

УДК 517.9

А.Л. Гречко

## МОНОТОННІ МАТРИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА ТА РІКАТТІ

The purpose of the paper is to generalize the Polacik–Terescak theorem for a monotone differential matrix equation of Lyapunov and Ricatti. Our goal is to study the existence of the one-dimensional invariant manifold (corresponding to Lyapunov and Ricatti monotone differential matrix equation). Using the method introduced by Hilbert–Birkhoff in the projective contraction fixed point theorem, we determine conditions under which Lyapunov differential matrix equation has a one-dimensional invariant manifold in the cone of positive definite of quadratic form. The main assumption of this work is a strong monotonicity of a linear skew-product flow on trivial vector bundle. Specifically, we prove Lyapunov and Ricatti monotonicity of a differential matrix equation. Also, we establish the existence of the one-dimensional invariant manifold of Lyapunov equation. The proposed method of projective analogue fixed point principle applied to the differential Lyapunov matrix equation with a special low right-hand side allows to prove the existence of one-dimensional invariant manifold in the cone of positive quadratic forms.

## Вступ

У багатьох прикладних задачах і питаннях дослідження стійкості розв'язків диференціальних рівнянь, теорії оптимального керування фундаментальну роль відіграє матричне або диференціальне матричне рівняння Ляпунова або Рікатті [1]. Питання дослідження стійкості матриць часто проводиться за допомогою квадратичної функції Ляпунова  $\langle Sx, x \rangle$ , матриця коефіцієнтів якої  $S$  визначається як розв'язок матричного рівняння Ляпунова

$$S A + A^* S = -I.$$

Монотонні диференціальні рівняння активно вивчаються від початку 30-х рр. ХХ ст.: праці Е. Камке, М. Красносельського, М. Хірша, П. Полачіка та ін. є найбільш важливими в питаннях якісної поведінки монотонних диференціальних рівнянь. Пізніше було встановлено важливий зв'язок монотонних динамічних систем з математичними моделями популяційної динаміки біологічних об'єктів, математичними моделями в медицині, економіці та інших застосувань, де динамічна система, яка описує відповідну математичну модель, зберігає структуру порядку відносно деякого конуса [2]. Одним з головних методів якісного дослідження нелінійних динамічних систем є метод лінеаризації в околі особливої точки або інваріантного багатовиду, що робить актуальним вивчення лінійного розширення динамічної системи

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega(\varphi), \\ \dot{x} &= W(\varphi)x, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\varphi \in B$ ,  $x \in R^n$ ,  $\omega(\varphi) \in C^k$  та її  $k$ -та похідна  $r$ -Гельдерова;  $W(\varphi) \in C(B)$ ,  $B$  – компактний метричний простір. Також позначимо гладкий потік, який задається першим рівнянням в (1) через  $\varphi^t$ , а оператор еволюції  $\pi^t$ -потік, який задається лінійним розширенням (1) на тривіальному векторному розшаруванні  $X = B \times R^n$ ,  $t \in R$ . У працях А.М. Самойленка введено і фундаментально досліджено багато питань якісної поведінки лінійних розширень динамічних систем [3, 4] на торі. Актуальність взаємодії теорії монотонних диференціальних рівнянь з теорією лінійних розширень динамічних систем можна простежити в численних публікаціях (див. список літератури в [5]). Наприклад, одним з центральних результатів є теорема Полачіка–Верещака, яка стверджує, що за умови строгої монотонності лінійного розширення  $\pi^t$

- існує інваріантна декомпозиція  $X(b) = X_1(b) \oplus X_2(b)$  для  $\forall b \in B$ , причому  $\dim X_1 = 1$ ;
- $X_1(b) = \text{span}\{u(b)\}$ ,  $\|u(b)\| = 1$ , де  $u(b)$  – інваріантний багатовид (переріз) лінійного розширення  $\pi^t$ :  $\pi^t \circ u \circ \varphi^{-t} = u$ ,  $t \in R$ ;
- лінійне розширення  $\pi^t$  є експоненціально розділеним, тобто  $\exists \alpha, d > 0$ , що виконується

$$\begin{aligned} \frac{\|\pi^t(x_2)\|}{\|\pi^t(x_1)\|} &\geq d e^{\alpha t} \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|}, \\ t > 0, x_i &\in X_i(b), b \in B. \end{aligned} \quad (2)$$

Проте звернемо увагу на те, що відсутні ґрунтовні дослідження монотонних диференціальних рівнянь типу Ляпунова або Рікати. У зв'язку з цим виникає перспективний напрям досліджень, пов'язаний зі встановленням аналогів теорем Полачіка–Терещака для монотонних диференціальних матричних рівнянь Ляпунова.

### Постановка задачі

Метою роботи є доведення основного результату відносно монотонних диференціальних матричних рівнянь типу Ляпунова, який є узагальненням теорем Полачіка–Терещака про існування одновимірного інваріантного багатovidу. Також встановлюється монотонність диференціального матричного рівняння Рікати.

### Основні результати

Непуста підмножина в  $R^n$  називається конусом, якщо ця множина опукла та

- $x \in K \Rightarrow \alpha x \in K, \alpha > 0$ ;
- $K \cap -K = \{0\}$ .

Таким чином, конус  $K$  задає структуру порядку в  $R^n$  так:  $y \leq x \Leftrightarrow x - y \in K$ , аналогічно  $y \ll x \Leftrightarrow x - y \in \text{int } K$ . Лінійне розширення (1) називається строго монотонним, якщо для довільних  $x_1, x_2 \in R^n$  з нерівності  $x_1 \leq x_2, x_1 \neq x_2$ , впливає нерівність  $\pi^t(x_1) \ll \pi^t(x_2), \forall t > 0$ . Нехай  $b_0$  – особлива точка потоку  $\phi^t$  та позначимо  $n$ -вимірну матрицю  $A = D_b \omega(b_0)$ , де  $D$  – оператор лінеаризації (матриця Якобі).

Розглянемо диференціальне матричне рівняння типу Ляпунова

$$\frac{dS}{dt} = SA^* + AS + \delta \langle E, S \rangle E, \quad (3)$$

де  $E$  – одинична матриця;  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$ ,  $\delta > 0$ . Головним результатом роботи є таке твердження.

**Теорема 1.** Нехай лінійне розширення (1) є строго монотонним при  $t \geq 0$ , тоді мають місце наступні твердження:

1. Довільний розв'язок рівняння (3), який починається всередині конуса  $K$  при  $t = t_0$ ,

залишається всередині конуса при  $t \geq t_0$ , де  $K$  – конус додатньо визначених квадратичних форм.

2. У конусі  $K$  диференціальне матричне рівняння типу Ляпунова (3) має одновимірний інваріантний багатovid  $\gamma = \gamma(b, \delta)$ .

Доведення. Перша частина теореми 1 є наслідком теореми 4.6 з [1] та теореми 2.2 з [2]. Для доведення існування інваріантного багатovidу скористаємося теоремою про нерухому точку, яка ґрунтується на конструкції гільбертівської псевдометрики [6]. Завдяки наслідку 1 [6] маємо можливість без обмежень загальності обмежитись випадком  $n = 2$ .

У конусі  $K$  введемо операцію порівняння елементів  $f, g \in K$  вигляду  $\lambda f < g < \mu f, \lambda, \mu > 0$ .

Розглянемо гільбертівську псевдометрику

$$\theta(x, y) = \left| \ln \frac{\inf \mu}{\sup \lambda} \right|. \quad (4)$$

Рівняння Ляпунова визначає лінійний оператор зсуву вздовж розв'язків (3), який позначимо

$$P = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}.$$

За першим пунктом теореми цей оператор рівномірно додатний та компактний, інакше кажучи,  $P$  – додатньо визначена матриця. Таким чином, у конусі  $K$  можна застосувати проективне перетворення

$$x' = \frac{ux + v}{wx + z}.$$

Для довільних елементів  $f, g \in K$  вигляду  $f = (1, k_1), g = (1, k_2)$ . Знайдемо відстань  $\theta(x, y)$ . По-перше, якщо  $\lambda f \leq g$ , тоді  $(1 - \lambda_1, k_2 - \lambda k_1) \geq 0$ , що рівносильно

$$\beta \leq \frac{k_2 - \lambda k_1}{1 - \lambda} \leq \alpha.$$

Ця нерівність визначає максимальне значення

$\lambda_{\max} = \frac{k_2 - \beta}{k_1 - \beta}$ . По-друге, при  $g \leq \mu f$ , отримаємо

$(\mu k_1, \mu) \geq (1, k_2)$ , що еквівалентно

$$\beta \leq \frac{\mu k_1 - k_2}{\mu - 1} \leq \alpha.$$

Аналогічно, ця нерівність визначає мінімальне значення  $\mu_{\min} = \frac{k_2 - \alpha}{k_1 - \alpha}$ . Таким чином, остаточно отримаємо

$$\theta(f, g) = \left| \ln \frac{(k_2 - \alpha)(k_1 - \beta)}{(k_1 - \alpha)(k_2 - \beta)} \right|. \quad (5)$$

Знайдемо тепер проєктивну відстань між образами точок конуса –  $\theta(P(f), P(g))$ , де

$$P(f) = \left( 1, \frac{w + k_1 z}{u + k_1 v} \right), P(g) = \left( 1, \frac{w + k_2 z}{u + k_2 v} \right), \quad \lambda P(f) \leq$$

$\leq P(g) \leq \mu P(g)$ . Аналогічно виведенню формули (5) отримаємо

$$\theta(P(f), P(g)) = \left| \ln \frac{(w + k_2 z - \beta(u + k_2 v))(w + k_1 z - \alpha(u + k_1 v))}{(w + k_1 z - \beta(u + k_1 v))(w + k_2 z - \alpha(u + k_2 v))} \right|. \quad (6)$$

Для застосування теореми про нерухому точку у варіанті Біркгофа [6] потрібно знайти максимальний коефіцієнт стиску проєктивного перетворення  $P$

$$\Delta = \max(\tau(P)) = \max \left| \frac{\theta(P(f), P(g))}{\theta(f, g)} \right|.$$

Розглянемо заміну змінної  $\bar{x} = \Pi P \Pi^{-1} \mathbf{x}$ ,  $\bar{x} = (x, y)$ , де

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\beta - \alpha} & \frac{-1}{\beta - \alpha} \\ \frac{\alpha}{\alpha - \beta} & -\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \end{pmatrix}.$$

Перетворення, яке переводить конус  $K$  в конус  $K_1$  – перетворення невід’ємних функцій. Неважко обчислити, що після заміни змінної  $x = \frac{ax' + b}{cx' + d}$  проєктивні відстані набувають вигляду

$$\theta(P(f), P(g)) = \left| \ln \frac{(a + \beta b)(c + \alpha d)}{(c + \beta d)(a + \alpha b)} \right|, \quad (7)$$

$$\theta(f, g) = \left| \ln \frac{\beta}{\alpha} \right|.$$

Проєктивний діаметр перетворення  $P$  отримається із (6) завдяки заміні  $k_1 \rightarrow \beta$ ,  $k_2 \rightarrow \alpha$ , тобто у випадку конуса  $K_1$  має вигляд

$$\Delta = \left| \ln \frac{bc}{ad} \right|. \quad (8)$$

Використовуючи формули (7), (8), маємо можливість оцінити  $\tau(P)$ :

$$\max(\tau(P)) = \max \left| \frac{\theta(P(f), P(g))}{\theta(f, g)} \right| = \max \left| \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \right|,$$

де  $\xi = (d, \beta)$ ,  $F(x) = \left| \ln \frac{a + bx}{c + dx} \right|$ ,  $G(x) = |\ln x|$ .

Отримаємо

$$\max(\tau(P)) = \min \left| \frac{\frac{ac}{\xi} + bc + bd\xi + da}{bc - ad} \right|,$$

причому мінімум досягається при  $\xi^2 = \frac{ac}{bd}$ , тобто

$$\max(\tau(P)) = \max \left| \frac{bc - ad}{2\sqrt{abcd} + bc + ad} \right|$$

або

$$\tau(P) = \frac{e^{\Delta/2} - e^{-\Delta/2}}{e^{\Delta/2} + 2 + e^{-\Delta/2}} = \operatorname{th} \frac{\Delta}{4} < 1.$$

За процедурою ітерування перетворення  $P$  отримаємо послідовність Коші  $P^i(f)$ ,  $\forall f \in K$  в проєктивній метриці  $\theta$ . Застосовуючи теорему про нерухому точку у варіанті Біркгофа, отримаємо єдину нерухому точку оператора зсуву вздовж траєкторій рівняння (3).

Теорему доведено.

**Зауваження.** Одновимірність інваріантного багатovidу в теоремі 1 встановлюється аналогічно [5].

При дослідженні багатьох питань теорії оптимального керування та теорії стійкості розв’язків важливим є так зване диференціальне матричне рівняння Рікатті. Твердження про монотонність рівняння Рікатті можна провести для загального неавтономного та неоднорідного випадку

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + X(t)A^*(t) - X(t)B(t)X(t) + C(t), \quad (9)$$

$$X(0) = X_0.$$

**Теорема 2.** Нехай матриці  $A, B, C, X_0$  – обмежені та неперервні на  $[0, +\infty)$ , а  $B, C, X_0$  – невід’ємні і симетричні. Тоді розв’язок (9) існує, невід’ємний та є симетричним  $\forall t > 0$ . Більш того, якщо  $X(s), C(s) > 0$ , при деякому  $s > 0$ , тоді  $X(t), C(t) > 0 \quad \forall t > s$ .

Доведення. Права частина рівняння (9) – симетрична матриця, тому і розв’язок є симетричною матрицею. Позначимо – матрицант

задачі Коші  $\dot{X} = A(t)X$ ,  $X(0) = I$ . Неважко переконатися, що розв'язок (9) при  $B = 0$  має вигляд

$$X(t) = \Phi(t, s)X(s)\Phi^*(t, s) + \int_0^t \Phi(t, \tau)C(\tau)\Phi^*(t, \tau)d\tau. \quad (10)$$

Твердження теореми відносно рівняння (9) при  $B = 0$  випливає з представлення (10) та невід'ємності  $\Phi(t, \tau)$ . Неважко переконатися в рівності між симетричними матрицями

$$X B X = X (X B)^*. \quad (11)$$

Тому, враховуючи (11), рівняння Рікати (9) можна переписати у вигляді

$$\dot{X}(t) = \left( A(t) - \frac{1}{2} X(t)B(t) \right) X(t) + X(t) \left( A(t) - \frac{1}{2} X(t)B(t) \right)^* + C(t),$$

тобто  $X(t)$  — розв'язок рівняння Ляпунова і, таким чином, він є невід'ємним за умов його існування. Для доведення його існування, явний вигляд якого такий:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t (A(s)X(s) + X(s)A^*(s) - X(s)B(s)X(s) + C(s))ds,$$

введемо норму  $\|X(t)\| = \max_{\|x\|=1} v^* X v$ . Застосовуючи нерівність Гронуола—Белмана, отримаємо

1. Халил Х.К. Нелинейные системы. — М.: Мир, 2009. — 792 с.
2. Smith H., Monotone Dynamical Systems. An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative System, AMS, Math. Surv. Monogr., Providence, 1995, vol. 11, 254 p.
3. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

$$\|X(t)\| \leq \|X(0)\| +$$

$$+ \int_0^t (2 \|A(s)\| \|X(s)\| + \|C(s)\|) ds,$$

тобто маємо

$$\|X(t)\| \leq \|X(0)\| \exp(2 \|A(t)\|) + \int_0^t \|C(s)\| \exp\left(2 \int_s^t \|A(l)\| dl\right) ds,$$

звідки випливає обмеженість  $\|X(t)\|$  та існування  $\forall t > 0$ .

Теорема 2 доведена.

### Висновки

Запропонований метод проективного аналогу принципу нерухокої точки в застосуванні до диференціального матричного рівняння Ляпунова зі спеціальною малою правою частиною дає можливість довести існування одновимірного інваріантного багатovidу в конусі додатних квадратичних форм. Обмеження лінійного розширення на цей багатovid дає змогу зменшити порядок системи та значно спростити задачу якісного дослідження монотонних лінійних розширень.

Оскільки при  $\delta \rightarrow 0$  інваріантність багатovidу зберігається, планується в подальшому встановлення підсилення теореми 1 на випадок  $\delta \rightarrow 0$ .

4. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. Матем. — 1970. — **34**, № 6. — С. 1219–1240.
5. Гречко А.Л. Про деякі якісні властивості монотонних лінійних розширень динамічних систем // Укр. матем. журн. — 2011. — № 11. — С. 1326–1335.
6. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Мир, 1984. — 560 с.