

УДК 301.17.15; 532.5;551:465

П.В. Лук'янов

ГЕНЕРАЦІЯ КОМПАКТНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ВИХОРУ: НАБЛИЖЕНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ВІДНОСНО ВЕЛИКИХ МОМЕНТІВ ЧАСУ

The aim of research is to develop the analytical model capable of approximate description of compact turbulent vortex generation by finite power circulation source for relatively large time moments. The method is based on turbulence gradient Boussinesq model according to which turbulent viscosity coefficient has a constant value. The research results show a slight difference between the analytical solution for the model problem with a constant turbulent viscosity coefficient with the one in the experimental turbulent Taylor–Cuette flow, characterized by the specified constant value, except for thin boundary layers. Specifically, we propose a simple analytical model for turbulent vortex generation. It can be used for relatively large time moments when the flow is indeed quasi-steady. The obtained solution can't be used for turbulent diffusion problems when the circulation source stops its action. Then the main assumption for constant turbulent viscosity coefficient is not valid.

Вступ

Дослідження геофізичних вихорів, тобто тих, які спостерігаються у природі, свідчать про їх компактність [1]. На сьогодні відомі моделі компактних вихорів, як ламінарних, так і турбулентних [2, 3]. Умовою компактності циліндричного вихору є компенсованість поля його завихреності [4, 5]. Утім до сих пір більшість дослідників використовують моделі вихорів, що мають нескінченну кінетичну енергію: точковий вихор і вихор Лемба–Озеена [6]. Про їх нефізичність у зазначеному сенсі вказано в монографії [7]. Це означає, що будь-яка реальна ситуація, коли вихори генеруються та існують скінченний проміжок часу, не може описуватись вказаними моделями. Добуток скінченної потужності джерела на скінченний час його дії є завжди скінченна кінетична енергія, що відповідає фундаментальному закону природи – збереженню енергії. Слід зазначити, що вихори мають різну природу. Так, у праці [8] розрізняються просто вихор (vortex) і вир (swirl). Основною відмінністю вихору від виру, згідно з [8], є наявність у першому зони потенціальної течії. Для, умовно називаючи, вирів притаманний опис автотурбулентними розв'язками дифузійного типу. Ця ж робота присвячена саме вихорам – течіям, основна частина області яких є безвихровою.

Ще Ж.В. Буссінеск, який першим намагався описувати турбулентні течії, вказував на можливу несталість коефіцієнта турбулентної дифузії. Дійсно, основною відмінністю турбулентних течій від ламінарних є залежність коефіцієнта турбулентної в'язкості від поля середньої течії [9]. Оскільки компактний вихор має

скінченний розмір у радіальному напрямку, то логічно запозичити інформацію щодо параметризації турбулентності найближчої до нього за змістом турбулентної течії Тейлора–Куетта. Мова йде про стаціонарну течію між двома циліндрами, внутрішній з яких обертається, а зовнішній є нерухомим. Саме Дж. Тейлор [10] і дослідив, експериментально та теоретично, цю течію. Дійсно, при генерації вихору його радіальний розмір збільшується, але якщо це відбувається дуже повільно, то можна вважати таку течію квазістаціонарною і використати експериментальні дані щодо структури стаціонарної турбулентної течії. У [10] є посилання на ще одну працю Дж. Тейлора [11], де вказано, що в атмосфері турбулентність на невеликій відстані від границь є також ізотропною.

Зауважимо, що незалежно від використання тої чи іншої моделі будь-яка нестаціонарна течія зі збільшенням часу буде обов'язково наближатися до свого стаціонарного аналога.

Постановка задачі

Предметом дослідження є формулювання та розв'язання модельної нестаціонарної задачі генерації вихору джерелом циркуляції скінченної потужності. Оскільки в природі у більшості випадків вихори є турбулентними, то розглядається саме турбулентна генерація вихору. Зазначений шуканий розв'язок має задовольняти дві умови: бути компактным і близьким, у цілому, до стаціонарної турбулентної течії, так само як розв'язок для дифузії вихрової нитки добре апроксимується, у кожний фіксований момент часу, вихором (стаціонарним) Ренкіна. Зі сказаного слідує мета роботи – отримання

аналітичного розв'язку та порівняння його з експериментальними даними.

Обґрунтування і межі застосування моделі турбулентності

Розглянемо нестационарне турбулентне обертання рідини, що описується співвідношеннями

$$\bar{V}_\theta = \bar{V}_\theta(r, t); \bar{V}_r = 0; \bar{V}_z = 0,$$

де $\bar{V}_\theta$, $\bar{V}_r$, $\bar{V}_z$ – осереднені значення компонент швидкості в циліндричній системі координат (r, θ, z) .

Для визначення коефіцієнта турбулентної в'язкості нестационарне рівняння Рейнольдса

$$\frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial t} = \frac{2}{r} (-\bar{V}_r' \bar{V}_\theta') + \frac{\partial}{\partial r} (-\bar{V}_r' \bar{V}_\theta')$$

замінімо на його стаціонарний аналог

$$0 = \frac{2}{r} (-\bar{V}_r' \bar{V}_\theta') + \frac{d}{dr} (-\bar{V}_r' \bar{V}_\theta'). \quad (1)$$

Використаємо при цьому класичну модель турбулентності Буссінеска, яка добре зарекомендувала себе для зсувних течій:

$$-\bar{V}_r' \bar{V}_\theta' = A_r \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial r}. \quad (2)$$

де A_r – коефіцієнт турбулентної в'язкості.

Підставляючи (2) в (1), маємо

$$0 = \frac{dA_r}{dr} \frac{d\bar{V}_\theta}{dr} + A_r \left(\frac{d^2 \bar{V}_\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\bar{V}_\theta}{dr} \right). \quad (3)$$

З [10] випливає, що майже в усьому вихорі, за винятком малих пристінних зон, зберігається добуток

$$r \bar{V}_\theta = \text{const}. \quad (4)$$

Підставляючи (3) в (2), отримуємо

$$0 = \frac{dA_r}{dr} \frac{d\bar{V}_\theta}{dr},$$

що еквівалентно, за умови змінного характеру поля швидкості, сталості коефіцієнта турбулентної в'язкості:

$$\frac{dA_r}{dr} = 0. \quad (5)$$

Таким чином, ми отримали грубу (наближену) модель турбулентності за Буссінеском,

яка дає підставу, згідно з (5), використовувати сталий коефіцієнт турбулентної в'язкості. Подібний результат отримав і сам Тейлор, але з позиції розвинутої ним теорії переносу завихреності (Vorticity Transport Theory). Згідно з нею, (формула (5) [10, с. 495]) маємо

$$r \bar{V}_\theta = A r^2 + B. \quad (6)$$

Покладаючи першу константу A в (6) рівною нулеві, отримуємо (4).

Розміри областей (внутрішньої та зовнішньої), де співвідношення (4) не виконується (а отже, коефіцієнт турбулентної в'язкості не є сталою величиною), відносно малі [10]. Для прикладних технічних потреб, наприклад таких, як прогнозування в екології та інших, можна вважати зазначену величину сталою в усій області течії. На інтегральну картину руху це істотно не вплине. Розміри областей течії, де вплив молекулярної в'язкості є істотним, становлять кілька міліметрів, і для природних течій, де розмір вихору варіюється від кількох метрів до кілометрів і більше, можна просто ними кількісно нехтувати. Про це зазначається в усіх підручниках і монографіях з фізики та динаміки атмосфери й океану (геофізична гідромеханіка) на перших їх сторінках при формулюванні основних рівнянь.

Математичне формулювання задачі

Нехай нерухому в початковий момент часу рідину починає приводити в обертання циліндр певного радіуса R_i . На поверхні цього циліндра циркуляція рідини Γ є сталою величиною. Як свідчить експеримент [10], у відносно тонкому шарі, що містить дуже тонкий ламінарний підшар і перехідну турбулентну область, циркуляція швидкості дещо спадає, а потім є сталою аж до зовнішньої границі вихору. Тому, якщо строго, потрібно вважати за R_i початок зони, де виконується умова збереження циркуляції. Математичне формулювання задачі має такий вигляд:

$$\frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial r} \right), \quad (7)$$

$$\bar{V}_\theta(r, 0) = 0, 0 < r < +\infty,$$

$$\bar{V}_\theta(R_i, t) = \Gamma/2\pi, t > 0,$$

$$\bar{V}_\theta(\infty, t) = 0, 0 < t < +\infty.$$

У рівнянні (7) число Рейнольдса відповідає турбулентній в'язкості. Для зручності розв'язання переформулюємо задачу. Перейдемо від шуканої функції азимутальної швидкості $\bar{V}_\theta$ до $U = \bar{V}_\theta \cdot r$ [12]. Для вісесиметричної задачі $U = \bar{V}_\theta \cdot r$ має зміст величини, з точністю до множника, рівної циркуляції поля азимутальної швидкості. Отже, рівняння (7) перетворюється на таке:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}. \quad (8)$$

Крім того, для спрощення розв'язання задачі, зробимо заміну координат:

$$r' = r - R_i. \quad (9)$$

Оскільки в (9) нова і попередня змінні різняться лише на константу (радіус внутрішнього циліндра), рівняння (8) у нових змінних залишиться таким самим. Остаточне математичне формулювання задачі буде таким:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U}{\partial r'^2}, \quad (10)$$

$$U(r', 0) = 0, \quad 0 \leq r' < +\infty,$$

$$U(0, t) = \Gamma/2\pi, \quad 0 < t \leq T_g, \quad (11)$$

$$U(\infty, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty. \quad (12)$$

Розв'язання задачі

Застосуємо синус-перетворення Фур'є. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{U}^{(s)}(\lambda, t)}{dt} &= \frac{1}{\text{Re}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \sin \lambda \xi d\xi = \\ &= -\frac{1}{\text{Re}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial U}{\partial \xi} \sin \lambda \xi \Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \\ &- \frac{1}{\text{Re}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\partial U}{\partial \xi} \cos \lambda \xi d\xi = \\ &= -\frac{1}{\text{Re}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda U \cos \lambda \xi \Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \\ &- \frac{1}{\text{Re}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda^2 \int_0^{+\infty} U(\xi, t) \sin \lambda \xi d\xi = \\ &= -\frac{1}{\text{Re}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \varphi(t) - \frac{1}{\text{Re}} \lambda^2 \bar{U}^{(s)}(\lambda, t). \end{aligned}$$

Отже, в області зображень маємо таке рівняння

$$\frac{d\bar{U}^{(s)}(\lambda, t)}{dt} + \frac{1}{\text{Re}} \lambda^2 \bar{U}^{(s)}(\lambda, t) = -\frac{\Gamma}{\text{Re}} \sqrt{\frac{1}{2\pi^3}} \lambda, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \bar{U}^{(s)}(\lambda, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} U(\xi, t) \sin \lambda \xi d\xi, \quad \bar{U}^{(s)}(\lambda, 0) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} U(\xi, 0) \sin \lambda \xi d\xi. \end{aligned}$$

Розв'язок (13), з урахуванням початкової умови, має такий вигляд [11]:

$$\bar{U}^{(s)}(\lambda, t) = -\frac{1}{\text{Re}} \sqrt{\frac{1}{2\pi^3}} \int_0^t \exp\left[-\frac{1}{\text{Re}} \lambda^2 (t - \tau)\right] \lambda d\tau.$$

Застосувавши обернене синус-перетворення Фур'є, матимемо

$$\begin{aligned} U(r', t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{U}^{(s)}(\lambda, t) \sin \lambda r' d\lambda = \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\text{Re}} \int_0^t \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{\text{Re}} \lambda^2 (t - \tau)\right] \lambda \sin \lambda r' d\lambda \right) d\tau = \\ &= \frac{r'}{2} \sqrt{\frac{\text{Re}}{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{r'^2 \text{Re}}{4} (t - \tau)\right] (t - \tau)^{-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma}{2\pi} d\tau = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left(1 - \text{erf}\left(\sqrt{\frac{\text{Re}}{t}} \frac{r'}{2}\right) \right), \quad t > 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Фізичний аналіз отриманого розв'язку

Азимутальна швидкість, згідно з (14), має такий розподіл у часі та просторі:

$$\bar{V}_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \text{erf}\left(\sqrt{\frac{\text{Re}}{t}} \frac{(r - R_i)}{2}\right) \right], \quad (15)$$

де $R_i \leq r < +\infty$.

Оскільки функція похибок erf при значеннях аргументу, рівних 3, вже не відрізняється від асимптоти більш ніж на 0,001, то розв'язок (15) є компактним за Сеффменом (експоненційне спадання) у будь-який скінченний момент часу.

Тепер перейдемо до порівняння отриманого розв'язку з експериментальною залежністю (4). Із (15) вираз (4) отримується як граничний перехід, коли час генерації є нескінченним:

$$\lim_{t \rightarrow \infty, r < +\infty} \bar{V}_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Із розв'язку (15) випливає, що в безрозмірних координатах він залежить лише від значень виразу $\sqrt{\frac{\text{Re}}{t}}$. Отже, від нього залежить точність припущення про сталість коефіцієнта турбулентної в'язкості. На рис. 1 зображені радіальні розподіли азимутальної швидкості за значень $\sqrt{\frac{\text{Re}}{t}} = 1; 0,32; 0,1$. Тим же значенням вказаного параметра відповідають криві, подані, для зручності аналізу, в логарифмічних координатах. Оскільки логарифм є показником степеня, то рис. 2 яскраво свідчить про збіжність розв'язку (15) до гіперболічної залежності. Дійсно, крива 1 на рис. 2 майже не відхиляється від прямої з кутовим коефіцієнтом, рівним -1 . Це і є підґрунтям для застосування моделі зі сталим коефіцієнтом турбулентної в'язкості для прикладних задач, де важлива інтегральна поведінка цілого вихору.

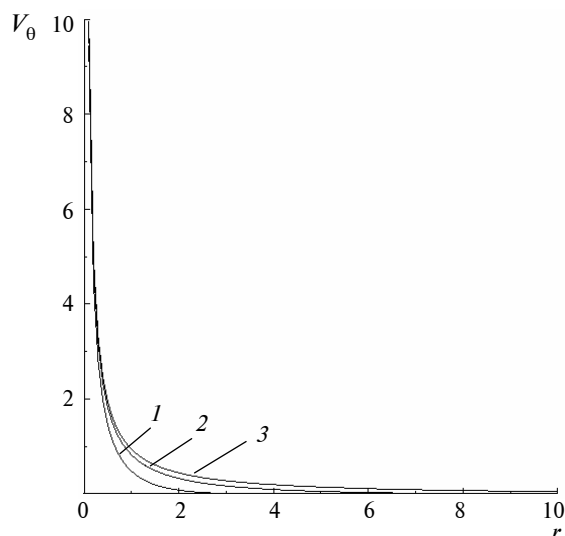


Рис. 1. Розподіл азимутальної швидкості для різних значень $\sqrt{\frac{\text{Re}}{t}}$: 1 – 1; 2 – 0,32; 3 – 0,1

Покажемо, що отриманий розв'язок збігається з автомодельним. Позначимо шуканий автомодельний розв'язок рівняння (10) та автомодельну змінну відповідно

$$U_s = U_s(\eta), \quad \eta = r'/t^b. \quad (16)$$

Підстановка (16) в рівняння (10) дає

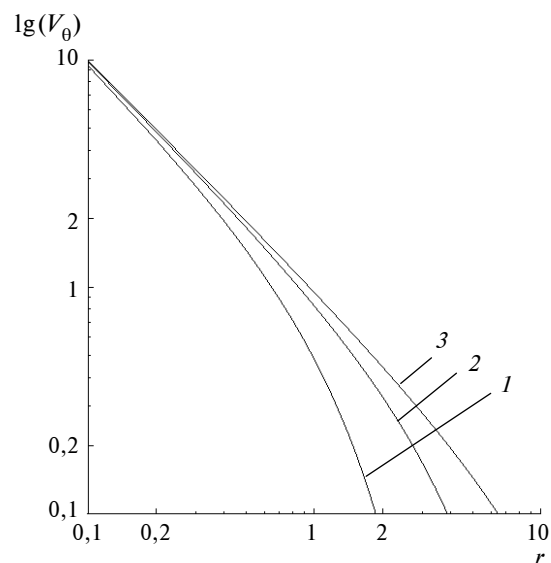


Рис. 2. Розподіли швидкості в логарифмічних координатах для значень $\sqrt{\frac{\text{Re}}{t}}$: 1 – 1; 2 – 0,32; 3 – 0,1

$$\frac{dU_s}{d\eta} \frac{(-b)}{t} \eta = \frac{1}{\text{Re} t^{2b}} \frac{d^2 U_s}{d\eta^2},$$

звідки випливає, що $b = 0,5$, та автомодельне рівняння

$$-\frac{\eta}{2} \frac{dU_s}{d\eta} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 U_s}{d\eta^2},$$

загальним розв'язком якого є

$$U_s(\eta) = C_1 \text{erf}\left(\frac{\sqrt{\text{Re}}}{2} \eta\right) + C_2. \quad (17)$$

Константи C_1 і C_2 у (17) визначаються з граничних умов (11), (12). У решті-решт маємо

$$U_s(\eta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(1 - \text{erf}\left(\frac{\sqrt{\text{Re}}}{2} \eta\right) \right).$$

Переходячи до фізичних змінних (часу та радіальної координати), отримаємо

$$V_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \text{erf}\left(\sqrt{\frac{\text{Re}}{t}} \frac{(r - R_i)}{2}\right) \right). \quad (18)$$

Вираз (18) повністю збігається з (15), що і треба було показати.

З (18) випливає, що хоча розміри вихору в часі постійно збільшуються, він завжди є ком-

пактним, на відміну від автомодельного розв'язку молекулярної дифузії – вихору Лемба–Озеена [6], який завжди за скінченних значень часу не є компактним.

При “відключенні” джерела циркуляції структура вихору змінюється: максимум азимутальної швидкості переміщується всередину. За таких обставин припущення про сталість коефіцієнта турбулентної в'язкості вже не виконується, оскільки порушується співвідношення (4).

Висновки

На підставі аналізу праці Тейлора [10] та численних експериментальних підтверджень запропонована спрощена наближена модель генерації та турбулентної дифузії вихору. Вона базується на градієнтній моделі турбулентності Буссінеска, згідно з якою коефіцієнт турбулентної в'язкості отримується як стала величина.

Отримано аналітичний розв'язок модельної задачі і показано межі його використання в термінах комбінації безрозмірного часу та турбулентного числа Рейнольдса. Цей розв'язок повністю збігається з автомодельним, що також отриманий у роботі.

На відміну від існуючих моделей нестационарної динаміки, запропонований підхід дає змогу вихору в кожний скінченний момент часу бути компактним, що узгоджується із законом збереження енергії та скінченністю фізичних об'єктів у природі в цілому [14].

Перспективою подальших досліджень є застосування диференціальних моделей турбулентності для тих задач, де є важливим врахування перехідних ламінарно-турбулентних пристінних зон. Результати роботи можуть бути використані в гідроаеромеханіці при моделюванні квазістационарних процесів генерації вихрових течій.

1. Козлов В.Ф. Стационарные модели бароклинных компенсированных вихрей // Известия АН. Физика атмосферы и океана. – 1992. – 28, № 6. – С. 615–624.
2. Лукьянов П.В. Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое устойчиво стратифицированной жидкости // Прикл. гидромеханика. – 2006. – 8, № 3. – С. 63–77.
3. E.J. Hopfinger and G.J.F. van Heijst, “Vortices in rotating fluids”, Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 25, pp. 241–289, 1993.
4. Лук'янов П.В. Одновимірні моделі компактних компенсованих вихорів // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2010. – № 4. – С. 145–150.
5. Лукьянов П.В. Модели компактных компенсированных вихрей и их применение в задачах механики жидкости и газа // Прикл. гидромеханика. – 2011. – 13, № 2. – С. 37–43.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
7. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур. – К.: Наук. думка, 1993. – 279 с.
8. S.M. Ueberoi, “Structure of turbulent swirl”, The Physics of Fluids, vol. 20, no. 5, pp. 719–720, 1977.
9. A.A. Townsend, The structure of turbulent shear flow. Cambridge University Press, 1956, 315 p.
10. G.I. Taylor, “Distribution of velocity and temperature between concentric cylinder”, Proc. Roy. Soc. A, vol. 157, no. 892, pp. 494–512, 1935.
11. G.I. Taylor, “Turbulence”, Quartely J. Royal Meteorological Soc., vol. 53, no. 223, pp. 201–212, 1927.
12. Жарий О.Ю., Улитко А.Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. – К.: Вища школа, 1989. – 184 с.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
14. Бетяев С.К. Гидродинамика: проблемы и парадоксы // Успехи физ. наук. – 1995. – 165, № 3. – С. 299–330.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
7 лютого 2013 року