

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**Ю. В. Куц,
Ю. Ю. Лисенко
А.С. Момот**

НОВІТНІ СИСТЕМИ ТА ТЕХНОЛОГІЇ

ЧАСТИНА І. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ПОБУДОВИ ТА ОПРАЦЮВАННЯ ДАНИХ В КОМП'ЮТЕРНО- ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМАХ НКТД

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в
приладобудуванні»
спеціальності 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент

*Баженов В.Г., к.т.н., доцент,
КПІ ім. Ігоря Сікорського
Єременко В.С., д.т.н., професор,
КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Відповідальний
редактор

Петрик В.Ф., к.т.н., доцент

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 24.06.2022 р.)
за поданням Вченої ради Приладобудівного факультету
(протокол № 5/22 від 30.05.2022 р.)*

Широке використання комп'ютерної техніки створює нові умови для розвитку комп'ютерно-інтегрованих систем неруйнівного контролю та технічної (КІС НКТД), що дає змогу автоматизувати процес контролю та діагностики, підвищити вірогідність контролю за рахунок виключення або зведення до мінімуму ролі оператора у прийнятті рішень, застосування більш потужних методів цифрового оброблення інформаційних сигналів, статистичних методів опрацювання експериментальних даних. Навчальний посібник присвячено питанням побудови новітніх автоматизованих КІС НКТД та технології опрацювання інформаційних сигналів в них та приведено приклади побудови таких систем. Приведено довідковий матеріал для ознайомлення та розуміння процесів.

Даний посібник призначений для здобувачів ступеня магістр спеціальності «Автоматизація і комп'ютерно-інтегровані технології» та споріднених спеціальностей, а також наукових та інженерно-технічних працівників, фахівців, які займаються розробленням комп'ютерно-інтегрованих систем та технологій у галузі приладобудування з метою реалізації неруйнівного контролю та діагностики об'єктів.

Реєстр. № НП 21/22-669. Обсяг 5,6 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© Ю. В. Куц, Ю. Ю. Лисенко, А.С. Момот
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. ФОРМУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ В КІС НКТД.....	5
2. ТИПОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ СИГНАЛИ В КІС НКТД	20
3. ОПРАЦЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ КІС НКТД В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ.....	31
4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ГІЛЬБЕРТА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В АНАЛІЗІ ЦИКЛІЧНИХ СИГНАЛІВ КІС НКТД В ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ	48
5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ВИПАДКОВИХ ФАЗОВИХ ЗСУВІВ СИГНАЛІВ	65
6. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ РОЗПОДІЛЕНИХ НА КОЛІ ВИПАДКОВИХ ФАЗОВИХ ЗСУВІВ СИГНАЛІВ	85
7. РОБОТИЗОВАНА СИСТЕМА ВИХРОСТРУМОВОГО КОНТРОЛЮ ОБ'ЄКТІВ ЗІ СКЛАДНОЮ ГЕОМЕТРИЧНОЮ ФОРМОЮ	98
8. АКУСТИЧНА КОРЕЛЯЦІЙНА СИСТЕМА ПОШУКУ ТЕЧІ В НАПІРНИХ ТРУБОПРОВОДАХ	108
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	119
ДОДАТОК 1.....	121

ВСТУП

Діагностування та перевірку якості 100% продукції можливо здійснити лише застосовуючи методи неруйнівного контролю. У загальному розумінні неруйнівний контроль – це сукупність методів, технічних засобів та методик їх застосування для визначення показників якості матеріалів та виробів без порушення їх властивостей та функціонування. Неруйнівний контроль базується на взаємодії об'єктів контролю (ОК) з речовинами або фізичними полями різної природи і аналізі змінених характеристик поля чи ОК або аналізі тих фізичних явищ, які супроводжують процес такої взаємодії.

Широке використання комп'ютерної техніки створює нові умови для розвитку комп'ютерно-інтегрованих систем неруйнівного контролю та технічної (КІС НКТД), що дає змогу автоматизувати процес контролю та діагностики, підвищити вірогідність контролю за рахунок виключення або зведення до мінімуму ролі оператора у прийнятті рішень, застосування більш потужних методів цифрового оброблення інформаційних сигналів, статистичних методів опрацювання експериментальних даних.

Створення нових КІС НКТД для різних технічних застосувань ґрунтується на певному методологічному базисі, який включає: фізичні основи застосовуваних полів та випромінювань різної фізичної природи, принципи побудови первинних вимірювальних перетворювачів, створення електронних трактів опрацювання вимірювальних сигналів, використання засобів обчислювальної техніки, програмне забезпечення процесу оброблення сигналів, виявлення діагностичних ознак, статистичне оброблення експериментальних даних тощо.

Навчальний посібник містить навчальний матеріал з питань побудови новітніх автоматизованих КІС НКТД та технології опрацювання інформаційних сигналів в таких системах, приклади побудови таких систем.

Частина 1

Загальні питання побудови та опрацювання даних в комп'ютерно-інтегрованих системах НКТД

1. ФОРМУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ В КІС НКТД

Сучасний рівень розвитку виробництва, постійно зростаючі вимоги до надійності та безпеки експлуатації складних інженерних споруд і технічних систем вимагають проведення їх 100% діагностики на всіх етапах виробництва і експлуатації. Це обумовлено тим, що такі системи мають значний небезпекостворюючий потенціал. Тому «економія» на контролі якості продукції, особливо під час її виробництва, може мати фатальні наслідки, призвести до великих аварій та катастроф, збитки від яких не піддаються обрахуванню. Провідні держави світу витрачають значні кошти на контроль якості промислової продукції – в середньому 1-3% від вартості продукції, і до 12-18% в таких галузях як атомна енергетика, літакобудування, ракетобудування.

1.1. Загальні поняття та визначення в предметній області КІС НКТД

Забезпечення експлуатаційної надійності, безпеки й довговічності технічних об'єктів – складне науково-технічне та інженерне завдання, пов'язане з організацією достовірного контролю матеріалів і виробів на всіх етапах життєвого циклу від проектування до утилізації. Це завдання вирішує *діагностика* – галузь знань, що вивчає теорію і методи організації процесів постановки діагнозу, а також принципи побудови засобів діагностування.

Технічна діагностика – це галузь знань, що охоплює теорію, методи й засоби визначення технічного стану об'єктів (за ГОСТ 20911-89). Одним з важливих завдань технічної діагностики (встановлення діагнозу) є пошук несправностей, дефектів тобто вказівка на місце і, за можливості, на причини їх виникнення.

Діагностика вирішує три завдання з формування :

- діагнозу, тобто визначення стану об'єкта в поточний момент часу;
- прогнозу, тобто завбачення стану об'єкта в майбутньому;
- генезу (генез – походження, виникнення), тобто визначення стану, в якому знаходився об'єкт у минулому.

Для розв'язання цих завдань необхідна наявність спеціальних систем діагностики, які дають змогу отримувати об'єктивну інформацію про досліджувані матеріали, вироби і об'єкти та формувати діагнози.

Взаємодіючі між собою об'єкт і засіб діагностування утворюють систему діагнозу. Процес дослідження в системі діагнозу в загальному випадку уявляє багатоетапну подачу на об'єкт певних впливів (вхідних сигналів) і багаторазове вимірювання і аналіз реакції останнього у вигляді сформованих сигналів.

Для кількісного оцінювання технічного стану об'єкта зазвичай використовують певні *контрольовані параметри*. Параметр в НКТД – це будь яка фізична величина, що прийнята для визначення відмінності даного стану від інших станів об'єкту. Контрольовані параметри системи діагностики визначають через вимірювання параметрів сигналів технічними засобами діагностики.

Система діагности в широкому розумінні – це сукупність засобів діагностування та виконавців, призначена для встановлення діагнозу за правилами, що регламентовані відповідною технічною документацією. Завданням такої системи є встановлення стану ОД, тобто формування діагнозу.

Комп'ютерно-інтегровані системи технічної діагностики (КІС ТД) та неруйнівного контролю (КІС НК) – це відповідно системи технічної діагностики чи неруйнівного контролю, реалізовані на основі використання комп'ютерної техніки.

Інформаційно-вимірювальні технології – це сукупність теоретичного, алгоритмічного та апаратно-програмного забезпечення, інтегрованих з метою збирання, накопичення, опрацювання і використання вимірювальної інформації для формування результатів вимірювань, контролю та прийняття діагностичних рішень про стан об'єкта діагностування (ОД). Рішення про стан ОД чи ОК може бути ефективним у разі, коли воно ґрунтується на правдивій, об'єктивній інформації. Що ж таке *інформація*?

Це поняття настільки широко увійшов в науковий, технічний та побутовий лексикон, що зміст цієї філософської категорії вбачається інтуїтивно зрозумілим. Проте будь-яке її змістовне визначення натикається на певні світоглядні труднощі, буде неповним і обмеженим хоча б тому, що границі розуміння цієї категорії постійно розширюються. Інформація поряд з категоріями матерії та енергії необхідно розглядати як первинне поняття нашого світу, яке у строгому розумінні не може бути визначене. Але її можна подати через сукупність властивостей:

- інформація надає нові відомості про об'єкти, явища і процеси, тобто вона зменшує невизначеність нашого уявлення про навколишній світ;
- інформація подається у формі матеріальних носіїв повідомлень, зрозумілих кінцевому споживачеві;
- інформація може бути об'єктом операцій сприйняття, накопичення, перетворення, використання і передачі, тобто об'єктом інформаційних технологій;
- одна і та сама інформація може бути доступна одночасно багатьом споживачам (на відміну від об'єктів матеріального світу); ця властивість може бути використана як для прискорення процесу розвитку людства, так і його руйнування шляхом створення зброї масового знищення – знищення свідомості людини!

Зазвичай використовувані в КІС НК ТД технології ґрунтуються на комп'ютерному опрацюванні інформаційних сигналів, які породжуються в процесі функціонування чи дослідження ОК чи ОД. Передбачається, що такі сигнали містять інформацію про кількісні і якісні показники поточного стану об'єктів, а задача інформаційної технології – виділити (добути) цю інформацію з сигналу.

Кожна задача діагностики та контролю унікальна. Її унікальність полягає у:

- різноманітті фізико-механічних властивостей матеріалів і об'єктів;
- різноманітті умов формування матеріалів та експлуатації виробів, і як наслідок урізноманітнення їх дефектів;
- обмеженому обсязі вимірювальної інформації, на основі якої приймають рішення про стан об'єктів;
- отриманні інформації про стан об'єктів через параметри і характеристики інформаційних сигналів, що формуються як відгуки на різні стимулюючі дії;

- обмеженій точності вимірювання параметрів інформаційних сигналів.

Процеси діагностування та контролю ґрунтуються на отриманні і опрацюванні вимірювальної інформації, яка має свої особливості:

- отримувана за реалізацією вимірювальних експериментів інформація представляється у вигляді іменованих чисел – числа і розмірності;
- інформація отримується експериментальним шляхом (по суті має об'єктивний характер, але отримувані числові значення фізичних величин дещо суб'єктивні, оскільки залежать від прийнятої системи одиниць);
- вона має ймовірнісний характер внаслідок неминучих похибок вимірювання.

1.2. Загальна характеристика методів неруйнівного контролю

Важливими критеріями високої якості продукції є фізичні, геометричні та функціональні показники, а також певні технологічні ознаки, наприклад, відсутність неприпустимих дефектів, відповідність фізико-механічних властивостей і структури основного матеріалу та покриття існуючим нормам, відповідність геометричних розмірів і чистоти обробки поверхні нормативам.

Широке застосування методів НК, які не потребують руйнування виробів, дає змогу уникнути великих втрат часу і матеріальних ресурсів, забезпечити часткову або повну автоматизацію операцій контролю за одночасного значного підвищення якості і надійності контролю виробів на етапах їх виробництва та експлуатації.

До методів НК висуваються наступні основні вимоги:

- можливість здійснення контролю на всіх стадіях виготовлення, експлуатації та ремонту виробів;
- можливість контролю якості продукції для більшості заданих параметрів;
- узгодженість часу, що витрачається на контроль, з часом роботи іншого технологічного обладнання;
- висока достовірність результатів контролю;
- можливість автоматизації контролю технологічних процесів;
- простота методик НК, технічна доступність засобів НК в умовах виробництва, ремонту і експлуатації;

- висока надійність засобів НК, можливість використання їх за різних умов.

Клас *фізичних методів НК* складають методи, які ґрунтуються на дії фізичних полів або речовин на ОК або на реєстрації полів, що створюються самим ОК. Під «об'єктом» розуміється все, що може бути індивідуально описане і розглянуте.

Залежно від виду речовин чи фізичних полів для технічного застосування визначено 9 видів НК:

- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| ▪ МАГНІТНИЙ НК (МНК) | ▪ ОПТИЧНИЙ НК (ОНК) |
| ▪ ЕЛЕКТРИЧНИЙ НК (ЕНК) | ▪ РАДІАЦІЙНИЙ НК (РНК) |
| ▪ ВИХРОСТРУМОВИЙ НК (ВСНК) | ▪ АКУСТИЧНИЙ НК (АНК) |
| ▪ РАДІОХВИЛЬОВИЙ НК (РХНК) | ▪ КОНТРОЛЬ ПРОНИКАЮЧИМИ |
| ▪ ТЕПЛОВИЙ НК (ТНК) | РЕЧОВИНАМИ (ТЕЧОШУКАННЯ |
| | ТА КАПЛЯРНИЙ КОНТРОЛЬ) |

Перші 7 видів НК використовують поля електромагнітної природи. Розподіл частот електромагнітних коливань між різними видами НК подано на рис. 1.1. Перші три види – магнітний, електричний та вихрострумовий, в науково-технічній літературі об'єднуються під однією спільною назвою – електромагнітний НК. Восьмий вид НК – акустичний, базується на використанні механічних коливань, є одним з найбільш інформативних і тому набув значного поширення в останній час.

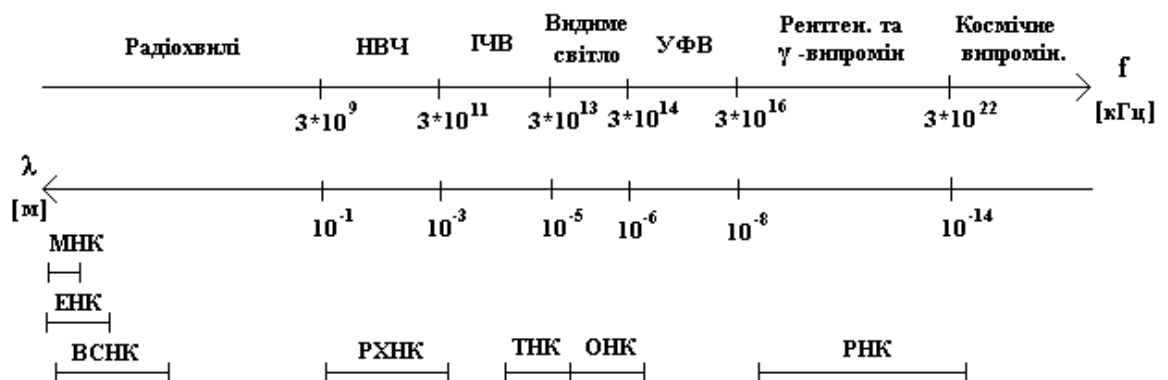


Рис. 1.1. Розподіл частот електромагнітних коливань між різними видами НК
ВЧ – надвисокі частоти, ІЧВ – інфрачервоне випромінювання, УФВ –
ультрафіолетове випромінювання

Для кожного виду НК в даний час існує велика кількість різних методів, які класифікуються за такими ознаками :

- характером взаємодії фізичних полів або речовин з ОК;
- первинним інформаційним параметрам;
- способам отримання первинної інформації.

Наведемо стислу характеристику видів НК і методів, що відрізняються характером взаємодії фізичних полів з ОК.

Магнітний НК (МНК) базується на аналізі взаємодії магнітного поля з ОК. МНК застосовують для контролю ОК з феромагнітних матеріалів. За допомогою магнітних методів можуть бути виявлені гартівні і шліфувальні тріщини, волосовини, втомні тріщини, інші поверхневі дефекти шириною розкриття декілька міліметрів, товщина захисних немагнітних покриттів на феромагнітній основі.

Електричний НК (ЕНК) базується на реєстрації та аналізі параметрів електричного поля, що взаємодіє з ОК або поля, що виникає в ОК у результаті зовнішньої дії. За характером взаємодії поля з ОК розрізняють методи: ємнісний, трибоелектричний, електропорошковий, термоелектричний, електропотенціальний, електроіскровий та ін. Різні методи ЕНК застосовують для контролю виробів як з електропровідних та і з діелектричних матеріалів.

Вихорострумний НК (ВСНК) базується на аналізі взаємодії зовнішнього змінного електромагнітного поля з електромагнітним полем вихрових струмів, що наводяться в ОК. ВСНК застосовується тільки для виробів з електропровідних матеріалів. Особливість ВСНК полягає в тому, що його можна проводити без механічного контакту перетворювача та ОК, що дає змогу автоматизувати контроль та одержувати задовільні результати за високих швидкостей руху ОК.

Радіохвильовий НК (РХНК) базується на реєстрації та аналізі змін параметрів електромагнітного поля радіодіапазону, що взаємодіє з ОК. Зазвичай застосовують радіохвилі довжиною 1...100 мм. За характером взаємодії поля з ОК розрізняють методи: пройшовшого через ОК випромінювання; відбитого випромінювання; розсіяного випромінювання; резонансний. РХНК застосовують для контролю виробів з матеріалів, в яких радіохвилі не сильно згасають, наприклад, діелектриків, феритів, тонкостінних металевих листів тощо.

Тепловий НК (ТНК) базується на реєстрації та аналізі викликаних дефектами змін температурних або теплових полів ОК. За характером взаємодії поля з ОК розрізняють методи власного випромінювання, конвективний та тепловий контактний. Цими методами контролюють різні ОК з будь-яких матеріалів.

Оптичний НК (ОНК) базується на реєстрації та аналізі параметрів оптичного випромінювання, що взаємодіє з ОК. За характером взаємодії розрізняють методи:

- пройшовшого випромінювання;
- розсіяного випромінювання;
- відбитого випромінювання;
- індукованого випромінювання.

Методи ОНК мають невисоку чутливість, тому застосовуються виключно для виявлення великих поверхневих дефектів, слідів течії, залишкових деформацій, пошкодження конструкцій і т.і.

Радіаційний НК (РНК) ґрунтується на реєстрації та аналізі іонізуючого випромінювання після взаємодії з ОК. Залежно від природи іонізуючого випромінювання РНК розділяється на підвиди – рентгенівський, нейтронний і т.п. За характером взаємодії поля з ОК розрізняють методи:

- пройшовшого випромінювання;
- активаційного аналізу;
- розсіяного випромінювання;
- характеристичного випромінювання.

РНК використовується для контролю ОК з різних матеріалів – великих литих деталей, товстостінних заготовок і зварних з'єднань.

Акустичний НК (АНК) базується на реєстрації та аналізі параметрів пружних хвиль, що збуджуються або виникаються в ОК. У випадку використання пружних хвиль ультразвукового діапазону (понад 20 кГц) замість терміну «акустичний» зазвичай застосовують термін «ультразвуковий». За характером взаємодії поля з ОК розрізняють методи:

- проходження;
- імпедансний;
- відбиття;
- вільних коливань;
- резонансний;
- акустико-емісійний.

АНК широко застосовується для контролю зварних з'єднань, посудин тиску, великих литих деталей, товстостінних заготовок і ін.

Неруйнівний контроль проникаючими речовинами базується на проникненні пробних речовин (рідини або газу) в порожнини дефектів ОК. Методи цього виду розділяються на два підвиди – капілярні і течешукування. Методи течешукування використовуються тільки для виявлення наскрізних дефектів, капілярні методи – для виявлення невидимих або слабо видимих неозброєним оком поверхневих і наскрізних дефектів ОК.

Для підвищення вірогідності контролю застосовують комплексування різних методів НК.

В цілому різні методи і засоби НК вирішують завданн дефектоскопії, дефектометрії, товщинометрії та структуроскопії.

Дефектоскопія – це область НК, призначенням якої є виявлення дефектів типу порушення суцільності матеріалу ОК, цілісності або однорідності макроструктури, відхилень хімічного складу і т.і.

Дефектометрія – це область НК, яка призначена для оцінюванням геометричних розмірів дефектів та визначення їх місця розташування в ОК.

Товщинометрія – це область НК, яка призначена для визначення товщини шару захисного покриття на ОК чи товщини ОК.

Структуроскопія – це область НК, яка займається визначенням фізико-механічних властивостей або хімічного складу матеріалу ОК.

1.3. Порівняння руйнівних і неруйнівних методів контролю

Переваги руйнівних методів контролю

1. Випробування зазвичай імітують одне або декілька робочих умов. Отже, вони безпосередньо спрямовані на оцінювання експлуатаційної надійності ОК.

2. Випробування зазвичай являють собою кількісні вимірювання руйнівних навантажень або терміну роботи до руйнування за заданих навантажень і умов. Отже вони дають змогу отримати числові дані, корисні для конструювання та розроблення стандартів чи специфікацій. Зв'язок між більшістю результатів вимірювань методами руйнівного контролю і вимірюваними властивостями матеріалів (особливо під навантаженням, що імітує робочі умови) зазвичай прямий.

Ці методи здебільшого використовують для встановлення кореляційних зв'язків між параметрами та характеристиками ОК.

Недоліки та обмеження використання руйнівних методів контролю

1. Випробування не проводять на ОК в умовах експлуатації. Отже, відповідність між випробовуваними об'єктами і об'єктами в реальних умовах експлуатації має бути доведена в інший спосіб.

2. Випробування можуть проводитися тільки на частині виробів з партії. Вони мають невелику цінність у випадку, коли в межах партії властивості змінюються від виробу до виробу.

3. Часто випробування неможливо проводити на цілій деталі. Випробування в цьому випадку обмежуються зразком, вирізаним з деталі або спеціального матеріалу, що мають ідентичні властивості.

4. Одиничне випробування з руйнуванням може визначити тільки одне або кілька властивостей, які можуть впливати на надійність ОК в робочих умовах.

5. Накопичені зміни протягом певного періоду часу не можна виміряти на одній окремій деталі. Якщо кілька деталей з однієї партії випробовуються послідовно протягом певного часу, потрібно довести, що деталі були однаковими. Якщо деталі працюють в робочих умовах і видаляються після різних періодів часу, необхідно довести, що кожна була схильна до впливу аналогічних робочих умов.

6. У випадку, якщо деталі виготовлені з дорогого матеріалу, вартість заміни поламаних деталей може бути дуже висока. Тому стає проблематичним реалізувати необхідну кількість і різновиди руйнівних випробувань.

7. Значна кількість руйнівних методів випробувань вимагає механічного або іншого попереднього оброблення зразку, наявності спеціального обладнання. В результаті вартість випробувань зростає. Такі випробування надто трудомісткі і можуть проводитися тільки працівниками високої кваліфікації.

8. Руйнівні випробування вимагають великої витрати людської праці. Виробництво деталей коштує надзвичайно дорого, якщо відповідні тривалі випробування застосовуються як основний метод контролю якості продукції.

9. Руйнівні методи контролю доцільно використовувати як допоміжні на етапі вивчення закономірностей перебігу процесу втрати виробом необхідних властивостей – міцності, твердості, розмірів, складу матеріалу тощо, та виявлення кореляційних зв'язків між характеристиками ОК (ОД) та діагностичними ознаками.

Переваги неруйнівних методів контролю

1. Випробування проводяться безпосередньо на виробах, які будуть працювати чи вже працюють в робочих умовах.

2. Випробування можна проводити на будь-якій деталі, призначеній для роботи в реальних умовах, якщо це економічно обґрунтовано.

3. Випробування можна проводити на всій деталі або на її найнебезпечніших ділянках. Певна кількість небезпечних з точки зору експлуатаційної надійності ділянок деталі можуть бути досліджені одночасно або послідовно.

4. Можуть бути проведені випробування декількома методами НК, кожен з яких чутливий до різних властивостей або дефектів деталі. Отже є можливість визначати необхідну кількість різних властивостей ОК за робочих умов.

5. Методи НК часто можна застосовувати до деталі в робочих умовах, без припинення роботи. Вони не порушують і не змінюють характеристик деталей.

6. Методи НК дають змогу застосувати повторний контроль деталей протягом будь-якого періоду часу. Таким чином, може бути досліджена динаміка процесу ушкодження деталі в процесі її експлуатації.

7. У випадку застосування методів НК деталі, виготовлені з дорогого матеріалу, не виходять з ладу. Можливі повторні випробування під час виробництва або експлуатації, коли вони економічно і практично виправдані.

8. Вартість методів НК в цілому нижча вартості руйнівних методів контролю.

Недоліки та обмеження на використання неруйнівних методів контролю.

1. Випробування зазвичай включають непрямі вимірювання властивостей. Зв'язок між отриманими експериментальними даними і експлуатаційною надійністю повинен бути доведений в інший спосіб.

2. Випробування зазвичай якісні і рідко – кількісні. Зазвичай вони не дають можливості визначення руйнівних навантажень і терміну служби до руйнування.

3. Зазвичай потрібні дослідження на спеціальних зразках і дослідження робочих умов для інтерпретації результатів випробування. Там, де відповідний зв'язок не був встановлений, і у випадках, коли можливості методики обмежені, дослідники можуть не дійти згоди в однозначній оцінці результатів випробувань.

1.4. Предметна область, завдання та узагальнена структура систем НК

Галузі застосування систем НКТД. Забезпечення надійності, довговічності й безпечної експлуатації технічних об'єктів, виробів та матеріалів – складне завдання. Для його вирішення необхідна наявність спеціальних систем НКТД, що дають змогу одержувати інформацію від ОК, опрацьовувати її та робити висновки щодо відповідності певних характеристики та параметрів умовам безпечної експлуатації. Системи НК застосовуються практично у всіх галузях господарства, науки та техніки. Об'єктами контролю можуть бути технічні б'єкти та речовини у різних агрегатних станах, в статичному і динамічному режимах. Методи НК ґрунтуються на використанні різних фізичних полів та речовин, а їх реалізація потребує вимірювання значної кількості різнорідних фізичних величин. На сьогодні можна навести наступні відомості про кількість доступних вимірюванню величин: кількість електричних і магнітних величин не перевищує 100; кількістю неелектричних величин на початок ХХІ ст. перевищує 4000 і постійно збільшується.

З огляду на значне коло завдань НК, різноманітність видів і методів контролю та ОК отримання результату в системах НК може ґрунтуватись на даних вимірювання: геометричних та механічних величин; параметрів потоку, витрат, рівня й обсягу сипучих, рідких і газоподібних речовин; тиску; оптичних і оптико-фізичних величин; теплофізичних величин і температури; часу і частоти; електричних і магнітних величин; акустичних величин; фізико-хімічного складу та властивостей речовин; характеристик іонізуючих випромінювань і ядерних констант та ін.

Відзначимо дві характерні особливості застосування систем НК в різних областях: структура систем НК і основні принципи їх побудови є подібними для значної кількості видів і методів НК; специфіка кожного конкретного процесу НК реалізується шляхом використання відповідних первинних вимірювальних

перетворювачів та апаратно-програмних засобів.

З огляду на вище викладене під системою НКТД розумітимемо сукупність вимірювальних, програмних, обчислювальних та допоміжних технічних і програмних засобів, функціонально об'єднаних для вирішення завдань діагностики та неруйнівного контролю.

Узагальнену структуру системи КІС НКТД представити на рис. 1.2.

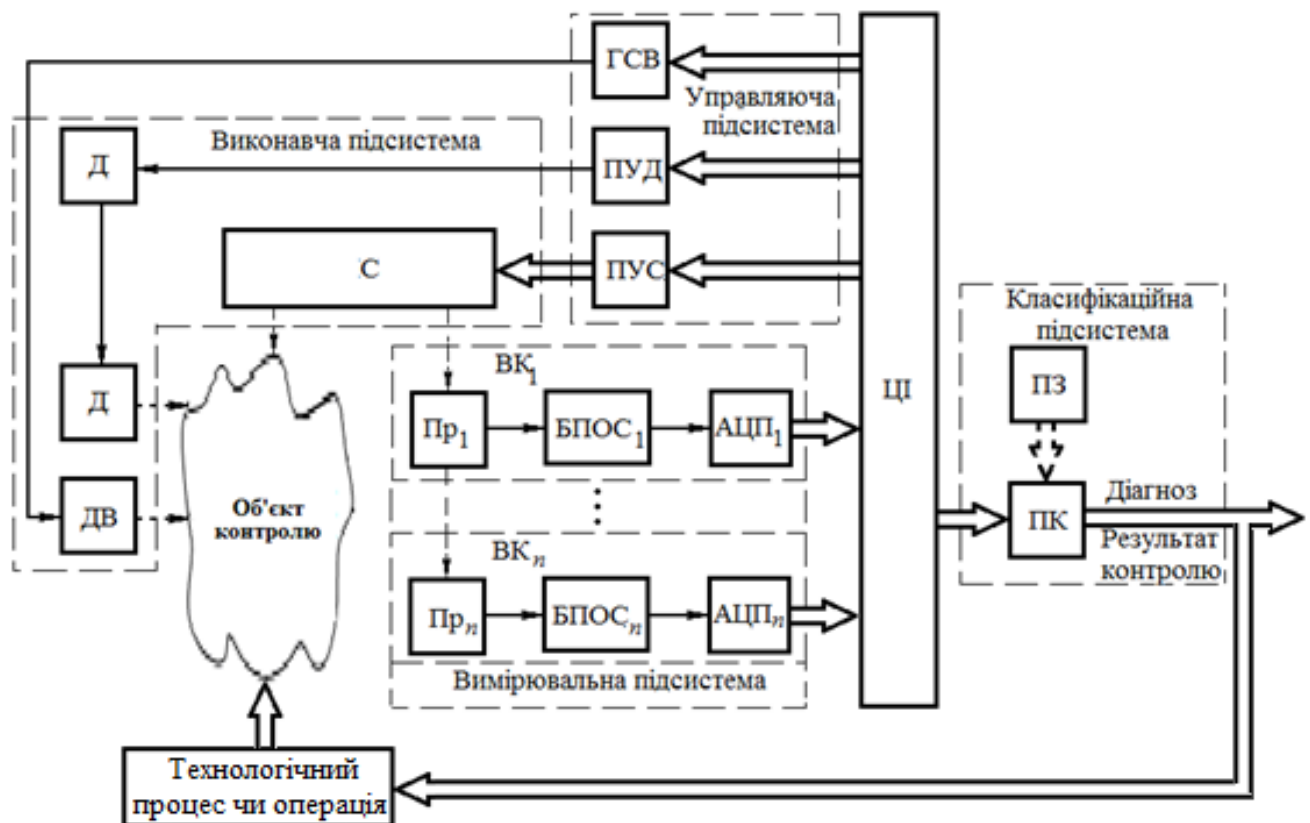


Рис. 1.2. Узагальнена структура системи КІС НКТД

На рис. 1.2 позначено: С – сканер, ДВ – джерело впливу, ВК – вимірювальний канал, Пр – приймач, БПОС – блок попереднього опрацювання сигналу, АЦП – аналого-цифровий перетворювач, ЦІ – цифровий інтерфейс, ПК – персональний комп'ютер, ПЗ – програмне забезпечення, ГСВ – генератор сигналів впливу, Д – дефектовідмітчик, ПУД, ПУС – пристрої управління дефектовідмітчиком, сканером. ГСВ виробляє сигнал, який перетворюється ДВ у стимулюючу дію різної фізичної природи (електричну, магнітну, теплову, акустичну, радіохвильову тощо), що впливає на ОК. Реакція ОК сприймається $Пр_i$ (одним чи декількома), які входять

до складу ВК і перетворюють певні властивості ОК в електричні сигнали – сигнали НК, один чи декілька параметрів яких зв'язані з однією чи декількома властивостями ОК. У БПОС ці сигнали підсилюються, фільтруються, детектуються і перетворюються у цифрову форму в АЦП. Ці сигнали через ЦІ надходять у ПК для подальшого оброблення, прийняття діагностичних рішень, відображення результату, статистичного опрацювання та архівації. ПС переміщує ОК відносно Пр, а блок Д робить відмітки на ОК на місці дефекту. За результатами контролю відбувається коригування технологічного процесу або окремої операції.

Системи діагностики формують діагноз, а системи НК – результат контролю. Основним показником якості системи НК є достовірність контролю. Про зміну стану ОК судять за значеннями певних контрольованих параметрів.

Технічний стан ОК характеризується безліччю параметрів та характеристик різних фізичних величин – механічних, гідромеханічних, аеромеханічних, термодинамічних, електричних, електромагнітних, оптичних, акустичних та ін. Основними критеріями вибору тих чи інших фізичних величин є якнайбільша зміна фізичного параметра в залежності від зміни умов навантаження, експлуатації і т.п.; використання тих фізичних полів і явищ, які максимально реагують на зміну стану матеріалу; можливість визначення відповідних параметрів без руйнування зразків.

Сукупність інформативних ознак ОК та способи їх перетворення у сигнали НК значною мірою визначають перелік вимірюваних фізичних величин та структуру систем КІС НКТД в кожному конкретному випадку.

1.5. Аналіз факторів, що впливають на обґрунтування структури КІС НКТД

В межах кожного виду НК розроблено низку методів контролю та діагностики, які базуються на різних фізичних ефектах та законах. Раціональний вибір одного чи декількох фізичних методів для реалізації завдань ТД та НК суттєво впливає як на вартість контролю і діагностування, так і на вірогідність та надійність отримуваних результатів. Оцінювання потенційних можливостей різних методів для вирішення конкретних завдань НК та вибір оптимального за певним критерієм

(до прикладу, вірогідністю контролю, вартістю, похибкою вимірювання) варіанту передбачає знання основ всіх методів НК.

Результат діагностування та контролю і відповідно структура КІС НКТД залежать від багатьох факторів, вплив яких умовно зображено на рис. 1.3.



Рис.1.3. Діаграма чинників, що впливають на результатом контролю та обґрунтування структури КІС НКТД

За діаграмою на рис. 1.3 можна сформулювати послідовність аналізу завдання контролю чи діагностики для вибору та обґрунтування структури КІС НКТД. Таку послідовність аналізу можна задати у наступному виді: об'єкт контролю (діагностики) – умови контролю (діагностики) – вид фізичного поля – метод НК (діагностики) – метод вимірювання – засоби вимірювання – методика контролю.

1.6. Питання для самоконтролю

1. В яких випадках необхідно застосовувати методи НК?
2. Дайте визначення та назвіть основні види НК.
3. Які вимоги висуваються до методів НК?
4. У чому полягає основне завдання системи контролю якості продукції?
5. Яким чином матеріал виробу визначає можливий вид НК?
6. У яких матеріалах можуть виникати тріщини? Назвіть основні причини виникнення різного виду тріщин. Які види НК виявляють втомні тріщини?

7. Які основні недоліки руйнівних методів контролю вам відомі?
9. Які види НК дозволяють виявити підповерхневі дефекти?
10. Якими видами НК можна виявляти об'ємні дефекти?
11. Що, на ваш погляд, є основною причиною виникнення дефектів?
12. Перерахуйте основні обмеження та недоліки методів НК.
13. Наведіть приклади використання систем НК в техніці.
14. Виконайте аналіз узагальненої структурної схеми системи НК.

2. ТИПОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ СИГНАЛИ В КІС НКТД

2.1. Моделювання як спосіб дослідження процесу опрацювання інформаційних сигналів систем НКТД

Задача моделювання процесу оброблення сигналів в КІС НКТД формулюється як задача розроблення алгоритмів, які за відомими характеристиками систем, дають змогу точно або з допустимою похибкою перетворювати на ПК дискретні реалізації відповідних вхідних сигналів систем, що моделюються. Ці алгоритми називаються *цифровими моделями систем*.

Первинний перетворювач КІС НКТД трансформує певну характеристику ОК $\alpha(t)$ в інформаційний сигнал $U_c(\alpha(t), \bar{\beta}, t)$, найчастіше у сигнал змінної частоти, при цьому $\alpha(t)$ може модулювати один чи декілька параметрів сигналу. Крім інформативних параметрів сигнал має і неінформативні параметри, які характеризуються вектором $\bar{\beta}$.

Отриманий у перетворювачі інформаційний сигнал передається по вимірювальному каналу в ПК. Процеси взаємодії ОК з сенсором та передавання інформаційного сигналу проходить в умовах некерованої постійної дії зовнішніх завад. Окрім зовнішніх завад в електронних блоках системи діють їх внутрішні шуми. З урахуванням цього доступна аналізу сигнальна функція допускає представлення адитивною моделлю виду

$$x(t) = U_c(\alpha(t), \bar{\beta}, t) + n(t), \quad (2.1)$$

де $n(t)$ – реалізація суміші зовнішніх завад та внутрішніх шумів вимірювального каналу системи НК.

Завданням КІС НКТД є визначення оцінки характеристики $\hat{\alpha}(t)$ з мінімальними втратами інформації. Ефективним способом дослідження процесів опрацювання інформаційних сигналів є моделювання.

Моделювання в загальному розумінні – це представлення групи об'єктів чи ідей в певній формі, відмінній від реальних аналогів. Моделі можуть

застосовуватись в різних задачах як засіб дослідження та пізнання об'єктивного світу, як засіб навчання та спілкування, як інструмент прогнозу. В чому полягає раціональність моделювання? Концепція моделювання базується на тому, що, по-перше, в процесі створення моделі відбираються найбільш суттєві риси досліджуваного об'єкту і ігноруються його неістотні риси завдяки чому модель спрощується відносно її реального аналога, по-друге, під час створення моделі дотримуються принципа подібності.

Подібними називаються явища чи об'єкти, в яких всі чи найбільш суттєві процеси для певного дослідження в довільний момент часу і в довільній точці простору відрізняються за своїми параметрами від аналогічних процесів чи об'єктів в певне число разів, що називається *масштабом*.

Подібність буває *фізичною* (всі процеси в подібних явищах мають однакову фізичну природу) і *математичною* (процеси мають різну фізичну природу, але описуються однаковими рівняннями). Найбільш універсальними є математичні моделі. Такі моделі власне і є теоретичною основою для моделювання на ПК. *Комп'ютерне* моделювання найбільш ефективно у випадках, коли використання математичних моделей пов'язане з великим обсягом обчислень, або результати моделювання важко інтерпретувати. Важливу роль в аналізі інформаційних сигналів і комп'ютерному моделюванні процесів їх опрацювання відіграють моделі детермінованих і стохастичних сигналів.

2.2. Моделі детермінованих сигналів

Сигнали, які застосовуються в КІС НКТД як носії інформації уявляють собою певні фізичні величини (електричний струм, напругу, світловий потік, тощо), що змінюються в часі. Розглянемо інформаційні моделі характерних типових сигналів.

Функція Хевісайда

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0; \quad 0 < t < T, \end{cases} \quad (2.2)$$

де t_0 – невідомий момент часу на відріжку спостереження $\overline{0, T}$.

Такий сигнал може бути сформований за перевищенням порогу певним інформативним сигналом чи його характеристикою. Нагадаємо, що згідно з (2.1) інформативна частина сигналів НК визначена як $U_c(\alpha(t), \bar{\beta}, t)$. Для сигналу (2.2) маємо $\alpha(t) = t_0$ – інформативний параметр, $\beta = T_0$ – неінформативний параметр. Корисну інформацію несе момент t_0 переходу сигналу із 0 в 1. Момент часу $t = 0$ відповідає початку спостереження.

Амплітудно-модульований гармонічний сигнал

$$x(t) = E(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

де $E(t)$ – обвідна сигналу (інформативний параметр, $\alpha(t) = E(t)$), ω_0, φ_0 – відповідно кутова частота та початкова фаза (вектор неінформативних параметрів – $\bar{\beta} = \{E, \varphi_0, T\}$).

Фазомодульований сигнал

$$x(t) = E \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad t \in [0, T]. \quad (2.4)$$

Для цього сигналу $\alpha(t) = \varphi(t)$, $\bar{\beta} = \{E, \omega_0, T\}$.

Частотномодульований сигнал

$$x(t) = E \cos\left(\omega_0 t + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau\right), \quad t \in [0, T]. \quad (2.5)$$

Цей сигнал відрізняється від попереднього видом залежності (інтегральна) характеристики сигналу $x(t)$ від інформативного повідомлення $\alpha(t) = \varphi(t)$. Як і в попередньому випадку $\bar{\beta} = \{E, \omega_0, T\}$.

2.3. Моделі випадкових сигналів

2.3.1. Поняття випадкової функції та випадкового процесу

Передача повідомлення може відбутись тоді, коли значення $\alpha(t=0)$ в момент початку спостереження невідоме. В протилежному випадку, за заздалегідь відомого $\alpha(t)$, повідомлення не містить нової інформації. Отже у випадку передачі повідомлення один чи декілька параметрів інформативного сигналу мають

випадковий характер і перетворюють функцію $x(t)$ на випадкову. Нагадаємо, що *випадковою* називають функцію, яка в досліді може набувати той чи інший заздалегідь невідомий вигляд. *Реалізацією випадкової функції* називають конкретний вигляд, який приймає випадкова функція в досліді. При проведенні серії дослідів над випадковою функцією утворюється група її реалізацій. Як приклад розглянемо можливі 5 реалізацій випадкової функції $X(t, \xi) = kt + \xi$, $t \in [0, 2c]$, $k = 0,5c^{-1}$, ξ – випадкова величина, розподілена рівномірно в діапазоні $[-0,5, 0,5]$. Ці реалізації зображено на рис. 2.1.

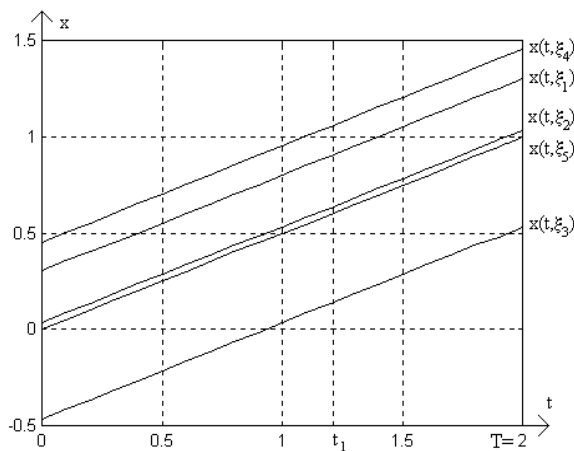


Рис. 2.1. Приклад реалізації випадкової функції

Кожен з дослідів складався з розіграшу в момент $t = 0$ значення випадкової величини ξ і побудови прямої на відрізку $[0, 2c]$. Кожна окрема реалізація є не випадковою функцією. Випадковість полягає в тому, що до проведення дослідів не можна визначити конкретний вид реалізації функції.

Якщо зафіксувати певне значення часу, наприклад $t = t_1$, то зникне залежність функції від часу і вона перетвориться у *випадкову величину* (ВВ). Ця випадкова величина має назву *перетину випадкової функції*. Таким чином, випадкова функція поєднує в собі і риси випадкової величини, і риси випадкової функції. Випадкова функція $X(t, \xi)$, де t – час, ξ – випадкова величина, називається *випадковим процесом*. Теорія, що вивчає випадкові функції часу називається *теорією випадкових процесів*. Суміші сигналів та завад, що діють в КІС НКТД є випадковими процесами, отже до них можуть бути застосовані засоби цієї теорії.

2.3.2. Метод оберненої функції як інструмент генерування реалізацій випадкових величин

Цей метод широко застосовується для генерації ВВ, розподілених за певним заданим законом. В його основі лежить той факт, що ВВ $R = F(x)$, де $F(\cdot)$ – закон розподілу ймовірності довільної ВВ, рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 1]$. Це твердження легко довести. Нехай $R = F(x)$ має функцію розподілу $G(\cdot)$. Для відрізка $0 \leq r \leq 1$ маємо

$$G(r) = P[F(x) \leq r] = P[x \leq F^{-1}(r)] = F[F^{-1}(r)] = r. \quad (2.6)$$

Отже $G(r)$ – лінійна функція, що власне і свідчить про те, що R є рівномірно розподіленою ВВ. Спираючись на цей факт легко показати, що

$$x = F^{-1}(r). \quad (2.7)$$

Вираз (2.7) свідчить про те, що для генерації ВВ із розподілом $F(\cdot)$, необхідно виконати функціональне перетворення $F^{-1}(\cdot)$ над розподіленими рівномірно випадковими числами. Наступний приклад ілюструє спосіб пошуку обернених функцій.

Приклад 2.1. Згенерувати дискретну ВВ, яка має такі ймовірності:

$$P(0) = 0,25; P(1) = 0,5; P(2) = 0,25.$$

На рис. 2.2 подано геометричну інтерпретацію розв'язку цієї задачі.

Не дивлячись на позірну простоту методу оберненої функції, його практичне застосування натикається на певні перешкоди, оскільки не завжди можна отримати в явному вигляді аналітичний запис оберненої функції.

Приклад 2.2. Необхідно згенерувати ВВ з експоненціальним розподілом $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, де λ^{-1} – математичне сподівання ВВ.

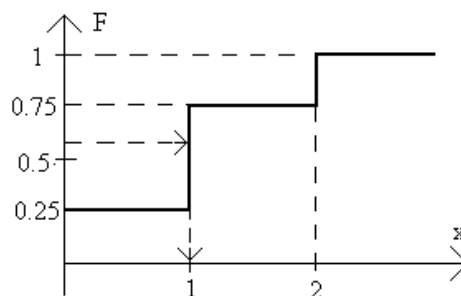


Рис. 2.2. Графік функції ймовірності дискретної ВВ

Прирівняємо $F(x) = r$ і розв'яжемо отримане рівняння відносно x :

$$r = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x = -\lambda^{-1} \ln(1 - r). \quad (2.8)$$

Рівняння (2.8) дає алгоритм генерування ВВ з експоненціальним розподілом за допомогою визначеного функціонального перетворення ВВ з рівномірним розподілом.

2.3.3. Метод Монте-Карло

Моделювання випадкових явищ і процесів на ПК має назву *статистичного моделювання (методу Монте-Карло)*.

Успіх обчислень методом Монте-Карло на ПК визначають два фактори:

- якість джерела випадкових чисел;
- вибір раціонального алгоритму обчислення.

Основою формування дискретних реалізацій шуму з різними розподілами за методом оберненої функції є якісна генерація випадкових величин з рівномірним розподілом.

Послідовність випадкових чисел називається підпорядкованою *рівномірному закону розподілу*, якщо їхня щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ і функція розподілу $F(x)$ задовольняють співвідношенням

$$p(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & a > x, \quad x > b, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x \geq b. \end{cases} \quad (2.10)$$

Надалі будемо, в основному, мати справу з випадковими числами, рівномірно розподіленими в інтервалі від 0 до 1, для яких в формулах (2.9) і (2.10) $a = 0, b = 1$.

Графіки $p(x)$ і $F(x)$ для рівномірно розподілених чисел (РРЧ) в інтервалі $[0,1]$ зображені на рис. 2.3а і 2.3б відповідно.

Математичне сподівання і дисперсія для рівномірно розподілених в інтервалі $[0,1]$ випадкових величин мають такі значення:

$$\mathbf{M}\xi = \int_0^1 x dx = 0,5; \quad \mathbf{D}\xi = \int_0^1 (x - 0,5)^2 dx = \frac{1}{12} \approx 0,083, \quad (2.11)$$

а середнє квадратичне відхилення – $\sigma = 1/\sqrt{12} \approx 0,2887$. Приблизно 57,74% усіх реалізацій РРЧ у випадку великих обсягів вибірки n розташовуються в межах інтервалу $m \pm \sigma$.

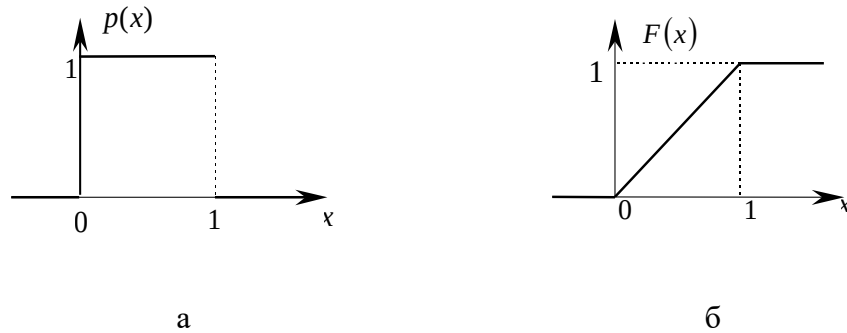


Рис. 2.3. Графіки $p(x)$ і $F(x)$ для ВВ з рівномірним розподілом

Один з основних способів одержання РРЧ полягає в наступному. Випадкові числа утворюються в ПК програмним засобом за допомогою деякого рекурентного співвідношення. Це означає, що кожне наступне число утворюється з попереднього (або групи попередніх чисел) шляхом застосування деякого алгоритму, який складається з арифметичних і логічних операцій. Така послідовність чисел, хоч і не є випадковою, проте може задовольняти різноманітним статистичним критеріям випадковості. Тому такі числа називаються *псевдовипадковими*.

Головним недоліком псевдовипадкових чисел є складність теоретичного оцінювання їх статистичних властивостей. Крім цього, усі вироблені програмним способом послідовності псевдовипадкових чисел є періодичними. А саме, перші L послідовно отриманих псевдовипадкових чисел, будуть усі мати різні значення, а $(L + 1)$ -е псевдовипадкове число співпадатиме з першим із L чисел і т.д. Число L називають *довжиною періоду*. Величина періоду L залежить від розрядності слова ПК і способу формування псевдовипадкової послідовності.

Один із перших і найбільш поширених методів генерації РРЧ є *конгруентний* метод. Він полягає у тому, що чергове випадкове число a_i одержують із попереднього числа a_{i-1} за правилом

$$a_i = [ca_{i-1} + b](\text{mod } p), \quad (2.12)$$

де c – відповідним чином вибрана константа, а запис $[ca_{i-1} + b](\text{mod } p)$ означає взяття по модулю p числа $ca_i + b$ причому p – просте, а b – взаємно просте з p число.

Пояснимо операцію визначення числа по модулю p числовим прикладом. Нехай потрібно обчислити значення $23(\text{mod } 7)$. Ділимо 23 на 7 і знаходимо k –

ціле число від ділення, тобто $k = \left[\frac{23}{7} \right]^+ = 3$, де $[]^+$ означає "ціла частина" числа.

Потім, віднімаємо від 23 добуток 3×7 , одержуємо шуканий результат, тобто залишок $23(\text{mod } 7) = 23 - 21 = 2$. Таким чином, a_i дорівнює остачі від ділення

$ca_i + b$ на p . Якщо вибрати $c = \sqrt{p}$, то кореляція між сусідніми значеннями $\rho = 1/\sqrt{p}$. Часто обирають $c = 10^{\delta+1}$, $\delta = 1, 2, \dots$

Відповідно до виразу (2.12), конгруентним методом формуються псевдовипадкові числа, що лежать в інтервалі від 0 до p . Для того, щоби звести їх до інтервалу від 0 до 1, необхідно перейти до чисел, що визначаються формулою

$$a_i^* = a_i / p. \quad (2.13)$$

У всіх програмних засобах статистичного опрацювання даних включені стандартні генератори випадкових чисел з рівномірним розподілом. В середовищі Matlab – це функція `rand`. Проте перед використанням таких генераторів в модельних експериментах необхідно перевірити їх якість, оскільки від цього суттєво залежать результати моделювання.

2.3.4. Перевірка якості генератора випадкових чисел

Для перевірки "стохастичних параметрів" послідовностей РРЧ можуть використовуватися різні ознаки. Якісно оцінити властивості генератора випадкових чисел (ГВЧ) можна шляхом побудови гістограми.

Один з найпростіших способів кількісного оцінювання ГВЧ з рівномірним розподілом ґрунтується на обчисленні певних статистик за отриманою вибіркою випадкових чисел і їх порівнянні з теоретичними значеннями. До прикладу,

перевірки рівномірності n випадкових чисел полягає у обчисленні оцінок математичного сподівання і дисперсії. Відповідно до цього критерію випадкові числа розподілені рівномірно, якщо

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \approx \frac{1}{2}, \quad (2.14)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{v}_1)^2 \approx 0.083. \quad (2.15)$$

Існують і інші ознаки "стохастичності" рівномірно розподілених чисел. Таким є, наприклад, критерій, що оцінює степінь нерівномірності гістограми, який розглядається нижче.

Реалізація емпіричної щільності розподілу називається *гістограмою*.

Гістограма є статистичним аналогом щільності розподілу ймовірностей і так само, як і остання, характеризує степінь концентрації випадкових чисел в околі вибраного значення.

Під час побудови гістограми слід взяти до уваги, що модельовані послідовності випадкових чисел розташовані в інтервалі від 0 до 1. Ці числа власне є межами діапазону, якому належать значення ВВ. Цей діапазон $x^{(n)} - x^{(1)}$ розбивається на m однакових інтервалів $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i)$ $i = \overline{1, m}$ (x_{i-1}, x – межі i -го інтервалу), довжиною $h = (x^{(n)} - x^{(1)})/m$. Потім підраховується кількість випадкових чисел k_i , значення яких потрапили в i -й інтервал Δ_i , $i = \overline{1, m}$. Емпірична щільність розподілу або "гістограма" визначається на кожному інтервалі Δ_i як

$$p_i^*(x) = k_i/nh, \quad x \in \Delta_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.16)$$

де k_i – кількість випадкових чисел, що потрапили до інтервалу Δ_i . Частота k_i/n – відображає площу прямокутника, побудованого на Δ_i , як на основі з висотою, що дорівнює ординаті гістограми k_i/nh .

У випадку, коли генератор РРЧ "досить якісний", теоретичні ймовірності p_i попадання значень випадкової величини в i -й інтервал дорівнюють

$$p_i = 1/n, \quad (2.17)$$

що можливо лише у граничному випадку коли $n \rightarrow \infty$.

Сума u квадратів відхилень частот (2.16) від теоретичних значень (2.17) для фіксованого n

$$u = \sum_{i=1}^n (p_i^* - p_i)^2. \quad (2.18)$$

служує критерієм, що дає змогу оцінити степінь нерівномірності гістограми (чим більше u , тим нижче якість генератора рівномірно розподілених чисел).

2.4. Оцінювання відношення сигнал/шум

Досвід розробки КІС НКТД свідчить про зростання вимог щодо підвищення достовірності виявлення інформаційних сигналів та точності вимірювання їх параметрів в умовах, коли рівень сигналу близький або навіть менший за рівень завади, а статистичні характеристики останньої невідомі. Крім того існують задачі, в яких відсутня чи неповна апріорна інформація про моделі сигналів.

Для порівняння різних способів та алгоритмів опрацювання сигналів у функціонально-орієнтованих системах аналізу сигналів обґрунтовують критерії ефективності їх оброблення. Вирішальним фактором, який обмежує застосування тих чи інших відомих способів та алгоритмів оброблення є наявність певного рівня шумів у прийнятому сигналі. Тому основою таких критеріїв є відношення сигнал/шум (С/Ш).

В статистичній радіотехніці та оптиці при вирішенні задач виділення сигналів на фоні шуму та оцінюванні їх параметрів користуються наступними визначеннями понять «відношення сигнал/шум»:

(С/Ш) = (амплітуда сигналу/середнє квадратичне значення шуму),

(С/Ш) = (потужність сигналу/потужність шуму),

(С/Ш) = (пікове значення сигналу/середнє квадратичне значення шуму),

(С/Ш) = (енергія сигналу/енергія шуму).

Ефективність різних способів розв'язання задач виділення сигналів на фоні завад оцінюється покращенням відношення (С/Ш) на виході пристроїв, що реалізують дані способи відносно такого відношення на їх вході.

Наведені вище означення співвідношення С/Ш зручні з практичної точки зору, оскільки необхідні для їх визначення величини для широкого кола задач можна

отримати шляхом прямих вимірювань такими приладами, як вольтметри амплітудних чи середніх квадратичних значень, ваттметри і т.п. Використані в цих означеннях величини, по-перше, визначаються через енергетичні параметри сигналу (наприклад, силу електричного струму чи напругу, потужність тощо) і, по-друге, не повною мірою характеризують можливості визначення фазових характеристик сигналів складної форми. Наприклад, перше відношення можна застосовувати лише до гармонічних сигналів, воно не враховує тривалості сигналу. Крім того, їх використання для оцінювання ефективності тих чи інших способів оброблення сигналів в системах аналізу циклічних процесів нашоюхується на певні методологічні труднощі: метою обробки сигналів у фазовимірювальних системах є фазова характеристика сигналу (або різниця фазових характеристик двох досліджуваних циклічних сигналів), яка не відноситься до числа енергетичних параметрів та характеристик (виняток становить випадок, коли фазовий зсув сигналів перетворюється в напругу іншими пристроями, наприклад, фазовими детекторами).

2.5. Питання для самоконтролю

1. В чому полягає сутність моделювання в дослідження процесі опрацювання інформаційних сигналів КІС НКТД?
2. Які явища чи *об'єкти називаються подібними?*
3. Наведіть приклади характерних моделей детермінованих сигналів.
4. У чому полягає сутність методу оберненої функції?
5. Які ви знаєте способи оцінювання відношення сигнал/шум ?
6. У чому полягає відмінність оцінювання відношення сигнал/шум для ФХС?
7. Наведіть та прокоментуйте алгоритм реалізації конгруентного методу генерації випадкових чисел з рівномірним розподілом.
8. Наведіть приклади оцінювання якості генераторів псевдовипадкових чисел з рівномірним розподілом.

3. ОПРАЦЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ КІС НКТД В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

Взаємодія ОК з різними фізичними полями породжує інформаційні сигнали, параметри і характеристики яких несуть певні відомості про досліджувані ОК. Останні в КІС НКТД за допомогою сенсорів трансформуються в електричні сигнали. Ці сигнали змінюються як за частотою, так і в часі та просторі. З метою виявлення діагностичних ознак виконується аналіз цих сигналів в частотній, часовій та частотно-часовій областях.

3.1. Ряд Фур'є та перетворення Фур'є як інструменти аналізу сигналів КІС НКТД в частотній області

В задачах аналізу сигналів КІС НКТД знайшов широке застосування метод їх спектрального представлення, який базується на інтегральному перетворенні Фур'є (ПФ) та розкладанні сигналів за ортогональними функціям. Особливе місце в цьому методі займає розклад за тригонометричною системою функцій, що складає теоретичну основу гармонічного аналізу. Його основні положення вивчаються та застосовуються на практиці з 1882 р. – року опублікування праці французького математика та фізика Ж. Фур'є “Аналітична теорія тепла”, в якій закладені основи теорії тригонометричних рядів. Гармонічний аналіз застосовують у різних галузях науки та техніки. В чому полягає універсальність цього метода? Причини його широкого застосування обумовлені його унікальними властивостями, до числа яких належать:

1) інваріантність у випадку проходженні гармонічних сигналів через лінійні системи з постійними параметрами, іншими словами гармонічні сигнали проходять через такі системи без спотворень;

2) мультиплікативність – у випадку перемноженні гармонічних сигналів їх аргументи додаються;

3) гармонічні функції є власними функціями систем, які описуються лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами.

Стисло розглянемо основні положення теорії гармонічного аналізу.

3.1.1. Ряд Фур'є

Розглянемо функцію $f(x)$ дійсної змінної x , визначену всюди в межах відрізка $[\theta, \theta + 2\pi]$. Нехай $f(x)$ на цьому відрізку задовольняє умовам Дірихле: 1) всюди однозначна, скінченна та кусково-неперервна, 2) має обмежену кількість максимумів та мінімумів.

Тоді функцію $f(x)$ можна представити нескінченним рядом

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx, \quad (3.1)$$

де b_0, a_n, b_n – незалежні від x коефіцієнти. Ряд (3.1) називається *рядом Фур'є функції $f(x)$* . Цей ряд збігається до $f(x)$ у всіх точках безперервності і до значення $0,5[f(a-0) + f(a+0)]$ – в точках $x = a$ розриву функції.

Для визначення ряду необхідно обчислити коефіцієнти b_0, a_n, b_n . Приймаючи до уваги, що

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx &= \begin{cases} 0, & \text{для } n \neq m, \\ \pi, & \text{для } n = m, \end{cases} \\ \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx &= \begin{cases} 0, & \text{для } n \neq m, \\ \pi, & \text{для } n = m, \end{cases} \\ \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

домножимо обидві частини (3.1) на $\sin mx$ та проінтегруємо результат на відрізку $[\theta, \theta + 2\pi]$. Отримаємо

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x) \cdot \sin mx dx. \quad (3.3)$$

Домноживши (3.1) на $\cos mx$ та 1 і проінтегрувавши отримаємо відповідно

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x) \cdot \cos mx dx, \quad (3.4)$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x) dx. \quad (3.5)$$

Аналізуючи формули (3.3), (3.4) можна зробити такі висновки:

1. Коефіцієнти розкладання не залежать один від одного, тому можуть бути обчислені в довільній послідовності.
2. Для непарної функції ($f(x) = -f(-x)$) маємо $b_n = 0$.
3. Для парної функції ($f(x) = f(-x)$) – $a_n = 0$.

Представлення $f(x)$ сумою гармонічних функцій не є єдиним можливим розкладом. Можна розглядати інші системи базисних функцій $u_1(x), u_2(x), \dots, u_i(x), \dots \neq 0$. Для того, щоби обчислення коефіцієнтів ряду лишалось таким же зручним, система базисних функцій повинна бути *ортogonalною* – для всіх $m \neq n$ на відрізьку ортogonalності $[a, b]$ повинна виконуватись умова

$$\int_a^b u_m(x) \cdot u_n(x) \cdot \rho(x) dx = 0,$$

де $\rho(x)$ – вагова функція. Якщо крім цього $\int_a^b u_n^2(x) \cdot \rho(x) dx = 1$, то система базисних функцій називається *ортонормованою*.

3.1.2. Ряд Фур'є з обмеженою кількістю членів

Обмежимо ряд (3.1) першими N членами і позначимо нову суму

$$S_N(x) = b_0 + \sum_{n=1}^N a_n \sin nx + \sum_{n=1}^N b_n \cos nx. \quad (3.6)$$

Дослідимо збіжність $S_N(x)$ до $f(x)$ для чого розглянемо середньоквадратичну похибку такої заміни

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 dx. \quad (3.7)$$

Щоби ця похибка була мінімальною необхідно вимагати виконання умови

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \frac{\partial E}{\partial a_2} = \dots = \frac{\partial E}{\partial a_N} = \frac{\partial E}{\partial b_1} = \frac{\partial E}{\partial b_2} = \dots = \frac{\partial E}{\partial b_N} = 0. \quad (3.8)$$

Для довільного коефіцієнта маємо

$$\frac{\partial E}{\partial a_n} = \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 dx \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} [f(x) - S_N(x)] \cdot \frac{\partial S_N(x)}{\partial a_n} dx = 0. \quad (3.9)$$

Підставивши в (3.9) ряд (3.6) неважко показати, що умова (3.9) виконується у випадку, коли коефіцієнти a_n є коефіцієнтами Фур'є (3.3). Аналізуючи цей результат можна зробити такі висновки:

1) розклад в ряд Фур'є не тільки точно апроксимує $f(x)$ у випадку необмеженої кількості членів ряду, але й забезпечує найменшу середню квадратичну похибку апроксимації порівняно з іншим довільним тригонометричним рядом з іншими коефіцієнтами для того ж значення N ;

2) збільшення числа N членів суми (3.6) не приводить до зміни попередньо розрахованих $2N + 1$ коефіцієнтів розкладу: нові члени лише уточнюють отриману раніше суму, тому $|a_{N+1} \cdot \sin[(N+1)x]| < |f(x) - S_N(x)|$.

В КІС ТДНК найчастіше мають справу з сигналами як функціями часу. Заміною x на ωt формули (3.1), (3.3) та (3.4) приводяться до виду

$$f(\omega t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega t, \quad (3.10)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(x) \cdot \sin n\omega t dt, \quad (3.11)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(x) \cdot \cos n\omega t dt, \quad (3.12)$$

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(\omega t) dt. \quad (3.13)$$

3.1.3. Комплексний ряд Фур'є. Поняття спектру

Ряд (3.10) можна дещо спростити, якщо застосувати відому формулу Ейлера для представлення базисних функцій

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} = \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - ja_n}{2} e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n + ja_n}{2} e^{-jn\omega t}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

де $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Комплексні коефіцієнти ряду за аналогією до (3.11), (3.12) визначаються формулами

$$\dot{c}_n = \frac{b_n - ja_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(x) \cdot e^{-jn\omega t} dt, \quad (3.15)$$

$$\dot{c}_{-n} = \frac{b_n + ja_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(x) \cdot e^{jn\omega t} dt. \quad (3.16)$$

Коефіцієнти (3.15) та (3.16) мають однакову структуру і можуть бути отримані один з одного простою заміною n на $-n$. З урахуванням цього ряд (3.14) трансформується до більш компактного виду

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{c}_n \cdot e^{jn\omega t}. \quad (3.17)$$

Загальний член b_0 в (3.17) обчислюється за формулою (3.16) для $n = 0$.

Сукупність коефіцієнтів Фур'є $\dot{c}_n$ називають *узагальненим спектром сигналу* в обраній ортогональній системі базисних функцій. Отже спектр – це певний набір чисел. Таким чином, перетворення Фур'є дає змогу перейти від дослідження безперервних в часі функцій до розгляду їх аналогів, представлених наборами чисел і в такий спосіб перейти від операцій над функціями до операцій над числами, що значно спрощує аналіз сигналів. Відзначимо, що спектри періодичних сигналів складаються з частотних компонент кратних основній частоті $f = T^{-1}$.

З комплексного ряду (3.14) випливає можливість представлення коефіцієнтів a_n, b_n через їх модуль та фазу: $a_n = C_n \sin \varphi_n$, $b_n = C_n \cos \varphi_n$. Графічне зображення

такого представлення подано на рис. 3.1. Підсановка a_n, b_n у (3.10) дає можливість перейти до наступної форми запису ряду

$$f(\omega t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \varphi_n). \quad .18)$$

Отже $f(\omega t)$ розкладена в суму гармонічних складових, чи просто гармонік з амплітудами C_n і початковими фазами φ_n . Функція $C_n(\omega)$ називається *амплітудно-частотним спектром*, або *амплітудним спектром*, а $\varphi_n(\omega)$ – *фазо-частотним*, або *фазовим спектром*.

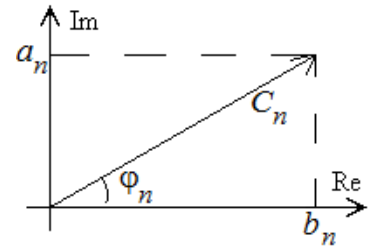


Рис. 3.1. Графічне представлення n -го коефіцієнта Фур'є

3.2. Поширення ряду Фур'є на майже періодичні функції

Розглянуті ряди (3.1) та (3.10) були застосовані для інтервалів відповідно $[\theta, \theta + 2\pi)$ та $[\theta, \theta + T)$. У випадку, коли T – період, розкладання (3.10) вірно і за межами цього відрізка.

Чи зберігається можливість застосування ряду Фур'є до неперіодичних функцій, тобто до функцій з $T \rightarrow \infty$, або коли значення T заздалегідь невідоме?

Для відповіді на це запитання спочатку розглянемо функцію $f(\omega t) = f_1(\omega t) + f_2(\omega t) + \dots + f_n(\omega t) + \dots$, складові якої є періодичними функціями з періодами відповідно $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$. Якщо ці періоди спільномірні, тобто вони є цілими кратними деякого значення T , то $f(x)$ є періодичною функцією з періодом T .

Якщо розкласти $f_1(\omega t), f_2(\omega t), \dots, f_n(\omega t), \dots$ в ряди Фур'є та підсумувати відповідні члени рядів, отримаємо ряд виду

$$f(\omega t) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin \omega_n t + \beta_n \cos \omega_n t). \quad (3.19)$$

Значення ω_n у (3.19) не є цілими кратними одного числа. Тому, хоча (3.19) зовнішньо схожа з (3.1), це не ряд Фур'є. Як обчислити коефіцієнти цього ряду?

Розглянемо ряд Фур'є деякої періодичної функції $g(\omega t)$

$$g(\omega t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t). \quad (3.20)$$

Згідно з (3.13) b_0 – середнє значення функції по періоду. В той же час його можна обчислити як середнє значення $g(\omega t)$ по нескінченному інтервалу T

$$b_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(\omega t) dt. \quad (3.21)$$

Отже можна обчислити b_0 за невідомої періодичної функції $g(\omega t)$. Так само визначимо коефіцієнти a_n, b_n з (3.20) як середні за період значення функцій $g(\omega t) \cos n\omega t$ та $g(\omega t) \sin n\omega t$

$$a_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T g(\omega t) \sin n\omega t dt, \quad (3.22)$$

$$b_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T g(\omega t) \cos n\omega t dt. \quad (3.23)$$

Отже коефіцієнти a_n, b_n з (3.20) обчислюються за невідомого періода T функції $g(\omega t)$. Поширюючи цей результат на ряд (3.19) можна зробити висновок:

коефіцієнти $\alpha_n, \beta_n, \beta_0$ можна обчислити за формулами

$$\beta_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\omega t) dt. \quad (3.24)$$

$$\alpha_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T f(\omega t) \sin \omega_n t dt, \quad (3.25)$$

$$\beta_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T f(\omega t) \cos \omega_n t dt. \quad (3.26)$$

Узагальнюючи отриманий результат можна констатувати: якщо сума (3.19) уявляє собою рівномірно збіжний ряд отже є *майже періодичною функцією* її можна розкласти в ряд, схожий на ряд Фур'є!

3.3. Представлення рядом Фур'є функцій зі стрибками. Явище Гіббса

Нехай $f(x)$ має розрив в т. $x = a$ для якого виконуються співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \leftarrow 0} f(a - \varepsilon) = A, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a + \varepsilon) = B. \quad (3.27)$$

Введемо функцію $G(x)$ (рис. 3.2)

$$G(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (3.28)$$

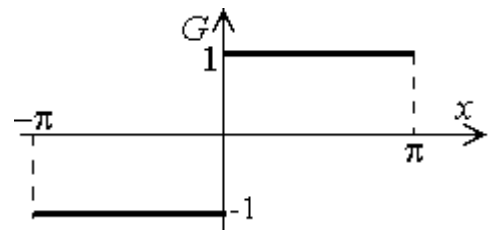


Рис. 3.2. Графік функції $G(x)$

Ряд Фур'є функції $G(x)$ має вигляд

$$G(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \right]. \quad (3.29)$$

Використовуючи (3.28) функцію $f(x)$ можна представити сумою

$$f(x) = \frac{B-F}{2} G(x-a) + f_1(x). \quad (3.30)$$

Функція $f_1(x)$ вже не має розриву. Таке представлення $f(x)$ зображено на рис. 3.3. Таким чином для вивчення особливостей розкладу в ряд $f(x)$ достатньо дослідити особливості розкладу розривної функції $G(x)$.

На рис. 3.4 побудовано функцію $G(x)$ для перших 7 членів розкладу. З аналізу цих графіків видно, що представлена тригонометричним рядом розривна функція в точці розриву робить стрибок приблизно на $\sim 18\%$ від свого істинного значення, і цей стрибок не зменшується з ростом кількості членів розкладу.

Це явище виявив та дослідив у 1899 році американський фізик Дж. Гіббс. Внаслідок явища Гіббса представлення розривних функцій рядом Фур'є в точках розриву дещо спотворене, що треба враховувати в аналізі сигналів НКТД.

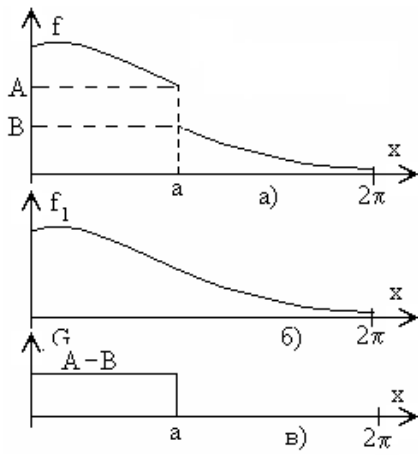


Рис. 3.3. Представлення $f(x)$ сумою функцій $f_1(x)$ та $G(x)$

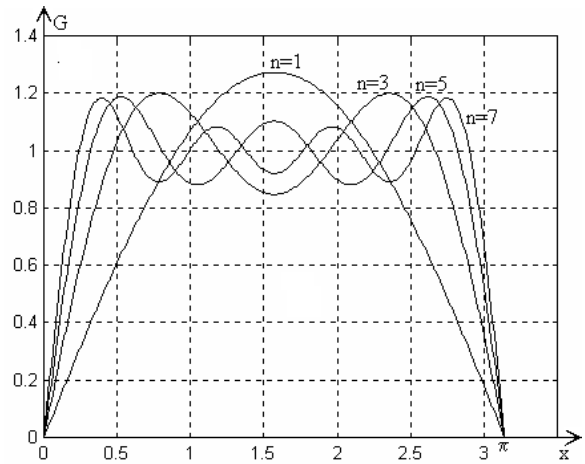


Рис. 3.4. Представлення розривної функції $G(x)$ першими членами тригонометричного ряду

3.4. Гармонічний аналіз неперіодичних сигналів

Нехай $s(t)$ існує на інтервалі (t_1, t_2) . Виберемо довільний відрізок $T \in (t_1, t_2)$. На T можна представити функцію $f(t)$ комплексним рядом Фур'є

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{c}_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (3.31)$$

де $\omega_1 = 2\pi/T$, а коефіцієнти ряду

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} s(\omega t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (3.32)$$

Підставивши ці коефіцієнти в ряд (3.31) дістанемо

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} s(\omega t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt \right) e^{jn\omega_1 t} \frac{\omega_1}{2\pi}, \quad 0 < t \leq T. \quad (3.33)$$

За межами відрізка T ряд (3.33) визначає періодичну функцію $s'(t) = s(t \pm rT)$, де k – ціле. Для того, щоби за межами відрізка T функція дорівнювалась 0, достатньо виконати умову $T \rightarrow \infty$. В цьому випадку коефіцієнти $\dot{c}_n$ збігають до нескінченно малої величини, їх кількість $n \rightarrow \infty$, а основна частота $\omega_1 = 2\pi/T \rightarrow 0$, отже відстань між спектральними складовими стає нескінченно малою, а спектр перетворюється з дискретного на суцільний. Взявши до уваги ці міркування виконаємо в (3.33) такі заміни: $\omega_1 \rightarrow d\omega$ (диференціал частоти), $n\omega_1 \rightarrow \omega$ (поточна частота):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{t_1}^{t_2} s(\omega t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.34)$$

Внутрішній інтеграл в (3.34) – це т.з. *спектральна щільність* або *спектр* сигналу

$$\dot{S}(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s(\omega t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (3.35)$$

З (3.35) видно, що спектральна щільність має розмірність $\frac{[\text{розмірність } s]}{\Gamma_{\text{ц}}}$ (на відміну від коефіцієнтів Фур'є в (3.17), які мають розмірність досліджуваної величини). Після підстановки (3.35) в (3.34) матимемо

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.36)$$

Вирази (3.35), (3.36) називаються *прямим та зворотнім перетворенням Фур'є*.

Формула $\dot{S}(\omega)$ (3.35) відрізняється від формули для $\dot{c}_n$ (3.32) тільки відсутністю множника T^{-1} , тому $\dot{S}(\omega)$ має тіж властивості, що і $\dot{c}_n$, отже для неї за аналогією з $\dot{c}_n$ можна записати

$$\dot{S}(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = S(\omega) e^{j\theta},$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega t) \cos \omega t dt; \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega t) \sin \omega t dt.$$

Модуль та аргумент спектральної щільності визначаються як

$$S(\omega) = \sqrt{[A(\omega)]^2 - [B(\omega)]^2}, \quad (3.37)$$

$$\theta(\omega) = \text{Arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \quad (3.38)$$

і називаються відповідно *амплітудно-частотною та фазо-частотною характеристиками* суцільного спектру неперіодичного коливання.

3.5. Властивості перетворення Фур'є

Для ефективного застосування ПФ та інтерпретації результатів частотного аналізу нагадаємо основні властивості перетворення.

3.5.1. *Зсув коливаль в часі.* Якщо сигнал має спектр $\dot{S}(\omega)$ (цей факт надалі позначатимемо записом: $s(t) \rightarrow \dot{S}(\omega)$), то спектр затриманого колювання $s_2(t) = s(t - t_0)$ дорівнює

$$\dot{S}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\omega t) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \dot{S}(\omega). \quad (3.39)$$

Висновок: зсув сигналу в часі на $\pm t_0$ призводить до зміни фазової характеристики спектра сигналу на величину $\pm \omega t_0$. Є вірним і зворотне твердження: якщо всім складовим спектра сигналу додати лінійно пов'язаний з частотою фазовий зсув $\pm \omega t_0$, то функція зсувається в часі на $\pm t_0$.

3.5.2. *Зміна масштабу часу.* Якщо $s(t) \rightarrow \dot{S}(\omega)$ і $s(t)$ стискається в часі, тобто $s_2(t) = s(nt)$, $n > 1$, то спектр нового колювання

$$\dot{S}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\omega t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{n} \dot{S}\left(\frac{\omega}{n}\right). \quad (3.40)$$

Висновок: стискання сигналу в часі в n разів призводить до розширення його спектру в n разів.

3.5.3. *Зміщення спектру коливаль.* Застосуємо ПФ до добутку $s(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta_0)$

$$\dot{S}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta_0) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \left[e^{j\theta_0} \dot{S}(\omega - \omega_0) + e^{-j\theta_0} \dot{S}(\omega + \omega_0) \right]. \quad (3.41)$$

Висновок: множення сигналу на гармонічне колювання $\cos(\omega_0 t + \theta_0)$ веде до розщеплення його спектру на дві частини, зміщені на частоти $-\omega_0$ та ω_0 і до одночасній зміні їх фазочастотних характеристик на величину $\pm \theta_0$.

3.5.4. *Диференціювання та інтегрування коливань.* Диференціювання $s(t)$ можна розглядати як почленне диференціювання всіх його гармонічних складових. Оскільки диференціювання експоненційної функції дає $\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$, спектр здиференційованого сигналу дорівнює

$$\dot{S}_2(\omega) = j\omega \dot{S}(\omega). \quad (3.42)$$

Аналогічними міркуваннями можна довести, що спектр інтегрованого коливання пов'язаний зі спектром початкового коливання співвідношенням

$$\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{j\omega} \dot{S}(\omega). \quad (3.43)$$

3.5.5. *Додавання коливань.* Розглянемо два сигнали $s(t) \rightarrow \dot{S}(\omega)$ та $f(t) \rightarrow \dot{F}(\omega)$. Оскільки ПФ – лінійна операція, у випадку додавання коливань їх спектри також додаються: $s(t) + f(t) \rightarrow \dot{S}(\omega) + \dot{F}(\omega)$.

3.5.6. *Добуток двох коливань.* Розглянемо два сигнали $s(t) \rightarrow \dot{S}(\omega)$ та $f(t) \rightarrow \dot{F}(\omega)$. Спектр добутку цих коливань дорівнює

$$\begin{aligned} \dot{S}_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega t) f(\omega t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(x) e^{jxt} dx \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(x) s(\omega t) e^{-j(\omega-x)t} dx dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega t) e^{-j(\omega-x)t} dt \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(x) \cdot \dot{F}(\omega-x) dx. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Висновок: спектр добутку двох коливань дорівнює згортці їх спектрів з коефіцієнтом $(2\pi)^{-1}$.

Аналогічним чином можна показати, що добутку двох спектрів відповідає в часовому просторі згортка їх часових функцій

$$\dot{S}(\omega) \dot{F}(\omega) \rightarrow s_2(\omega t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega t) f[\omega(t-\tau)] d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega) \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.45)$$

Цей висновок відіграє особливу роль в аналізі проходження сигналів через лінійні ланцюги. В такому випадку в (3.45) функції $\dot{S}(\omega)$ та $\dot{F}(\omega)$ трактують відповідно як спектральну щільність сигналу та передаточну функцію ланцюга, а $s(t)$ та $f(t)$ – як вхідний сигнал та перехідну характеристику ланцюгу.

3.6. Розподіл енергії в спектрі неперіодичного коливання

Відомо, що енергія неперіодичного електричного коливання $s(t) \rightarrow \dot{S}(\omega)$ визначається як $E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(\omega t) dt$. Поклавши в (3.44) $\omega = 0$, $f(t) = s(t)$ матимемо

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(x) \dot{S}(-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(x) \dot{S}^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(x) dx. \quad (3.46)$$

де $\dot{S}^*(\omega) = \dot{S}(-\omega)$ – спектр, комплексно спряжений зі спектром $\dot{S}(\omega)$,

$S(\omega) = |\dot{S}(\omega)|$ – модуль спектральної щільності $\dot{S}(\omega)$.

Рівняння (3.46) має назву *рівняння Парсеваля*. Воно встановлює співвідношення між енергією сигналу (для опору навантаження 1 Ом) та модулем його спектральної щільності.

3.7. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ)

3.7.1. ДПФ обмежених в часі сигналів

В системах ТДНК широко застосовують цифрові методи оброблення сигналів (ЦОС). В таких системах мають справу з дискретизованими в часі сигналами. Нагадаємо, що частота дискретизації сигналів за умов їх відтворення без втрати інформації, яку несе сигнал, повинна перевищувати щонайменше вдвічі максимальну частоту в спектрі сигналу. Це положення має в ЦОС фундаментальне значення і відоме як теорема Найквіста (теорема відліків). Нехай деякий спадний сигнал $s(t)$, який набуває ненульові значення на інтервалі $[0, \tau]$, дискретизований в моменти часу $t_n = nT_0$, $n = \overline{0, (N-1)}$, де T_0 – період дискретизації сигналу.

Загальний час аналізу становить $\tau = NT_0$. Задача спектрального аналізу формулюється таким чином: є послідовність N відліків функції $s(nT_0)$; необхідно отримати спектр вихідної функції $s(t)$.

Ця задача розв'язується за допомогою ДПФ. Для переходу від прямого перетворення Фур'є (3.35) до його дискретного аналога виконаємо заміни

$$\begin{aligned} t &\rightarrow nT_0, \\ dt &\rightarrow \Delta t = T_0, \\ s(t) &\rightarrow s(nT_0), \\ \omega &\rightarrow \omega_k = \frac{2\pi}{NT_0}k, \\ e^{-j\omega nT_0} &\rightarrow e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \\ \int s(t)dt &\rightarrow T_0 \sum f(nT_0). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Тоді k -та складова спектру дорівнюватиме

$$\dot{S}(k) = T_0 \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_0) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T_0 \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_0) \cos \frac{2\pi}{N}nk + jT_0 \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_0) \sin \frac{2\pi}{N}nk. \quad (3.48)$$

В (3.48) номер спектральної складової приймає значення $k = 0, 1, \dots, 0,5(N-1)$, а

суміжні складові розташовані на відстані $\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT_0}$. Отже селективність чи

спектральна розрізнявальна здатність ДПФ обернено пропорційна часу спостереження сигналу NT_0 . Кожна спектральна складова має дві компоненти – дійсну та уявну. З вибірки сигналу обсягом N можна визначити $0,5N$ дискретних частот, які розташовані в діапазоні від $f = 0$ до $f = 0,5f_0$ Гц.

Серед відмінностей (3.48) від ПФ відзначаються такі:

- спектральні компоненти для ДПФ можуть бути обраховані лише для обмеженого числа частот;

- спектр дискретизованого сигналу $\dot{S}_d(\omega)$ є періодичним з періодом $2\pi/NT_0$; це твердження витікає з того, що експоненційна функція в (3.48) є періодичною з періодом $2\pi/T_0$. Тобто спектр дискретизованого сигналу повторюється періодично з періодом $2\pi/T_0$ як це зображено на рис. 3.5. З

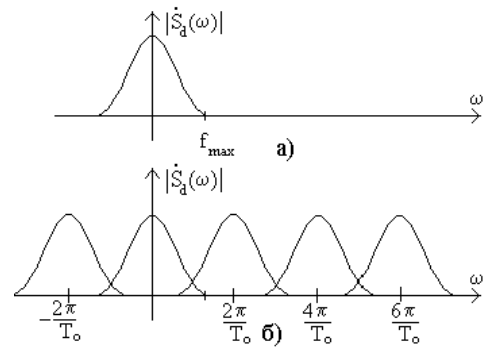


Рис. 3.5. Модуль спектру сигналу до (а) та після (б) дискретизації

цієї періодичності витікає вимога щодо вибору частоти дискретизації: спектри дискретизованого сигналу не повинні перекриватись щоби не спотворювати один одного, а це має місце у випадку, коли найбільша частота в спектрі сигналу $f_{\max} < 0,5 f_0$;

- спектральні компоненти для ДПФ можуть бути обраховані лише для обмеженого числа частот.

Вираз (3.48) має наступні спільні з ПФ властивості:

- якщо $s(t)$ непарна, то спектральна компонента непарна, уявна;
- якщо $s(t)$ парна, то спектральна компонента теж парна і дійсна.

3.7.2. ДПФ необмежених в часі сигналів

Гармонічний аналіз необмежених в часі сигналів в загальному випадку вбачається як задача, що не має розв'язку, бо у випадку $t_2 - t_1 \rightarrow \infty$ сума ряду (3.35) для $N \rightarrow \infty$ не сходиться. Цю перешкоду вдається подолати за допомогою перемноження сигналу на вагову функцію “вікна”, за межами якого сигнал дорівнює 0. Ця штучна операція дає змогу перетворити необмежений в часі сигнал в обмежений. Однак така процедура веде до деякого розширення спектру та зменшення спектральної розрізняювальної здатності. Отже платою за введення вікна є зниження точності оцінки спектра сигналу.

Для прикладу розглянемо задачу визначення ДПФ постійного сигналу. Нехай сигнал $s(t)=1, t \in (0, \infty)$ спостерігається через прямокутне вагове вікно (рис. 3.6)

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{для } \frac{1-N}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0 & \text{зовні вікна.} \end{cases} \quad (3.49)$$

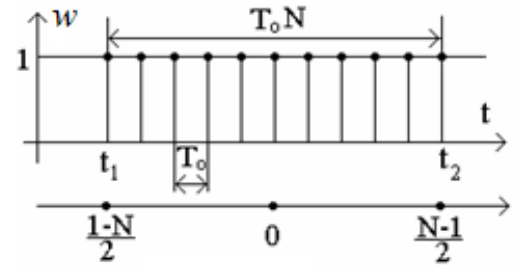


Рис. 3.6. ДПФ постійного сигналу з ваговою функцією прямокутного вікна

Початок відліку перенесено на середину вікна. Розглянемо ДПФ сигналу, що пройшов крізь вікно. Приймаючи $NT_0 \rightarrow \infty$ та перейшовши від дискретної до безперервної частоти $\omega_k = \frac{2\pi}{NT_0}k \rightarrow \omega$ в (3.49) отримаємо обвідну спектру

$$\dot{S}(n) = T_0 \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_0)w(nT_0)e^{-j\omega nT_0} = T_0 \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot 1 e^{-j\omega nT_0}. \quad (3.50)$$

Після підрахування суми членів геометричної прогресії в (3.50) отримаємо

$$\dot{S}(\omega) = T_0 \frac{\sin\left(\frac{NT_0\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{T_0\omega}{2}\right)} = \frac{t_2 - t_1}{N} \cdot \frac{\sin\left(\frac{NT_0\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{T_0\omega}{2}\right)}. \quad (3.51)$$

Функція (3.51) для різних значень N представлено на рис. 3.7. Ця функція є періодичною з періодом π і досягає максимуму в точках $x = \pm z\pi, z = 0, 1, 2, \dots$. Нулі функції розташовані в точках $x = \pm \frac{z\pi}{N}, z = 0, 1, 2, \dots$. Отже збільшення N веде до звуження основної пелюстки обвідної.

Подібний результат можна отримати і для ДПФ гармонічного сигналу частотою ω_0 . Різниця полягатиме в тому, що максимум обвідної спектрограми зміститься по вісі x на значення, що відповідає частоті ω_0 .

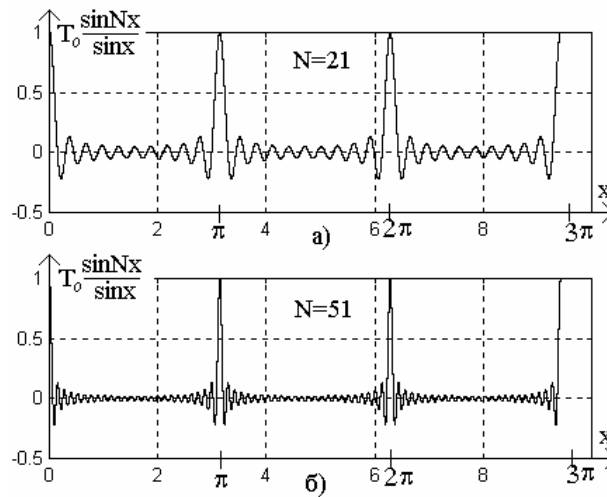


Рис. 3.7. Обвідна спектру постійного сигналу після з прямокутним ваговим вікном для $t = 1$ с, $s = 1$ В, та $N = 21$ с (а) і $N = 51$ (б)

3.8. Питання для самоконтролю

1. Запишіть ряд Фур'є для функції дійсної змінної на інтервалі $[\theta, \theta + 2\pi]$.
2. В чому полягає властивість ортогональності базисних функцій ряд Фур'є?
3. Запишіть вирази для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є.
4. Наведіть характерні особливості представлення функції дійсної змінної рядом Фур'є з обмеженою кількістю членів.
5. Запишіть ряд Фур'є та його коефіцієнти для функції часу.
6. Запишіть комплексний ряд Фур'є та його коефіцієнти для функції часу.
7. Дайте визначення поняття спектра сигналу.
8. Дайте визначення та графічну інтерпретацію амплітудного та фазового спектрів сигналу.
9. Розкрийте зміст та сутність явища Гібса.
10. Наведіть формули прямого та оберненого перетворення Фур'є та прокоментуйте їх.
11. Викладіть властивості перетворення Фур'є.
12. Наведіть загальні формули амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик суцільного спектра неперіодичного коливання.
13. Що таке спектральна щільність сигналу?

4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ГІЛЬБЕРТА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В АНАЛІЗІ ЦИКЛІЧНИХ СИГНАЛІВ КІС НКТД В ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ

Викладені відомості призначені для обґрунтування використання перетворення Гільберта (ПГ) в автоматизованих КІС ТД НК для опрацювання циклічних сигналів. Чим пояснюється важливість і необхідність його використання? Це перетворення дає змогу однозначно визначати амплітудні, фазові і частотні характеристики циклічних сигналів як функції часу. Оскільки значна частина методів ТДНК передбачає перетворення параметрів та характеристик ОК в названі вище характеристики сигналів, стає зрозумілим важливість цього інтегрального перетворення для аналізу сигналів КІС ТДНК.

4.1. Перетворення Гільберта як оператор опрацювання сигналів в часовій області

Значна частина інформаційних сигналів в КІС ТДНК характеризується певною повторюваністю їх значень. Зазвичай такі сигнали представляються детермінованими моделями у вигляді періодичних і майже періодичних функцій, в найпростішому випадку – синусоїдною функцією виду

$$u(t) = U_m \cos(\omega t - \varphi_{\Pi}), \quad t \in T_a,$$

де U_m , ω , φ_{Π} , T_a – відповідно амплітуда, кругова частота, початкова фаза та час аналізу сигналу.

Такі сигнали часто використовуються для збудження первинних перетворювачів. Під час сканування ОК параметри такого сигналу змінюються внаслідок варіації параметрів та характеристик ОК. Тому у більш загальному випадку такі інформаційні сигнали представляються моделлю вузькосмугового сигналу

$$u(t, \bar{p}) = U(t, \bar{p}) \cos(\omega t - \varphi(t, \bar{p})), \quad t \in (0, T_a), \quad T_a \gg 2\pi/\omega, \quad (4.1)$$

де $U(t, \bar{p})$, $\varphi(t, \bar{p}) = (\omega t - \varphi(t, \bar{p}))$ – відповідно обвідна (або амплітудна

характеристика сигналу) та – фаза (або фазова характеристика сигналу); $\bar{p}$ – вектор параметрів ОК (далі $\bar{p}$ опускатимемо для спрощення запису сигналів).

Оскільки доступним дослідженню є $u(t)$ (ліва частина виразу (4.1)), то характеристики $U(t)$ та $\Phi(t)$ з (4.1) однозначно не визначаються. Проблему однозначного отримання цих функцій вирішено у 1946 р. венгерським фізиком Денісом Габором (1900 – 1979) шляхом введення т.з. аналітичного сигналу

$$\dot{z}(t) = u(t) + iu_H(t) = U(t)\exp\{i\Phi(t)\}, \quad (4.2)$$

де $u_H(t)$ – перетворення Гільберта (ПГ) сигналу $u(t)$. Сигнал $u_H(t)$ отримують шляхом розрахунку. Він знаходиться у квадратурі до сигналу $u(t)$, тобто всі частотні компоненти $u_H(t)$ зсунуті на 90° відносно таких компонент в $u(t)$.

4.1.1. Інтегральні зображення перетворення Гільберта та його властивості

Означення 4.1. Перетворенням Гільберта дійсної функції $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $p \in (1, 2)$ є невластний інтеграл виду

$$f_H(x) = \mathbf{H}[f(x)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{s-x} ds, \quad (4.3)$$

де $\mathbf{H}(\cdot)$ – позначення оператора ПГ.

Якщо $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $p \in (1, 2)$, то і функція $f_H(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, і тоді має місце обернене ПГ виду

$$f(x) = \mathbf{H}^{-1}[f_H(x)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_H(s)}{s-x} ds. \quad (4.4)$$

У виразах (4.3) та (4.4) інтеграли розуміються в сенсі головного значення по Коші. Зазначимо, що існують і інші формули представлення ПГ.

Породжені ПГ інтегральні оператори, є обмеженими неперервними лінійними операторами з відповідними властивостями.

4.1.2. Властивості перетворення Гільберта

1. *Лінійність.* Для функцій $f_1(x)$, та $f_2(x)$ і довільних числах α_1, α_2

$$\mathbf{H}[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] = \alpha_1 \mathbf{H}[f_1(x)] + \alpha_2 \mathbf{H}[f_2(x)]. \quad (4.5)$$

2. *Властивість зсуву.* Для довільного дійсного значення $s \in \mathbb{R}$ маємо

$$\mathbf{H}[f(x-s)] = f_{\mathbf{H}}(x-s). \quad (4.6)$$

3. *Властивість ортогональності.* Для функції $f(x)$ і її гільберт-образу $f_{\mathbf{H}}(x)$ виконується умова ортогональності

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_{\mathbf{H}}(x) dx = 0, \quad (4.7)$$

4. *Подвійне перетворення Гільберта.* У випадку подвійного застосування ПГ до функції $f(x)$ має місце співвідношення

$$\mathbf{H}[\mathbf{H}[f(x)]] = -f(x). \quad (4.8)$$

5. *Властивість парності та непарності.* Якщо $f(x)$ парна функція змінної x , то $f_{\mathbf{H}}(x)$ – непарна, якщо $f(x)$ непарна, то $f_{\mathbf{H}}(x)$ є парною функцією.

6. *Властивість інваріантності зміни масштабу.* Для довільного числа $\alpha > 0$ має місце наступне співвідношення

$$\mathbf{H}[f(\alpha x)] = f_{\mathbf{H}}(\alpha x). \quad (4.9)$$

7. *Комутативність у разі використання лінійних операторів.* Для обмеженого лінійного оператора $\mathbf{B}[\cdot]$ має місце

$$\mathbf{H}[\mathbf{B}[f(x)]] = \mathbf{B}[\mathbf{H}[f(x)]]. \quad (4.10)$$

8. *Перетворення Фур'є (ПФ).* Нехай існує ПФ функції $f(x) \rightarrow \mathbf{F}[f(x)]$, де $\mathbf{F}[\cdot]$ – оператор ПФ. З формули (4.3) випливає, що гільберт-образ $f_{\mathbf{H}}(x)$ функції $f(x)$ визначається як згортка функції $f(x)$ з ядром ПГ: $\mathbf{H}[f(x)] = f(x) * (1/\pi x)$. ПФ функції $1/\pi x$ наступне

$$\mathbf{F}\left[\frac{1}{\pi x}\right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-i2\pi f x} dx = \dot{K}(f) = -i \operatorname{sign}(f) = \begin{cases} -i, & f > 0, \\ 0, & f = 0, \\ i, & f < 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

де знакова функція $\text{sign}(f)$ визначається як :

$$\text{sign}(f) = \begin{cases} 1, & f > 0, \\ 0, & f = 0, \\ -1, & f < 0. \end{cases}$$

Отже ПФ (спектр) гільберт-образу $f_H(x)$ зв'язаний зі спектром вхідної функції $f(x)$ співвідношенням

$$F[f_H(x)] = -i \text{sign}(f) \cdot F[f(x)]. \quad (4.12)$$

4.1.3. Практична реалізація перетворення Гільберта

З виразу (4.3) витікає, що ПГ реалізується за допомогою лінійного фільтра з передатною характеристикою $\dot{K}(f) = -i \text{sign}(f)$ або імпульсною характеристикою $h(t) = 1/\pi t$ (рис. 4.1).

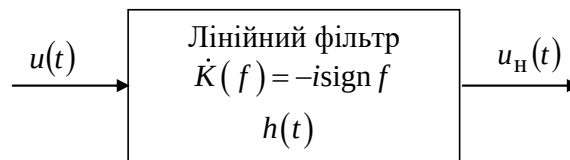


Рис. 4.1. Лінійний фільтр, що реалізує пряме перетворення Гільберта

Цей фільтр можна вважати ідеальним фазообертачем, оскільки для нього $|\dot{K}(f)| = 1$, крім значення $|\dot{K}(0)| = 0$, і фільтр зсуває фази всіх компонент спектру на кут $+0,5\pi$ в області від'ємних частот та на кут $-0,5\pi$ в області додатних і не змінює амплітудні співвідношення між частотними компонентами сигналу.

Обернене ПГ реалізує лінійний фільтр з передатною характеристикою

$$\dot{K}^{-1}(f) = \frac{1}{\dot{K}(f)} = -\dot{K}(f) = i \text{sign}(f), \quad f \neq 0. \quad (4.13)$$

Для розв'язання практичних завдань аналізу характеристик інформаційних сигналів важливу роль відіграє наступна властивість: якщо існує перетворення Фур'є сигналів $u(t)$ і $u_H(t)$, то їх спектри відповідно $S_u(f)$ і $S_{u_H}(f)$ пов'язані як

$$S_{u_H}(f) = \begin{cases} S_u(f), & f > 0, \\ S_u(0+), & \lim_{\delta \rightarrow 0} (0 + \delta), \\ -S_u(0-), & \lim_{\delta \rightarrow 0} (0 - \delta), \\ -S_u(f), & f < 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Для комплекснозначного сигналу виду $\dot{z}(t) = u(t) + iu_H(t)$ зв'язок спектрів сигналів $\dot{z}(t)$ і $u(t)$ дається ще більш простим виразом

$$S_z(f) = \begin{cases} 2S_u(f), & f > 0, \\ S_u(0), & f = 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

На рис. 4.2 наведено наочну графічну ілюстрацію співвідношення спектрів сигналів $S_u(f)$, $S_{u_H}(f)$ і $S_z(f)$.

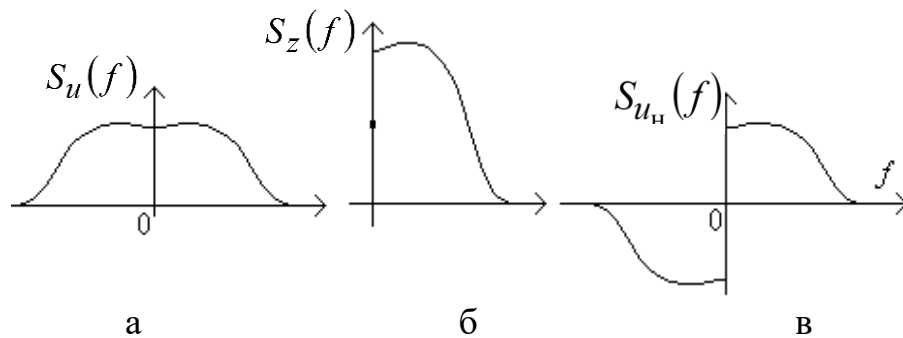


Рис. 4.2. Графіки спектрів сигналів $u(t)$ (а), $\dot{z}(t)$ (б) та $u_H(t)$ (в)

Отже в області додатних частот спектри Фур'є сигналів $u(t)$ і $u_H(t)$, з урахуванням додаткового зсуву на $-0,5\pi$, додаються; в області від'ємних частот їх спектри Фур'є протифазні і їх сума дорівнює нулю.

4.1.4. Перетворення Гільберта на фінітних інтервалах часу

У загальному випадку ПГ є фізично нереалізованим оскільки потребує виконання аналізу сигналів на нескінченному часовому інтервалі. Тому всі реальні вимірювання характеристик сигналів через ПГ можна виконувати лише наближено. Для деяких випадків існує можливість отримати наближені оцінки цих характеристик за результатами обмежених певним часовим вікном спостережень

сигналу. Такі випадки можливі тоді, коли вагомий внесок в інтеграл (4.3) роблять відповідні фінитні області значень досліджуваних характеристик. Зокрема, така можливість існує для вузькосмугових сигналів. Вона дає змогу застосувати ковзний режим визначення поточних оцінок характеристик досліджуваних сигналів.

Означення 4.2. Інтегральне перетворення функції $u(t)$ виду

$$u_{H_\epsilon}(t) = H_\epsilon[u(t)] = - \int_{t-T_\epsilon}^t \frac{u(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau, \quad (4.16)$$

називається ковзним ПГ, де $T_\epsilon > 0$ – тривалість часового вікна.

Використаємо фінитне прямокутне часове вікно

$$B(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t-T_B, t) \\ 0, & t \notin [t-T_B, t) \end{cases} \quad (4.17)$$

Як правило рекомендується вибирати $T_B > T_0$, де T_0 – період сигналу $u(t)$. В цьому випадку ковзне ПГ сигналу $u(t)$ згідно (4.16) визначається так:

$$u_{H_B}(t) = H[B(t)u(t)] = B(t)H[u(t)] = B(t)u_H(t). \quad (4.18)$$

У зв'язку з тим, що спектри Фур'є $B(t)$ та $u(t)$, як правило, перекриваються, значення $u_{H_\epsilon}(t)$ та $u_H(t)$ не співпадатимуть між собою і відрізнятимуться на певну методичну похибку Δ_M , тобто $u_{H_\epsilon}(t) = u_H(t) + \Delta_M$.

Ковзне опрацювання сигналу дає змогу отримати параметри сигналів у реальному часі (але все-таки із затримкою не менше $0,5T_B$) однак “платою” за таку можливість є поява методичної похибки Δ_M , яка зростає зі зменшенням T_B .

4.2. Дискретне перетворення Гільберта

Практична реалізація ковзного ПГ виду (4.16) у аналоговій формі викликає ряд труднощів, частину з яких долають шляхом використання методів цифрового оброблення сигналів. Методологію використання дискретного перетворення Гільберта (ДПГ) розглянемо на прикладі дослідження дискретної комплексозначної послідовності сигналу.

Задамо дискретну комплекснозначну послідовність сигналу виду

$$\dot{z}[j] = u[j] + i u_H[j], \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.19)$$

Послідовність (4.19) можна розглядати як вкладений дискретний сигнал у неперервний аналітичний сигнал (4.2) виду $\dot{z}(t) = u(t) + i u_H(t)$, отриманий з періодом дискретизації T_d . У послідовності (4.19) є відомими або заданими лише значення дійсної послідовності $u[j]$, яка визначається як дискретні значення спостережень або вимірювань досліджуваного сигналу $u(t)$.

Для $\dot{z}[j]$ використовуються наступні умови:

$$\operatorname{Re} \dot{z}[j] = u[j]; \quad \operatorname{Im} \dot{z}[j] = u_H[j]; \quad \sum_{j=1}^n u[j] u_H[j] = 0. \quad (4.20)$$

4.2.1. Спектральний метод обчислення аналітичної послідовності

Цей метод обчислення послідовності $\dot{z}[j]$, заданої на скінченній множині $j = \overline{1, n}$, ґрунтується на співвідношення (4.15) і передбачає такі етапи:

1. Розрахунок n -точкового дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) $S_u(m)$ послідовності $u[j]$

$$S_u(m) = \sum_{j=1}^n u[j] \exp\left(-i \frac{2\pi}{n} jm\right); \quad (4.21)$$

значення $S_u(m)$ обчислюються для дискретних частот $f_m = \frac{m}{n\Delta t}$, $0 \leq m \leq n-1$;

2. Розрахунок n -точкового ДПФ $S_z(m)$ послідовності $\dot{z}[j]$ на основі спектрів складових сигналу $\dot{z}[j] = u[j] + i u_H[j]$ з використанням співвідношення

$$S_z(m) = \begin{cases} S_u[0], & \text{для } m = 0, \\ 2S_u[m] & \text{для } 1 \leq m < 0,5n-1, \\ S_u[m] & \text{для } m = 0,5n, \\ 0 & \text{для } 0,5n+1 \leq m \leq n-1. \end{cases} \quad (4.22)$$

ПФ сигналу $\dot{z}[j]$ має односторонній спектр (тільки додатні частоти), а спектральні складові такого сигналу дорівнюють подвоєним значенням

спектральних складових дійсного сигналу $u[j]$ (рис. 4.2б);

3. Обчислення $\dot{z}[j]$ за значеннями $S_z(m)$ на основі оберненого ДПФ

$$\dot{z}[j] = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} S_z[m] \exp\left(i \frac{2\pi}{n} jm\right). \quad (4.23)$$

Даний метод обчислення комплексної послідовності $\dot{z}[j]$ реалізовано у програмному середовищі Matlab функцією **hilbert**. Послідовність $\dot{z}[j]$ є комплекснозначною, в якій дійсна частина є вхідною дійсною послідовністю $u[j]$, а уявна частина $u_H[j]$ є ДПГ послідовності $u[j]$.

4.2.2. Визначення ДПГ в часовій області

Розрахунок послідовності $u_H[j]$ в часовій області ґрунтується на визначенні імпульсної характеристики перетворювача Гілберта. Для її отримання розглянемо обернене ПФ від його частотної характеристики $\dot{K}(f)$. Один з різновидів неперервного оберненого ПФ довільної функції частоти $X(f)$ за визначанням має вид:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df. \quad (4.24)$$

В це рівняння внесемо три змінні:

- 1) замість f підставимо $\omega = 2\pi f$, тому $df = \frac{1}{2\pi} d\omega$.
- 2) оскільки частотна характеристика дискретної системи періодична з періодом повторення рівним T_d , обчислення виконуємо на інтервалі $\mp \frac{\omega_d}{2}$
- 3) інтеграл розділемо на 2 частини :

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\frac{\omega_d}{2}}^{\frac{\omega_d}{2}} \dot{K}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_d}{2}}^0 i e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\omega_d}{2}} i e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi t} \left(e^{i\omega t} \Big|_{-\frac{\omega_d}{2}}^0 - e^{i\omega t} \Big|_0^{\frac{\omega_d}{2}} \right) = \frac{1}{2\pi t} \left(1 - e^{-i\omega_d \frac{t}{2}} - e^{i\omega_d \frac{t}{2}} + 1 \right) = \\ &= \frac{2}{2\pi t} \left(1 - \cos \frac{\omega_d t}{2} \right) \end{aligned}$$

Для отримання функції $h(t)$ з'ясуємо її значення в точці $t=0$. Для розкриття неоднозначності типу $0/0$, скористаємося правилом маркіза де Лопіталя:

$$h(0) = \frac{\frac{d}{dt} \cos \frac{\omega_d t}{2}}{\frac{d}{dt} (\pi t)} \bigg|_{t \rightarrow 0} = \frac{\omega_d \sin \frac{\omega_d t}{2}}{2\pi} \bigg|_{t \rightarrow 0} = 0.$$

Визначимо дискретну версію $h(t)$. Для цього замість неперервного часу t , підставимо дискретний час nt_d . Тоді:

$$h[nt_d] = h[n] = \frac{1}{\pi n t_d} \left[1 - \cos \frac{2\pi f_d t_d n}{2} \right] = \frac{1 - \cos \pi n}{\pi n t_d}. \quad (4.25)$$

Отже:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1 - \cos \pi n}{\pi n t_d}, & n \neq 0; \\ 0, & n = 0, \end{cases} \quad (4.26)$$

де t_d – масштабуючий множник Отримаємо графік $h[n]$ зображено на рис. 4.3.

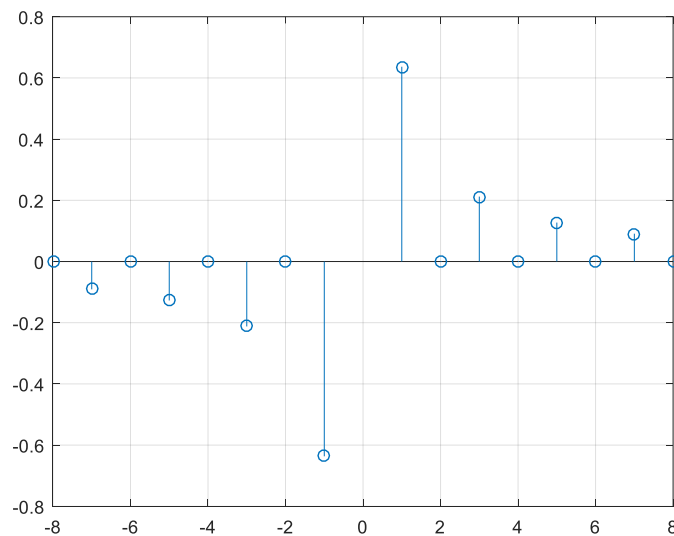


Рис. 4.3. Графік дискретної імпульсної характеристики $h[n]$

Відмітимо, що для $n>0$ значення $h[n]$ відмінні від 0 тільки для парних значень n . Крім того ці значення зменшуються як ряд чисел $1/1, 1/3, 1/5, 1/7, \dots$. Цей ряд нагадує ряд Фур'є для періодичного прямокутного імпульсу.

Як отримати дискретний сигнал маючи $h[n]$?

Вихідний сигнал $x[n]$ утворюється як згортка $x[n]$ з $h[k]$:

$$x_n[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n - k]. \quad (4.27)$$

Це означає, що перетворювач Гільберта може бути реалізований як дискретний нерекурсивний фільтр з кінцевою імпульсною характеристикою (КИХ). Структура такого фільтра наведено на рис.4.4.

Використання дискретної послідовності $z[j]$ (6.22) дає змогу узагальнити терміни “фазова характеристика” і “фазовий зсув” для класу дискретних послідовностей сигналів, що актуально для цифрового опрацювання сигналів в КІС діагностики та НК.

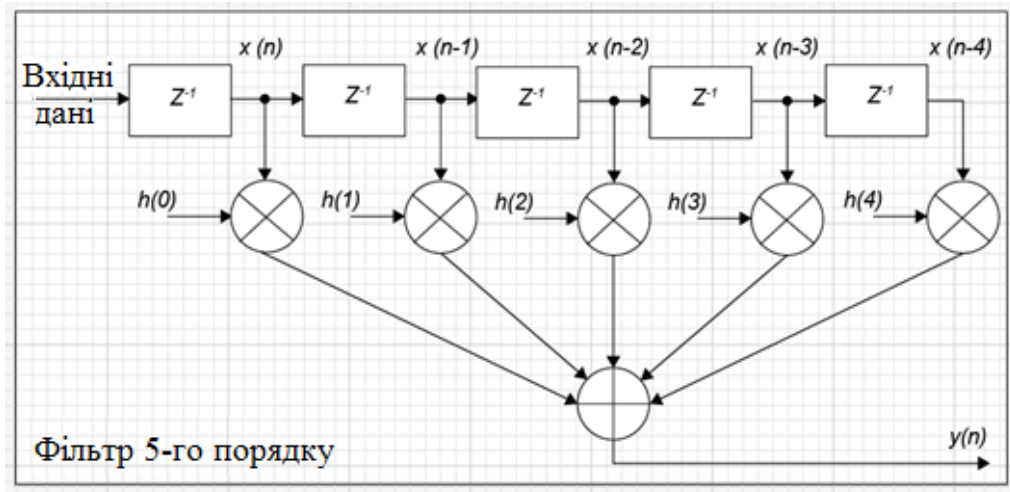


Рис. 4.4. Структура дискретного фільтра Гільберта

Для досягнення прийнятної точності необхідно обирати фільтр порядку більше 2000, що обмежує його практичне застосування.

4.3. Визначення характеристик циклічних сигналів через їх ПГ

Неперервний випадок. Для заданого дійсного сигналу $u(t)$, якому ставиться у відповідність комплекснозначний аналітичний сигнал виду

$$\dot{z}(t) = u(t) + iu_H(t) = |\dot{z}(t)| \exp(i \arg \dot{z}(t)) = A(t) \exp(i\Phi(t)), \quad (4.28)$$

характеристики неперервної дійсного сигналу $u(t)$ визначаються як:

а) амплітудна характеристика

$$A(t) = \sqrt{u^2(t) + u_H^2(t)}; \quad (4.29)$$

б) фазова характеристика

$$\Phi(t) = \text{Arg} \dot{z}(t) = \arctg \frac{u_H(t)}{u(t)} + \frac{\pi}{2} \{2 - \text{sign } u_H(t)(1 + \text{sign } u(t))\} + 2\pi \mathbf{L}[u(t), u_H(t)], \quad (4.30)$$

де $L[\cdot]$ – оператор розгортання фазової характеристики сигналу.

Процес розгортання фази на прикладі гармонічного сигналу частотою f подано на рис. 4.3. Нерозгорнута фаза визначається як $\varphi(t) = (2\pi ft - \varphi_n) \bmod 2\pi$.

Ідея розгортання фази гармонічного сигналу є зрозумілою з рис. 4.5. Для сигналів більш складної структури визначення розгорнутої фази надає значно ширші можливості, зокрема можливість дослідження динаміки розвитку фази модульованих сигналів, аналізу флуктуацій фази сигналів та фази сигналів у присутності шуму. Проте наявність шуму ускладнює процес розгортання фази і вимагає застосування додаткових статистичних методів її опрацювання.

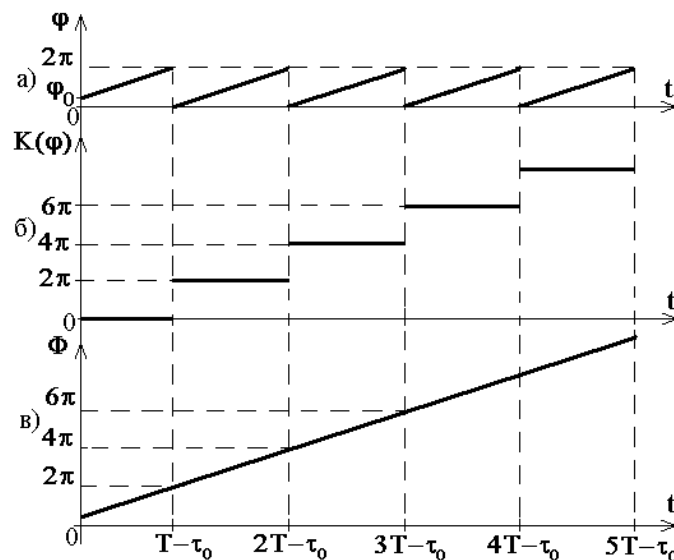


Рис. 4.5. Графічне представлення розгортання фази гармонічного сигналу

в) частотна характеристика

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt}. \quad (4.31)$$

Узагальненням поняття "фазовий зсув" між двома гармонічними сигналами однакової частотию є наступне означення для циклічних сигналів.

Означення 4.3. Різницею фазових характеристик двох дійсних сигналів $u_1(t)$ і $u_2(t)$, кожному з яких ставиться у відповідність комплекснозначний сигнал виду $\dot{z}(t) = u(t) + iu_n(t)$, називається неперервна функція

$$\varphi(t) = \Phi_2(t) - \Phi_1(t), \quad (4.32)$$

де відповідні фазові характеристики $\Phi_j(t)$ сигналів $u_j(t)$, $j=1,2$ визначаються виразом (4.26).

Дискретний випадок. Використання ДПГ дає змогу поставити у відповідність заданій послідовності дискретного сигналу $u[j]$, $j=\overline{1,n}$ послідовність комплекснозначного сигналу $z[j]=u[j]+iu_H[j]$. За аналогією до (4.29)-(4.31) дійсна послідовність $u[j]$, $j=\overline{1,n}$ має наступні характеристики:

г) дискретну амплітудну характеристику

$$A[j]=\sqrt{u^2[j]+u_H^2[j]}; \quad (4.33)$$

д) дискретну фазову характеристику

$$\Phi[j]=\text{Arg}z[j]=\text{arctg}\frac{u_H[j]}{u[j]}+\frac{\pi}{2}\{2-\text{sign } u_H[j](1+\text{sign } u[j])\}+2\pi L[u[j],u_H[j]]; \quad (4.34)$$

е) дискретну частотну характеристику

$$\Psi[j]=(\Phi[j]-\Phi[j-1])/2\pi T_d. \quad (4.35)$$

Означення 4.4. Різницею дискретних фазових характеристик двох заданих дискретних сигналів $u_1[j]$ і $u_2[j]$, кожному з яких ставиться у відповідність комплекснозначна послідовність виду (4.19), тобто $z[j]=u[j]+iu_H[j]$, називається дискретна послідовність

$$\varphi[j]=\Phi_2[j]-\Phi_1[j]. \quad (4.36)$$

4.4. Особливості використання ДПГ у вимірюваннях фізичних величин

ДПГ давно використовується в цифровій обробці сигналів, проте його застосування у вимірювальній техніці в опрацюванні сигналів сенсорів має певні особливості, для пояснення чого спочатку розглянемо схему формування інформаційних циклічних сигналів в технічних системах.

4.4.1. Формування циклічних інформаційних сигналів.

Загальна структура формування циклічних сигналів в технічних системах представлена на рис. 4.6.

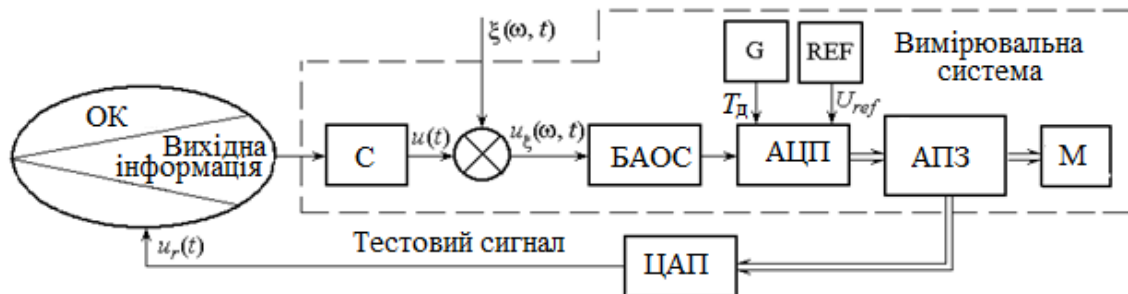


Рис. 4.6. Схема взаємодії вимірювальної системи з ОК

Апаратно-програмний засіб АПЗ генерує цифровий тестовий сигнал (найчастіше синусоїдної форми), який перетворюється у фізичний сигнал (найчастіше напругу) за допомогою цифро-аналогового перетворювача ЦАП і діє на ОК. Вихідна інформація у вигляді сигналів різної фізичної природи перетворюється сенсором С у електричний сигнал виду $u_r(t) = U_r \cos[2\pi f_r t + \varphi_r]$, $U_r > 0$, $t \in T_a$, $\varphi_r \in [0, 2\pi)$ (найчастіше у напругу). Блок аналогового оброблення сигналу БАОС забезпечує підсилення сигналу та узгодження з АЦП, який виконує операції дискретизації та квантування сигналу $u_\xi(t)$ як реалізації процесу $u_\xi(\omega, t)$ де ω – випадкова подія, яка відбиває той факт, що в загальному випадку $u_\xi(\omega, t)$ є випадковим процесом, а $\xi(\omega, t)$ випадковий процес, для якого найчастіше обґрунтовують гауссову модель (тут і далі, якщо будуть розглядатись не випадкові реалізації досліджуваних випадкових процесів аргумент ω в записі сигналу опускатимемо). Виконання операції дискретизації забезпечують генератор тактових імпульсів G, а операції квантування – джерело опорної напруги REF. Фактично на виході n -розрядного АЦП в кожний фіксований момент часу інформаційний сигнал представлений кодом

$$N_\xi[j] = \text{ent} \left(u_\xi(jT_d) \frac{2^n}{U_{ref}} \right) \quad (\text{де ent} - \text{позначення цілої частини числа}).$$
 Але для

вимірювання амплітудних характеристик сигналу принциповим є узгодження значення опорної напруги U_{ref} з одиницею вимірювання напруги, а для вимірювання частотних характеристик – узгодження періоду дискретизації T_d з одиницею часу. АПЗ є опрацьовує цифрові сигналів і обчислює дискретні характеристики сигналів, які відображаються монітором М.

4.4.2. Особливості використання ДПГ у вимірювальному експерименті

- Вихідний сигнал сенсора має розмірність (найчастіше вольти). Його можна представити добутком числової функції $u(t)$ на одиницю вимірювання $[U]$ відповідної фізичної величини U . Тому для представлення дискретних амплітудної (4.29) та частотної (4.31) характеристик сигналу у прийнятих одиницях (у вольтах та герцах), достатньо виконати аналого-цифрове перетворення з прийнятими мірами одиниць часу і напруги.

В схемі на рис. 4.4 одиниці часу і напруги відтворюють блоки G і REF. Фазова характеристики (4.30) в радіанах визначається через відношення двох величин одного роду – $\hat{u}(t) \cdot [U]$ та $u(t) \cdot [U]$, тому аналого-цифрове перетворення в разі визначення тільки цієї характеристики може відбуватись з довільним вибором одиниці $[U]$, тобто не вимагає використання спеціальної фізичної міри вимірювання фази сигналів.

- Можливість отримати та аналізувати дискретні амплітудну, фазову та частотну характеристики інформаційних сигналів як функції часу, задані вибірками певного обсягу.

- Можливість отримати вибірки характеристик інформаційних сигналів значних обсягів, що створює передумови для більш коректного використання статистичних методів опрацювання їх характеристик.

- Можливість синхронно обчислювати амплітудну, фазову та частотну характеристики інформаційних сигналів для їх спільного використання для виділення нових інформаційних ознак в задачах ТДНК.

- Можливість визначати локальні зміни параметрів інформаційних

сигналів навіть на інтервалах часу співмірних з періодом сигналу-носія.

- Можливість мінімізації аналогової частини схеми опрацювання сигналів за рахунок розширення цифрової обробки, що збільшує гнучкість систем контролю та діагностики та можливість їх поліпшення за рахунок вдосконалення програмного забезпечення.

4.4.3. Приклад використання ДППГ в аналізі модульованих сигналів

Можливості ДППГ для визначення характеристик сигналів ілюструє наступний модельний експеримент.

Приклад 4.1. Задано синусоїдний сигнал частотою 1 кГц з амплітудно-частотною модуляцією

$$u[j] = A[j] \cdot [1 + 0,5 \cos(2\pi 50 n T_d)] \cdot \sin(2\pi 10^3 j T_d + 20 \cos(2\pi 40 j T_d)),$$

$$A_j = \begin{cases} 1 \text{ В}, & j \in [500, 9500] \\ 0, & j \notin [500, 9500] \end{cases}$$

Модуляція виконувалась за гармонічними законами: амплітудна модуляція – з частотою 50 Гц і глибиною 0,5, а частотна – з частотою 40 Гц і глибиною 0,8; обсяг вибірки $n = 10^4$, період дискретизації $\Delta t = 10^{-5}$ с.

Необхідно визначити закони модуляції та оцінити їх похибки.

Результати моделювання показано на рис. 4.7: на рис. 4.7,а подано послідовності $u[j]$ і $\hat{u}[j]$, на рис. 4.7,б – відновлені значення фази в інтервалі $[0, 2\pi)$, тобто $(\Phi[j]) \bmod 2\pi$, на рис. 4.7,в – значення розгорнутої фази $\Phi[j]$.

На рис. 4.8 показано: на графіку рис. 4.8,а – значення обвідної $U[j]$ обрахованої у відповідності до (4.33), на рис. 4.8,б – похибка обчислення обвідної $\Delta U[j] = U[j] - A[j](1 + 0,5 \cos(2\pi 50 j T_d))$, на рис. 4.8,в – значення миттєвої частоти $f[j]$ відповідно до (4.35), на рис. 4.8,г – похибка обчислення миттєвої частоти $\Delta f[j] = f[j] - 1000[1 + 0,8 \cos(2\pi 40 j T_d)]$.

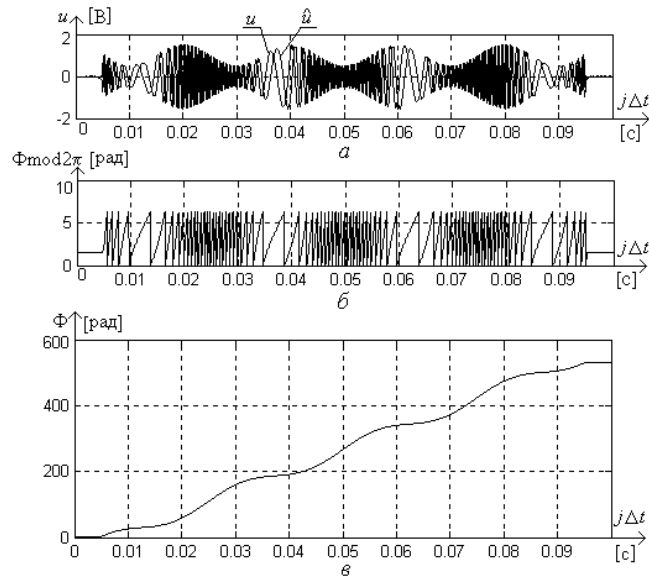


Рис. 4.7. Графіки послідовностей $u[j]$ і $\hat{u}[j]$ (а), $(\Phi[j]) \bmod 2\pi$ (б) та $\Phi[j]$ (в)

Коливальний характер похибок $\Delta U[j]$ та $\Delta f[j]$ обумовлений методичною похибкою, викликаною кінцевим часом вимірювання. Максимальні значення похибок збільшуються на початку і в кінці часу аналізу. Для їх зменшення доцільно враховувати і відбирати для наступного використання тільки отримані значення характеристик сигналу з центральної частини вікна.

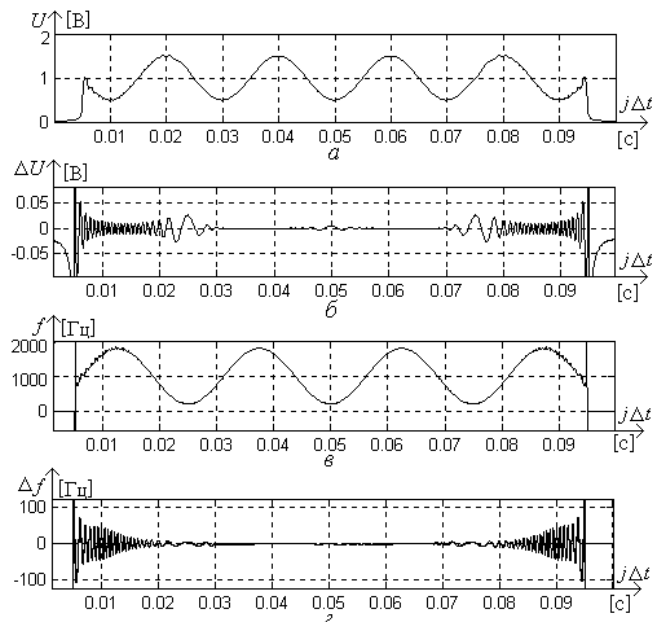


Рис. 4.8. Графіки послідовностей $U[j]$ (а), $\Delta U[j]$ (б), $f[j]$ (в) та $\Delta f[j]$ (г)

4.5. Питання для самоконтролю

1. Наведіть та прокоментуйте формули прямого і оберненого ПГ.
2. З якою метою використовується ПГ в системах опрацювання циклічних сигналів?
3. Перелічить та подайте аналітичний запис властивостей ПГ.
4. Запишіть передатну та відповідну імпульсну характеристику лінійного фільтра, що реалізує ПГ.
5. Дайте визначення ковзного ПГ.
6. Як зв'язаний гільбетр-образ сигналу зі спектром вихідного сигналу?
7. Дайте визначення поняття «фазова характеристика сигналу» через його ПГ.
8. Дайте визначення поняття «амплітудна характеристика сигналу» через його ПГ.
9. Дайте визначення понять «частотна характеристика сигналу» та «різниця фазових характеристик сигналів» через їх ПГ.

5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ВИПАДКОВИХ ФАЗОВИХ ЗСУВІВ СИГНАЛІВ

Задачі аналізу випадкових даних, представлених значеннями кутів на площині, виникають в різних галузях науки і техніки, в медицині і біології, географії і метеорології, економіці і психології, а також підчас дослідження інформаційних процесів у фізиці, радіотехніці, діагностиці і неруйнівному контролі технічних систем та інших галузях науки і техніки. Вони добре відомі, досліджені і мають свої розв'язки.

Плоскі кути і фазові зсуви сигналів, як об'єкти математики, мають спільні властивості. Це дає підстави використати отримані раніше моделі та методи ймовірнісного опису і статистичного опрацювання даних для випадкових кутів в технології опрацювання фазових характеристик сигналів.

Перш ніж розглядати випадкові кути нагадаємо розглянемо їх вироджений випадок – детерміновані кути та одиниці їх вимірювання, які прийняті і для вимірювання фазових зсувів сигналів.

5.1. Одиниці вимірювання плоских кутів та фазових зсувів сигналів

Природною одиницею плоского кута є повний плоский кут величиною 2π . Це кут, на який повинен бути повернутий промінь навколо точки з якої він виходить до суміщення з його початковим положенням. На практиці застосовують дільну одиницю – частину кута повного оберту. Відомо, що плоский кут $\theta \in [0, 2\pi)$ визначається як відношення довжини дуги l , що відповідає центральному куту θ на колі радіуса r , до величини цього радіуса

$$\theta = l/r. \quad (5.1)$$

Когерентна одиниця вимірювання кута в системі СІ повинна була бути безрозмірною: $[\theta] = \frac{[l]}{[r]} = \frac{m}{m} = 1$. Проте це не завжди зручно. Тому в системі СІ визначено одиницю вимірювання плоского кута в 1 радіан – центральний кут, який утворено двома радіусами кола, що відсікають на колі дугу, довжиною r .

В системі одиниць СІ радіан віднесено до додаткових одиниць. ДСТУ 3651.0-97 визначає радіан як безрозмірну похідну одиницю, назва якої може (там, де зручно), але не обов'язково, бути використана у поданні інших похідних одиниць. Радіан як додаткова одиниця СІ має виняткову особливість – *незалежність від вибору основних одиниць довільної системи одиниць*.

Державний стандарт ДСТУ 3651.0-97 дозволяє застосовувати поряд з радіаном і інші позасистемні одиниці вимірювання плоского кута – градуси, мінути, секунди та гради.

Град – це $1/100$ прямого кута (позначається через 1^g). Ця одиниця запропонована під час введення метричної системи мір. Утворення дольних одиниць для града здійснюється через коефіцієнт $1/100$, наприклад, один сантіград дорівнює одній сотій града: $1^c = 0.01^g$.

Градус введено як $1/90$ частину прямого кута (один градус містить 60 кутових мінут, або 3600 кутових секунд: $1^\circ = 60' = 3600''$). Куту 2π радіан в градусній мірі відповідає 360° . Некогерентній одиниці плоского кута в один оберт відповідає один повний цикл (2π радіан).

5.2. Графічне представлення результатів кутових спостережень

Результати кутових вимірів відображають точками чи напрямками, що задаються променями на колі одиничного радіусу (рис. 5.1), або круговими чи розгорнутими гістограмами (рис. 5.2а,б).

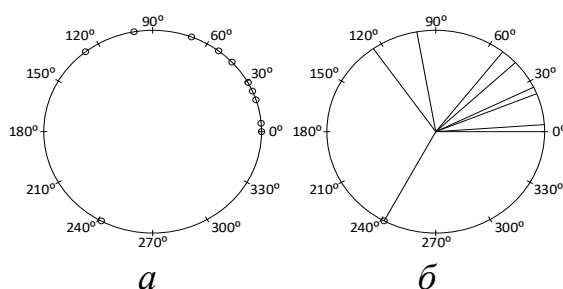


Рис. 5.1. Графічне зображення результатів кутових вимірів

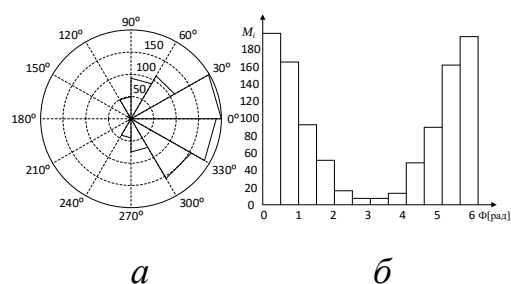


Рис. 5.2. Кругова (а) та розгорнута кругова (б) гістограми результатів кутових вимірів

Вибір одиничного радіусу ще більше спрощує вираз (5.1)

$$\theta = \frac{l}{\dim r}, \quad (5.2)$$

де $\dim r$ – розмірність вимірювання величин l, r .

Розбиття кола на обмежену кількість клас-інтервалів і групування даних за цими клас-інтервалами дає змогу відображати кутові дані значного обсягу M у вигляді гістограм (рис. 5.2а). Такі гістограми уявляють собою коло, розділене на m секторів (найчастіше рівної величини). Для j -го сектора підраховується кількість значень кутів M_j , які належать цьому сектору.

Інша форма графічного представлення кутових даних – розгорнута на інтервалі $\varphi \in [0, 2\pi)$ кутова гістограма (рис. 5.2б). На цих гістограмах в певних секторах маємо трикутники або прямокутники, висоти яких дорівнюють значенням відносних частот – M_j/M .

У загальному випадку кути можуть виходити за межі інтервалу $[0, 2\pi)$. Наведемо наступні приклади практичного використання кутів більших 2π які ще дістали назву *кумулятивних кутів*: дослідження залежності числа обертів двигуна від моменту припинення подачі енергії до моменту його зупинення; аналіз повного кута обертання диску рулетки після його розкручування; дослідження нутації – коливального руху осі власного обертання тіл, що відбувається одночасно з прецесією, за якого змінюється кут між віссю власного обертання тіла і віссю, навколо якої відбувається прецесія.

У випадку $\Phi > 2\pi$ областю значень кута є множина дійсних чисел R . Значення таких кутів відображають за допомогою гвинтової лінії (рис. 5.3).

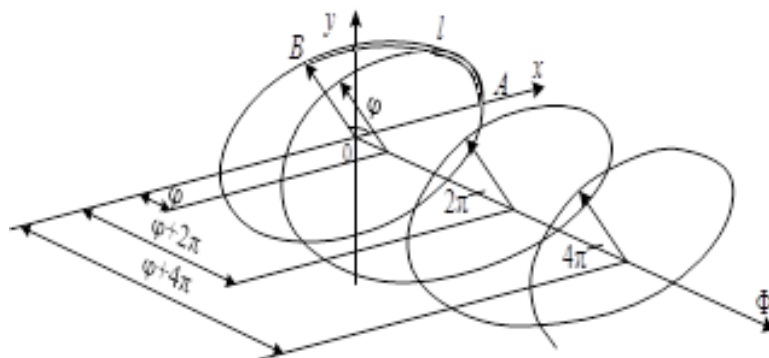


Рис. 5.3. Представлення кутів $\Phi > 2\pi$ за допомогою гвинтової лінії

Ця крива декартовій системі координат (x, y, Φ) задається рівняннями:

$$x = \cos \Phi, \quad y = \sin \Phi, \quad \Phi = 2\pi n + \varphi, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (5.3)$$

Домовимось і далі позначати значення, які набувають кути грецькими літерами φ , якщо $\varphi \in [0, 2\pi)$, або Φ , якщо $\Phi > 2\pi$ (у випадку розгляду таких кутів на прямій допустимо застосовування їх позначення через змінну x , як і для лінійних величин у випадку їх відображенні на прямій). Відповідні випадкові кути позначатимемо літерами $\psi \in [0, 2\pi)$ та $\Psi > 2\pi$.

На рис. 5.3 напрямку вектора в площині xOy відповідає дуга AB довжиною l . Цій дузі через гвинтову лінію ставиться у відповідність одне з чисел осі OF виду $\varphi + 2\pi n$. Числове значення n – кількості цілих обертів, задається початковими умовами або умовами фізичної реалізації експерименту.

Форма подання кута у вигляді

$$\Phi = [\Phi/2\pi]^+ \cdot 2\pi + \varphi, \quad (5.4)$$

є базовою формулою подання довільного кута на площині. В формулі (5.4) позначено: $[\Phi]$ – ціла (кількість повних обертів) і $\varphi \equiv \Phi \pmod{2\pi} \in [0, 2\pi)$ – дробова (за модулем 2π) частини кута Φ .

Розглядаючи періодичні процеси, що розгортаються в часі з періодом T (або в просторі з просторовим періодом λ), можна поставити у відповідність їх періодам величину 2π . Тоді кожному інтервалу часу t (або відстані D) в межах їх періодів відповідає кут $\varphi \equiv 2\pi \cdot \{t/T \pmod{1}\}$ (або $\varphi \equiv 2\pi \cdot \{D/\lambda \pmod{1}\}$). Отже дробові частини $t/T \pmod{1}$ або $D/\lambda \pmod{1}$ ототожнюються з кутом φ , після чого можуть бути досліджені методами статистичного аналізу випадкових кутів.

5.3. Особливості статистичних кутових вимірювань

Кутові вимірювання мають характерні властивості відмінні від властивостей лінійних вимірювань, областю визначення яких є числова вісь $R \in (-\infty, \infty)$. Геометрична інтерпретація суті кутових вимірювань і відповідно відображення

результатів таких вимірювань, проводиться на колі в інтервалі значень кута $[0, 2\pi)$. Це і пояснює особливість кута як об'єкта математики.

На практиці експериментатори часто використовують єдиний підхід для статистичного опрацювання результатів як лінійних, так і кутових спостережень. Наприклад, і для лінійних і для кутових вимірювань часто застосовують як оцінку найбільш ймовірного значення середнє арифметичне, а розсіювання результатів вимірювання характеризують середнім квадратичним відхиленням. В ряді випадків такий підхід може привести до грубих помилок.

Приклад 5.1. Нехай в серії $M=100$ вимірювань отримано значення: $\varphi_j = 1^\circ$ для $j = \overline{1, 50}$ і $\varphi_j = 359^\circ$ для $j = \overline{51, 100}$. Цілком природно вважати, що середнє значення кута дорівнює 0° , а розсіювання значень – 1° . Водночас, формальне застосування відомих для розподілу на прямій оцінок середнього і середнього квадратичного відхилення дає інші результати:

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \varphi_j = \frac{50}{100} (1^\circ + 359^\circ) = 180^\circ,$$

$$\tilde{\sigma}_\varphi = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\varphi_j - \tilde{\varphi})^2} = \sqrt{\frac{50}{99} 2 \cdot (179^\circ)^2} \approx 180^\circ.$$

Такі помилки зменшуються або зовсім зникають з віддаленням середнього значення кута від границі інтервалу вимірювання: $\varphi = 0^\circ$ чи $\varphi = 360^\circ$.

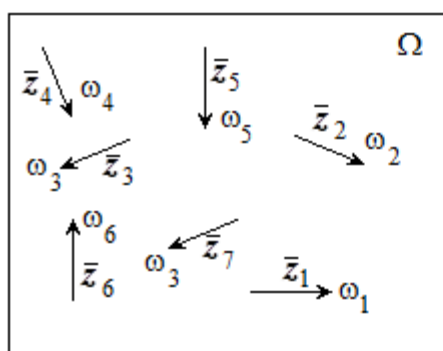
Висновок: для обробки результатів кутових вимірювань необхідно використовувати статистичні характеристики відмінні від тих, що застосовують в аналізі випадкових величин, такі характеристики, які б враховували кругову природу кутових величин – плоских кутів та фазових зсувів сигналів.

5.4. Ймовірнісний простір в дослідях з кутами

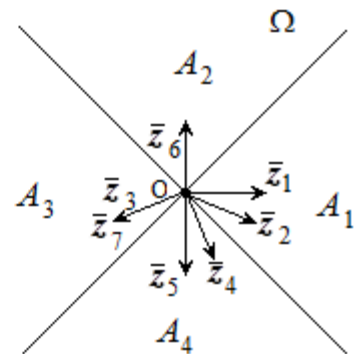
Визначимо спочатку первинні поняття теорії ймовірностей випадкових кутів. З цією метою розглянемо вектор одиничної довжини $\bar{z}$ в площині Q .

Дослідом з вектор $\bar{z}$ називатимемо відтворювану сукупність умов, за виконання яких вектор $\bar{z}$ в площині Q набуває певного напрямку. Саме напрямок $\bar{z}$ розглядається в теорії ймовірностей випадкових кутів як *елементарна випадкова подія* ω_j (модуль вектора не має значення для кутових спостережень, проте в фазових вимірюваннях він може виявитись суттєвим). Зауважимо, що напрямок, як подія, не виражається числом. Виходячи з цього означення сукупність колінеарних векторів, які можуть з'являтися в різних дослідях, відповідають одній елементарній події. Сукупність всіх можливих подій $\omega_j, j = \overline{1, J}$ утворює простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_J\}$.

Приклад 5.2. Елементарним дослідом з вектор $\bar{z}$ може бути кидання голки навмання на аркуш паперу з наступною фіксацією напрямку голки на аркуші. Приклад представлення елементарних подій у просторі Ω наведено рис. 5.4,а. На цьому рисунку два колінеарні вектори $\bar{z}_3, \bar{z}_7$ мають однакові напрямки і відповідають одній елементарній події, яка позначена ω_3 .



а



б

Рис. 5.4. Приклади представлення елементарних подій у просторі Ω для нескінченної (а) та скінченної (б) множин напрямків на площині

Множина елементів простору Ω має потужність континуума. Безмежна кількість напрямків вектора $\bar{z}$ на площині ускладнює представлення результатів дослідів. Більш конструктивним є *розбиття* простору напрямків на площині на кінцеву сукупність n подій, яким відповідають певні сектори. Змістимо кожний вектор у площині паралельно самому собі таким чином, щоби його початок сумістився з однією

початковою точкою O . Всі вектори в межах кожного сектора вважаються як такі, що відповідають одній елементарній події. На рис.5.4,б виконано розбиття простору Ω на чотири сектори, відповідно розбиття має чотири атоми: A_1, A_2, A_3, A_4 .

У просторі Ω за допомогою теоретико-множинних операцій будується σ -алгебра множин $\mathfrak{F}$ (система підмножин A таких, що $\mathfrak{F} = \{A: A \subset \Omega\}$) та задається ймовірнісна міра $P = \{P(A); A \in \mathfrak{F}\}$, яка має наступні властивості:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ (невід'ємність ймовірнісної міри).
2. $P(\emptyset) = 0$ (де $\emptyset$ – пуста множина).
3. $P(\Omega) = 1$.
4. $P(D_1) + P(D_2) + \dots + P(D_n) = 1$ (властивість нормованості ймовірнісної міри, де D_i – елементи розбиття простору Ω).
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Трійка об'єктів $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ задає ймовірнісний простір для визначених вище елементарних подій ω_j .

5.5. Випадкові кути

Аналізувати та вивчати випадкові події в дослідах з напрямками вектора $\bar{z}$ в просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$, за їх визначення на вербальному рівні, незручно. Тому від випадкових подій переходять до випадкових кутів (ВК). Останні, в цілому, задаються подібно до випадкових величини – як числові функції $\psi(\omega)$, задані на просторі подій Ω , елементи якої визначені як напрямки одиничного вектору на площині. Наведемо наступне визначення випадкового кута на площині.

Означення. *Випадковим кутом* називають числову функцію $\psi(\omega)$ з областю визначення $\Omega = \{\omega_j\}$, де ω_j – елементарні події визначені як напрямки одиничного випадкового вектору на площині та областю значень $X \subseteq [0, 2\pi)$, або $X \subseteq [-\pi, \pi)$, таку, що для довільних значень $\varphi \in X$ множина тих $\omega_j \in \Omega$, для яких $\psi(\omega) < \varphi$, є подією $A \in \mathfrak{F}$.

Далі вважатимемо, що область значень ВК належить інтервалу $X \subseteq [0, 2\pi)$, хоча це не має принципового значення і допустимим є будь-який варіант виду $X \subseteq [\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. Отже ВК – це правило (функція), яке ставить у відповідність елементарній події $\omega_j \in \Omega$ число з інтервалу X , тобто $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Наведене означення ВК не містить спеціальних вимог щодо вибору початку відліку кутів та до його узгодження з межами підмножин $A \in \mathfrak{F}$.

Зазвичай функція $\psi(\omega)$ задається у наступний спосіб.

1. На площині Q , яку далі розглядатимемо як комплексну, задамо декартову прямокутну систему координат (c, s) з центром в т. O .

2. Побудуємо коло одиничного радіуса з центром в т. O . Коло одиничного радіуса, тобто $|\bar{z}| = r = 1$, називатимемо *нормованим* або *одиничним колом*.

3. Задамо напрямок позитивного відліку кута від осі Os в напрямку проти ходу годинникової стрілки і завершимо побудову координатного кола. Нагадаємо, що *координатним колом* називається коло з центром у початку координат і радіусом 1, на якому задана точка $(1, 0)$ (початок відліку) і додатній напрям відліку кутів (рис. 5.5а).

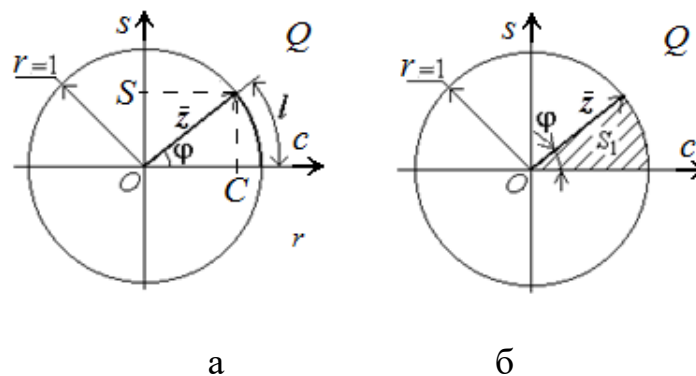


Рис. 5.5. Графічне представлення варіантів завдання кута:

а) довжиною дуги кола, б) площею сектора

4. Визначимо числову функцію $\psi(\omega)$ як відношення довжини дуги l між точками кола на його перетині з віссю Os та вектором $\bar{z}$ до його модуля $|\bar{z}|$, тобто як центральний кут кола $\varphi = l/|\bar{z}|$ (рис. 5.5,а), або відношенням подвоєної площі S_1 сегменту з кутом φ до квадрату модуля $|\bar{z}|$ – $\varphi = 2S_1/|\bar{z}|^2$ (рис. 5.5,б). В цьому разі отримаємо числове значення кута в радіанах.

Вектор $\bar{z}$ починається в точці O і закінчується в точці з координатами ($C = \cos \varphi$; $S = \sin \varphi$). Кут φ відраховується від осі Os у визначеному напрямку – проти ходу стрілки годинника, отже, $\varphi = \arg(\bar{z})$. У разі зміни φ на 2π вектор $\bar{z}$ описує на площині sOs повне коло і повертається в те саме положення.

Визначати щоразу величину кута за довжиною дуги одиничного кола не раціонально. Більш конструктивним є інший варіант.

Перейдемо від реалізацій $\bar{z}$ випадкового вектора до власне випадкового вектора $\bar{\rho}(\omega)$. Цьому вектору відповідає випадкове комплексне число

$$\dot{z}(\omega) = e^{i\psi(\omega)} = \cos \psi(\omega) + i \sin \psi(\omega), \quad (5.5)$$

де $i = \sqrt{-1}$. Формула (5.5) встановлює однозначний аналітичний зв'язок між дійсними числами $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ та всіма можливими напрямками вектора $\bar{\rho}(\omega)$ на площині: $\psi(\omega) = \arg \dot{z}(\omega)$. Повному оберту одиничного вектора на площині (тобто одному коловому циклу) відповідає куту 2π .

Числове значення кута можна обчислити, до прикладу, за формулою

$$\varphi = \arg \dot{z}(t) = \arctg \frac{S}{C} + \frac{\pi}{2} \{2 - \text{sign } S \cdot (1 + \text{sign } C)\}, \quad (5.6)$$

де $\text{sign}(\cdot)$ – знакова функція

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

З (5.5) та визначення елементарної події витікає така особливість ВК: для ВК виконується операція «сума за модулем 2π », тобто має місце порівняння

$$\psi(\omega) \equiv (\psi(\omega) + 2\pi k) \bmod 2\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.8)$$

З практичної точки зору більш конструктивним є завдання ВК кінцевою множиною. Формування дискретного ВК відбувається наступним чином. Розділимо коло на скінченне число Q рівних дуг точками кола $\pi(2q+1)/Q$, $q = \overline{0, (Q-1)}$, почавши відлік q від осі Os у напрямку проти ходу годинникової стрілки (рис. 5.6).

Ці точки утворюють скінченне розбиття D одиничного кола. До прикладу, якщо $Q=4$ маємо крок $\pi/4$ і множину точок розбиття $\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$.

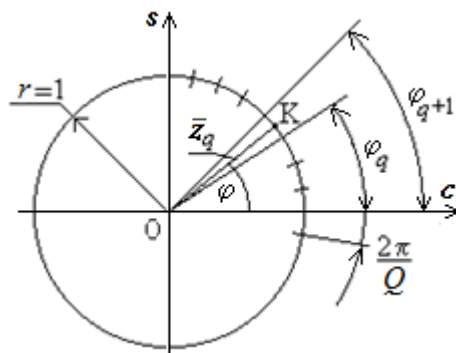


Рис. 5.6. Графічне зображення завдання дискретного випадкового кута

З'єднаємо початок координат із зазначеними точками кола. Побудовані в такий спосіб радіус-вектори утворюють із віссю Os кути $\varphi_q = \pi(2q+1)/Q$, $q = \overline{0, (Q-1)}$.

Задамо елементарну подію ω_q , яка настає внаслідок реалізації такої сукупності умов: для довільних дійсних φ_q і таких φ_{q+1} , що $0 \leq \varphi_{q+1} - \varphi_q < 2\pi$, в інтервалі $[\varphi_q, \varphi_{q+1})$ знайдеться число φ , яке за модулем 2π є значенням $\psi(\omega)$. Це твердження можна подати виразом

$$\omega_q = \left\{ \psi(\omega) \equiv \varphi \pmod{2\pi}, \varphi \in [\varphi_q, \varphi_{q+1}) \right\}, \quad q = \overline{1, Q-1}. \quad (5.9)$$

Отже, континууму значень напрямків випадкового вектора $\bar{\rho}(\omega)$ в інтервалі $[0, 2\pi)$ поставлено у відповідність скінченну множину подій $\{\omega_q, q = \overline{0, Q-1}\}$ з простору елементарних подій Ω , яку отримано розбиттям D одиничного кола на скінченне число Q рівних інтервалів.

Ілюстрацію процесу завдання дискретного ВК на колі наведено на рис. 5.7.

Значення ВК у вигляді ступінчастої функції задаються в циліндричній системі координат. Кутам 0 і 2π відповідає одна точка кола, для якої має місце стрибок значень ВК на 2π . З рис. 5.7 видно, що будь-який елементарній події $\omega_j \in \Omega$, $j = \overline{1, 8}$ поставлено у відповідність певне значення ВК $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$.

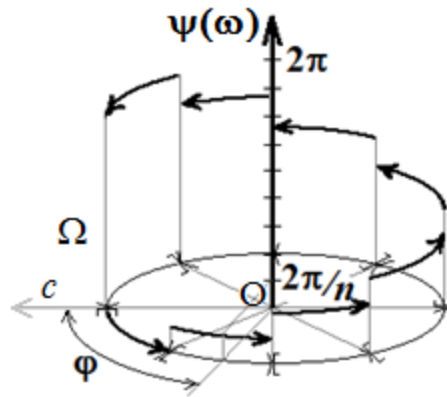


Рис. 5.7. Графічна ілюстрація процесу завдання дискретного ВК на колі

Наведене вище визначення ВК та властивість (5.8) вказує на відмінність ВК від випадкової величини і обумовлює необхідність обґрунтування для нього відповідних функцій розподілу та статистичних характеристик.

5.6. Функція розподілу випадкового кута

Функція розподілу $\psi(\omega)$ вводиться наступним чином

$$G(x') = P\{\omega \in \Omega: 0 < \psi(\omega) \leq x'\}, \quad x' \in [0, 2\pi), \quad (5.10)$$

і має наступні властивості:

1. $G(x')$ монотонно не спадна на інтервалі $x' \in [0, 2\pi)$ і неперервна справа.
2. $G(2\pi) = 1$ і є неперервною в точці $x' = 2\pi$.
3. $G(0) = 0$.
4. $G(x'_2) - G(x'_1) \geq 0$ при $x'_2 \geq x'_1$, $x'_1, x'_2 \in [0, 2\pi)$.

Відмінність функції розподілу $G(x')$ від функції розподілу випадкової величини на числовій прямій R полягає в тому, що, по-перше, функція $G(x')$ задана на скінченному інтервалі $x' \in [0, 2\pi)$, по-друге, областю задання випадкового кута є коло, а не пряма і для межових точок маємо $2\pi \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Означення. Дійсна випадкова величина $\Psi(\omega) > 2\pi$

$$\Psi(\omega) = \left[\frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right]^+ \cdot 2\pi + \psi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (5.11)$$

називається *випадковим кутом* $\Psi(\omega)$ на R , якщо $\psi(\omega)$ є випадковим кутом на $[0, 2\pi)$

з функцією розподілу $G(x')$ на $[0, 2\pi)$.

Приклади графіків функцій розподілу $G(x')$ наведені на рис. 5.8.

Функція, що *породжує* інтегральну функцію розподілу ймовірностей сімейства випадкових кутів $\Psi(\omega)$ на R визначається формулою

$$F(x) = G(x') + \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor + C, \quad x \in R, \quad x' \in [0, 2\pi), \quad (5.12)$$

де C – довільна константа.

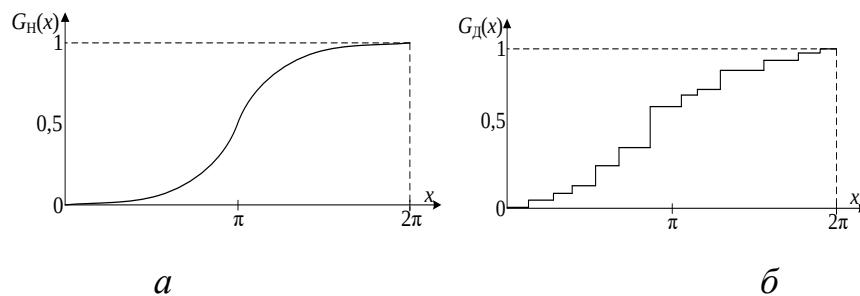


Рис. 5.8. Графіки безперервної (а) та дискретної (б) функцій розподілу ймовірностей випадкового кута $\psi(\omega)$ на $[0, 2\pi)$

Особливістю функції $F(x)$, $x \in R$ є те, що вона на інтервалах з початком в довільній точці числової осі має однакові прирости $F(x + 2\pi(k+1)) - F(x + 2\pi k) = 1$, що не суперечить властивостям нормованої імовірнісної міри.

Приклад графіку $F(x)$ дано на рис. 5.9.

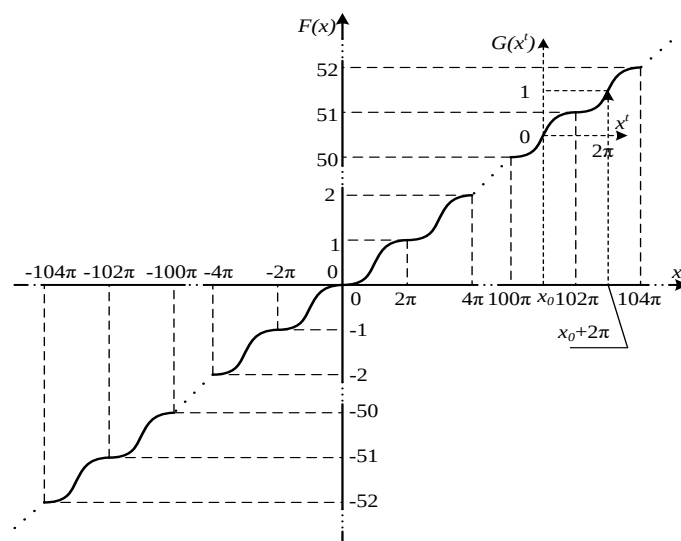


Рис. 5.9. Приклад графіку неперервної функції $F(x)$ ВК

Функція $F(x)$ має такі властивості:

$$1. F(x') = F(x') - F(0_-), \quad x' \in [0, 2\pi).$$

$$2. F(x) - x/2\pi \text{ є періодичною функцією з періодом } 2\pi.$$

$$3. \text{ Для } 0 \leq x_2 - x_1 \leq 2\pi \text{ маємо}$$

$$P\{\omega \in \Omega : x_1 < \Psi(\omega) \leq x_2\} = \begin{cases} 0, & x_2 \leq x_1, \\ F(x_2) - F(x_1), & (x_1 < x_2 \leq x_1 + 2\pi), \\ 1, & x_2 > x_1 + 2\pi \end{cases}$$

$$4. F(x + 2\pi) - F(x) = 1, \quad x \in R.$$

Виділивши частину функцію $F(x)$ на інтервалі $[x_0, x_0 + 2\pi)$ з початком в довільній точці x_0 отримуємо інтегральну функцію розподілу ймовірностей випадкового кута $\psi(\omega)$ на $[0, 2\pi)$. Вибір точки x_0 визначається з початкових умов для кожного вимірювального експерименту.

5.7. Щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ випадкового кута

Функція $p(x)$ для абсолютно неперервних законів розподілу на колі мають місце не тільки деякі властивості, спільні з властивостями функції $p(x)$ на прямій, але й ряд відмінних властивостей.

Для абсолютно неперервних функцій $G(x')$ і $F(x)$ маємо

$$G(x'_2) - G(x'_1) = F(x'_2 + 2\pi k) - F(x'_1 + 2\pi k) = \int_{x'_1}^{x'_2} p(y) dy, \quad (5.13)$$

$$x'_2 \geq x'_1, \quad x'_1, x'_2 \in [0, 2\pi), \quad k \in Z.$$

Функція $p(x)$ називається *щільністю розподілу ймовірностей випадкового кута* $\psi(\omega)$ на $[0, 2\pi)$ і має наступні властивості:

$$1. p(x + 2\pi) = p(x), \text{ є періодичною функцією з періодом } 2\pi.$$

$$2. p(x) \geq 0, \quad x \in [0, 2\pi).$$

$$3. \int_0^{2\pi} p(x) dx = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} p(x) dx = 1, \quad k \in Z.$$

Щільність розподілу ймовірностей суми двох незалежних ВК $[\psi_1(\omega) + \psi_2(\omega)] \bmod 2\pi$ визначається згортою їх щільностей розподілу

$$p(\theta) = \int_0^{2\pi} p_2(\theta - x)p_1(x)dx = \int_0^{2\pi} p_1(\theta - x)p_2(x)dx. \quad (5.14)$$

Для кутів має місце операція додавання за модулем 2π , що визначає властивість періодичності щільності розподілу ймовірностей ВК (рис. 5.10) і істотно відрізняє їх від розподілів випадкових величин. |

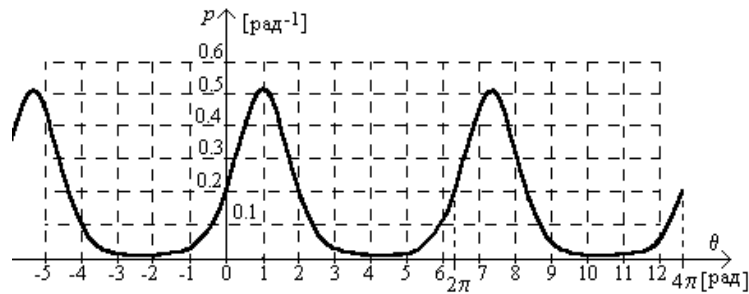


Рис. 5.10. Приклад графіку щільності розподілу ймовірностей ВК

Щільність розподілу ймовірності на рис. 5.10 періодична з періодом 2π . Нормування ймовірнісної міри відбувається на інтервалах довжиною 2π з довільною точкою початку інтервалу на осі θ . Наведений на рис. 5.10 розподіл називають *одночастотними*. *Багаточастотні* розподілу мають період менший за 2π в ціле число разів, тобто період $2\pi/j$, $j=2, 3, \dots$.

5.8. Основні числові характеристики розподілів ВК

Характеристичною функцією ВК $\Psi(\omega)$ є послідовність тригонометричних моментів виду

$$\dot{f}_n = \mathbf{M}e^{in\psi} = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{in\theta} dF(\theta) = \rho_n e^{in\mu_1} = a_n + ib_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.15)$$

де k – довільне ціле число, $\theta \in [0, 2\pi)$ – значення ВК, а косинус- і синус-моменти визначаються відносно початкового нульового напрямку як

$$a_n = \mathbf{M}\{\cos n\Psi(\omega)\} = \int_0^{2\pi} \cos nx dG(x), \quad b_n = \mathbf{M}\{\sin n\Psi(\omega)\} = \int_0^{2\pi} \sin nx dG(x). \quad (5.16)$$

Характеристична функція ВК має такі властивості.

1. Модуль характеристичної функції $|\dot{f}_n| \leq 1$.
2. Для $n = 0$ маємо $f_0 = 1$.
3. Характеристична функція від'ємного аргумента дорівнює комплексноспряженій характеристичній функції $\dot{f}_{-n} = \dot{f}_n^*$.
4. Характеристична функція $\dot{f}$ суми незалежних ВК $\psi_1(\omega), \dots, \psi_m(\omega)$ дорівнює добутку їх характеристичних функцій $\dot{f}_n^{(k)}$ (де n – порядок моменту, k – порядковий номер ВК): $\dot{f} = \prod_{k=1}^m \dot{f}_n^{(k)}$.

Круговим середнім значенням ВК $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ з функцією розподілу $G(\theta')$, (аналог математичним сподіванням випадкової величини $\xi(\omega)$ з функцією розподілу $F(x)$) для якого $\dot{f}_1 = \mathbf{M}e^{i\psi} \neq 0$, називається кут

$$\mu_1 = \text{Arg}(\dot{f}_1). \quad (5.17)$$

Довжина результуючого вектора – це модуль тригонометричного моменту 1-го порядку – це $\rho = |\dot{f}_1|$.

Круговою дисперсією ВК $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ з функцією розподілу $G(\theta')$ називається величина

$$v = 1 - \rho = 1 - |\dot{f}_1| \quad (5.18)$$

Кругова дисперсія характеризує відхилення значення ВК від його середнього значення.

Круговою медіаною неперервного розподілу на колі $G(x')$, $x' \in [0, 2\pi)$ ВК $\psi(\omega)$ називають значення кута $\theta_m \in [0, 2\pi)$, яке є одним з рішень рівняння

$$Q(\theta_m) = F(\theta_m + \pi) - F(\theta_m) - 0,5 = \int_{\theta_m}^{\theta_m + \pi} p(\theta) d\theta - 0,5 = 0, \quad (5.19)$$

і для якого значення $Q(\theta_m - 0,5\pi)$ максимальне. У (5.19) позначено $F(\theta_m)$ – значення функції розподілу ВК в точці θ_m .

Для одновершинних розподілів медіана завжди визначається однозначно.

Одновершинні неперервні розподіли на колі відрізняються тим, що в інтервалі $[0, 2\pi)$ існують такі кути φ_1 і φ_2 , що під час руху точки по одиничному колу від φ_2 до φ_1 в обох напрямках функція $p(x') = dF(x')/dx'$ є монотонно неспадною.

Інша важлива властивість медіани ВК стосується його кругового середнього відхилення: у випадку одновершинного розподілу кругове середнє відхилення досягає мінімуму в точці θ_m .

5.9. Характерні розподіли ВК

Розподіл Мізеса (Mises distribution). Щільність розподілу ймовірностей Мізеса ВК $\psi(\omega)$ визначається за формулою

$$p_M(\theta | \mu, k) = \left(2\pi I_0(k)\right)^{-1} e^{k \cos(\theta - \mu)}, \quad |\mu| < \infty, k > 0, \quad (5.20)$$

де $I_0(k)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку; μ – круговий середній напрямок ВК; k – параметр концентрації ВК в околі μ . Приклади графіків $p_M(\theta | \mu, k)$ дано на рис. 5.11.

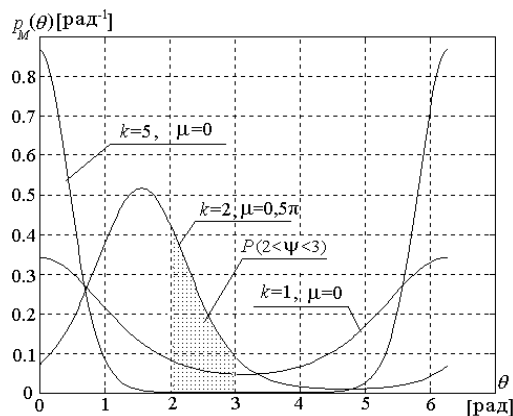


Рис. 5.11. Графіки щільності розподілу Мізеса

Характеристична функція розподілу Мізеса

$$f_n = \alpha_n = I_n(k) / I_0(k). \quad (5.21)$$

Цей розподіл має важливу властивість: найбільш правдоподібною оцінкою параметра μ є круговий середній напрямок. Розподілом Мізеса задовільно

апроксимується намотаний гауссовий розподіл за виконання наступного співвідношення між їх параметрами розсіювання:

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln(I_1(k)/I_0(k))} . \quad (5.22)$$

Розподіл Мізеса одновершинний та симетричний відносно значення μ , яке є математичним сподіванням цього розподілу. Відношення значення щільності розподілу, аргументом якої є мода μ до значення щільності в антимоді $(\mu + \pi) \pmod{2\pi}$ дорівнює e^{2k} . У інтервалі $[\mu - \pi, \mu + \pi]$ щільність (5.20) має дві точки перегину –

$$\mu \pm \arccos \frac{\sqrt{1+4k^2}-1}{2k} .$$

Намотаний гауссовий розподіл належить до сім'ї намотаних розподілів, які отримують за нелінійного перетворення випадкової величини $\xi(\omega)$:

$$\psi(\omega) \equiv [K\xi(\omega)] \pmod{2\pi} , \quad (5.23)$$

де K – масштабний коефіцієнт.

Перетворення (5.23) трансформує закони розподілу на прямій в намотані (на коло одиничного радіусу) закони розподілу ймовірностей ВК.

Якщо $\xi(\omega)$ має щільність розподілу ймовірностей $p(x)$, то безперервний ВК $\psi(\omega)$ також має безперервну щільність виду

$$p_{2\pi}(\theta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(\theta + 2\pi i) . \quad (5.24)$$

У загальному випадку функція $p_{2\pi}(\theta)$ несиметрична відносно середини інтервалу $[0, 2\pi)$, а на його кінцях має однакові значення: $p_v(0) = \lim_{\theta \rightarrow 2\pi} p_v(\theta)$.

Довільний закон розподілу на прямій можна перетворити в намотаний. Оскільки для випадкової величини $\xi(\omega)$ часто обґрунтовується гауссовий розподіл ймовірностей, слід очікувати, що для ВК також зустрічатиметься намотаний гауссовий розподіл, щільність розподілу ймовірності якого

$$p_{2\pi}(\theta/\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{[(\theta - \mu) \pmod{2\pi} + 2\pi j]^2}{2\sigma^2}\right) , \quad (5.25)$$

де μ – математичне сподівання; σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини $\xi(\omega)$. Чим менше σ , тим більше намотаний гауссовий розподіл ймовірностей концентрується в околі математичного сподівання. Приклади графіків щільності ймовірностей намотаного гауссового розподілу для різних параметрів наведено на рис. 5.3. Характеристична функція намотанного гауссового розподілу ймовірностей:

$$f_n = \alpha_n = \exp(-n^2 \sigma^2 / 2), \beta_n = 0, n \in Z. \quad (5.26)$$

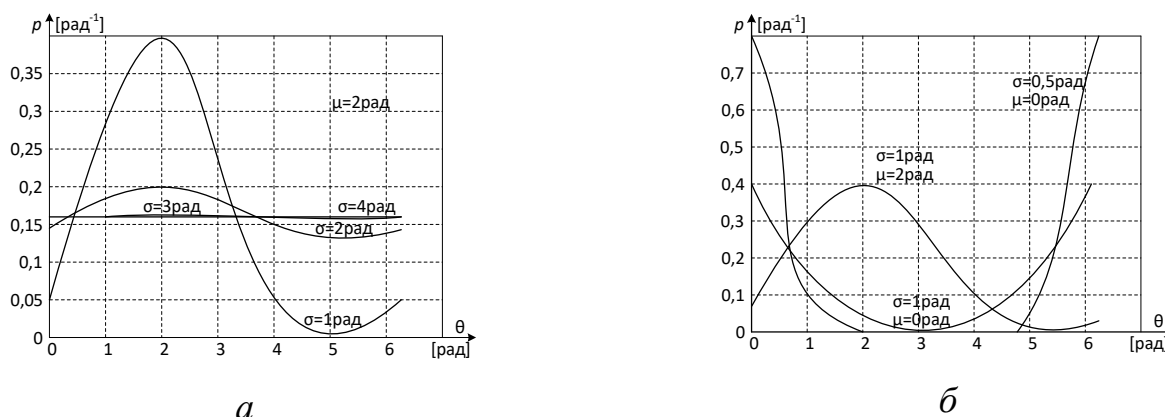


Рис. 5.12. Приклади щільності намотаного гауссового розподілу ВК з параметрами:
 а) $\mu = 2 \text{ рад}$ і $\sigma = (1; 2; 3; 4) \text{ рад}$; б) $\mu = 0$; 2 рад і $\sigma = (0, 5; 1) \text{ рад}$.

В статистичній кутометрії має місце *центральна гранична теорема*, яка стверджує: для незалежних ВК $\psi_1(\omega), \dots, \psi_n[\omega]$, що мають однакову функцію розподілу ймовірності, в разі $n \rightarrow \infty$, розподіл ймовірностей нормованої суми кутів $\left[\sum_{j=1}^n \psi_j(\omega) / \sqrt{n} \right] \bmod 2\pi$, наближається до намотаного гауссового розподілу.

Оскільки закони Мізеса і намотаний гауссовий задовільно апроксимують один одного (рис. 5.13), їх подібність дає підстави сподіватись, що тією чи тією мірою властивості кожного з них притаманні обом розподілам.

Розподіл (5.20), порівняно з намотаним гауссовим (5.25), має математичний запис, щой приводить до простіших математичних оцінок параметрів розподілу.

Якщо $\sigma \rightarrow \infty$ граничний розподіл перетворюється на рівномірний зі значенням щільності $1/2\pi$ (на рис. 5.12,а графіки зі значеннями параметра $\sigma = 3 \text{ рад}$ та $\sigma = 4 \text{ рад}$ майже не розрізняються), а збільшення μ приводить до зміщення максимуму функції в бік більших значень кутів. На інтервалі $[0, 2\pi)$ розподіл (5.25) має дві точки перегину.

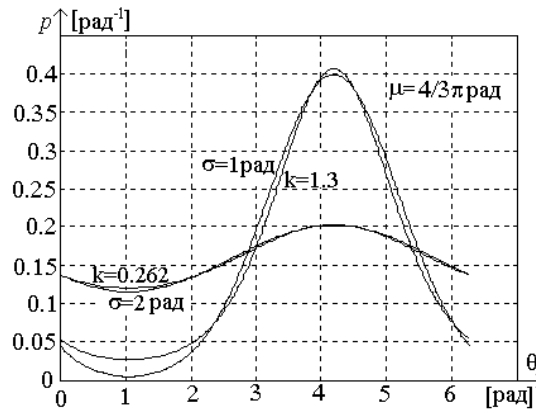


Рис. 5.13. Графіки щільностей ймовірності намотаного гауссового та розподілу Мізеса з параметрами: $\mu = 4\pi/3$ рад, $\sigma = 1$ рад і $k = 1,3$ та $\sigma = 2$ рад і $k = 0,262$

Деякі інші безперервні розподіли ВК наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1. Безперервні розподіли ВК та їх характеристичні функції

Назва	Щільність розподілу ймовірностей $p(\theta)$	Характеристична функція f_n
Рівномірний	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{e^{2\pi nj} - 1}{2\pi nj} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$
Кардіоїдний	$(2\pi)^{-1} [1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)]$, $ \mu < \infty, \rho < 0,5$	-
Трикутний	$[4 - \pi^2 \rho + 2\pi \rho \pi - \theta] / 8\pi$, $\rho \leq 4 / \pi^2$	$\alpha_{2n-1} = \rho / (2n-1)^2$, $\alpha_{2n} = 0, \beta_n = 0$
Намотаний Коші	$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 - \cos 2\rho + \rho^2}$, $\rho = e^{-a} \in [0, 1]$	$\rho^{ a }$

Гратчастий розподіл – це дискретний розподіл ймовірностей ВК з імовірностями

$$P\left[\psi \equiv \left(v + \frac{2\pi q}{l}\right) \bmod 2\pi\right] = P_q, \quad q = \overline{0, l-1}, \quad (5.27)$$

Величину $2\pi/l$ називають *кроком ґратки*. Для ймовірностей (5.27) виконується умова нормування: $\sum_q P_q = 1$. Цей розподіл зосереджений у вершинах вписаного в одиничне коло правильного l -кутника. Якщо $P_q = l^{-1}$, то розподіл ймовірностей перетворюється на рівномірний дискретний.

Характеристична функція ґратчастого розподілу у випадку $v \equiv 0 \bmod 2\pi$ дорівнює

$$f_n = \sum P_q \exp(2\pi qni/l). \quad (5.28)$$

Для рівномірного дискретного розподілу маємо

$$f_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{2\pi}, \\ 0, & n \not\equiv 0 \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (5.29)$$

5.10. Питання для самоконтролю

1. В яких одиницях вимірюються кути на площині?
2. Наведіть відомі вам форма графічного представлення результатів кутових спостережень.
3. В чому полягають особливості статистичних кутових вимірювань?
4. Дайте два визначення ВК на $[0, 2\pi)$ та на $\mathbb{R}$.
5. Дайте визначення числових характеристик випадкових кутів: характеристичної функції, кругового середнього та, кругової дисперсії.
6. В чому полягає характерна особливість щільності розподілу ймовірностей ВК?
7. Намалюйте приклад графіку щільності багаточастотного розподілу ймовірностей ВК.
8. Наведіть аналітичний вираз щільності розподілу ймовірностей Мізеса.
- 9 Як утворюються намотані розподіли з розподілів ймовірності випадкових величин?
10. Наведіть аналітичний вираз ґратчастого розподілу.
11. Як використовується подібність намотаного гауссового розподілу та розподілу Мізеса?

6. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ РОЗПОДІЛЕНИХ НА КОЛІ ВИПАДКОВИХ ФАЗОВИХ ЗСУВІВ СИГНАЛІВ

6.1. Вибіркові числові характеристики випадкових кутових величин

За результатами спостережень і попередньої обробки даних вимірювань отримують вибірку різниці дискретних фазових характеристик циклічних сигналів $(\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M)$, $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ обсягу M . Передбачається, що вибірка розглядається як реалізація випадкового кута з неперервною щільністю розподілу ймовірностей $p(x)$. За значеннями $(\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M)$ вибіркова характеристична функція і інші вибіркові числові характеристики різниці ФХС визначаються наступним чином.

Вибірковий тригонометричний момент порядку n відносно напрямку $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\hat{f}_n(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M e^{iu(\varphi_j - \alpha)} = \hat{a}_n(\alpha) + i\hat{b}_n(\alpha) = \hat{r}_n(\alpha) e^{im_n(\alpha)}, \quad (6.1)$$

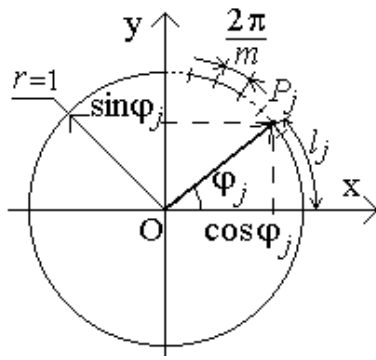
де вибіркові косинус- та синус-моменти порядку n обраховуються за формулами:

$$\hat{a}_n(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos[n(\varphi_j - \alpha)], \quad \hat{b}_n(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin[n(\varphi_j - \alpha)]. \quad (6.2)$$

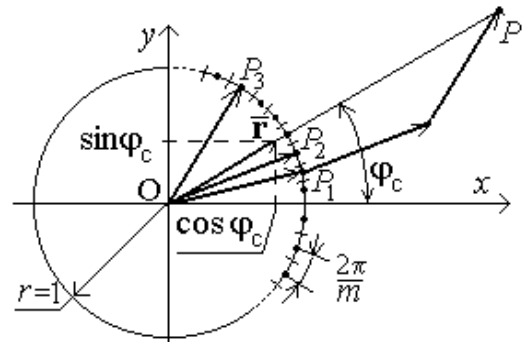
Вибіркова характеристична функція різниці дискретних фазових характеристик циклічних сигналів – це комплекснозначна послідовність $(\hat{f}_n(0), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, всі вибіркові тригонометричні моменти якої визначені відносно нульового напрямку $\alpha = 0$.

Вибіркове кругове середнє. Ця характеристика є найбільш часто вживаною і потребує детального розгляду. Результат одного фазового вимірювання φ_j можна зобразити плоским кутом φ_j , якому відповідає на колі одиничного радіуса $r = 1$ дуга довжиною l_j між додатною напіввіссю абсцис та вектором $\overrightarrow{OP_j}$ (рис. 6.1а). Вектор $\overrightarrow{OP_j}$ має декартові $[\cos \varphi_j, \sin \varphi_j]$ і полярні $(1, \varphi_j)$ координати.

Вимірювання виконуються з певним кроком $2\pi/m$. Дискретному характеру результатів фазових вимірювань відповідає розбиття кола на m клас-інтервалів. Тому точки P_j – це середини клас-інтервалів.



а



б

Рис. 6.1. Графічне зображення на колі результату одного вимірювання (а) та усереднення вибірки фазових зсувів обсягу $M = 3$ (б)

Будь-яка конструктивна характеристика L кругового середнього результатів фазових вимірювань, повинна задовольняти умову адитивності

$$\{L(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v)\}(\bmod 2\pi) \equiv \{L(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - v\}(\bmod 2\pi), \quad (6.3)$$

тобто для довільного кута $v \in [0, 2\pi)$ дробові частини (за модулем 2π) чисел $\{L(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - v\}$ та $L(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v)$ мають збігатися. Інакше кажучи, фазовий зсув сигналів, що задається характеристикою $L(\varphi_1, \dots, \varphi_M)$, повинен адитивно залежати від початкового кута v . Цій вимозі задовольняє оцінка у вигляді *вибіркового кругового середнього фазового зсуву*, що визначається як напрямок суми всіх одиничних векторів $\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_M}$. На рис. 5.1б розглянуто випадок $M = 3$. Сумарний вектор $\overrightarrow{OP} = \sum_{j=1}^3 \overrightarrow{OP_j}$ має декартові координати $\left(\sum_{j=1}^3 \cos \varphi_j, \sum_{j=1}^3 \sin \varphi_j \right)$ і характеризується вибіркоким круговим середнім фазовим зсувом φ_c . Фізичний зміст φ_c з точки зору механіки можна пояснити наступним чином. Усі одиничні вектори закінчуються точками P_j одиничного кола. Якщо всім цим точкам приписати однакову “ масу ” $1/M$, то координати “центра мас” цієї системи визначатимуться як

$$C = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos \varphi_j, \quad S = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin \varphi_j. \quad (6.4)$$

Координати вектора $\mathbf{r}$ перераховуються з декартової системи в полярну наступним чином

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{C^2 + S^2}, \quad (6.5)$$

$$C = r \cos \varphi_c, \quad S = r \sin \varphi_c. \quad (6.6)$$

Величина r має назву *вибіркової результуючої довжини* (ВРД) вектора $\mathbf{r}$.

Вектори $\mathbf{r}$ та $\overline{OP}$ розташовані у просторі під однаковим кутом φ_c до осі Ox .

Значення φ_c обчислюють за формулою

$$\varphi_c = \mathbf{L}[S, C] = \arctg \frac{S}{C} + \frac{\pi}{2} \{2 - (\text{sign} S)(1 + \text{sign} C)\}. \quad (6.7)$$

Якщо $r = 0$, значення $\varphi_c \in [0, 2\pi)$ однозначно не визначається.

Для $r > 0$ вибіркоче кругове середнє (ВКС) значення кута φ_c задовольняє вимогу (4.80), а r не залежить від початку відліку фазових зсувів чи кутів. Дійсно, якщо кожний з векторів $\overline{OP_j}$ (рис. 6.1б) повернути у просторі на кут $v \in [0, 2\pi)$, то приведе лише до повороту вектора $\mathbf{r}$ у просторі на такий же кут v , але значення r не зміниться. Після повороту вектора $\mathbf{r}$ нові координати кінця вектора будуть визначатись наступним чином:

$$\overline{C} = r \cos(\varphi_c - v), \quad \overline{S} = r \sin(\varphi_c - v). \quad (6.8)$$

Неважко пересвідчитись, що

$$\begin{aligned} \overline{C} &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos(\varphi_j - v) = r \cos(\varphi_c - v), \\ \overline{S} &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin(\varphi_j - v) = r \sin(\varphi_c - v) \end{aligned} \quad (6.9)$$

тобто

$$\begin{aligned} \varphi_c(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v) &\equiv \{\varphi_c(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - v\} \pmod{2\pi}, \\ r(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v) &= r(\varphi_1, \dots, \varphi_M), \end{aligned}$$

що і доводить властивість адитивності ВКС фазових зсувів.

Якщо покласти $v = \varphi_c$, то з урахуванням (6.9) маємо

$$\sum_{j=1}^M \sin(\varphi_j - \varphi_c) = 0, \quad (6.10)$$

Рівняння (6.10) використовують для перевірки правильності визначення φ_c .

Вибіркова кругова дисперсія. Визначимо відхилення в просторі напрямку вектора $\overline{OP}_j$ від довільного напрямку ν як

$$\Delta\varphi_j = \min\left\{\left(\varphi_j - \nu\right)', 2\pi - \left(\varphi_j - \nu\right)'\right\} = \pi - \left|\pi - \left(\varphi_j - \nu\right)'\right|, \quad \Delta\varphi_j \geq 0, \quad (6.11)$$

де $\left(\varphi_j - \nu\right)'$ – залишок визначеного за модулем 2π кута $\left(\varphi_j - \nu\right)$,

$$\left(\varphi_j - \nu\right)' = \left(\varphi_j - \nu\right) - \left[\frac{\varphi_j - \nu}{2\pi}\right]^+ 2\pi. \quad (6.12)$$

Зручною формою подання міри розсіювання є функція виду $f(\Delta\varphi) = 1 - \cos\Delta\varphi = 2\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$ кута відхилення $\Delta\varphi$, оскільки вона є додатною і монотонною на відрізку $[0, \pi]$. Тому величину

$$V(\nu) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[1 - \cos(\varphi_j - \nu)\right] = \frac{2}{M} \sum_{j=1}^M \sin^2 \frac{\varphi_j - \nu}{2} \quad (6.13)$$

прийнято за вибірку характеристику розсіювання вибірки фазових зсувів сигналів $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M\}$ відносно напрямку ν . З виразу (6.13) з урахуванням (6.108) випливає, що вибірка характеристика розсіювання відносно ВКС φ_c дорівнює

$$V(\varphi_c) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\{1 - \cos(\varphi_j - \varphi_c)\right\} = 1 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos(\varphi_j - \varphi_c) = 1 - r. \quad (6.14)$$

Величину $V(\varphi_c) \in [0, 1]$ називають *вибірковою круговою дисперсією (ВКД) вибірки (статистики) фазових зсувів* $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M\}$ сигналів. Ця характеристика інваріантна відносно початку відліку кутів.

Із виразу (6.13) випливає, що вибір $\nu = \varphi_c$ мінімізує характеристику кругового розсіювання. Дійсно з (5.14) маємо:

$$V(\nu) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\{1 - \cos(\varphi_j - \nu)\right\} = V(\varphi) + 2r \sin^2 \frac{\varphi_c - \nu}{2}, \quad (6.15)$$

що і доводить це твердження.

Розглянуті вибіркові оцінки характеристик випадкових фазових зсувів сигналів зведені в табл. 6.1.

Таблиця 6.1. Статистичні оцінки характеристик випадкових фазових зсувів сигналів
для статистики обсягу M

Найменування статистичної характеристики	Зміст формули визначення
Вибіркове кругове середнє статистики фазових зсувів сигналів	$\varphi_c = \left\{ \arctg \frac{S}{C} + \frac{\pi}{2} \{2 - (\text{sign} S) \times [1 + \text{sign} C]\} \right\} \bmod 2\pi;$ $C = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos \varphi_j; \quad S = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin \varphi_j$
Вибіркова довжина результуючого вектора	$r = \mathbf{r} = \sqrt{C^2 + S^2}$
Вибіркова кругова дисперсія статистики фазових зсувів сигналів	$V = 1 - r$
Кругове стандартне відхилення статистики фазових зсувів сигналів	$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1 - V)} = \sqrt{-2 \ln r};$ $V = 1 - \exp(-0,5\sigma^2)$
Вибіркова кругова медіана статистики фазових зсувів сигналів	Куту відповідає точка кола P , діаметр PQ ділить значення статистики навпіл, в околі P маємо максимальну концентрацію значень
Вибіркова мода статистики фазових зсувів сигналів	Куту відповідає точка кола, в околі якої спостерігається максимальна концентрація значень статистики
Вибірковий круговий розмах статистики фазових зсувів сигналів	Довжина найменшої дуги статистики, що визначається з варіаційного ряду $T_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j, j = 1, \dots, M - 1;$ $T_M = 2\pi - \varphi_M + \varphi;$ $W = 2\pi - \max\{T_1, \dots, T_M\}$
Вибірковий тригонометричний момент порядку u відносно напрямку α (u - ціле число)	$T_u(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M e^{iu(\varphi_j - \alpha)} = a_u(\alpha) + ib_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos[u(\varphi_j - \alpha)] + i \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin[u(\varphi_j - \alpha)] =$ $+ib_u(\alpha) = r_u(\alpha) e^{im_u(\alpha)}; \quad u = 0, 1, 2, \dots = a_u(0) \cos(u\alpha) + b_u(0) \sin(u\alpha);$ $b_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin[u(\varphi_j - \alpha)] =$ $= -a_u(0) \sin(u\alpha) + b_u(0) \cos(u\alpha);$ $r_u(\alpha) = \sqrt{a_u^2(\alpha) + b_u^2(\alpha)} = m_u(\alpha) = m_u(0) - u\alpha$ $= \sqrt{a_u^2(0) + b_u^2(0)} = r_u(0);$
Вибіркова характеристика асиметрії статистики фазових зсувів сигналів	$g_1 = \frac{b_2(m)}{V^{3/2}} = \frac{r_2 \sin[m_2(0) - 2m]}{V^{3/2}}.$
Вибіркова характеристика ексцесу статистики фазових зсувів сигналів	$g_2 = \frac{a_2(m) - (1 - V)^4}{V^2} = \frac{r_2 \cos m_2(0) - 2n - (1 - V)^4}{V^2}$

У випадку обчислення ВРД r (отже, і значення V) за групованими в клас-інтервали даними, отримуємо зміщену в напрямі менших значень оцінку r . З

метою зменшення цієї методичної похибки при обчисленні r застосовують поправку типу *поправки Шенпарда* [10]: $r_g = rc_g$, де $c_g = \pi / m \sin \frac{\pi}{m}$. Цією поправкою можна знехтувати при $m > 40$ оскільки $c_g(40) \approx 1.001$.

6.2. Приклад використання вибіркової довжини результуючого вектора в аналізі сигналів ультразвукової товщинометрії (УЗТ)

Існує велика кількість конструкційних матеріалів зі значним загасанням ультразвукових коливань. За такої умови традиційні способи аналізу сигналів УЗТ стають малоефективними. Для випадку $c/\lambda \approx 1...2$ розроблено спосіб лунаїмпульсної УЗТ підвищеної завадостійкості, який ґрунтується на використанні вибіркової довжини результуючого вектора (далі – r -статистика), яка визначається з фазової характеристики сигналу-носія у ковзному режимі.

Нагадаємо, що в ОК з паралельними поверхнями спостерігається не одне відлуння від його протилежної поверхні, а за достатнього часу спостереження та незначного загасання ультразвуку в матеріалі ОК – серія віддзеркалень з однаковим часовими затримками, що показано на рис.6.2.

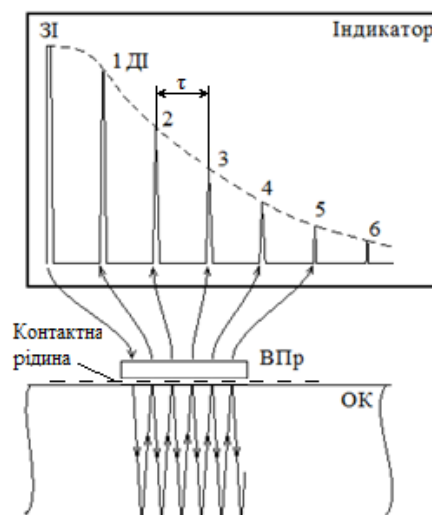


Рис. 6.2. Утворення серії донних імпульсів під час прозвучування ОК:
1,2,3,4,5,6 – донні імпульси (ДІ), ЗІ – зондуючий імпульс, ВПр – випромінювач-приймач

Часовий інтервал між зондуючим і першим донним імпульсом містить нестабільний час затримки на поширення сигналу в шарі контактної рідини, тому

значення τ визначають як інтервал між донними імпульсами, а товщина виробу – як $h = 0,5c\tau$, де c – швидкість повздовжних хвиль в матеріалі ОК.

Сутність методу визначення часових інтервалів в УЗК товщинометрії, що ґрунтується на визначенні та аналізі r -статистика, зображено на рис. 6.3.

Цей метод реалізується як послідовність виконання наступних операцій:

- отримання перетворення Гільберта $\hat{u}[j]$ аналізованого сигналу УЗТ;
- визначення АХС $A[j]$ та дробової частини ФХС $\varphi[j]$ ФХС;
- визначення різниці $\Delta\varphi[j]$ дробової частини ФХС та гармонічного сигналу з частотою сигналу-носія;
- визначення поточних значень статистики $r[j, M_w] \in (0, 1]$ у ковзному режимі для вікна апертурою M_w (передбачається непарною);
- порівняння поточних значень $r[j, M_w]$ з порогом Π та прийнятті рішення про наявність у вибраній ділянці донного імпульсу: на ділянках, де донний сигнал присутній, значення r -статистики збільшуються;
- визначення часового положення радіоімпульсів, як «центрів мас» q_i ділянок статистики r , що відповідають i -тому луна-сигналу

$$q_i = \sum_{j=k_i}^{m_i} jr[j, M_w] / \sum_{j=k_i}^{m_i} r[j, M_w], \quad (6.16)$$

де k_i та m_i – значення j , що відповідають початку та кінцю i -того інтервалу

$$k_i = j : \begin{cases} r_i[j+1, M_w] \leq \Pi, \\ r_i[j-1, M_w] > \Pi, \end{cases} \quad m_i = j : \begin{cases} r_i[j+1, M_w] > \Pi, \\ r_i[j-1, M_w] \leq \Pi. \end{cases} \quad (6.17)$$

Значення Π обирається з умови перевищення шумової складової r -статистики за відсутності луна-сигналу, наприклад, $\Pi = (\max r_{\text{ш}}) \cdot k_3$, де $\max r_{\text{ш}}$ – максимальне значення r -статистики за відсутності луна-сигналу; k_3 – коефіцієнт запасу, $k_3 \in (1, 1.5)$. Нижче розглянуто цей спосіб та його модифікацію, яка полягала у зважуванні r -статистики.

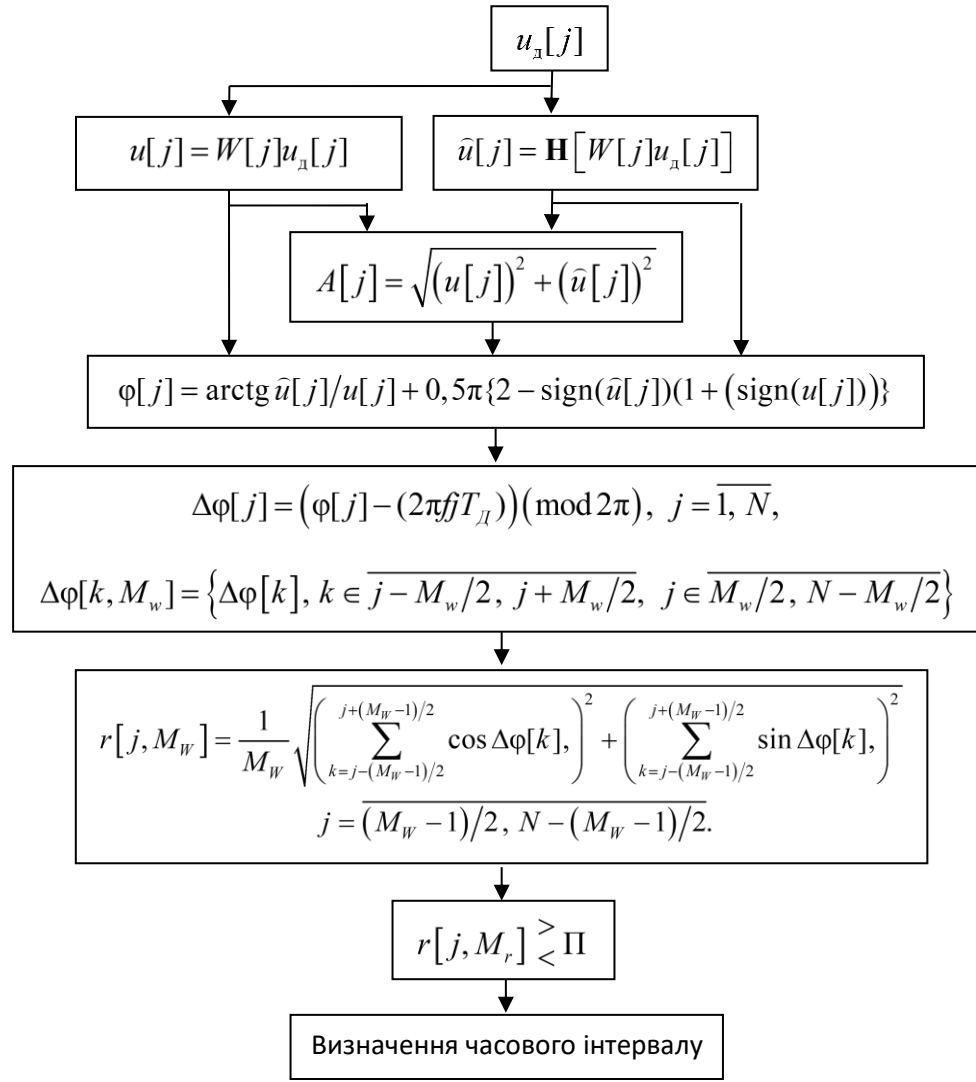


Рис. 6.3. Структурно-логічна схема оброблення сигналів лунаїмпульсної УЗТ на основі аналізу r -статистики

Постановка задачі. Визначається товщина ОК з композиційного матеріалу (КМ) ультразвуковим луна-імпульсним методом. Введення/виведення ультразвукового сигналу в/з ОК відбувається за допомогою суміщеного п'єзоелектричного перетворювача (рис. 6.2). Зондування ОК здійснюється радіоімпульсним сигналом виду

$$u_3(t) = \begin{cases} U \sin(2\pi ft), & t \in [0, T_3], \\ 0, & t \notin [0, T_3] \end{cases} \quad (6.18)$$

з відомою амплітудою U , частотою f і тривалістю T_3 , що не перевищує декількох періодів сигналу-носія.

Досліджуваний сигнал $u(t)$ являє собою адитивну суміш донних сигналів УЗТ

(періодичну з періодом повторення T_{Π} послідовності донних сигналів) і реалізації гауссового шуму $\xi(t)$ виду

$$u(t) = \sum_{i=1}^k K_i \cdot u_3(t - \tau_3 - (i-1)T_{\Pi}) + \xi(t), \quad t \in [0, T_c], \quad (6.19)$$

де K_i – коефіцієнти ЕКТ для i -того донного сигналу, $i = \overline{1, k}$; τ_3 – час затримки на поширення акустичного сигналу в ОК у прямому і зворотному напрямках; $\xi(t)$ – реалізація гауссового шуму з нульовим математичним сподіванням і дисперсією σ^2 . Аналіз сигналу виконується на часовому інтервалі $t \in [0, T_c]$.

Відношення с/ш в суміші (6.19) оцінюється як $c/\text{ш} = K_i U / \sigma$.

Необхідно виявити послідовність донних імпульсів і виявити затримку між ними τ_3 за r -статистикою, що забезпечує підвищення вірогідності виявлення радіоімпульсних сигналів за відношення $c/\text{ш} \approx 1 \dots 2$.

Розв'язання поставленого завдання. Спосіб УЗТ ґрунтується на виявленні донних сигналів за поточними значеннями r -статистики, яка визначається з ФХС. r -статистика, належить до числа кругових статистик, які існують для розподілених на колі випадкових кутів та фазових зсувів сигналів.

Ідея удосконаленого способу полягає у наступному. Для досліджуваного сигналу (6.19) визначається ФХС, обчислюється різниця цієї характеристики та фази гармонічного колювання з частотою f сигналу-носія, розраховується r -статистика, отримана під час ковзного віконного опрацювання цієї різниці фаз вікном $W1$, визначається зважена статистика r_{3B} , яку отримують перемноженням r -статистики на поточні значення відгуку оператора середнього квадратичного відхилення на її значення, отримані під час ковзного віконного оброблення r -статистики іншим ковзним вікном $W2$. Структурно-логічна схема опрацювання сигналів УЗТ за цим способом подано на рис. 6.4.

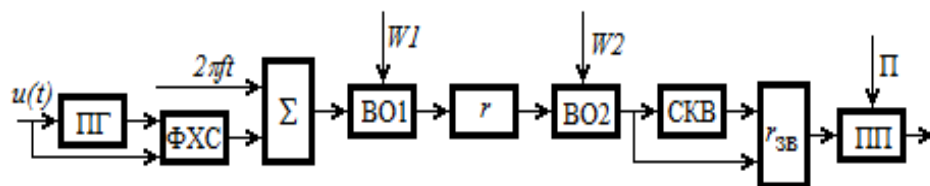


Рис. 6.4. Структурно-логічна схема опрацювання сигналів за удосконаленим способом лунаїмпульсної УЗТ

Для елементів схеми використано наступні позначення: ПГ – перетворювач Гільберта, ФХС – модуль визначення ФХС, Σ – суматор, ВО1,2 – модулі віконного опрацювання сигналу, r , $r_{зв}$ – модулі визначення відповідно r -статистики та $r_{зв}$ -статистики, СКВ – модуль, що реалізує оператор визначення середнього квадратичного відхилення, ПП – модуль порівняння з порогом Π та прийняття рішення про наявність донного сигналу.

Після аналого-цифрового перетворення сигналу (6.19), яке виконується з періодом дискретизації $T_d \ll f^{-1}$, останній представляється цифровою послідовністю $u[j]$, $j = \overline{1, N}$, де $N = T_a/T_d$ (з точністю до цілого числа). До $u[j]$ застосовується ДПГ, яке в модулі ПГ (рис. 6.4) реалізується оператором $\mathbf{H}_d$ і отримується гільберт-образ вибірки

$$\hat{u}[j] = \mathbf{H}_d(u[j]), \quad j = \overline{1, N}. \quad (6.20)$$

Дискретна ФХС на всьому інтервалі його аналізу визначається в модулі «ФХС» за алгоритмом (4.30).

Різниця ФХС $\phi[j] = \Phi[j] - 2\pi f T_d j$, $j = \overline{1, N}$ визначається в модулі Σ а поточні значення статистики $r[j, M_w] \in (0, 1]$ у ковзному режимі для вікна апертурою M_w (передбачається непарною) – в модулях ВО1 та r :

$$r[j, M_w] = \frac{1}{M_w} \sqrt{\left(\sum_{k=j-(M_w-1)/2}^{j+(M_w-1)/2} \cos \Delta\phi[k] \right)^2 + \left(\sum_{k=j-(M_w-1)/2}^{j+(M_w-1)/2} \sin \Delta\phi[k] \right)^2}, \quad (6.21)$$

$$j = \overline{(M_w-1)/2, N-(M_w-1)/2}.$$

В модулі «СКВ» визначаються вагові коефіцієнти $\sigma_r[j]$ як відгуки оператора середнього квадратичного відхилення поточної підмножини значень r -статистики, отриманої в модулі «ВО2» під час опрацювання послідовності $r[j, M_w]$ ковзним вікном апертурою M_σ . У випадку непарного значення M_σ

$$\sigma_r[j, M_\sigma] = \sqrt{\frac{1}{M_\sigma-1} \sum_{k=j-(M_\sigma-1)/2}^{j+(M_\sigma-1)/2} (r[j, M_w] - \bar{r}_j)^2} \quad (6.22)$$

$$j = \overline{(M_\sigma-1)/2, N-(M_\sigma-1)/2},$$

де $\bar{r}_j$ – середнє значення елементів підмножини $r[j, M_w]$ у вікні $W2$.

Поточні значення зваженої статистики $r_{зв}$ визначаються у модулі $r_{зв}$ як

$$r_{зв}[j, M_w, M_\sigma] = r[j, M_w] \sigma_r[j, M_\sigma]. \quad (6.23)$$

Рішення про наявність/відсутність донного сигналу формується в модулі ПП за результатами порівняння значень $r_{зв}[j, M_w, M_\sigma]$ з пороговим рівнем Π , який визначається на етапі тестування схеми.

Вагове опрацювання r -статистики (6.23) призводить до збільшення відношення с/ш і, як наслідок – до підвищення вірогідності виявлення сигналів УЗТ, що підтверджується результатами моделювання.

Моделювання. Дослідження виконувались на моделі сигналу (6.19) з наступними параметрами: $f = 5$ кГц; $U = 1$ В; $\sigma = 0,5$ В; $T_z = 0,6$ мс; $T_a = 1,6$ с; $T_n = 0,4$ с; $\tau_z = 0,2$ с; $k = 4$, $K_i = \{ 1, 1/2, 1/3, 1/4 \}$. Отримана вибірка сигналу обсягу $N = 8000$ зображена на рис. 6.5, а.

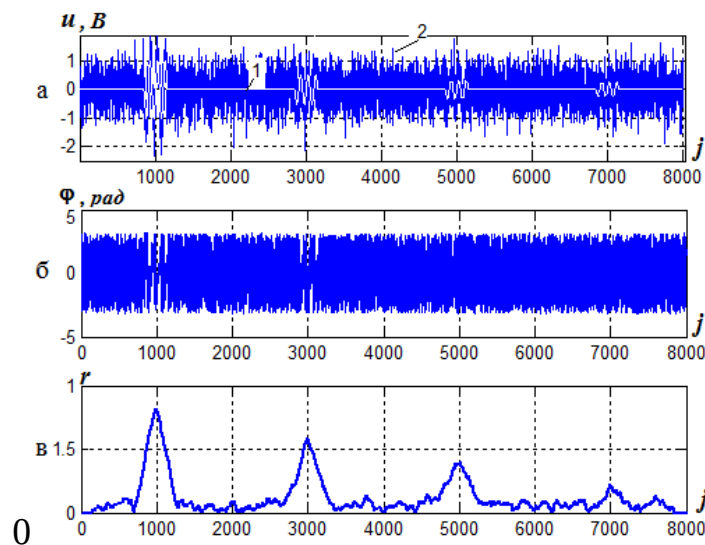


Рис. 6.5. Вибірки досліджуваного сигналу (а), послідовності $\phi[j]$ (б) та r -статистики (в)

З урахуванням заданих параметрів відношення сингал/шум для донних сигналів становить: $\text{с/ш} = \{ 2, 1, 2/3, 0,5 \}$.

За результатом реалізації поданого вище процесу цифрового опрацювання вибірки $u[j]$, $j = \overline{1, 8000}$, отримано послідовності $\phi[j]$ та $r[j]$, які зображені відповідно на рис. 6.5 б, в. В обчисленнях використано вікно $W1$ з апертурою $M = 301$, що відповідає в

часі тривалості донного сигналу. Рішення про наявність донного сигналу формується на основі порівняння поточних значень $r[j]$ з певним порогом $\Pi < 1$.

Характерною особливістю r -статистики є її інваріантність до зміни початкової фази сигналів. Крім того з аналізу рис. 6.5 в можна відзначити інші її особливості, важливі для УЗТ: 1) максимуми $r[j]$ в часі співпадають з положенням донних сигналів; 2) амплітудні значення $r[j]$ зменшуються зі зменшенням відношення $c/\text{ш}$ і, як наслідок приводять до зменшення вірогідності виявлення донних сигналів УЗТ.

Підвищення відношення $c/\text{ш}$ і вірогідності виявлення донних сигналів досягається за рахунок додаткового вагового опрацювання послідовності $r[j]$ без збільшення потужності зонduючого сигналу чи збільшення кількості вимірювальної інформації. На рис. 6.6 наведено графіки послідовності $r[j]$ та послідовності $r_{\text{зв}}[j]$, обчисленої за модифікованою формулою (6.23).

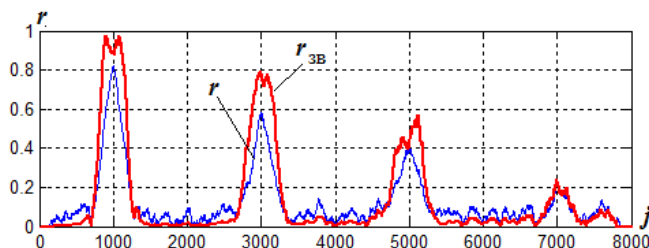


Рис. 6.6. Графічне зображення послідовностей $r[j]$ та $r_{\text{зв}}[j]$

Наведені на рис. 6.6 графіки свідчать про певне зменшення шумової складової послідовності $r_{\text{зв}}[j]$ відносно $r[j]$. Разом з цим спостерігається незначне збільшення амплітуд імпульсів та їх розширення в часі. Беручи до уваги той факт, що рішення про наявність донних сигналів приймається за результатами аналізу поточних значень r -статистики, яка в свою чергу отримується з неенергетичної ФХС, запропоновано оцінювати відношення $c/\text{ш}$ в послідовностях $r[j]$ та $r_{\text{зв}}[j]$ відношенням їх максимальних значень на ділянках донного сигналу і шуму, тобто відношеннями $r(c)/r(\text{ш})$ та $r_{\text{зв}}(c)/r_{\text{зв}}(\text{ш})$. За такою методикою для четвертого донного сигналу маємо

$$r(c)/r(\text{ш}) = 0,22 / 0,114 \approx 2,$$

натомість для послідовності $r_{\text{зв}}[j]$ отримаємо

$$r_{\text{зв}}(c)/r_{\text{зв}}(\text{ш}) \approx 0,24 / 0,06 \approx 4,$$

тобто за такої методики оцінювання відношення c/λ маємо покращення відношення c/λ приблизно у два рази.

Таким чином, додаткове вагове опрацювання r -статистики дає змогу підвищити відношення c/λ для сигналів УЗТ, що сприяє підвищенню вірогідності їх виявлення в завданнях контролю товщини виробів з матеріалів зі значним загасанням ультразвукових коливань. Крім того підвищення відношення c/λ дає змогу покращити точність вимірювання товщини виробів ультразвуковим луна-імпульсним методом за рахунок виявлення більшої кількості донних сигналів і можливості статистичного усереднення більших обсягів експериментальних даних.

6.3. Питання для самоконтролю

1. Назвіть відомі вам числові характеристики випадкових кутів та поясніть їх зміст.
2. Розкрийте сутність та наведіть основні властивості вибіркової кругової дисперсії.
3. В чому полягає властивість адитивності кругового середнього результатів фазових вимірювань?
4. Які вибіркові кругові характеристики можна отримати з вибіркового тригонометричного моменту першого порядку?
5. Дайте визначення та геометричну інтерпретацію вибіркового кругового розмаху статистики кутів.
6. Дайте визначення та геометричну інтерпретацію вибіркової кругової медіани.
7. В чому полягає сутність методу визначення часових інтервалів в УЗК товщинометрії, що ґрунтується на визначенні та аналізі r -статистики?
8. Як оцінюється відношення c/λ для r -статистики?

7. РОБОТИЗОВАНА СИСТЕМА ВИХРОСТРУМОВОГО КОНТРОЛЮ ОБ'ЄКТІВ ЗІ СКЛАДНОЮ ГЕОМЕТРИЧНОЮ ФОРМОЮ

Однією з характерних ознак сучасного етапу розвитку техніки є активне впровадження методів і засобів НК на всіх етапах промислового виробництва. Цей процес об'єктивно обумовлений стрімким підвищенням складності технічних об'єктів, більш жорсткими умовами їх експлуатації (розширення діапазону робочих температур, статичних і динамічних механічних навантажень, функціонування в агресивних середовищах тощо), підвищенням вимог щодо гарантування надійної безаварійної експлуатації об'єктів різного призначення. Намагання охопити 100% продукції контролем якості з одночасним підвищенням економічності та вірогідності результатів контролю в умовах серійного виробництва приводить до необхідності повної автоматизації процесу НК. Цей висновок стосується і вихрострумowego НК (ВСНК).

7.1. Апаратна частина роботизовано системи ВСПК

Виходячи із аналізу відомих технічних рішень, можна стверджувати, що до складу типового роботизованого комплексу НК повинні включатись: робот-маніпулятор, координатний стіл з декількома степенями свободи, автоматизована станція з набором перетворювачів різних типів, пристрій фіксації ОК, блок відеосенсорів, персональний комп'ютер, електронний блок управління і оброблення сигналів. Структура роботизованої адаптивної системи ВСК зображена на рис. 7.1 (на схемі не показані станція обслуговування ВСП та модуль позиціонування ОК).

Процес контролю виробу за допомогою роботизованої системи неруйнівного ВСК умовно можна поділити на три етапи. На першому виконується ідентифікації геометричної моделі ОК за допомогою лазерно-телевізійного відеосенсора. Такі відеосенсори є важливими елементами адаптації роботизованих систем неруйнівного ВСК до різних ОК. На даний час не існує

універсальних датчиків технічного зору, тому такі засоби адаптації потребують розроблення під конкретну задачу.

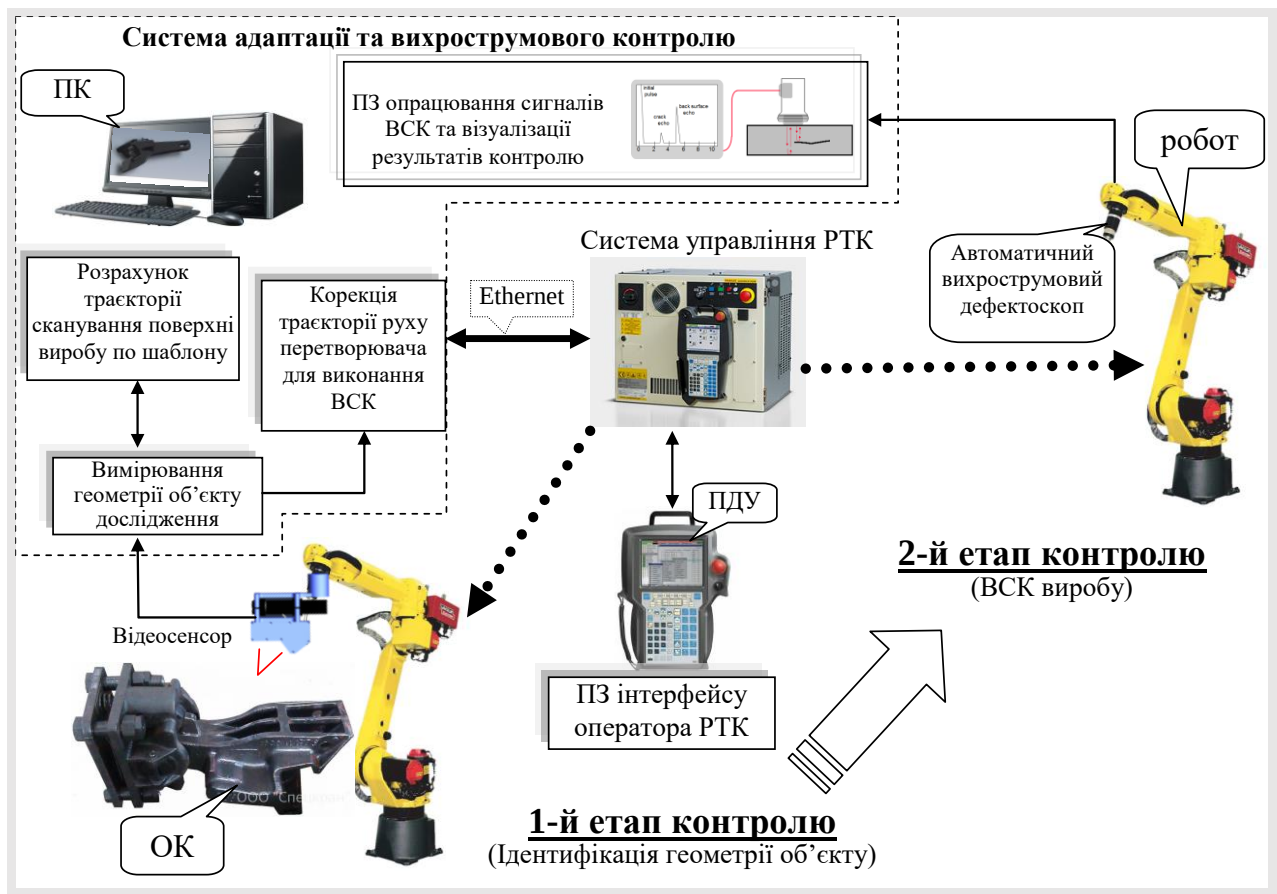


Рис. 7.1. Структурна схема роботизованої системи ВСКН:
ПДУ – пульт дистанційного управління; ПЗ – програмне забезпечення; РТК – робото-технологічний комплекс

В той же час досвід використання робототехнічних комплексів у промисловості свідчить про необхідність подальшого розвитку інтелектуальних та сенсорних підсистем для роботів. Роботи здатні розкрити усі свої переваги та потенційні можливості тільки у випадку їх спільного застосування із засобами «відчуття», центральне місце серед яких займає технічний зір. Оснащення роботів системами технічного зору забезпечує суттєве розширення їх технологічних та функціональних можливостей.

В Інституті електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України розроблено ряд моделей лазерно-телевізійних відеосенсорів, що можуть використовуватись для ідентифікації геометричної форми ОК в автоматичних системах ВСКН. На рис. 7.2 показано ряд таких відеосенсорів, що відрізняються як габаритами, так і величиною триангуляційного куту.

Принцип роботи сенсора ґрунтується на методі лазерної тріангуляції. Розглянемо його на прикладі визначення геометрії зварювального стику (рис. 7.3). Розгорнутий у площину лазерний промінь формує на поверхні зварюваних деталей світловий слід. Відеокамера, розташована під деяким тріангуляційним кутом до площини лазерного випромінювання, реєструє цей світловий слід. В результаті опрацювання цифрових зображень визначається відносне положення та геометричні параметри стику.

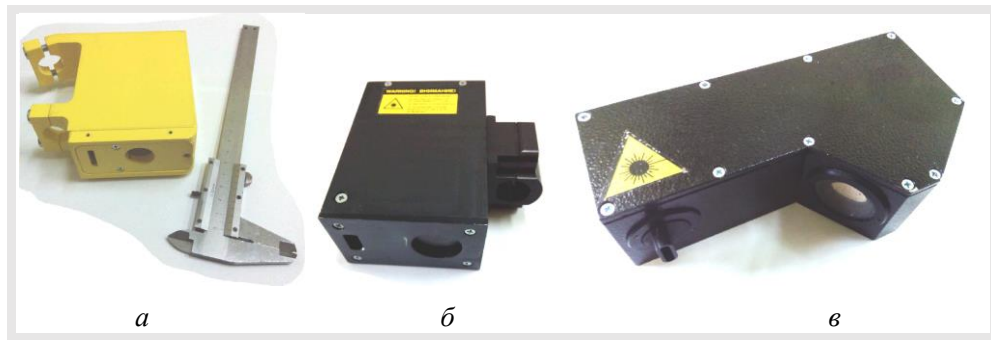


Рис. 7.2. Лазерно-телевізійні відеосенсори для роботизованих системах НК з тріангуляційними кутами: а – 15° ; б – 20° ; в – 40°

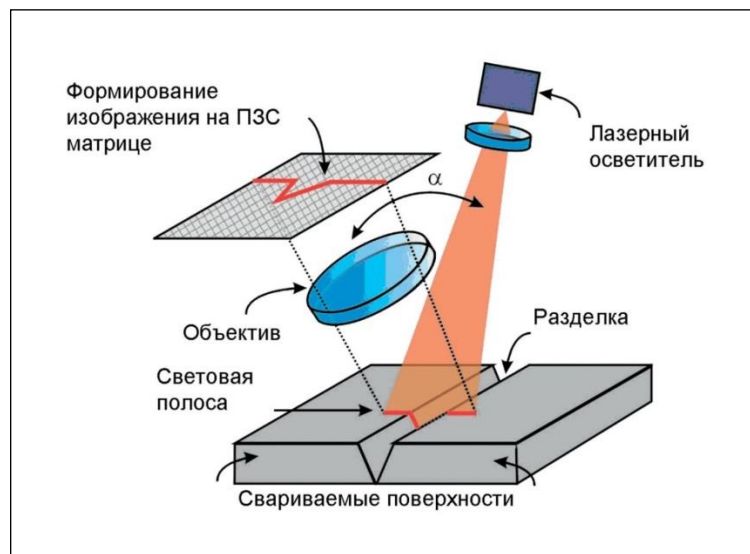


Рис.7.3. Принцип работы сенсоров

Основні вимоги до відеосенсорів – забезпечити тріангуляційний кут в межах 30° – 40° , і просторову роздільну здатність порядку $0,1$ – 1 мм.

Розглянемо більш детально функціонування роботизованої системиі ВСНК в цілому. В цій системі існує можливість виконання оператором певних дії, які пов’язані з операціями встановлення та зняття ОК з маніпулятора. Для цього передбачено пульт дистанційного управління (ПДУ) та спеціальне програмне

забезпечення, що реалізує інтерактивну взаємодію в системі оператор – РТК.

Адаптивність системи реалізується за рахунок:

- сканування поверхні ОК і фіксації даних лазерно-телевізійного відеосенсора;
- уточнення ключових параметрів геометричної моделі ОК;
- уточнення траєкторії сканування ВСП поверхні ОК за заданим шаблоном;
- розрахунку поправок для системи управління роботом для всієї траєкторії сканування.

Робот-маніпулятор повинен мати похибку позиціонування ВСП на поверхні ОК не гірше 0,1 – 0,5 мм в декартових координатах і похибку кутового положення вісі ВСП відносно нормалі до поверхні ОК в межах (-5° , 5°).

Другий етап контролю полягає в отриманні первинної вимірювальної інформації у вигляді сигналів ВСНК у заздалегідь визначених точках поверхні ОК, що виконується в автоматичному режимі. Операції калібрування каналу ВСП на зразкових ОК, зміни типу ВСП та переналаштування режиму роботи ВСП виконується без участі оператора. В процесі управління траєкторією руху ВСП математичне забезпечення ПК формує поправки в систему управління робото-технологічним комплексом (РТК). Ці поправки надходять в реальному часі по каналу інтерфейсу *Ethernet* і призводять до корекції траєкторії сканування, що забезпечує максимальну чутливість ВСП, стабілізацію зазору між поверхнею ОК та ВСП та запобігає виникненню зіткнень ВСП і ОК та їх пошкоджень. Отримані у вихрострумовому дефектоскопі оцифровані реалізації сигналів ВСП передаються у ПК для подальшого опрацювання.

Виходячи із поставлених завдань і умов контролю та загальних рекомендацій, забезпечення різних режимів роботи і способів виділення корисної інформації (амплітудного, фазового, способу проекцій) та враховуючи особливості матеріалу ОК (слабомагнітні сталі, немагнітні сплави) до вихрострумового дефектоскопу висувуються наступні основні вимоги:

1) модуль генерування інформаційних сигналів :

- кількість каналів – 2;
- частотний діапазон – 100 ... 40000 Гц;

- напруга сигналу збудження ВСП – до 15 В;
- крок регулювання фазового зсуву між сигналами $\sim 360^\circ/2^{11\dots12}$;
- розрядність ЦАП – 14 біт;

2) модуль підсилення, формування різницевого сигналу та АЦП:

- кількість каналів – 1;
- вхідний сигнал – диференціальний;
- частота дискретизації – 10...4000 кГц (~ 100 вибірок на період);
- підсилення – 20...60 дБ;
- розрядність АЦП – 14...16 біт.

Дефектоскоп забезпечує отримання первинної вимірювальної інформації, достатньої для реалізації одно-, дво- та багатопараметрового ВСК та реалізації різних способів опрацювання сигналів ВСП. Двопараметровий контроль доцільно використовувати у випадку, коли значний вплив на вихідні сигнали ВСП, окрім контрольованого параметру, чинить ще один – заважаючий. Багатопараметровий контроль використовується у випадках, коли число факторів, що беруться до уваги під час контролю, більше двох.

Вирішуючи завдання дефектоскопії слід надавати перевагу ВСП мальтидиференціального типу, які мають найбільшу чутливість до поверхневих та підповерхневих дефектів.

На третьому етапі виконується вторинне опрацювання отриманої вимірювальної інформації яке включає:

- виконання ДПГ сигналів ВСП;
- обчислення амплітудної та фазової характеристик сигналів ВСП;
- статистичне опрацювання характеристик сигналів ВСП;
- формування діагностичних ознак для вирішення завдань контролю;
- співставний аналіз дефектограм у вигляді полів діагностичних ознак бездефектного та контрольованого виробу;
- виявлення за діагностичними ознаками дефектів (чи дефектних ділянок) ОК та прийняття рішення щодо необхідності відбракування ОК;
- оцінювання вірогідності результатів контролю;

- підготовка результатів контролю для візуалізації та архівації.

Виконання цих завдань здійснюється модулем оброблення сигналу ВСП та візуалізації результатів контролю і в часі може виконуватись або після повного завершення третього етапу, або частково перекриватись з ним в часі. Рішення про ступінь дефектності контрольованої ділянки виробу формується за результатами аналізу визначених діагностичних ознак без участі оператора.

В цілому характерною особливістю математичного та програмного забезпечення роботизованої системи ВСНК є реалізація парадигми адаптивності та універсальності технологічного процесу контролю. Це досягається, по-перше, за рахунок можливості заміни ВСП з метою адаптації до геометрії ОК та завдань контролю, по-друге, за рахунок спеціальних функціональних можливостей:

- визначення координат ОК у тривимірній системі координат;
- виконання сканування поверхні ОК за заданою програмою;
- обчислення амплітудної характеристики сигналу ВСП;
- обчислення фазової та частотної характеристик сигналу ВСП;
- статистичного опрацювання характеристик сигналів ВСП та інших даних;
- обчислення та аналіз спектрів сигналів ВСП;
- програмне управління параметрами сигналу збудження ВСП та режимами роботи вимірювального каналу системи;
- автоматичного формування діагностичних рішень щодо визначення дефектності ОК та інтерактивна взаємодія з технологом-дефектоскопістом.

Крім цього на третьому етапі передбачено виконання таких операцій: документування та архівація результатів контролю, класифікація дефектів, статистичне опрацювання результатів контролю однотипних виробів чи їх фрагментів, візуалізації полів діагностичних ознак у зв'язаній з ОК системі координат і т.і.

Розглянута структура роботизованої системи ВСНК дає змогу реалізувати процес адаптивного неруйнівного ВСК виробів зі складною геометрією.

7.2. Структура програмно-алгоритмічних засобів управління процесом збору та оброблення експериментальних даних в роботизованій системі ВСНК

Організація інформаційних потоків в роботизованій системі ВСНК, керування режимами роботи системи, реалізація алгоритмів опрацювання експериментальних даних, прийняття діагностичних рішень, збереження та відображення отриманих результатів покладена на математичне, інформаційне та програмне забезпечення. Його структуру наведено на рис. 7.4, який містить окремі модулі та відображає зв'язки між ними.

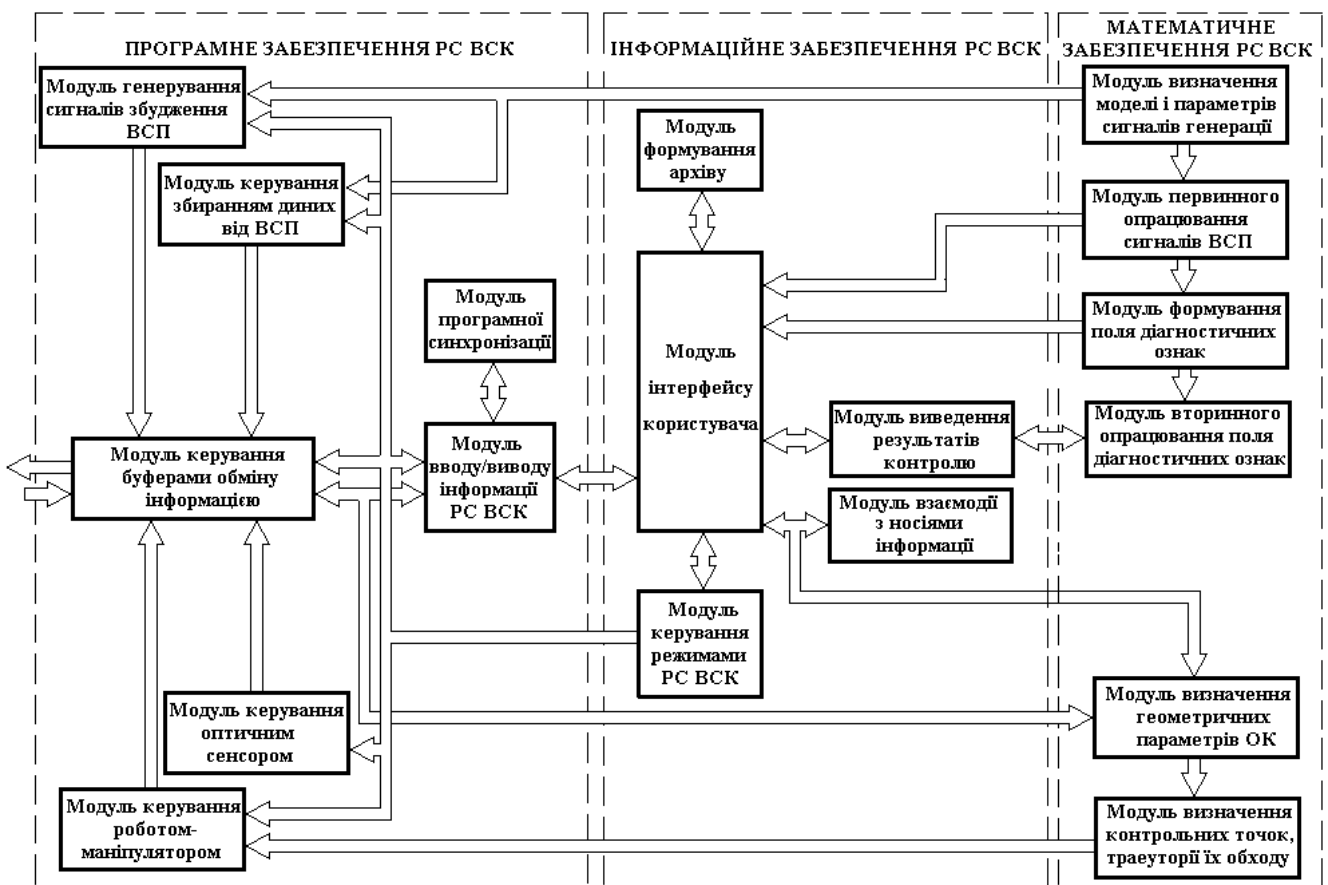


Рис. 7.4. Структура програмно-алгоритмічного забезпечення роботизованої системи ВСНК (РС ВСК)

Програмне забезпечення РС ВСК включає:

- модуль генерування сигналів збудження ВСП, який забезпечує керування процесом формування фізичних сигналів (струмів, напруг) збудження ВСП;
- модуль керування збиранням даних від ВСП, що задає параметри процесу отримання первинної інформації до яких відноситься частота дискретизації,

початок і зупинка накопичення даних для кожної контрольованої точки та процесу контролю в цілому тощо;

- модуль керування роботом-маніпулятором, який забезпечує процес керування його виконавчими механізмами, що підтримують необхідні кути взаємної орієнтації ОК та ВСП та обхід всіх точок на поверхні ОК за отриманою заздалегідь програмою;
- модуль керування оптичним сенсором, який забезпечує сканування ОК оптичним променем для отримання координат точок на поверхні ОК в системі координат робота-маніпулятора;
- модуль керування буферами обміну інформацією, що підтримує процес інформаційного обміну між всіма периферійними пристроями системи та модулем вводу/виводу інформації РС ВСК;
- модуль програмної синхронізації, який узгоджує між собою роботу всіх елементів системи – робота-маніпулятора, оптичного сенсора, вихрострумового дефектоскопа на всіх стадіях процесу контролю;
- модуль вводу/виводу інформації РС ВСК – забезпечує управління коефіцієнтом підсилення сигналу ВСП, додавання сигналу компенсації, фільтрацію сигналів, їх аналого-цифрове перетворення та трансляцію в інтерфейс користувача, а також приймання сигналів оптичного сенсора.

Інформаційне забезпечення РС ВСК включає:

- модуль інтерфейсу користувача, який забезпечує доступ оператора до органів управління параметрами налаштування системи, відображення поточного стану параметрів налаштування системи, а також проміжних та кінцевих результатів контролю, тривимірне зображення ОК з виявленими дефектами, відображення довідникової інформації та інформації з бази даних;
- модуль формування архіву – забезпечує створення бази даних контролю та обмін інформацією між цим модулем та інтерфейсом;
- модуль керування режимами РС ВСК – забезпечує трансляцію даних для управління складовими системи на всіх етапах її роботи: налаштуванні, навчанні на контрольних зразках та власне на етапі контролю;

- модуль взаємодії з носіями інформації – забезпечує в цих мілому інформаційну підтримку процесу контролю шляхом забезпечення доступу до баз даних та обміну інформацією, надання апріорної інформації про ОК, його цифровий прототип (або габаритні розміри), дефектограми зразкових ОК, статистичні дані різного характеру;
- модуль виведення результатів контролю – забезпечує взаємодію інтерфейсу користувача з модулем вторинного опрацювання поля діагностичних ознак;

Математичне забезпечення РС ВСК включає:

- модуль визначення моделі і параметрів сигналів генерації – містить математичне забезпечення для розрахунку миттєвих значень сигналів збудження ВСП різної форми (синусоїдальні, імпульсні трикутні), частоти та початкової фази та різною кількістю відліків на період з урахуванням типу перетворювача, характеристик ОК та завдання контролю;
- модуль визначення геометричних параметрів ОК, який містить математичне забезпечення, необхідне для оцінювання геометричних розмірів ОК з прив'язкою до системи координат робота-маніпулятора за експериментальними даними опричного сенсора з можливістю використання інформації від відомих цифрових моделей ОК;
- модуль визначення контрольних точок траєкторії їх обходу, який містить алгоритми формування координат контрольних точок на поверхні ОК та траєкторій обходу цих точок ВСП і параметри його руху;
- модуль первинного опрацювання сигналів ВСП, основою якого є алгоритми реалізації ДПГ сигналів ВСП, визначення амплітудної та фазової характеристик цих сигналів, різниці фазових характеристик сигналів у режимі сканування поверхні ОК;
- модуль формування поля діагностичних ознак, містить математичне забезпечення, необхідне для представлення отриманих множин значень АЧХ і ФЧХ як двовимірних векторів з прив'язкою до координат на поверхні ОК, а також визначення функцій від цих множин за якими формуються поля діагностичних ознак (дефектограми) ;

- модуль вторинного опрацювання поля діагностичних ознак – містить алгоритми статистичного згладжування даних, порівняння дефектограм досліджуваних і зразкового ОК, математичну підтримку прийняття рішень щодо бракування ОК і т.і.;

Значна частина модулів програмного забезпечення реалізована на ПК. Зокрема на ПК покладені функції загального управління процесом контролю, реалізації алгоритмів опрацювання інформаційних сигналів, статистичного опрацювання даних, формування бази реалізацій сигнальних полів та полів діагностичних ознак (навчання системи), класифікації дефектів та візуалізації отриманих результатів.

7.3. Питання для самоконтролю

1. Наведіть та сформулюйте призначення основних складових роботизовано системи ВСНК
2. Поясніть принцип роботи сенсора, в якому використано методі лазерної тріангуляції.
3. За рахунок яких факторів реалізується адаптивність роботизованих систем ВСНК до різних ОК та завдань контролю?
4. Викладіть призначення та зміст виконуваних операцій на всіх етапах роботи роботизовано системи ВСНК.
5. Перелічить модулі та їх функціональне призначення програмного забезпечення РС ВСК.
6. Перелічить модулі та їх функціональне призначення інформаційного забезпечення РС ВСК.
7. Перелічить модулі та їх функціональне призначення математичного забезпечення РС ВСК.

8. АКУСТИЧНА КОРЕЛЯЦІЙНА СИСТЕМА ПОШУКУ ТЕЧІ В НАПІРНИХ ТРУБОПРОВОДАХ

8.1. Методи виявлення витоків у трубопроводах

Не дивлячись на контроль стану трубопровідного обладнання під час його виробництва й монтажу, в умовах експлуатації в ньому утворюються дефекти: тріщини, стоншування стінки, наскрізні дефекти, розгермитизація стикових з'єднань та ін. У зв'язку з важкодоступністю до трубопроводів, укладених у ґрунт, не завжди можливий 100 %-й контроль всього ОК.

Існує велика кількість методів і засобів виявлення витоків, що ґрунтуються на різних фізичних явищах і принципах. Їх основними характеристиками є точність локації течі, поріг чутливості та дистанційність. Під *точністю локації* розуміють похибку визначення місця розташування течі, під *дистанційністю* – максимально можливу відстань від місця витоку до приймального перетворювача або пристрою. Під *порогом чутливості* розуміють найменший потік (витрати, тиск), що піддається реєстрації як сигнал течі.

Пошук течі в трубопроводах виконується із застосуванням тестової та функціональної діагностики. З точки зору оперативного контролю інтерес представляє функціональна діагностика, оскільки вона виконується без виводу ОК з експлуатації і не вимагає використання спеціальних пробних речовин.

Функціональну діагностику реалізують як штатними засобами систем керування за технологічними параметрами перекачування, так і додатковими апаратними засобами. Серед відомих методів виявлення витоків у трубопроводах штатними засобами найуживанішими є: моніторинг тиску рідини; порівняння витрат або швидкості їх зміни та ін.

Моніторинг тиску з фіксованою або ковзною установкою базується на приймальній і нагнітальній лініях насосних станцій. Метод дає змогу оперативно знаходити значні витoki (аварії, розриви); сумісний з автоматизованими системами управління трубопроводів. Недоліки методу: низька чутливість (10...15 % від номінальної продуктивності); використання тільки за сталого

режиму експлуатації трубопроводу; помилкове спрацьовування при перекачуванні різних рідин або порушенні суцільності потоку; значна похибка визначення місця витoku; не застосовний у складних трубопровідних мережах змінного діаметру, за наявності відведень або акумулюючих ємностей.

Метод порівняння витрат ґрунтується на зіставленні витрат продукту на вході й виході ділянки продуктопроводу. У разі виникнення витoku в різних точках трубопроводу умова рівності витрат не дотримується. Даний метод не передбачає визначення місця витoku. У разі порушення стаціонарного характеру транспортування продукту в системах можуть виникати помилкові спрацьовування. Кращі результати за несталих режимів експлуатації одержують при вимірюванні швидкості змінювання витрат.

Метод порівняння швидкості зміни витрат базується на вимірюванні миттєвої швидкості зміни витрати в різних перетинах трубопроводу. Пошкодження або розрив трубопроводу викликає різку зміну швидкості витрати перекачуваного продукту, цю зміну фіксує система, що реалізує даний метод. Недолік даного методу полягає в помилкових спрацьовуваннях системи, що викликаються порушенням суцільності потоку, зміною властивостей різних партій перекачуваного продукту. Метод не забезпечує виявлення місця витoku, але наближено його можна визначити за різницею часів появи сплесків на трендах витрат у контрольних перетинах.

До методів виявлення витоків, що реалізуються додатковими апаратними засобами, відносяться: теплові, магнітні, акустичні.

Для *теплових методів* основною характеристикою витoku є зміна розподілу температури на поверхні теплопроводу. Вимірювання температури реалізується контактним і безконтактним способом. Контактний метод реалізується за допомогою двох конструктивних елементів: термощупа із вбудованим у нього термоелектричним термометром або термометром опору, та блоком оброблення одержуваного сигналу. Перевагою є відносна дешевизна устаткування, недоліком – мала зона контролю, метод обмежений у вживанні за наявності великої кількості відгалужень і стикових з'єднань. Безконтактний тепловий метод базується на

реєстрації температури поверхні об'єкта контролю за їх інфрачервоним випромінюванням. Приладами, призначеними для дистанційного вимірювання тепла, є пірометри та тепловізори. Пірометром реєструється температура в певній точці об'єкта вимірювання, тепловізором – розподіл тепла по його поверхні.

Магнітні методи неруйнівного контролю застосовують для виявлення дефектів у трубопроводах, виготовлених із феромагнітних матеріалів (сталь, чавун), тобто матеріалів, які здатні істотно змінювати свої магнітні характеристики під впливом зовнішнього магнітного поля. За наявності дефектів у стінках труб магнітні силові лінії спотворюються, і виникає поле розсіяння, величина цього поля залежить від розмірів і конфігурації дефекту при певному значенні намагніченості стінки труби.

Акустичні методи ґрунтуються на діагностиці акустичних хвиль, що поширюються в ОК.

Метод акустичної діагностики пошуку витоків (течозування) заснований на аналізі акустичних коливань, що генеруються течєю в навколишньому середовищі. Може бути як безконтактним, так і контактним (за наявності контакту приймального перетворювача із стінкою ОК). Переваги контактного методу – краща завадостійкість, більша дистанційність.

8.2. Методи і засоби акустичного контактного пошуку витоків

Акустичні сигнали витoku є наслідком гідродинамічних процесів, що протікають в течі напірних трубопроводів під дією перепаду тисків. Властивості акустичних сигналів витoku залежать від режимів витікання рідини, які визначаються величиною перепаду тисків і геометричними параметрами щілини.

Розрізняють наступні основні режими витікання рідини в повітря – краплинне, суцільного заповнення каналу, кавітаційне, повного відриву потоку від стінок каналу, внутрішньоканального розпаду струменя (рис. 8.1).

Місце утворення витoku в ОК називають *каналом* (дефектом). У найпростішому випадку його фізичною моделлю є циліндровий канал завдовжки

H , що відповідає товщині стінки труби, з розкриттям (еквівалентним діаметром) рівним $2r$.

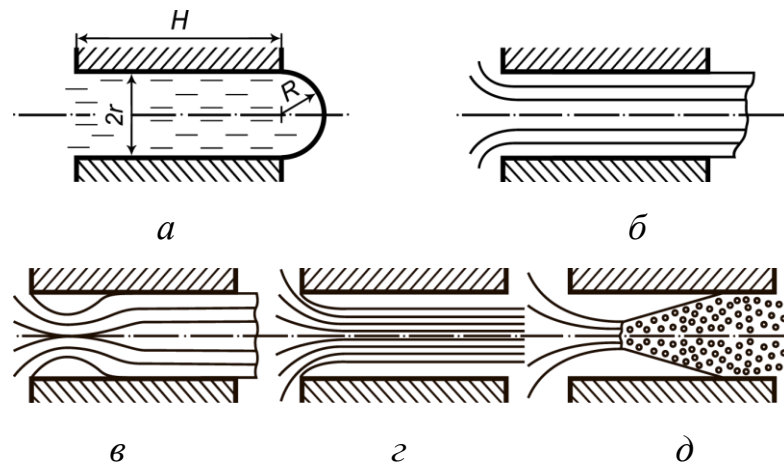


Рис. 8.1. Схеми руху продукту витікання по каналу в режимах: *a* – краплинний; *б* – суцільного заповнення каналу; *в* – кавітаційний; *г* – повний відрив потоку від стінок каналу; *д* – внутрішньоканальний розпад струменя

Для акустичного контактного виявлення витоків найцікавішими є режими суцільного заповнення каналу та кавітаційний.

Суцільне заповнення каналу рідиною відбувається за малих перепадів тиску та нормальній температурі. За значної швидкості руху рідини (у разі досягнення швидкості руху рідини в течії значення, яке відповідає критичному числу Рейнольдса), виникає турбулентна течія в каналі, що супроводжується акустичними сигналами.

Кавітаційний режим виникає зі зростанням перепаду тисків. Наприклад, кавітація виникає в коротких щілинах (5...10 мм) з діаметром щілини 0,1...1,0 мм за перепадів тисків близько 0,1 МПа. В околі вихідної течії відбувається відрив рідини від стінок каналу й утворення кавітаційних бульбашок – каверн. Кавітаційний режим течії через нестабільність хвостової частини каверни супроводжується сильними акустичними сигналами, які на порядок перевищують шуми турбулентності.

Акустичні сигнали, які генерується за рахунок турбулентності й кавітації, мають ширококутовий неперервний спектр із верхньою частотою до декількох мегагерц. У низькочастотній частині діапазону (до 60 кГц) спектр реєстрованих акустичних сигналів може мати локальні максимуми, відповідні власним частотам щілини.

8.3. Кореляційний метод та засоби виявлення витоків в напірних трубопроводах

Методи та засоби *акустичного контактного виявлення витоків* засновані на аналізі характеристик і параметрів акустичних сигналів витоку, реєстрація яких здійснюється за допомогою приймальних перетворювачів, що мають безпосередній контакт зі стінкою ОК. Основними характеристиками засобів виявлення витоків є точність локації та дистанційність контролю.

Більшість відомих приладів і систем акустичного контактного виявлення витоків базується на **кореляційному** обробленні акустичних сигналів витоку. Принцип цих приладів полягає у вимірюванні часової затримки максимуму взаємної кореляційної функції між акустичними сигналами, зареєстрованими двома рознесеними приймальними перетворювачами.

Відстань l від течі до одного з перетворювачів обчислюється за формулою

$$l = \frac{L - \tau_0 c}{2}, \quad (8.1)$$

де L – відстань між перетворювачами; c – швидкість поширення акустичних сигналів трубопроводом (задана або виміряна); τ_0 – різниця часів надходження акустичних сигналів від витоку до перетворювачів. Величина τ_0 визначається за положенням в часі максимуму взаємної кореляційної функції $R_{ab}(\tau_0)$ сигналів від датчиків «а» і «b»:

$$R_{ab}(\tau_0) = \max_{\tau} (R_{ab}(\tau)). \quad (8.2)$$

Загальний вид мобільної системи виявлення витоків у трубопроводі акустичним контактним методом представлений на рис. 8.2. До її складу входить приймальний перетворювач (датчик), попередній підсилювач, кабелі зв'язку, комп'ютер і програмне забезпечення.

Основною вимогою, що висуваються до датчиків, є можливість реєстрації сигналів малого рівня з низькочастотними й високочастотними складовими.

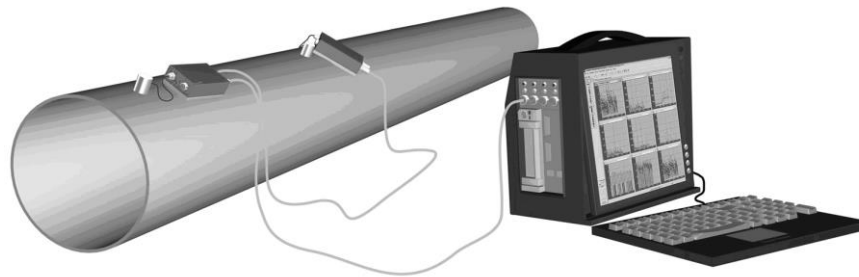


Рис. 8.2. Мобільна кореляційна системи виявлення витоків у трубопроводі

Пристрій для аналізу акустичних сигналів витoku включає попередню фільтрацію і повинен забезпечувати вузькосмуговий кореляційно-спектральний аналіз. За відсутності безпосереднього доступу до трубопроводу датчики встановлюються на трубопроводі в доступних колодязях або на частинах запірної арматури. Вибір точок вимірювання визначається сегментом трубопроводу, що підлягає перевірці.

Принцип роботи течешукача полягає у наступному. Датчики перетворюють акустичні сигнали в точках вимірювань в електричні, які подаються на підключені до них попередні підсилювачі. Далі сигнали кабелем (в кабельній модифікації) або радіоканалом (безкабельна модифікація) передаються на модуль попереднього оброблення сигналів. Останній здійснює аналого-цифрове перетворення по двох каналах, і передає перетворені в цифровий вигляд сигнали по паралельному порту в комп'ютер. У комп'ютері здійснюється програмна обробка сигналу для отримання часових і спектральних аналітичних функцій (зокрема, функцій когерентності й взаємної кореляції). Для визначення місця витoku в комп'ютер також потрібно ввести відстань між датчиками і швидкість поширення звуку.

У табл. 8.1 наведені характеристики відомих течешукачів, що призначені для пошуку витоків рідини в сталевих або чавунних напірних трубопроводах з мінімальним діаметром 20 мм. Необхідний мінімальний перепад тиску між трубопроводом і навколишнім середовищем повинен становити не менш 0,2 МПа, мінімальне для виявлення розкриття наскрізного дефекту – не менш 0,1.

Як приклад нижче розглянуто автоматизовану систему виявлення витоків акустичним контактним методом типу «Капкан» (рис. 8.3), яка призначена для виявлення витoku продукту у випадку наскрізного пошкодження трубопроводу,

а також виявлення механічного пошкодження у вигляді свердлення отвору при спробі організації несанкціонованого урізання в трубопровід.

Таблиця 8.1. Порівняльна характеристика течешукачів

Назва, виробник	Точність локації, м	Частотний діапазон, кГц	Діаметр трубо- проводу, мм	Наявність вхідної фі- льтрації	Наявність радіо- каналу	Довжина зв'язку по радіо- каналу, м	Відстань між датчи- ками, м
КОРШУН -11, МП «Дисит» НАНУ (Україна)	± 0,1	0,005...4,5	до 1400	так	так	—	—
К-10.3М, ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАНУ (Україна)	± 0,5 (з імов. 0,95)	—	до 1200	—	так	900	100
ТАК-2005, «НИИ Интроскопии» (Росія)	± 2	0,1...20	—	так	—	—	200
ТКР-4102, «Инкотес» (Росія)	0,1 % від роз- міру витоку	0,001...9	50...1200	—	так	—	—
SeCorr-08, InterEng Messtechnik GmbH (Німеччина)	—	0,001...10	—	—	так	2000	—
Correlux P-250, Seba KMT (Німеччина)	—	0...4	—	так	так	—	—
MicroCorr-6 DKL 1506, Seba KMT (Німеччина)	—	0,005...5	25...1500	так	так	2000	250
Eureka3, Primayer Ltd. (Великобританія)	—	0,001...22	—	так	так	—	—
LC-2500, Fuji Tescom Inc. (Японія)	—	0,02...5	—	так	так	1000	—

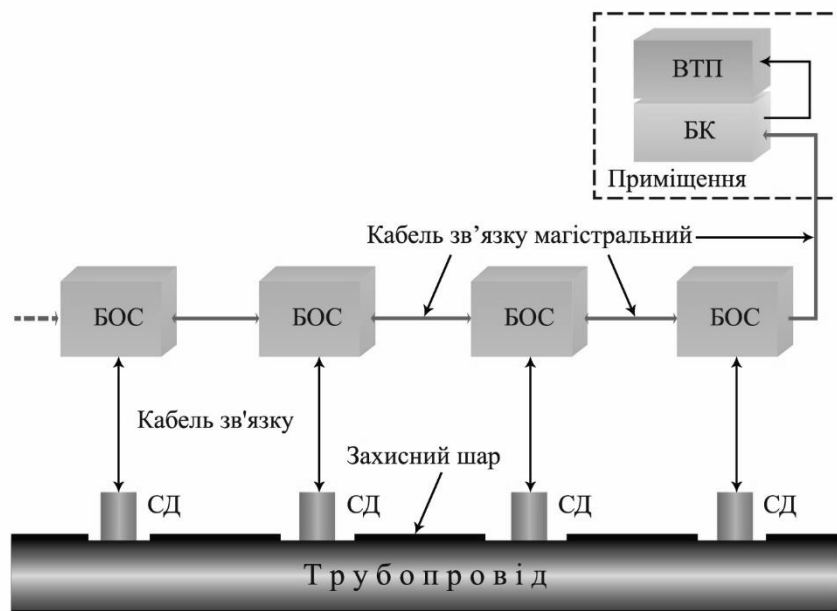


Рис. 8.3. Структурна схема автоматизованої системи типу «Капкан» виявлення витоків акустичним контактним методом

Сигнал з виходу сигнального датчика пошкоджень (СД) подається в блок оброблення сигналу (БОС) і далі по кабельній лінії на віддалений термінальний пристрій (ВТП), де на основі опрацювання даних з СД і БОС, синтезується сигнал про наявність пошкодження, розраховуються його лінійні координати і видається відповідна інформація на апаратуру комутації і відображення інформації. Керування системою здійснюється блоком керування (БК). Шляхом адаптивного підстроювання до рівня фону система визначає поріг, перевищення якого розглядається як вірогідний сигнал тривоги. Подальший спектральний аналіз і кореляційне оброблення прийнятих сигналів дає змогу ухвалити рішення про наявність пошкодження, його характер (течія, свердлення, удар, розкопка ґрунту) і визначити місце пошкодження.

Система може бути виконана в бездротовому варіанті з автономними джерелами живлення і передачею даних по радіоканалу. Віброакустичні датчики розташовують на поверхні трубопроводу на відстані $L < 500$ м, точність визначення координат джерела складає 5 м, чутливість – 40 л/год.

Аналіз відомих систем дозволив визначити основні вимоги до перспективних систем виявлення витоків:

- виявлення витоків із чутливістю до їх інтенсивності менше одного відсотка продуктивності трубопроводу;

- здатність знаходити слабкі витоки і механічні пошкодження в мінімально короткий час;
- гранично мала кількість помилкових спрацювань;
- відносно низька вартість устаткування, його монтажу й обслуговування.

8.3. Формування акустичних сигналів та їх кореляційної функції в автоматизованій системі виявлення витоків в напіних трубопроводах

Схема ділянки, що діагностується, наведена на рис. 8.4. Нехай точка x_0 – місце виникнення течі в об'єкті діагностування, точки x_1 й x_2 – координати початку й кінця ділянки контрольованого трубопроводу.

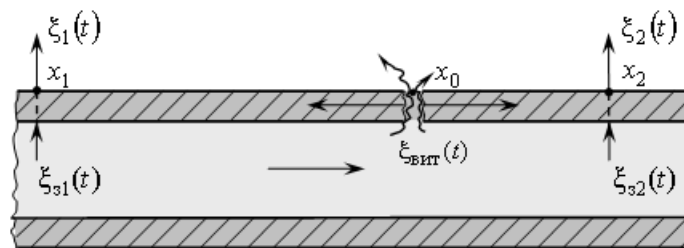


Рис. 8.4. Схема досліджуваної ділянки трубопроводу з витоком рідини

Внаслідок перепаду тиску в точці x_0 відбувається витік робочої речовини із труби, що супроводжується генерацією широкосмугових акустичних коливань із неперервним спектром. Найбільший енергетичний внесок у їхній утворення вносять турбулентні й кавітаційні процеси. Сформований акустичний сигнал витоку $\xi_{\text{внт}}(t)$, поширюється трубою в обидві сторони від точки x_0 , у напрямку точок x_1 і x_2 . Досліджуваний сигнал реєструється електроакустичними перетворювачами, установленими в точках x_1 і x_2 .

Структурна схема формування акустичного сигналу представлена на рис. 8.5, на якому A_1 , A_2 – коефіцієнти електроакустичного тракту, що визначають послаблення сигналу витоку на ділянках $l_1 = x_0 - x_1$ і $l_2 = x_2 - x_0$, $0 \leq A_1, A_2 \leq 1$; τ_1 , τ_2 – затримки приходу сигналу витоку в точки x_1 і x_2 ,

$$\tau_1 = \frac{l_1}{c}, \quad \tau_2 = \frac{l_2}{c},$$

де $\xi_{31}(t)$ і $\xi_{32}(t)$ – акустичні завади в точках прийому, викликані в основному турбулентністю рухомої робочої речовини.

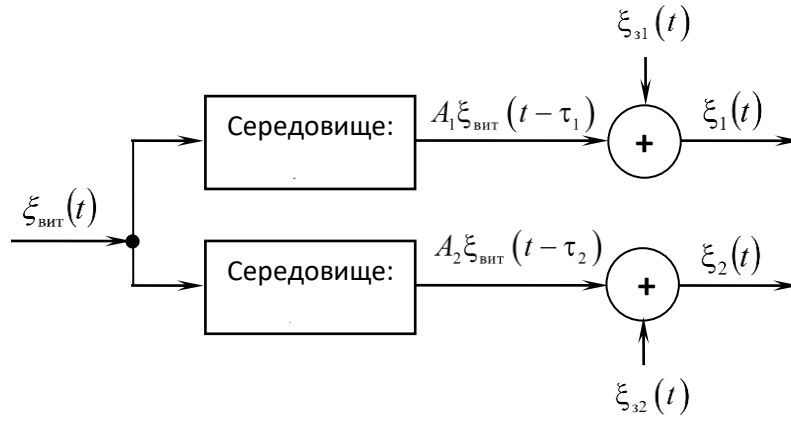


Рис. 8.5. Схема формування досліджуваного акустичного сигналу

Сигнали $\xi_1(t)$ й $\xi_2(t)$ на виході перетворювачів описуються виразами:

$$\xi_1(t) = A_1 \xi_{\text{внт}}(t - \tau_1) + \xi_{31}(t), \quad (8.3)$$

$$\xi_2(t) = A_2 \xi_{\text{внт}}(t - \tau_2) + \xi_{32}(t). \quad (8.4)$$

У загальному випадку сигнали $\xi_{\text{внт}}(t)$, $\xi_{31}(t)$ і $\xi_{32}(t)$ є нестационарними, оскільки залежать від тиску в трубопроводі й температури теплоносія. Однак на коротких проміжках часу (близько декількох хвилин), що необхідні для обробки, ці сигнали можна вважати стаціонарними. З фізичних міркувань можна припустити, що сигнал витоку й завади є реалізаціями статистично незалежних процесів. Крім того, завади в точках x_1 і x_2 теж можна вважати незалежними процесами з однаковими імовірнісними характеристиками. Враховуючи ці припущення, формули для обчислення дисперсій D_1 і D_2 сигналів (8.3), (8.4) і їх взаємної кореляційної функції $R_{12}(\tau)$ мають вигляд

$$D_1 = A_1^2 D_{\text{внт}} + D_3, \quad (8.5)$$

$$D_2 = A_2^2 D_{\text{внт}} + D_3, \quad (8.6)$$

$$R_{12}(\tau) = A_1 A_2 R_{\text{внт}}(\tau - \tau_0), \quad (8.7)$$

де $D_{\text{внт}}$, D_3 – дисперсії сигналу витоку й завади, $D_{31} = D_{32} = D_3$; $R_{\text{внт}}(\tau)$ – кореляційна функція сигналу витоку; τ_0 – зсув кореляційної функції $R_{\text{внт}}(\tau)$, $\tau_0 = \tau_2 - \tau_1$.

Як оцінки параметрів використовуються оцінки математичного сподівання $\hat{m}$ й дисперсії $\hat{D}$, одержувані за вибіркою статистичних даних $(\xi_1, \dots, \xi_N)$, які є незміщеними й дійсними і визначаються виразами

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k, \quad \hat{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\xi_k - \hat{m})^2. \quad (8.8)$$

Розглянемо оцінки кореляційної функції в дискретній формі. Нехай є послідовність $\xi(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, ергодичного випадкового процесу. Оцінка кореляційної функції записується в наступному виді:

$$\hat{R}_{12}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} \xi_1(n) \xi_2(n+k). \quad (8.9)$$

Таким чином комп'ютеризована система контролю витоків у трубопроводах повинна легко інтегруватися до складу системи моніторингу технічного стану таких ОК, поєднувати комплексну систему їх спостережень, оцінювання й діагностування. Експлуатація трубопроводів з використанням системи моніторингу витоків відкриє додаткові резерви для підвищення їхнього ресурсу й надійності.

8.4. Питання для самоконтролю

1. Які методи виявлення витоків у трубопроводах вам відомі?
2. Назвіть та поясніть зміст основних характеристик методів і засобів виявлення витоків.
3. Перелічіть та викладіть сутність відомих методів виявлення витоків у трубопроводах штатними засобами.
4. Наведіть приклади методів виявлення витоків, що реалізуються додатковими апаратними засобами.
5. Назвіть та дайте пояснення схем руху продукту витікання по каналу в режимах.
6. В чому полягає сутність кореляційного методу локації витоків рідини на основі оброблення акустичних сигналів витоку?
7. Покоментуйте особливості формування акустичних сигналів в автоматизованій системі виявлення витоків в напіних трубопроводах.
8. Наведіть алгоритм оцінки кореляційної функції в автоматизованій системі виявлення витоків в напіних трубопроводах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Теоретичні основи інформаційно-вимірювальних систем: Підручник / В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Єременко та ін.; під ред. чл.-кор. НАН України В.П. Бабака / – Київ: УН-т новітніх технологій, 2017. – 496 с.
2. Білокур І.П. Основи дефектоскопії: Підручник. – Київ: „Азимут-Україна”, 2004.– 496 с.
3. Основи ультразвукового неруйнівного контролю: Підручник/ В.К. Цапенко, Ю.В.Куц. –К.: НТТУ «КПІ», 2010, 448 с.
4. Статистичний аналіз даних вимірювань: Навч. посіб / Єременко В.С., Куц Ю.В., Мокійчук В.М., Самойліченко О.В. – Київ: НАУ, 2015.– 321 с.
5. Куц Ю.В., Щербак Л.М. Статистична фазометрія. – Тернопіль: ТДТУ ім. І. Пулюя. –2009. –383 с.
6. Моделі та міри у вимірюваннях: монографія / В.П. Бабак, В.С. Єременко, Ю.В. Куц, М.В. Мислович, Л.М. Щербак ; Національна академія наук України, Інститут технічної теплофізики. - Київ : Наукова думка, 2019. - 205 с
7. Інтелектуальний аналіз даних: навчальний посібник / укладачі: Я.М. Дрінь, І.В. Малик, Ю.А. Літвінчук // ЧНУ імені Ю. Федьковича, 2020. - 95 с.
8. Mardia K.V. Directional Distributions. Encyclopedia of Statistical Sciences / K. V. Mardia // John Wiley & Sons, Inc., 2006.–441 с.
9. Маєвський С.М., Серий К.М. Координатна реєстрація інформації в дефектоскопії. Серія Фізичні методи та засоби контролю середовищ, матеріалів та виробів. –Львів. Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України., 2011 р. –116 с.
10. Маєвський С.М. Основи побудови систем аналізу сигналів у неруйнівному контролі: Навч. посібник / С.М. Маєвський, В.П. Бабак, Л.М. Щербак. – К.: Либідь, 1993. – 200 с.
11. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. –К.: Вища школа, 1983. –455 с
12. Термінологічний словник з неруйнуючого контролю: Довідковий посібник / Упоряд. І.П. Білокур, О.С. Боровіков, В.В. Лубяний, А.М., Овсянкін, В.М. Прохоренко, В.В. Черняк. – К.: ІСДО, 1995. – 228 с.

13. Burgos D.A. Emerging Design Solutions in Structural Health Monitoring Systems / D.A. Burgos, L.E. Mujica and J. Rodellar // IGI Global's InfoSci, 2015 – 337 pp.
14. ДСТУ 3021-95. Випробування і контроль якості продукції. Терміни та визначення / Нац. стандарт України. – Вид. офіц. – [чинний від 1996-01-01]. – Київ: ДП «УкрНДНЦ», 1995. – 69 с.
15. Галаган Р.М. Теоретичні основи ультразвукового неруйнівного контролю: підручник / Р. М. Галаган. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 263 с.
16. Lysenko, I., Eremenko, V., Kuts, Y., Protasov, A. and Uchanin, V., 2020, "Advanced Signal Processing Methods for Inspection of Aircraft Construction Materials." Transactions on Aerospace Research. 259(2). pp. 27-35.
17. Застосування фазових характеристик сигналу в автоматизованій вихрострумовій дефектокопії / М. О. Редька, Ю. В. Куц, Є. В. Шаповалов, В. М. Учанін, Ю. Ю. Лисенко, О. Д. Близнюк // Технічна діагностика і неруйнівний контроль. – 2022. – №1. – С. 45-53.
18. Mei, Z.; Kuts, Y.; Kochan, O.; Lysenko, I.; Levchenko, O.; Vlach-Vyhrynova, H. Using Signal Phase in Computerized Systems of Non-destructive Testing. Meas. Sci. Rev. 2022, 22, 32–43.
19. Дослідження коливального режиму в системах автоматизованого імпульсного вихрострумового контролю / Ю. Ю. Лисенко, Ю. В. Куц, В. М. Учанін, В. Ф. Петрик // Відбір і обробка інформації. – 2021. – 49(125). – С. 9-18.

ДОДАТОК 1

Означення і ймовірнісні характеристики випадкових величин і випадкових фазових зсувів сигналів

Хар-ка	Випадкова величина	Випадковий фазовий зсув сигналів
1	2	3
Випадкові величина, фазовий зсув сигналів	Дійсною випадковою величиною називається функція $\xi(\omega)$ з областю визначення $\Omega = \{\omega\}$ та областю значень $X \subset R$ така, що для довільного $x \in X$ множина тих $\omega \in \Omega$, для яких $\xi(\omega) < x$ є подією A з множини випадкових подій $\mathfrak{Z}$, яка задана на фіксованому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{Z}, P)$.	Дійсним випадковим кутом є функція $\Psi(\omega)$ з областю визначення $\Omega = \{\omega\}$ та областю значень $\Theta \subset R$ така, що для довільного $\theta \in \Theta$ дробова частина кута $\psi(\omega) = \Psi(\omega) - \left[\frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right]^+ 2\pi = \Psi(\omega) \bmod 2\pi,$ є випадковою величиною.
Функція розподілу ймовірностей	Функція розподілу ймовірностей $F(x)$, $x \in R$, випадкової величини $\xi(\omega)$ визначається виразом $F(x) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\},$ $-\infty < x < \infty.$ Властивості $F(x)$: 1) монотонність (якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$); 2) неперервність зліва ($\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$); $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$	Функція розподілу ймовірностей $F(\theta)$ випадкового кута $\Psi(\omega)$ визначається як $F(\theta) = G(\theta') + \left[\frac{\theta}{2\pi} \right]^+ + C,$ $-\infty < \theta < \infty, 0 \leq \theta' < 2\pi,$ де $G(\theta')$ – функція розподілу випадкової величини $\psi(\omega)$, θ' – дробова частина θ , C – довільна постійна. Властивості $F(\theta)$: 1) монотонність (якщо $\theta_1 < \theta_2$, то $F(\theta_1) \leq F(\theta_2)$); 2) $G(\theta')$ неперервна справа ($\lim_{\theta' \downarrow \theta_0} G(\theta') = G(\theta_0)$), тому $G(2\pi) = 1$; 3) $F(\theta + 2\pi n) - F(\theta) = n$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $F(-\infty) = \lim_{\theta \rightarrow -\infty} F(\theta) = 0; F(\infty) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} F(\theta) \rightarrow \infty.$
Модуль тригоном. моменту	-	Результуючою довжиною вектора, який є математичним сподіванням випадкового вектора $(\cos \Psi, \sin \Psi)$, є величина $\rho = f_1 $.

1	2	3
Щільність розподілу ймовірностей	Якщо існує така функція $p(x)$, що за будь-яких $x \in R$ виконується співвідношення $F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy,$ то $p(x)$ називається щільністю розподілу ймовірностей. Властивості $p(x)$: 1) $p(x) \geq 0$; 2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$; 3) за будь-яких a і b $P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x) dx$	Якщо існує така функція $p(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, що за будь-яких θ виконується співвідношення $F(\theta_2) - F(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta, (\theta_2 - \theta_1) \in [0, 2\pi)$ то $p(\theta)$ є щільністю розподілу ймовірностей на колі. Властивості $p(\theta)$: 1) $p(\theta) \geq 0$; 2) $p(\theta + 2\pi) \equiv p(\theta)$; 3) $\int_{\theta_1}^{\theta_1 + 2\pi} p(\theta) d\theta = 1$; 4) для будь-яких θ_1, θ_2 $P(\theta_1 < \Psi \leq \theta_2) = \begin{cases} 0, & \theta_2 \leq \theta_1, \\ F(\theta_2) - F(\theta_1), & \theta_1 < \theta_2 \leq \theta_1 + 2\pi, \\ 1, & \theta_2 > \theta_1 + 2\pi. \end{cases}$ 5) $p(\theta)$ періодична функція на R з періодом 2π.
Квантілі законів розподілу	Розв'язок рівняння $F(\alpha_\gamma) = \gamma$, де γ – задана ймовірність ($0 < \gamma < 1$) відносно $\alpha_\gamma \in (-\infty, \infty)$ називається квантилем розподілу $F(x)$ рівня γ, де $\gamma = \int_{-\infty}^{\alpha_\gamma} p(x) dx.$	Розв'язок рівняння $G(\theta'_\gamma) = \gamma$, де γ – задана ймовірність ($0 < \gamma < 1$) відносно $\theta'_\gamma \in [0, 2\pi)$ називається квантилем розподілу $F(\theta)$ рівня γ, де $\gamma = \int_0^{\theta'_\gamma} p(\theta) d\theta$
Характеристична функція	Характеристичною функцією випадкової величини $\xi(\omega)$ називається математичне сподівання випадкової функції $\exp(iu\xi)$, тобто $f(u) = M e^{iu\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) dF(x),$ $u \in (-\infty, \infty).$	Характеристичною функцією випадкового кута $\Psi(\omega)$ (послідовність тригонометричних моментів відносно нульового напрямку) називається математичне сподівання функції $\exp(j\rho\Psi)$: $f_n = M e^{in\rho\Psi} = \int_0^{2\pi} \exp(in\theta') dG(\theta') = \rho_n \exp(i\mu_n),$ де k – довільне ціле число.

1	2	3
Перший початковий Момент (середнє значення)	Математичним сподіванням випадкової величини $\xi(\omega)$ з функцією розподілу $F(x)$ називається число, визначене інтегралом Стілтєса $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$	Круговим середнім значенням випадкового кута $\Psi(\omega)$ з функцією розподілу $G(\theta')$, для якого $f_1 = Me^{i\Psi} \neq 0$, називається кут $\mu_1 = \text{Arg} f_1.$
Розкид значень випадкової величини і випадкового кута	Дисперсією $\xi(\omega)$ з функцією розподілу $F(x)$ називається математичне сподівання квадрата відхилення значень $\xi(\omega)$ від її математичного сподівання $m\xi$: $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 dF(x).$	Круговою дисперсією випадкового кута $\Psi(\omega)$ з функцією розподілу $G(\theta')$, називається величина $v = 1 - \rho = 1 - f_1 ,$ яка характеризує відхилення значення випадкового кута від його середнього значення
Нерівність Чебишева	$P\{ \xi - M\xi \geq g\sqrt{D\xi}\} \leq \frac{1}{g^2}$	$P\left\{\left \sin \frac{\Psi - \mu_1}{2}\right > \varepsilon\right\} < \frac{v}{2\varepsilon^2},$ $0 < \varepsilon < 1, \quad 0 < \frac{v}{2\varepsilon^2} < 1.$
Медіана	Медіаною неперервного розподілу $F(x)$ випадкової величини $\xi(\omega)$ називається таке значення $x = Me$, для якого однаково ймовірно, чи виявиться випадкова величина більшою чи меншою Me , тобто $P(\xi < Me) = P(\xi > Me).$	Круговою медіаною неперервного розподілу на колі $G(\theta')$ випадкового кута $\psi(\omega)$ називається значення кута μ_m , яке є одним з рішень рівняння $Q(\mu_m) = F(\mu_m + \pi) - F(\mu_m) - 0,5 = \int_{\mu_m}^{\mu_m + \pi} p(\theta) d\theta - 0,5 = 0,$ і $Q(\mu_m - 0,5\pi)$ максимально
Мода	Модою називається значення Mod випадкової величини $\xi(\omega)$, для якого щільність розподілу $p(x = \text{Mod})$ має максимальне значення	Модою називається значення Mod випадкового кута $\psi(\omega)$, для якого щільність $p(\theta' = \text{Mod})$ має максимальне значення