МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ, ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю ***«Видавництво та поліграфія»***

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2017

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 4 від 3 квітня 2017 р.)

Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу: навч. посіб. Уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2017. – 141 с.

Електронне навчальне видання

Елементи лінійної, векторної алгебри
Аналітична геометрія
Вступ до математичного аналізу

Навчальний посібник
для студентів Видавничо-поліграфічного інституту
спеціальності **186** ***«Видавництво та поліграфія»***

Укладачі: Кушлик-Дивульська Ольга Іванівна
Поліщук Наталія Володимирівна

Рецензенти О. М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Л. М. Артемчук, канд. пед. наук, доцент
О. М. Величко, д-р техн. наук, проф.
Відповідальний редактор С. Д. Івасишен, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Наведено основні поняття, означення, методи, теореми, формули лінійної, векторної алгебри, аналітичної геометрії на площині та в просторі, вступу до математичного аналізу, диференціального числення функції однієї змінної, їх застосування до розв’язування практичних задач, які відповідають навчальній програмі дисципліни «Вища математика» спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» підготовки студентів Видавничо-поліграфічного інституту. У відповідності до теоретичного матеріалу розв’язано типові навчальні приклади та основні задачі. Подано перелік задач для самостійного опрацювання, варіант домашньої контрольної роботи. Додатки містять необхідний довідковий матеріал елементів деяких тем курсу вищої математики.

Для студентів технічних спеціальностей ВПІ КПІ ім. Ігоря Сікорського та інших факультетів, інститутів, що мають схожу програму підготовки, а також для зацікавлених осіб.

Передмова

Загальний курс вищої математики є фундаментом математичної та інженерної освіти спеціаліста. Багато інженерних задач можна успішно розв'язати, використовуючи математичні методи. Відомо, що при самостійному розв'язуванні задач студентам заочної форми навчання потрібні постійні консультації щодо способів їх розв'язування, оскільки знайти шлях до розв'язування задачі без допомоги викладача або відповідного підручника студентові не завжди під силу. Допомогти студентам заочної форми навчання оволодіти елементами вищої математики, навчити їх застосовувати теоретичні знання до розв'язування задач – основне призначення цього навчально-методичного видання. При написанні посібника був врахований багаторічний досвід роботи зі студентами заочної форми навчання технологічних спеціальностей. Посібник складено згідно з програмою курсу вищої математики.

Навчальне видання містить основні поняття, теореми, формули за темами «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри», «Аналітична геометрія», «Вступ до математичного аналізу». Посібник призначений для систематичного читання, особливо для тих студентів, які вперше ознайомлюються з цими темами вищої математики.

Основною метою посібника є надання допомоги студентам у засвоєнні елементів лінійної, векторної алгебри, аналітичної геометрії та вступу до математичного аналізу, отриманні навичок із розв'язування типових задач, користуючись наведеними теоремами та формулами, а також детально розібраними прикладами. До кожної теми подано задачі з розв'язуванням та декілька задач того самого типу для самостійного опрацювання. Також запропоновано тематичні завдання для домашньої контрольної роботи, типові задачі для яких розв'язано.

Автори сподіваються, що даний посібник буде корисний також фахівцям, яким потрібно самостійно ознайомитися з наведеними розділами вищої математики.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1. Матриці та визначники

1.1. Матриці та дії над ними

Означення. ***Матрицею*** розміру $m \times n$ називається [1] сукупність елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має m рядків і n стовпчиків:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Перший індекс кожного елемента вказує на номер рядка, в якому цей елемент розміщений, другий – на номер стовпця. Матриці позначають прописними буквами латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$. Використовують також більш компактний запис: $A_{ij(m \times n)}$.

Матриця називається ***числовою,*** якщо її елементи a_{ij} – числа; ***функціональною***, якщо елементи – функції. Ми будемо розглядати, в основному, числові матриці.

Матриці A і B мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців. Матриці A і B вважаються ***рівними*** між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їхні елементи, що знаходяться на однакових місцях, рівні між собою.

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців (тобто $m = n$), називається ***квадратною*** матрицею. Квадратна матриця порядку n має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} утворюють головну діагональ матриці, а елементи a_{1n}, $a_{2\,n-1}, \ldots,$ a_{n1} – побічну.

Деякі матриці мають назви. Зокрема, до них відносяться, нульова, діагональна та одинична матриці.

Нульовою називається матриця, всі елементи якої − нулі.

Якщо всі елементи матриці, окрім розташованих на головній діагоналі, дорівнюють нулю, то в цьому випадку матриця називається ***діагональною***.

Якщо всі елементи квадратної діагональної матриці дорівнюють одиниці, то вона називається ***одиничною*** матрицею. Одинична матриця має вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю розміру $m \times n$, яку одержують із матриці *A* заміною її рядків відповідними стовпцями, називають ***транспонованою,*** має розмір $n \times m$ і позначають A^T.

Для квадратної матриці транспонована матриця має вигляд:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. ***Сумою (різницею)*** матриць *A і B* називається матриця *C*, елементи якої

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \left(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}\right),$$

де a_{ij} та b_{ij} – відповідно елементи матриць *A* і *B*. При цьому записують

$$C = A + B \quad \left(C = A - B\right).$$

Додавати або віднімати можна тільки матриці однакових розмірів.

Означення. ***Добутком*** матриці *A* на число α називається матриця $C = \alpha A$ такого ж розміру, елементи якої

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij},$$

де a_{ij} – елементи матриці A, тобто при множенні матриці на число треба всі елементи матриці помножити на це число.

Для довільних матриць A, B, C однакових розмірів і довільних чисел α та β справджуються рівності:

$$A + B = B + A;$$

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

Означення. ***Добутком*** матриці $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{n\times p}$ називається матриця $C_{m\times p} = AB$, елементи якої

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj},$$

де a_{ik}, b_{kj} – елементи матриць A і B відповідно. Зауважимо, що перемножувати можна тільки ті матриці, в яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. З існування добутку AB не означає, що існує добуток BA.

Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються ***комутативними.***

1.2. Визначники, їх властивості

Означення. ***Визначником другого порядку*** квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число

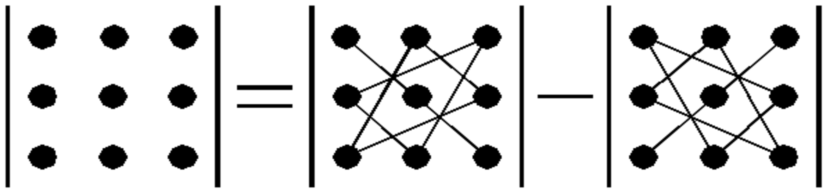
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.1)$$

Означення. ***Визначником третього порядку*** квадратної матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.2)$$

Для обчислення визначників третього порядку існує правило трикутника, яке схематично можна зобразити так:



Аналогічно для квадратної матриці A n-го порядку можна розглянути її визначник n-го порядку. Визначник матриці A часто позначають $\det A$.

Означення. ***Мінором*** M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який отримують з визначника матриці A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Означення. ***Алгебраїчним доповненням*** A_{ij} елемента a_{ij} називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Визначник вищого порядку можна обчислити за допомогою визначників нижчого порядку розкладом за елементами одного із рядків або стовпців. Зокрема, для визначників третього порядку маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Основні властивості визначників

1. Значення визначника не змінюється при його транспонуванні.

2. Перестановка двох рядків (стовпців) визначника рівносильна множенню його на (–1).

3. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

6. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо кожний елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, в яких один у згаданому рядку (стовпці) має перші з заданих доданків, а інший – другі; елементи, що знаходяться на решті місць, у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Записується ця властивість для визначника третього порядку таким чином:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться.

1.3. Обернена матриця, її побудова

Означення. Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо добуток цих матриць дорівнює одиничній матриці, тобто

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Обернена матриця існує для будь-якої квадратної матриці *A*, яка є ***невиродженою***, тобто, коли $\det A \neq 0$.

Теорема ***(необхідні і достатні умови існування оберненої матриці)***

Для матриці третього порядку A *існує обернена матриця* A^{-1} *тоді і тільки тоді, коли* A − *невироджена матриця, її можна знайти за формулою* $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A_{ij}\right)^T$, *тобто*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

де A_{ij} −*алгебраїчні доповнення до відповідних елементів матриці* A.

Зауваження. Теорема справедлива для невироджених матриць довільного порядку.

Алгоритм знаходження оберненої матриці [1]

1. Обчислити визначник матриці *A*. Якщо $\det A \neq 0$, то матриця *A* має обернену, в іншому випадку оберненої матриці не існує.

2. Обчислити алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} матриці *A*.

3. Записати обернену матрицю за формулою (1.3).

Розв'язування типових задач

1. Знайти матрицю [2] $C = 2A - 3B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Користуючись означеннями операцій множення матриці на число та додавання матриць, послідовно знаходимо:

$$2A = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 0\cdot 2 & -1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$3B = \begin{pmatrix} 0\cdot 3 & 2\cdot 3 & 5\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & -7\cdot 3 & 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix},$$

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 6-6 & 8-15 \\ 4-9 & 0-(-21) & -2-12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ -5 & 21 & -14 \end{pmatrix}.$$

2. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ обчислити $A^T + B^T$.

Розв'язування.

Спочатку записуємо транспоновані матриці, тоді виконуємо дію додавання.

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Для заданих матриць обчислити AB та BA, якщо це можливо:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

а) Оскільки задано матриці $A_{2\times 2}$ і $B_{2\times 2}$, то можна визначити добутки AB та BA. Отже,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 5\cdot(-1) & 3\cdot(-5) + 5\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot(-5) + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + (-5)\cdot 1 & 1\cdot 5 + (-5)\cdot 2 \\ -1\cdot 3 + 2\cdot 1 & -1\cdot 5 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$AB = BA.$$

б) Оскільки кількість стовпців матриці A не дорівнює кількості рядків матриці B, то добутку AB не існує. Проте можна обчислити добуток BA.

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-2) & -3+4\\ 3+(-4) & -9+8\\ 5+(-6) & -15+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix}1 & 3\\ -6 & 2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha\\ \cos\alpha & 1\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}$.

Розв'язування.

а) Використовуючи формулу для обчислення визначника другого порядку, маємо:

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ -6 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-3\cdot(-6)=2+18=20.$$

б) $\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha\\ \cos\alpha & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\sin^2\alpha$.

в) Користуючись правилом трикутника, знаходимо

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot 5+(-1)\cdot 2\cdot 1+3\cdot(-2)\cdot 2-3\cdot 3\cdot 1-(-2)\cdot(-1)\cdot 5-2\cdot 2\cdot 2=$$

$$=30-2-12-9-10-8=-11.$$

5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ -2 & 1 & 6\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}$, розклавши його за елементами першого рядка.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ -2 & 1 & 6\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix}1 & 6\\ 4 & 3\end{vmatrix}+(-1)^3\cdot 2\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 3 & 3\end{vmatrix}+(-1)^4\cdot 5\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=3-24-2(-6-18)+$$

$$+5(-8-3)=-21+48-55=-28.$$

6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 8 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}$, спочатку спростивши його.

Розв'язування.

Додамо перший рядок до третього рядка, потім помножимо перший рядок на (–2) і додамо його до другого рядка і отримаємо визначник, в якому елементи $a_{21} = a_{31} = 0$. Отриманий визначник розкладаємо за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2+(-2)\cdot 1 & 8+(-2)\cdot 3 & 1+(-2)\cdot 2 \\ -1+1 & 1+3 & 2+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8-(-12) = 20.$$

7. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Перевірити, чи справджуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Розв'язування. Знайдемо визначник матриці: $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5$.

Оскільки $\Delta = -5 \neq 0$, обернена матриця A^{-1} існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення: $A_{11} = 3, A_{12} = -1, A_{21} = -2, A_{22} = -1$. Тоді обернена матриця буде мати вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи виконуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{2}{5}+\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5}+\frac{3}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Завдання для самоконтролю

1. Означте матрицю, опишіть її різновиди.

2. Записати визначення алгебраїчних дій над матрицями: сума (різниця) двох матриць, добуток матриці на число.

3. Пояснити на прикладі двох матриць однакового розміру дію множення матриці на матрицю. За яких умов можна множити матриці різних розмірів? Навести приклад.

4. Дати означення визначника другого, третього порядків. Навести приклади обчислення визначників.

5. Сформулювати та довести властивості визначників.

6. Що називається мінором та алгебраїчним доповненням у визначнику? Навести їх приклади для визначників другого та третього порядків.

7. Що називається оберненою матрицею?

8. Навести алгоритм побудови оберненої матриці та використати його на практиці для матриці другого порядку.

9. Сформулювати та довести теорему про існування оберненої матриці.

10. Для матриць $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -4 & 6\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ обчислити:

A^T*-3B, AB, BA, AB+E.*

11. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix}10 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix}a & a-b\\ a+b & a-1\end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 1 & -3\\ 3 & -4 & 2\end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 4 & 2 & 5\end{vmatrix}$.

12. Обчислити визначник матриці, яка є добутком двох заданих матриць:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -3\end{pmatrix}.$$

13. Серед заданих матриць знайти невироджену:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{б)}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{в)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

14. Для заданої матриці знайти обернену $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповіді. **10.** $A^T - 3B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -9 \\ -6 & 11 & -16 \\ -11 & -4 & 3 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & -1 \\ -8 & -14 & 18 \end{pmatrix}$;

$BA = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -10 \\ -10 & 16 & -24 \\ 10 & -6 & 14 \end{pmatrix}$; $AB + E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & -1 \\ 8 & -14 & 19 \end{pmatrix}$. **11.** а) -34; б) $b^2 - a$; в) 0; г) -13.

12. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 13 & -6 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$; $\Delta = 0$. **13.** а) вироդж.; б) вироդж.; в) невироդж. $(\Delta = 14)$.

14. $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 & -9 & 14 \\ 13 & 12 & -17 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

2.1. Основні поняття

Означення. ***Системою m лінійних рівнянь із n змінними*** $x_1, x_2, ..., x_n$ називається система, яка має наступний вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

де a_{ij} – коефіцієнти при змінних; b_i − вільні члени, $1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n.$

Означення. Упорядкована сукупність чисел $(a_1, a_2, ..., a_n)$, називається ***розв'язком*** системи, якщо при заміні x_1 на a_1, x_2 на a_2, ... , x_n на a_n у кожному рівнянні системи дістанемо *n* правильних числових рівностей.

Означення. Система, що має розв'язок, називається ***сумісною.***

Означення. Система, яка не має жодного розв'язку, називається ***несумісною.***

Означення. Система з єдиним розв'язком називається ***визначеною,*** а з нескінченним числом розв'язків – ***невизначеною.***

Система двох лінійних рівнянь з двома змінними має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

а систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2. Метод Крамера

Цей метод розв'язування систем лінійних рівнянь [3] зводиться до обчислення визначників.

Теорема. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь (2.1) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли її головний визначник* $\Delta \neq 0$, *причому* x_1, x_2 *можна знайти за* ***формулами Крамера****:*

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}.$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – називається головним визначником системи (2.1), а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ –допоміжні визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Зауваження. Формули Крамера мають місце і для систем більшого розміру.Так, для системи (2.2) мають вигляд:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$ $-$ головний визначник системи (2.2) , а

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}-$$

також є допоміжними визначниками, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Наслідок формул Крамера. Системи (2.1) і (2.2) мають:

а) єдиний розв'язок, коли $\Delta\neq 0$;

б) безліч розв'язків, коли $\Delta=\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=0$ $(\Delta=\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=\Delta_{x_3}=0)$;

в) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta=0$ і хоча б один із визначників $\Delta_{x_1},\Delta_{x_2}$ $(\Delta_{x_1},\Delta_{x_2},\Delta_{x_3})$ відмінний від нуля.

2.3. Матричний метод

Нехай дано систему: $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_3,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$

Розглянемо три матриці:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

Перша матриця називається ***матрицею системи***, друга ***матрицею-стовпцем змінних***, третя – ***матрицею-стовпцем вільних членів***. Тоді систему можна записати у матричному вигляді: $A\cdot X=B$. Якщо матриця системи рівнянь невироджена $(\Delta \neq 0)$, то розв'язок системи знаходимо у вигляді $X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

2.4. Дослідження систем на сумісність. Метод Гаусса

2.4.1. Поняття рангу матриці, його обчислення

Означення. ***Рангом матриці*** A називають порядок найбільшого ненульового мінора цієї матриці, який одержується на перетині k рядків і k стовпців матриці A.

Позначають ранг матриці $\text{rang}(A)$ або $r(A)$.

Якщо матриця містить хоча б один ненульовий елемент, то її $r(A) \geq 1$.

На практиці для матриць більшого розміру зручно обчислювати ранг за допомогою елементарних перетворень над рядками (стовпцями), які її рангу не змінюють.

Елементарні перетворення

1. Перестановка рядків (стовпців) місцями.

2. Множення рядка (стовпця) на деяке ненульове число.

3. Викреслювання одного із пропорційних рядків (стовпців).

4. Викреслювання нульового рядка (стовпця).

5. Додавання до одного із рядків (стовпців) іншого рядка (стовпця), помноженого на деяке число.

2.4.2. Критерій сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь, теорема Кронекера-Капеллі

Розглянемо систему m лінійних рівнянь із невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.5}$$

У відповідність до системи обчислимо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

та розширеної матриці $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$

Має місце теорема.

Теорема Кронекера-Капеллі. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь (2.5) сумісна тоді і тільки тоді, коли* $r(A) = r(B)$.

Наслідок 1. Якщо $r(A) = r(B) = n$, тобто кількості невідомих, то система має єдиний розв’язок; якщо $r(A) = r(B) = k < n$ − система невизначена (має безліч розв’язків), причому $n - k$ змінних обирають базовими, через них виражають інші змінні.

Наслідок 2. Якщо $r(A) < r(B)$, тоді система несумісна.

2.4.3. Метод Гаусса

Нехай нам дана система лінійних рівнянь (2.5). Вважаємо, що в заданій системі коефіцієнт $a_{11} \neq 0$.

Утворимо множник $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}} \right)$. Помножимо на дане число перше рівняння і додамо до другого. Побудуємо число $\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{11}} \right)$ та аналогічно виконаємо перетворення для третього рівняння і т.д. Врешті, перетворимо останнє рівняння із множником $\left(-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}} \right)$. В результаті цих дій утворилася нова система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad .... \\ \quad a'_{l2}x_2 + ... + a'_{\ln}x_n = b'_l. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Система (2.6) отримується в результаті виключення з рівнянь системи (2.5), крім першого, невідомої змінної x_1. Вона рівносильна системі (2.5), так як застосували елементарні перетворення.

В процесі такої роботи в системі може з'явитися рівняння, всі коефіцієнти якого і вільний член дорівнюють 0. Таке рівняння задовольняється будь-яким *n*-вимірним вектором і не впливає на розв'язок системи. Тому ми можемо таке рівняння вивести з нашої системи, зменшивши кількість рівнянь системи. Отже, $l \le m$. Наряду з такими рівняннями в системі можуть з'явитись рівняння, у яких всі коефіцієнти біля невідомих є нулі, а вільний член не дорівнює нулю (рівняння виду: $0 \cdot X = b,\ b \ne 0$). Таке рівняння не задовольняється жодним *n*-вимірним вектором (не має розв'язку), значить, і система, в якій воно є, розв'язків не має, тобто система буде несумісною. Отже, якщо в системі (2.6) немає рівняння виду $OX = b$, тобто вона сумісна, ми можемо застосувати до неї ще такі цикли перетворень, виключаючи невідомі x_2, x_3, x_4 і т.д.

Вважаємо, що (2.6) не містить рівнянь виду $OX = b$. Виконуємо далі перетворення.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad a''_{33}x_3 + ... + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \quad .... \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + ... + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)}. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Вважаємо, що (2.7) не містить рівнянь виду $OX = b$. Система (2.7) буде рівносильна всім своїм попереднім системам, а отже рівносильна системі (2.5).

Можливі два випадки:

1) $k = n,$ отримується система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + \ldots\ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad a''_{33}x_3 + \ldots\ldots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{kk}^{(k-1)}x_k = b_k^{(k-1)}, \end{cases} \tag{2.8}$$

в останньому рівнянні якої залишиться тільки одне невідоме. Така система називається ***системою трикутного виду***. Вона буде мати єдиний розв'язок і буде визначеною.

1) $k < n$, система називається системою ***трапецієвидною***, кількість рівнянь k буде меншою за кількість невідомих n. В цьому випадку система має множину розв'язків – ***система невизначена***.

Отже,

- Метод Гаусса дозволяє знайти всі розв'язки системи (2.5), якщо вони існують або довести, що система несумісна.
- Якщо в системі з'являться рівняння виду $0 \cdot X = b, b \neq 0$, то це означає, що задана система несумісна.
- Якщо система зводиться до трикутного виду, вона сумісна і визначена.
- Якщо система зводиться до виду трапеції, то така система буде сумісна, але невизначена.
- Метод Гаусса дає можливість дослідити питання про існування ненульових розв'язків систем лінійних однорідних рівнянь.

Розв'язування типових задач

1. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$

Розв'язування.

а) Знаходимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0,$$

тому система має єдиний розв'язок. Знаходимо $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 6 = -14;$

$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21.$

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{-14}{-7} = 2, \qquad x_2 = \frac{-21}{-7} = 3.$$

б) Знаходимо визначник системи, розкладаючи його за елементами 1-го рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-5-1) - (25+1) - 5 + 1 =$$

$= -18 - 26 - 4 = -48 \neq 0.$

Система має єдиний розв'язок. Аналогічно знаходимо $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & -1 \end{vmatrix} = -2(-5-1) - (50-12) -$$

$-10 - 12 = 12 - 38 - 22 = -48;$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} = 3(50-12) + 2(25+1) -$$

$-60 - 10 = 114 + 52 - 70 = 96;$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(12+10) - (-60-10) -$$

$-2(-5+1) = 66 + 70 + 8 = 144.$

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{-48}{-48} = 1; \quad x_2 = \frac{96}{-48} = -2; \quad x_3 = \frac{144}{-48} = -3.$$

2. Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь та знайти їх розв'язок у випадку сумісності:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$

Розв'язування.

а) Обчислимо визначник системи, розклавши його за елементами 1-го стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -1 - 5 - 2(-2 - 4) - 10 + 4 =$$
$$= -6 + 12 - 6 = 0.$$

Визначник системи дорівнює нулю. Система або має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку. Аналогічно знаходимо Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6 - 6 + 12 = 0,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -9 + 18 - 9 = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 - 3 = 0.$$

Оскільки, $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система сумісна і невизначена. Обчислимо мінор 2-го порядку $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Для знаходження всіх розв'язків відкидаємо третє рівняння, а рівняння, що залишилися, записуємо у вигляді

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3, \\ 2x_1 + x_2 = -1 + 5x_3. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+4x_3 & 2 \\ -1+5x_3 & 1 \end{vmatrix} = 1+4x_3 - 2(-1+5x_3) = 3-6x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1+4x_3 \\ 2 & -1+5x_3 \end{vmatrix} = -1+5x_3 - 2(1+4x_3) = -3-3x_3;$$

$$x_1 = \frac{3-6x_3}{-3} = -1+2x_3, \quad x_2 = \frac{-3-3x_3}{-3} = 1+x_3.$$

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, тому що другий і третій рядки пропорційні.

Система або має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -7-14 = -21 \neq 0.$$

Отже, задана система не має жодного розв'язку, тобто вона є несумісною.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 17, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язування.

Запишемо дану систему рівнянь у матричній формі: $A \cdot X = B,$ де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 16+3-90-24+18-10 = -87 \neq 0,$ значить, матриця A має обернену матрицю.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{vmatrix}=3,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 6\\ -5 & 2\end{vmatrix}=-24,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 6\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-21,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 6\\ 3 & -1\end{vmatrix}=20,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-19,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -5\end{vmatrix}=7,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=17.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{87}\begin{pmatrix}3 & -24 & -21\\ -7 & -2 & 20\\ -19 & 7 & 17\end{pmatrix}.$$

Скориставшись рівністю $X=A^{-1}\cdot B$, знаходимо розв’язок системи:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{87}\begin{pmatrix}3 & -24 & -21\\ -7 & -2 & 20\\ -19 & 7 & 17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17\\ -3\\ 10\end{pmatrix}=-\frac{1}{87}\begin{pmatrix}3\cdot17-24\cdot(-3)-21\cdot10\\ -7\cdot17-2\cdot(-3)+20\cdot10\\ -19\cdot17+7\cdot(-3)+17\cdot10\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{87}\begin{pmatrix}-87\\ 87\\ -174\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix},$$

$x_1=1,\quad x_2=-1,\quad x_3=2$ − шуканий розв’язок.

4. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5,\\ x_1+3x_2+4x_3=6,\\ 2x_1-x_2-x_3=1\end{cases}$ методом Гаусса.

Розв’язування.

Складемо розширену матрицю з коефіцієнтів при невідомих системи та вільних членів. Помножимо перший рядок на (–1) і додамо до другого, помножимо перший рядок на (–2) і додамо до третього. У першому стовпці утворились нулі, крім першого рядка. Потім помножимо другий рядок на 5 і додамо до третього.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 4 & 6\\ 2 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -7 & -9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -4\end{pmatrix}.$$

Матриця звелась до трикутного виду, отже, система сумісна і визначена.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad\quad -2x_3 = -4. \end{cases}$$

З третього рівняння визначаємо x_3, з другого x_2, а з першого $-x_1$.

$$x_3 = -4 : (-2) = 2;$$
$$x_2 = 1 - x_3 = 1 - 2 = -1;$$
$$x_1 = 5 - 2x_2 - 3x_3 = 5 + 2 - 6 = 1.$$

Отже, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2.$

5. Розв’язати систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + 6y + 5z = 0, \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

Розв’язування.

Складаємо розширену матрицю. Помножимо перший рядок на (–3) і додамо до другого, помножимо перший рядок на (–1) і додамо до третього. Потім помножимо другий рядок на (–1) і додамо до третього:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримали рядок, що складається з усіх нулів, маємо право виключити його з системи. Таким чином, матриця звелась до виду трапеції, отже, система сумісна, але невизначена:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \quad 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

Поклавши змінну z вільною, з другого рівняння визначаємо $y = -\frac{2}{3}z$, а з першого маємо: $x = -y - z = \frac{2}{3}z - z = -\frac{1}{3}z$. Записуємо загальний розв’язок системи: $x = -\frac{1}{3}z,\ y = -\frac{2}{3}z,\ z = z.$

6. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x - y + 2z = 4, \\ 3x - y - z = 2, \\ 5x - 3y + 3z = 6 \end{cases}$ методом Гаусса.

Розв'язування.

Складаємо розширену матрицю. Помножимо перший рядок на (–3) і додамо до другого, помножимо перший рядок на (–5) і додамо до третього. Потім помножимо другий рядок на (–1) і додамо до третього:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & 2 & -7 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ми отримали рядок, всі коефіцієнти якого дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю. Отже, система несумісна.

Завдання для самоконтролю

1. Дати означення системи m лінійних рівнянь із n змінними. Що таке сумісні, несумісні, визначені, невизначені системи?

2. Записати формули Крамера для системи другого, третього порядку та їх наслідки.

3. Записати матричний спосіб розв'язування для системи третього порядку.

4. Означити ранг матриці, пояснити його обчислення на прикладах (за означенням та за допомогою елементарних перетворень).

5. Сформулювати теорему Кронекера-Капеллі та пояснити її використання для дослідження систем на сумісність.

6. Пояснити суть методу Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь.

7. Дослідити однорідну систему третього порядку (із використанням правил Крамера та методом Гаусса).

8. Розв'язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

9. Визначити, при яких значеннях [2] a і b система $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b, \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$

а) має один розв'язок;

б) має безліч розв'язків;

в) не має жодного розв'язку.

10. Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 = -2, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

11. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і описати всі її розв'язки:

а) $\begin{cases} x_2 - x_1 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

12. Дослідити систему лінійних однорідних рівнянь та описати всі її розв'язки:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

Відповіді. **8.** а) $x_1 = -1;\ x_2 = -2;\ x_3 = -4;$ б) $x_1 = -2;\ x_2 = 3;\ x_3 = -4.$ **9.** а) $a \neq -3;$

б) $a=-3;\ b=\dfrac{1}{3};$ в) $a=-3;\ b\neq\dfrac{1}{3}.$ **10.** а) $x_1=4;\ x_2=2;\ x_3=1;$ б) $x_1=1;\ x_2=1;\ x_3=1.$

11. а) несумісна; б) $x_3=1-3x_1-4x_2;\ x_4=1;$ в) $x_1=3;\ x_2=2;\ x_3=1;$ г) $x_1=-1;\ x_2=0;\ x_3=1.$

12. а) $x_1=x_2=x_3=0;$ б) $x_1=t;\ x_2=-13t;\ x_3=-5t;\ \mathrm{t}\in\mathbb{R};$ в) $x_1=13t;\ x_2=2t;\ x_3=7t;\ \mathrm{t}\in\mathbb{R}.$

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

3. Вектори в просторі

3.1. Основні поняття

Величина, яка повністю характеризується своїм числовим значенням в обраній системі одиниць, називається ***скалярною*** або ***скаляром.*** Такими, наприклад, є маса тіла, об'єм тіла, температура середовища й т.п. Скаляр визначається числом, додатним чи від'ємним, або рівним нулю. Величина, яка крім числового значення характеризується напрямком, називається ***векторною*** або ***вектором.*** До таких величин відноситься сила, переміщення, швидкість і т.д.

Під ***модулем (довжиною)*** вектора $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$ розуміють числове значення його, без зазначення напрямку ($|\overrightarrow{AB}|$ позначає модуль вектора $\overrightarrow{AB}$).

Вектор $\vec{0}$, модуль якого дорівнює нулю, називається ***нульовим*** або ***нуль-вектором*** (напрямок нульового вектора довільний).

Означення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***колінеарними,*** якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Нульовий вектор напрямлений однаково з будь-яким вектором; довжина його дорівнює нулю, тобто $|\vec{0}| = 0$.

Означення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені та їх довжини рівні.

3.2. Лінійні операції з векторами

Додавання векторів

Щоб побудувати суму даних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки та побудувати на них паралелограм. Сумою векторів буде діагональ, що виходить з початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 3.1).

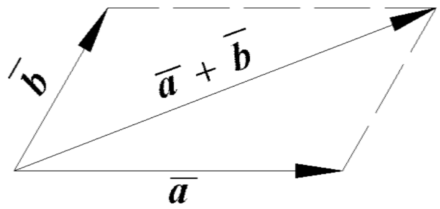


Рис. 3.1. Правило паралелограма.

Цей спосіб побудови називається ***правилом паралелограма.***

Суму двох векторів можна побудувати також за ***правилом трикутника.***

Побудова суми векторів − відкласти вектор $\vec{b}$ від кінця вектора $\vec{a}$.

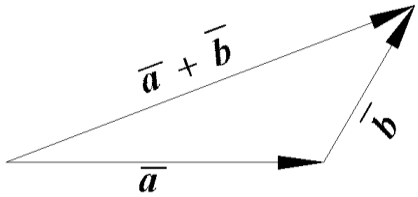


Рис. 3.2. Правило трикутника.

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ буде вектор, що з’єднує початок $\vec{a}$ з кінцем $\vec{b}$ (рис. 3.2).

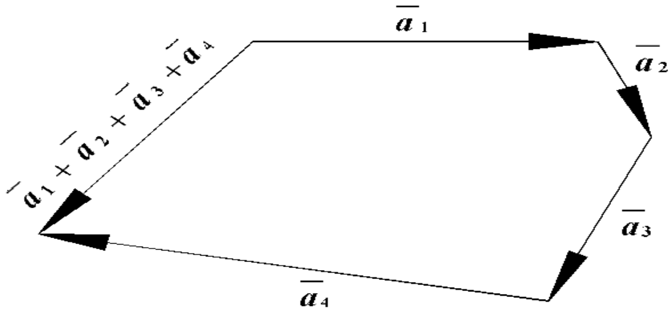


Рис. 3.3. Правило багатокутника.

Щоб побудувати суму *n* даних векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$, треба від довільної точки відкласти $\vec{a}_1$, потім від його кінця відкласти $\vec{a}_2$ і т.д., нарешті від кінця $\vec{a}_{n-1}$ відкласти $\vec{a}_n$. Сумою векторів буде вектор, напрямлений від початку $\vec{a}_1$ до кінця $\vec{a}_n$ (рис. 3.3).

Віднімання векторів

Щоб побудувати різницю векторів $\vec{a}-\vec{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки, з'єднати їх кінці та вибрати на цьому відрізку напрямок від кінця $\vec{b}$ до кінця $\vec{a}$ (рис. 3.4).

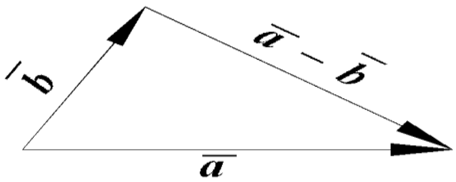


Рис. 3.4. Різниця векторів.

Множення вектора на число

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ ***на число k*** називається вектор $k\vec{a}$, модуль якого дорівнює: $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$. Вектор $k\vec{a}$ має напрям вектора $\vec{a}$, якщо $k>0$, і протилежний напрям, якщо $k<0$ (для $k=0$, $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$).

Ці три операції називаються лінійними операціями з векторами.

Проекція вектора на вісь

Проекцією вектора на вісь називається довжина направленого відрізка, початок якого є проекція початку вектора і кінець – проекція його кінця, яка береться із знаком плюс, якщо напрями відрізка і осі збігаються, і зі знаком мінус, якщо їх напрями протилежні (рис. 3.5):

$$np_{\bar{l}}\,\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|,\quad np_{\bar{l}}\,\overrightarrow{CD}=-\left|\overrightarrow{C_1D_1}\right|.$$

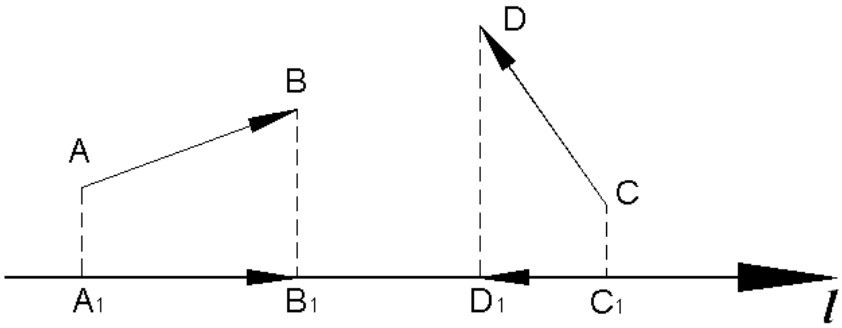


Рис.3.5. Проекція вектора на вісь.

Властивості проекції

а) $np_{\bar{l}}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$;

б) $np_{\bar{l}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_{\bar{l}}\,\vec{a} + np_{\bar{l}}\,\vec{b}$;

в) $np_{\bar{l}}\left(k \cdot \vec{a}\right) = k \cdot np_{\bar{l}}\,\vec{a}$.

3.3. Вектори в прямокутній системі координат

Нехай у просторі задано три попарно перпендикулярні осі Ox, Oy, Oz. Координатами вектора $\vec{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$ називаються проекції вектора на відповідні осі: $a_x = np_{ox}\,\vec{a}$, $a_y = np_{oy}\,\vec{a}$, $a_z = np_{oz}\,\vec{a}$.

Якщо $\vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k}$ − одиничні вектори, що лежать на осях координат і співнапрямлені з ними, то $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Якщо точки мають координати: $A\left(x_1;\, y_1;\, z_1\right)$, $B\left(x_2;\, y_2;\, z_2\right)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\right)$.

Правила дій над векторами, заданими своїми координатами

Якщо $\vec{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$, $\vec{b} = \left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x + b_x;\, a_y + b_y;\, a_z + b_z\right);$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(a_x - b_x;\, a_y - b_y;\, a_z - b_z\right);\quad k \cdot \vec{a} = \left(k \cdot a_x;\, k \cdot a_y;\, k \cdot a_z\right).$$

Довжина вектора. Напрямні косинуси вектора

Позначимо α, β, γ кути між додатними напрямами осей координат Ox, Oy, Oz та вектором $\vec{a}$. Ці кути називаються ***напрямними кутам, їх косинуси − напрямними косинусами.*** Проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі подаються так (рис. 3.6):

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha,\; a_y = |\vec{a}|\cos\beta,\; a_z = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

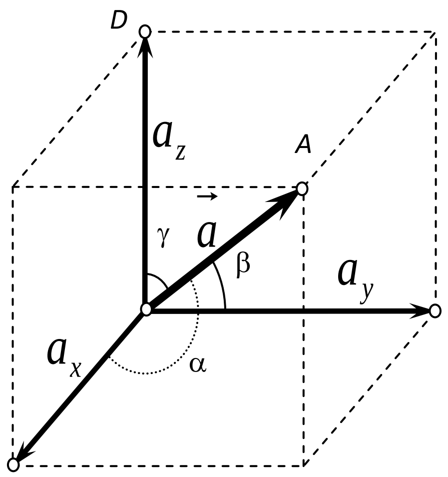


Рис. 3.6. Напрямні косинуси вектора.

Тоді

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

де $\alpha, \beta, \gamma -$ кути між $\vec{a}$ та осями Ox, Oy, Oz.

Для напрямних косинусів справедливе співвідношення

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

яке називають ***основною тригонометричною тотожністю в просторі***.

Поділ відрізка в даному відношенні

Нехай точки *A*, *B* мають координати $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

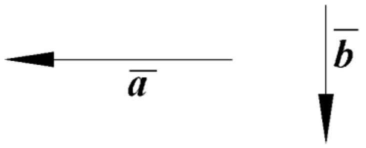
Якщо відрізок *AB* поділимо точкою *M* у відношенні $AM : MB = \lambda$, то координати точки *M* знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

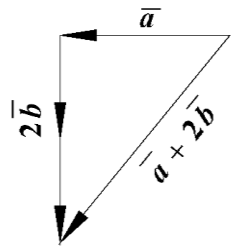
Якщо $\lambda = 1$, то отримуємо формули для знаходження координат середини відрізка: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Розв'язування типових задач

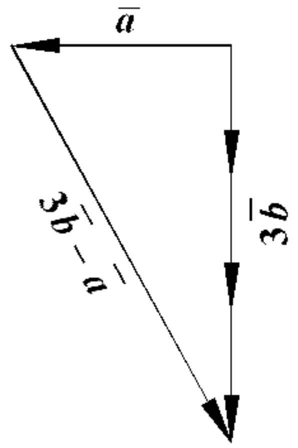
1. Дано ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудувати вектори $\vec{a} + 2\vec{b}$, $3\vec{b} - \vec{a}$.



Розв'язування. Знайдемо суму за правилом трикутника $\vec{a}+2\vec{b}$



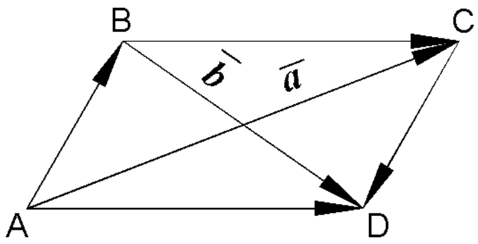
і різницю $3\vec{b}-\vec{a}$.



2. Вектори $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ − діагоналі паралелограма *ABCD*. Запишіть вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ через $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язування.

За означенням суми і різниці векторів маємо: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}=\vec{a}$. Додавши ці рівності, дістанемо $\overrightarrow{BC}=\dfrac{\vec{a}+\bar{b}}{2}$. Далі знайдемо



$$\overrightarrow{CD}=\vec{b}-\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2};$$

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\ ;\ \ \overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}=-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

3. Дано: $пр_{\bar{l}}\ \vec{a} = 3$; $пр_{\bar{l}}\bar{b} = -1$. Обчислити: 1) $пр_{\bar{l}}\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right)$; 2) $пр_{\bar{l}}\ \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)$.

Розв'язування. Використавши властивості проекцій, дістанемо:

1) $$пр_{\bar{l}}\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right) = 3пр_{\bar{l}}\,\vec{a} + 2пр_{\bar{l}}\,\vec{b} = 3\cdot 3 + 2(-1) = 7.$$

2) $$пр_{\bar{l}}\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = пр_{\bar{l}}\,\vec{a} - 2пр_{\bar{l}}\,\vec{b} = 3 - 2(-1) = 5.$$

4. Знайти проекції вектора $\vec{a}$ на вісь l, яка утворює з вектором кут: 1) 45^0, 2) 120^0, 3) 150^0, якщо довжина вектора дорівнює 4.

Розв'язування.

1) $пр_{\bar{l}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi = 4\cdot\cos 45^0 = 4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$;

2) $пр_{\bar{l}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi = 4\cdot\cos 120^0 = 4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$;

3) $пр_{\bar{l}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi = 4\cdot\cos 150^0 = 4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$.

5. Знайти периметр трикутника [3], вершинами якого є точки $A(8;0;6)$, $B(8;-4;6)$, $C(6;-2;5)$.

Розв'язування. Знайдемо координати векторів, що створюють трикутник, та їх довжини:

$$\overrightarrow{AB} = (8-8;-4-0;\,6-6),\ \overrightarrow{AB} = (0;-4;0);$$

$$\overrightarrow{AC} = (6-8;-2-0;5-6),\ \overrightarrow{AC} = (-2;\,-2;-1);$$

$$\overrightarrow{BC} = (6-8;-2-(-4);\,5-6),\ \overrightarrow{BC} = (-2;\,2;-1);$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4;$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3;$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3.$$

Тоді периметр трикутника $P = 4 + 3 + 3 = 10$.

6. Обчислити довжину вектора $3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Розв'язування. Знайдемо координати векторів:

$$3\vec{a}=\left(3\cdot 2;\ 3\cdot 0;\ 3\cdot 0\right),\ 3\vec{a}=\left(6;\ 0;\ 0\right);$$

$$2\vec{b}=\left(2\cdot 1;\ 2\cdot 1;\ 2\cdot(-1)\right),\ 2\vec{b}=\left(2;\ 2;\ -2\right);$$

$$3\vec{a}+2\vec{b}=\left(6+2;\ 0+2;\ 0-2\right),\ 3\vec{a}+2\vec{b}=\left(8;\ 2;\ -2\right).$$

Тоді довжина шуканого вектора дорівнює:

$$\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{8^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}\,.$$

7. Відрізок AB, де $A(7;2;-3)$, $B(-5;0;4)$, поділений точкою M у відношенні $\lambda=AM:MB=1:5$. Знайти координати точки M.

Розв'язування.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{7+\frac{1}{5}(-5)}{1+\frac{1}{5}}=\frac{6}{\left(\frac{6}{5}\right)}=5;\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2+\frac{1}{5}\cdot 0}{1+\frac{1}{5}}=\frac{2}{\left(\frac{6}{5}\right)}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3};$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}=\frac{-3+\frac{1}{5}\cdot 4}{1+\frac{1}{5}}=\frac{\left(-\frac{11}{5}\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)}=-\frac{11}{6}.$$

Отже, $M\left(5;\frac{5}{3};-\frac{11}{6}\right)$.

8. Відрізок з кінцями $A(-2;4;0)$ і $B(6;12;-4)$, ділиться в точці M навпіл. Знайдіть довжину відрізка MK, де $K(0;10;6)$.

Розв'язування. Знайдемо координати точки M за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2+6}{2}=2;\ y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4+12}{2}=8;\ z=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{0-4}{2}=-2;$$

$$M(2;8;-2).$$

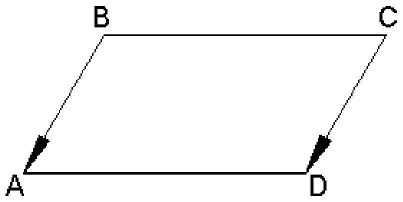
Тоді координати вектора $\overrightarrow{MK}=\left(0-2;\ 10-8;\ 6-(-2)\right)$, $\overrightarrow{MK}=(-2;2;8)$.

Довжина вектора $\left|\overrightarrow{MK}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+8^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

9. Точки $A(-3;1;2)$, $B(1;3;2)$, $C(-4;1;0)$ є вершинами паралелограма, причому A і C – протилежні вершини. Знайдіть четверту вершину D.

Розв'язування.

Позначимо координати точки $D(x;y;z)$, тоді $\overrightarrow{CD}=(x+4;y-1;z+0)$, $\overrightarrow{BA}=(-4;-2;0)$. Оскільки $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|$, їх координати рівні: $x+4=-4$; $y-1=-2$; $z=0$; тобто $x=-8$; $y=-1$; $z=0$.



Четверта вершина паралелограма – точка $D(-8;-1;0)$.

10. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a}$, а також кути, що утворює вектор з осями координат, якщо $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$.

Розв'язування. Запишемо координати вектора $\vec{a}=(1;0;-1)$ та його довжину $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{0}{\sqrt{2}}=0;\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді $\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$; $\beta=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$; $\gamma=\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$.

Отже, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \cos\beta=0, \cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \alpha=\dfrac{\pi}{4}, \beta=\dfrac{\pi}{2}, \gamma=\dfrac{3\pi}{4}.$

Завдання для самоконтролю

1. Означити скалярні та векторні величини. Які вектори називають колінеарними, компланарними, рівними?

2. Визначити лінійні операції з векторами геометрично та для векторів, заданих своїми координатами. Що таке орт вектора? Як його знайти?

3. Дати означення проекції вектора на вісь та сформулювати основні теореми про проекції

4. Що називають напрямними косинусами вектора? Довести основну тригонометричну тотожність в просторі (на площині).

5. Довести формули поділу відрізка навпіл.

6. У трикутнику ABC проведено медіану AM. Доведіть, що

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

7. Дано вектори $\vec{a} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{k} - 2\vec{j}$. Знайти довжини векторів 1) $\vec{a} + 2\vec{b}$, 2) $3\vec{c} - \vec{a}$.

8. Точки $A(1;-2;-1)$, $B(3;4;2), C(3;1;-2)$ є вершинами паралелограма, причому A і C – протилежні вершини. Знайдіть четверту вершину D, а також периметр паралелограму.

9. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, кути між віссю l дорівнюють 60^0 і 120^0. Обчислити $np_l\left(2\vec{b} - \vec{a}\right)$.

10. Відрізок AB задано координатами своїх кінців $A(3;-2;-5)$ і $B(7;6;-1)$. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{CD}$, де C – середина відрізка AB, D – точка, яка ділить AB у відношенні $\lambda = \dfrac{1}{3}$.

Відповіді. **7.** 1) $\sqrt{65}$; 2) $\sqrt{22}$. **8.** $D(1;-5;-5)$, $p = 24$. **9.** $np_{\bar{l}}\left(2\vec{b} - \vec{a}\right) = -5$. **10.** $\sqrt{6}$.

4. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

4.1. Скалярний добуток векторів та його властивості

Означення. ***Скалярним добутком векторів*** називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \tag{4.1}$$

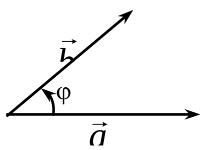


Рис. 4.1. Вектори.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ гострий, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, якщо тупий, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$; якщо прямий, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Коли один із векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ є нульовим, то його можна вважати ортогональним до будь-якого іншого вектора.

Властивості скалярного добутку

$$1)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$$

$$2)\ \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b});$$

$$3)\ \vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2;$$

$$4)\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c};$$

$$5)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\,\vec{b}=|\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\,\vec{a}.$$

Рівність (4) є наслідком формули (5) і властивості проекцій суми векторів:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|(np_{\vec{a}}\vec{b}+np_{\vec{a}}\vec{c})=$$
$$=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Отже, у разі скалярного множення суми векторів на вектор можна розкривати дужки. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ подано через їх проекції на координатні осі

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

Записавши таблицю скалярного множення для одиничних векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – ортів декартової системи координат:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0;\ \vec{j}\cdot\vec{i}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0;\ \vec{k}\cdot\vec{i}=0,\ \vec{k}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{k}\cdot\vec{k}=1,$$

скалярний добуток обчислюють за формулою

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (4.2)$$

Скалярний квадрат вектора дорівнює:

$$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(0)=|\vec{a}|^2,$$

а модуль вектора визначається за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}. \qquad (4.3)$$

Геометричний зміст скалярного добутку − проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\bar{b}$:

$$np_{\bar{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}. \tag{4.4}$$

Кут між векторами обчислюють за формулою:

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{4.5}$$

Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має вигляд:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{4.6}$$

4.2. Векторний добуток векторів

Означення. ***Векторним добутком двох векторів*** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, який задовольняє умові:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$;

2) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;

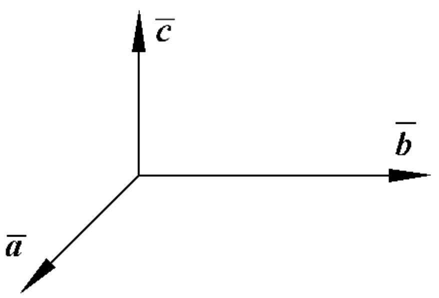


Рис. 4.2. Права трійка векторів.

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів (рис. 4.2), тобто третій вектор має такий напрям, що при спостереженні з його кінця найближчий поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ йде проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначається символом $\vec{a}\times\vec{b}$. Із означення випливає, що $\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$.

Основні властивості векторного добутку

$$1)\ \vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right);$$

$$2)\ \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi;$$

$$3)\ \lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\,\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b});$$

$$4)\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$$

Таблиця векторного множення для одиничних векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ − ортів декартової системи координат: $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0},\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0},$ $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$.

Знайдемо вираз векторного добутку векторів через координати.

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$

Виконавши відповідні перетворення, дістанемо:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$

$$=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}+a_yb_z\vec{i}-a_yb_x\vec{k}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.$$

Отже, координати вектора векторного добутку векторів, які задані координатами, обчислюються за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

Умова колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має вигляд:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\quad \left(\text{або } \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\right). \tag{4.8}$$

Геометричний зміст векторного добутку − модуль вектора векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \tag{4.9}$$

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S_{тр} = \frac{1}{2} S_{пар} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \tag{4.10}$$

4.3. Мішаний добуток

Означення. ***Мішаним добутком трьох векторів*** називається векторно-скалярний добуток $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$.

Частіше мішаний добуток позначається $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, то мішаний добуток знаходять за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.11}$$

Геометричний зміст мішаного добутку – обчислення об'єму паралелепіпеда, який побудований на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, як на сторонах (рис. 4.3, випадок правої трійки векторів):

$$V_{пар} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \tag{4.12}$$

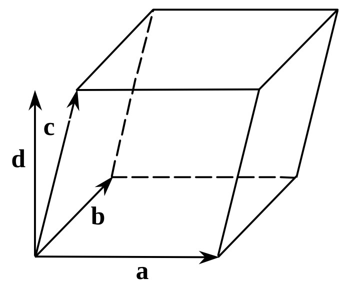


Рис. 4.3. Паралелепіпед.

Для об'єму піраміди маємо наступну формулу:

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \tag{4.13}$$

Умова компланарності трьох векторів має вигляд: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. В координатній формі маємо:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \tag{4.14}$$

Розв'язування типових задач

1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a} = 4\vec{k} - \vec{i}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{i} - \vec{k}$.

Розв'язування. Маємо координати векторів: $\vec{a}(-1; \quad 0; \quad 4)$, $\vec{b}(1; \quad 3; \quad -1)$. Тоді скалярний добуток з формули (4.2) дорівнює

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 - 4 = -5.$$

2. Знайти кут між діагоналями паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}$.

Розв'язування. Як відомо, діагоналі паралелограма є сумою та різницею вказаних векторів, тобто $\vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ та $\vec{d} = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$.Знайдемо ці вектори:

$$\vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \left(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right) + \left(3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}\right) = 5\vec{j} - 5\vec{k}\,; \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = (0; \quad 5; \quad -5);$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \left(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right) - \left(3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}\right) = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\,; \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (2; \quad -1; \quad 3).$$

Тоді косинус кута між діагоналями знаходиться за формулою (4.5):

$$\cos\left(\vec{c}, \vec{d}\right) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + (-5) \cdot 3}{\sqrt{5^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{-5 - 15}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-20}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 7}} =$$

$$= -\frac{20}{10\sqrt{7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

3. Задано вектори $\vec{a} = 12\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$. Обчислити проекцію вектора $\vec{b} + \vec{c}$ на вектор $\vec{a}$.

Розв'язування.

Знайдемо координати векторів $\vec{b} + \vec{c} = (1 + 1; \quad 2 - 3; \quad 4 - 2) = (2; -1; 2)$ та $\vec{a} = (12; \quad -3; \quad -3)$.

Обчислимо проекцію $\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ на вектор $\vec{a}$ за формулою (4.4):

$$np_{\vec{a}}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{\left(\vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2 \cdot 12 + (-1) \cdot (-3) + 2(-3)}{\sqrt{12^2 + (-3)^2 + (-3)^2}} = \frac{24 + 3 - 6}{\sqrt{144 + 9 + 9}} = \frac{21}{\sqrt{162}} = \frac{21}{9\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

4. Дано трикутник своїми вершинами: $A(2;4;5)$, $B(-3;2;2)$, $C(-1;0;3)$. Покажіть, що $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$.

Розв'язування. Знайдемо координати векторів:

$$\overrightarrow{CA} = \left(2-(-1);\quad 4-0;\quad 5-3\right);\ \overrightarrow{CA} = (3;\quad 4;\quad 2);$$

$$\overrightarrow{CB} = \left(-3-(-1);\quad 2-0;\quad 2-3\right);\ \overrightarrow{CB} = (-2;\quad 2;\quad -1).$$

Умова перпендикулярності двох векторів має вигляд: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. Перевіримо виконання цієї умови:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3\cdot(-2) + 4\cdot 2 + 2\cdot(-1) = -6 + 8 - 2 = 0.$$

Доведено, що вектори перпендикулярні.

5. Знайти площу паралелограма [9], який побудований на векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язування. З формули (4.9) модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, який побудований на цих векторах. Знайдемо векторний добуток:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\cdot(2-1) - \vec{j}\cdot(2+2) + \vec{k}\cdot(-1-2) = \vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Площа паралелограма дорівнює:

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}\,(\textit{кв.}\quad \textit{од.}).$$

6. Знайти площу трикутника за координатами його вершин: $A(1;-2;8)$, $B(0;0;4)$, $C(6;2;0)$.

Розв'язування. Розглянемо два вектори, на яких побудовано трикутник, наприклад, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-1;\quad 2;\quad -4),\ \overrightarrow{AC} = (5;\quad 4;\quad -8).$$

Векторний добуток (із формули (4.7)) дорівнює:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & -4\\ 5 & 4 & -8\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & -4\\ 4 & -8\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 5 & -8\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot(-16+16)-\vec{j}\cdot(8+20)+\vec{k}\cdot(-4-10)=-28\vec{j}-14\vec{k}.$$

З (4.10) площа трикутника дорівнює:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-28)^2+(-14)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 14^2}=7\sqrt{5}\,(\textit{кв.}\quad \textit{од.}).$$

7. Розкрити дужки та спростити вираз

$$\left(2\vec{k}\times\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}-\vec{k}\right)+\left(\vec{i}\times 2\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{j}-3\vec{k}\right).$$

Розв'язування.

$$\left(2\vec{k}\times\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}-\vec{k}\right)+\left(\vec{i}\times 2\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{j}-3\vec{k}\right)=\left(-2\vec{i}\right)\cdot\left(3\vec{i}-\vec{k}\right)+2\vec{k}\cdot\left(\vec{j}-3\vec{k}\right)=$$

$$=-6\vec{i}^{\,2}+2\vec{i}\cdot\vec{k}+2\vec{k}\cdot\vec{j}-6\vec{k}^{\,2}=-6-6=-12.$$

8. За яких значень α і β вектори $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+4\vec{j}+\beta\vec{k}$ колінеарні?

Розв'язування. Умова колінеарності двох векторів має вигляд (4.8) :

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z};\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=\frac{-3}{4}=\frac{1}{\beta}.$$

Звідки $\alpha=\dfrac{2\cdot(-3)}{4}=-\dfrac{3}{2}$; $\beta=\dfrac{4\cdot 1}{-3}=-\dfrac{4}{3}$.

9. Обчислити об'єм паралелепіпеда та піраміди, які побудовані на векторах $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{k}-3\vec{j}$, $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{k}$.

Розв'язування. З формули (4.12) об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю мішаного добутку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}3 & -4 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=3\cdot(-15-2)=-51.$$

Тоді об'єми паралелепіпеда та піраміди відповідно дорівнюють:

$$V_{пар}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=|-51|=51(\textit{куб.}\quad \textit{од.});$$

$$V_{піраміди}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=\frac{1}{6}V_{пар}=\frac{51}{6}=\frac{17}{2}=8{,}5\left(куб.\quad од.\right).$$

10. Довести, що точки $A(2;\ -1;\ -2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$, $D(5;\ 0;\ -6)$ лежать в одній площині.

Розв'язування. Щоб довести, що ці чотири точки лежать в одній площині [4], покажемо, що в одній площині лежать вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, тобто ці три вектори компланарні.

Умова компланарності трьох векторів має вигляд (4.14):

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0.$$

Знайдемо координати векторів:

$\overrightarrow{AB}=(-1;\quad 3;\quad 3)$; $\overrightarrow{AC}=(0;\quad 4;\quad 2)$; $\overrightarrow{AD}=(3;\quad 1;\quad -4)$.

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1&3&3\\0&4&2\\3&1&-4\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}4&2\\1&-4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3&3\\4&2\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot(-16-2)+3\cdot(6-12)=18-18=0.$$

Таким чином, точки *A*, *B*, *C*, *D* лежать в одній площині.

Завдання для самоконтролю

1. Означити скалярний добуток двох векторів, сформулювати його основні властивості.

2. Отримати формулу обчислення скалярного добутку через координати векторів та записати її наслідки (модуль вектора, кут між векторами, проекція вектора).

3. Сформулювати геометричний та механічний зміст скалярного добутку.

4. Означити векторний добуток двох векторів.

5. Записати основні властивості векторного добутку двох векторів, пояснити його геометричний та механічний зміст.

6. Отримати формулу обчислення векторного добутку через координати векторів, умову паралельності векторів.

7. Дати означення мішаного добуток трьох векторів, його геометричне застосування.

8. Отримати формулу обчислення мішаного добутку через координати векторів та пояснити її наслідки.

9. Сформулювати умову компланарності трьох векторів.

10. Знайти кут між векторами $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ і $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, а також площу паралелограма, побудованого на них.

11. Обчислити проекцію вектора $\vec{a} - \vec{c}$ на вектор $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

12. Дано вектори: $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$.

Довести: 1) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні; 2) вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ колінеарні; 3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні.

13. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

14. Дано координати вершин піраміди: $O(0;0;0)$, $A(1;2;-1)$, $B(-2;3;4)$, $C(1;0;-2)$. Обчислити:

1) кут ABC; 2) площу грані ABC; 3) об'єм піраміди $OABC$.

Відповіді. **10.** 135º; 3 од^2. **11.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **13.** 1 од^3. **14.** 1) $\cos\varphi = \frac{14}{\sqrt{210}} \approx 0{,}966$; $\varphi = 14^\circ$; 2) $\frac{3\sqrt{14}}{2}$ од^2; 3) $0{,}5$ од^3.

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

5. Аналітична геометрія на площині

5.1. Пряма на площині

5.1.1. Загальне рівняння прямої

Теорема. *Кожну пряму на площині можна визначити лінійним рівнянням відносно декартової системи координат, і, навпаки, кожне лінійне рівняння визначає пряму в цій координатній системі.*

Доведення.

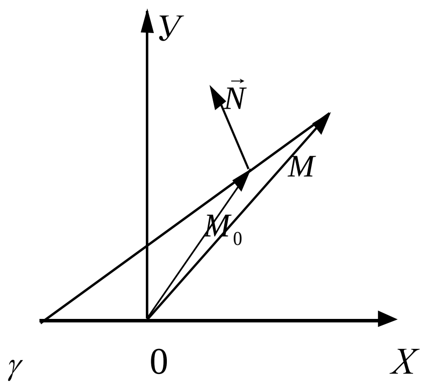


Рис. 5.1. Пряма на площині.

Нехай на площині задана пряма γ. Складемо її рівняння відносно системи координат. Нехай задано точку $M_0(x_0; y_0) \in \gamma$, вектор $\vec{N} = (A; B) \perp \gamma$. Нехай $M(x; y)$ – довільна точка прямої γ. Тоді $M \in \gamma \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \overline{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$, або в координатах

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (5.1)$$

Це рівняння прямої, яке є лінійним.

Першу частину теореми доведено.

Нехай задане лінійне рівняння

$$Ax + By + C = 0. \qquad (5.2)$$

Підставляючи $M_0(x_0; y_0)$ в рівняння (5.2) і віднімаючи дві рівності, маємо рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Позначимо через $M(x;y)$ довільну точку цієї лінії; вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$. Розглянемо $\vec{N} = (A;B)$. Ліва частина останнього рівняння – це скалярний добуток векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$, який дорівнює нулю.

Отже, для будь-якої точки *M*, яка належить лінії, $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N},$ тому лінія є прямою.

Теорему доведено.

Отже, $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 -$ рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0),$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = (A;B)$; (5.2) – загальне рівняння прямої; вектор $\vec{N} = (A;B) -$ нормальний вектор прямої.

Неповні рівняння прямої **(**деякі його коефіцієнти дорівнюють нулю)

1) $C = 0,$ початок координат O (0;0) належить прямій;

2) $B = 0$, то пряма $Ax + C = 0 \,||\, Oy, \quad \vec{N} = (A;0) \perp Ox;$

3) $A = 0$, то $By + C = 0 \,||\, Ox, \quad \vec{N} = (0;B) \perp Oy;$

4) $B = C = 0$, то пряма $Ax = 0$ співпадає з віссю Oy;

5) $A = C = 0$, то пряма $By = 0$ є віссю Ox.

5.1.2. Різновиди рівняння прямої

Пряма у відрізках

Якщо $C \neq 0$, то з рівняння (5.2) маємо $\dfrac{x}{-\dfrac{C}{A}} + \dfrac{y}{-\dfrac{C}{B}} = 1$. Якщо позначити $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{B}$, тоді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{5.3}$$

(5.3) − рівняння прямої у відрізках, з якого легко визначити, що точки $A(a;0), B(0;b) \in$ прямій γ, модулі чисел a та b є довжинами відрізків, які відтинає пряма на координатних осях $Ox,\ Oy$ відповідно.

Векторне рівняння прямої

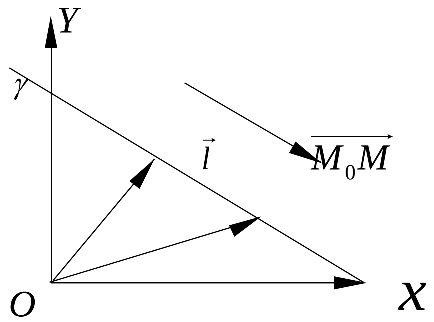


Рис.5.2. Пряма з напрямним вектором.

Задана точка $M_0(x_0;y_0)$ і напрямний вектор $\vec{l}\,(m;n)$ (вектор, паралельний до прямої, називають її напрямним вектором). Розглядається задача: записати рівняння прямої, яка проходить паралельно напрямному вектору через вказану точку M_0. Очевидно, що точка M_0 і вектор $\vec{l}$ цілком визначають пряму. Нехай $\vec{r}_0$ – радіус-вектор точки M_0, $\vec{r}$ – точки M. Точка $M(x;y)$ належить шуканій прямій $\gamma \Leftrightarrow$ вектори $\overrightarrow{M_0M}, \vec{l}$ – колінеарні, тобто $\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{l}$, або

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{l}, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Канонічне рівняння прямої

Якщо записати умову колінеарності векторів $\vec{r}-\vec{r}_0$ і $\vec{l}$, то будемо мати рівняння

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}, \tag{5.5}$$

яке називають ***канонічним рівнянням*** прямої.

Параметричні рівняння прямої

Якщо в рівнянні (5.4) перейти до координат, будемо мати

$$\begin{cases} x=x_0+tm, \\ y=y_0+tn, \end{cases} \tag{5.6}$$

t – параметр, $t\in\mathbb{R}$, $M_0(x_0;y_0)\in\gamma$, $\vec{l}=(m;n)\parallel\gamma$ – напрямний вектор (вектор, паралельний до прямої).

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)\in\gamma$. Очевидно, точка $M(x;y)\in\gamma$, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ колінеарні. Якщо записати умову колінеарності, то маємо рівняння

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{5.7}$$

де напрямний вектор $\left(x_2-x_1;y_2-y_1\right)$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма γ задана точкою $M_0(x_0;y_0)$ та кутом φ між прямою і додатним напрямом осі Ox. Позначимо $\mathrm{tg}\varphi=k$.

Тангенс кута φ нахилу прямої γ до осі Ox називається ***кутовим коефіцієнтом*** прямої. Якщо напрямний вектор $\vec{l}=\left(m;n\right)$, то $k=\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{n}{m}$.

Таким чином, із (5.5) маємо

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

або, розкривши дужки, $y=kx-kx_0+y_0$, $y=kx+b$.

Нормальне рівняння прямої

Рівняння вигляду

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0 \tag{5.8}$$

де $\vec{n}=\left\{\cos\alpha;\cos\beta\right\}$ – орт нормалі, p – відстань від точки $O(0;0)$ до прямої, називають ***нормальним рівнянням*** прямої.

Оскільки $\cos\beta=\sin\alpha$, то рівняння (5.8) має вигляд

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0.$$

Щоб звести загальне рівняння прямої (5.2) до вигляду (5.8), треба помножити всі його частини на число − нормуючий множник $\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, знак якого вибирають протилежним знакові числа C.

Означення. ***Відхиленням*** точки M від прямої γ називається число $\delta = d$, якщо точка M і початок координат лежать по різні боки від прямої, і число $\delta = -d$, якщо вони лежать по одну сторону від неї, де $d -$ відстань від точки до прямої.

Якщо пряма γ задана нормальним рівнянням, тоді відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої обчислюють за формулою

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \right| = \left| \delta \right|. \tag{5.9}$$

Відхилення точки $M_0(x_0; y_0)$ від прямої дорівнює результату підставлення її координат в нормальне рівняння прямої (5.8).

5.1.3. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Кут між прямими

Дві прямі на площині можуть перетинатися (зокрема, бути перпендикулярними), бути паралельними і співпадати.

1) Нехай прямі задані своїми загальними рівняннями:

$\gamma_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ \vec{N}_1 = \left(A_1; B_1\right),$

$\gamma_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0,\ \vec{N}_2 = \left(A_2; B_2\right).$

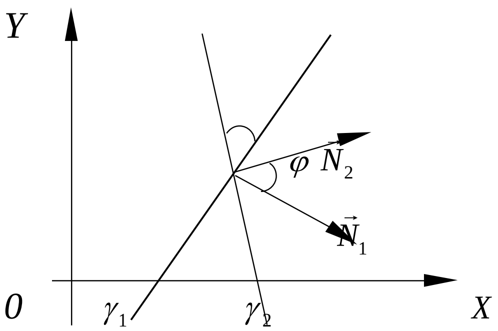


Рис.5.3. Кут між прямими в загальних рівняннях.

Кут між прямими є кутом між нормальними векторами прямих, тобто

$$\vec{N}_1, \vec{N}_2 = \angle\varphi,\ \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = \left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right| \cos\varphi;\ \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}.$$

Отже,

$$\cos\varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \tag{5.10}$$

знаки „+” або „–” у формулі (5.10) дають можливість визначити кожні з суміжних кутів, утворених перетином прямих.

Прямі γ_1 та γ_2

• ***перпендикулярні*** $\Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 : A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

• ***паралельні*** $\Leftrightarrow \vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ колінеарні: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

2) Для прямих, заданих канонічними рівняннями, а саме, для прямої γ_1: $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1}$, $\vec{l}_1 = (m_1; n_1)$, $\vec{l}_1 \parallel \gamma_1$– напрямний вектор та прямої γ_2: $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2}$, $\vec{l}_2 = (m_1; n_1)$, $\vec{l}_2 \parallel \gamma_2$, аналогічно п. 1) кут між прямими є кутом між відповідними напрямними векторами прямих:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|} = \pm \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

3) Для прямих, записаних із кутовими коефіцієнтами, тобто для γ_1: $y = k_1x + b_1$; $\varphi_1 = \gamma_1, Ox$; $k_1 = \mathrm{tg}\varphi_1$ та прямої γ_2: $y = k_2x + b_2$; $\varphi_2 = \gamma_2, Ox$; $k_2 = \mathrm{tg}\varphi_2$.

Із рис. 5.4 видно, що $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, відповідно,

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1}{1 + \mathrm{tg}\varphi_1 \cdot \mathrm{tg}\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

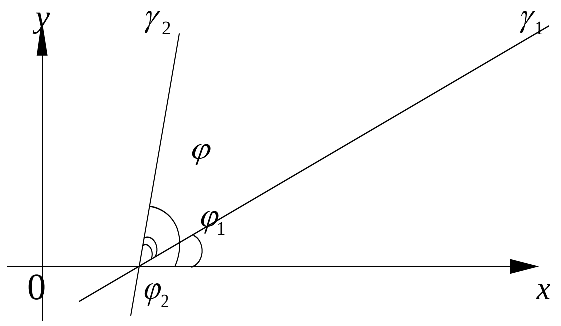


Рис. 5.4. Кут між прямими із кутовими коефіцієнтами

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|. \tag{5.11}$$

Прямі γ_1 та γ_2

• ***перпендикулярні***: $\gamma_1 \perp \gamma_2 \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{tg}\varphi$ не існує, $1 + k_1 \cdot k_2 = 0, k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$;

• ***паралельні:*** $\gamma_1 \| \gamma_2 \Leftrightarrow \varphi = 0$, $\mathrm{tg}\varphi = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

Розв'язування типових задач

1. Перевірити, чи належать точки $A(-3;0)$, $B(14;-13)$, $C(1;0)$, $D(2;2)$ прямій $2x - 5y + 6 = 0$.

Розв'язування. Якщо координати точки задовольняють рівнянню, тобто перетворюють його в тотожність, то ця точка належить заданій прямій; якщо координати точки не задовольняють рівнянню, то точка не належить прямій.

Підставивши замість змінних x і y в рівняння $2x - 5y + 6 = 0$ координати точки A, дістанемо тотожність $2 \cdot (-3) - 5 \cdot 0 + 6 = 0$, отже, точка $A(-3;0)$ належить заданій прямій. Аналогічно переконуємося в тому, що точка D належить прямій, а точки B і C не належать.

2. Побудуйте прямі: а) $3x + 4y + 12 = 0$; б) $5x + 12 = 0$; в) $2y - 7 = 0$.

Розв'язування.

а) Щоб побудувати пряму, знайдемо координати точок перетину з осями Ox і Oy. Припустивши, що $y = 0$, дістанемо $3x + 12 = 0$, $x = -4$, $A(-4;0)$. Для $x = 0$ дістанемо $4y + 12 = 0$, $y = -3$, $B(0;-3)$. Через точки A і B проводимо

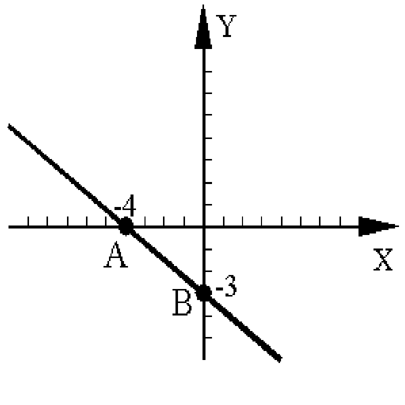


Рис. 5.5. $3x + 4y + 12 = 0$.

шукану пряму (рис. 5.5).

б) Знайдемо змінну x з рівняння $5x+12=0$: $x=-\frac{12}{5}=-2{,}4$. На осі Ox візьмемо точку $x=-2{,}4$ і проведемо пряму паралельно осі Oy (рис. 5.6).

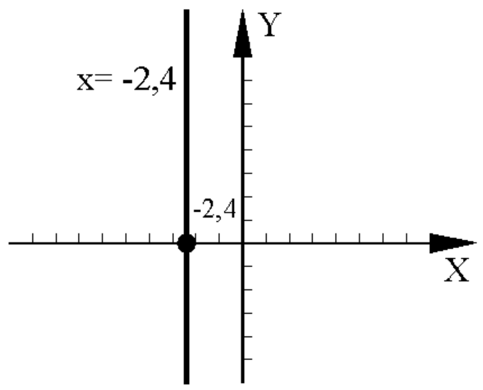


Рис. 5.6. $5x+12=0$.

в) Знайдемо змінну y з рівняння $2y-7=0$: $y=\frac{7}{2}=3{,}5$.

На осі Oy візьмемо точку $y=3{,}5$ і проведемо пряму (рис. 5.7),

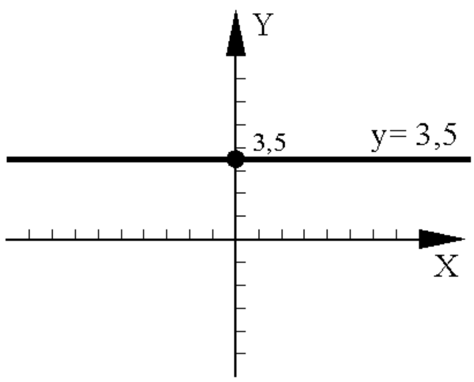


Рис. 5.7. $2y-7=0$.

паралельно осі Ox.

3. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;-3)$ і паралельна вектору $\overline{l}=(2;-2)$.

Розв'язування.

Використовуючи канонічне рівняння прямої (5.5), маємо

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}.$$

Доводимо рівняння до загального вигляду:

$$-2(x-2)=2(y+3); \quad -x+2=y+3; \quad x+y+1=0.$$

4. Загальне рівняння прямої $3x-4y+12=0$ перетворити в рівняння у відрізках на осях та побудувати пряму.

Розв'язування. Перетворимо рівняння $3x-4y=-12$. Праву та ліву частини рівняння поділимо на (-12): $\dfrac{3x}{-12}-\dfrac{4y}{-12}=1.$

Тоді $\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{3}=1$ − рівняння у відрізках на осях, тобто $a=-4$ і $b=3$.

Отже, дістанемо точки $A(-4;0)$ і $B(0;3)$. Пряма, яка проведена через точки A і

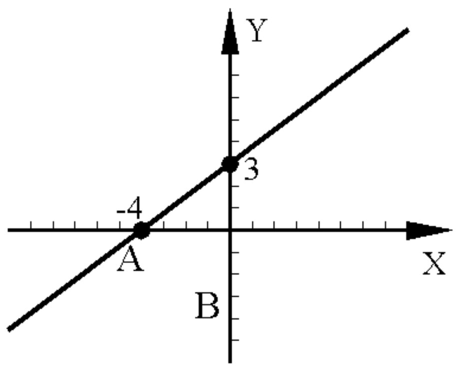


Рис. 5.8. $3x-4y+12=0$.

B − шукана (рис. 5.8).

5. Обчислити кутовий коефіцієнт прямої $3x+2y+6=0$.

Розв'язування. Розв'язавши рівняння $3x+2y+6=0$ відносно y, дістанемо $y=-\dfrac{3}{2}x-3$, звідки $k=\mathrm{tg}\alpha=-1{,}5$.

6. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $(-1;-4)$ і утворює з віссю Ox кут 135^0.

Розв'язування. Щоб скласти шукане рівняння прямої, треба знайти k і b. Знайдемо кутовий коефіцієнт $k=\mathrm{tg}135^0=-1$. Для визначення b підставимо в рівняння з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$ координати даної точки і значення обчисленого k. Дістанемо: $-4=(-1)\cdot(-1)+b$, звідки $b=-5$. Шукане рівняння має вигляд $y=-x-5$.

7. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(3;-2)$ і $B(4;-3)$.

Розв'язування. За умовою задачі: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $y_1 = -2$, $y_2 = -3$. Підставивши ці значення в рівняння прямої, яка проходить через дві точки (5.7), дістанемо $\frac{x-3}{4-3} = \frac{y+2}{-3+2}$; $-x+3 = y+2$ і $x+y-1=0$.

8. Трикутник задано вершинами: $A(2;5)$, $B(-6;-4)$ і $C(6;-1)$. Складіть рівняння медіани BD.

Розв'язування. Знайдемо координати точки D − середини сторони AC:

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2}; \qquad y_D = \frac{y_A + y_C}{2};$$

$$x_D = \frac{2+6}{2} = 4; \qquad y_D = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Отже, координати точки дорівнюють $D(4;2)$. Тоді рівняння сторони BD, де $B(-6;-4)$, має вигляд (5.7): $\frac{x-4}{-6-4} = \frac{y-2}{-4-2}$;

$$\frac{x-4}{-10} = \frac{y-2}{-6};$$

$$-6(x-4) = -10(y-2);$$

$$-6x+24 = -10y+20;$$

$$6x-10y-4=0;$$

$$3x-5y-2=0.$$

9. Точки $A(2;0), B(0;2)$ та $C(-1;-1)$ – вершини трикутника. Записати рівняння сторони AB та знайти її довжину.

Розв'язування. Запишемо рівняння сторони, як прямої, що проходить через дві вказані точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$ у вигляді (5.7). Отже, $\frac{x-2}{0-2} = \frac{y-0}{2-0} \Rightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{2}$, тобто $y = -(x-2) = -x+2$– рівняння сторони AB. Довжину сторони AB можна обчислити як відстань між двома вказаними точками за формулою $M_1M_2 = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$ (теж за формулою, як довжину вектора). Отже, $AB = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

10. Точки $A(-2;4), B(0;-2)$ та $C(4;2)$ – вершини трикутника. Записати рівняння середньої лінії, яка паралельна стороні AC та знайти її довжину.

Розв'язування. Знаходимо координати точок-середин M і N відрізків AB та BC за відповідними формулами:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1,\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4-2}{2} = 1,$$

тобто $M(-1;1)$. Аналогічно обчислюють для точки $N(2,0)$. Запишемо рівняння середньої лінії за формулою (5.7). Отже, $\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1}$, тобто $3(y-1) = -(x+1),\ x + 3y - 2 = 0$– загальне рівняння MN. Довжину середньої лінії можна обчислити як відстань між двома вказаними точками

$$MN = \sqrt{(2+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

Зауваження. Можна також при написанні рівняння середньої лінії використати умову паралельності прямих.

11. Знайдіть вершини трикутника, якщо його сторони задано рівняннями $3x - 4y + 11 = 0$; $4x - y - 7 = 0$; $y = -3x$.

Розв'язування. Щоб знайти координати вершин трикутника, треба розв'язати три системи рівнянь:

$$1)\begin{cases} 3x - 4y + 11 = 0, \\ 4x - y - 7 = 0; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 4x - y - 7 = 0, \\ y = -3x; \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} 3x - 4y + 11 = 0, \\ y = -3x. \end{cases}$$

Перша система має розв'язок:

$$\begin{cases} y = 4x - 7, \\ 3x - 4\left(4x - 7\right) + 11 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 7, \\ 3x - 16x + 28 + 11 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 7, \\ -13x = -39, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 4 \cdot 3 - 7 = 5. \end{cases}$$

Друга система має розв'язок:

$$\begin{cases} y=-3x, \\ 4x+3x-7=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3x, \\ 7x=7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-3. \end{cases}$$

Третя система має розв'язок:

$$\begin{cases} y=-3x, \\ 3x-4(-3x)+11=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3x, \\ 15x=-11, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{11}{15}, \\ y=\dfrac{11}{5}. \end{cases}$$

Отже, вершинами трикутника є точки $(3;5)$; $(1;-3)$; $\left(-\frac{11}{15};\frac{11}{5}\right)$.

12. Знайти гострий кут між прямими:

1) $y=5x$ і $y=2x$.

2) $3x-2y-12=0$ і $2x+3y+6=0$.

Розв'язування.

1) Кутові коефіцієнти даних прямих дорівнюють 5 і 2. Тангенс кута між прямими за формулою (5.11): $\mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{2-5}{1+2\cdot 5}\right|=\frac{3}{11}=0,2727$. Отже, $\varphi\approx 15^0 15'$.

2) Косинус кута між прямими обчислимо за формулою (5.10):

$$\cos\varphi=\left|\frac{3\cdot 2-2\cdot 3}{\sqrt{3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}}\right|=0.$$

Отже, $\varphi=90^0$.

13. Які з прямих $2x-3y+4=0$; $10x-15y-7=0$; $25x-20y-8=0$; $2y=-3x+2$ паралельні ?

Розв'язування. 1-ий спосіб. Паралельні прямі мають однакові кутові коефіцієнти. Знайдемо кутові коефіцієнти прямих: $k_1=\frac{2}{3}$; $k_2=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$; $k_3=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$; $k_4=-\frac{3}{2}$. Таким чином, $k_1=k_2$, а це означає, що перша та друга прямі – паралельні.

2-ий спосіб. Прямі паралельні, якщо їх нормальні вектори колінеарні. Записуємо ці вектори: $\vec{N}_1=(2;-3)$, $\vec{N}_2=(10;-15)$, $\vec{N}_3=(25;-20)$, для останньої прямої $3x-2y+2=0$ маємо вектор $\vec{N}_4=(3;2)$. Вектори $\vec{N}_1=(2;-3)$ та $\vec{N}_2=(10;-15)$ паралельні, тому паралельні перша і друга пряма.

14. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1;2)$, паралельно прямій $3x+4y-12=0$.

Розв'язування. Знайдемо кутовий коефіцієнт даної прямої: $4y=-3x+12$; $y=-\frac{3}{4}x+3; k_1=-\frac{3}{4}$.

Оскільки дана і шукана прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні, тобто $k_1=k_2=-\frac{3}{4}$. Шукана пряма проходить через точку $M(-1;2)$ і має кутовий коефіцієнт $k_2=-\frac{3}{4}$. Тоді її рівняння запишемо у вигляді: $y-2=-\frac{3}{4}\cdot(x+1)$, або $3x+4y-5=0$.

15. При якому значенні параметра k прямі $y=3x+4$ і $y=kx-2$ перпендикулярні?

Розв'язування. Кутові коефіцієнти перпендикулярних прямих зв'язані між собою співвідношенням: $k_1\cdot k_2=-1$. Для даних прямих $3k_2=-1$, звідки $k_2=-\frac{1}{3}$.

16. Перевірте, чи перпендикулярні прямі:

1) $3x+4y+1=0$ і $4x+3y-2=0$;

2) $y=3x+2$ і $y=\frac{x}{3}+1$;

3) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ і $2x-3y+5=0$.

Розв'язування. 1) Перевіримо виконання умови перпендикулярності прямих, заданих загальними рівняннями: $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$. Для даних прямих:

$A_1 = 3,\ \ B_1 = 4;\ \ A_2 = 4;\ \ B_2 = 3$. Тоді $3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \neq 0$. Це означає, що прямі не є перпендикулярні.

2) Якщо прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами, то умова перпендикулярності має вигляд: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$. Кутові коефіцієнти даних прямих дорівнюють: $k_1 = 3; k_2 = \dfrac{1}{3}$. Умова перпендикулярності не виконується, отже, прямі не перпендикулярні.

3) Рівняння першої прямої запишемо у вигляді: $y = -\dfrac{3x}{2} + 3$. Тоді $k_1 = -\dfrac{3}{2}$. Друга пряма має кутовий коефіцієнт: $k_2 = \dfrac{2}{3}$. Умова перпендикулярності виконується: $\dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{-\frac{3}{2}}$; $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$. Прямі перпендикулярні.

17. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;-3)$, перпендикулярно до прямої $4x + 5y - 8 = 0$.

Розв'язування. Знайдемо кутовий коефіцієнт даної прямої: $k_1 = -\dfrac{4}{5}$. Тоді кутовий коефіцієнт шуканої прямої $k_2 = \dfrac{5}{4}$. Отже, її рівняння має вигляд $y + 3 = \dfrac{5}{4}(x - 2)$ або $5x - 4y - 22 = 0$.

18. Знайдіть відстань від точки $M(-2;4)$ до прямої $4x - 3y - 5 = 0$.

Розв'язування. Використовуючи формулу для обчислювання відстані від точки до прямої, дістанемо:

$$d = \frac{|4 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5.$$

19. Знайдіть відстань між двома паралельними прямими $4x + 3y - 8 = 0$ і $4x + 3y - 33 = 0$.

Розв'язування. Знайдемо будь-яку точку на першій прямій. Якщо візьмемо $y=0$, то $4x-8=0$. Тоді $x=2$. Таким чином, точка $A(2;0)$ належить першій прямій. Отже, відстань від цієї точки до прямої $4x+3y-33=0$ обчислюється за формулою $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Одержуємо,

$$d=\frac{|4\cdot 2+3\cdot 0-33|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{25}{5}=5.$$

Завдання для самоконтролю

1. Записати загальне рівняння прямої на площині, записати нормальний вектор прямої.

2. Записати неповні рівняння прямої на площині, навести приклади, побудувати їх на координатній площині.

3. Отримати рівняння прямої у відрізках на осях, пояснити його назву.

4. Записати канонічне рівняння прямої, перейти до параметричних рівнянь.

5. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві вказані точки, в канонічному та параметричному вигляді (на прикладі).

6. Записати та пояснити рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

7. Яке рівняння називають нормальним рівнянням прямої, коли зручно його використовувати?

8. Записати умови паралельності двох прямих на площині для прямих, заданих загальними, канонічними рівняннями, рівняннями з кутовим коефіцієнтом.

9. За яких умов дві прямі перпендикулярні?

10. При якому значенні коефіцієнта k пряма $y=kx+9$ проходить через точку перетину прямих $x-y+5=0$ і $x+2y+2=0$.

11. Пряма проходить через точку $M(2;5)$ і утворює з віссю Ox кут, що дорівнює $\operatorname{arctg}3$. Знайдіть на цій прямій точку з абсцисою (-2).

12. Скласти рівняння медіан трикутника [3] з вершинами у точках $A(-4;\,2);\ B(2;\,0);\ C(2;\,-4)$.

13. На прямій $2x+3y-18=0$ знайдіть точку, яка лежить від осі Oy в три рази далі, ніж від осі Ox.

14. Складіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до даного вектора і проходить через точку перетину даних прямих:

а) $\vec{n}=(-5;3)$, $2x+3y-17=0$; $x+y-6=0$.

б) $\vec{n}=(-2;-6)$; $3x+y-10=0$; $2x+y-6=0$.

15. Складіть рівняння прямих, які проходять через точку $M(-7;8)$ під кутом 45^0 до прямої $3x-5y+15=0$.

16. Знайдіть рівняння двох перпендикулярів до прямої $5x-4y-20=0$ у точках перетину її з осями координат.

17. Трикутник задано вершинами $A(-3;-2)$, $B(1;6)$ і $C(2;-5)$. Знайдіть: кути $\hat{B}$ і $\hat{C}$; рівняння висоти, яка проведена з вершини C; довжину перпендикуляра до сторони AB, який проходить через вершину C.

18. Дві протилежні вершини квадрата лежать у точках $A(-1;1)$ і $C(5;3)$. Складіть рівняння сторін і діагоналей цього квадрата.

Відповіді. **10.** $k=2$. **11.** $M(-2;-7)$. **12.** $5x+3y+2=0;\ 2x+3y+2=0;\ x-3y-2=0.$ **13.** $M(6;\,2)$. **14.** а) $5x-3y+10=0;$ б) $x+3y+2=0.$ *Вказівка:* точки перетину прямих: а) $M_1(1;\,5)$; б) $M_2(4;\,-2)$. **15.** $y=4x+36;\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{25}{4}.$

16. $4x+5y-16=0;\ 4x+5y+25=0.$

17. $\cos B=\frac{21}{\sqrt{610}}=0,850;\ \angle B=31^\circ$; $\cos C=\frac{19}{\sqrt{1037}}=0,590;\ \angle C=53^\circ$; $x+2y+8=0$; $\frac{13\sqrt{5}}{5}$.

18. Рівняння сторін: $2x-y+3=0;\ 2x-y-7=0;\ x+2y-1=0;\ x+2y-11=0;$ рівняння діагоналей: $x-3y+4=0;\ 3x+y-8=0.$ *Вказівка:* Діагональ BD проходить через точку $F(2;\,2)-$ середина AC. Рівняння сторін – це рівняння прямих, які проходять через точки A і C під кутом $\frac{\pi}{4}$ (кутові коефіцієнти цих прямих $k_1=2,\ k_2=-\frac{1}{2}$).

5.2. Криві другого порядку на площині

5.2.1. Коло, еліпс

Означення. ***Колом*** називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром [4].

Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом *R* має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (5.12)$$

Рівняння кола з центом у точці $C(x_0; y_0)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (5.12^*)$$

Рівняння кола у загальному вигляді записують так:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

де A, B, C, D − сталі коефіцієнти; A, B одночасно не дорівнюють нулю.

Означення. ***Еліпсом*** називається множина точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала, більша за відстань між фокусами.

Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі *Ox*, має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b), \qquad (5.13)$$

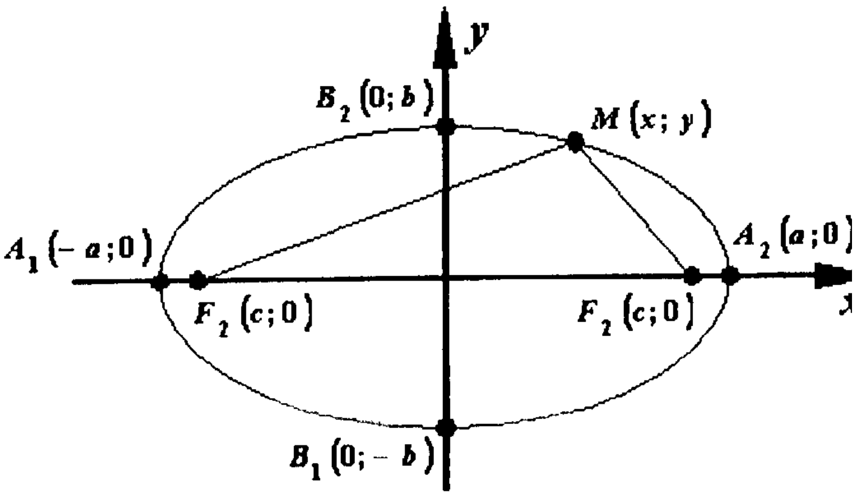


Рис. 5.9. Еліпс.

де *a* – довжина великої півосі; *b* – довжина малої півосі (рис. 5.9).

Залежність між параметрами *a,b,c* виражається співвідношенням:

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані *2c* до великої осі *2a*:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1.$$

Директриси еліпса мають рівняння $x = \pm \frac{a}{b}$.

Якщо центр симетрії еліпса знаходиться у точці $C(x_0; y_0)$, а осі симетрії паралельні осям Ox, Oy, то рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

5.2.2. Гіпербола, її побудова

Означення. ***Гіперболою*** називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала, дорівнює $(2a)$, є меншою за відстань між фокусами $(2c)$.

Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі *Ox*, має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.14}$$

де a – довжина дійсної півосі; b – довжина уявної півосі (рис. 5.10).

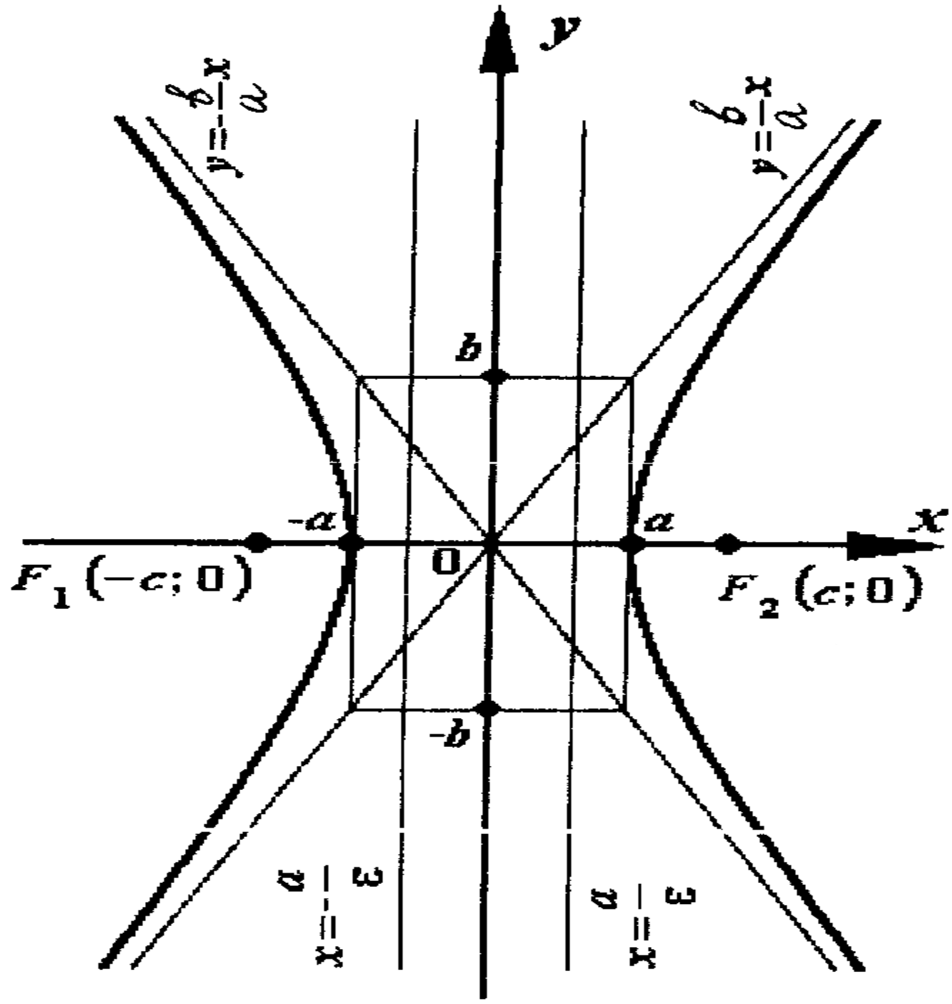


Рис. 5.10. Гіпербола.

Залежність між параметрами *a, b, c* виражається співвідношенням

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення півфокусної відстані до її дійсної півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

Фокуси гіперболи знаходяться у точках $F_1\,(-c;0)$, $F_2\,(c;0)$.

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y = \pm\frac{b}{a}x$, а також дві директриси, рівняння яких $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Якщо дійсна та уявна півосі рівні $(a = b)$, то гіпербола називається рівносторонньою. Рівняння рівносторонньої гіперболи має вигляд:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

а рівняння її асимптот $y = \pm x$.

Якщо фокуси гіперболи лежать на осі *Oy* в точках $F_1\,(0;-c)$, $F_2\,(0;c)$, то її рівняння має вигляд:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{5.15}$$

Рівняння асимптот такої гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x$, а рівняння директрис

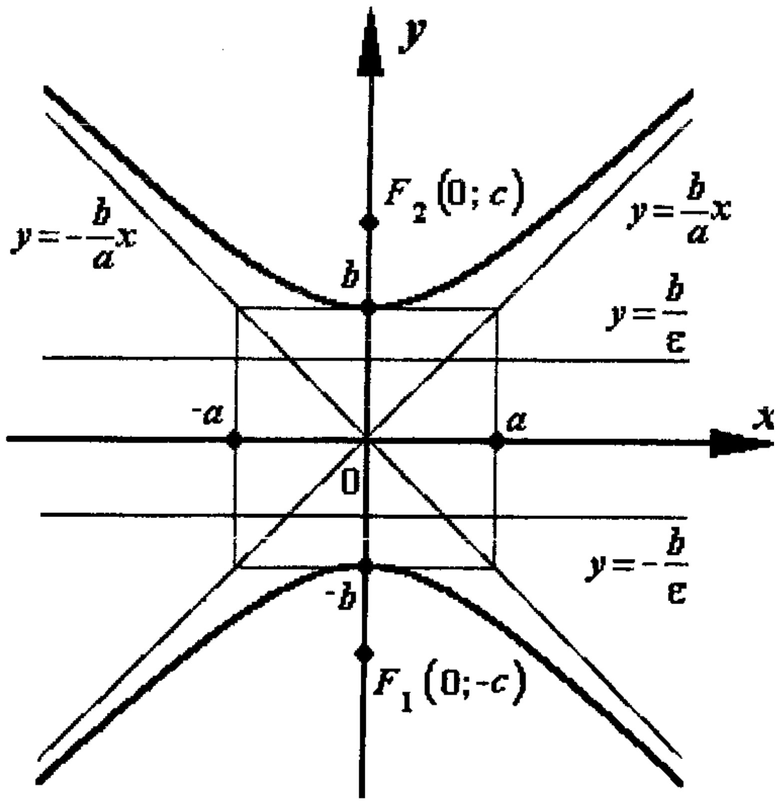


Рис. 5.11. Спряжена гіпербола.

$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ (рис. 5.11).

Гіперболи (5.14) і (5.15) називається спряженими. Рівняння *рівносторонньої гіперболи* з фокусами на осі *Oy* має вигляд $y^2 - x^2 = a^2$.

Якщо центри симетрії гіпербол знаходяться в точці $C(x_0;y_0)$, а осі симетрії паралельні осям *Ox, Oy*, то рівняння гіпербол має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1; \qquad (5.14^{*'})$$

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1. \qquad (5.15^{*})$$

5.2.3. Парабола, її канонічні рівняння

Означення. ***Параболою*** називають множину точок на площині, рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і від даної прямої, яка називається директрисою.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox, має вигляд:

$$y^2 = 2px, \qquad (5.16)$$

де p – параметр параболи.

Якщо $p > 0$, то гілки параболи напрямлені вправо (рис. 5.12), якщо $p < 0$,

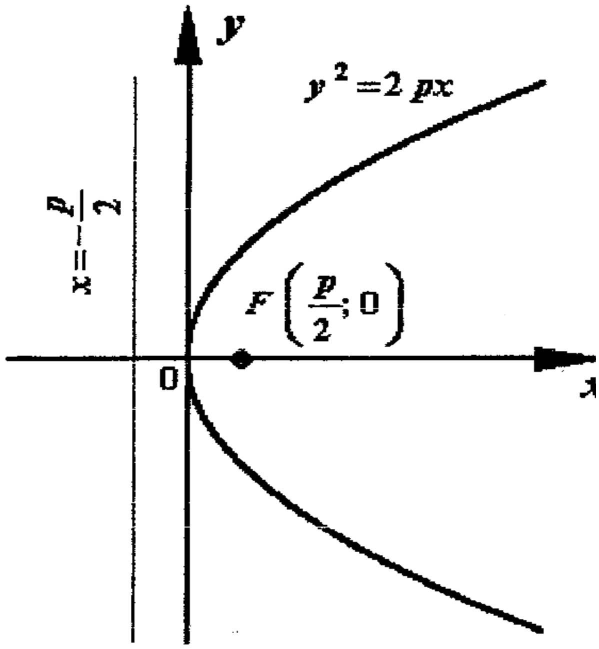


Рис. 5.12. Парабола $y^2 = 2px$.

то гілки напрямлені вліво.

Фокус параболи знаходиться у точці $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Рівняння директриси

$$x=-\frac{p}{2}.$$

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy, має вигляд:

$$x^2=2py. \qquad (5.17)$$

Якщо $p>0$, то гілки направлені вгору (рис. 5.13), якщо $p<0$, то гілки направлені вниз. Фокус такої параболи є точка $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y=-\frac{p}{2}$.

Якщо вершина параболи – у точці $C(x_0;y_0)$, а вісь симетрії паралельна осі Oy, то рівняння має вигляд:

$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0). \qquad (5.17^{*'})$$

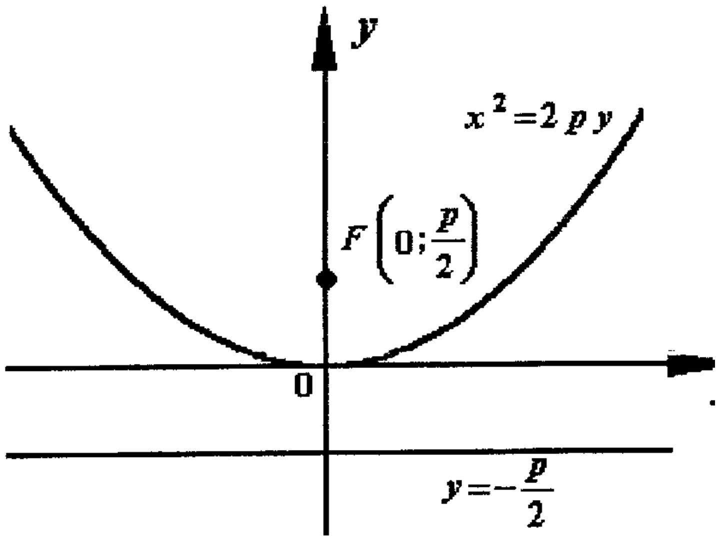


Рис. 5.13. Парабола $x^2=2py$.

Фокус цієї параболи $F\left(x_0;y_0+\frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y=y_0-\frac{p}{2}$.

Якщо вершина параболи знаходиться у точці $C(x_0;y_0)$, а вісь симетрії паралельна осі Ox, то рівняння параболи має вигляд:

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0). \qquad (5.16^{*'})$$

Фокус такої параболи $F\left(x_0+\frac{p}{2};y_0\right)$, рівняння директриси $x=x_0-\frac{p}{2}$.

Розв'язування типових задач

1. Складіть рівняння кола з центром у точці $M(2;-3)$ і з радіусом, що дорівнює 2. Побудуйте це коло.

Розв'язування. Підставивши значення в рівняння кола зі зміщеним центром (5.12*), дістанемо

$$(x-2)^2+(y-(-3))^2=4$$

або

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4.$$

Будуємо центр кола, тобто точку $M(2;-3)$. З центра M радіусом, який

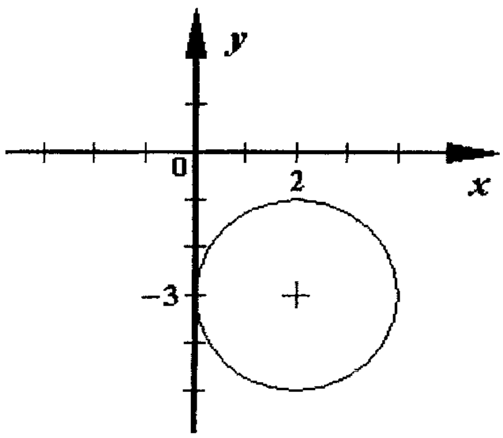


Рис. 5.14. Коло.

дорівнює 2, опишемо коло (рис. 5.14).

2. Складіть рівняння кола, яке має центр в точці $(5;-7)$ і проходить через точку $(2;-3)$.

Розв'язування. Знайдемо радіус кола, як відстань від центра до його точки:

$$R=\sqrt{(2-5)^2+(-3-(-7))^2}=5.$$

В рівняння кола (5.12*) підставимо координати центра і знайдену величину радіуса:

$$(x-5)^2+(y+7)^2=25.$$

3. Знайдіть координати точок перетину кола $3x^2+3y^2-18x-10y-48=0$ з осями координат.

Розв'язування. Коло перетинається з віссю абсцис у точках, ординати яких дорівнюють нулю. Припустивши, що в рівнянні кола $y=0$, дістанемо:

$$3x^2-18x-48=0 \Rightarrow x^2-6x-16=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4(-16)}}{2}=\frac{6\pm10}{2},\ x_1=8 \text{ і } x_2=-2.$$

Отже, коло перетинається з віссю абсцис у точках $(-2;0)$ і $(8;0)$.

Коло перетинається з віссю ординат у точках, абсциси яких дорівнюють нулю. Припустивши, що в рівнянні кола $x=0$, дістанемо:

$$3y^2-10y^2-48=0;$$

$$y_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4(-48)\cdot3}}{2\cdot3}=\frac{10\pm26}{6};\ y_1=6 \text{ і } y_2=-\frac{8}{3}.$$

Отже, коло перетинається з віссю ординат у точках $\left(0;-\frac{8}{3}\right)$ і $(0;6)$**.**

4. Складіть рівняння кола [3], яке проходить через точки $A(3;1)$, $B(-2;6)$, $C(-5;-3)$.

Розв'язування. Нехай точка $O_1(a;b)$ − центр шуканого кола, тоді $|O_1A|=|O_1B|=|O_1C|$, як радіуси того самого кола. Маємо:

$$|O_1A|=\sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2},|O_1B|=\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2},$$

$$|O_1C|=\sqrt{(a+5)^2+(b+3)^2}.$$

Складемо систему рівнянь відносно невідомих a і b та розв'яжемо її:

$$\begin{cases}\sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2},\\ \sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+5)^2+(b+3)^2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2+9+1-6a-2b=a^2+b^2+4+36+4a-12b,\\ a^2+b^2+9+1-6a-2b=a^2+b^2+25+9+10a+6b;\end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b+3=0, \\ 2a+b+3=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-3, \\ 2a+b=-3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a=-6, \\ b=a+3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2, \\ b=1. \end{cases}$$

$$O_1(-2;1).$$

Знаходимо $R=|O_1A|=\sqrt{(-2-3)^2+(1-1)^2}=5$.

Отже, шукане рівняння кола має вигляд:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25.$$

5. Знайдіть координати центра і радіус кола $x^2+y^2-8x-10y-8=0$.

Розв'язування. Перепишемо це рівняння у вигляді: $x^2-8x+y^2-10y=8$. Доповнивши двочлени x^2-8x і y^2-10y до повних квадратів, дістанемо

$$x^2-2\cdot 4x+4^2+y^2-2\cdot 5y+5^2=8+4^2+5^2$$

або $(x-4)^2+(y-5)^2=49$.

Звідки, $a=4$, $b=5$, $R=7$, тобто центр кола – точка $(4;5)$, а радіус дорівнює 7.

6. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо велика вісь дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює *8*.

Розв'язування. З умови впливає, що $a=6$ і $c=4$. Знаходимо $b^2=a^2-c^2=36-16=20$. Підставивши значення a та b в рівняння еліпса, дістанемо (рис. 5.15) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$.

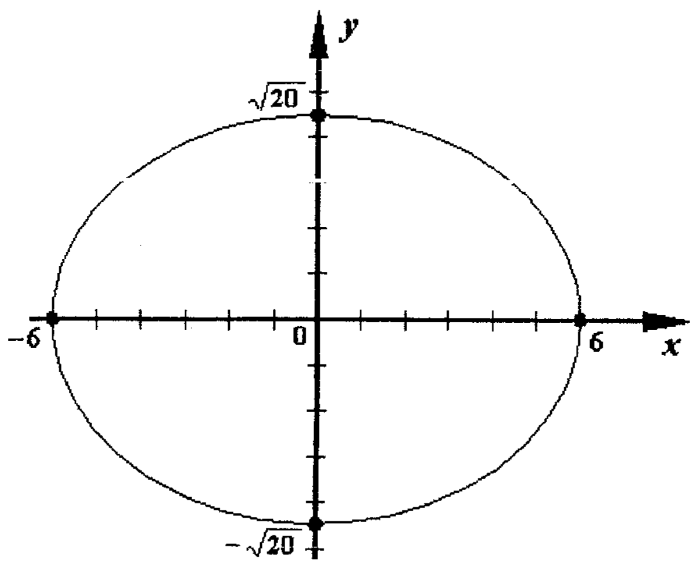


Рис. 5.15. Еліпс.

7. Дано еліпс $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. Знайти координати фокусів еліпса і відстань між ними.

Розв'язування. З рівняння еліпса маємо $a^2=100$ і $b^2=36$. Тоді $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-36}=8$. Отже, координати фокусів $F_1\,(-8;0)$ і $F_2\,(8;0)$, а відстань між ними дорівнює $2c=2\cdot 8=16$.

8. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо його велика вісь дорівнює 14, а ексцентриситет $\frac{2}{3}$.

Розв'язування. З умови маємо $a=7$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$. Підставивши в це співвідношення значення *a*, дістанемо $c=\frac{14}{3}$.

Далі знаходимо $b^2=7^2-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{245}{9}$. Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{245/9}=1 \text{ або } \frac{x^2}{49}+\frac{9y^2}{245}=1.$$

9. Скласти рішення еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3};\sqrt{6})$ і $B(3;\sqrt{2})$.

Розв'язування. Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти параметри a і b. Підставивши в рівняння еліпса координати даних точок, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{3}{a^2}+\frac{6}{b^2}=1,\\ \frac{9}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1;\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{1}{a^2}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{6}{b^2}\right),\\ \frac{9}{3}\left(1-\frac{6}{b^2}\right)+\frac{2}{b^2}=1;\end{cases}$$

$$3-\frac{18}{b^2}+\frac{2}{b^2}=1;\quad \frac{16}{b^2}=2;\qquad b^2=8;$$

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{6}{8}\right);\quad \frac{1}{a^2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};\ \frac{1}{a^2}=\frac{1}{12};\qquad a^2=12.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд: $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

10. Побудувати гіперболу $9x^2-16y^2-144=0$. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

Розв'язування. Зведемо рівняння кривої до вигляду (5.14):

$$\frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=1;$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Таким чином, $a^2=16$, $b^2=9$, тому $a=4$, $b=3$ − півосі гіперболи.

Знайдемо відстань фокусів від центра симетрії:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

Фокуси гіперболи $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}>1$, рівняння асимптот $y=\pm\dfrac{3}{4}x$. Рівняння директрис мають вигляд $x=\pm\dfrac{4}{\left(\frac{5}{4}\right)}$; $x=\pm\dfrac{16}{5}$. Побудуємо гіперболу.

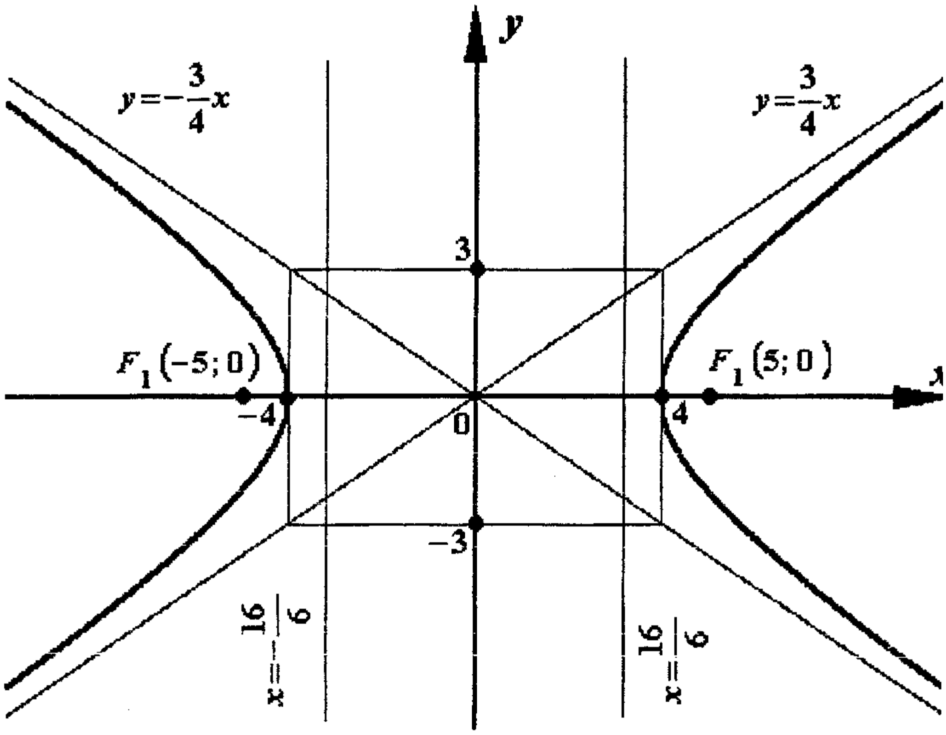


Рис. 5.16. Гіпербола $9x^2-16y^2-144=0$.

11. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі *Ox*, якщо її дійсна вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами дорівнює $8\sqrt{34}$.

Розв'язування. Для складання рівняння гіперболи треба знайти параметри a і b. З умови маємо:

$$2a=24,\quad 2c=8\sqrt{34}.$$

Знайдемо a, c і b:

$$a=12,\ c=4\sqrt{34},\ b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{544-144}=20.$$

Підставивши a^2 і b^2 в рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, дістанемо $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{400}=1$.

12. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів $(-20;0)$, $(20;0)$ і ексцентриситетом $\varepsilon=\frac{4}{3}$.

Розв'язування. З умови маємо: $c = 20$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$. Підставивши у цю рівність c, дістанемо $\frac{20}{a} = \frac{4}{3}$, тобто $a = \frac{20 \cdot 3}{4} = 15$. Далі знайдемо

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{400 - 225} = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}.$$

Підставивши a^2 і b^2 в рівняння (5.14), дістанемо $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{175} = 1$.

13. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо довжина її дійсної осі дорівнює 16, і гіпербола проходить через точку $(-10; -3)$.

Розв'язування. За умовою $2a = 16$, тобто $a = 8$. Підставивши в рівняння (5.14) значення $a = 8$ і координати даної точки, дістанемо:

$$\frac{(-10)^2}{8^2} - \frac{(-3)^2}{b^2} = 1;$$

$$\frac{100}{64} - \frac{9}{b^2} = 1; \quad \frac{9}{b^2} = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}; \qquad b^2 = 16.$$

Підставивши a^2 і b^2 в рівняння (5.14), отримаємо $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$.

14. Скласти рівняння гіперболи за рівнянням її асимптот $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$ і координатами точки $\left(4\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right)$, через яку вона проходить.

Розв'язування. Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x$. За умовою $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Підставимо в рівняння (5.14) координати точки і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{(4\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(3\sqrt{3})^2}{b^2} = 1, \\ \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{48}{a^2} - \frac{27}{b^2} = 1, \\ 2b = \sqrt{3}a; \end{cases}$$

$$\frac{48}{a^2}-\frac{27}{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}=1; \qquad \frac{48}{a^2}-\frac{36}{a^2}=1; \quad a^2=12; \ a=\sqrt{12}; \quad b=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}{2}=3.$$

Рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{9}=1$.

15. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її фокус лежить у точці $F(1;0)$.

Розв'язування. Фокус лежить на осі *Ox*, тобто рівняння параболи має вигляд (5.16): $y^2=2px$. Оскільки координати фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, то $\frac{p}{2}=1$, $p=2$.

Підставивши значення *p* в рівняння (5.16), дістанемо $y^2=4x$.

16. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через точку $A(-2;-4)$.

Розв'язування. Шукана парабола симетрична відносно осі Oy, отже, її рівняння має вигляд (5.17) $x^2=2py$. Підставивши в це рівняння координати точки *A*, знайдемо *p*:

$$(-2)^2=2p\cdot(-4);$$

$$4=-8p;$$

$$p=-\frac{1}{2}.$$

Після підстановки значення *p* в рівняння параболи дістанемо $x^2=-y$.

17. За даним рівнянням параболи $y^2=-8x$ обчислити координати її фокуса, одержати рівняння директриси, виконати креслення кривої.

Розв'язування. З рівняння параболи $y^2=-8x$ маємо $2p=-8$, $\frac{p}{2}=-2$. Парабола симетрична відносно осі Ox, її фокус лежить на осі симетрії і має координати $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, тобто $F(-2;0)$. Рівняння директриси $x=-\frac{p}{2}$, тобто $x=2$.

Шукана парабола симетрична відносно осі Ox, її гілки напрямлені вліво (рис. 5.17).

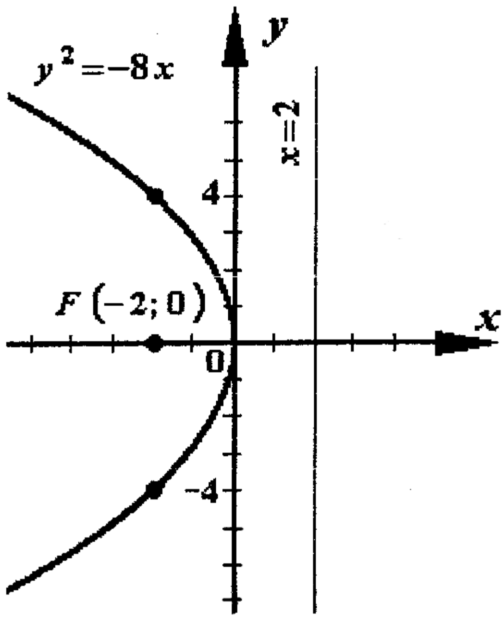


Рис. 5.17. Парабола $y^2=-8x$.

18. Побудувати параболу $x^2-6x+2y+7=0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язування. Знайдемо вершину параболи, звівши рівняння $x^2-6x+2y+7=0$ до вигляду $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$. Маємо відповідні перетворення

$$x^2-6x=-2y-7;(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2)-3^2=-2y-7;(x-3)^2=-2y-7+9;$$

$$(x-3)^2=-2(y-1).$$

З цього рівняння $x_0=3, y_0=1, C(3;1)-$ вершина параболи. Знайдемо точки перетину параболи з осями Ox та Oy. Нехай $y=0$; маємо $x^2-6x+7=0$; $x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-28}}{2}=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{2}=3\pm\sqrt{2}$; якщо $x=0$, тоді $2y+7=0; y=-3,5$.

Знайдемо координати фокуса. З рівняння $(x-3)^2=-2(y-1)$ маємо:

$$2p=-2,\ \frac{p}{2}=-\frac{1}{2}=-0,5.$$

Координати фокуса $F\left(x_0; y_0+\frac{p}{2}\right)$, тобто $F(3;1-0,5)$, $F(3;0,5)$ (рис. 5.18).

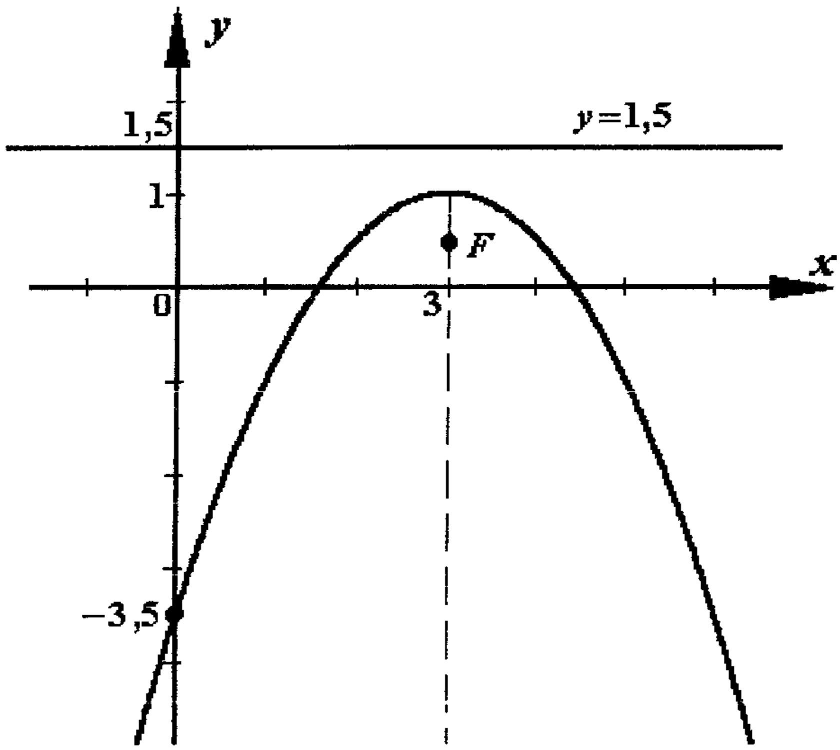


Рис. 5.18. Парабола $x^2-6x+2y+7=0$.

Рівняння директриси: $y=y_0-\frac{p}{2}$, тобто $y=1+0,5$; $y=1,5$.

19. Побудувати параболу $y^2+4y-3x+4=0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язування. Знайдемо координати вершини:

$$y^2+4y+4=3x;\ (y+2)^2=3(x-0).$$

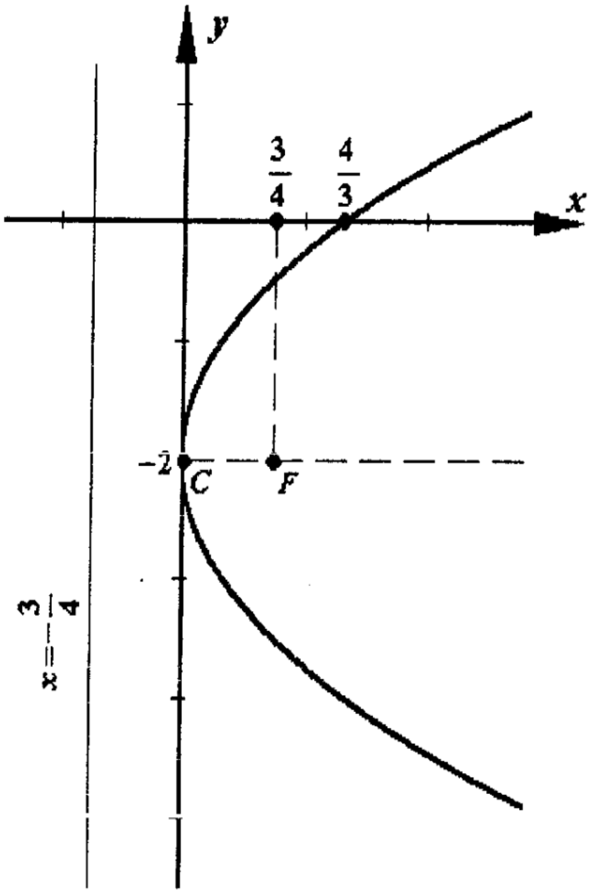
Вершина параболи лежить у точці $C(0;-2)$. Гілки параболи напрямлені вправо $(2p=3,\ p=1,5>0)$.

Знайдемо точку перетину параболи з віссю Ox:

$$y=0, \qquad -3x+4=0, \qquad x=\frac{4}{3}.$$

Координати фокуса $F\left(x_0+\frac{p}{2};\,y_0\right)$, тобто $F\left(0+\frac{3}{4};-2\right)$, $F\left(\frac{3}{4};-2\right)$.

Рівняння директриси: $x=x_0-\frac{p}{2}$, тобто $x=-\frac{3}{4}$. Побудуємо параболу (рис. 5.19).



Завдання для самоконтролю

1. Записати рівняння кола з центром в початку координат та в іншій довільній точці площини. Навести приклади.

2. Означити еліпс, записати його основні характеристики.

3. Дати означення гіперболи, сформулювати її основні характеристики.

4. Що таке спряжена гіпербола? Навести приклад побудови її.

5. Записати канонічне рівняння параболи, рівняння її директриси.

6. Навести приклади побудови параболи в залежності від виду її рівняння.

7. Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо відстань між фокусами дорівнює 12, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

8. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо він проходить через точки $A(6;4)$ і $B(8;3)$.

9. Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2+y^2-10x+16y+80=0$ і $x^2+y^2+6x+4y-12=0$.

10. Знайдіть кут між прямими, які проходять через центр кола $x^2+y^2-4x-16y+32=0$ і через фокуси еліпса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.

11. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(-8;3)$ і $B(2;-7)$, якщо центр його лежить на прямій $x+4y+14=0$.

12. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі *Ox*, якщо довжина її уявної осі дорівнює 12, і гіпербола проходить через точку (20; 8).

13. Побудувати гіперболу $4x^2-y^2-16=0$. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

14. Скласти рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами дорівнює 10, а рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$.

15. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі *Ox* і проходить через точку (5;-3). Знайти координати фокуса, рівняння директриси. Побудувати.

16. Побудувати параболу $x^2-2x+y+8=0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Відповіді. **7.** $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1.$ **8.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1.$ **9.** $d=10.$ **10.** $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{65}}=0{,}124;\ \varphi=82^\circ.$ **11.** $(x+2)^2+(y+3)^2=72.$ **12.** $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{36}=1.$ **13.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1;\ F_{1,2}\left(\pm2\sqrt{5};\,0\right);$ асимптоти $y=\pm2x;\ \varepsilon=\sqrt{5};\ D_{1,2}: x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$ **14.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$ **15.** $y^2=\frac{9}{5}x;\ F\left(\frac{9}{20};\,0\right);\ D: x=-\frac{9}{20}.$

16. Парабола $(x-1)^2=-(y+7)$ з віссю симетрії $x=1$ гілками вниз, вершина $C(1;\,-7)$; фокус $F(1;\,-7{,}5)$; D: $y=-6{,}5$.

6. Пряма і площина в просторі

6.1. Рівняння площини в просторі

6.1.1. Загальне рівняння площини

Теорема. *Кожна площина* [6] *може бути виражена лінійним рівнянням відносно декартової системи координат у просторі і навпаки, кожне лінійне рівняння відносно декартової системи координат у просторі виражає площину.*

Рівняння площини, що проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ в заданому напрямі $\vec{n}=(A;B;C)$ має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{6.1}$$

Рівняння

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{6.2}$$

називається ***загальним рівнянням*** площини, якщо коефіцієнти A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

Ненульовий вектор $\vec{n}=(A;B;C)$, перпендикулярний до площини, називається ***нормальним вектором площини***.

Розглянемо окремі випадки загального рівняння площини.

1. Нехай $D=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax+By+Cz=0$ і площина проходить через початок координат.

2. Нехай $C=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax+By+D=0$ і площина паралельна осі Oz. Аналогічно, для $A=0, B=0$ дістанемо площини $By+Cz+D=0$ і $Ax+Cz+D=0$, паралельні відповідно осям Ox і Oy.

3. Нехай $C=D=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax+By=0$ і площина проходить через початок координат і паралельна осі Oz. Аналогічно

при $A=D=0$ і $B=D=0$ дістанемо відповідно площини $By+Cz=0$ і $Ax+Cz=0$, які проходять відповідно через осі Ox і Oy.

4. Нехай $B=C=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax+D=0$ і площина паралельна осям Oy і Oz, перпендикулярна до осі Ox, тобто паралельна координатній площині Oyz. Аналогічно, для $A=B=0$ і $A=C=0$ дістанемо площини $Cz+D=0$ і $By+D=0$, які є паралельні відповідно до координатних площин Oxy і Oxz.

5. Нехай $B=C=D=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax=0$, площина збігається з площиною Oyz.

Аналогічно, для $A=B=D=0$ і $A=C=D=0$ дістанемо площини $Cz=0$ і $By=0$, які збігаються відповідно з координатними площинами Oxy і Oxz.

6.1.2. Площина в відрізках

Нехай рівняння (6.2) повне ($A,B,C,D\neq 0$), тоді маємо $Ax+By+Cz=-D$,

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{B}}=1.$$

Якщо позначити $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{B}$, то маємо

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{6.3}$$

Рівняння (6.3) називають рівнянням ***площини у відрізках*** на осях.

Точки перетину площини з відповідними осями координат є такими: $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, модулі чисел a, b, c є довжинами відрізків, які відтинає площина на відповідних координатних осях.

6.1.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай площина (α) задана в просторі своїми трьома точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$. Нехай точка $M(x;y;z)$ – довільна точка простору. Очевидно, $M\in(\alpha)\Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ – компланарні ((α) – позначення площини).

Запишемо умову компланарності векторів (мішаний добуток дорівнює 0)

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0 .$$

Виразимо мішаний добуток трьох векторів через координати векторів, маємо:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (6.4)$$

Отже, координати кожної точки, яка лежить у площині (α), задовольняють рівняння (6.4).

Умову, що чотири точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ лежать в одній площині, можна записати так:

$$\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.1.4. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини

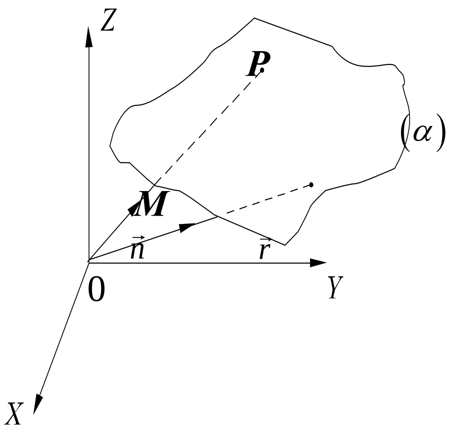


Рис. 6.1. Площина в просторі.

Нехай в просторі [7] задана площина (α). Через початок координат проведемо перпендикуляр до площини (α) і позначимо точку його перетину з площиною через P. Довжину відрізку OP позначимо через p. За додатний напрям нормалі до площини приймемо напрям від початку координат до точки P.

Кути, які утворює вектор нормалі з координатними осями Ox, Oy, Oz, позначимо відповідно через α, β, γ, отже, координати орта нормалі будуть $\vec{n} = \left(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\right)$.

Візьмемо точку $M(x; y; z)$ і спроектуємо її радіус-вектор $\vec{r}$ на нормаль:

$$np_{\vec{n}}\vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{n} = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma.$$

З другого боку, точка $M \in (\alpha) \Leftrightarrow np_{\vec{n}}\vec{r} = p.$

Таким чином, маємо

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0. \qquad (6.5)$$

Рівняння (6. 5) називають ***нормальним рівнянням площини.***

Загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ зводять до нормального рівняння, помноживши його на нормуючий множник

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

знак якого треба брати протилежним знаку вільного члена.

Відстань d точки від площини обчислюють через нормальне рівняння площини.

Означення. ***Відхиленням*** точки M від площини називається число $\delta = d$, якщо точка M і початок координат лежать по різні сторони від площини, і число $\delta = -d$, якщо вони лежать по одну сторону від неї.

Нехай відома точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і площина задана нормальним рівнянням

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Тоді справедлива формула

$$d = \left|x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\right| = |\delta|.$$

Якщо площина задана загальним рівнянням, то

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (6.5^*)$$

Таким чином, відхилення точки від площини дорівнює результату підстановки координат точки в ліву частину нормального рівняння площини.

6.1.5. Кут між двома площинами

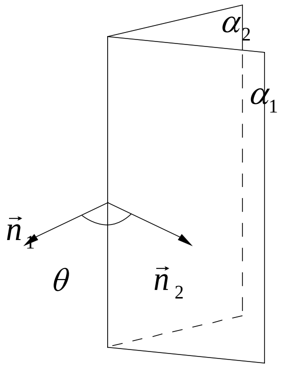


Рис. 6.2. Кут між площинами.

Двогранний кут між двома площинами вимірюється лінійними кутами. Лінійний кут дорівнює куту між векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ двох заданих площин (теорема про рівність кутів із взаємно перпендикулярними сторонами).

Кут між двома площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, які перетинаються, дорівнює куту між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = \left(A_1; B_1; C_1\right)$ та $\vec{n}_2 = \left(A_2; B_2; C_2\right)$ $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ і обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{6.6}$$

Дві площини були паралельні, їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ повинні бути колінеарними, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Площини перпендикулярні, їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ також повинні бути перпендикулярні, тобто

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

6.2. Пряма в просторі

6.2.1. Види рівнянь прямої в просторі

− ***Векторне рівняння прямої просторі***

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{l}\ , \tag{6.7}$$

$t \in \mathbb{R}$, $\vec{r}_0$ –радіус-вектор точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $\vec{l} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ – напрямний вектор прямої (тобто вектор $\parallel$ прямій). Рівняння цілком аналогічне векторному рівнянню прямої на площині.

– ***Параметричні рівнянні прямої***

Якщо в рівнянні (6.7) перейти до координатної форми, то будемо мати рівняння

$$x = x_0 + mt;\ \ y = y_0 + nt;\ \ z = z_0 + pt. \qquad (6.8)$$

$t \in \mathbb{R}, t$ – параметр, $\vec{l} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ – напрямний вектор.

– ***Канонічні рівняння прямої***

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (6.9)$$

де $t \in \mathbb{R}$, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, яка належить прямій, $\vec{l} = (m; n; p)$ – напрямний вектор. В рівнянні (6.9) деякі з чисел m, n, p можуть дорівнювати 0. Наприклад, очевидно, що коли $m = 0$, то пряма (6.9) перпендикулярна до осі Ox:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}, \\ x - x_0 = 0. \end{cases}$$

– ***Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки***

Нехай точки, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ $M_2(x_2; y_2; z_2)$ належать прямій L. Тоді, як і у випадку прямої на площині, маємо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (6.10)$$

– ***Загальні рівняння прямої***

Пряму в просторі можна задати рівняннями площин, які по ній перетинаються, тобто двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (6.11)$$

Ці рівняння прямої в просторі дещо відрізняються від відповідних рівнянь прямої на площині.

Це і є загальні рівняння прямої. Оскільки ці рівняння не дуже зручні, то часто систему (6.11) зводять до канонічного виду. Для цього потрібно:

1) визначити координати однієї з точок прямої (покласти, наприклад, $z=0$ і знайти x та y).

2) визначити координати напрямного вектора $\vec{l}=(m;n;p)$.

Очевидно, що $\vec{l}\perp\vec{n}_1, \vec{l}\perp\vec{n}_2$, де $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ – нормальні вектори площин, заданих рівняннями (6.11). Тоді можна обрати напрямний вектор, як вектор векторного добутку нормальних векторів площин (або колінеарний йому):

$$\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}.$$

6.2.2. Взаємне розміщення двох прямих в просторі

Нехай дві прямі в просторі задані своїми канонічними рівняннями [1]

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут між прямими L_1 і L_2 співпадає з одним з вертикальних кутів між прямими, якщо прямі лежать в одній площині і перетинаються. Якщо прямі мимобіжні, то цей кут співпадає з кутом між прямою і проекцією іншої прямої на площину, в якій лежить перша пряма.

З означення скалярного добутку для напрямних векторів маємо $\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2=|\vec{l}_1|\cdot|\vec{l}_2|\cos\varphi$. Оскільки $\vec{l}_1=(m_1;n_1;p_1)$, $\vec{l}_2=(m_2;n_2;p_2)$, тоді

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (6.12)$$

Дві прямі в просторі можуть перетинатися, бути мимобіжними, паралельними і можуть суміщатися.

– ***Прямі*** L_1 **і** L_2 ***паралельні***, якщо $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$, то із умови паралельності двох векторів, маємо

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (6.13)$$

(6.13) – умова паралельності двох прямих.

− ***Умова перпендикулярн****ості* двох прямих рівносильна умові перпендикулярності напрямних векторів, тобто $\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}=0,$ або у координатній формі

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (6.14)$$

− Умова, за якої ***дві прямі перетинаються*** (належать одній площині). Очевидно, що дві прямі в просторі перетинаються тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2},\vec{l_1},\vec{l_2}$ компланарні. З необхідної і достатньої умови компланарності маємо:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (6.15)$$

6.3. Розміщення прямої відносно площини

Пряма в просторі може перетинати задану площину, бути до неї паралельною або лежати на ній. Нехай пряма задана канонічними рівняннями (6.9):

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

а площина (α) – загальним рівнянням (6.2) :

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

а) ***Перетин прямої з площиною***

Якщо пряма перетинає площину, то система рівнянь

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$$

має єдиний розв’язок. Перейшовши в (6.9) до рівнянь (6.8) (в параметричній формі)

$$x=x_0+mt;\ y=y_0+nt;\ z=z_0+pt,$$

після підстановки в загальне рівняння площини, знаходять значення t, яке відповідає точці перетину.

б) ***Кут між прямою і площиною***

Кут між прямою і площиною в просторі визначають ***як кут між прямою та її проекцією*** на площину.

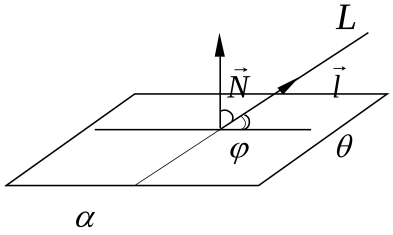


Рис. 6.3. Кут між прямою і площиною.

Очевидно, що $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, кут φ як кут між двома векторами $\vec{n}$ і $\vec{l}$ можна визначити за формулою $\cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{l}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{l}|}$. Оскільки $\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$, виражаючи скалярний добуток через координати, маємо

$$\sin\theta = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{6.16}$$

в) ***Умова паралельності прямої і площини***

Якщо пряма паралельна площині, то кут $\theta = 0.$ Отже, співвідношення

$$Am + Bn + Cp = 0 \tag{6.17}$$

є умова паралельності прямої і площини.

г) ***Умова перпендикулярності прямої і площини***

Якщо пряма перпендикулярна площині, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{l}$ − колінеарні:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \tag{6.18}$$

г) ***Пряма лежить на площині***

Пряма задана канонічними рівняннями лежить в площині, якщо виконується умова (6.17), точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$ теж належить площині:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Am + Bn + Cp = 0. \end{cases} \tag{6.19}$$

д) *Рівняння пучка площин,* які проходять через пряму

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

має вигляд

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (6.20)$$

де λ – будь-яке дійсне число.

Розв'язування типових задач

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $K(2;0;-1)$ і перпендикулярна до осі Ox.

Розв'язування. Рівняння площини, перпендикулярної до осі Ox, має вигляд

$$Ax + D = 0.$$

Підставивши в це рівняння координати точки K, знаходимо $2A + D = 0, D = -2A.$ Підставивши значення D в рівняння площини, дістанемо $Ax - 2A = 0,$ тобто $x - 2 = 0.$

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oz і через точку $M(2;-5;4).$

Розв'язування. Рівняння шуканої площини має вигляд $Ax + By = 0$. Підставивши в це рівняння координати точки M, дістанемо $2A - 5B = 0$, тобто $B = \frac{2}{5}A$. Підставивши тепер значення B в рівняння площини $Ax + By = 0$, знаходимо $Ax + \frac{2}{5}A \cdot y = 0$, тобто $x + \frac{2}{5}y = 0$ або $5x + 2y = 0.$

3. Скласти рівняння площини, яка паралельна осі Ox і проходить через точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(-2;3;4)$.

Розв'язування. Оскільки шукана площина паралельна осі Ox і проходить через точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(-2;3;4)$, то за її нормальний вектор $\vec{n} = (A;B;C)$ можна взяти вектор, перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{M_1M_2} = (-5;4;2)$ і $\vec{n}_1 = (1;0;0)$ (одиничний вектор на осі Ox). З другого боку, відомо, що векторний добуток двох векторів є вектор, перпендикулярний до векторів співмножників, тому за $\vec{n}$ можна взяти векторний добуток $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\vec{n}_1$.

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -5 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-5 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2\vec{j}-4\vec{k}\,.$$

Скористаємось рівнянням площини (6.1). Запишемо площину, яка проходить через дану точку $M_2(-2;3;4)$, перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(0;2;-4)$. Маємо $2(y-3)-4(z-4)=0$ або $y-2z+5=0$.

Зауваження. За нормальний вектор можна брати колінеарні вектори, тобто в наведеному прикладі взяти за $\vec{n}=(0;1;-2)$.

4. Записати рівняння площини, яка перпендикулярна вектору $\vec{n}=(2;-1;3)$ і проходить через точку $(1;2;3)$.

Розв'язування. Використовуємо рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та має вектор нормалі $\vec{n}=(A;B;C)$ за формулою (6.1). Отже,

$$2(x-1)-(y-2)+3(z-3)=0\,,$$

$2x-2-y+2+3z-9=0\Rightarrow 2x-y+3z-9=0$ – рівняння шуканої площини.

5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(4;-3;1)$ і паралельна до площини $3x+2y-4z+12=0$.

Розв'язування. Оскільки шукана площина паралельна площині $3x+2y-4z+12=0$, то за її нормальний вектор можна взяти вектор $\vec{n}=(3;2;-4)$. Використавши тепер рівняння площини, що проходить через дану точку в заданому напрямі (6.1), дістанемо $3(x-4)+2(y+3)-4(z-1)=0$ або $3x+2y-4z-2=0$.

6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-4;1)$ і $M_2(-3;5;7)$ та перпендикулярна до площини $3x+4y-7z+2=0$.

Розв'язування. За нормальний вектор $\vec{n}$ шуканої площини візьмемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{M_1M_2}=(-5;9;6)$ і $\vec{n}=(3;4;-7)$:

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & 9 & 6\\ 3 & 4 & -7\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}9 & 6\\ 4 & -7\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-5 & 6\\ 3 & -7\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-5 & 9\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-87\vec{i}-17\vec{j}-47\vec{k}.$$

Скористаємось рівнянням площини, яка проходить через дану точку $M_1(2;-4;1)$, перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(87;17;47)$:

$$87(x-2)+17(y+4)+47(z-1)=0 \text{ або } 87x+17y+47z-153=0.$$

7. Знайти точки перетину площини $2x+3y-4z-12=0$ із координатними осями.

Розв'язування. Записуємо рівняння площини у відрізках

$$2x+3y-4z=12,\ \frac{2x}{12}+\frac{3y}{12}+\frac{-4z}{12}=1\Rightarrow\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-3}=1,$$

тобто $A(6;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;-3)$ – точки перетину площини з осями координат.

8. Знайти довжини відрізків, які відтинає площина $x-2y+6z-6=0$ на координатних осях.

Розв'язування. Записуємо рівняння площини у відрізках: $x-2y+6z=6$, $\frac{x}{6}+\frac{-2y}{6}+\frac{6z}{6}=1\Rightarrow\frac{x}{6}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{1}=1,$ тобто $A(6;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;0;1)$ – точки перетину площини з осями координат, відповідно, $a=6, b=3, c=1$ – довжини відрізків, які відтинає площина на координатних осях.

9. Знайти гострий кут між площинами $2x-3y+4z-5=0$ і $3x-4y-z+3=0$.

Розв'язування. Щоб обчислити гострий кут φ між площинами, скористаємось формулою (6.6). Отже,

$$\cos\varphi=\left|\frac{2\cdot 3+(-3)\cdot(-4)+4\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+(-1)^2}}\right|=\frac{14}{\sqrt{29}\sqrt{26}}=0,509,\ \varphi=59^0 24'.$$

10. Знайти відстань від точки $A(-5;2;-1)$ до площини $2x+2y-3z-5=0$.

Розв'язування. Відстань від точки до площини знаходиться за формулою (6.5*). Маємо

$$d=\frac{|2\cdot(-5)+2\cdot 2-3\cdot(-1)-5|}{\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{8}{\sqrt{17}}\approx 1{,}94.$$

11. Знайти відстань між паралельними площинами $2x-3y+z-2=0$ і $4x-6y+2z+7=0$.

Розв'язування. Щоб знайти шукану відстань, треба визначити точку, яка належить одній з двох даних площин. Розглянемо площину $4x-6y+2z+7=0$ та точку $A(0;0;-3{,}5)$, яка належить площині. Тоді треба знайти відстань від точки *A* до площини $2x-3y+z-2=0$. За формулою (6.5*) маємо:

$$d=\frac{|2\cdot 0-3\cdot 0-3{,}5-2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{5{,}5}{\sqrt{14}}\approx 1{,}47\ \ (\textit{од.}).$$

12. Скласти рівняння площини, яка проходить через вказані точки $A(1;2;-3)$, $B(3;-1;2)$, $C(5;-3;4)$.

Розв'язування. Нехай точка $M(x;y;z)$ належить до шуканої площини. Складемо три вектори, які будуть виходити з точки A: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AM}=(x-1;y-2;z+3)$; $\overrightarrow{AB}=(2;-3;5)$; $\overrightarrow{AC}=(4;-5;7)$. Так як вектори належать одній площині, то вони компланарні. За умовою компланарності $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, маємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -5 & 7 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}+(z+3)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=0,$$

тобто $2x+3y+z-5=0$ є рівнянням шуканої площини.

Зауваження. Можна зразу записувати рівняння площини за формулою (6.4).

13. Скласти рівняння прямої, яка паралельна вектору $\vec{l}=(2;3;1)$ і проходить через точку $M(-1;4;-2)$.

Розв'язування. Використовуючи канонічні рівняння прямої (6.9), маємо

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{1}.$$

Якщо ці рівняння записати у вигляді системи, то дістанемо загальні рівняння прямої: $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{3}, \\ \dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+2}{1};\end{cases}$ або $\begin{cases}3x-2y+5=0, \\ y-3z-10=0.\end{cases}$

14. Скласти рівняння прямої, яка паралельна осі Oy і проходить через точку $M(2;-1;1)$.

Розв'язування. Напрямний вектор $\vec{l}$ прямої колінеарний осі Oy, отже, його проекції на осях Ox і Oz дорівнюють нулю. Виберемо його напрям такий, що збігається з додатним напрямом осі Oy, тоді $\vec{l}=(0;1;0)$. Складемо канонічні рівняння прямої: $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{0}$.

15. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;-3;-1)$ і паралельна прямій $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+3}{-3}$.

Розв'язування. Оскільки шукана пряма паралельна даній, то за її напрямний вектор можна взяти вектор $\vec{l}=(2;4;-3)$ даної прямої. Канонічні рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+1}{-3}.$$

16. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-3;2;4)$ і $B(7;-3;2)$.

Розв'язування. За формулою (6.10) маємо $\dfrac{x+3}{7+3}=\dfrac{y-2}{-3-2}=\dfrac{z-4}{2-4}$ або

$$\frac{x+3}{10}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-4}{-2}.$$

17. Довести, що прямі $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+6}{3}=\dfrac{z-1}{-4}$ і $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z+1}{2}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язування. За умовою перпендикулярності (6.14), маємо $-2\cdot 5+3\cdot 6+(-4)\cdot 2=0,$ тобто прямі перпендикулярні.

18. Обчислити гострий кут між двома прямими $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}$ і $\frac{x+1}{12}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{4}$.

Розв'язування. За формулою (6.12) знаходимо:

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot 12+1\cdot 3+2\cdot 4}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{12^2+3^2+4^2}}=\frac{35}{3\cdot 13}\approx 0{,}897,\ \varphi=26^0 12'.$$

19. Обчислити кут між прямою $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{-3}$ і площиною $3x+4y+2z-5=0$**.**

Розв'язування. Скористаємось формулою (6.16):

$$\sin\theta=\frac{|3\cdot 1+4\cdot 2+2\cdot(-3)|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{14}}\approx 0,2482,\ \theta=14^0 22'.$$

20. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(-2;-3;1)$, перпендикулярно до прямої $\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+3}{-3}$.

Розв'язування. Відомо, що за нормальний вектор $\vec{n}$ шуканої площини можна взяти паралельний йому напрямний вектор $\vec{l}=(2;4;-3)$ даної прямої. Скористаємось рівнянням площини (6.1), яка проходить через задану точку, перпендикулярно до вектора $\vec{l}$:

$$2(x+2)+4(y+3)-3(z-1)=0,$$

або, спростивши, $2x+4y-3z+19=0.$

21. Перевірити, що пряма $\frac{x+4}{5}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{7}$ паралельна площині $4x-3y-2z+7=0$.

Розв'язування. Використавши умову (6.17) паралельності прямої і площини, дістанемо $5\cdot 4+2\cdot(-3)+7\cdot(-2)=0$, тобто пряма і площина паралельні.

22. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases} x-2y+3z-5=0, \\ 2x+y-z+1=0, \end{cases}$ і точку $M(1;-3;5)$.

Розв'язування. Використавши рівність (6.20), запишемо рівняння пучка площин, які проходять через дану пряму:

$$x-2y+3z-5+\lambda(2x+y-z+1)=0. \qquad (*)$$

Оскільки координати точки M повинні задовольняти рівнянню площини, то, підставивши у співвідношення (*) координат точки, маємо $1-2\cdot(-3)+3\cdot 5-5+\lambda(2\cdot 1-3-5+1)=0$ або $-5\lambda+17=0$, звідки $\lambda=\dfrac{17}{5}$.

Підставивши тепер у співвідношення (*) знайдене значення λ, дістанемо

$$5x-10y+15z-25+34x+17y-17z+17=0 \text{ або } 39x+7y-2z-8=0.$$

Завдання для самоконтролю

1. Довести загальне рівняння площини, записати координати нормального вектора.

2. Записати і пояснити неповні рівняння площини.

3. Яке рівняння називається рівнянням площини у відрізках на осях?

4. Отримати рівняння площини, що проходить через три вказані точки.

5. Вивести нормальне рівняння площини. Що таке нормуючий множник? Навести формулу обчислення відстані від точки до площини.

6. Записати формулу обчислення кута між двома площинами. Сформулювати умови паралельності та перпендикулярності двох площин.

7. Записати різні форми рівнянь прямої в просторі (векторне рівняння, параметричні, канонічні, загальні; рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки).

8. Пояснити на прикладі перехід від загальних рівнянь прямої в просторі до канонічних (параметричних) рівнянь.

9. Описати взаємне розміщення двох прямих в просторі: паралельність, перпендикулярність, належність одній площині, мимобіжність.

10. Що називають кутом між прямою та площиною в просторі? Записати формулу його обчислення.

11. Охарактеризувати взаємне розміщення прямої та площини в просторі. Записати умови паралельності, перпендикулярності прямої і площини; умову того, що пряма належить площині.

12. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(-2;3;1)$ і вісь Oz.

13. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(2;-1;2)$ і $B(3;0;4)$) та перпендикулярна до площини $x+2y-z=0$.

14. Обчисліть кут між площинами $2x-3y+5z-2=0$ і $x-y+z=0$.

15. Знайти відстань між паралельними площинами $2x-3y+z-4=0$ і $4x-6y+2z+10=0$.

16. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(1;-3;2)$, паралельно двом векторам: $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$ і $\bar{b}=5\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$.

17. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1;4;-2)$ і паралельна до вектора $\vec{l}=(3;-2;5)$.

18. Обчисліть кут між прямими $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-5}$, $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$.

19. Перевірте, що пряма $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+1}{3}$ паралельна площині $3x-5y-3z-4=0$.

20. Обчисліть кут між прямою $\frac{x-2}{4}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}$ і площиною $3x-2y+4z-2=0$.

21. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$ і точку $M(2;-5;4)$.

Відповіді. **12**. $3x+2y=0$. **13.** $5x-3y-z-11=0$. **14.** $\cos\varphi=\frac{10}{\sqrt{114}}=0,937;\ \varphi=20^{\circ}$.
15. $d=\frac{9}{\sqrt{14}}$. **16.** $x-7y-9z-4=0$. **17.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+2}{5}$. **18.** $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{789}}\approx 0,177;\ \varphi=79^{\circ}$.
20. $\sin\varphi=\frac{8}{\sqrt{609}}\approx 0,324; \varphi=18^{\circ}$. **21.** $11x-2y-2z-28=0$.

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

7. Числові послідовності

7.1. Нескінченна числова послідовність

Означення. ***Нескінченною числовою послідовністю*** називається числова функція, визначена на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел [8].

Означення. Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ називається ***зростаючою (спадною)***, якщо для будь-якого *n* виконується нерівність $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$.

Означення. Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ називається ***незростаючою (неспадною)***, якщо для будь-якого *n* виконується нерівність $x_{n+1} \leq x_n$ $(x_{n+1} \geq x_n)$.

Спадні, зростаючі, неспадні і незростаючі послідовності називаються ***монотонними.***

Звичайно послідовність задається формулою, яка виражає загальний член послідовності через *n*.

Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ називається ***обмеженою зверху***, якщо існує число *M*, таке, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n \leq M$.

Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ називається ***обмеженою знизу,*** якщо існує число *M*, таке, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n \geq M$.

Означення. Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ називається ***обмеженою***, якщо вона обмежена знизу та зверху.

Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ не обмежена зверху або знизу, називається ***необмеженою.***

7.2. Границя числової послідовності, властивості збіжних послідовностей

Означення. Число *a* називається ***границею послідовності*** $\{x_n, n \geq 1\}$, якщо для будь-якого додатного числа $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$, для $\forall n > \mathbb{N}$ буде виконуватися нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Записується: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Зауважимо, що нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівностям $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Це означає, що число x_n належить інтервалу $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Такий інтервал називається ε-околом точки a.

Послідовність може мати лише одну границю. Якщо послідовність має границю, то таку послідовність називають ***збіжною***, а послідовність, яка не має границі, називається ***розбіжною***.

Властивості збіжних послідовностей

1. Границя сталої дорівнює цій сталій.

2. Якщо послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ має границю, то ця границя єдина.

3. Послідовність, яка має границю, є обмеженою.

4. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < b$. Тоді знайдеться число $\mathbb{N}$ таке, що для будь-якого $n > N$ справджуватиметься нерівність $x_n < b$.

5. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Якщо послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ за всіх n задовольняє нерівність $x_n \leq b$, то $a \leq b$.

6. Нехай виконується нерівність $x_n \leq u_n \leq y_n$. Якщо послідовності $\{x_n, n \geq 1\}$ і $\{y_n, n \geq 1\}$ збіжні та $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то послідовність $\{u_n, n \geq 1\}$ також буде збіжною, причому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

7. Будь-яка монотонна обмежена послідовність має границю (теорема Больцано-Вейєрштрасса).

Основні теореми про границі послідовності

Теорема 1. *Якщо послідовності* $\{x_n, n \geq 1\}$ *і* $\{y_n, n \geq 1\}$ *збігаються, то*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 2. *Якщо послідовності* $\{x_n, n \ge 1\}$ *і* $\{y_n, n \ge 1\}$ *збігаються, то*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Теорема 3. *Сталий множник можна винести за знак границі; якщо послідовність* $\{x_n, n \ge 1\}$ *збігається, то* $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot x_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема 4. *Якщо послідовності* $\{x_n, n \ge 1\}$ *і* $\{y_n, n \ge 1\}$ *збігаються і границя послідовності* $\{y_n, n \ge 1\}$ *відмінна від нуля, то* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Означення. Послідовність називається ***нескінченно малою***, якщо її границя дорівнює нулю.

Для нескінченно малих послідовностей справедливі наступні теореми:

Теорема1. *Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою.*

Теорема 2. *Добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу є нескінченно малою.*

Теорема 3. *Щоб виконувалася рівність* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *необхідно і достатньо, щоб* $x_n = a + \alpha_n$, *де* $\{\alpha_n, n \ge 1\}$ *− нескінченно мала послідовність.*

Означення. Послідовність називається ***нескінченно великою***, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Розв’язування типових задач

1. Обчислити границі [5]:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-2n+4}{3n^2+4n-2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-3n}{7n^2-4n+1}$;4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-3n^2+2}{6n^2-1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+3n+2}+5n}{3n+7}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+4n})$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2+7})$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+7})$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{1+3+5+...+(2n-1)}$.

Розв'язування.

1) Чисельник і знаменник не мають границі, бо це необмежені послідовності, тому теорему про границю частки безпосередньо застосувати не можна. Поділивши чисельник і знаменник на *n*, застосувавши потім теорему про границю частки, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-1/n}{3+2/n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2-1/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+2/n)}=\frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)}{3+\lim\limits_{n\to\infty}(2/n)}=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

Решта границь 2-5 обчислюється аналогічно (чисельник і знаменник ділимо на *n* у старшій степені):

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-2n+4}{3n^2+4n-2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5-2/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+4/n-2/n^2)}=\frac{5-0+0}{3+0-0}=\frac{5}{3}.$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2-3n}{7n^2-4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2/n^2-3/n}{7-4/n+1/n^2}=\frac{0-0}{7-0+0}=\frac{0}{7}=0.$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+2}{6n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-3/n\ +2/n^3}{6/n-1/n^3}=\frac{2-0+0}{0-0}=\frac{2}{0}=\infty.$$

5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+3n+2}+5n}{3n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+3/n+2/n^2}+5}{3+7/n}=\frac{\sqrt{4}+5}{3}=\frac{7}{3}.$$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+4n})$. Якщо $n\to\infty$, то послідовність $\left\{n-\sqrt{n^2+4n}, n\geq 1\right\}$ є різницею двох нескінченно великих послідовностей $(\infty-\infty)$. Помноживши і поділивши загальний член послідовності на вираз $n+\sqrt{n^2+4n}$, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+4n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2+4n})\,(n+\sqrt{n^2+4n})}{(n+\sqrt{n^2+4n})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2-4n}{n+\sqrt{n^2+4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{1+\sqrt{1+4/n}}=\frac{-4}{1+1}=-2.$$

Решта границь 7,8 обчислюється аналогічно 6).

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2+7})=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2+7})\cdot(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})}{(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-2-n^2-7}{(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-9}{(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-9/n}{(\sqrt{1+3/n-2/n^2}+\sqrt{1+7/n^2})}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+7})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+7})\cdot(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2-3n-7}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})}=0.$$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{1+3+5+...+(2n-1)}$. Чисельник і знаменник не мають границі, бо це необмежені послідовності, які утворюють відповідні суми арифметичних прогресій. У чисельнику така сума дорівнює $S_n=\dfrac{1+n}{2}\cdot n$, а в знаменнику – сума $\sigma_n=\dfrac{1+2n-1}{2}\cdot(2n-1)$, або $\sigma_n=n\cdot(2n-1)$. Тоді дана границя має вигляд

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{1+3+5+...+(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)\cdot n}{2n\cdot(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{2-1/n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається числовою послідовністю? Навести приклади.

2. Навести приклади монотонних послідовностей, обмеженої та необмеженої числової послідовності.

3. Записати означення границі числової послідовності, пояснити його.

4. Сформулювати основні властивості збіжних числових послідовностей.

5. Пояснити на прикладах правила обчислення границі числової послідовності.

6. Обчислити границі [5]:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{3n^2+2n+4}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+n^2}{3n^2-5n+1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+n-3n^2}{4-n+2n^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+...+(3n-2)}{2+3+4+...+(n+1)}$.

Відповіді. **6.** 1) 0; 2) ∞; 3) $-\dfrac{3}{2}$; 4) $\dfrac{5}{2}$; 5) 3.

8. Диференціальне числення функції однієї змінної

8.1. Похідна функції, її обчислення

8.1.1. Похідна функції, її геометричний зміст

Означення. Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то кажуть, що y є функція від x і записують $y = f(x)$.

Способи задання функції: аналітичний, табличний, графічний.

Означення. Число b називається ***границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x-a| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x)-b| < \varepsilon.$$

Скорочено це означення можна записати так:

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \quad \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x)-b| < \varepsilon.$$

З геометричної точки зору, якщо число b є границею функції в точці, то для всіх значень аргументу, які групуються навколо цієї точки, відповідні значення функції як завгодно мало відрізняються від значення b.

Означення. ***Похідною*** функції $y = f(x)$ називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \qquad (8.1)$$

Якщо у деякій точці x границя (8.1) дорівнює ∞, то похідну у цій точці називають *нескінченною*. Якщо границя (8.1) у деякій точці x не існує, то у цій точці не існує і похідної $f'(x)$. Далі під похідною будемо розуміти скінченну похідну.

Значення похідної функції $y=f(x)$ у точці $x=x_0$ позначається одним з символів: $f'(x_0)$, $f'(x)\big|_{x=x_0}$, $y'\big|_{x=x_0}$, $y'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

З означення похідної випливає наступний спосіб її знаходження. Щоб знайти похідну функції $y=f(x)$ у деякій точці x, треба:

1) надати значенню x довільного приросту Δx і знайти відповідний приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

2) знайти відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

3) знайти границю цього відношення

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то вона дорівнює шуканій похідній $f'(x)$.

Операцію знаходження похідної від функції $f(x)$ називають ***диференціюванням*** цієї функції.

Означення. ***Дотичною*** до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0\,;y_0)$ називається граничне положення січної M_0M за умови $\Delta x\to 0$.

Геометричний зміст похідної. Похідна функції $y=f(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка даної функції в точці $M_0(x_0\,; f(x_0))$.

Рівняння дотичної до графіка функції запишемо як рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0\,; f(x_0))$ і має кутовий коефіцієнт $k=f'(x_0)$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \qquad (8.2)$$

Означення. Пряма M_0N, перпендикулярна до дотичної M_0T в точці $M_0(x_0\,;y_0)$, називається ***нормаллю*** до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0\,;y_0)$.

Так як кутовий коефіцієнт нормалі дорівнює $k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x_0)}$, рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0\,;\,f(x_0))$ буде мати вигляд

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \left(x - x_0\right), \qquad (8.3)$$

якщо $f'(x_0) \neq 0$.

8.1.2. Обчислення похідних

Наводимо ***таблицю*** *похідних основних елементарних функцій*.

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$.
3. $(\sin x)' = \cos x$.
4. $(\cos x)' = -\sin x$.
5. $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
6. $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.
8. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.
9. $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
10. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
11. $(a^x)' = a^x \ln a$.
12. $(e^x)' = e^x$.
13. $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$.
14. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x} \quad (x > 0,\ a > 0)$.
15. $(\mathrm{sh} x)' = \mathrm{ch} x$.
16. $(\mathrm{ch} x)' = \mathrm{sh} x$.
17. $(\mathrm{th} x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$.
18. $(\mathrm{cth} x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

Основні правила знаходження похідної

Теорема. *Якщо* $C -$ *постійна величина,* $u = u(x), v = v(x) -$ *диференційовні функції, тоді*

1) $(C)' = 0$; 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 3) $(Cu)' = Cu'$;

4) $(uv)' = u'v + uv'$;

5) $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, (v \neq 0). \qquad (8.4)$$

Складена функція та її похідна

Означення. Функція називається ***складеною***, якщо її аргумент також функція: $y = f(g(x))$.

Функція $g(x)$, яка є аргументом для функції $f(g)$, називається внутрішньою функцією, а функція $f(g)-$ зовнішньою.

Похідна складеної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції на похідну внутрішньої функції

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'_g\left(g(x)\right)\cdot g'(x). \qquad (8.5)$$

Це правило залишається справедливим, коли складена функція має кілька проміжних аргументів. Наприклад, якщо $y = f\left(u\right)$, $u=\varphi\left(v\right)$, $v=\psi\left(x\right)$, то $y'_x = y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$.

При диференціюванні складених функцій потрібно чітко уявляти собі, яка з дій, що призводить до значення складеної функції є останньою. Та величина, над якою виконується остання дія, приймається за проміжний аргумент.

Неявна функція та її похідна

Нехай функція $y = y\left(x\right)$ задана у неявній формі, тобто у вигляді рівняння $F\left(x,y\right)=0$. Для знаходження похідної y'_x немає необхідності виражати з цього рівняння змінну y через x в явному вигляді $y = f\left(x\right)$. Достатньо продиференціювати рівняння $F\left(x,y\right)=0$ за змінною x, вважаючи змінну y функцією x, і з отриманого рівняння знайти y'_x. Похідна y'_x виражатиметься через змінні x та y.

Функції, задані параметрично та їх диференціювання

Означення. Система рівнянь $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t\in T \end{cases}$ називається ***параметричним рівнянням*** лінії, а змінна t − параметром.

Нехай в деякій області зміни параметра t функції $x = x(t)$ та $y = y(t)$ диференційовані і $x'(t)\neq 0$. Знайдемо похідну $y'_x : y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)\cdot dt}{x'(t)\cdot dt} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Отже,

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}, \\ x = x(t). \end{cases} \tag{8.6}$$

8.2. Диференціал функції та його властивості

Нехай функція $y = f(x)$ у точці x має відмінну від нуля похідну $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тоді у деякому околі точки x відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, тому приріст функції $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. При цьому величина $\alpha \cdot \Delta x$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж $f'(x) \cdot \Delta x$ і нескінченно мала $\Delta y \sim f'(x) \cdot \Delta x$. Величину $f'(x) \cdot \Delta x$ називають *головною частиною* приросту функції Δy.

Означення. ***Диференціалом*** dy функції $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx, частину її приросту Δy, що дорівнює добутку похідної функції у цій точці на приріст аргументу:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{8.7}$$

Диференціал dy називають також ***диференціалом першого порядку.***

Знайдемо диференціал незалежної змінної x, тобто диференціал функції $y = x$. Оскільки $y' = 1$, то $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, тобто диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту: $dx = \Delta x$, тобто формулу (8.7) можна записати у вигляді:

$$dy = f'(x)dx. \tag{8.8}$$

Таким чином, диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної.

З формули (8.8) випливає, що $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, тобто позначення похідної $\dfrac{dy}{dx}$ можна розглядати як відношення диференціалів dy та dx.

З геометричної точки зору диференціал функції $y=f(x)$ у точці x дорівнює приросту ординати дотичної до графіка функції у цій точці, коли змінна x отримує приріст Δx.

З'ясуємо механічний зміст диференціала. Нехай матеріальна точка рухається за відомим законом $s=s(t)$. Диференціал $ds=s'(t)\Delta t$ функції $s(t)$ при фіксованих значеннях t і Δt – це той шлях, який пройшла б матеріальна точка за час Δt, якби вона рухалася рівномірно і прямолінійно зі сталою швидкістю $v=s'(t)$. Зрозуміло, що фактичний шлях Δs у випадку нерівномірного руху матеріальної точки, на відміну від диференціала ds, не є лінійною функцією часу Δt і тому відрізняється від шляху ds. Проте, якщо час Δt є достатньо малим, то швидкість руху не встигає суттєво змінитись, і тому рух точки на проміжку часу від t до $t+\Delta t$ є майже рівномірним.

Основні формули, пов'язані з диференціалами, можна отримати, використовуючи зв'язок між диференціалом функції та її похідною ($dy=y'(x)dx$), та відповідні формули для похідних.

Нехай $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовні функції. Тоді виконуються наступні рівності:

1. $d(u+v)=du+dv$.
2. $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$.
3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}$.

Теорема. *Диференціал складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на диференціал цього проміжного аргументу.*

Доведення. Нехай $y=f(u)$ і $u=\varphi(x)$ – диференційовні функції, що утворюють складену функцію $y=f(\varphi(x))$. Тоді $y'(x)=f'_u\cdot u'_x$, диференціал $dy=f'(x)dx=f'_u\cdot u'_x dx=f'_u\cdot du$.

Таким чином, $dy = f'_x dx = f'_u du$, тобто диференціал функції $y(x)$ визначається однією й тією ж формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною, чи функцією іншого аргументу. Цю властивість диференціала першого порядку називають *інваріантністю (незмінністю) форми диференціала*.

Застосування диференціала до наближених обчислень

Як вже зазначалося, приріст Δy функції $y = f(x)$ у точці x можна наближено замінити диференціалом dy у цій точці: $\Delta y \approx dy$. Підставивши сюди значення Δy і dy, отримаємо наближену формулу:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{8.9}$$

Абсолютна похибка величини $\Delta y - dy$ при $\Delta x \to 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx, оскільки при $f'(x) \neq 0$ величини Δy і dy є еквівалентними нескінченно малими:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1.$$

Тут $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

8.3. Похідні та диференціали вищих порядків

8.3.1. Похідні вищих порядків явно заданої функції. Похідна функції $y = f(x)$ $y' = f'(x)$ теж є функцією змінної x, тому можна розглядати задачу знаходження похідної цієї функції. Якщо функція $y' = f'(x)$ є диференційовною, то її похідну називають *похідною другого порядку* функції $y = f(x)$ і позначають $y''(x)$ або $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Отже, $y''(x) = (y'(x))'$. Похідну від похідної другого порядку функції $y = f(x)$ називають її третьою похідною або *похідною третього порядку* та позначають $y'''(x)$. Таким чином, $y'''(x) = (y''(x))'$. Аналогічно можна визначити похідну довільного n-го порядку як похідну від похідної $(n-1)$-го порядку. Для похідної n-го порядку використовують позначення $y^{(n)}(x)$ або $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Означення. ***Похідною*** n***-го порядку*** або n-ою похідною функції $y=f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку цієї функції, тобто

$$y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'. \tag{8.10}$$

Похідні порядків, вищих, ніж перший, називають ***похідними вищих порядків.***

Для знаходження похідної n-го порядку добутку функцій $u(x)$ та $v(x)$ використовують формулу Лейбніца:

$$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+...$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+...+uv^{(n)}.$$

8.3.2. Диференціали вищих порядків

Нехай $y=f(x)$ – диференційовна функція незалежної змінної x. Тоді її диференціал $dy=f'(x)dx$ теж є функцією аргументу x і можна знайти диференціал цієї функції.

Означення. Диференціал диференціала функції $y=f(x)$ називають її *другим диференціалом*, або ***диференціалом другого порядку***. Його позначають d^2y або $d^2f(x)$.

Знайдемо вираз для d^2y.

$$d^2y=d(dy)=d\left(f'(x)dx\right)=\left(f'(x)dx\right)'dx=f''(x)dx^2.$$

Таким чином, отримали формулу:

$$d^2y=f''(x)dx^2. \tag{8.11}$$

Аналогічно можна визначити диференціал третього поряду як диференціал диференціала другого порядку:

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x)dx^2\right) = \left(f''(x)dx^2\right)' dx = f'''(x)dx^3.$$

Означення. ***Диференціалом*** n***-го порядку*** називають диференціал диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right) = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (8.12)$$

З формули (8.12) випливає, що n-у похідну функції $y = f(x)$ можна записати у вигляді відношення її диференціала n-го порядку до n-го степеня диференціала незалежної змінної: $y^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Наведені вище формули для диференціалів вищих порядків є вірними, якщо x є незалежною змінною. Якщо ж змінна x є функцією незалежної змінної t, тобто $x = x(t)$, то

$$d^2y = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)d\left(dx\right) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким чином, якщо у функції $y = f(x)$ змінна x є залежною змінною, тобто $x = x(t)$, то $d^2y \neq f''(x)dx^2$. Ми бачимо, що диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності форми.

8.4. Застосування диференціального числення до дослідження функції

Теорема 1 ***(Необхідна умова зростання функції).*** *Якщо диференційована функція* $y = f(x)$ *зростає на інтервалі* $(a;b)$, *то* $f'(x) \geq 0$ *для будь-якого* $x \in (a;b)$.

Доведення. З означення зростаючої функції $x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x)$. Тому $x - x_0 > 0$; $f(x) - f(x_0) > 0$, відповідно,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0.$$

Теорема 2 ***(Необхідна умова спадання функції).*** *Якщо диференційована функція* $y = f(x)$ *спадає на інтервалі* $(a;b)$, *то* $f'(x) \le 0$ *для будь-якого* $x \in (a;b)$.

Теорема 3 ***(Достатня умова зростання функції).*** *Якщо функція* $y = f(x)$ *має додатну похідну в кожній точці інтервалу* $(a;b)$, *то ця функція зростає на цьому інтервалі.*

Теорема 4 ***(Достатня умова спадання функції).*** *Якщо функція* $y = f(x)$ *має від'ємну похідну в кожній точці інтервалу* $(a;b)$, *то ця функція спадає на цьому інтервалі.*

Теорема 5 ***(Необхідна і достатня умова сталості функції).*** *Диференційована функція* $y = f(x)$ *є сталою на інтервалі* $(a;b)$ *тоді і тільки тоді, коли* $f'(x) = 0$ *для будь-якого* $x \in (a;b)$.

Означення. Точка x_0 з області визначення функції $y = f(x)$ називається ***точкою мінімуму*** цієї функції (рис. 8.1), якщо знайдеться такий δ-окіл точки x_0, що для будь-якого $x \ne x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$.

Означення. Точка x_0 з області визначення функції $y = f(x)$ називається ***точкою максимуму*** цієї функції (рис. 8.2), якщо знайдеться такий δ-окіл точки x_0, що для будь-якого $x \ne x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x_0) > f(x)$.

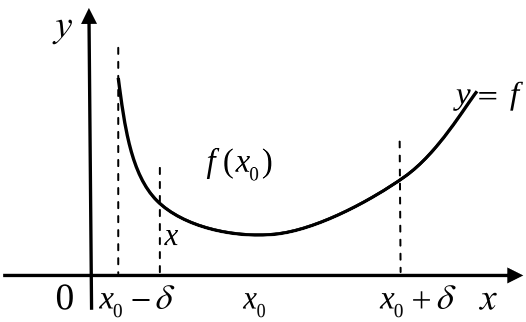


Рис. 8.1. Точка мінімуму.

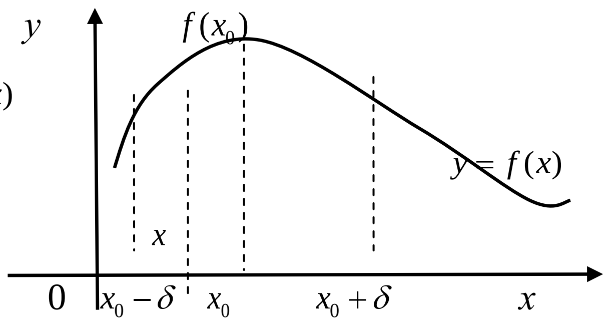


Рис. 8.2. Точка максимуму.

Означення. Точки мінімуму і максимуму називаються ***точками екстремуму***, а значення функції в цих точках називається екстремумами функції.

Так як максимум і мінімум пов’язані з конкретним δ-околом, вони не обов’язково є найбільшим та найменшим значенням функції.

Теорема Ферма. *Якщо точка* x_0 *є точкою екстремуму функції* $y = f(x)$ *і в цій точці існує похідна, то* $f'(x_0) = 0$.

Означення. Точки, в яких похідна функції перетворюється на нуль або не існує, називаються ***критичними точками функції***.

Теорема ***(Достатня умова існування екстремуму)***. *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна в точці* x_0 *і в деякому її δ-околі має похідну, крім можливо самої точки* x_0. *Тоді, якщо похідна* $f'(x)$ *при переході через точку* x_0 *змінює знак з «+» на «-», то точка* x_0 *є точкою максимуму. Якщо при переході через точку* x_0 *похідна змінює знак з «-» на «+», то* x_0 *− точка мінімуму. Якщо похідна не змінює знак, то точка* x_0 *точкою екстремуму не буде.*

Означення. Графік функції $y = f(x)$ називається ***опуклим вгору*** на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-якого x з цього інтервалу графік (рис. 8.3) розташований нижче дотичної, проведеної до графіка функції в точці x.

Означення. Графік функції $y = f(x)$ називається ***опуклим вниз*** на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-якого x з цього інтервалу графік (рис. 8.4) розташований вище дотичної, проведеної до графіка функції в точці x.

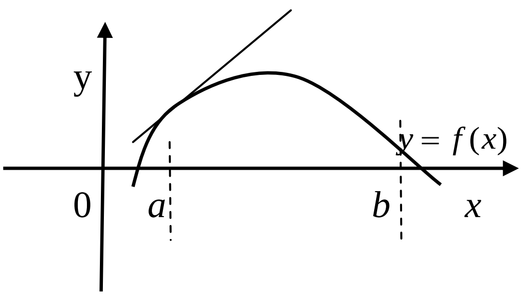


Рис.8.3. Опуклий вгору графік.

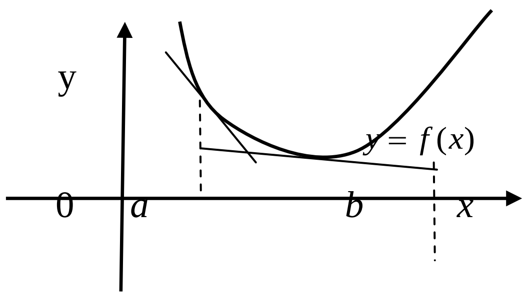


Рис.8.4. Опуклий вниз графік.

Теорема ***(Достатня умова опуклості графіка функції).*** *Якщо на інтервалі* $(a;b)$ *двічі диференційована функція* $y = f(x)$ *має від’ємну (додатну) другу похідну, то графік функції опуклий вгору (вниз).*

Означення. ***Критичними точками другого роду*** називаються точки, в яких друга похідна не існує, або дорівнює нулю.

Означення. Точка графіка неперервної функції $y = f(x)$, при переході через яку крива змінює характер опуклості, називається ***точкою перегину*** графіка функції.

Теорема *(Необхідна умова існування перегину).* *Якщо функція* $y = f(x)$ *має неперервні похідні до другого порядку включно на інтервалі* $(a;b)$ *і точка* $(x_0; f(x_0))$; $x_0 \in (a;b)$ *є точкою перегину графіка функції, то* $f''(x_0) = 0$.

Теорема *(Достатня умова існування перегину).* *Якщо функція* $y = f(x)$ *двічі диференційована на інтервалі* $(a;b)$ *і при переході через точку* $x_0 \in (a;b)$ *друга похідна* $f''(x)$ *змінює знак, то точка кривої з абсцисою* $x = x_0$ *є точкою перегину графіка функції.*

Загальна схема побудови графіків функцій [8]

1) Знайти область визначення функції та множину значень.
2) Дослідити функцію на парність та періодичність.
3) Дослідити функцію на неперервність.
4) Дослідити функцію на монотонність та точки екстремуму (за першою похідною).
5) Дослідити функцію за другою похідною на опуклість.
6) Дослідити функцію на нескінченності.
7) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
8) Побудувати ескіз графіка функції.

Розв'язування типових задач

1. Знайти похідні функції:

1) $y = 4 + 5x^2 + \dfrac{8}{x^2} - \dfrac{4\sqrt{x}}{3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; 2) $y = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt[5]{x}} - 5$;

3) $y = x^4 \sin x$; 4) $y = \dfrac{8x-7}{2x^3 + x^2}$; 5) $y = \sqrt{x}\, e^x - \dfrac{7^x + 7x}{2\cos x}$.

Розв'язування.

1) Знайдемо похідну від алгебраїчної суми як алгебраїчну суму похідних доданків:

$$y' = (4)' + (5x^2)' + \left(\frac{8}{x^2}\right)' - \left(\frac{4\sqrt{x}}{3}\right)' - \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = 5\cdot 2x + 8\cdot(-2)\cdot x^{-2-1} -$$

$$-\frac{4\cdot 1}{3\cdot 2\sqrt{x}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = 10x - \frac{16}{x^3} - \frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}};$$

2) $y' = 2\left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^{1-\frac{1}{5}}\right)' - (5)' = 2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5}\cdot x^{-\frac{1}{5}} = 3\sqrt{x} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$.

3) Знайдемо похідну за основним правилом добутку:

$$y' = \left(x^4\right)'\sin x + x^4\cdot(\sin x)' = 4x^3\sin x + x^4\cos x.$$

4) Використаємо правило частки:

$$y' = \frac{(8x-7)'\cdot\left(2x^3+x^2\right) - (8x-7)\cdot\left(2x^3+x^2\right)'}{\left(2x^3+x^2\right)^2} = \frac{8\cdot\left(2x^3+x^2\right) - (8x-7)\cdot\left(6x^2+2x\right)}{\left(2x^3+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{16x^3 + 8x^2 - 48x^3 + 42x^2 - 16x^2 + 14x}{\left(2x^3+x^2\right)^2} = \frac{-32x^3 + 34x^2 + 14x}{(2x^3+x^2)^2}.$$

5) $y' = \left(\sqrt{x}\right)'\cdot e^x + \sqrt{x}\cdot\left(e^x\right)' - \dfrac{\left(7^x+7x\right)'\cdot 2\cos x - \left(7^x+7x\right)\left(2\cos x\right)'}{4\cos^2 x} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^x + \sqrt{x}\cdot e^x - \frac{\left(7^x\ln 7 + 7\right)\cdot 2\cos x + 2\left(7^x + 7x\right)\sin x}{4\cos^2 x}.$$

2. Знайти похідні складених функцій:

1) $y = \ln\sin x + \sqrt{\mathrm{arctg} x}$; 2) $y = e^{3tg\frac{1}{x}} + \cos^3 x$;

Розв'язування.

1) Знайдемо похідну від першого доданку за формулою $y'_x = y'_u\cdot u'_x$, де $y = \ln u, u = \sin x$. Тоді

$$y'_x = \ln u\cdot u'_x = \frac{1}{u}\cdot\left(\sin x\right)'_x = \frac{1}{\sin x}\cos x = \mathrm{ctg} x.$$

Похідну від другого доданку знайдемо аналогічно, оскільки $y=\sqrt{u},\ u=\text{arctg}x.$

$$y'_u=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'_x=\frac{1}{2\sqrt{\text{arctg}x}}\cdot\left(\text{arctg}x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\text{arctg}x}}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

Загалом,

$$y'_x=\text{ctg}x+\frac{1}{2\sqrt{\text{arctg}x}}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

2) $y'=\left(e^{3\text{tg}\frac{1}{x}}\right)'+\left(\cos^3 x\right)'=$

$$=e^{3\text{tg}\frac{1}{x}}\left(3\text{tg}\frac{1}{x}\right)'+3\cos^2 x\left(\cos x\right)'=e^{3\text{tg}\frac{1}{x}}\cdot 3\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+$$

$$+3\cos^2 x\left(-\sin x\right)=e^{3\text{tg}\frac{1}{x}}\cdot\frac{3}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-3\cos^2 x\sin x.$$

3. Знайти похідну параметрично заданої функції $\begin{cases}x=e^t\sin t,\\ y=e^t\cos t.\end{cases}$

Розв'язування. Знайдемо похідну за формулою (8.6).

$$y'_t=e^t\cdot\cos t+e^t\cdot\left(-\sin t\right)=e^t\left(\cos t-\sin t\right),$$

$$x'_t=e^t\cdot\sin t+e^t\cdot\cos t=e^t\left(\sin t+\cos t\right);$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{e^t\left(\cos t-\sin t\right)}{e^t\left(\sin t+\cos t\right)}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}.$$

Отже, $\begin{cases}y'_x=\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t},\\ x=e^t\sin t.\end{cases}$

4. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x^2+4y^3+2xy=0$; 2) $\cos(x+y)-e^{3y}=0$.

Розв'язування. 1) Диференціюємо за змінною x ліву і праву частину рівняння, враховуючи, що $y = y(x)$, тобто функція від незалежної змінної x. Маємо

$$2x + 12y^2 \cdot y'_x + 2y + 2x \cdot y'_x = 0,$$

розв'язуємо рівняння відносно $y'_x : y'_x\left(12y^2 + 2x\right) = -2x - 2y,$

$$y'_x = \frac{-2x - 2y}{12y^2 + 2x} = -\frac{x + y}{6y^2 + x}.$$

2) Диференціюємо за *x:*

$$-\sin(x + y) \cdot \left(x + y\right)'_x - e^{3y} \cdot \left(3y\right)'_x = 0,$$

$$-\sin(x + y) \cdot \left(1 + y'_x\right) - e^{3y} \cdot 3 \cdot y'_x = 0;$$

$$-\sin(x + y) - y'_x \cdot \sin\left(x + y\right) - e^{3y} \cdot 3 \cdot y'_x = 0;$$

$$y'_x \cdot \left(\sin(x + y) + 3e^{3y}\right) = -\sin(x + y);\ y'_x = -\frac{\sin(x + y)}{\sin(x + y) + 3e^{3y}}.$$

Отже, $y'_x = -\dfrac{\sin(x + y)}{\sin(x + y) + 3e^{3y}}.$

3. Знайти тангенс кута нахилу дотичної з віссю Ox до кривої $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, проведеної в точці $x_0 = 1.$

Розв'язування. Обчислимо кутовий коефіцієнт за формулою

$$k = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0).$$

Похідну обчислимо за правилом частки:

$$y' = \frac{\left(x - 1\right)' \cdot (x + 1) - \left(x - 1\right) \cdot (x + 1)'}{\left(x + 1\right)^2} = \frac{x + 1 - x + 1}{\left(x + 1\right)^2} = \frac{2}{\left(x + 1\right)^2},$$

тоді $\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0 = 1) = \dfrac{2}{\left(1 + 1\right)^2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5.$

6. Знайти диференціал функції $y = x^3 - \sin 3x$.

Розв'язування.

Оскільки $y'\left(x\right) = 3x^2 - 3\cos 3x = 3\left(x^2 - \cos 3x\right)$, то диференціал

$$dy = 3\left(x^2 - \cos 3x\right)dx.$$

7. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 1{,}01$.

Розв'язування. Маємо: $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Для $x = 1$ і $\Delta x = 0{,}01$ за формулою (8.9) отримаємо:

$$\operatorname{arctg}(1+0{,}01) \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1+1^2}\cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{4} + 0{,}005 \approx 0{,}79.$$

8. Знайти похідну третього порядку від функції $y = 3x^5 + 2x^2 + 7$.

Розв'язування. $y' = \left(3x^5 + 2x^2 + 7\right)' = 15x^4 + 4x$,

$y'' = (y')' = \left(15x^4 + 4x\right)' = 60x^3 + 4$, $y''' = (y'')' = \left(60x^3 + 4\right)' = 180x^2$.

9. Довести, що похідна n-го порядку функції $y = \sin x$ має вигляд

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Розв'язування. Скористаємось методом математичної індукції. Перевіримо істинність формули при $n = 1$. $y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Нехай формула є істинною при $n = k$: $y^{(k)} = \sin\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$. Доведемо, що звідси випливає її істинність при $n = k+1$, тобто $y^{(k+1)} = \sin\left(x + \dfrac{(k+1)\pi}{2}\right)$. Дійсно,

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left(\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right).$$

Отже, згідно з методом математичної індукції, $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

10. Знайти диференціал третього порядку функції $y = e^{5x}$, де x – незалежна змінна.

Розв'язування. Оскільки потрібно знайти диференціал третього порядку функції незалежної змінної, то можна використати формулу (8.12) при $n=3$, тобто маємо: $d^3y = f'''(x)dx^3$. $f'''(x) = \left(e^{5x}\right)''' = 125e^{5x}$. Звідси випливає, що $d^3y = 125e^{5x}dx^3$.

11. Визначити характер монотонності функції $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$.

Розв'язування. Досліджуємо за першою похідною функції.

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2 \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 2\right)' = x^2 - 4.$$

Прирівнюємо до нуля, маємо:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2\,;\, x_2 = 2.$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \nearrow & -2 & \searrow & 2 & \nearrow \quad x \end{array}$$

Функція зростає на інтервалах $(-\infty\,;-2)\cup(2\,;+\infty)$ і спадає на інтервалі $(-2\,;2\,)$.

12. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

Розв'язування.

$$f'(x) = \left((2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)' = (2x+1)'\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2} + (2x+1)\cdot\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)' =$$

$$= 2\sqrt[3]{(x-2)^2} + \frac{2(2x+1)}{3\sqrt[3]{(x-2)}} = \frac{6(x-2)+2(2x+1)}{3\sqrt[3]{(x-2)}} = \frac{10x-10}{3\sqrt[3]{(x-2)}}.$$

Похідна дорівнює нулю, якщо $10x - 10 = 0$, тобто $x = 1$. Також похідна не існує, якщо $\sqrt[3]{x-2} = 0$, $x = 2$. За зміною знаку похідної (рис.8.5),

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ & 1 & & 2 & \quad x \end{array}$$

Рис. 8.5. Зміна знаку похідної.

маємо точки екстремуму: $x = 1 - \max$, $f_{\max} = 3$; $x = 2 - \min$, $f_{\min} = 0$.

13. Знайти точку перегину графіка функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 7x - 4$.

Розв'язування.

Обчислюємо похідну другого порядку

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+7x-4\right)'=x^2-4x+7,$$

$$f''(x)=\left(x^2-4x+7\right)'=2x-4,$$

яку прирівнюємо до нуля: $2x-4=0\Rightarrow x=2$. Отже, точка $x=2-$точка перегину графіка функції, оскільки друга похідна міняє знак з «-» на «+» при переході через неї. Знаходимо $f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-2\cdot 2^2+7\cdot 2-4=4\frac{2}{3}$. Точка перегину графіка $\left(2;4\frac{2}{3}\right)$.

14. Записати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y=\frac{x^3}{x^4-1}$ в точці $x_0=2$.

Розв'язування. Для дотичної використовуємо формулу (8.2), за якою обчислимо потрібні значення.

$$f(x_0)=f(2)=\frac{2^3}{2^4-1}=\frac{8}{16-1}=\frac{8}{15};$$

Знаходимо похідну за правилом частки:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^4-1}\right)'=\frac{(x^3)'\cdot(x^4-1)-x^3\cdot(x^4-1)'}{(x^4-1)^2}=\frac{3x^2\cdot(x^4-1)-x^3\cdot 4x^3}{(x^4-1)^2}=$$

$$=\frac{3x^6-3x^2-4x^6}{(x^4-1)^2}=\frac{-x^6-3x^2}{(x^4-1)^2}=-\frac{x^2\cdot(x^4+3)}{(x^4-1)^2}.$$

Отже,

$$f'(x_0)=f'(2)=-\frac{2^2\cdot(2^4+3)}{(2^4-1)^2}=-\frac{4\cdot(16+3)}{(16-1)^2}=-\frac{4\cdot 19}{15^2}=-\frac{76}{225},$$

тоді

$y = \frac{8}{15} - \frac{76}{225} \cdot (x-2),$

$225y = 120 - 76x + 152,$

$76x + 225y - 272 = 0 -$ рівняння дотичної.

Для рівняння нормалі (8.3) маємо:

$y = \frac{8}{15} + \frac{225}{76} \cdot (x-2),$

$1140y = 608 + 3375x - 6750,$

$3375x - 1140y - 6142 = 0 -$ рівняння нормалі.

15. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язування.

Використаємо загальну схему дослідження функції для побудови графіка.

1) *Область визначення функції*

$D(y) \in R \setminus \{1\}$, тобто функція визначена на всій числовій прямій, крім точки $x = 1$.

2) *Точки перетину графіка з осями координат*

Осі координат перетинає функція в точці (0, 0).

3) *Періодичність, парність*

Функція неперіодична, ні парна, ні непарна.

4) *Точки розриву, односторонні границі та границі на нескінченності*

В точці $x = 1$ функція має розрив 2-го роду. Знайдемо односторонні границі.

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty; \ \lim_{x \to 1+0} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty.$$

Отже, пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

Знайдемо границі функції на нескінченності:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0; \ \lim_{x \to \infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0,$$

тобто $y = 0 -$ горизонтальна асимптота.

Дослідимо на похилі асимптоти $y = kx + b$, визначаємо кутовий коефіцієнт

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)^2 x} = 0.$$

Оскільки кутовий коефіцієнт k рівний 0, то похилих асимптот немає.

5) *Екстремуми функції*

Знайдемо точки, в яких похідна перетворюється в 0, для чого розв'яжемо рівняння $y' = 0$. Знайдемо похідну функції

$$y' = \left(\frac{x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{x'(x-1)^2 - (x)\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{x^2-1}{(x-1)^4} = -\frac{x+1}{(x-1)^3},$$

прирівнюємо чисельник до нуля $x+1=0, \Rightarrow x=-1-$ можлива точка екстремума. Вказана точка є точкою мінімума, бо похідна змінює знак з „–" на „+", одержані результати дослідження занесемо в таблицю:

X	(–∞; –1)	–1	(–1, 1)	(1; ∞)
y'	–	0	+	–
Y	↘	min -1/4	↗	↘

6) *Точки перегину функції*

Розв'яжемо рівняння $y'' = 0$. Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = -\left(\frac{x+1}{(x-1)^3} \right)' = -\frac{(x+1)'(x-1)^3 - (x+1)\left((x-1)^3\right)'}{(x-1)^6} =$$

$$= -\frac{(x-1)^3 - 3(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^6},$$

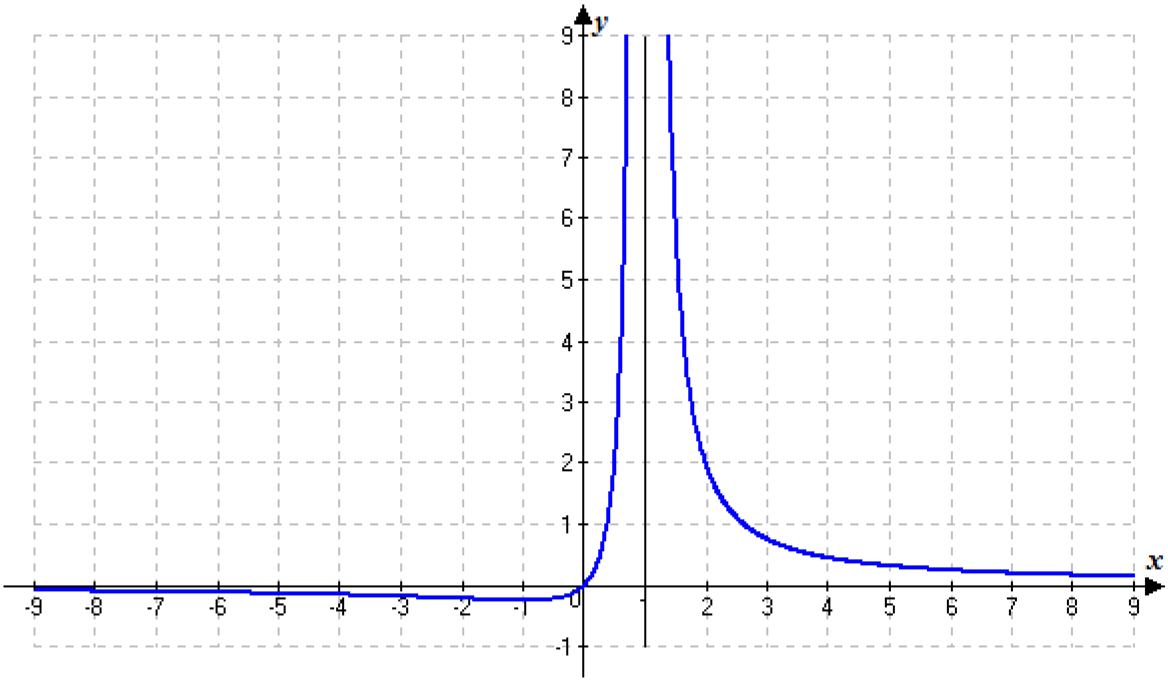
скорочуємо на $(x-1)^2$ і отримуємо

$$= -\frac{x-1-3(x+1)}{(x-1)^4} = -\frac{-2x-4}{(x-1)^4} = \frac{2(x+2)}{(x-1)^4}.$$

Із останнього випливає, що точка $x=-2-$ можлива точка перегину. Занесемо в таблицю дані, описавши таким чином інтервали опуклості графіка функції та точки перегину:

X	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2, 1)$	$(1; \infty)$
y''	–	0	+	+
Y		-2/9		

7) *Графік функції*



Завдання для самоконтролю

1. Що називають похідною функції в точці? Навести приклад обчислення похідної за означенням.

2. Пояснити геометричний зміст похідної. Записати рівняння дотичної прямої та нормалі до кривої.

3. Записати та пояснити на прикладах основні правила диференціювання функції.

4. Що називають диференціалом першого порядку функції?

5. Сформулювати основні властивості диференціала першого порядку, навести приклади його обчислення.

6. Записати та використати на практиці формулу для наближеного обчислення значення функції за допомогою диференціала.

7. Пояснити на прикладі обчислення похідних вищих порядків функції.

8. Записати диференціали другого та вищих порядків функції.

9. Сформулювати необхідні та достатні умови монотонності функції однієї змінної.

10. Дати означення точок екстремуму функції, сформулювати необхідні та достатні умови.

11. Які точки функції називають критичними? Чим вони відрізняються від точок екстремуму?

12. Дати означення опуклості вгору, вниз функції.

13. Які точки називають точками перегину графіка функції, сформулювати необхідні та достатні умови існування точок перегину.

14. Навести загальну схему дослідження функції для побудови її графіка.

15. Знайти похідні функцій:

1) $y=\sin^2 3x\cdot\sin 3x^2$; 2) $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{8x+1}$; 3) $y=\dfrac{\operatorname{tg}^4 5x}{7^{\sqrt{x}}-4}$.

16. Знайти похідні параметрично і неявно заданих функцій:

1) $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t-\operatorname{arctg}t; \end{cases}$

3) $y=\operatorname{tg}(x+y)$; 4) $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$.

17. Скласти рівняння дотичної до графіка функції:

1) $y=x\ln x$ у точці з абсцисою $x_0=e$;

2) $x=\sin t,\quad y=\cos 2t,\quad t_0=\dfrac{\pi}{6}$;

3) $e^y+xy=e$ у точці $M(0;1)$.

18. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x}{4-x^2}$ і побудувати її графік.

Відповіді. **15.** 1) $y'=3\sin 6x\sin 3x^2+6\sin^2 3x\cos 3x^2$;

2) $y'=2\left(\left(4x+1\right)\sqrt{8x+1}\,arctg\sqrt{8x+1}\right)^{-1}$; 3) $y'=\dfrac{40\sqrt{x}\cdot\left(7^{\sqrt{x}}-4\right)tg^3 5x-tg^4 5x\cdot\cos^2 5x\cdot 7^{\sqrt{x}}\ln 7}{2\sqrt{x}\left(7^{\sqrt{x}}-4\right)\cos^2 5x}$.

16. 1) $\begin{cases} y'_x = \dfrac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}, \\ x = \dfrac{3at}{1+t^3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'_x = \dfrac{1}{2}t, \\ x = \ln\left(1+t^2\right); \end{cases}$ 3) $y' = -\dfrac{1}{\sin^2(x+y)}$; 4) $y' = \dfrac{\sin y}{2\sin 2y - \sin y - x\cos y}$.

17. 1) $y = 2x - e$, $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}e$; 2) $y = -2x + \dfrac{3}{2}$; $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$; 3) $y = -\dfrac{1}{e}x + 1$; $y = ex + 1$.

18. *Вказівка.* Для даної функції врахувати: екстремумів немає; функція зростає при $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$; $x = 0, y = 0$ – точка перегину; функція опукла вниз при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$; опукла вгору при $x \in (-2; 0) \cup (2; \infty)$; асимптоти $x = \pm 2$; $y = 0$.

Додаток 1

Завдання для домашньої контрольної роботи [10]

Елементи лінійної алгебри

1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Елементи аналітичної геометрії

3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(0,-1,-1)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(1,-5,-9)$, $A_4(-1,-6,3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

4. Точки $A(6,2), B(0,-2)$ та $C(-4,0)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $9x^2+16y^2-90x+32y+97=0$; б) $x^2-12x+6y+2=0$.

Вступ до математичного аналізу

6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=2^{-\frac{x}{3}+1}$; б) $y=3+\dfrac{5}{2x+1}$.

7. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$.

8. Знайти похідну:

а) $y=x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln x+1\right)^2$; б) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$.

9. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ і побудувати її графік.

Додаток 2

Елементи лінійної алгебри

Визначники

другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

або

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Правила Крамера для системи $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \text{ де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix},$$

за умови, що $\Delta \neq 0$.

Матричний спосіб (для системи 3-го порядку) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$

$X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Додаток 3

Елементи векторної алгебри

Модуль вектора: $\vec{a}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $|\vec{a}|=\sqrt{{x_0}^2+\ {y_0}^2+{z_0}^2}$.

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $B(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\overrightarrow{AB}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)$.

Умова колінеарності векторів: $\vec{a}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\vec{b}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\dfrac{x_0}{x_1}=\dfrac{y_0}{y_1}=\dfrac{z_0}{z_1}$.

Скалярний добуток :

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,\quad \vec{a}\vec{b}=x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1,\ \cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\vec{b}=0$, $x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1=0$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$: $np_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Векторний добуток: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}=(y_0z_1-y_1z_0)\vec{i}-(x_0z_1-x_1z_0)\vec{j}+(x_0y_1-x_1y_0)\vec{k}$.

Площа паралелограма, трикутника, побудованих на векторах

$$\vec{a},\ \vec{b}:\ S_{пар}=|\vec{a}\times\vec{b}|,\quad S_{тр}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Мішаний добуток: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$.

Об'єм паралелепіпеда і піраміди: $V_{пар}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, $V_{пір}=\dfrac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Аналітична геометрія на площині

Пряма на площині

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0) \perp$ до вектора $\vec{N}(A, B)$:
$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Загальне рівняння прямої: $Ax+By+C=0$. Кут φ між двома прямими, які задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і
$A_2x+B_2y+C_2=0$: $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n)$:
$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$.

Параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases}$

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k:
$y-y_0=k(x-x_0)$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k: $y=kx+b$. Для прямих $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ тангенс кута між ними через їх кутові коефіцієнти обчислюють за формулою $\mathrm{tg}\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Прямі перпендикулярні: $k_1\cdot k_2=-1$.

Відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Криві 2-го порядку

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіуса R: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Рівняння еліпса з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Рівняння гіперболи з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1,\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm1.$$

Рівняння параболи з вершиною $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$y^2=2px,\ \ x^2=2py;\ \ (y-y_0)^2=2p(x-x_0),\ \ (x-x_0)^2=2p(y-y_0).$$

Додаток 5

Аналітична геометрія в просторі

Пряма в просторі

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Кут між двома прямими $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$:

$$\cos\varphi=\frac{m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Умова паралельності двох прямих: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_2}{p_2}$,

умова перпендикулярності: $m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2=0.$

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

Параметричні рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$: $x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt$.

Загальні рівняння прямої: $\begin{cases} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0, \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{cases}.$

Площина в просторі

Рівняння площини через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\perp$ до вектора $\vec{N}(A, B, C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Рівняння площини у відрізках на осях: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Загальне рівняння площини: $Ax+By+Cz+D=0$.

Рівняння площини через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Кут між площинами: $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\,\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}$, $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пряма і площина в просторі

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\sin\varphi=\frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: $Am+Bn+Cp=0$, а умова перпендикулярності $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

Поверхні 2-го порядку

Сфера: $x^2+y^2+z^2=R^2$, *еліпсоїд:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Циліндри 2-го порядку: круговий $x^2+y^2=R^2$; еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; параболічний $y^2=2px$.

Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Гіперболоїди: однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, двопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Параболоїд: еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.

Додаток 6

Функція однієї змінної

Дві важливі границі: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1\pm x\right)^{\pm\frac{1}{x}}=e.$

Основні еквівалентні величини:

$\sin x \sim x,\quad x\to 0$; $\ln(1+x)\sim x,\ \log_a(1+x)\sim(\log_a e)x,\ x\to 0;\ e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0;$

$\arcsin x\sim x,\ x\to 0$; $\mathrm{tg}x\sim x,\ x\to 0$; $\mathrm{arctg}x\sim x,\ x\to 0$; $(1+x)^{\mu}-1\sim \mu x,\ x\to 0.$

Рівняння дотичної і нормалі

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),\qquad y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).\ k=\mathrm{tg}\alpha=f'(x_0).$

Екстремуми функцій

Точки, в яких $f'(x_o)=0$ – критичні точки функції. Якщо похідна змінює знак з + на - , то точка x_0 – точка максимума, якщо з - на +, то точка мінімума.

Значення функцій деяких кутів

$\sin 0=0,\quad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \sin\pi=0,\quad \sin\frac{3\pi}{2}=-1;$

$\cos 0=1,\quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \cos\pi=-1,\quad \cos\frac{3\pi}{2}=0;$

$\mathrm{tg}\,0=0,\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1,\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$ – не існує;

$\mathrm{ctg}\,0$ – не існує, $\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=1,\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}=0.$

Список використаної літератури

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
3. Грималюк В.П. Вища математика: У 2 ч.: навч. посіб. / Грималюк В.П., Кухарчук М.М., Ясінський В.В. – К.: Віпол, 2004. – Ч. 1. – 376 с.
4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – 22-е изд., перераб. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с.
6. Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Дрофа, 2004. – 288 с.
7. Ефимов В.Н. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 2005. – 240 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления (т.1). М.: Наука, 1996. – 416 с.
9. Денисюк В. П. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4част. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – Ч. 1. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 296 с.
10. Кушлик-Дивульська О.І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс]: збірник типових завдань кредитного модуля «Вища математика-1» для студентів видавничо-поліграфічного інституту / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська, Н.В. Поліщук, Н. П. Селезньова. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,67 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 149 с. – Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/10429.

Список рекомендованої літератури

1. Шкіль М. І. Вища математика: підручник у 3-х книгах. Кн.1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – Київ, Либідь, 1994. – 280с.

2. Шкіль М. І. Вища математика: підручник у 3-х книгах. Кн.2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – Київ, Либідь, 1994. – 352с.

3. Коваленко І. П. Вища математика: навч. посіб. для студентів ВНЗ.– Київ, Вища школа, 2006. – 343с.

4. Лавренчук В. П. Вища математика. Загальний курс. Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. / В. П. Лавренчук, О. Р. Мартинюк, О. С. Кондур. – Чернівці, Книга – XXI , 2010. – 319с.

5. Вища математика: Збірник задач у 2-х частинах. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра, аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. За ред. П. П. Овчинникова. – Київ, Техніка, 2004. – 279с.

6. Дюженкова Л. І. Вища математика: приклади і задачі: навч. посіб./ Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Міхалін. – Київ, Академія, 2002. – 624с.

7. Дюженкова Л. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х частинах. Ч. 1. Навч. посіб./ Л.І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. – Київ, Вища школа, 2002. – Ч. 1. – 462с.

8. Шунда Н. М. Практикум з математичного аналізу: навч. посіб. / Н. М. Шунда, А. А. Томусяк. – Київ, Вища школа, 1993. – 375 с.

9. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях. Ч.1. Учеб. пос. Для студ. втузов./ П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980. – Ч. 1. – 320 с.

10. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и осно-вы математичного анализа: учеб. пособие для втузов. / В. А. Болгов, Б. П.

Демидович, А. В. Ефимов и др. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. – Ч. 1. – 464 с.

11. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики. / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – М, Наука, 1989. – 656 с.

12. Головина Л. И. Линейная алгебра и некотрые ее приложения. М.: Наука, 1985. – 392 с.

13. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс] : збірник завдань ДКР навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів Видавничо-поліграфічного інституту спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» (заочна форма навчання) / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Електронні текстові дані (1 файл: 726,49 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 43 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19210

Зміст