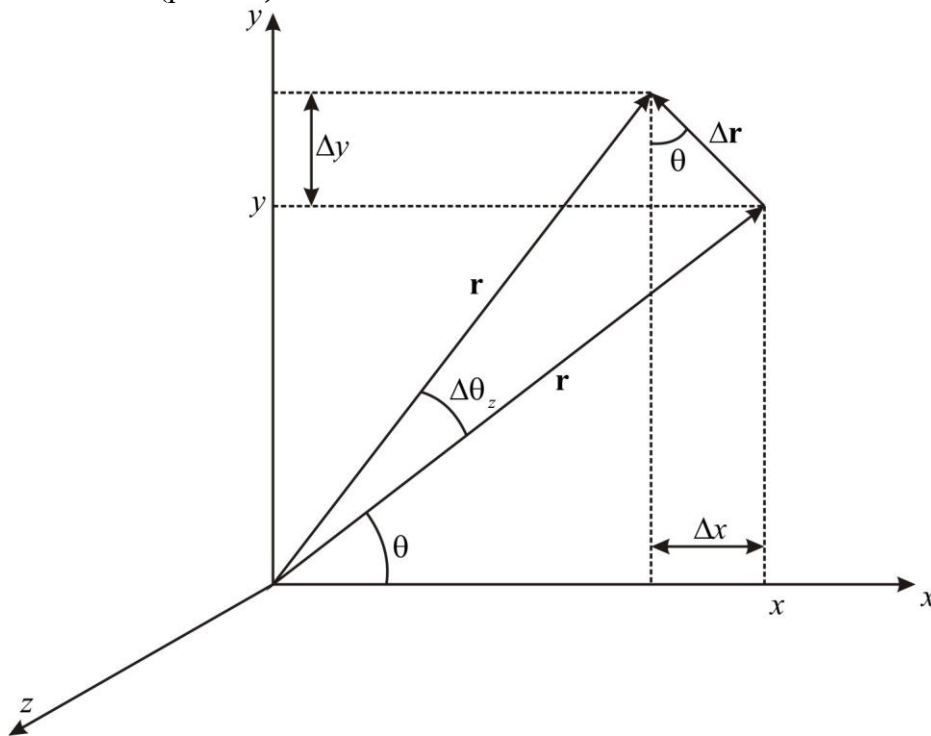


Рис.5.1 Зміна координат точки при повороті її на малий кут відносно осі z .

$$\Delta x = -\Delta\theta_z y$$

$$\Delta y = \Delta\theta_z x$$

Прикладемо силу $\mathbf{F}(F_x, F_y)$ до точки, що здійснює поворот. Тоді сила виконає роботу:

$$\Delta A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y = (xF_y - yF_x) \Delta\theta_z.$$

Оскільки кут повороту $\Delta\theta_z$ – це переміщення при обертальному русі, величина $x F_y - y F_x$ має аналогію з силою. Назва – момент сили. Поширене позначення:

$$N_z = x F_y - y F_x.$$

Таким чином, $\Delta A = N_z \Delta\theta_z$. В усіх випадках індекс «z» підкреслює вісь, навколо якої здійснюється поворот.

З'ясуємо геометричний зміст комбінації проекцій векторів $N_z = x F_y - y F_x$ (рис.5.2).

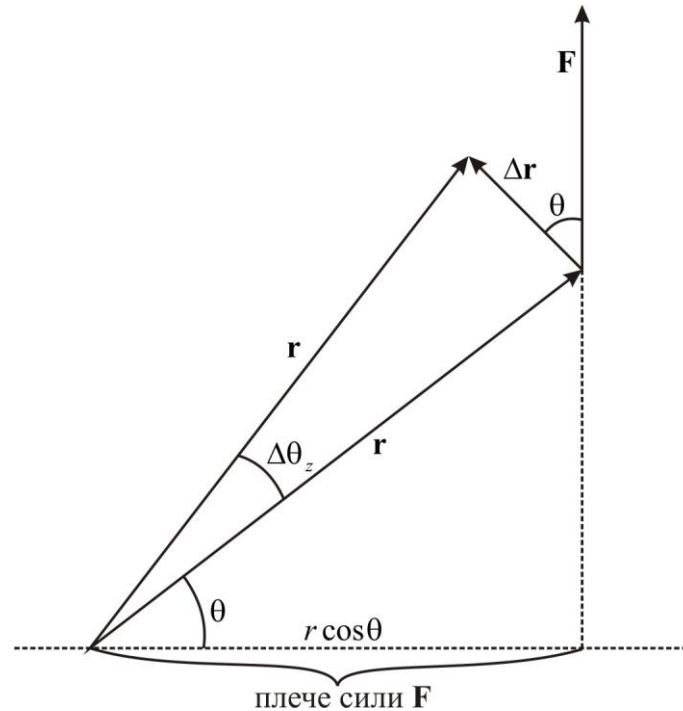


Рис.5.2. Геометричний зміст моменту сили.

Припустимо, що до точки, що здійснює поворот, прикладена сила $\mathbf{F}$. Робота цієї сили на переміщенні $\Delta \mathbf{r}$ дорівнює:

$$\Delta A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F r \cos \theta \cdot \Delta \theta_z = N_z \Delta \theta_z$$

Тобто, величина N_z дорівнює добутку модуля вектора сили F на величину $r \cos \theta$. Остання величина отримала назву *плече сили*.

Плече сили – відстань між прямою, що визначає напрям сили, та віссю обертання.

Виходить, що дія сили на тіло, що обертається (кутове прискорення, яке воно отримує), залежить не тільки від модуля вектора сили, а і від напрямку сили та положення точки прикладення відносно осі обертання. Внесок останніх двох факторів визначається величиною – плече сили.

Як приклад, розглянемо колесо, що може вільно обертатися навколо власної осі (рис.5.3). До колеса прикладають по черзі сили однакової величини, але різного напрямку та прикладені у різних точках $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$. Кутове прискорення колеса буде пропорційним до добутку модуля сили на плече. Бачимо, що плечем сили $\mathbf{F}_1$ є радіус колеса. Вона надасть колесу максимальне кутове прискорення. Плече сили $\mathbf{F}_4$, яка має

напрям по радіусу до центра колеса, дорівнює нулю. Під дією цієї сили колесо не буде обертатися.

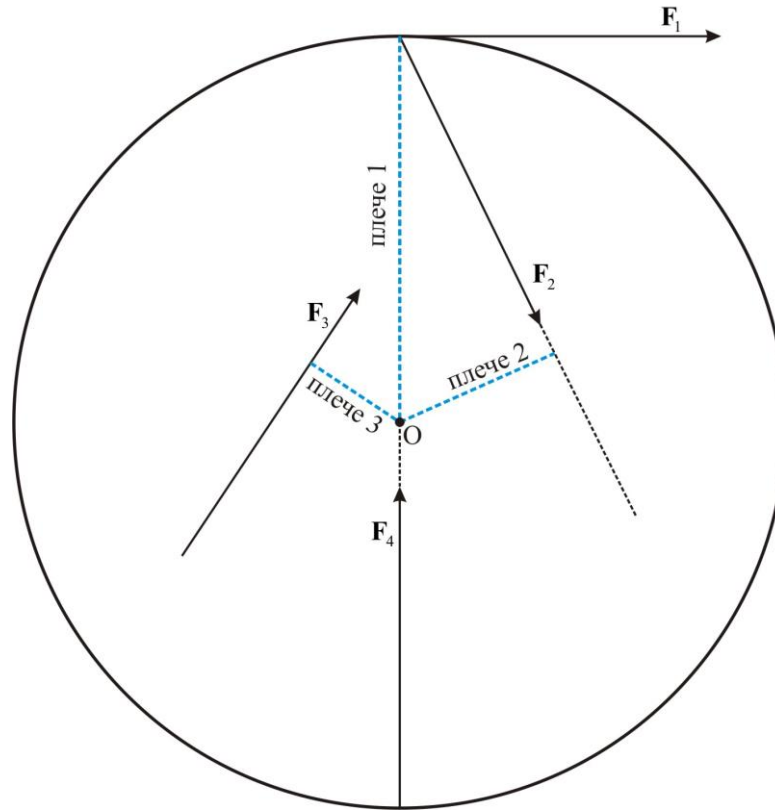


Рис.5.3 Моменти сил, що діють на колесо, при обертанні його навколо власної осі.

5.1.2 Момент імпульсу

Момент імпульсу це величина, аналогічна до імпульсу. Згідно до другого закону Ньютона похідна по часу від імпульсу тіла дорівнює прикладеній силі. У випадку обертального руху похідна по часу від моменту імпульсу повинна дорівнювати моменту сили. Знайдемо вираз для моменту імпульсу за цієї умови. Розглянемо одну частинку масою m :

$$N = xF_y - yF_x = xm \frac{d^2 y}{dt^2} - ym \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Потрібно побачити, що це похідна по часу від певної величини. Легко перевірити, що:

$$N = xm \frac{d^2 y}{dt^2} - ym \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(xm \frac{dy}{dt} - ym \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (xp_y - yp_x) = \frac{dL}{dt}.$$

$$\left(\frac{d}{dx} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \frac{df}{dx} \varphi + \frac{d\varphi}{dx} f \right)$$

Таким чином, момент імпульсу пов'язаний з компонентами імпульсу так само, як і момент сили з компонентами сили:

$$L = xp_y - yp_x; \quad N = xF_y - yF_x.$$

Момент імпульсу показує наскільки швидко рухається частинка навколо якогось центра, отже він ураховує тільки тангенціальну складову імпульсу. Крім того, чим далі від центра віддалена лінія, по якій направлений імпульс, тим більшим буде момент імпульсу. Існує (по аналогії з моментом сили) плече імпульсу (не співпадає з плечем сили):

$$L = x p_y - y p_x = r p_\tau = p \cdot (\text{плече імпульсу}).$$

Закон збереження моменту імпульсу

Якщо на систему частинок не діють ніякі зовнішні моменти сил, то її момент імпульсу зберігається.

Причини та обставини виконання цього закону є аналогічними до закону збереження імпульсу.

5.1.3 Момент інерції

Розглянемо важливий частинний випадок набору частинок – тверде тіло, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо нерухомої осі. Побачимо, як можна виразити момент імпульсу L у даному випадку. Розіб'ємо тіло на частинки m_i , які рухаються по колам радіуса r_i з лінійною швидкістю обертального руху $v_i = \omega r_i$ (r_i є плечем імпульсу для кожної i -тої частинки). Момент імпульсу i -тої частинки дорівнює:

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega.$$

Загальний момент імпульсу дорівнює:

$$L = \sum_i L_i = I \omega, \text{ де за величину } I, \text{ що має назву } \textit{момент інерції}, \text{ позначили величину}$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Момент інерції є коефіцієнтом пропорційності між моментом імпульсу та кутовою швидкістю, аналогічно тому, як маса є коефіцієнтом пропорційності між імпульсом та швидкістю у випадку поступального руху. Таким чином, момент інерції відображає інерцію тіла при обертальному русі. З формули для моменту інерції бачимо, що інерція тіла, що обертається, залежить не тільки від його маси, а дуже сильно залежить від того, наскільки маса тіла віддалена від осі обертання.

Моменти інерції тіл різної конфігурації

Сума $I = \sum_i m_i r_i^2$, що визначає момент інерції будь якого тіла, є по суті інтегральною (сума нескінченно великої кількості нескінченно малих доданків). Якщо відомий розподіл питомої густини речовини у тілі $\rho(x, y, z)$, момент інерції дорівнює інтегралу по об'єму тіла:

$I = \int \rho r^2 dV$, де добуток ρdV є масою нескінченно малого об'єму dV , а r^2 – квадрат відстані від точок об'єму dV до осі обертання.

Інтеграл по об'єму вдається замінити на звичайний інтеграл по одній змінній при наявності осової симетрії у розташуванні маси у просторі відносно осі обертання.

Як приклад, визначимо момент інерції однорідного диска чи циліндра відносно власної осі. Це основна конфігурація деталей у пристроях, що використовують обертальний рух. Такі тіла є найбільш технологічними при виготовленні на токарних верстатах.

Розглянемо однорідний диск масою m , радіуса R (рис.5.4).

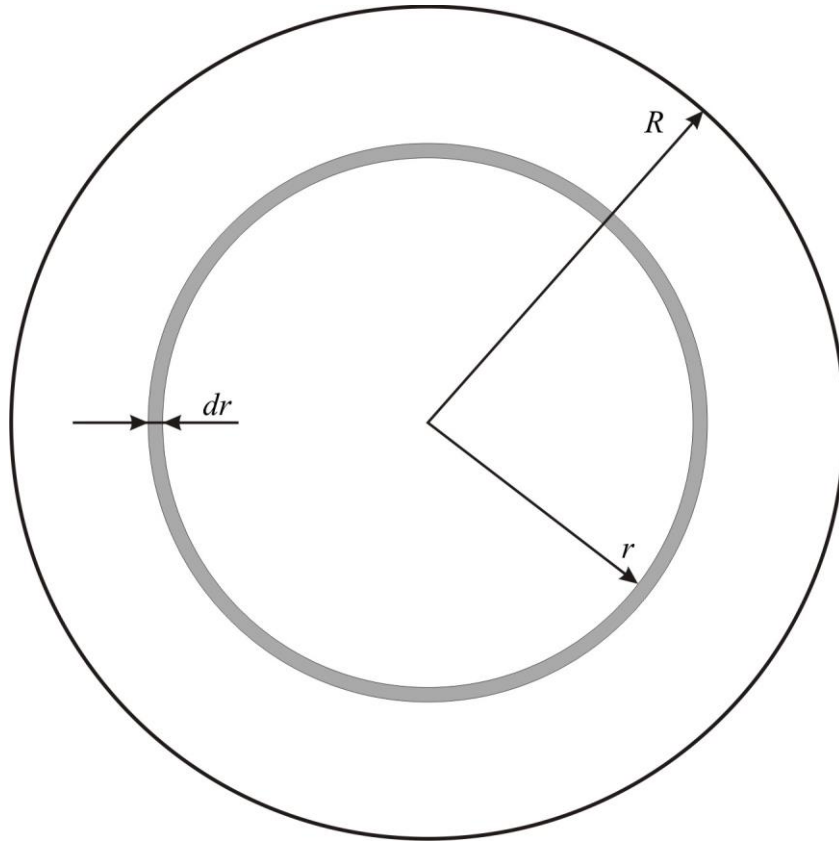


Рис.5.4 Визначення моменту інерції однорідного диска.

Розділимо диск на нескінченно малі частки. Ураховуючи осову симетрію у розташуванні мас, у якості таких часток зручно взяти нескінченно малі кільця. Одне з таких кілець, що має радіус r та ширину dr , зображено на рисунку. Чому саме кільця? Бо усі точки кілець однаково віддалені від осі обертання і ми легко знайдемо момент інерції такого кілець:

$$dI = dmr^2 = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr \cdot r^2 = \frac{2m}{R^2} r^3 dr$$
 (тут $\frac{m}{\pi R^2}$ – маса, що приходить на одиницю площі диска, а $2\pi r dr$ – площа кілець).

Загальний момент інерції диска дорівнює сумі моментів інерції усіх кілець, починаючи від $r = 0$ і закінчуючи $r = R$, тобто інтегралу:

$$I = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

$$\left(\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \rightarrow \int r^3 dr = \frac{r^4}{4} \right)$$

Подумайте, а який момент інерції відносно власної осі має тонкостінна труба масою m , радіуса R ?

Властивості моменту інерції

Теорема Штейнера (теорема про паралельне перенесення осі)

Момент інерції I відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції I_C відносно осі, що паралельна даній та проходить через центр мас тіла, та добутку маси тіла m на квадрат відстані a між осями:

$$I = I_C + ma^2,$$

Для доведення теореми Штейнера розглянемо вісь C , що проходить через центр мас тіла, та паралельну до неї вісь O , що відстоїть від осі C на відстань a (на рис.5.5 обидві осі перпендикулярні до площини рисунку). Позначимо через $\mathbf{R}_i$ перпендикулярний до осі O вектор, проведений від осі до елементарної маси Δm_i , а через $\mathbf{R}'_i$ – аналогічний вектор, проведений від осі C . Введемо також перпендикулярний до осей вектор $\mathbf{a}$, що з'єднує відповідні точки осей O та C :

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{a} + \mathbf{R}'_i;$$

$$R_i^2 = a^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}'_i + R_i'^2.$$

Момент інерції тіла відносно осі O дорівнює:

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2 = a^2 \sum \Delta m_i + 2\mathbf{a} \cdot \sum \Delta m_i \mathbf{R}'_i + \sum \Delta m_i R_i'^2$$

Перший доданок дорівнює ma^2 .

Перед тим, як розглянути другий доданок, згадаємо визначення поняття *центр мас* тіла. Центром мас системи називають точку C , положення якої задається радіус-вектором $\mathbf{r}_C$, який визначається наступним чином:

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M},$$

де m_i – маси матеріальних точок, з яких

складається система, $\mathbf{r}_i$ – радіус-вектори, що визначають положення матеріальних точок.

Виходить, що сума у другому доданку $\sum \Delta m_i \mathbf{R}'_i$ дорівнює добутку маси тіла на вектор $\mathbf{R}_C$, проведений від осі C до центра мас тіла. Оскільки центр мас лежить на осі C , цей вектор $\mathbf{R}_C = 0$, а відповідно і другий доданок дорівнює нулю.

Третій доданок $\sum \Delta m_i R_i'^2$ дорівнює I_C .

Таким чином, $I = I_C + ma^2$.

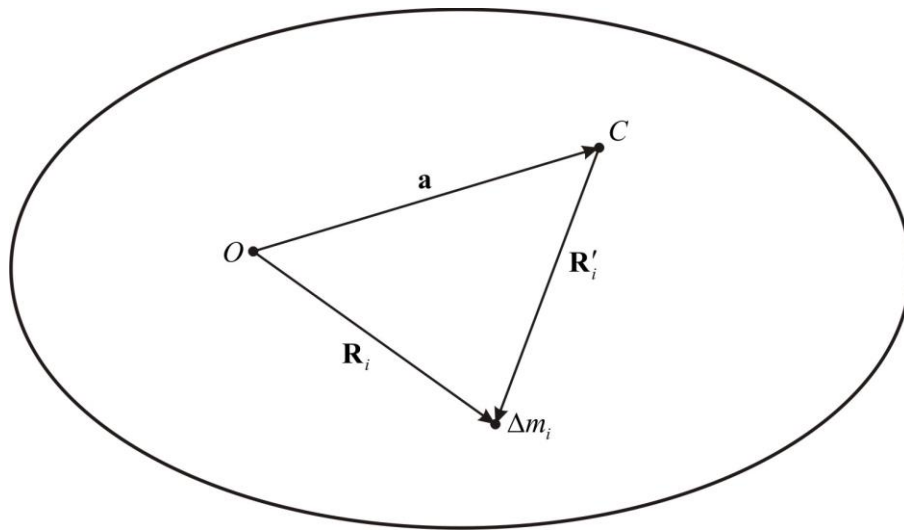


Рис.5.5 Доведення теореми Штейнера. Усі векторні величини та векторні рівняння спроектовані на площину, що перпендикулярна до осей та проходить через точку C центра мас.

Кінетична енергія тіла при обертальному русі

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Як бачимо, має місце повна аналогія між формулами для одновимірного поступального та обертального руху.

5.1.4 Сили інерції у обертальній системі відліку

Будь-яка дана точка на колесі, що обертається, рухається відносно нерухомого спостерігача з прискоренням, що має напрям по радіусу до центра колеса яке дорівнює v^2/R , где v – лінійна швидкість руху точки по колу радіуса R . Якщо тіло є нерухомим відносно колеса та знаходиться у зазначеній точці, то воно повинно рухатися з таким же прискоренням. Це прискорення надається тілу силою $F = m v^2/R$, з якою на нього діє колесо. Тіло відповідає колесу силою протидії, протилежного напрямку (сила направлена по радіусу від центра обертання). З точки зору спостерігача, пов'язаного з колесом, тіло є нерухомим та нього діє сила $F = m v^2/R$, що має напрям по радіусу від центра колеса. Ця сила має назву *відцентрова сила інерції*.

Відцентрова сила є не єдиною силою інерції у обертальній системі відліку. Якщо тіло рухається відносно колеса, наприклад по радіусу до центра обертання зі швидкістю $v' = dr/dt$, то воно при цьому повинно зменшувати лінійну швидкість $v = \omega r$ обертального руху. Зменшення лінійної швидкості обертального руху відповідає прискоренню, направленому по дотичній до кола, перпендикулярно до траєкторії руху тіла. Це прискорення надається тілу колесом. Тіло відповідає колесу силою протидії, яка, аналогічно відцентровій силі, є силою інерції та носить назву *сили Коріоліса*. Вона має дивну властивість: виявляється, що якщо ми у обертальній системі рухаємо якийсь предмет, то сила Коріоліса штовхає його убік. Отримаємо вираз для сили Коріоліса для згаданого частинного випадку руху тіла по радіусу від центра обертання.

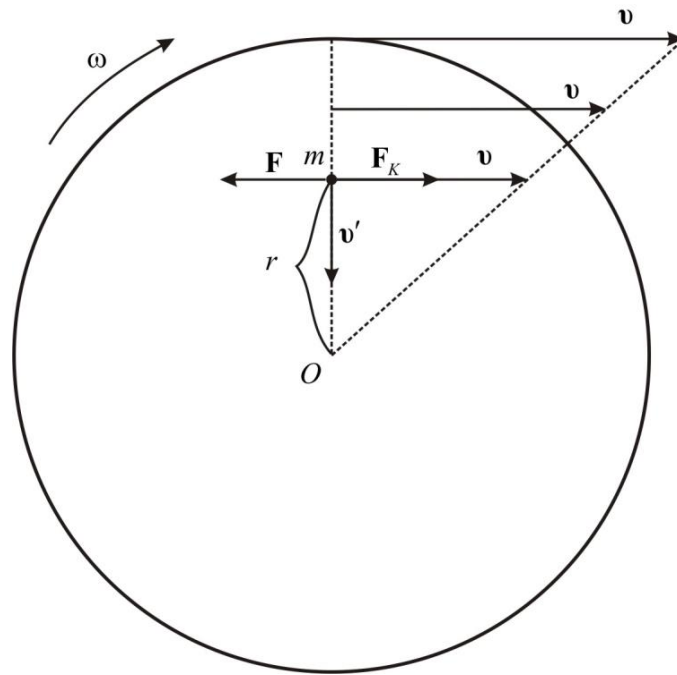


Рис.5.6 Рух точок колеса, що обертається навколо нерухомої осі.

Нехай тіло рухається по радіусу r колеса, що обертається. Момент імпульсу тіла $L = mvr = m\omega r^2$. Якщо змінюється r , то змінюється L та, відповідно, повинен діяти момент сили $N = dL/dt$:

$$N = F_K r = \frac{dL}{dt} = \frac{d(m\omega r^2)}{dt} = 2m\omega r \frac{dr}{dt} = 2m\omega r v'; \quad F_K = 2m\omega v'$$

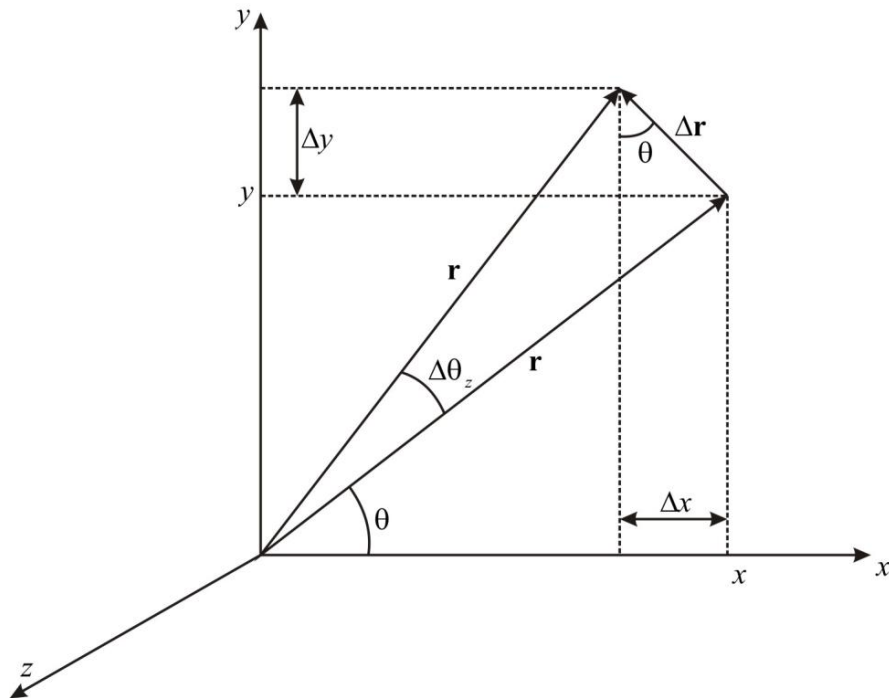
З коріолісовою силою ми зустрічаємось не тільки при русі тіла відносно обертальної системи відліку, коли змінюється радіус обертання. Можна показати, що якщо предмет m рухається зі сталою швидкістю v' по краю колеса, то на нього теж діє коріолісова сила. Чому? Спостерігач на колесі бачить що предмет рухається зі швидкістю v' , а нерухомий спостерігач бачить, що він рухається по колу зі швидкістю $v = v' + \omega r$, оскільки предмет на додачу переноситься колесом. Діюча у цьому випадку сила інерції буде відцентровою силою $m v^2 / r$, яка відповідає швидкості v . З точки зору нерухомого спостерігача ця сила F буде складатися з трьох частин:

$$F = \frac{m v^2}{r} = \frac{m v'^2}{r} + 2m v' \omega + m \omega^2 r$$

Перший доданок – це просто відцентрова сила, яка повинна виникнути, якщо побігти по колу зі швидкістю v' . Ця сила не залежить від обертання колеса. Можна очікувати також появи відцентрової сили, пов'язаної з обертанням колеса, яке здійснюється з кутовою швидкістю ω (третій доданок). Але, на додачу до цих відцентрових сил з'являється другий доданок. Раніше, при радіальній швидкості, коріолісова сила була тангенціальною. Тепер же, при тангенціальній швидкості, вона радіальна. Бачимо, що сила завжди має один і той же напрям у відношенні до швидкості, незалежно куди направлена швидкість. Вона діє перпендикулярно до швидкості і дорівнює за величиною $2m v' \omega$.

5.2 Обертання у просторі

Згадаємо, як отримано вираз для моменту сили відносно певної осі Z .



$$\Delta x = -\Delta\theta_z y$$

$$\Delta y = \Delta\theta_z x$$

Прикладемо силу $\mathbf{F}(F_x, F_y)$ до точки, що здійснює поворот. Тоді сила виконає роботу:

$$\Delta A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y = (xF_y - yF_x) \Delta\theta_z.$$

Оскільки кут повороту $\Delta\theta_z$ – це переміщення при обертальному русі, величина $xF_y - yF_x$ має аналогію з силою. Назва – момент сили. Поширене позначення:

$$N_z = xF_y - yF_x.$$

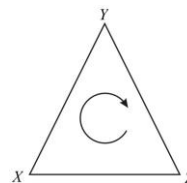
Таким чином, $\Delta A = N_z \Delta\theta_z$. Індекс «z» підкреслює вісь, навколо якої здійснюється поворот.

Аналогічно можна отримати вирази для моменту сили при повороті навколо інших осей. У результаті отримаємо вирази:

$$N_x = yF_z - zF_y \quad (c_x = a_y b_z - a_z b_y)$$

$$N_y = zF_x - xF_z \quad (c_y = a_z b_x - a_x b_z)$$

$$N_z = xF_y - yF_x \quad (c_z = a_x b_y - a_y b_x)$$



Бачимо, що N_x, N_y, N_z є компонентами вектора моменту сили $\mathbf{N}$, який є результатом векторного добутку радіус-вектора $\mathbf{r}(x, y, z)$ точки та сили $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$, прикладеної до цієї точки:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}].$$

Важливо, що напрям вектора моменту сили $\mathbf{N}$ є перпендикулярним до векторів $\mathbf{r}$ та $\mathbf{F}$: $\mathbf{N} \perp \mathbf{F}$ та $\mathbf{N} \perp \mathbf{r}$.

Аналогічно, для вектора моменту імпульсу $\mathbf{L}$ отримаємо:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}].$$

Векторне рівняння динаміки обертального руху вийде повністю аналогічним до рівняння динаміки Ньютона:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

У випадку обертання твердого тіла вектор моменту імпульсу дорівнює $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ (згадаємо, що вектор кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ завжди має напрям осі обертання).

Як приклад, знайдемо загальний момент сили тяжіння, що діє на тіло відносно точки центра мас:

$$\mathbf{N} = \sum \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{g}) = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g} = \left(\sum m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} = 0$$

Рівність нулю моменту сили обумовлена рівністю нулю суми у останньому виразі. Згадаємо вираз для радіус вектора, що визначає положення центра мас тіла:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}.$$

Якщо початок системи координат розташовано у точці центра мас, як у нашому випадку, то $\mathbf{r}_C = 0$, відповідно сума у чисельнику дорівнює нулю.

Виходить, що момент сили тяжіння, що діє на тіло, підвішене за точку центра мас, при будь-якому положенні тіла дорівнює нулю, тобто тіло знаходиться у стані байдужої рівноваги (при будь-якому положенні не обертається). З цього приводу точку центра мас називають також центром тяжіння.

Запишемо формули, що відображають аналогію поступального та обертального руху.

$$d\mathbf{r} \rightarrow d\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow \boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

$$m \rightarrow I = \sum m_i r_i^2$$

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \rightarrow \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{N} = I\boldsymbol{\beta}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \rightarrow E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Приклади обертання у просторі

Векторний характер величин, що характеризують обертальний рух, дозволяє просто розібратися у складних явищах.

Як приклад, розглянемо дослід на лаві Жуковського (рис.5.7).

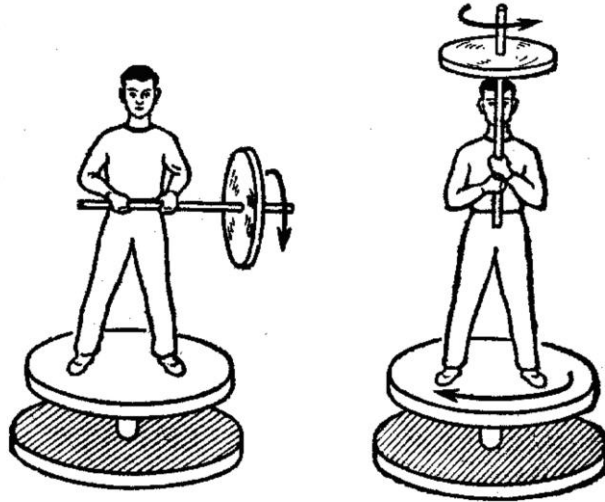


Рис.5.7 Дослід на лаві Жуковського

Розглянемо закон збереження моменту імпульсу на прикладі колеса, що швидко обертається, чи гіроскопа. Якщо стати на стілець, що може вільно обертатися навколо власної осі (лава Жуковського), та тримати колесо, яке швидко обертається, у горизонтальному напрямі, то його момент імпульсу буде направлений горизонтально. Припустимо, що при цьому лава Жуковського є нерухомою. Якщо тепер повернути вісь з колесом вертикально, то колесо отримає момент імпульсу відносно вертикальної осі. Але система у цілому (колесо, людина та лава Жуковського) не може мати вертикальної компоненти, тому людина разом зі стільцем повинна крутитися у напрямі, оберненому обертанню колеса, щоб компенсувати його момент імпульсу.

Саме дивне, у чому належить розібратися, це звідки беруться сили, що розкручують людину разом із лавою Жуковського, коли він повертає вісь гіроскопа вертикально.

На рис.5.8 показане колесо, яке швидко обертається навколо горизонтальної осі, тобто його кутова швидкість направлена уздовж цієї осі. Туди ж направлений момент імпульсу $\mathbf{L}_1$. Припустимо, що вісь колеса людина нахилила уверх на невеликий кут. Вектор моменту імпульсу змінив напрям ($\mathbf{L}_2$). Вектор зміни моменту імпульсу $\Delta\mathbf{L}$ направлений практично вертикально уверх. Згідно закону динаміки обертального руху вектор моменту сил $\mathbf{N} = \frac{\Delta\mathbf{L}}{\Delta t}$, які потрібно прикласти до осі колеса, також має напрям

уверх. Але вектор моменту сили завжди має напрям перпендикулярний до вектора сили. Тобто сили $\mathbf{F}$ до осі потрібно прикласти у горизонтальній площині (рис.5.8). Звідки беруться ці сили, хто їх прикладає? Людина, своїми руками, коли старається повернути вісь колеса у вертикальне положення. Але третій закон Ньютона вимагає, щоб рівні та протилежно направлені сили (та рівний та протилежно направлений момент) діяли на

людину. Вони і змушують його крутитися навколо вертикальної осі у протилежному напрямі.

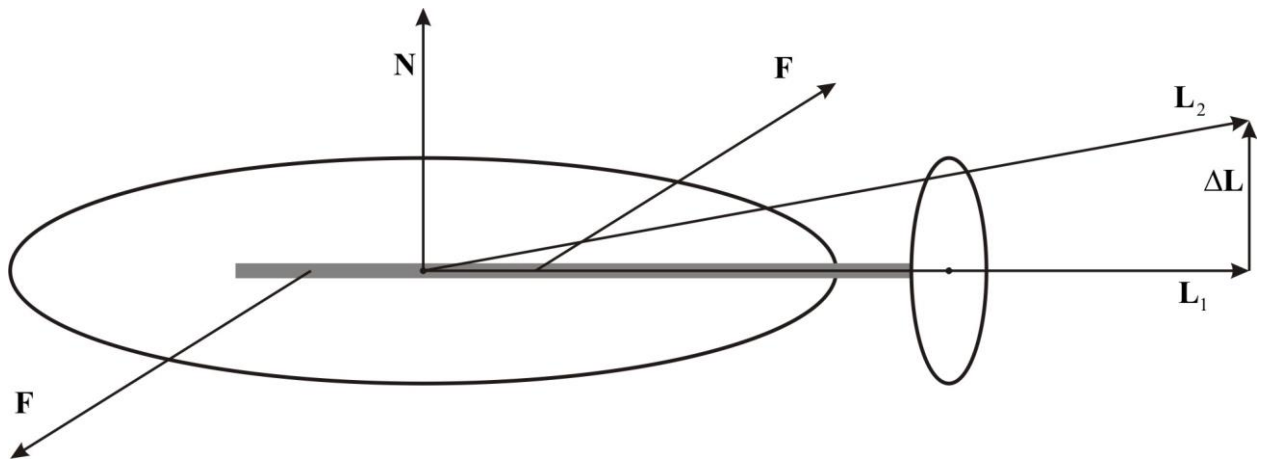


Рис.5.8 Схема, що пояснює результат дослідів на лаві Жуковського.

6. Механічні коливання

6.1 Кінематика гармонічних коливань

Гармонічними називають коливання, у яких цікава для нас величина x (наприклад, лінійне чи кутове зміщення з положення рівноваги) змінюється із часом t за законом

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (6.1)$$

де a – амплітуда коливань, $(\omega_0 t + \alpha)$ – фаза коливань, α – початкова фаза, ω_0 – циклічна (кругова) частота коливань. Ця частота пов'язана з періодом T та лінійною частотою ν як

$$\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu$$

Лінійна частота це кількість коливань у секунду, вимірюється у герцах (Гц).

Кругова частота показує, на який кут у радіанах змінюється фаза коливань за одну секунду, вимірюється у с^{-1} .

Шляхом диференціювання (6.1) по часу знайдемо швидкість $\dot{x}$ та прискорення $\ddot{x}$:

$$\dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2),$$

$$\ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi) \quad (6.2)$$

З цих виразів бачимо, що швидкість $\dot{x}$ та прискорення $\ddot{x}$ змінюються за гармонічним законом з амплітудами $a\omega_0$ та $a\omega_0^2$ відповідно. При цьому швидкість випереджує зміщення x по фазі на $\pi/2$, а прискорення на π , тобто знаходиться у протифазі зі зміщенням x . На рис.6.1 наведені графіки залежностей $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ для випадку $\alpha = 0$.

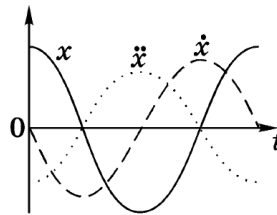


Рис.6.1

Зіставивши (6.2) та (6.1) бачимо, що

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.3)$$

Це диференціальне рівняння називають *рівнянням гармонічного осцилятора*. Його рішення (6.1) містить дві довільні константи: a та α . Для кожного конкретного коливання вони визначаються *початковими умовами* – зміщенням x_0 та швидкістю $\dot{x}_0$ у початковий момент $t = 0$:

$$x_0 = a \cos \alpha; \quad \dot{x}_0 = -a\omega_0 \sin \alpha. \quad (6.4)$$

Звідки знаходимо потрібні сталі:

$$a = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_0)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\dot{x}_0/\omega_0 x_0$$

Звичайно розглядають тільки значення α у інтервалі $(-\pi, +\pi)$. Рівняння для $\operatorname{tg} \alpha$ задовольняється двома значеннями α у цьому інтервалі. З цих значень належить узяти те, при якому отримуємо правильні знаки $\cos \alpha$ та $\sin \alpha$ у (6.4).

6.2 Динаміка гармонічних коливань

Для визначення характеру руху механічної системи потрібно, виходячи з законів динаміки чи закону збереження енергії, скласти рівняння руху системи, та якщо воно зводиться до вигляду (3), то можна однозначно стверджувати, що дана система є гармонічним осцилятором, частота якого дорівнює кореню квадратному від коефіцієнта при x . Розглянемо декілька прикладів та узагальнимо отримані результати.

6.2.1 Тягарець на пружині

Нехай тягарець маси m , підвішений на невагомій пружині з жорсткістю χ , здійснює вертикальні коливання (рис.6.2). Візьмемо початок O осі X у положенні рівноваги, де

$$mg = \chi \Delta l, \text{ де } \Delta l - \text{розтягнення пружини у цьому положенні.}$$

Тоді, згідно рівнянню динаміки Ньютона:

$$m\ddot{x} = -\chi x, \text{ чи}$$

$$\ddot{x} + (\chi/m)x = 0.$$

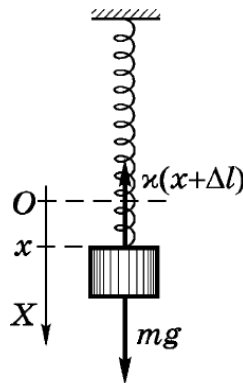


Рис.6.2

Порівнюючи з рівнянням (6.3) бачимо, що це рівняння гармонічного осцилятора, що коливається навколо положення рівноваги з частотою ω_0 та періодом T , рівними

$$\omega_0 = \sqrt{\chi/m}, \quad T = 2\pi\sqrt{\chi/m}$$

6.2.2 Математичний маятник

Матеріальна точка маси m , що підвішена на нерозтяжній ниті довжиною l , здійснює коливання у вертикальній площині (рис.6.3). Нас цікавить залежність від часу кута ϑ

відхилення ниті від вертикалі. Тут зручно використати рівняння динаміки обертального руху матеріальної точки у проекції на вісь Z , що проходить перпендикулярно площині рисунку через точку підвісу O .

Виберемо позитивний напрямок відрахування кута ϑ проти годинникової стрілки. Тоді вісь Z має напрям до нас. Згадаємо, що малий кут повороту це вектор, який має напрям уздовж осі повороту. Конкретний напрям вектора кута повороту визначається за правилом гвинта (якщо обернути гвинт у напрямі повороту, то його тіло переміщується у напрямі вектора кута повороту, тобто до нас при обертанні проти годинникової стрілки).

Рівняння динаміки має вигляд: $N_z = I\beta$, де N_z – проекція моменту сили тяжіння mg на вісь Z , I – момент інерції матеріальної точки відносно даної осі, β – кутове прискорення матеріальної точки.

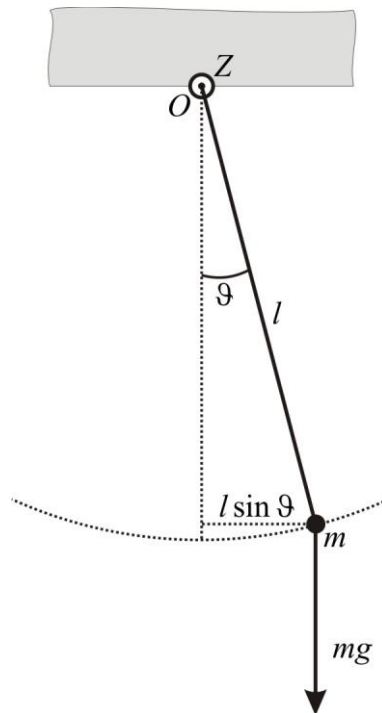


Рис.6.3

Момент сили тяжіння відносно осі обертання дорівнює добутку сили тяжіння mg на плече цієї сили $l \sin \vartheta$, де ϑ – кут відхилення ниті від вертикалі (плече сили це відстань між напрямом сили та віссю обертання). При даному напрямі осі Z проекція N_z ураховується із знаком мінус. Для того, щоб це зрозуміти, згадаємо, що напрям вектора моменту сили визначається виразом $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Операція векторний добуток дає вектор, який є завжди перпендикулярним до напрямку векторів, що його утворюють. Конкретний напрям визначається за правилом гвинта: якщо обернути перший вектор у напрямі до другого, то напрям переміщення тіла гвинта при такому обертанні дасть напрям векторного добутку. Радіус-вектор $\mathbf{r}$ у даному випадку має напрям від точки O до тіла маси m . Обертання його до напрямку вектора сили mg відбувається за годинниковою стрілкою. Тобто вектор $\mathbf{N}$ має напрям перпендикулярний до рисунку від нас.

Момент інерції матеріальної точки у даному випадку дорівнює ml^2 . Кутове прискорення дорівнює:

$$\beta = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \ddot{\vartheta},$$

Отримаємо рівняння динаміки обертального руху у вигляді:

$$-mgl \sin \vartheta = ml^2 \ddot{\vartheta}$$

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0.$$

Із порівняння з (6.3) бачимо, що це рівняння, взагалі кажучи, не є рівнянням гармонічного осцилятора. У ньому замість зміщення ϑ стоїть $\sin \vartheta$. Проте, при малих коливаннях, коли $\sin \vartheta \approx \vartheta$, рівняння співпадає з (6.3):

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \vartheta = 0,$$

звідки слідує, що частота ω_0 та період T математичного маятника, що здійснює малі коливання, дорівнюють:

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}, \quad T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

6.2.3 Фізичний маятник

Це тверде тіло, що здійснює коливання навколо нерухомої осі, жорстко пов'язаної з тілом. Розглянемо коливання під дією сили тяжіння (рис.6.4).

Суму моментів сили тяжіння, що діє на різні малі частини тіла масою m_i відносно точки, що лежить на осі підвісу, можна записати:

$$\mathbf{N} = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g}.$$

Урахуємо, що положення центра мас тіла, що має загальну масу m , відносно даної точки визначається виразом:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m}.$$

Тоді для моменту сили можна записати вираз:

$$\mathbf{N} = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g} = m \mathbf{r}_C \times \mathbf{g}.$$

Виберемо позитивний напрямок відрахування кута ϑ проти годинникової стрілки (вісь Z має напрям до нас). Тоді проекція моменту сили тяжіння на вісь Z запишеться, як $N_z = -mgl \sin \vartheta$ та рівняння динаміки обертального руху твердого тіла набуде вигляду:

$$I \ddot{\vartheta} = -mgl \sin \vartheta,$$

де I – момент інерції тіла відносно осі O , l – відстань між віссю O та центром мас C . Обмежимося розглядом малих коливань, при яких $\sin \vartheta \approx \vartheta$. При цій умові попереднє рівняння можна записати так:

$$\ddot{\vartheta} + (mgl/I)\vartheta = 0$$

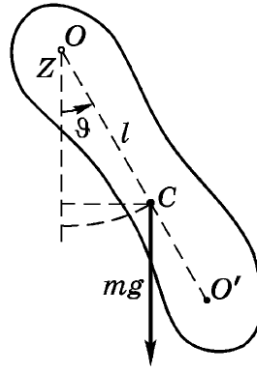


Рис.6.4

Коливання будуть гармонічними з частотою ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{mgl/I} = \sqrt{\frac{mgl}{I_C + ml^2}}.$$

У останньому виразі використано теорему Штейнера:

$I = I_C + ml^2$, де I_C – момент інерції маятника відносно до осі, що проходить через центр мас та є паралельною до осі Z .

Період коливань дорівнює:

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgl} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C}{mgl} + \frac{l}{g}}.$$

Ця залежність має мінімум, положення якого можна знайти прирівнявши до нуля похідну функції $T(l)$:

$$\frac{dT}{dl} = 0 \rightarrow l_{\min} = \sqrt{\frac{I_C}{m}}$$

Наприклад, якщо маятником є однорідний стержень довжиною L :

$$I_C = \frac{mL^2}{12} \rightarrow l_{\min} = \frac{L}{\sqrt{12}}$$

На рис.6.5 наведена залежність $T(l)$, розрахована для однорідного стержня довжиною 1 м та масою 3 кг, підвішеного до осі, що може розташовуватись на різних відстанях l до центра мас (який знаходиться на середині стержня).

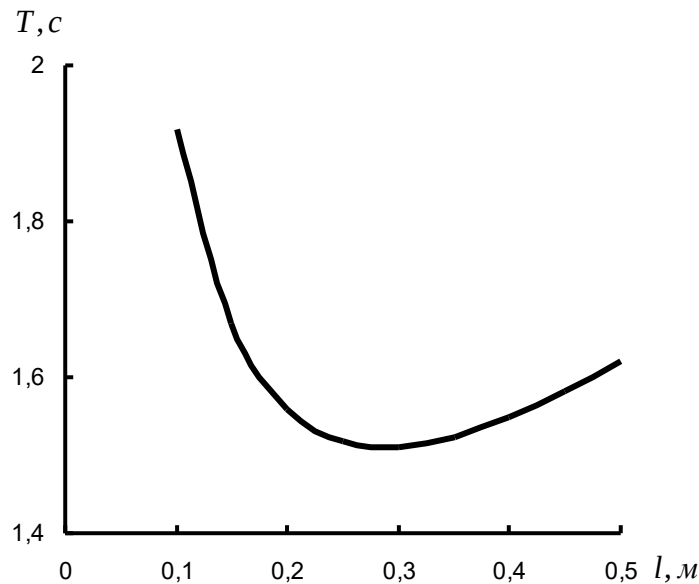


Рис.6.5

Таку ж частоту та період, як і фізичний маятник, має математичний маятник довжиною $l_{np} = \frac{I}{ml}$, яку називають *приведеною довжиною фізичного маятника*.

Точку O' (рис.4), яка знаходиться на прямій, що проходить через точку підвісу O та центр мас C , та відстоїть від точки O на відстань l_{np} , називають центром качання фізичного маятника. Центр качання O' має чудову властивість: якщо маятник перевернути та змусити здійснювати малі коливання навколо осі O' , то період коливань не зміниться. На цій властивості ґрунтується визначення прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника: експериментально визначають положення двох «спряжених» точок (осей) O та O' , малі коливання навколо яких відбуваються з однаковою частотою. Це означає, що відстань $OO' = l_{np}$. Визначивши ω_0 та l_{np} , з формули $\omega_0 = \sqrt{g/l_{np}}$ знаходимо g .

Довести рівність періодів коливань фізичного маятника відносно осей O та O' можна, наприклад, так:

$$l_{np} = \frac{I}{ml} = \frac{I_C + ml^2}{ml} = \frac{I_C}{ml} + l \rightarrow l_{np} - l = \frac{I_C}{ml},$$

$$T(l_{np} - l) = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + m(l_{np} - l)^2}{mg(l_{np} - l)}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + m\left(\frac{I_C}{ml}\right)^2}{mg \frac{I_C}{ml}}} = 2\pi \sqrt{\frac{1 + \frac{I_C}{ml^2}}{\frac{g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + ml^2}{mgl}} = T(l)$$

На практиці визначення прискорення вільного падіння зручно здійснювати за допомогою перекидного маятника у вигляді стержня з двома фіксованими опорами (призмами 1 та 2) для підвісу. На стержні містяться тягарці, переміщення яких уздовж стержня регулює положення центра мас (рис.6.6).

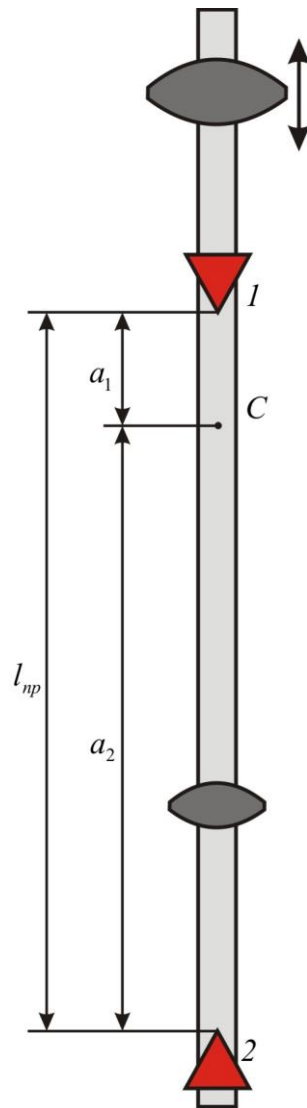


Рис.6.6

Відстані від осей коливань до центра мас позначимо як a_1 та a_2 . Можемо записати вирази для періоду коливань маятника, підвішеного на опорах 1 та 2:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{I_1 / m g a_1} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + m a_1^2}{m g a_1}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{I_2 / m g a_2} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + m a_2^2}{m g a_2}}$$

Виключаємо з двох рівнянь I_C та отримуємо вираз для g :

$$g = \frac{4\pi^2(a_1^2 - a_2^2)}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2}$$

Переміщуючи верхній тягарець можемо змінювати положення центра мас та встановити його таким, при якому періоди коливань перекидного маятника на обох

опорах співпадають. При цьому отримаємо вираз для g , у який входять величини, які легко визначаються з високою точністю:

$$T_1 = T_2 = T \rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}, \text{ де } l = a_1 + a_2$$

Загальні висновки

Розглянуті приклади відносяться до *вільних* коливань без тертя, які відбуваються у системі, що залишена на самоті після того, як була виведена із стану рівноваги. Можна стверджувати, що вільні коливання будь-якого осцилятора при відсутності тертя будуть гармонічними, якщо діюча у ньому сила (чи момент сили) є *квазіупругою*, тобто силою, що направлена до положення рівноваги та залежною від зміщення з цього положення *лінійно*.

Саме квазіупругий характер сили (чи моменту сили) служить і критерієм *малих* коливань.

Крім того, частота та період вільних коливань без тертя залежать тільки від властивостей самого осцилятора на відміну від амплітуди та початкової фази, які визначаються початковими умовами.

6.3 Енергія гармонічного осцилятора

Розглянемо це питання на прикладі матеріальної точки маси m , що коливається під дією квазіупругої сили $F_x = -\chi x$. Вирази для потенціальної та кінетичної енергії частинки мають у даному вигляді:

$$U = \chi x^2 / 2 = (\chi a^2 / 2) \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (6.5)$$

$$K = m\dot{x}^2 / 2 = (ma^2 \omega_0^2 / 2) \sin^2(\omega_0 t + \alpha)$$

З цих співвідношень видно, що значення U та K зсунуті одне від одного по фазі на $\pi/2$: коли потенціальна енергія U є максимальною, кінетична енергія K мінімальна, та навпаки. При цьому повна енергія зберігається:

$$E = U + K = \chi a^2 / 2 = ma^2 \omega_0^2 / 2 \quad (6)$$

Тут ураховано, що $\omega_0^2 = \chi / m$.

Беручи до уваги (6), формули (6.5) можна переписати у вигляді:

$$U = E \cos^2(\omega_0 t + \alpha)$$

$$K = E \sin^2(\omega_0 t + \alpha)$$

Графіки залежностей $U(t)$ та $K(t)$ наведені на рис.6.7. З рисунку бачимо, що у процесі коливань відбувається перехід потенціальної енергії у кінетичну та навпаки. Це наочно ілюструє також рис.6.8.

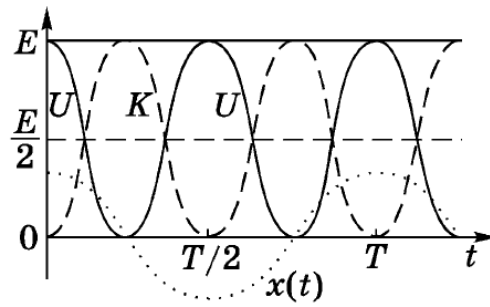


Рис.6.7

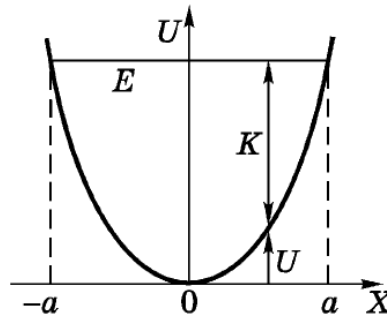


Рис.6.8

Середні (за період коливання) значення потенціальної та кінетичної енергій є однаковими, та кожне з них дорівнює $E/2$:

$$\langle U \rangle = \langle K \rangle = E/2,$$

Оскільки відомо, що середні (за період) значення квадратів синуса та косинуса дорівнюють $1/2$.

Відмітимо наостанок, що згідно 14, енергія коливань осцилятора є пропорційною до квадрата амплітуди. Цей важливий факт неодноразово ураховується при аналізі коливань.

6.4 Енергія та рівняння руху

Рівняння руху коливальної системи можна отримати не тільки з рівнянь динаміки, а і з закону збереження енергії E (іноді це буває значно зручніше). Для цього потрібно скласти вираз для E , диференціювати його по часу та прирівняти похідну до нуля $\frac{dE}{dt} = 0$, оскільки $E = \text{const}$. Це приведе до шуканого рівняння.

Важливо відмітити, що коливальна система буде гармонічним осцилятором лише за умовою пропорційності $U \sim x^2$, тобто коли потенціальна енергія є пропорційною до квадрата зміщення з положення рівноваги. Ця умова, до речі, є також «енергетичним» критерієм малих коливань.

6.5 Додавання гармонічних коливань

Додавання коливань одного напрямку

Векторна діаграма

Рішення ряду питань значно спрощується та стає наочним, якщо зображати коливання графічно за допомогою вектора-амплітуди $\mathbf{a}$, що обертається з кутовою швидкістю ω проти годинникової стрілки. Якщо у момент $t=0$ вектор $\mathbf{a}$ складає з віссю X кут α (рис.6.9), то проекція вектора $\mathbf{a}$ на вісь X змінюється із часом за гармонічним законом $x = a \cos(\omega t + \alpha)$. Такий спосіб представлення коливань, що має назву *векторна діаграма*, зручно використовувати при додаванні коливань одного напрямку.

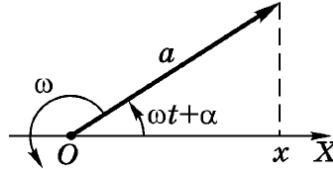


Рис.6.9

Додавання коливань

Розглянемо два випадку, коли частоти двох коливань є однаковими чи мало відрізняються одна від одної.

1. Випадок, коли $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

У цьому випадку результуюче зміщення дорівнює:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

Кожне з коливань, що додаються, можна представити за допомогою векторів $\mathbf{a}_1$ та $\mathbf{a}_2$, сума проекцій яких на вісь X дорівнює проекції суми векторів $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$ (рис.6.10). Оскільки вектори $\mathbf{a}_1$ та $\mathbf{a}_2$ обертаються з однаковою кутовою швидкістю ω , з цією ж швидкістю обертається і вектор $\mathbf{a}$. Значить результуюче коливання є також гармонічним та має вигляд:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha),$$

де a та α знаходимо з рис.6.10:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \delta, \quad (6.7)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}$$

Різниця фаз δ у цьому випадку не залежить від часу та дорівнює

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1$$

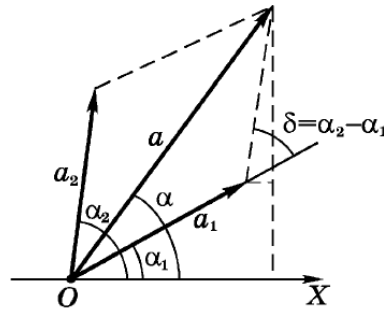


Рис.6.10

З рис.6.10 та формули (6.7) видно, що амплітуда a результуючого коливання суттєво залежить від різниці фаз δ , досягаючи максимуму при складанні синфазних коливань та мінімуму при складанні протифазних коливань. Через наявність останнього доданку у (6.7) енергія результуючого коливання не може бути представленою як сума енергій коливань, що складаються, тобто $E \neq E_1 + E_2$ (за виключенням випадку, коли $\delta = \pi/2$).

2. Випадок, коли $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ та ω_2 .

Тут також результуюче коливання записується формулою (6.7) та справедливим є рис.6.10. Але оскільки тепер вектори $\mathbf{a}_1$ та $\mathbf{a}_2$ обертаються з кутовими швидкостями, які дещо відрізняються, модуль результуючого вектора $\mathbf{a}$ буде повільно змінюватися від $a_{\max}$ до $a_{\min}$, причому сам вектор $\mathbf{a}$ обертається з кутовою швидкістю, близькою до ω_1 та ω_2 . Результуюче коливання вже не є гармонічним. Проте його все ж можна розглядати як гармонічне, але з амплітудою, яка повільно та періодично змінюється. Такі коливання називають *биттями*. Вони показані на рис.6.11 для випадку $a_1 = a_2$.

Амплітуда коливань описується тією ж формулою (6.7), але у даному випадку різниця фаз δ залежить від часу:

$$\delta = (\alpha_2 + \omega_2 t) - (\alpha_1 + \omega_1 t) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\omega_2 - \omega_1)t$$

Проміжок часу між сусідніми моментами, коли амплітуда a є максимальною, називають періодом биття τ_δ (рис.11). За цей час різниця фаз δ змінюється на 2π (це слідує з векторної діаграми). Тобто, $|\omega_1 - \omega_2|\tau_\delta = 2\pi$. Звідки період та частота биття дорівнюють:

$$\tau_\delta = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{1}{|v_2 - v_1|}, \quad v_\delta = \frac{1}{\tau_\delta} = |v_2 - v_1|$$

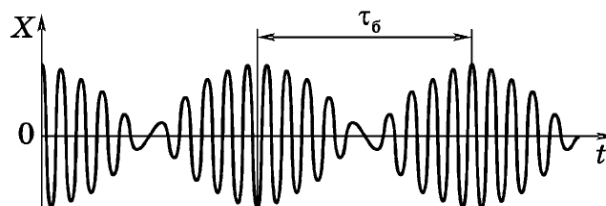


Рис.6.11

Додавання взаємно перпендикулярних коливань

З початку розглянемо випадок, коли частоти коливань, які додаються, є однаковими. Нехай координати частинки змінюються за законом

$$x = a \cos \omega t$$

$$y = b \cos(\omega t + \delta)$$

Можна показати, що траєкторією частинки при цьому є еліпс (рис.6.12), вигляд якого визначається відношенням амплітуд a та b , а також різницею фаз δ .

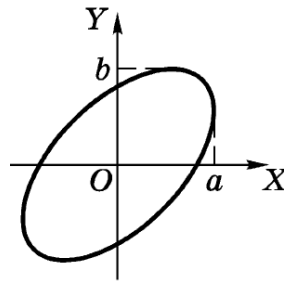


Рис.6.12

Деякі частинні випадки:

а) $\delta = 0$, тоді $y = \frac{b}{a}x$, тобто частинка рухається по прямій у першому та третьому квадранті (рис.6.13,а);

б) $\delta = \pi$, тоді $y = -\frac{b}{a}x$ та частинка рухається також по прямій, але у другому та четвертому квадранті (рис.6.13,б);

в) $\delta = \frac{\pi}{2}$. У цьому випадку $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, тобто частинка рухається по еліпсу, півосі якого a та b співпадають з осями координат. При $a = b$ еліпс перетворюється у коло. Так як коливання уздовж осі Y відбуваються з випередженням по фазі на $\delta = \frac{\pi}{2}$ відносно коливань уздовж осі X , то спочатку y і лише згодом x досягають максимальних значень. Це означає, що рух частинки буде відбуватися за годинниковою стрілкою (рис.6.13,в);

г) $\delta = \frac{3\pi}{2}$. Це теж саме, що і $\delta = -\frac{\pi}{2}$, оскільки зміна фази на 2π є несуттєвою (рис. 6.13,г).

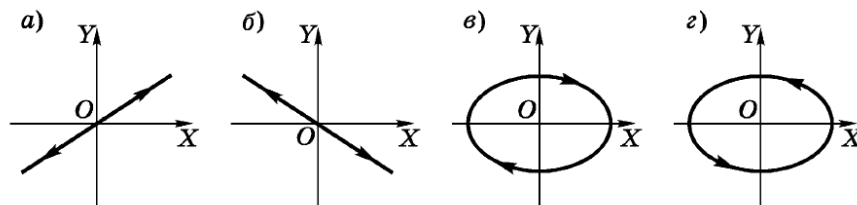


Рис.6.13

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань не однакові та відносяться як цілі числа, то траєкторії результуючого руху мають більш складні форми. Їх називають

фігурами Ліссажу. Одна з цих фігур показана на рис.6.14, вона відповідає відношенню частот $\omega_y : \omega_x = 3:2$.

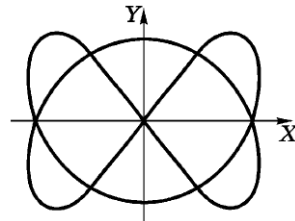


Рис.6.14

Та наостанок: при додаванні взаємно перпендикулярних коливань вираз для повної енергії можна записати у вигляді:

$$E = \left(\frac{\chi_1 x^2}{2} + \frac{\chi_2 y^2}{2} \right) + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = E_x + E_y,$$

Тобто повна енергія складається з енергій кожного коливання (на відміну від додавання коливань одного напрямку). Згідно (6.7). Ця енергія дорівнює

$$E = \frac{m}{2} (a^2 \omega_x^2 + b^2 \omega_y^2).$$

6.6 Загасаючі коливання

Рівняння загасаючих коливань

У будь-якій реальній коливальній системі є сили спротиву (тертя), дія яких приводить до зменшення амплітуди та енергії коливань. Такі вільні коливання називають *загасаючими*.

Будемо виходити з основного рівняння динаміки, вважаючи, що на частинку маси m діє окрім квазіупругої сили $(-\chi x)$ сила спротиву, що є пропорційною до швидкості частинки:

$$F_x = -r\dot{x}, \text{ де } r - \text{коефіцієнт спротиву (величина розмірна).}$$

Тоді рівняння руху буде мати вигляд:

$$m\ddot{x} = -\chi x - r\dot{x}, \text{ чи}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.8)$$

$$\text{де } 2\beta = r/m, \quad \omega_0^2 = \chi/m.$$

Відмітимо, що ω_0 – це частота вільних коливань без тертя.

Частоту ω_0 називають *власною частотою осцилятора*, а β – *коефіцієнтом загасання*.

Рівняння (6.8) при умові $\beta < \omega_0$ описує загасаючі коливання. Його рішення має вигляд:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha), \quad (6.9)$$

де a_0 та α – сталі, що визначаються початковими умовами $x(0) = x_0$ та $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, ω' – частота загасаючих коливань:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Графік функції (6.9) показаний на рис.6.15 для випадку $x_0 > 0$ та $\dot{x} > 0$. Бачимо, що ця функція не є періодичною. Проте величину $T = 2\pi/\omega'$ прийнято називати *періодом загасаючих коливань*:

$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Множник $a = a_0 e^{-\beta t}$ перед косинусом у (6.9) називають амплітудою загасаючих коливань (пунктир на рис.6.15).

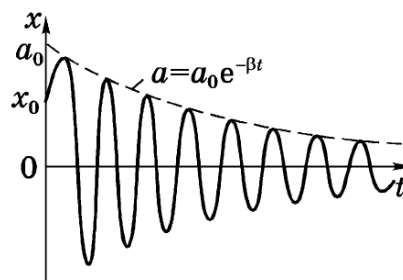


Рис.6.15

Енергія загасаючих коливань

Ця енергія складається з потенціальної та кінетичної: $E = \chi x^2 / 2 + m \dot{x}^2 / 2$. Після підстановки сюди виразів $x(t)$ та $\dot{x}(t)$, що відповідають загасаючим коливанням (6.9), отримаємо залежність $E(t)$, яка графічно показана на рис.16. Зменшення енергії коливань обумовлено роботою сили спротиву. Потужність цієї сили дорівнює $-r\dot{x} \cdot \dot{x} = -r\dot{x}^2$, тоді

$$dE / dt = -r\dot{x}^2.$$

Таким чином, $dE / dt < 0$, крім тих моментів, коли $\dot{x} = 0$.

При малому загасанні ($\beta \ll \omega_0$) залежність $E(t)$ стає практично експоненціальною:

$$E = E_0 e^{-2\beta t}$$

Звідки зменшення енергії у одиницю часу

$$-dE / dt = 2\beta E.$$

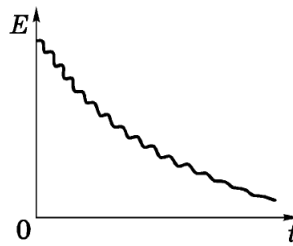


Рис.6.16

Характеристики загасання

Крім коефіцієнта β загасання характеризують і іншими величинами:

1. *Час релаксації* τ – це час, за який амплітуда коливань зменшиться у e разів. З виразу $a = a_0 e^{-\beta t}$ бачимо, що

$$\tau = 1/\beta$$

2. *Логарифмічний декремент загасання*. Його визначають як

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T,$$

де T – період загасаючих коливань.
З попередніх двох формул слідує, що

$$\lambda = 1/N_e,$$

де N_e – число коливань за час релаксації τ .

При малому затуханні ($\beta \ll \omega_0$) λ характеризує відносне зменшення амплітуди коливань за період. Це слідує з виразу для λ :

$$\lambda = \ln \frac{a + \delta a}{a} = \ln \left(1 + \frac{\delta a}{a} \right) \approx \frac{\delta a}{a}.$$

3. *Добротність осцилятора*. За визначенням

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e$$

Наостанок відмітимо, що при достатньо великому загасанні ($\beta \gg \omega_0$) система здійснює *аперіодичний* рух: при виведенні системи з положення рівноваги, вона вертається у це положення, не здійснюючи коливань.

6.7 Вимушені коливання

Рівняння вимушених коливань

Вільні коливання реальної коливальної системи є, як ми виявили, загасаючими. Щоб збудити у такій системі незагасаючі коливання, необхідно компенсувати втрати енергії,

що обумовлені силами спротиву (тертя). Це можна здійснити діючи на систему змінною зовнішньою силою F , що змінюється – у найпростішому та найбільш практично важливому випадку – за гармонічним законом $F_x = F_m \cos \omega t$. Виникаючі при цьому коливання називають *вимушеними*.

Тепер на частинку, що здійснює коливання, будуть діяти одночасно три сили: квазіупруга ($-\chi x$), сила спротиву ($-r\dot{x}$) та зовнішня, змушуюча (F_x). Згідно основному рівнянню динаміки:

$$m\ddot{x} = -\chi x - r\dot{x} + F_m \cos \omega t,$$

чи у більш зручному вигляді:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t, \quad (6.10)$$

$$\text{де } 2\beta = r/m, \omega_0^2 = \chi/m, f_m = F_m/m$$

Рішення рівняння (6.10), як доводиться у математиці, представляє собою суму загального рішення однорідного рівняння (коли права частина дорівнює нулю) та частинного рішення неоднорідного:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha) + a \cos(\omega t - \varphi).$$

Нас буде цікавити тільки частинне рішення, що відповідає усталеним коливанням. Загальне рішення однорідного рівняння описує загасаючі коливання, які згодом практично зникають.

Таким образом, при проходженні певного проміжку часу (з моменту початку дії змушуючої сили) в системі встановлюються гармонічні коливання з частотою змушуючої сили, що відстають по фазі від останньої на кут φ :

$$x = a \cos(\omega t - \varphi). \quad (6.11)$$

Наша задача – визначити сталі a та φ . Для цього диференціюємо (6.11) двічі по часу:

$$\dot{x} = -a\omega \sin(\omega t - \varphi) = a\omega \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) = a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

Підставляємо вирази для $x, \dot{x}, \ddot{x}$ у вихідне рівняння (6.11). Сума трьох гармонічних функцій у лівій частині повинна бути рівною до функції $f_m \cos \omega t$. Ураховуючи фазові зсуви проміж $x, \dot{x}, \ddot{x}$, представимо цю рівність за допомогою векторної діаграми (рис.6.17, для випадку $\omega < \omega_0$). У дужках на цій діаграмі вказані «походження» (чи відповідність) векторів, модулі яких мають розмірність прискорення. З цієї діаграми за теоремою Піфагора слідує, що

$$a^2(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_m^2, \text{ звідки}$$

$$a = f_m / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}. \quad (6.12)$$

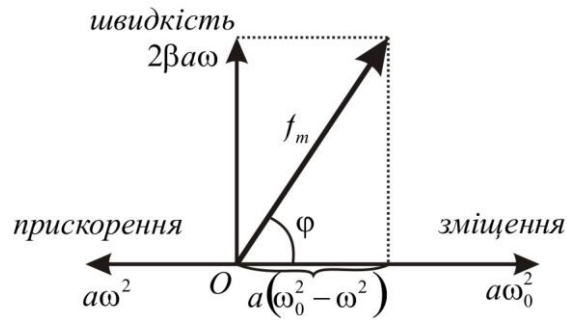


Рис.6.17

З діаграми бачимо, що відставання зміщення по фазі на кут φ від змушуючої сили визначається як:

$$\operatorname{tg} \varphi = 2\beta \omega / (\omega_0^2 - \omega^2) \quad (6.13)$$

Формули (6.12) та (6.13) показують, що амплітуда a коливань та відставання зміщення по фазі на кут φ від змушуючої сили визначається властивостями самого осцилятора (ω_0, β) та змушуючої сили (f_m, ω) , але не початковими умовами.

Резонанс

На рис.6.18 наведені графіки залежності амплітуди вимушених коливань від частоти змушуючої сили $a(\omega)$ для трьох значень коефіцієнтів загасання. Бачимо, що $a(\omega)$ має максимум при частоті, яку можна знайти з умови $da/d\omega = 0$ (достатньо знайти екстремум підкореного виразу). Цю частоту називають *резонансною*:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (6.14)$$

а існування максимуму амплітуди a – явищем *резонансу*. Відповідно наведені на рис.6.18 графіки прийнято називати *резонансними кривими*.

Вираз для амплітуди при резонансі отримаємо підставивши (6.14) у (6.12):

$$a_{\text{макс}} = \frac{f_m}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Чим меншим є загасання у системи, тим більше виражений резонанс. Явище резонансу грає величезну роль у фізиці та техніці. Його використовують, якщо потрібно підсилити коливання, та, навпаки, всіляко уникають, якщо резонанс може привести до небажаного підсилення коливань.

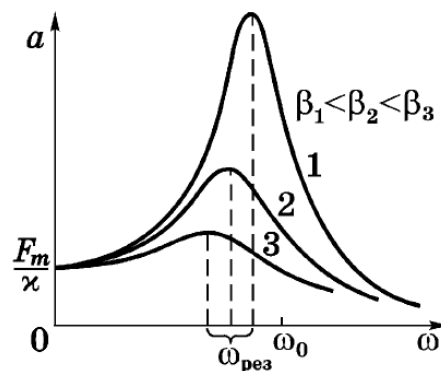


Рис.6.18

Залежність фазового зсуву кута φ від частоти ω показана на рис.6.19 (для двох коефіцієнтів загасання). При слабкому загасанні $\omega_{рез} \approx \omega_0$, та значення кута φ при резонансі практично дорівнює $\pi/2$ (див. рис.6.17).

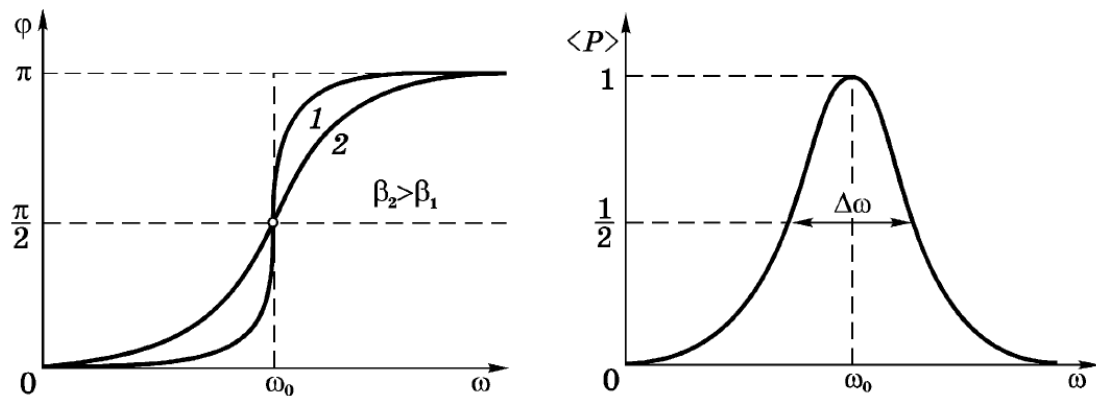


Рис.6.19, 6.20

На рис.6.20 наведений графік залежності середньої (за період) потужності змущуючої сили від її частоти $\langle P(\omega) \rangle$. Бачимо, що $\langle P \rangle$ досягає максимуму при $\omega = \omega_0$ незалежно від коефіцієнта загасання β . Важливим параметром резонансної кривої $\langle P(\omega) \rangle$, що характеризує «гострість» резонансу, є її ширина $\Delta\omega$ на половині «висоти». Можна показати, що при малому затуханні ($\beta \ll \omega_0$) «гострість» резонансу, тобто відношення $\omega_0/\Delta\omega$, дорівнює добротності осцилятора:

$$\omega_0/\Delta\omega = Q$$

Енергія вимушених коливань

Цікаво прослідити, як залежить енергія осцилятора, що здійснює усталені коливання, від часу. Так як $E = U + K$:

$$E = \chi \dot{x}^2 / 2 + m \dot{x}^2 / 2 = m a^2 \{ \omega_0^2 \cos^2(\omega t - \varphi) + \omega^2 \sin^2(\omega t - \varphi) \} / 2,$$

де ураховано, що $\chi = m \omega_0^2$. Графік залежності $E(t)$ для випадку $\omega > \omega_0$ показаний на рис.6.21. Коливання енергії E будуть тим меншими, чим ближче частота ω до ω_0 , та при $\omega = \omega_0$ енергія E не буде залежати від часу t : $E_0 = m a^2 \omega_0^2 / 2 = \text{const}$.

В усталених коливаннях при $\omega \neq \omega_0$ робота змушуючої сили за період буде компенсувати втрати енергії у системі за рахунок роботи сил спротиву. Потужність же змушуючої сили у кожний момент буде дорівнювати потужності сил спротиву тільки у випадку $\omega = \omega_0$. У іншому випадку ці потужності будуть рівні по модулю тільки у середньому за період.

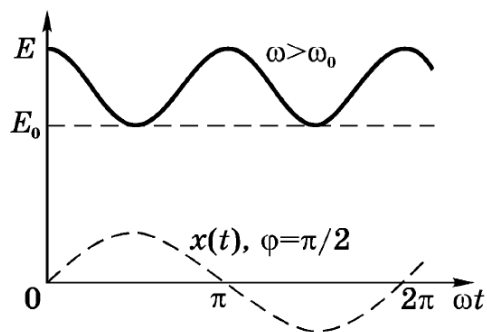


Рис.6.21

7. Спеціальна теорія відносності (СТВ)

СТВ була запропонована Ейнштейном у 1905 році. Є ще загальна теорія відносності Ейнштейна, яка з'явилася у 1915 році. Ця теорія є дуже складною і охоплює тяжіння, неінерціальні системи відліку, тощо. Ми розглянемо у дуже спрощеному вигляді СТВ.

Принцип відносності був уперше запропонований Галілеєм та розвинутий Ньютоном. У формулюванні Галілея він мав приблизно наступний вигляд:

«Відносні рухи тіл у якомусь просторі не залежать від того, знаходиться цей простір у спокої, чи рухається з будь-якою швидкістю, без прискорення».

Тобто закони динаміки Ньютона не залежать від вибору інерціальної системи відліку. З'ясуємо, чи дійсно це так. Для спрощення розглянемо частинний випадок взаємного руху систем відліку. Цей частинний випадок ми також будемо розглядати при подальшому вивченні усіх інших питань СТВ (рис.7.1). Система K' рухається відносно нерухомої системи K зі сталою швидкістю u , що має напрям осі x . У час $t = 0$ системи координат співпадають. Як бачимо з рисунку координати якоїсь точки P у просторі у системах координат K' та K пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{aligned}x' &= x - ut; \\y' &= y; \\z' &= z; \\t' &= t.\end{aligned}$$

Ці закони перетворень координат точки у рухомій системі відліку відомі під назвою перетворення Галілея. Візьмемо похідну по часу від обох частин першого рівняння. Отримаємо, що швидкість руху тіла залежить від вибору інерціальної системи відліку:

$v'_x = v_x - u$. А прискорення тіла однакове у всіх інерціальних системах відліку: $a' = a$. Це означає, що закони динаміки Ньютона не змінюють форму у рухомій системі відліку (інваріантні до будь-якої інерціальної системи відліку).

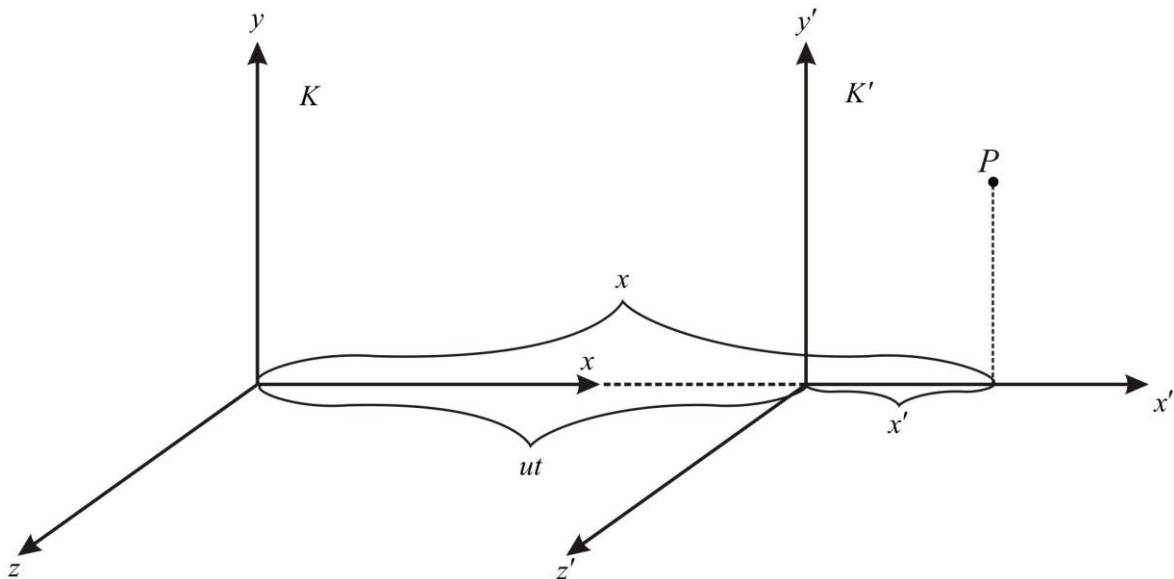


Рис.7.1. Перетворення координат точки у рухомій системі відліку.

Є і інші явища, крім механічних. Наприклад, у другій половині 19 сторіччя Максвелл узагальнив чисельні дослідження з електромагнетизму та оптики і створив теорію, що описує усі ці явища. Ця теорія базується на чотирьох диференціальних рівняннях, що відомі як рівняння Максвелла. Це рідкі по красоті рівняння, що створюють струнку теорію

електромагнітного світу. Але ці рівняння не є інваріантними до перетворень Галілея, тобто вони змінюють вигляд у різних інерціальних системах відліку. Це означає, що при проведенні певних експериментів можна довідатися про швидкість руху системи відліку відносно нерухомого простору.

Зокрема розглянемо поширення світла у просторі. Згідно теорії Максвелла, світло це електромагнітна хвиля, що поширюється у просторі з певною швидкістю c (константа у рівняннях Максвелла). При цьому швидкість поширення хвилі не залежить від руху джерела хвилі (заряду, який рухається з прискоренням). Швидкість тіла є різною у різних системах відліку. Наприклад, два автомобіля, що рухаються зі швидкостями одного напрямку v_1 та v_2 . Якщо вони рухаються назустріч, то їх взаємна швидкість дорівнює $(v_1 + v_2)$, якщо у один бік – $(v_1 - v_2)$. Так само повинно бути зі світлом. Якщо спостерігач рухається назустріч світловому променю зі швидкістю u , то швидкість світла для нього становить $(c + u)$, якщо спостерігач рухається в один бік із променем – $(c - u)$. Швидкість світла дорівнює $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Помітити u на фоні c важко, але можливо. Було багато спроб це зробити і таким чином визначити швидкість u , з якою спостерігач рухається відносно нерухомого простору.

Найбільш відомий експеримент, надзвичайний та видатний для свого часу – дослід Майкельсона-Морлі (1887 рік). У цьому досліді намагалися визначити швидкість, з якою рухається Земля по орбіті навколо Сонця. Астрономи визначають, що ця швидкість (відносно Сонця) приблизно дорівнює $3 \cdot 10^4$ м/с. Швидкість світла перевищує цю швидкість у 10000 разів, різниця дуже велика. Але метод Майкельсона-Морлі, заснований на явищі інтерференції світла, дозволяв виміряти і у 100 разів меншу швидкість.

Результат цього та багатьох інших більш сучасних та точних експериментів був категорично негативним. Швидкість світла у всіх випадках була однаковою!? Це дуже дивно. Щось одне з двох не так. Неправильні чи перетворення Галілея, чи рівняння Максвелла. Спочатку кинулися перевіряти рівняння Максвелла. Але помилки не знайшли. А що може бути неправильним у перетвореннях Галілея? Вони здаються простими та очевидними.

7.1 Перетворення Лоренца

Тим часом Лоренц емпірично підібрав вигляд перетворень координат у рухомій системі відліку, при якому закони Максвелла є інваріантними до цих перетворень. Ці перетворення відомі як *перетворення Лоренца*:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\end{aligned}$$

Зокрема перетворення Лоренца забезпечують незмінність швидкості поширення світла у рухомій системі відліку.

Але закони динаміки Ньютона не є інваріантними до перетворень Лоренца. Ейнштейн перший зрозумів, що потрібно змінити закони динаміки Ньютона, щоб вони теж були інваріантними до перетворень Лоренца. З'ясувалося, що для цього достатньо ввести залежність маси тіла від швидкості:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

При цьому виникає повна гармонія між законами динаміки Ньютона та рівняннями Максвелла. Зміна маси тіла стає помітною лише при дуже великих швидкостях, які не зустрічаються на побутовому рівні.

Цікаво зрозуміти, що означають перетворення Лоренца. Як пояснити з логічної та експериментальної точки зору, що прості та очевидні перетворення Галілея потрібно замінити на більш складні та дивні перетворення Лоренца.

Особливо дивним видається перетворення часу у рухомій системі відліку. Що відбувається з годинником у рухомій системі відліку? Щоб відчути це виберемо годинник «найпростішої» конструкції. Два дзеркала, між якими бігає світловий промінь. Коли промінь торкається нижнього дзеркала, годинник відраховує черговий проміжок часу (рис.7.2). Годинник розмістимо на космічному кораблі, який рухається зі швидкістю u у горизонтальному напрямі. Космонавт бачить, що годинник нормально працює і відраховує проміжки часу: $\tau' = 2L/c$. Нерухомий спостерігач побачить іншу картину. Поки промінь дістанеться верхнього дзеркала, воно зміститься по горизонталі на відстань $u \cdot \tau/2$. На зворотному шляху – так само. В результаті отримаємо співвідношення між проміжками часу τ' та τ :

$$\tau' = 2L/c;$$

$$c^2\tau^2 = 4L^2 + u^2\tau^2;$$

$$\tau = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad \tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

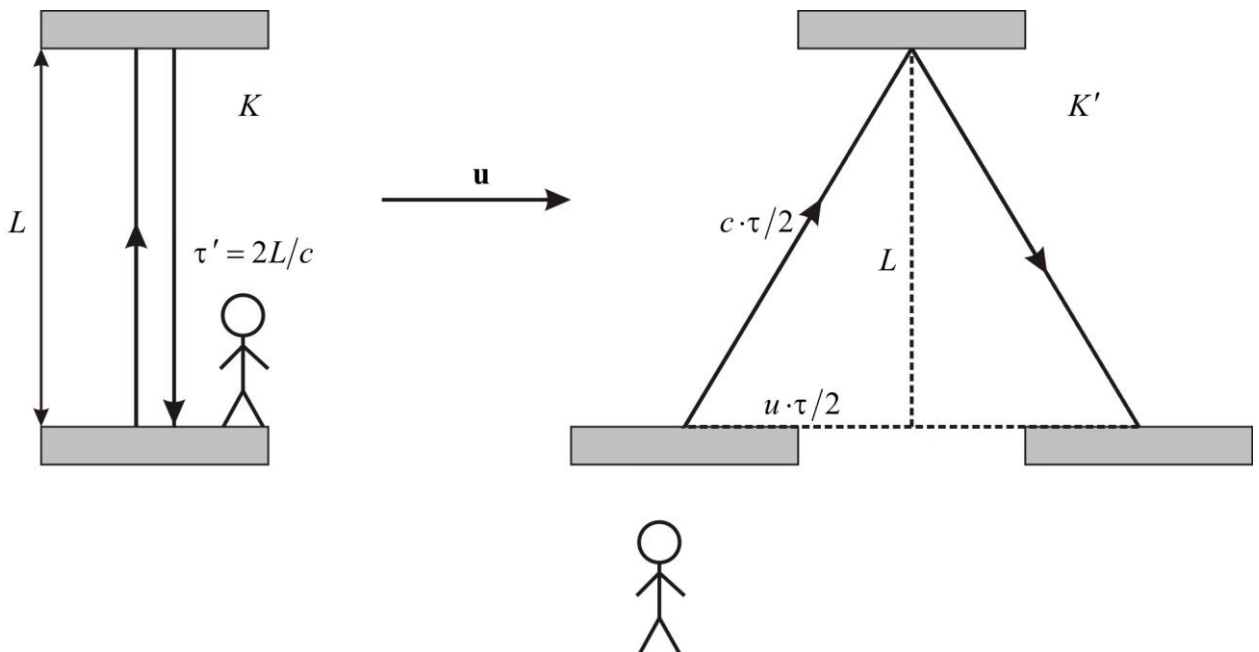


Рис.7.2 Робота «світлового» годинника у рухомій системі відліку з точки зору рухомого та нерухомого спостерігача.

Виходить проміжок часу τ є більшим за проміжок часу τ' . Годинник у нерухомій системі відліку працює повільніше, що збігається з перетвореннями Лоренца.

Нерухомий простір мав би проявити себе у досліді Майкельсона-Морлі та аналогічних. Але цього не сталося. Нерухомий простір, як фізичний об'єкт, взагалі ніяк не себе не виявив у жодному експерименті. Його просто не існує. Все відносно та залежить від точки зору.

Наприклад, ми вважаємо що система відліку K є нерухомою, а система K' рухається зі швидкістю $\mathbf{u}$. Але спостерігач у системі K' має право вважати нерухомим себе, а система K при цьому рухається зі швидкістю $(-\mathbf{u})$. Тоді перетворення Лоренца повинні набути наступний вигляд:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & x &= \frac{x' + ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & t &= \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned} \rightarrow$$

І, дійсно, ці рівняння є еквівалентними.

Отримаємо зв'язок між проміжками часу у рухомій та нерухомій системі відліку:

$$t_1 = \frac{t'_1 + ux'_1/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + ux'_2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Таке ж співвідношення ми отримали для «найпростішого» годинника.

А що конкретно відбувається з іншими годинниками і процесами у рухомій системі відліку? Нас це не повинно цікавити. Якщо б у інших пристроях чи системах час змінювався по іншому, то по різниці часу нашого годинника та цих пристроїв ми б могли визначити швидкість руху системи відліку відносно нерухомого простору, а це неможливо.

Якщо однаково змінюється час у всіх процесах, то можна казати про зміну часу взагалі.

Розглянемо деякі експериментальні підтвердження зміни часу у рухомій системі відліку.

Наприклад, мю-мезони утворюються у верхніх шарах атмосфери на висоті більше 10 км за рахунок взаємодії космічного випромінювання з атмосферними газами. Час життя цих нестабільних частинок складає у середньому $2 \cdot 10^{-6}$ с. За цей час, навіть рухаючись зі швидкістю світла, частинки можуть подолати відстань $s = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 600$ м. Але ці частинки реєструють на поверхні Землі. Це обумовлення збільшенням часу їх життя у рухомій системі відліку.

З перетворенням часу пов'язаний цікавий ефект: *відносність одночасності віддалених подій*. Тобто, у одній системі відліку події у різних точках простору відбуваються одночасно, а у інших – ні.

Дійсно, нехай у рухомій системі відліку події відбулися одночасно у час t' , але у різних точках простору (x'_1 та x'_2):

$$t_1 = \frac{t' + ux'_1/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad t_2 = \frac{t' + ux'_2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{u(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Виходить у нерухомій системі відліку події відбулися не одночасно. Для того, щоб наочно відчуту причину цього явища розглянемо приклад. Космонавт одночасно посилає промені світла у обидві боки у горизонтальному напрямі. Ці промені запускають годинники. З точки зору космонавта годинники запускаються одночасно, а з точки зору нерухомого спостерігача раніше запускається лівий, бо лівий промінь та годинник рухаються назустріч, а правий – навпаки.

Розміри тіла, поздовжні до його руху, зменшуються для нерухомого спостерігача:

$$x'_1 = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad \Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

Парадокс близнюків

Один з братів близнюків сідає у космічний корабель та здійснює далеку подорож зі швидкістю, що наближається до швидкості світла. Коли він повертається, його брат повинен бути набагато старішим, бо відносно нього час на Землі йде скоріше. Але з точки зору брата на Землі старішим повинен бути космонавт. При сталій швидкості космічного корабля час на кораблі та на Землі змінюється симетрично. Тобто у цей період (сталі швидкості корабля) брати будуть старіти однаково. Але повної симетрії між братами не має. Космонавт буде рухатися з прискоренням при наборі швидкості та уповільненні руху корабля. Складні розрахунки з використанням загальної теорії відносності свідчать що космонавт повернеться молодшим за брата на Землі.

7.2 Перетворення швидкості у рухомій системі відліку

Перетворення поздовжньої компоненти швидкості

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & dx &= \frac{dx' + udt}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ t &= \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \rightarrow & dt &= \frac{dt' + udx'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + udt'}{dt' + udx'/c^2} = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}. \end{aligned}$$

Приклади.

На космічному кораблі уздовж його руху рухається тіло зі швидкістю $c/2$. Швидкість корабля $u = c/2$. Швидкість тіла відносно нерухомого спостерігача, без урахування теорії відносності, повинна дорівнювати c .

А згідно останньому виразу для перетворення поздовжньої компоненти швидкості:

$$v'_x = c/2; \quad u = c/2; \quad v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{c/2 + c/2}{1 + \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} / c^2} = \frac{4}{5} c.$$

Теж саме, але швидкість тіла у кораблі $v'_x = c$ (поширюється світло), швидкість корабля довільна (u).

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{c + u}{1 + \frac{c \cdot u}{c^2}} = c.$$

Тобто швидкість світла не залежить від вибору системи відліку (перетворення Лоренца створювалися саме для забезпечення цієї умови).

Перетворення поперечної компоненти швидкості

$$\begin{aligned} dy &= dy', \\ dt &= \frac{dt' + udx'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1-u^2/c^2}}{dt' + u dx'/c^2} = \frac{v'_y \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + u v'_x/c^2}.$$

У частинному випадку наявності тільки поперечної компоненти швидкості v'_y ($v'_x = 0$):

$$v_y = v'_y \sqrt{1-u^2/c^2}$$

Для наочності згадаємо про світлові часи (рис.3). Поперечна компонента швидкості світла c_y з точки зору нерухомого спостерігача пов'язана з поперечною компонентою швидкості світла з точки зору рухомого спостерігача $c'_y = c$ таким же співвідношенням. Це відповідає принципу відносності. Дійсно, нехай частинка бігає як промінь у часах і теж відбивається від дзеркал. Нехай швидкість частинки $v'_y = c/n$. Частинка відбивається від нижнього дзеркала при кожному n -тому відбиванні світла від цього дзеркала. Згідно принципу відносності, цей факт зберігається у будь якій системі відліку. Це означає, що співвідношення, яке визначає перетворення поперечної компоненти швидкості світла, можна поширити і на швидкість частинки.

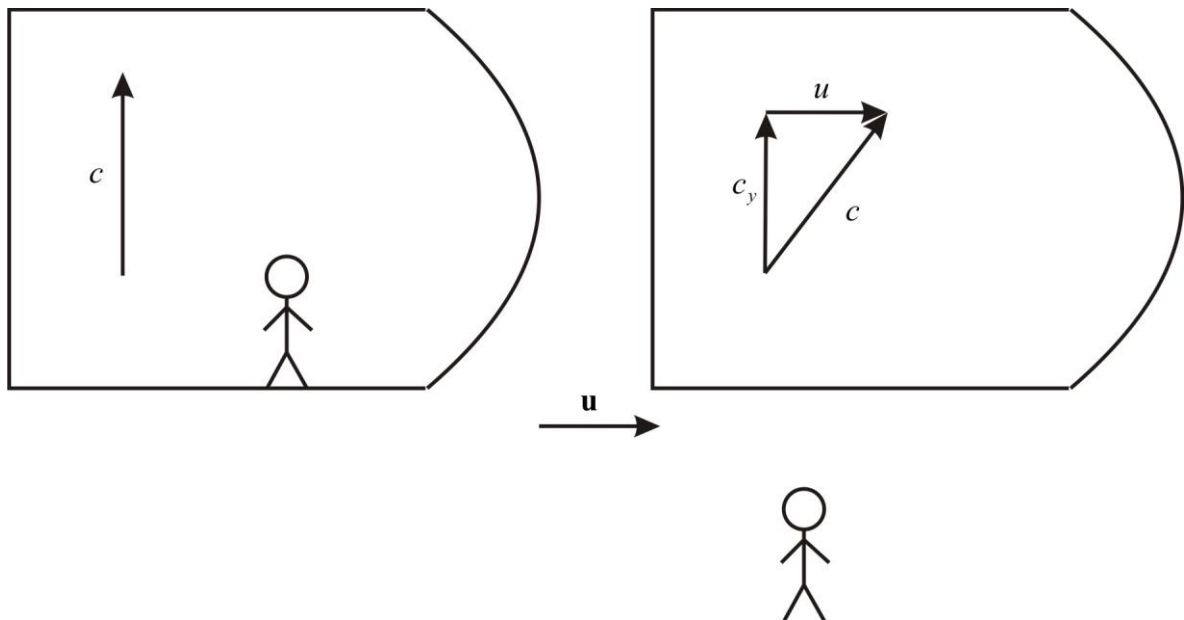


Рис.7.3 Перетворення компоненти швидкості поперечної до напрямку руху системи відліку.

7.3 Динаміка теорії відносності

У теорії відносності виходить, що поперечна до швидкості руху системи відліку компонента імпульсу тіла зберігається у рухомій системі відліку. Це твердження є еквівалентним виразу для маси m тіла (має назву релятивістська маса), який визначає її залежність від швидкості v руху тіла:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

де m_0 – маса тіла при нульовій швидкості (маса спокою).

Розглянемо це детальніше. Припустимо, що на космічному кораблі, що рухається у горизонтальному напрямі зі швидкістю u , вертикально вверх рухається тіло маси m_0 зі

швидкістю v'_y . Поперечна компонента імпульсу тіла з точки зору космонавта дорівнює $m_0 v'_y$ (рис.7.4). Припустимо, що швидкість u руху космічного корабля набагато більша ніж v'_y . З точки зору нерухомого спостерігача поперечна компонента імпульсу дорівнює $m_u v_y = m_u v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2}$ (ми використали отриманий раніше закон перетворення поперечної компоненти швидкості $v_y = v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2}$). У нашому випадку швидкість u практично дорівнює повній швидкості v руху тіла. Прирівнявши поперечні компоненти імпульсу у рухомій та нерухомій системі відліку та замінивши u на v , отримаємо вираз для релятивістської маси:

$$m_0 v'_y = m_u v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2}; m_u = m.$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

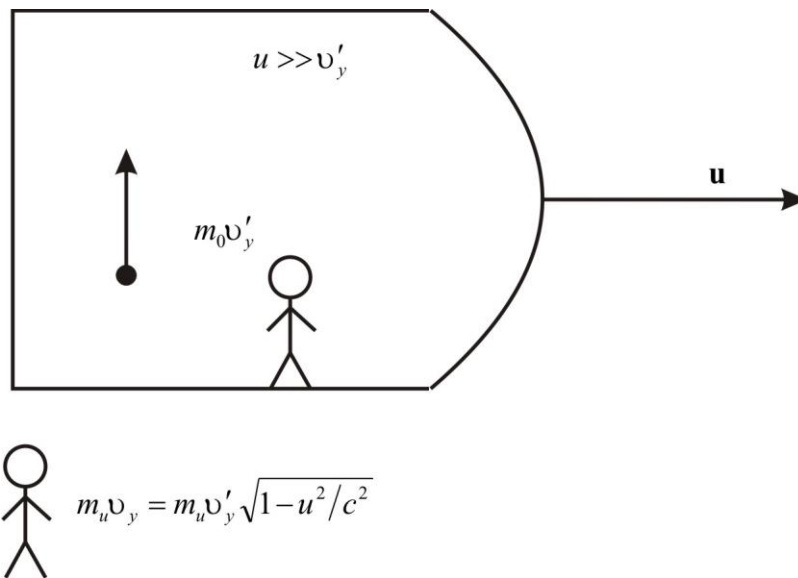


Рис.7.4 Поперечний до руху системи відліку імпульс тіла з точки зору рухомого та нерухомого спостерігача.

Релятивістський імпульс:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Закон динаміки має класичний вигляд:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \text{ де } \mathbf{p} - \text{релятивістський імпульс.}$$

Спробуємо отримати вираз для кінетичної енергії тим же способом, як і у класичній фізиці:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{F}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = dT$$

$$dT = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{v} \cdot d \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{m_0 d\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_0 \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \right\} =$$

$$= \frac{m_0 d(v^2/2)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2 d(v^2/c^2)}{2(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

(використали формулу з диференціального числення $d(f \cdot \phi) = df \cdot \phi + d\phi \cdot f$)

Тобто, приріст кінетичної енергії дорівнює приросту функції mc^2 :

$$dT = d(mc^2).$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$T = mc^2 + \text{const}.$$

З початкової умови $T = 0, m = m_0$ отримуємо значення константи інтегрування:

$$\text{const} = -m_0 c^2.$$

Остаточно отримуємо вираз для кінетичної енергії:

$$T = mc^2 - m_0 c^2.$$

У інтерпретації Ейнштейна останній вираз означає, що кінетична енергія є різницею повної енергії тіла mc^2 та енергії спокою $m_0 c^2$.

Цікавий наслідок

Як приклад розглянемо зіткнення частинок (рис.7.5).

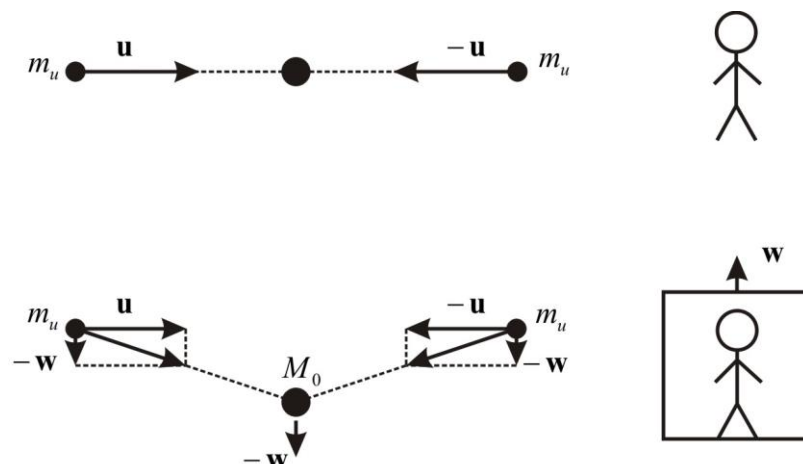


Рис.7.5. Зіткнення частинок з точки зору рухомого та нерухомого спостерігача.

Частинки мають швидкості $\mathbf{u}$ та $-\mathbf{u}$, направлені точно назустріч одна одній. Вони мають однакові релятивістські маси m_u . Після зіткнення вони злипаються у одну частинку, яка, з точки зору нерухомого спостерігача, не рухається та має масу, що дорівнює її масі спокою. Позначимо масу загальної частинки M_0 .

Величину M_0 можна знайти із закону збереження імпульсу. Розглянемо це зіткнення з точки зору рухомого спостерігача, що їде на ліфті вертикально уверх із швидкістю $\mathbf{w}$. Припустимо, що $u \gg w$. А швидкість w будемо вважати практично нульовою, з точки зору впливу на масу частинок. Тоді релятивістська маса кожної частинки до зіткнення практично буде відповідати швидкості u (m_u). Закон збереження вертикальної компоненти імпульсу обох частинок, з точки зору рухомого спостерігача, буде мати вигляд:

$$2m_u w = M_0 w.$$

Тобто $M_0 = 2m_u$. Виходить, що маса спокою загальної частинки буде більшою за подвоєну масу спокою окремих частинок. Їх кінетична енергія перетворилася на масу. Виявилось, що перетворення енергії на масу стосується усіх видів енергії, наприклад, потенціальної енергії взаємодії частинок у загальному тілі.

Чи потрібно розділяти у загальному тілі енергію спокою складових частин, їх потенціальну енергію взаємодії, кінетичну енергію частинок, яку вони мали перед об'єднанням у загальне тіло, тощо? Це дуже незручно, а у більшості випадків є неможливим. Тому у Ейнштейна виникла ідея використовувати загальну енергію $E = mc^2$.

Можливим є також зворотний перехід маси у енергію. Наприклад, при анігіляції частинки та античастинки їх маса спокою зникає, перетворюючись на енергію випромінювання.

Розглянемо ще один приклад. Космічний корабель увімкнув двигуни, які створюють силу тяги $\mathbf{F}$. Згідно другому закону динаміки, швидкість зміни релятивістського імпульсу корабля дорівнює силі:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Спочатку робота сили $\mathbf{F}$, як у класичному випадку, перетворюється на кінетичну енергію і швидкість v корабля зростає. При наближенні v до швидкості світла величина v практично перестає змінюватися, лінійне зростання імпульсу корабля, що відповідає силі $\mathbf{F}$, відбувається за рахунок збільшення його маси. Таким чином, робота сили $\mathbf{F}$ перетворюється на масу.

Отримаємо корисні формули, що визначають зв'язок повної енергії та релятивістського імпульсу тіла. Вихідні формули:

$$p^2 = \frac{m_0 v^2}{1 - v^2/c^2}; \quad E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2};$$

Виключивши з цих формул v отримаємо корисне співвідношення:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

У цій формулі важливим є те, що величина $(E^2 - p^2 c^2)$ є інваріантною до швидкості руху системи відліку.

7.4 Перетворення енергії та імпульсу у рухомій системі відліку

Вихідні формули:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

$$v' = v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

У останній формулі ми для спрощення припустили відсутність поперечної компоненти швидкості.

Після перетворень отримаємо формули для перетворення компонент імпульсу та енергії у рухомій системі відліку:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \frac{1 - uv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}};$$

$$E' = \frac{m_0 c^2 - m_0 uv}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{E - p_x u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$p' = m_0 \frac{1 - uv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}} v' = m_0 \frac{1 - uv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{v - u}{1 - uv/c^2} =$$

$$= \frac{m_0 (v - u)}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{p_x - Eu/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = p'_x,$$

$$E' = \frac{E - p_x u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad p'_x = \frac{p_x - Eu/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Ураховуючи, що поперечні компоненти імпульсу зберігаються, можемо записати:

$$p'_y = p_y;$$

$$p'_z = p_z$$

Для порівняння наводимо формули для перетворень Лоренца:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Помічаємо повну аналогію у законах перетворення величин:

$$E/c \rightarrow ct,$$

$$p_x \rightarrow x,$$

$$p_y \rightarrow y,$$

$$p_z \rightarrow z.$$

Таким чином, виявили чотири величини, які перетворюються у рухомій системі відліку подібно x, y, z, t . Їх можна вважати компонентами чотирьохвектора енергії-імпульсу. Це один з векторів у чотирьохвимірному просторі.

7.5 Частинки з нульовою масою спокою

Наприклад, фотон – частинка світла. Фотон схожий на частинку тим, що переносить енергію та імпульс. Енергія фотона дорівнює добутку сталої Планка на частоту світла $E = h\nu$. Ураховуючи, що $E = mc^2$, а імпульс $p = mc$, фотон несе імпульс $p = E/c$.

Оскільки енергія перетворюється у рухомій системі відліку, повинна при цьому мінятися і частота світла ($E = h\nu$), яка визначає колір. Це явище отримало назву *ефект Доплера*. Користуючись формулами для перетворення енергії, можна отримати формули для закону перетворення частоти світла у рухомій системі відліку у частинному випадку руху системи відліку уздовж напрямку поширення світла:

$$E' = \frac{E - pu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}};$$

$$h\nu' = \frac{h\nu - u h\nu/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}};$$

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}$$

7.6 Дослід Майкельсона – Морлі

Начебто не було очевидних підстав припускати, що перетворення Галілея виявляться непридатними у випадку швидкостей, що наближаються до швидкості світла. Тим не менш у кінці 19 сторіччя Майкельсон та Морлі поставили дослід саме з метою перевірки цього припущення. Вони спробували виміряти очікувану зміну швидкості світла у різних системах відліку за допомогою приладу, що має назву інтерферометр, у якому використовується джерело світла та набір дзеркал. На рис.7.6 наведена спрощена схема дослід Майкельсона – Морлі. За допомогою напівпрозорого дзеркала світло від джерела розщеплюється на два взаємно перпендикулярних світлових променя, які зрештою

зводяться разом на екрані. Таким чином інтенсивність світла на екрані визначається сумою амплітуд цих променів. Прилад можна повертати цілком так, щоб шлях світла у одному з плечей приладу на рис.7.7 був поздовжнім до напрямку руху Землі навколо Сонця v_3 . Можна було очікувати, що перетворення до рухомої (паралельно до вектора v_3) системи відліку приведе до різниці часу проходження світлом паралельного та перпендикулярного плечей, у наслідок чого на екран ці світлові промені будуть попадати з різними фазами та відбудеться часткове послаблення сумарної інтенсивності.

Величина ефекту залежить від детальної картини поширення світлових променів. Припустимо, що плече 1 паралельне, а плече 2 перпендикулярне до швидкості v_3 . Повний час проходження плеча 1 дається виразом

$$t_1 = \frac{l}{c - v_3} + \frac{l}{c + v_3} = \frac{l(c - v_3 + c + v_3)}{c^2 - v_3^2} = \frac{2lc}{c^2 - v_3^2}.$$

У плечі 2 швидкість залишається незмінною, але, як видно з рис.7.8, шлях променю подовжується за рахунок зміщення приладу, та, відповідно, за теоремою Піфагора:

$$\frac{v_3^2 t_2^2}{4} + l^2 = \frac{c^2 t_2^2}{4}$$

Звідки:

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v_3^2}}.$$

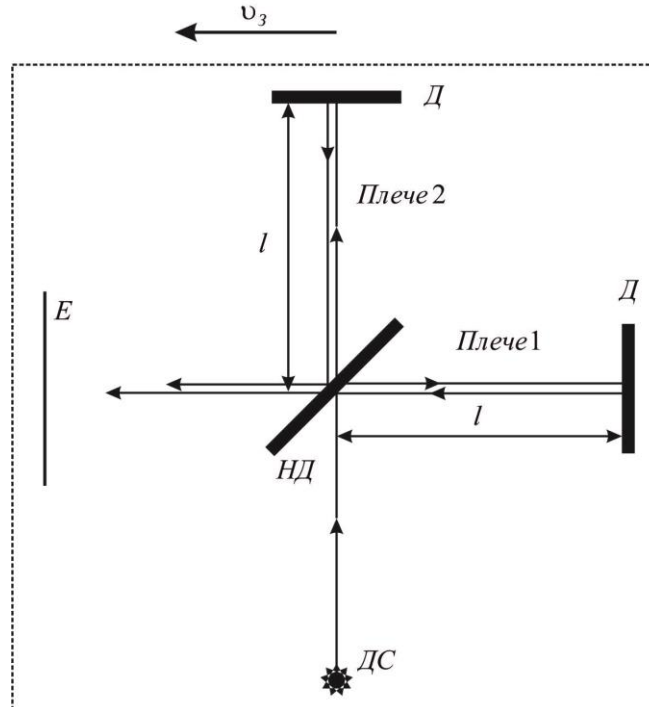


Рис.7.6 Спрощена схема досліду Майкельсона – Морлі.

E – екран; $Д$ – дзеркало; $НД$ – напівпрозоре дзеркало; $ДС$ – джерело світла.

Земля v_3 Сонце E Плече1 Плече2 $ДС$ $Д$ $НД$ l $v_3 t_2$

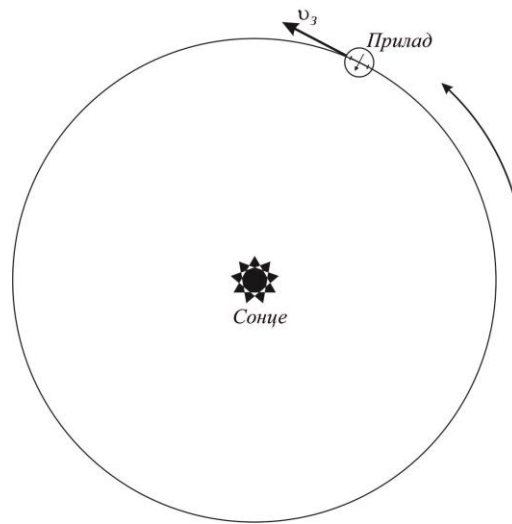


Рис.7.7

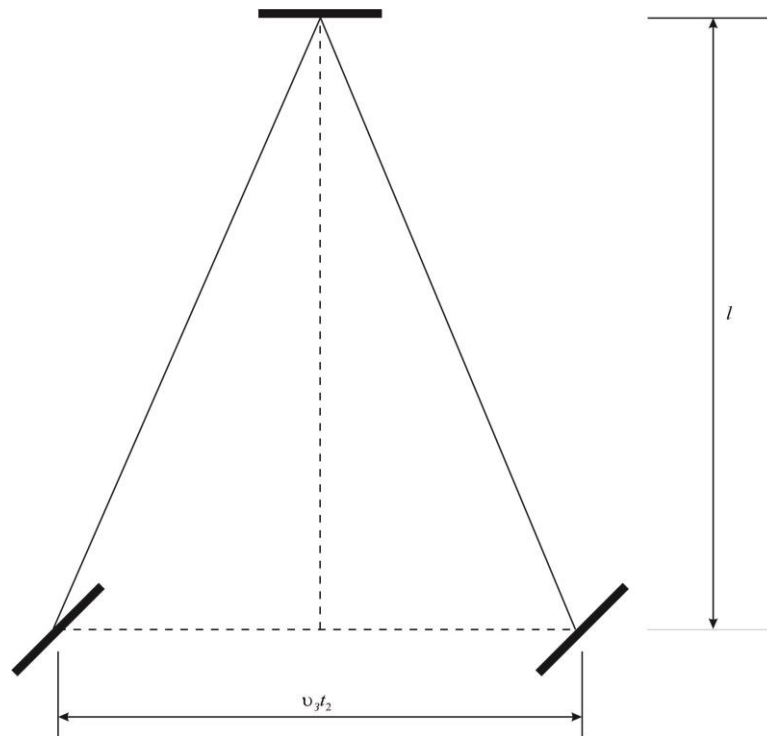


Рис.7.8. Шлях променю у плечі 2 інтерферометра Майкельсона – Морлі.

Звідки знаходимо, що очікувана різниця часів проходження дається виразом

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2lc}{c^2 - v_3^2} - \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v_3^2}},$$

який після перетворень та розкладу за ступенями малої величини v_3/c приймає вигляд

$$t_1 - t_2 \approx lv_3^2/c^2.$$

У даному виразі ми знехтували членами ряду більш високих порядків (які містять величину v_3/c у четвертій, восьмій та більших степенях).

Як видно з даної формули, перетворення Галілея безумовно вказують на те, що на проходження плеча 1 світло витрачає більше часу, ніж на плече 2, та різниця часів явно залежить від швидкості Землі. Ця різниця часів повинна спостерігатися у вигляді залежності інтенсивності світла на екрані від орієнтації приладу відносно напрямку швидкості v_3 . Інтенсивність повинна бути максимальною, коли плечі направлені під кутом 45° до вектора v_3 (різниця часів проходження дорівнює нулю). Мінімальна інтенсивність відповідала б випадку, коли різниця шляхів проходження дорівнювала б половині довжини хвилі світла. Кут орієнтації приладу, при якому це повинно мати місце, залежить від величини l . Прилад Майкельсона – Морлі не дозволяв спостерігати повний мінімум, тобто повне зникнення освітленості, оскільки довжина плеча l (біля 11 м) не забезпечувала достатньої різниці часів. Тим не менш виміряне максимальне зменшення інтенсивності (при розташуванні одного з плечей приладу паралельно v_3) можна було порівняти з тим, яке передбачається на основі перетворень Галілея. Фактично у експерименті Майкельсона і Морлі чутливість приладу подвоювалася за рахунок реєстрації зміни інтенсивності при повороті пристрою з положення, у якому плече l паралельне v_3 , у положення, перпендикулярне до v_3 .

При підстановці відомої величини орбітальної швидкості Землі, а також значення $l = 11$ м розрахована за допомогою отриманого вище виразу різниця часів у досліді Майкельсона та Морлі відповідає приблизно 0,2 довжини хвилі світла (яка складає для зеленого кольору приблизно 0,5 мкм). Отже, при повороті пристрою на 90° зсув фаз світлових променів змінився б на величину, відповідну приблизно 0,4 довжини хвилі, що не могло залишитись непоміченим, оскільки прилад міг зареєструвати мінімальне значення біля 0,01 довжини хвилі. Насправді на досліді у межах точності вимірювань не вдалося зареєструвати *ніякої* зміни інтенсивності. Спочатку припускали, що система Сонце – Земля має додаткову абсолютну швидкість, яка у момент проведення досліді повністю компенсує швидкість Землі. Але при повторенні досліді у різний час суток та у різні часи року результат як і раніше залишався нульовим. З цього досліді можна зробити єдиний висновок – швидкість світла ні в якій мірі не залежить від системи відліку, у якій проводиться вимірювання.

Те, що виміряна швидкість світла виявляється однаковою ($v \equiv c = 3 \cdot 10^8$ м/с), хоча і здається виключно простим фактом, змушує нас переглянути питання про справедливість перетворень Галілея та відповідного правила додавання швидкостей. Необхідність такого перегляду слідує, наприклад, з вимірювання, у якому визначається швидкість світла, яке випромінюється джерелом, що рухається до нас зі швидкістю, скажемо, $c/2$. Дослід Майкельсона – Морлі свідчить про те, що виміряна швидкість світла буде дорівнювати c , а не $c + c/2$, як можна було б очікувати на основі галілеєва правила додавання швидкостей.

Наслідки, що витікають зі сталості швидкості світла

Умоглядно дуже важко зрозуміти, як можна поєднати з нашими звичними уявленнями експериментальний факт, що швидкість світла у всіх системах відліку є однаковою. Однак існують безпосередні математичні наслідки цього факту; їх можна отримати розглянувши питання про те, як буде виглядати світловий імпульс лампи-спалаху у двох системах відліку, що рухаються одна відносно одної. Для спрощення припустимо, що лампа знаходиться у початку однієї системи відліку (штрихованої), яка рухається зі сталою швидкістю v уздовж позитивного напрямку осі x іншої системи

відліку (не штрихованої). Будемо також вважати, що обидві системи співпадають у момент спалаху; цей момент приймемо за $t = 0$. Після спалаху світловий імпульс у формі тонкої сферичної оболонки буде поширюватись у *обох* системах відліку у всіх напрямках зі сталою швидкістю c . Радіус такої сфери у момент часу t у не штрихованій системі відліку визначається рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2,$$

а у штрихованій (час у штрихованій системі відліку позначимо через t') – рівнянням

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2.$$

Оскільки обидва рівняння правильно описують одну і ту ж подію, повинне існувати перетворення координат, при якому одне рівняння переходило б у інше. Неважко побачити, що перетворення Галілея *не забезпечують* цього (за виключенням моменту часу $t = 0$ чи випадку $v = 0$). Відповідно, необхідно знайти нові перетворення, справедливі у рівній степені як при швидкостях, що наближаються до швидкості світла, так і при значно менших швидкостях. Якими б не були нові перетворення, при малих швидкостях вони повинні співпадати з перетвореннями Галілея. Простіше за все це зробити, якщо у перетворення Галілея ввести поправочні коефіцієнти та потім знайти їх з умови сумісності спостережень у двох системах відліку у досліді з лампою-спалахом.

Перетворення вигляду

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = ax + bt$$

Дозволяють змінити як рівняння, що явно вміщує v , так і рівняння для t . А priori не можна пояснити, чому ми вибрали перетворення саме у такому вигляді, та невідомо, якими повинні бути коефіцієнти γ , a та b . Однак ми можемо перевірити, чиє ця система рівнянь сумісною, та якщо вона виявиться сумісною, то при яких значеннях γ , a та b буде виконуватися рівність

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2.$$

Таким образом, ми можемо написати

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \gamma^2(x - vt)^2 + y'^2 + z'^2 - c^2(ax + bt)^2.$$

Дана рівність повинна виконуватись при будь-яких x , y , z та t , оскільки ці величини є *незалежними* змінними. Тому в обох її частках коефіцієнти при кожній зі змінних повинні бути однаковими. Звідки отримуємо три шуканих співвідношення:

$$\gamma^2 - a^2 c^2 = 1 \quad (\text{коефіцієнти при } x),$$

$$b^2 - \gamma^2(v/c)^2 = 1 \quad (\text{коефіцієнти при } t),$$

$$\gamma^2 v + abc^2 = 0 \quad (\text{коефіцієнти при } xt).$$

Це система з трьох рівнянь для трьох невідомих. Її рішення дає шукані коефіцієнти:

$$a = \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Те, що нам вдалося отримати рішення для γ , a , b , означає існування перетворень, які правильно перетворюють світлову поверхню з однієї системи відліку у іншу. Ці перетворення мають вигляд

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

та мають назву перетворення Лоренца. Вони представляють собою найпростіші співвідношення, які збігаються з експериментальним фактом незалежності швидкості світла від системи відліку спостерігача.

Ці співвідношення були отримані за умовою сталості відносної швидкості, та їх наслідки складають предмет *спеціальної* теорії відносності. Наскільки нові перетворення відрізняються від попередніх? Співвідношення між x та x' змінилось тільки на множник $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$. Для швидкостей, з якими ми звичайно маємо справу – аж до $v \sim 10^2$ м/с, величина $(v/c)^2$ менша за 10^{-12} ; тому ми можемо знехтувати відмінністю величини $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ від одиниці. Суттєва поправка виникає, лише коли швидкість v складає помітну частку швидкості світла c , скажемо 10% та більше. Аналогічно у обох системах відліку час є одним і тим же, за виключенням випадків дуже великих відносних швидкостей чи дуже великих відстаней. Перетворення Галілея представляють собою наближення перетворень Лоренца при малих швидкостях, тия ми не помічаємо їх порушення, поки не зустрічаємося з явищами, що відбуваються при дуже великих швидкостях.

Фізика макросистем

Макросистема складається з величезної кількості частинок. Переважно річ йде про речовину. Аналіз такої системи методами класичної механіки є неможливим. Для цього прийшлося б вирішувати систему з N диференціальних рівнянь, складених за другим законом Ньютона, де N – кількість частинок. Та якщо б ми навіть зробили це, то навіщо нам рівняння руху усіх частинок? Це величезний об'єм інформації, яку практично неможливо використати. До того ж класична механіка у мікросвіті має дуже обмежене використання.

Величезна кількість частинок привела до розробки двох різних методів аналізу процесів у макросистемах – термодинамічний та статистичний.

Термодинаміка дозволяє не зосереджуватися на механізмах процесів та конкретних особливостях будови макросистеми. Вона оперує усередненими величинами, що визначають стан системи у цілому – термодинамічними параметрами. Наприклад, для ідеального газу це тиск, температура, тощо. Висновки термодинаміки базуються на постулатах, які є узагальненням великої кількості експериментальних даних.

Статистична фізика, навпроти, виходить з молекулярної будови речовини. На основі аналізу руху окремих частинок робляться висновки про властивості системи взагалі. Наприклад, статистична фізика розкриває фізичний зміст термодинамічних параметрів. Велика кількість частинок приводить до появи закономірностей нового типу, що мають імовірнісний, чи статистичний характер. Стан системи у цілому розглядається як результат дії окремих частинок. При цьому використовується математичний апарат теорії імовірності. Приклад статистичних закономірностей: тиск газу, певна концентрація молекул (кількість молекул на одиницю об'єму). Не зважаючи на повний хаос у русі кожної молекули газу, ці величини мають певні, однакові значення для усіх елементів об'єму та поверхні посудини.

Розглянуті методи доповнюють один одного. Термодинаміка відрізняється своєю загальністю. Вона дозволяє аналізувати процеси без знання їх внутрішніх механізмів. Статистична фізика дозволяє проникнути у суть явищ, зв'язати поведінку окремих частинок з властивостями системи у цілому.

Стан макросистеми характеризується усередненими величинами – термодинамічними параметрами.

Усяка фізична система знаходиться у *рівноважному стані*, якщо параметри її стану відповідають зовнішнім умовам і не залежать від часу.

Перехід системи з одного рівноважного стану, що відповідає одним зовнішнім умовам, у інший рівноважний стан, що відповідає іншим зовнішнім умовам має назву *процес релаксації*. У процесі релаксації система знаходиться у нерівноважному стані. Параметри стану не відповідають зовнішнім умовам та залежать від часу.

Вивчення процесів релаксації дозволяє отримати набагато повніші відомості про будову та механізми фізичної системи, ніж вивчення тільки рівноважних станів. Дійсно, у рівноважному стані системи деталі її механізмів у значній мірі є замаскованими та усередненими у певній загальній картині. Навпроти, у процесі релаксації, якщо механізми мають різні кінетичні властивості, баланс порушується. Це може привести до виразного виявлення деталей цих механізмів.

Наприклад, ми увімкнули сталу напругу на вхід якоїсь електротехнічної системи, що містить активні елементи (опори) та реактивні елементи (конденсатори, індуктивності). Ми можемо отримати параметри системи у рівноважному стані. Тобто виміряти напруги та струми на певних ділянках електричних кіл. Але з цих даних ми не отримаємо ніякої інформації про реактивні елементи, бо вони не впливають на стаціонарні струми та напруги. При дослідженні процесів релаксації, при подаванні на вхід системи змінної у часі напруги ми можемо отримати повні дані про реактивні елементи системи. Процеси

релаксації у електричних колах мають надзвичайно широке застосування у електротехніці та електроніці. Ви будете їх детально вивчати.

Будь-який процес це перехід системи через послідовність нерівноважних станів (тобто процес релаксації). Але, якщо зовнішні умови змінюються малими порціями та повільно, то стан системи майже не відрізняється від рівноважного. *Такі процеси називають рівноважними, чи оберненими.* Останнє пов'язано з тим, що рівноважний процес можна провести у оберненому напрямі через ту ж послідовність станів. У випадку нерівноважного процесу це виявляється неможливим.

1 Основи термодинаміки (на прикладі ідеального газу)

1.1 Рівняння стану ідеального газу

$$pV = \nu RT ,$$

де: p – тиск газу (сила з якою газ діє на стінку посудини на одиницю площі);

V – об'єм посудини;

ν – кількість молів газу. Один моль це кількість речовини, що містить

$N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ молекул, чи частинок (стала Авогадро);

R – універсальна газова стала (приблизно 8,31 Дж/моль·К);

T – температура.

Температура спирається на шкалу, що містить дві реперні точки: температура, при якій пар, вода та лід існують у рівновазі (273,15 К); температура кипіння води при нормальних умовах (373,15 К). Температура за шкалою Цельсія та Кельвіна пов'язані співвідношенням: $t = T - 273,15$.

1.2 Перший принцип термодинаміки

По суті це закон збереження енергії, поширений на теплові процеси. Розглянемо величини, що містяться у першому принципі термодинаміки.

1.2.1 Внутрішня енергія системи

Це енергія, що міститься усередині системи. Ця енергія не пов'язана з рухом системи, як цілого, та взаємодією системи із зовнішніми тілами. Наприклад, для випадку ідеального газу, це середня кінетична енергія хаотичного руху молекул (розрахована у системі відліку, відносно якої центр мас є нерухомим). Потенціальною енергією взаємодії молекул нехтуємо, бо ідеальний газ є розрідженим. Молекули у середньому розташовані далеко одна від одної. Інші види внутрішньої молекулярної та внутрішньої атомної енергії, які теж є складовими внутрішньої енергії, у процесах з ідеальним газом не змінюються. Тому їх можна не брати до уваги.

Важливий експериментальний факт: внутрішня енергія є пропорційною до температури у максимально широкому діапазоні температур: $U \sim T$.

Внутрішня енергія є функцією стану системи. Вона не залежить від шляху, яким система потрапила у даний стан. Тобто, U є математичною функцією параметрів стану системи.

1.2.2 Кількість тепла та робота

Внутрішню енергію можна змінити, виконуючи над системою роботу A' , яка визначається макроскопічними рухами зовнішніх тіл. Наприклад, це робота, яку виконує поршень, що стискає газ.

Також внутрішню енергію системи можна змінити шляхом теплопередачі. Передача тепла ΔQ не пов'язана з рухом оточуючих тіл, а здійснюється шляхом безпосереднього контакту з цими тілами, або завдяки обміну енергією між системою та оточуючими тілами шляхом електромагнітного випромінювання.

1.2.3 Перший принцип термодинаміки

Закон збереження енергії можна представити у вигляді:

$$\Delta U = \Delta Q + A'.$$

Зручніше використовувати роботу A , яку виконує система над оточуючими тілами ($A = -A'$).

Остаточно, перший принцип термодинаміки можна представити у вигляді:

$$\Delta Q = \Delta U + A.$$

Тобто, тепло, яке отримує система йде на зміну її внутрішньої енергії та роботу, яку виконує система над оточуючими тілами.

Усі величини, що входять до рівняння є алгебраїчними, тобто можуть мати від'ємні значення. Якщо $\Delta Q < 0$, то це означає, що тепло відводиться з системи, якщо $A < 0$, то робота виконується над системою.

Частіше за все перший принцип термодинаміки використовують у диференціальному вигляді:

$$d'Q = dU + d'A. \quad (1)$$

Штрих після позначки диференціала означає, що це не приріст функції параметрів стану системи, а просто нескінченно мала порція теплоти, що отримує система. Ця порція залежить від процесу, яким система переходить з одного стану у нескінченно близький інший стан. Теж саме стосується роботи $d'A$. А от dU це приріст математичної функції параметрів стану системи. Ця величина не залежить від процесу, а визначається тільки параметрами початкового та кінцевого стану системи.

1.3 Робота, яку виконує ідеальний газ над зовнішніми тілами

Якщо об'єм газу отримує приріст dV , а тиск газу дорівнює p , то робота сил, що з боку газу діють на стінки посудини дорівнює

$$d'A = pdV.$$

Це співвідношення легко отримати для випадку, коли газ знаходиться у циліндрі з поршнем (рис.1.1). Робота, яку виконує газ при переміщенні поршня на висоту dh , дорівнює $d'A = Fdh$, де F – сила, з якою газ діє на поршень. Площа перерізу останнього S , тому $F = pS$, і $d'A = pSdh = pdV$.

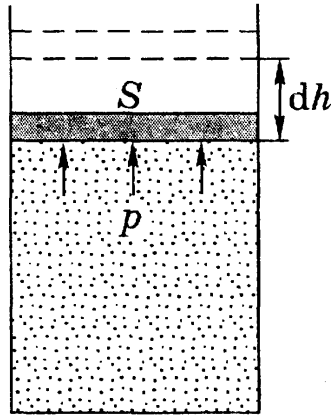


Рис.1.1 Робота, яку виконує ідеальний газ при зміні положення поршню.

Робота, яку виконує газ при кінцевій зміні об'єму, наприклад від V_1 до V_2 , дорівнює інтегральній сумі робіт, що виконує газ при кожному нескінченно малому приросту об'єму:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

На графіку $p - V$ робота визначається площею під кривою. Ця площа залежить від виду кривої, тобто від процесу (рис.1.2).

Перший принцип термодинаміки для ідеального газу можна записати:

$$d'Q = dU + p dV$$

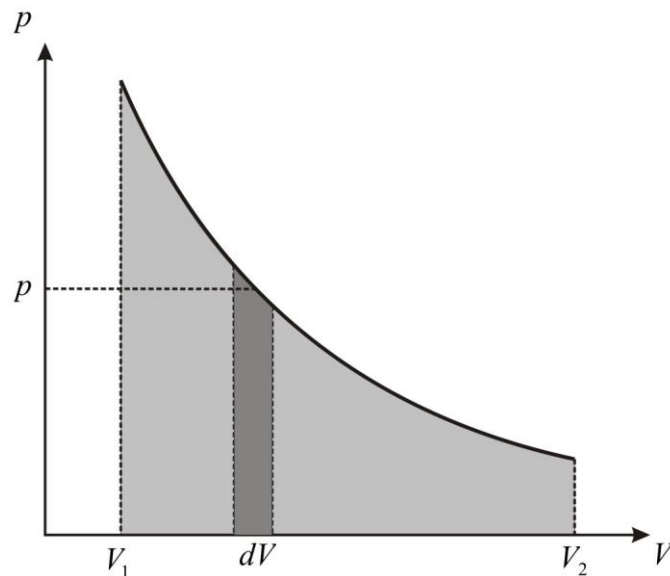


Рис.1.2 Робота, яку виконує ідеальний газ у процесі, зображеному на діаграмі $p - V$.

1.4 Теплоємність ідеального газу

За визначенням, теплоємністю називається відношення нескінченно малої порції тепла, яку отримала система, до відповідної зміни температури системи:

$$c = \frac{d'Q}{dT} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right].$$

Теплоємність залежить від кількості речовини у системі. У зв'язку з цим використовують молярну теплоємність $C \left[\frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} \right]$ та питому теплоємність $c \left[\frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кг}} \right]$.

Співвідношення між ними: $C = Mc$, де M – молярна маса (маса одного моля).

Оскільки $d'Q$ залежить від процесу, теплоємність має зміст тільки із зазначенням конкретного процесу, у якому вона має місце.

Особливе значення мають теплоємності для двох процесів: при сталому об'ємі (ізохорний процес) C_v та при сталому тиску (ізобарний процес) C_p . Згідно до першого принципу (1), при сталому об'ємі ($dV = 0$):

$$d'Q = dU + p dV; \quad C_v = \frac{d'Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + p \frac{dV}{dT}; \quad p \frac{dV}{dT} = 0; \quad C_v = \frac{dU}{dT}.$$

Дослід показує, що у багатьох випадках теплоємність C у широкому інтервалі температур не змінюється. Якщо вважати її зовсім незалежною від температури, то можна записати просту формулу:

$$U = C_v T.$$

Довільну константу інтегрування опускаємо, оскільки у всі співвідношення входить не сама функція U , а тільки різниця її значень (аналогічно потенціальній енергії).

Диференціюємо по температурі рівняння (1), що відображає перший принцип для ідеального газу, та отримуємо для теплоємності:

$$C_p = C_v + p \frac{dV}{dT}.$$

Якщо процес ізобарний ($p = \text{const}$), то шляхом диференціювання по температурі обох частин рівняння стану ідеального газу $pV = \nu RT$ при ($\nu = 1$) отримуємо $p dV/dT = R$, і відповідна молярна теплоємність

$$C_p = C_v + R.$$

Фізично теплоємність при ізобарному процесі більша за теплоємність при ізохорному процесі, бо у першому випадку тепло, на нагрівання газу на одну і ту ж температуру, йде і на зміну внутрішньої енергії і на роботу, яку виконує газ над зовнішніми тілами, а у другому – тільки на зміну внутрішньої енергії.

Важливою характеристикою газу є відношення C_p/C_v , яке позначається літерою γ та має назву *показник адіабати*.

Ураховуючи $C_p = C_v + R$, а також $U = C_v T$, можна отримати корисні формули:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}$$

$$C_v = R/(\gamma - 1)$$

$$U = \frac{\nu RT}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1}$$

1.5 Адіабатний процес

Відбувається без теплообміну з оточуючим середовищем.

Ураховуючи останню формулу, перепишемо вираз для першого принципу (1) та проведемо перетворення:

$$d'Q = d\left(\frac{pV}{\gamma - 1}\right) + pdV = 0$$

$$d(pV) + (\gamma - 1)pdV = Vdp + pdV + \gamma pdV - pdV = 0 \quad (\text{ураховали, що } d(pV) = Vdp + pdV)$$

$$Vdp + \gamma pdV = 0 \quad \left(\frac{d}{dx}[f(x) \cdot \varphi(x)] = \frac{df}{dx} \varphi + \frac{d\varphi}{dx} f\right); \quad d(f \cdot \varphi) = df \cdot \varphi + d\varphi \cdot f$$

З метою розділення змінних ділимо рівняння на добуток pV :

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

Інтегруємо отримане рівняння:

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{const} \rightarrow \ln(pV^\gamma) = \text{const} \quad (\text{так звана константа інтегрування } \text{const} \text{ є довільною}). \text{ Отже, остаточно отримуємо:}$$

$$pV^\gamma = \text{const}$$

Отримали рівняння адіабати у змінних p, V . Його називають рівнянням Пуассона. Це рівняння можна представити і в інших змінних (користуючись рівнянням стану ідеального газу $pV \sim T$). Наприклад, у змінних T, V воно має вигляд: $TV^{\gamma-1} = \text{const}$. Чи у змінних p, T :

$$T : \frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{const}.$$

1.6 Політропічні процеси

Теплоємність таких процесів, за визначенням, не залежить від температури. Виведемо вираз для молярної теплоємності газу при політропічному процесі:

$$C = \text{const}$$

$$d'Q = dU + pdV$$

$$CdT = C_v dT + pdV$$

За допомогою рівняння стану ідеального газу виключаємо з рівняння змінну T :

$$pV = RT$$

$$pdV + Vdp = RdT$$

$$dT = \frac{pdV + Vdp}{R}$$

$$(C - C_V - R)pdV + (C - C_V)Vdp = 0$$

Ураховуємо, що $C_p = C_V + R$ та, з метою розділення змінних, ділимо рівняння на добуток pV :

$$(C - C_p)\frac{dV}{V} + (C - C_V)\frac{dp}{p} = 0$$

Інтегруємо:

$$(C - C_p)\ln V + (C - C_V)\ln p = \text{const}$$

$$pV^n = \text{const} ,$$

де показник степені $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$ має назву *показник політропи*.

Вираз $pV^n = \text{const}$ є *рівнянням політропи*.

Для простих процесів показник політропи приймає різні певні значення. Наприклад, легко побачити, що для

ізотермічного процесу ($T = \text{const}$) $n = 1$ (згадаємо, що $pV = \nu RT = \text{const}$);

ізобарного процесу ($p = \text{const}$) $n = 0$ (отже, $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$);

ізохорного процесу ($V = \text{const}$) $n = \infty$;

адіабатного процесу $n = \gamma$;

для інших політропічних процесів показник політропи n може приймати певні довільні значення.

Визначимо у явному вигляді величину теплоємності газу при політропічному процесі:

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$C_p = C_V + R$$

$$C = \frac{n - \gamma}{(\gamma - 1)(n - 1)} R = C_V - \frac{R}{n - 1} = \frac{R}{\gamma - 1} - \frac{R}{n - 1}$$

1.7 Робота при політропічних процесах

Для одного моля:

$$A = \Delta Q - \Delta U = C_n \Delta T - C_v \Delta T = (C_n - C_v) \Delta T = -\frac{R}{n-1} \Delta T$$

Для ν молей:

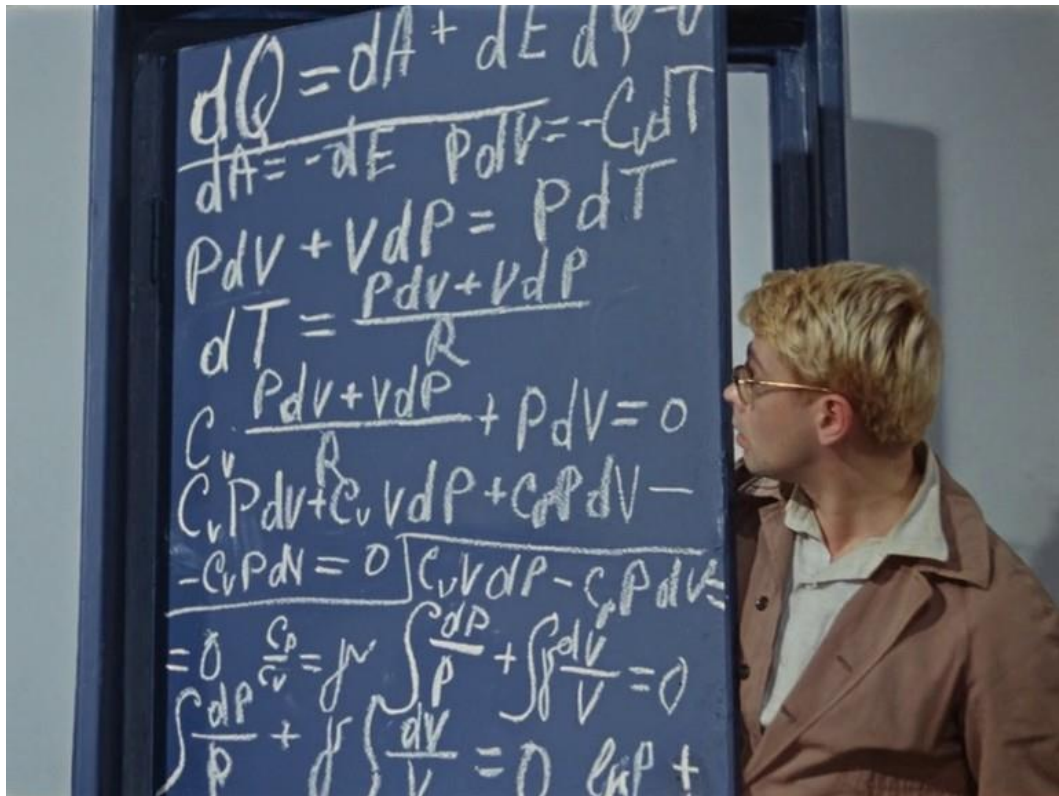
$$A = -\nu \frac{R}{n-1} \Delta T = \frac{\nu R(T_1 - T_2)}{n-1} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1}$$

Для ізотермічних процесів $n=1$, у виразі для роботи виникає невизначеність $A=0/0$.

Можна знайти роботу для ізотермічних процесів безпосередньо:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

У таблиці (окремий файл) наведені основні формули термодинаміки ідеального газу.



2 Основи статистичної фізики на прикладі ідеального газу

2.1 Тиск ідеального газу на стінки посудини

Спробуємо застосувати статистичний метод для визначення тиску газу на стінки посудини. Фізично сила, з якою газ діє на стінки посудини обумовлена ударами молекул

газу, при яких вони передають стінці імпульс. Імпульс, переданий у одиницю часу – сила ($\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ – другий закон Ньютона).

Від закономірностей руху окремих молекул до властивостей речовини багато кроків і усі вони дуже складні. Успіху на цьому шляху досягає лише той, хто діє як фізик, а не математик. Фізик намагається максимально спростити задачу за рахунок використання моделей, навіть дуже грубих, що ігнорують другорядні фактори.

Які закономірності руху окремих молекул у ідеальному газі? Це повний хаос у русі кожної окремої молекули. Наприклад, при нормальних умовах (для атмосфери) кожна молекула у середньому мільярд разів у секунду зіштовхується з іншими молекулами та зі стінками посудини. При кожному зіткненні вона змінює напрям та величину швидкості. У результаті кожна молекула може у даний момент часу з рівною імовірністю опинитися у будь-якому місці посудини та мати будь-який напрям швидкості.

Застосуємо модель, що спрощує задачу.

Грубе припущення 1: молекули рухаються не у будь-який бік, а тільки у шести напрямках – уздовж кожної з координатних осей у обидві боки. Потоки молекул у всіх шести напрямках вважаємо рівними. Якщо розташувати стінку посудини перпендикулярно одній з осей, то перпендикулярно цій стінці рухається у середньому $1/6$ усіх молекул.

Розіб'ємо молекули у кожній одиниці об'єму на групи Δn_i , у кожній з яких швидкості молекул можна вважати практично однаковими та рівними v_i , так що $\sum \Delta n_i = n$ – повна концентрація молекул.

Число ΔN_i молекул i -тої групи, які досягають за малий проміжок часу Δt елементу поверхні стінки площею ΔS , рухаючись перпендикулярно до неї, дорівнює числу молекул у циліндрі довжиною $v_i \Delta t$ та перерізом ΔS (рис.2.3):

$$\Delta N_i = \frac{1}{6} \Delta n_i v_i \Delta t \Delta S$$

Звідки виходить, що частота ударів на одиницю поверхні стінки молекулами i -тої групи дорівнює:

$$\Delta v_i = \frac{1}{6} \Delta n_i v_i$$

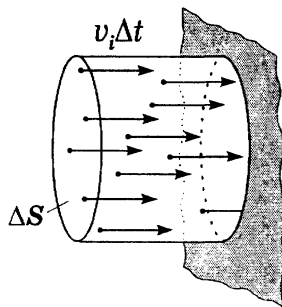


Рис.2.3 Зіткнення молекул, що мають швидкість v_i , зі стінкою, що розташована перпендикулярно до напрямку їх руху.

Припущення 2: усі удари молекул пружні та центральні. Після удару молекула отримує ту ж швидкість у протилежному напрямі. За законом збереження імпульсу, за даним припущенням, в результаті кожного зіткнення молекули зі стінкою остання отримує імпульс $\Delta p = 2mv$ (рис.2.4)

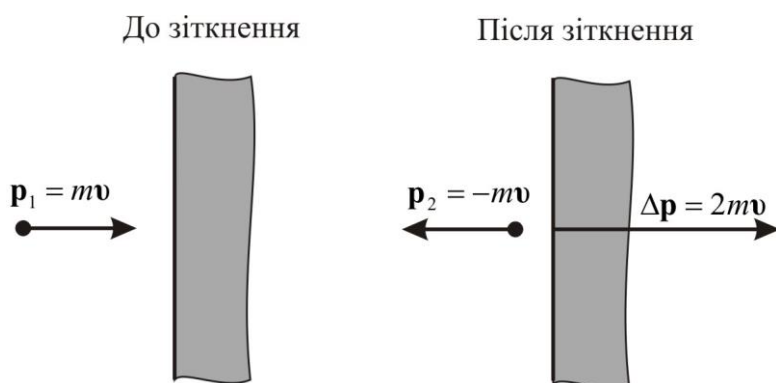


Рис.2.4 Загальний імпульс молекули та стінки до та після зіткнення є однаковим.

Виходячи з даного грубого припущення, імпульс, що передають молекули i -тої групи стінці за одиницю часу на одиницю поверхні (ця величина є внеском у загальний тиск молекул i -тої групи):

$$p_i = 2mv_i \Delta v_i = \frac{1}{3} m v_i^2 \Delta n_i.$$

Загальний тиск дорівнює:

$$p = \sum p_i = \frac{1}{3} m \sum v_i^2 \Delta n_i = \frac{1}{3} m n \frac{\sum v_i^2 \Delta n_i}{n} = \frac{1}{3} m n \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_n \rangle,$$

Де $\langle \epsilon_n \rangle = \langle mv^2/2 \rangle$ – середнє значення кінетичної енергії поступального руху молекул (є ще і обертальний рух молекул, якому теж відповідає певна енергія).

Рівняння $p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_n \rangle$ розкриває фізичний зміст тиску, який є одним з параметрів стану ідеального газу: *тиск газу на стінку посудини визначається середнім значенням кінетичної енергії поступального руху молекул*. Вираз $p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_n \rangle$ є точним, не зважаючи на грубі припущення, що приводили к неточності числових коефіцієнтів вихідних виразів. Випадково ці неточності компенсували одна одну.

Скомбінувавши отриманий вираз з рівнянням стану ідеального газу, отримаємо:

$$p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_n \rangle$$

$$pV = \nu RT$$

$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_n \rangle$$

$$\langle \epsilon_n \rangle = \frac{3}{2} \frac{\nu RT}{nV} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT$$

Де $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}$ – стала Больцмана.

Формула $\langle \epsilon_n \rangle = \frac{3}{2} kT$ розкриває фізичний зміст температури: температура виражає середню кінетичну енергію поступального руху молекул.

Можна отримати іншу корисну формулу для рівняння стану ідеального газу:

$$\langle \epsilon_n \rangle = \frac{3}{2} kT \rightarrow p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_n \rangle = nkT \rightarrow p = nkT.$$

У такому вигляді ($p = nkT$) рівняння стану ідеального газу має значне поширення.

2.2 Ступені свободи механічної системи

Кількість ступенів свободи механічної системи це кількість незалежних координат, що визначають положення системи у просторі.

Наприклад, для одноатомної молекули (вважаємо її матеріальною точкою) – 3.

Для двоатомної – 5 (по 3 на кожний атом, але одна з координат не є незалежною, бо за певною фіксованою відстанню між атомами та 5 координатами можна визначити шосту).

Для трьохатомної – 6 (по 3 координати на кожний атом, з яких 3 не є незалежними. Їх можна визначити за допомогою 6 інших координат та 3 фіксованих відстаней між атомами).

Зручно вважати, що кожний ступінь свободи відповідає певному виду руху. Наприклад, двохатомна молекула (рис.2.5).

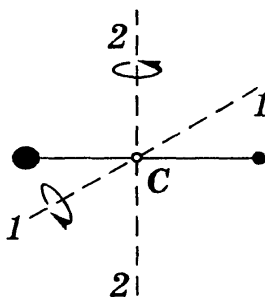


Рис.2.5 Ступені свободи двохатомної молекули

Якщо молекула двохатомна та жорстка («гантель»), то, крім трьох поступальних ступенів свободи, що визначають положення центра мас, вона має і два обертові ступені свободи, пов'язаних з кутами повороту навколо двох взаємно перпендикулярних осей 1-1 та 2-2, що проходять через центр мас C . Обертання навколо осі молекули для матеріальних точок не має змісту.

Таким чином, жорстка двохатомна молекула має 5 ступенів свободи: 3 поступальних та 2 обертові.

Якщо молекула пружна, то можливі коливання атомів та необхідний ще один ступінь свободи (відстань між атомами). Його називають коливальним.

2.3 Гіпотеза про рівне розподілення енергії за ступенями свободи

Той факт, що середня енергія поступального руху молекули дорівнює $\frac{3}{2} kT$, наводить на думку, що на кожний ступінь свободи у середньому приходить енергія $kT/2$. Больцман узагальнив цей висновок у вигляді гіпотези про рівне розподілення

середньої енергії за ступенями свободи (ця теорема строго доведена у статистичній фізиці). При цьому на коливальний ступень свободи повинні приходиться дві половинки kT – одна у вигляді кінетичної енергії та одна у вигляді потенціальної (у теорії коливань показано, що їх середні значення однакові).

Тобто, середня енергія молекули дорівнює:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

де i – сума числа поступальних ($z_{\text{пост}}$), обертальних ($z_{\text{об}}$), та подвоєної кількості коливальних ($z_{\text{кол}}$) ступенів свободи:

$$i = z_{\text{пост}} + z_{\text{об}} + 2z_{\text{кол}}$$

Внутрішня енергія. Цю енергію для моля ідеального газу можна знайти, помноживши $\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$ на число Авогадро:

$$U_M = \frac{i}{2} RT, \quad R = kN_A.$$

Звідси отримаємо вирази для молярної теплоємності, а також для показника адіабати:

$$C_V = \frac{i}{2} R; \quad C_P = \frac{i+2}{2} R; \quad \gamma = \frac{i+2}{i} \quad (\text{згадали, що } C_P = C_V + R).$$

На рис.6 приведені експериментальні дані для двохатомних молекул водню. Бачимо, що із підвищенням температури зростає кількість ступенів свободи молекули, що роблять внесок у енергію її руху. Отримані результати повністю пояснені за допомогою квантової теорії. Відомо що обертальна та коливальна енергії є квантованими, тобто можуть мати тільки певні дискретні значення. Перше дозволене значення енергії обертального та коливального руху достатньо великі. Для збудження відповідних рухів при малих температурах не вистачає енергії поступального руху молекул.

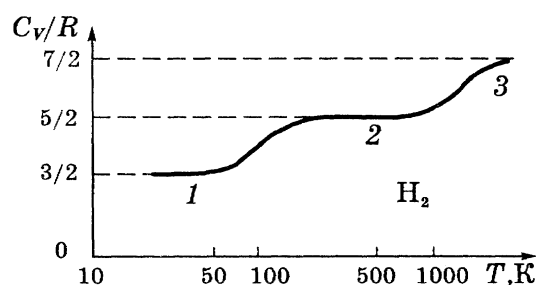


Рис.2.6 Експериментальні дані залежності від температури теплоємності газу при сталому об'ємі для двохатомних молекул водню.

2.4 Розподіл молекул за величиною швидкості

На основі статистичного методу спробуємо з'ясувати питання: скільки молекул мають швидкість у певному інтервалі значень у кожний момент часу? Для того, щоб отримати відповідь нам необхідно розглянути основи математичної теорії імовірності.

2.4.1 Основи теорії імовірності

У основі теорії імовірності лежать поняття випадкової події та імовірності.

Випадковою називають подію, яка у досліді, поставленому для її спостереження, може мати, чи не мати місце. Наприклад, присутність молекули A у об'ємі V_1 у даний момент часу (A у V_1) (рис.2.7).

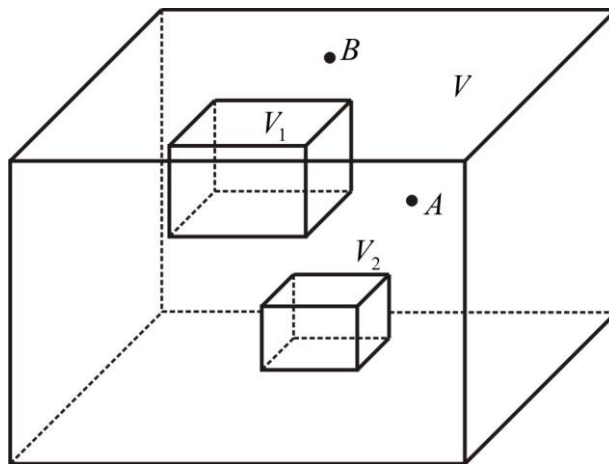


Рис.2.7. Розташування молекул A та B у межах посудини об'єму V . Об'єми V_1 та V_2 – уявні частини об'єму V .

Дослід, поставлений для спостереження випадкової події називають випробуванням.

Проведемо випробування для спостереження події (A у V_1). Для цього будемо заглядати у об'єм V_1 та фіксувати там наявність молекули A у даний момент часу. Нехай проведено M випробувань, з яких m разів ми побачили A у V_1 .

Імовірністю випадкової події називають межу відношення кількості випробувань, у яких подія реалізувалася, до загальної кількості випробувань при наближенні останньої до нескінченності.

У даному випадку $P_1 = \lim_{M \rightarrow \infty} (m/M)$.

Практично, M має бути настільки великим, щоб при подальшому його збільшенні відношення m/M зберігалось сталим із заданою точністю.

Значення імовірності будь-якої події лежить у інтервалі: $0 \leq P \leq 1$.

Подію називають достовірною, якщо вона реалізується у всіх випробуваннях. Імовірність такої події дорівнює одиниці.

Для події (A у V_1), урахуовуючи повний хаос у русі кожної молекули, імовірність дорівнює:

$P_1 = \frac{V_1}{V}$. Це ясно з інтуїтивних міркувань, але може бути легко доведено строго.

Теорема про додавання імовірності

Несумісними називають події, при яких реалізація однієї виключає реалізацію інших. Наприклад (A у V_1) та (A у V_2), якщо об'єми V_1 та V_2 не перекриваються (рис.2.7).

Імовірність реалізації однієї з декількох несумісних подій дорівнює сумі імовірностей кожної з них.

Наприклад, маємо несумісні події (A у V_1) та (A у V_2). Нас цікавить імовірність P_{12} реалізації події (A у V_1) чи (A у V_2).

Проведемо M випробувань, при цьому m_1 разів реалізувалася подія (A у V_1) та m_2 разів реалізувалася подія (A у V_2). Тоді:

$$P_{12} = \frac{m_1 + m_2}{M} = P_1 + P_2.$$

Теорема про множення імовірності

Незалежними називають події, при яких реалізація однієї не впливає на реалізацію інших. Наприклад, (A у V_1) та (B у V_2). (рис.2.7).

Імовірність сумісної реалізації незалежних подій дорівнює добутку імовірностей кожної з них.

Наприклад, розглянемо незалежні події (A у V_1) та (B у V_2). Нас цікавить імовірність сумісної реалізації обох подій. Проведемо M випробувань. Подія (A у V_1) реалізується m_1 разів, а подія (B у V_2) – m_2 разів. Можна взяти за m_1 число випробувань для другої події (B у V_2), тоді:

$$P_1 = \frac{m_1}{M}, \text{ а } P_2 = \frac{m_2}{M}; m_{12} = m_1 P_2 = m_1 \frac{m_2}{M}; P_{12} = \frac{m_{12}}{M} = P_1 P_2.$$

Дискретна випадкова величина

може приймати ряд дискретних значень. Наприклад, кількість молекул у V_1 у даний момент часу. Ця кількість молекул може приймати ряд дискретних значень ($0, 1, \dots, N$) де N повне число молекул у посудині V .

Кожному значенню випадкової дискретної величини відповідає імовірність цього значення. Наприклад, для дискретної величини x :

$$x_i \rightarrow P_i.$$

Визначимо середнє арифметичне значення дискретної випадкової величини x .

Проведемо M випробувань. Кожне значення x_i реалізується m_i разів. Тобто, $P_i = \frac{m_i}{M}$.

Тоді:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \sum x_i P_i.$$

Неперервна випадкова величина

може приймати неперервний ряд значень. Наприклад, координата та швидкість молекули у даний момент часу.

Чому дорівнює імовірність кожного конкретного значення неперервної випадкової величини? Категорично – нулю. Конкретне значення в точності не реалізується у жодному випробуванні. Має сенс лише визначати імовірність наявності величини у певному, хоча б малому, інтервалі. Наприклад, $\Delta P \rightarrow x \div x + \Delta x$.

За визначенням, густина імовірності в неперервної випадкової величини:

$$w = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta P / \Delta x) \text{ (імовірність на одиничний інтервал випадкової величини).}$$

Функція $w(x)$ – функція розподілу неперервної випадкової величини x .

Цій функції можна приписати зміст густини імовірності, тобто імовірності для випадкової величини опинитися у одиничному інтервалі поблизу значення x . У різних випадках функція розподілу має зовсім різний вигляд.

Функція розподілу $w(x)$ дозволяє визначити імовірності усіх подій, пов'язаних з величиною x . Наприклад, нас цікавить імовірність наявності x у певному інтервалі $x_1 \div x_2$ (рис.8).

Розділимо інтервал $x_1 \div x_2$ на маленькі частки Δx . Площа смужки шириною Δx на рисунку дорівнює імовірності наявності випадкової величини x у межах інтервалу ($x_i \div x_i + \Delta x$):

$$\Delta P_i \approx w(x_i) \Delta x.$$

Наявність x у діапазоні $x_1 \div x_2$ еквівалентна наявності x у будь-якому з малих інтервалів Δx у межах цього діапазону (реалізація однієї з сукупності несумісних подій). За теоремою про додавання імовірностей, імовірність наявності x у діапазоні $x_1 \div x_2$ дорівнює сумі імовірностей наявності x у кожному з інтервалів Δx :

$$\Delta P \approx \sum w(x_i) \Delta x.$$

При наближенні Δx до нуля сума перетворюється на інтегральну:

$$\Delta P = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx.$$

Тобто, ΔP дорівнює площі під кривою $w(x)$ у межах $x_1 \div x_2$.

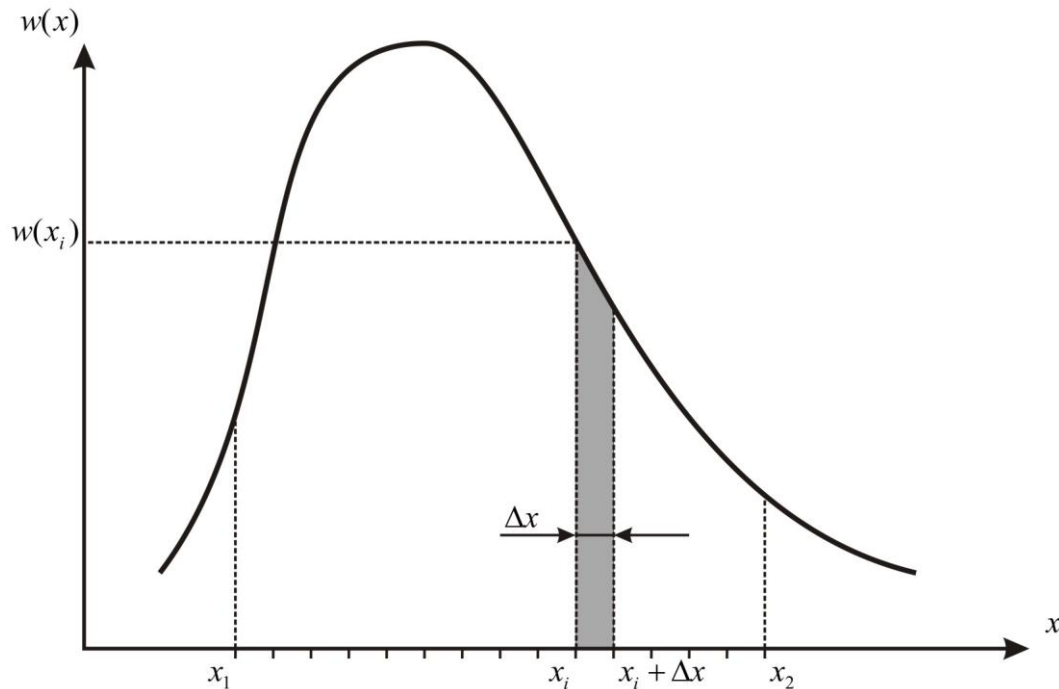


Рис.2.8 Графік функції розподілу неперервної випадкової величини x .

Середнє значення неперервної випадкової величини

Функція розподілу неперервної випадкової величини дозволяє визначити середнє значення цієї величини, а також будь-якої функції цієї величини. Наприклад, розглянемо неперервну величину x . Ми можемо розділити увесь діапазон значень величини x на маленькі частки Δx . А також будемо вважати, що значення x у межах кожного інтервалу Δx має сталє значення, що відповідає, наприклад, початку інтервалу (рис.2.9).

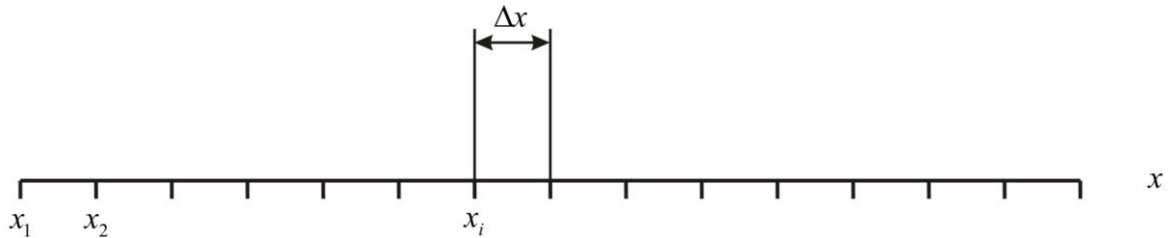


Рис.2.9 Розділення усього діапазону значень величини x на маленькі частки Δx .

Таким чином ми перетворимо неперервну на дискретну випадкову величину. Для дискретної величини, як ми отримали раніше, середнє значення дорівнює:

$$\langle x \rangle = \sum x_i P_i.$$

У нашому випадку P_i це імовірність наявності x у i -тому інтервалі Δx :

$$\langle x \rangle \approx \sum x_i P_i = \sum x_i w(x_i) \Delta x.$$

При наближенні Δx до нуля сума перетворюється на інтегральну:

$$\langle x \rangle = \int x w(x) dx. \text{ Інтегрування здійснюється по усім можливим значенням } x !$$

Аналогічні міркування приводять до формули, що визначає середнє значення будь-якої функції від x , наприклад $f(x)$:

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x) w(x) dx. \text{ Інтегрування здійснюється по усім можливим значенням } x !$$

Умова нормування

Інтегрування функції розподілу по усім можливим значенням випадкової величини дає імовірність наявності величини у одному з нескінченно малих інтервалів діапазону можливих значень, яка дорівнює одиниці:

$$\int w(x) dx = 1. \text{ Інтегрування здійснюється по усім можливим значенням } x !$$

Ця формула відома, як *умова нормування*. Вона стає у пригоді при вирішенні багатьох задач теорії імовірності.

Флуктуації

Імовірність випадкової події та відносна частка результатів, при яких подія реалізується експериментально, – це не одне і те ж. Остання (частка результатів) має випадкові відхилення від передбаченої імовірності. Саме такого роду відхилення відбуваються у будь-яких макросистемах. Ці відхилення отримали назву *флуктуації*.

Згідно теорії імовірності, із збільшенням кількості випробувань відносна флуктуація будь-якої величини зменшується за законом $1/\sqrt{M}$, де M – кількість випробувань. Саме грандіозність числа молекул (число молекул є еквівалентним кількості випробувань, які відбуваються паралельно з кожною молекулою) і пояснює, чому макроскопічні закони, отримані на основі статистичних уявлень про рух частинок макросистеми, виявляються точними.

У подальшому буде використане поняття нескінченно малого об'єму dV макросистеми. Під цим розуміється такий об'єм, розміри якого нехтовно малі у порівнянні з розмірами самої мікросистеми, але усе ж набагато більші за характерний розмір її мікробудови. Кожна нескінченно мала ділянка, припускається, містить число частинок dN настільки велике, що відносною флуктуацією їх кількості можна знехтувати.

2.4.2 Функція розподілу Максвелла проекцій вектора швидкості молекул (1859 рік)

Розглянемо міркування Максвелла, який отримав функцію розподілу для швидкостей молекул за допомогою статистичного методу.

Абстрактний простір швидкостей

Уявимо собі простір швидкостей з координатними осями, по яким будемо відкладати значення проекцій швидкості окремих молекул v_x, v_y, v_z . Тоді швидкості кожної молекули буде відповідати точка у цьому просторі – кінець вектора $\mathbf{v}$. У результаті зіткнень молекул положення точок будуть стрімко мінятися (при нормальних умовах кожна молекула газу зіштовхується з іншими молекулами порядку 10^9 разів на секунду), але їх розподіл у просторі у цілому буде залишатися незмінним, оскільки макросистема знаходиться у рівноважному стані. В наслідок рівноправності усіх напрямків руху розташування точок відносно початку координат буде сферично симетричним. Тому густина розташування точок може залежати тільки від модуля швидкості v .

Нехай макросистема (газ) містить N молекул. Виділимо у деякій точці – на кінці вектора $\mathbf{v}$ – малий об'єм $dv_x dv_y dv_z$ (рис.2.10, де вісь z направлена на нас). Відносне число молекул (точок) у цьому об'ємі dN/N , чи іншими словами, імовірність dP того, що швидкість молекули, тобто кінець вектора $\mathbf{v}$, попаде у цей об'єм, можна записати так:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N} = f(v) dv_x dv_y dv_z,$$

де $f(v)$ має зміст *об'ємної густини імовірності*.

Імовірність того, що молекула (точка) буде мати проекції швидкості у інтервалі $(v_x, v_x + dv_x)$, є:

$$dP(v_x) = \frac{dN(v_x)}{N} = \phi(v_x) dv_x,$$

де $\phi(v_x)$ – функція розподілу для v_x .

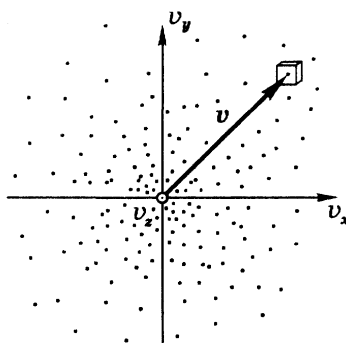


Рис.2.10. Абстрактний простір швидкостей молекул

Імовірності того, що молекула має компоненти швидкості у інтервалах $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$ та $(v_z, v_z + dv_z)$, є незалежними, тому згідно з теоремою про множення імовірності незалежних подій можна записати

$$dP(v_x, v_y, v_z) = dP(v_x) \cdot dP(v_y) \cdot dP(v_z) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z) dv_x dv_y dv_z.$$

З міркувань рівноправності осей v_x, v_y, v_z ясно, що функції φ повинні однаковою чином залежати від відповідних компонент швидкості.

Таким чином, об'ємну густину імовірності можна виразити через густину імовірності для компонент швидкості:

$$f(v) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z)$$

Візьмемо логарифм від обох частин останнього виразу:

$$\ln f(v) = \ln \varphi(v_x) + \ln \varphi(v_y) + \ln \varphi(v_z)$$

Диференціюємо останній вираз по v_x :

$$\frac{1}{f(v)} \cdot \frac{df(v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dv_x} = \frac{1}{\varphi(v_x)} \cdot \frac{d\varphi(v_x)}{dv_x}.$$

Ураховуючи, що $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, для похідної можна отримати вираз:

$$\frac{dv}{dv_x} = \frac{v_x}{v}. \quad \left(\frac{df(\varphi(x))}{dx} = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right)$$

Підставляємо значення похідної у рівняння:

$$\frac{1}{f(v)} \cdot \frac{df(v)}{dv} \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{\varphi(v_x)} \cdot \frac{d\varphi(v_x)}{dv_x} \cdot \frac{1}{v_x}$$

Права, відповідно, і ліва частини останнього рівняння не залежать від v_y та v_z . Тобто, вони не залежать і від v_x , оскільки v_x, v_y, v_z входять у функцію $f(v)$ симетрично.

Отже, праву частину рівняння можна прирівняти до деякої поки невідомої константи, яку позначимо $(-a)$. Від'ємний знак введений з урахуванням подальшого, для того, щоб величина a вийшла додатною. Отримаємо диференціальне рівняння відносно функції $\varphi(v_x)$:

$$\frac{1}{\varphi(v_x)} \cdot \frac{d\varphi(v_x)}{dv_x} \cdot \frac{1}{v_x} = -a.$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{d\varphi(v_x)}{\varphi(v_x)} = -av_x dv_x$$

Інтегруємо:

$$\ln \varphi(v_x) = -\frac{av_x^2}{2} + \ln b, \text{ де } \ln b - \text{константа інтегрування (так зручно її представити).}$$

Беремо антилогарифм від обох частин рівняння:

$$\varphi(v_x) = b \exp\left(-\frac{av_x^2}{2}\right).$$

Для знаходження невідомої константи b використаємо умову нормування функції розподілу випадкової величини:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v_x) dv_x = 1$$

$$b \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{av_x^2}{2}\right) dv_x = 1$$

Інтеграл відомий у математиці під назвою інтеграл Пуассона. Його значення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{av_x^2}{2}\right) dv_x = \sqrt{\frac{2\pi}{a}},$$

Отже

$$b = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}.$$

Функція розподілу набуває вигляду:

$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \exp\left(-\frac{av_x^2}{2}\right).$$

Залишилося знайти невідому константу a . Для цього використаємо вираз для середнього значення кінетичної енергії поступального руху молекул, отриманий нами раніше:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle &= \frac{3}{2} kT \\ \langle v^2 \rangle &= \frac{3kT}{m} \\ \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle &= \frac{3kT}{m}.\end{aligned}$$

Ураховуючи рівноправність компонент швидкості:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}.$$

З іншого боку, ми розглянули раніше формулу для середнього значення функції від неперервної випадкової величини. Використаємо її:

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \varphi(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp\left(-\frac{av_x^2}{2}\right) dv_x.$$

Інтеграл, у таких межах, має відоме з математики значення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp\left(-\frac{av_x^2}{2}\right) dv_x = \sqrt{\frac{2\pi}{a^3}}.$$

Звідки отримуємо значення константи:

$$a = \frac{m}{kT}.$$

Остаточно отримуємо вираз для функції розподілу компоненти швидкості:

$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right).$$

Також запишемо вираз для об'ємної густини імовірності у просторі швидкостей:

$$f(v) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z) \quad f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Графік функції $\varphi(v_x)$ представлений на рис.2.11. Це симетрична, дзвіноподібна крива. Симетрія обумовлена наявністю аргументу в квадраті. Тому однакові від'ємні та додатні значення аргументу відповідають однаковій густині імовірності. Розподіл $\varphi(v_x)$ відповідає розподілу Гаусса, який є надзвичайно поширеним. Цей розподіл має місце у більшості випадків вимірювання випадкових величин.

Функція нормована на одиницю, тобто площа під кожною кривою дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_x) dv_x = 1.$$

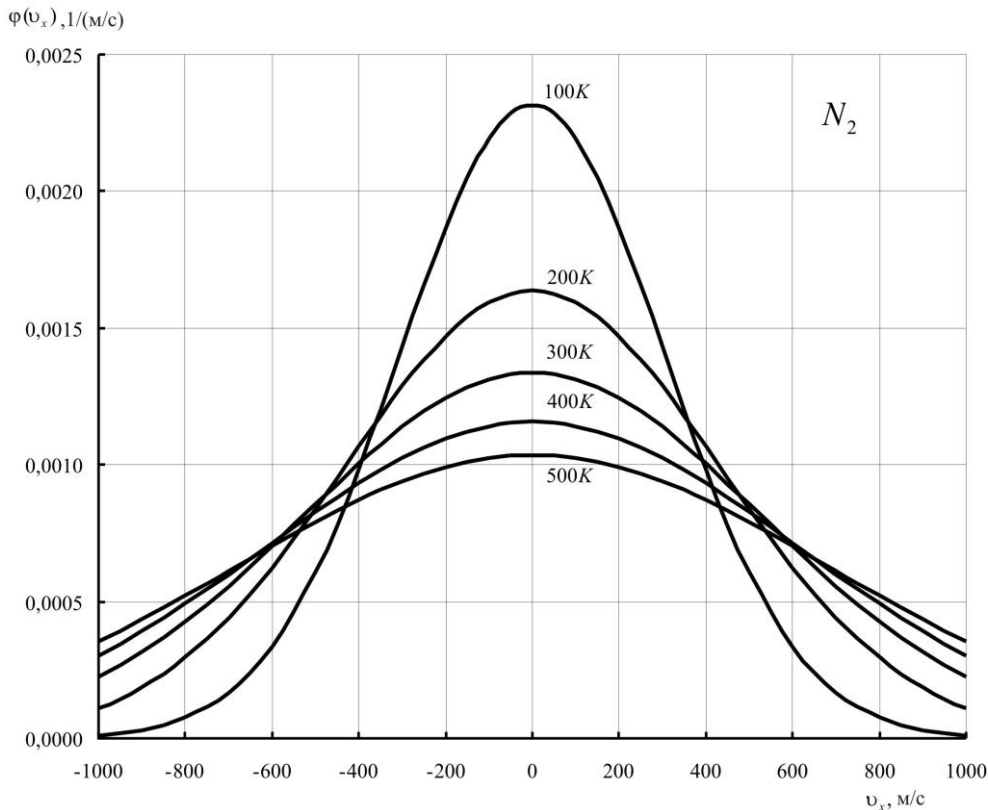
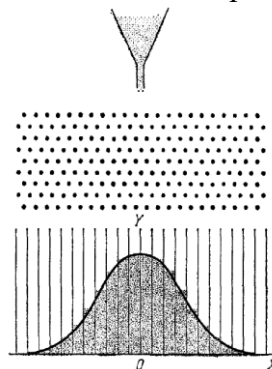


Рис. 2.11 Функція розподілу компоненти швидкості: $\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)$

(розрахунок).

Для кращого розуміння статистичного характеру задачі про розподіл швидкостей молекул може стати у пригоді демонстраційний прилад, що має назву дошка Гальтона. Це – дошка, з передньої сторони крита склом, у яку у шаховому порядку достатньо часто вбиті гвіздки (рисунок, а також відео, що додається окремо).



Унизу під гвіздками встановлені вертикальні перегородки з металевих пластинок, відстані між якими однакові. Вони ділять простір між дошкою та склом на рівні об'єми, які нижче називатимемо комірками. Зверху над гвіздками у середній частці дошки розміщена воронка, у яку можна сипати пісок, зерна пшона, чи інші частинки. Якщо вкинути у воронку одну частинку, то при падінні униз вона зазнає багато зіткнень з гвіздками та у кінці кінців попаде у одну з комірок. У яку комірку попаде частинка – це передбачити неможливо через велику кількість випадкових факторів, що впливають на її

рух. Можна казати лише про імовірність попадання частинки у ту чи іншу комірку. Природно очікувати, що попадання частинки у центральні комірки є більш імовірним, ніж у крайні. І дійсно, якщо через воронку частинки сипати безперервно, то виявляється, що у центральні комірки, що знаходяться під отвором воронки, попадає частинок більше усього, а у крайні – менше усього. При дуже великій кількості частинок, що пройшли крізь воронку, вимальовується цілком певна статистична закономірність розподілу їх по коміркам. Цю закономірність можна навіть представити аналітичною формулою. З цією метою з'єднаємо плавною кривою вершини стовпчиків, які утворюють частинки у комірках. Виявляється, що при дуже великій кількості частинок крива асимптотично наближається до кривої вигляду

$$y = \varphi(x) \equiv A \exp(-\alpha x^2), \text{ де } A \text{ та } \alpha - \text{позитивні сталі.}$$

З них стала α залежить тільки від параметрів приладу, але не залежить від кількості частинок. Стала A пропорційна кількості частинок та пов'язана зі сталою α умовою нормування.

Формула відображає так званий нормальний закон похибок Гаусса (1777 – 1855), а відповідна до неї крива називається кривою похибок Гаусса. Величина $\varphi(x)dx$ дає імовірність того, що при вимірюванні буде зроблена похибка, заключна у межах від x до $x+dx$. Природно, при такій інтерпретації густина імовірності $\varphi(x)$ повинна бути нормована умовою

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \equiv A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = 1,$$

за допомогою якої сталу A можна виразити через сталу α .

Чим більша α , тим гостріше буде максимум на кривій похибок, тим точнішим буде вимірювання. Тому стала α повинна бути пов'язана з середньою квадратичною чи середньо арифметичною похибками, що характеризують точність вимірювання.

2.4.3 Функція розподілу модуля вектора швидкості

Знайдемо імовірність dP того, що модуль вектора швидкості молекули належить інтервалу $v \div v+dv$. У просторі швидкостей цьому інтервалу відповідає тонкий сферичний шар (рис.12). Об'єм цього шару дорівнює площі сфери радіуса v , помноженій на товщину шару dv , тобто $4\pi v^2 dv$. Об'ємна густина імовірності $f(v)$ у всіх точках шару однакова. Отже імовірність попадання у цей шар:

$$dP = f(v)4\pi v^2 dv.$$

Величину імовірності dP можна також представити:

$dP = F(v)dv$, де $F(v)$ – функція розподілу модуля вектора швидкості. Отже:

$$F(v) = f(v)4\pi v^2 = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Ця формула відображає функцію розподілу Максвелла для модуля вектора швидкості. Вигляд цієї функції представлений на рис.2.12.

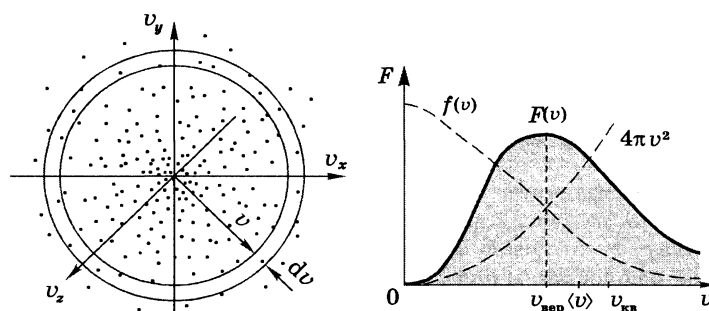


Рис.2.12 Тонкий сферичний шар, що відповідає інтервалу $v \div v + dv$ для модуля вектора швидкості. Функція розподілу для модуля вектора швидкості.

На рис.2.12 пунктиром представлена «конструкція» функції $F(v)$.

Зазначимо, що на відміну від $F(v)$, площа під кривою $f(v)$ фізичного змісту не має (фізичний зміст має інтеграл по об'єму від $f(v)$).

Розподіли Максвелла не залежать ні від структури молекул, ні від того як вони взаємодіють одна з одною. Тому вони можуть бути застосовані не тільки для газів, а і для інших агрегатних станів речовини.

Характерні швидкості

До них належать три швидкості: *найбільш імовірна* $v_{\text{імов}}$, *середня* $\langle v \rangle$ та *середньоквадратична* $v_{\text{квад}}$.

Найбільш імовірній швидкості відповідає максимум функції розподілу $F(v)$. Ця швидкість може бути знайдена з умови $\frac{dF}{dv} = 0$. Вона дорівнює

$$v_{\text{імов}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Середня швидкість дорівнює:

$$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}}$$

Середньоквадратична швидкість дорівнює:

$$v_{\text{квад}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 F(v) dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Наведені характерні швидкості відрізняються одна від одної у пропорції:

$$v_{\text{імов}} : \langle v \rangle : v_{\text{квад}} = 1 : 1,13 : 1,22. \text{ Якісно це показано на рис.2.12.}$$

Залежність розподілу модуля вектора швидкості від температури та маси молекул

Для різних температур $T_1 < T_2 < T_3$ криві розподілу $F(v)$ будуть мати вигляд, показаний на рис.2.13. Бачимо, що із збільшенням температури максимум функції $F(v)$ зміщується у бік більших швидкостей, а його величина зменшується. При цьому площа під усіма трьома кривими залишається рівною одиниці.

Криві на рис.2.13 можна розглядати і інакше – як відповідаючи різним масам молекул при сталій температурі, причому $m_1 > m_2 > m_3$.

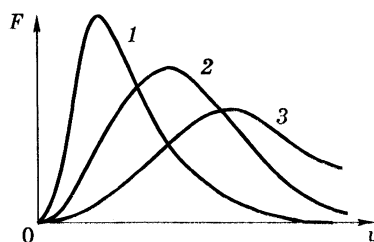


Рис.2.13. Характер залежності функції розподілу для модуля вектора швидкості молекул від температури та маси молекул.

Розрахункові залежності функції розподілу молекул азоту при різних температурах представлені на рис.2.14.

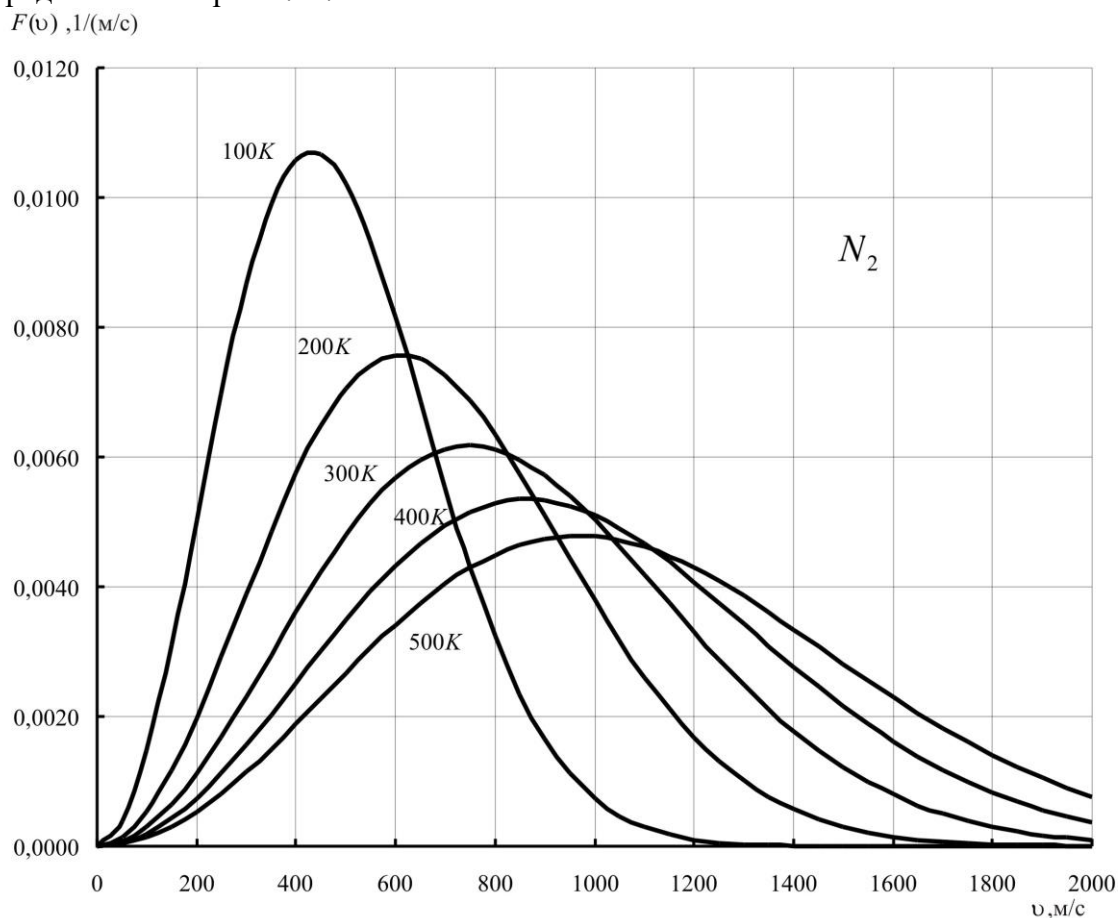


Рис.2.14 Розрахункові залежності функції розподілу молекул азоту при різних температурах.

Додаткові зауваження

1) При статистичному підході не має змісту питання: яка імовірність певного значення швидкості молекули. Вона дорівнює нулю. Річ може йти тільки про імовірність для молекули мати швидкість у заданому інтервалі швидкості.

2) При розрахунку імовірності у заданому інтервалі швидкостей не завжди потрібно прибгати до інтегрування функції розподілу. Якщо інтервал швидкостей дуже малий, то рішення зводиться просто до множення: $\Delta P \approx F(v)\Delta v$

3) Слід мати на увазі, що усі функції розподілу – величини розмірні. Наприклад, розмірність $\phi(v_x)\phi(v_x)$ та $F(v)F(v)$ дорівнює с/м (обернена до розмірності швидкості), а розмірність $f(v) - \text{с}^3/\text{м}^3$ (згадаємо: $f(v) = \phi(v_x) \cdot \phi(v_y) \cdot \phi(v_z)$)

2.5 Розподіл Больцмана

За відсутності силового поля молекули дуже рівномірно розподілені по об'єму. Це обумовлено повним хаосом у русі кожної молекули. Імовірність наявності молекули у будь-якому з однакових об'ємів у межах посудини у точності однакова. Нехай у посудині N молекул. У якійсь момент часу ми зазираємо у певний уявний об'єм ΔV у межах посудини та фіксуємо у ньому ΔN молекул. Ми немовби одночасно провели N випробувань з однією молекулою. Подія наявності молекули у об'ємі ΔV реалізувалася ΔN разів. Тобто імовірність цієї події:

$$\Delta P = \frac{\Delta N}{N} \rightarrow \Delta N = N \cdot \Delta P$$

Якщо є декілька однакових об'ємів ΔV , то імовірність $\Delta P = \frac{\Delta V}{V}$ наявності молекули у кожному з цих об'ємів буде однаковою. Тобто і кількість молекул у цих об'ємах теж буде однаковою.

Якщо на молекули діє силове поле, то однорідність розподілу молекул у просторі порушується. Сила, що діє на молекули, буде намагатися зібрати молекули у тій частині простору, у бік якої вона діє. З іншого боку, тепловий хаотичний рух молекул намагається розподілити їх рівномірно по об'єму. При наявності рівноваги між цими двома тенденціями утворюється нерівномірний розподіл молекул у просторі. Їх концентрація стає функцією координат $n(x, y, z)$. Ця функція визначається *розподілом Больцмана*. Спробуємо визначити цю функцію. На даному етапі ми будемо називати її розподілом Больцмана. Але це лише окремий частинний випадок більш загального закону, що має таку ж назву.

Розглянемо частинний випадок однорідного силового поля, що діє на молекули (наприклад, це поле сили тяжіння біля поверхні Землі).

Будемо вважати, що вісь z має напрям уверх. $\mathbf{F}$ – сила, що діє на кожну молекулу. Розглянемо стовпчик газу перерізом S , направлений уздовж осі z . У межах стовпчика розглянемо тонкий шар товщиною dz (рис.2.15).

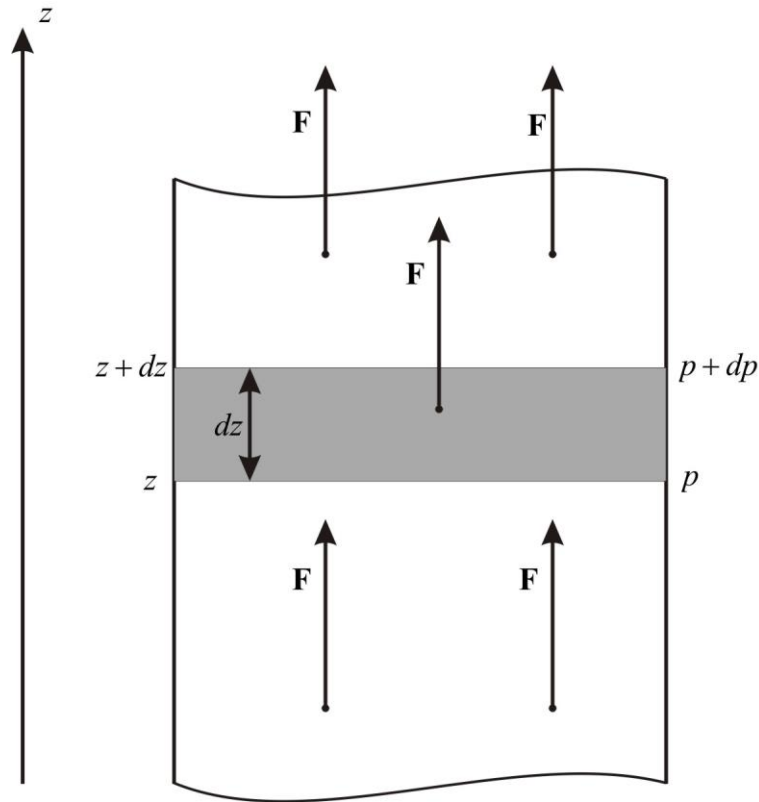


Рис.2.15. Визначення залежності концентрації молекул від координати z при наявності однорідного силового поля, орієнтованого уздовж осі z .

Застосуємо гідростатичний підхід, при якому вважатимемо, що сила вільно передається крізь об'єм газу. Якщо густина газу достатньо велика, то молекули дуже часто зіштовхуються та передають іншим молекулам додатковий імпульс, обумовлений дією сили. У результаті сила, що діє на верхню межу шару товщиною dz , відрізняється від сили, що діє на нижню межу, загальною силою, що діє на усі молекули у межах шару dz :

$$dF_z = F_z n S dz.$$

Різниця тиску на межах шару становить:

$$dp = \frac{dF_z}{S} = n F_z dz = -n dU, \text{ де } dU - \text{різниця потенціальної енергії молекули у}$$

зовнішньому силовому полі на межах шару. Згадаємо рівняння стану ідеального газу у вигляді:

$$p = nkT$$

Припустимо, що в умовах рівноваги, температура однакова у всіх точках простору, незважаючи на наявність силового поля. Тоді:

$$dp = dnkT.$$

Отже отримаємо диференціальне рівняння для функції $n(U)$:

$$dnkT = -n dU$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{dn}{n} = -\frac{dU}{kT}$$

Інтегруємо:

$$\ln n = -\frac{U}{kT} + \text{const}$$

Визначаємо константу з початкової умови:

$$U = 0, n = n_0 \rightarrow \text{const} = \ln n_0$$

$$\ln n = -\frac{U}{kT} + \ln n_0$$

Остаточно:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$$

Припущення щодо однорідного поля температур здається сумнівним. Дійсно, фізичний зміст температури – середня кінетична енергія поступального руху молекул ($\langle \varepsilon_n \rangle = \frac{3}{2} kT$). При русі молекул проти сили (у даному випадку – униз) їх кінетична енергія зменшується, тобто і температура повинна зменшуватися. Але можна міркувати і так. Проти сили рухаються найбільш енергійні молекули. У результаті їх кінетична енергія зрівнюється з тими, що залишилися наверху.

Існує більш строгий вивід розподілу Больцмана, заснований на принципі детальної рівноваги. Цей вивід не містить обмежень на густину середовища. При цьому строго доведена однорідність температурного поля.

Принцип детальної рівноваги:

У справжній рівновазі кожному потоку у системі відповідає рівний і протилежний потік. Так що рівновага має місце не тільки у цілому, а і у всіх деталях, по кожному з протилежних процесів. Наприклад, рівновага між двома містами. Вона буде мати місце, якщо потоки людей між цими містами будуть рівними. Але не тільки загальної кількості людей, а і людей з певними ознаками (вік, стать і таке інше). Для молекул ознакою є імпульс.

Барометрична формула

Для випадку атмосфери Землі концентрація молекул n , яка при однорідному полі температури є пропорційною до тиску, розподіляється по висоті h :

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{h}{H_{\text{екв}}}\right),$$

$$\text{де еквівалентна висота } H_{\text{екв}} = \frac{RT}{Mg}.$$

У випадку земної атмосфери $H_{екв} \approx 9$ км

При сталій температурі для тиску можна записати аналогічну формулу:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{h}{H_{екв}}\right).$$

На висоті 5 км (вершина Ельбруса) тиск зменшується приблизно удвічі.

Барометрична формула не є точною, бо повітря складається з молекул з різною молярною масою (азот та кисень) та температура, насправді, зменшується на висоті, оскільки атмосфера Землі знаходиться у не рівноважному стані.

Дослід Перена

Він уперше «зважив» атоми і молекули шляхом експериментальної перевірки розподілу Больцмана та визначення з експериментальних даних числа Авогадро N_A (кількість молекул у одному молі речовини). Молярні маси багатьох речовин були на той час відомими з хімічних дослідів.

Перрену належить метод вимірювання числа Авогадро N_A (кількість частинок у одному молі речовини), який використовує броунівський рух (неперервний хаотичний рух малих макроскопічних частинок у рідині). Цей метод заснований на розподілі Больцмана. У полі сили тяжіння закон набуває вигляду (барометрична формула):

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right),$$

де n – концентрація молекул газу на висоті h ; n_0 – концентрація молекул на висоті $h=0$; m – маса молекули; g – стала тяжіння; k – стала Больцмана; T – температура.

Якщо була б відома маса молекули m , то вимірюючи розподіл густини газу за висотою, можна було б розрахувати сталу Больцмана k , а потім і число Авогадро $N_A = R/k$, де R – універсальна газова стала. Але виміряти масу молекули складно (у часи Перрена це ще не було зроблено). Цю перепону можна подолати, якщо помітити, що роль молекул можуть грати достатньо малі, але макроскопічні частинки. У полі сили тяжіння такі величезні «макромолекули» не можуть усі лежати на дні посудини. Вони повинні здійснювати броунівський рух та поводити себе подібно ідеальному газу з дуже великою молекулярною вагою, концентрація якого за висотою розподілена згідно до формули Больцмана. Але у такому випадку їх концентрація з висотою буде зменшуватись настільки швидко, то вийде стан, що практично не відрізняється від того, коли усі «макромолекули» лежать на дні посудини. Перрен знайшов спосіб подолати ці труднощі. Потрібно розмістити частинки-макромолекули у рідині, густина якої трохи менша густини речовини самих частинок. Тоді поле сили тяжіння буде сильно послаблене архімедовою підйомною силою та виникне «атмосфера» з макромолекул, розподіл концентрації у якій може бути виміряний. В усталеному стані концентрація частинок визначається законом Больцмана. Потенціальна енергія частинки у такому разі буде дорівнювати $(m - m_{pid})gh$, де m_{pid} – маса рідини, витісненої частинкою. Таким образом,

$$n = n_0 \exp\left(\frac{(m - m_{pid})gh}{kT}\right).$$

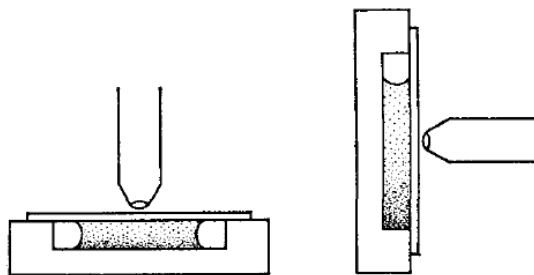
Якщо n_1 та n_2 – виміряні концентрації частинок на висотах h_1 та h_2 , то за цією формулою отримуємо:

$$k = \frac{(m - m_{pid})(h_2 - h_1)g}{T \ln(n_1/n_2)}.$$

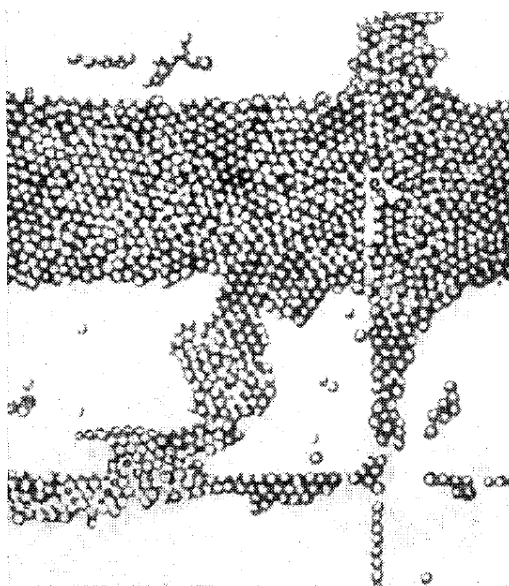
Одна зі складнощів полягала у отриманні зважених у рідині частинок однакового розміру та форми. Перрен використовував частинки гумігуту (смола тропічного дерева) та мастики. Розтираючи гумігут у воді, Перрен отримував емульсію яскраво-жовтого кольору, у якій при спостереженні під мікроскопом можна було розрізнити багато зернин сферичної форми. Замість механічного розтирання Перрен обробляв також гумігут чи мастику спиртом, що розчиняв ці речовини. При розбавленні такого розчину великою кількістю води виходила емульсія з таких же частинок, що і при механічному розтиранні гумігуту. Для відбору зернинок однакового розміру Перрен піддавав зважені у воді частинки багатократному центрифугуванню і таким шляхом отримував майже однорідну емульсію, що складалася з частинок сферичної форми з радіусом порядку мікрметра. Обробивши 1 кг гумігуту, Перрен отримав через декілька місяців фракцію, що вміщувала декілька дециграмів зернин бажаного розміру. З цією фракцією і були виконані описані тут досліді.

При вивченні емульсії потрібно було здійснювати вимірювання при дуже малих різницях висот – усього в декілька сотих міліметра. Тому розподіл концентрації частинок по висоті досліджувалося за допомогою мікроскопа. До предметного скла мікроскопа (рисунок) приклеювалося дуже тонке скло з просвердленим у ньому широким отвором. Таким шляхом виходило плоске заглиблення (кювета Цейса), висота якого була біля 0,1 мм. У центрі заглиблення розміщалося краплина емульсії, яка одразу сплющувалась покривним склом. Щоб запобігти випаровуванню, краї покривного скла покривались парафіном чи лаком. Тоді препарат можна було спостерігати на протязі декількох днів чи навіть тижнів.

Препарат розміщався на столику мікроскопа, ретельно встановленого у горизонтальному положенні. Можливі два способу спостереження. У першому способі препарат розміщався вертикально, а мікроскоп – горизонтально; у другому – препарат горизонтально, а мікроскоп вертикально. Перрен використовував обидва способи, але усі кількісні вимірювання були виконані за другим способом. Об'єктив мав дуже велике збільшення з малою глибиною фокусу, так що одночасно можна було бачити тільки частинки, що знаходились усередині дуже тонкого горизонтального шару з товщиною порядку мікрметра. Частинки здійснювали інтенсивний броунівський рух. Фокусуючи мікроскоп на певний горизонтальний шар емульсії, можна було підрахувати число частинок у цьому шарі. Потому мікроскоп фокусувався на інший шар і знову рахувалась кількість видимих броунівських частинок. Таким шляхом можна було визначити відношення концентрацій n_1/n_2 на різних висотах. Різниця висот вимірювалась мікрометричним гвинтом мікроскопа.



Маса частинки m та маса витісненої води m_{pid} розраховувалась за розмірами частинки та густиною гумігуту (мастики). Розміри частинок неможна було визначити прямим методом, розглядаючи окрему частинку у мікроскоп, оскільки діаметри частинок були порядку чи менше довжини світлової хвилі. При цих умовах розміри зображення помітно збільшуються через дифракцію світла. Однак вплив цього джерела похибок значно зменшиться, якщо вимірювати довжину ряду, що складається з відомої та достатньо великої кількості зернинок, які впритул прилягають одна до одної. Перрен розміщував на предметному столику мікроскопа крапельку сильно розведеної емульсії, не покритої покривним склом. Коли випаровування майже закінчувалось, зернинки збігались під впливом сил поверхневого натягу та збирались місцями у досить правильні рядки, як це видно з рисунку, узятому з роботи Перрена. Підрахувавши число зернинок, витягнутих уздовж прямої лінії відомої довжини, чи число зернинок, що торкаються одне одного на відомій площині, легко розрахувати діаметр окремої зернинки. Таким шляхом з найкращою із своїх емульсій Перрен отримав для діаметра зернинки значення біля 0,37 мкм. Крім цього способу для вимірювання діаметра частинок, Перрен застосував ще два способу, які ми не описуємо. Усі вони привели до узгоджених результатів.



Таким образом, усі величини, що входять у праву частину формули для k , можуть бути виміряні експериментально. Після цього можна розрахувати сталу Больцмана k та число Авогадро $N_A = R/k$. Результати Перрена виявились у відповідності з іншими методами вимірювання цих же сталих. Описані досліди Перрена є простими у ідейному відношенні. Але їх фактичне здійснення потребує величезного труда та великого експериментального мистецтва. Ці класичні досліди були виконані у 1908 – 1911 роках та мали велике значення для затвердження ідей атомістики.

3 Другий принцип термодинаміки

Перший принцип термодинаміки це по суті закон збереження енергії, поширений на теплові процеси. Він визначає кількісні співвідношення при перетвореннях одних видів енергії у інші. Другий принцип термодинаміки визначає умови, при яких ці перетворення можливі. Не усі процеси, що дозволені першим принципом термодинаміки, можливі.

Відомо багато формулювань другого принципу термодинаміки:

- 1) Неможливі процеси єдиним кінцевим результатом яких є перетворення тепла у роботу.
- 2) Неможливі процеси єдиним кінцевим результатом яких є перехід тепла від менш нагрітого тіла до більш нагрітого.

Ці формулювання еквівалентні. Дійсно, якщо б ми могли перетворити цілком тепло у роботу, то потім, наприклад, за допомогою тертя перетворити роботу на тепло, передавши його більш нагрітому тілу.

3.1 Ентропія

Згадані два формулювання еквівалентні третьому:

у *рівноважному процесі* приріст величини $dS = \frac{d'Q}{T}$ є повним диференціалом. Це означає, що при переході системи між двома нескінченно близькими станами величина $dS = \frac{d'Q}{T}$ не залежить від процесу, а залежить тільки від параметрів початкового та кінцевого станів. Зверніть увагу, кількість тепла $d'Q$, яке отримує система, залежить від процесу, а його відношення до температури $dS = \frac{d'Q}{T}$ – ні. Тобто величина S (як і внутрішня енергія U) це функція стану системи. Вона отримала назву *ентропія*.

Яким чином третє формулювання відповідає першим двом?

Розглянемо замкнений процес, зображений на діаграмі $p - V$ (рис.16).

Початковий та кінцевий стани (точка 1) співпадають. Отже $\Delta U = 0$, $Q = A$ (згідно першому принципу термодинаміки). Припустимо, кількість тепла, яке отримала система, дорівнює Q_1 , а віддала – Q_2 . $Q_1 - Q_2 = A = \oint p dV$ (затемнена площа на рис.3.1). А може можна не віддавати тепло? Тобто $A = Q_1$ – тепло повністю перетвориться у роботу. Ні. Справа у тому, що зміна ентропії у замкненому процесі повинна дорівнювати нулю (як і для внутрішньої енергії $\Delta U = 0$), бо вона є функцією стану системи, а у даному процесі початковий та кінцевий стани співпадають:

$$\Delta S = \oint \frac{d'Q}{T} = 0.$$

Але температура є величиною додатною. Тобто величини $d'Q$ не можуть бути додатними на усіх ділянках процесу. Тобто частину тепла система повинна віддавати.

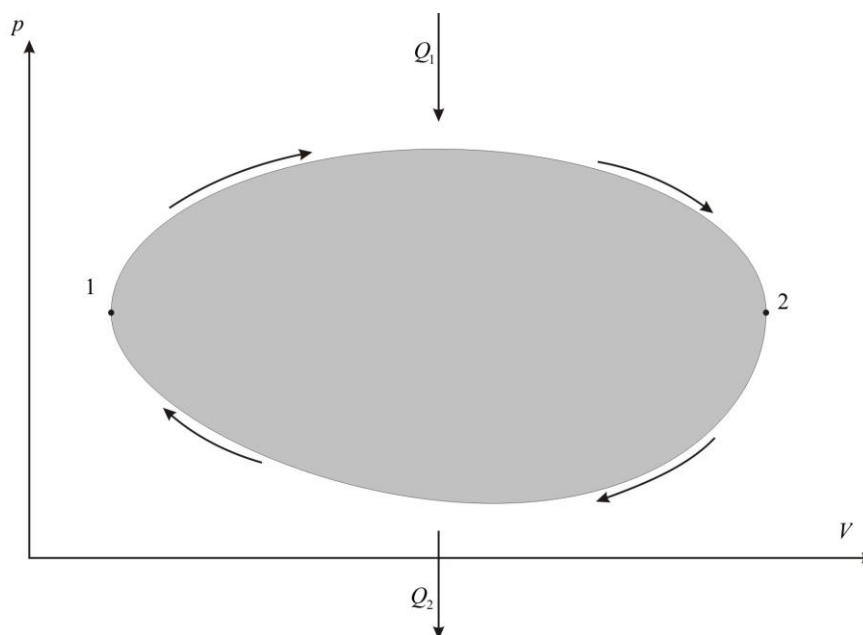


Рис.3.1 Схематичне зображення замкнутого процесу на діаграмі $p - V$.

Нехай у середньому система отримує тепло при температурі T_1 , а віддає при температурі T_2 . Тоді:

$$\oint \frac{d'Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0. \text{ Звідки } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Коефіцієнт корисної дії теплової машини (к.к.д.).

$$\text{К.к.д.} = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

Тобто к.к.д. тим більший, чим більша T_1 та менша T_2 .

Властивості ентропії:

- S це функція стану системи, приріст якої у *рівноважному процесі* $dS = \frac{d'Q}{T}$.

- S – є величиною адитивною.

- Ентропія при усіх процесах у замкненій системі збільшується, чи може залишатися сталою (у рівноважних процесах).

- Підрахувати зміну ентропії за формулою $dS = \int \frac{d'Q}{T}$ у випадку нерівноважного процесу неможливо. У такому разі вигадують уявний рівноважний процес між цими ж станами і розраховують зміну ентропії у ньому. Можна використати будь-який процес, розрахунки при якому є простішими.

3.2 Статистичний зміст другого принципу термодинаміки

Закони руху окремих молекул є оберненими. Якщо замінити вектор швидкості руху молекули на протилежний, то вона почне рухатися у зворотному напрямі так само, як

рухалася уперед. Чому ж тоді процеси з великою кількістю частинок є не оберненими? Як при цьому втрачається оберненість руху окремих молекул? Відчути це можна на основі уявлень про мікро- та макростани системи.

Вважають, що задано *макростан* системи, якщо задані усереднені характеристики стану системи.

Якщо стан системи характеризувано детально, шляхом визначення стану кожної частинки, то вважають, що задано *мікростан* системи.

Кожний макростан системи може бути реалізований різними способами, тобто різними мікростанами. Кількість мікростанів системи, що відповідають даному макростану – *статистична вага* макростану.

Деяке уявлення про це можна отримати з прикладу. Розглянемо способи, якими молекули можуть розподілитися між двома рівними по об'єму половинками посудини (рис.3.2).

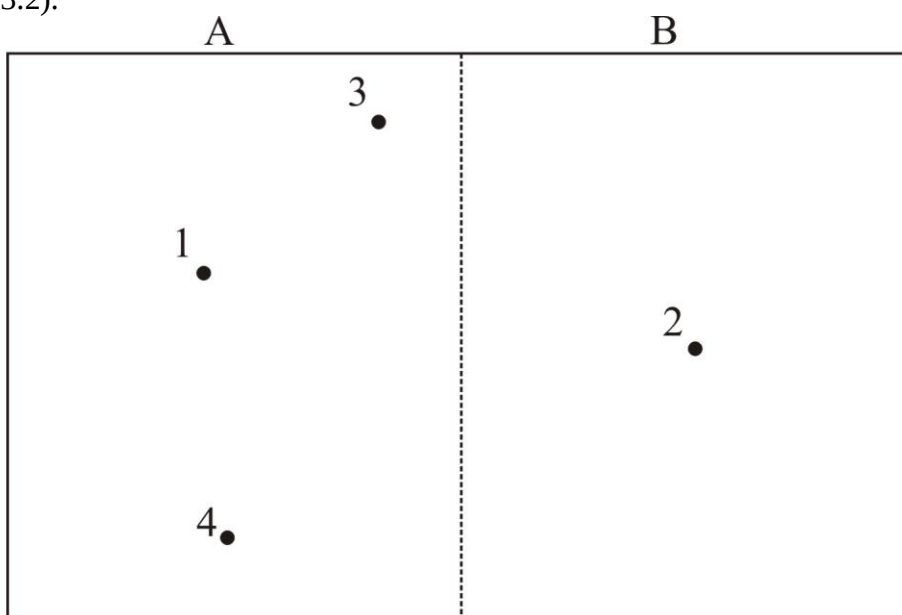


Рис.3.2 Розподіл молекул між двома половинами посудини.

Припустимо, що ведеться спостереження за $N = 4$ молекулами, і на кожній табличка з номером. Імовірність наявності кожної з молекул у певній половині посудини дорівнює $\frac{1}{2}$, імовірність наявності певних двох молекул – $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, трьох – $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, чотирьох – $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ (теорема про множення імовірностей незалежних подій). Імовірність будь-якого конкретного розподілу молекул дорівнює $\left(\frac{1}{2}\right)^N$. Кожний конкретний розподіл будемо вважати мікростаном. Тобто імовірність кожного мікростану $\left(\frac{1}{2}\right)^N$.

Макростаном будемо вважати загальну характеристику розподілу: 0 – 4, 1 – 3, 2 – 2, 3 – 1, 4 – 0 молекул, без урахування їх номеру.

Складемо таблицю: макростани системи та мікростани, які їм відповідають.

Бачимо, що рівномірний розподіл $2 - 2$ має максимальну імовірність. Статистична вага такого макростану є максимальною.

Уявимо, що спочатку усі молекули зосереджені у половині А. Згодом вони переходять у В. Можна сказати – газ розширився. Хоча це і мало імовірно, газ може знову зібратися у половині А. Тобто, у даному випадку, процес розширення газу є оберненим.

Тепер збільшимо кількість молекул до $N = 10$. Імовірність реалізації оберненого процесу дорівнює $(1/2)^{10} \approx 10^{-3}$. У цьому випадку також можна дочекатися реалізації оберненого процесу. А тепер візьмемо реальну кількість молекул $N = 10^{23}$. Імовірність реалізації оберненого процесу становить $(1/2)^{10^{23}} \approx 10^{-3 \cdot 10^{22}}$. Обернений процес є практично неможливим. В той же час імовірність рівномірного розподілу молекул різко зростає.

Таблиця. Макростани системи молекул та мікростани, що відповідають цим мікростанам.

Способи реалізації макростану		Статистична вага макростану	Імовірність макростану
А	В		
–	1, 2, 3, 4	1	1/16
1	2, 3, 4	4	4/16
2	1, 3, 4		
3	1, 2, 4		
4	1, 2, 3		
1, 2	3, 4	6	6/16
1, 3	2, 4		
1, 4	2, 3		
2, 3	1, 4		
2, 4	1, 3		
3, 4	1, 2		
2, 3, 4	1	4	4/16
1, 3, 4	2		
1, 2, 4	3		
1, 2, 3	4		
1, 2, 3, 4	–	1	1/16

Висновок наступний: система переходить з менш імовірного стану у більш імовірний. У цьому суть незворотності процесів. Обернений процес в принципі можливий, але дуже мало імовірний. Тобто, наприклад, процес переходу тепла від менш нагрітого тіла до більш нагрітого можливий, але дуже мало імовірний.

3.3 Ентропія і імовірність

У всіх необернених процесах у замкнених системах ентропія зростає. У той же час це перехід системи з менш імовірного стану у більш імовірний. Можна припустити наявність зв'язку між ентропією та імовірністю стану системи. Таку ідею висунув Больцман і вона виявилася дуже плідною.

Для визначення зв'язку між ентропією та імовірністю розглянемо простий частинний випадок.

Розширення газу у порожнечу (рис.3.3).

Миттєво перенесемо стінку з положення 1 у положення 2. У цьому процесі $A = 0$, $Q = 0$, $\Delta U = 0$ ($T = \text{const}$). Газ з об'єму V_1 перейде до об'єму V_2 та прийде до рівноважного стану. Розрахуємо зміну ентропії у такому процесі. Це нерівноважний

процес. Використати формулу $dS = \int \frac{d'Q}{T}$ неможливо. Вигадаємо рівноважний процес між станами 1 та 2. Наприклад, ізотермічний. У такому процесі:

$$Q = A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

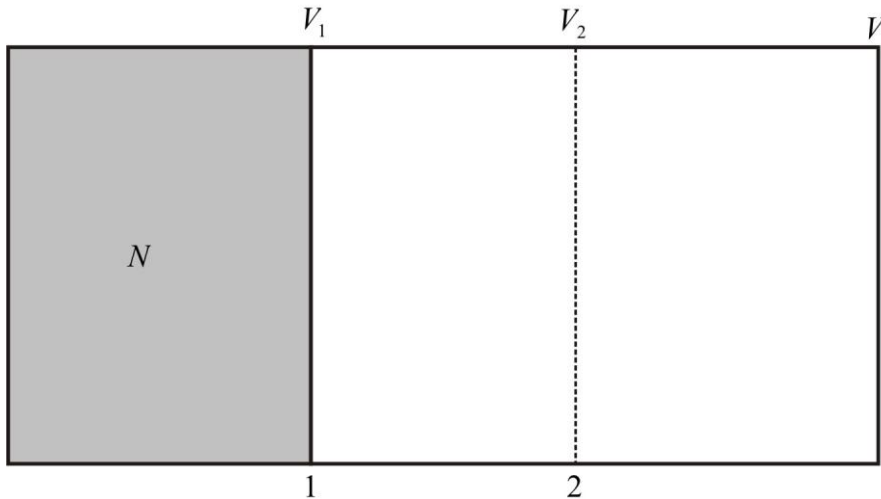


Рис.3.3 Процес розширення газу у порожнечу.

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu k N_A \ln \frac{V_2}{V_1} = N k \ln \frac{V_2}{V_1} = k \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^N$$

Імовірність стану 1 дорівнює $P_1 = \left(\frac{V_1}{V} \right)^N \sim \Omega_1$,

стану 2 – $P_2 = \left(\frac{V_2}{V} \right)^N \sim \Omega_2$, де Ω – статистична вага макростану.

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^N$$

$$\Delta S = k \ln \frac{P_1}{P_2} = k \ln \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$$

Остаточно:

$$S = k \ln \Omega$$

Це один з варіантів знаменитої формули Больцмана.

З даною формулою збігається адитивність ентропії. Дійсно, нехай є дві підсистеми зі статистичною вагою Ω_1 та Ω_2 . Статистична вага загальної системи $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$. Отже $S = S_1 + S_2$.

Наприклад, $\Omega_1 = 2$, $\Omega_2 = 3$.

Розглянемо можливі мікростани системи.

1 система 2 система

1 1, 2, 3

2 1, 2, 3

Усього є можливими 6 мікростанів загальної системи.

Статистична вага Ω характеризує ступінь невизначеності стану системи, тобто ступінь неупорядкованості.

Що таке неупорядкованість? Наприклад, порядок у квартирі. У кожного своє уявлення про нього... Але загальною спільною рисою усіх уявлень є наявність речей у певних місцях. Якщо ж вони із рівною імовірністю можуть опинитися у будь-якому місці, усі будуть вважати це неупорядкованістю. Але саме такий стан є найбільш імовірним, бо має максимальну статистичну вагу.

Виходить, що усі процеси у замкнених системах приводять до збільшення неупорядкованості.

Існує гіпотеза про теплову смерть Всесвіту. Усі види енергії переходять у теплову. Саме цьому виду енергії відповідає найбільша неупорядкованість системи.