

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО
СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Кафедра математичних методів системного аналізу

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Оксана ТИМОЩУК

"__" _____ 2024 р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 «Системний аналіз»

на тему: «Дослідження алгебраїчних та граничних властивостей
множини кватерніонів»

Виконав:

Студент IV курсу, групи КА-01

Шушар Антон Олегович _____

Керівник:

доц., к.ф.-м.н. Подколзін Гліб Борисович _____

Консультант з економічного розділу:

к.е.н. Рощина Надія Василівна _____

Консультант з нормоконтролю:

к.ф.-м.н., Статкевич Віталій Михайлович _____

Рецензент:

доц., к. ф.-м.н. Маловічко Тетяна Володимирівна _____

Засвідчую, що у цій дипломній
роботі немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студент _____

Київ — 2024 року

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО
СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ**

Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 124 «Системний аналіз»

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Оксана ТИМОЩУК

" ____ " _____ 2024 р.

**ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу студенту
Шушару Антону Олеговичу**

1. Тема роботи «Дослідження алгебраїчних та граничних властивостей множини кватерніонів», керівник роботи канд. фіз.-мат. наук Подколзін Г. Б., затверджені наказом по університету від « ____ » _____ 2024 р. № ____
2. Термін подання студентом роботи
3. Вихідні дані до роботи: множина кватерніонів, їх властивості.
4. Зміст роботи: дослідження прикладних та граничних властивостей.
5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо): презентація.
6. Консультанти розділів роботи¹

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Економічний	Рощина Н.В., доцент		

¹ Якщо визначені консультанти. Консультантом не може бути зазначено керівника дипломної роботи.

7. Дата видачі завдання _____

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Затвердження теми ДР		Виконано
2	Ознайомлення зі структурою БДР згідно з Положенням про державну атестацію студентів НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»		Виконано
3	Ознайомлення з ДСТУ		Виконано
4	Проведення дослідження за темою БДР під керівництвом керівника		Виконано
5	Завершення роботи над першим варіантом частини БДР		Виконано
6	Проведення роботи над експериментальною частиною БДР		Виконано
7	Оформлення БДР та аналіз отриманих результатів		Виконано

Студент

Антон ШУШАР

Керівник

Гліб ПОДКОЛЗІН

РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 100 сторінок, 9 таблиць, 18 рисунків, 1 додаток, 6 джерел.

ЗАСТОСУВАННЯ КВАТЕРНІОНІВ, ЗБІЖНІСТЬ, КВАТЕРНІОН, ОБЕРТАННЯ У ПРОСТОРІ, ПОСЛІДОВНІСТЬ КВАТЕРНІОНІВ, РЯД КВАТЕРНІОНІВ, ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПОВОРІТІВ.

Об'єкт дослідження — множина кватерніонів.

Мета роботи — дослідження алгебраїчних та граничних властивостей множини кватерніонів.

Методи дослідження — теорії груп та кілець, аналітична геометрія, методи математичного аналізу.

Результат роботи — отримано матричне та векторне представлення кватерніонів, яке дозволило побудувати методи зручного обрахунку обертання у тривимірному просторі. Описано формалізацію послідовностей та відображення кватерніонів з подальшим аналізом збіжності функціональних рядів кватерніонів, зокрема степеневих рядів.

ABSTRACT

Thesis work: 100 pages, 9 tables, 18 figures, 1 appendix, 6 references.

3D ROTATION, CONVERGENCE, INFINITE SUM OF QUATERNION,
QUATERNION APPLICATION, ROTATION INTERPOLATION, SEQUENCE
OF QUATERNIONS.

The object is a set of quaternions.

The purpose is to investigate algebraic and limit properties of quaternions' set.

Research methods are group and ring theories, analytical geometry, methods of mathematical analysis.

The result is matrix and vector representation of quaternions, which allowed to construct simplified methods for a rotation in a 3D space. Described a sequence of quaternions and their mappings, rigorously derived limit properties and convergence criteria for infinite functional sum of quaternions, power series in particular.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ	6
1.1 Кватерніони	6
1.2 Матричне представлення кватерніонів	12
1.3 Векторне представлення кватерніонів	17
Висновки до 1 розділу	28
2 ПОРІВНЯННЯ ПРИКЛАДНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ	29
2.1 Якісне порівняння кватерніонів з матрицею повороту	29
2.2 Кількісне порівняння кватерніонів з матрицею повороту	35
2.3 Застосування кватерніонів у фізиці	37
Висновки до 2 розділу	38
3 ЗБІЖНІСТЬ	39
3.1 Границя послідовності кватерніонів	39
3.2 Функціональні послідовності кватерніонів	42
3.3 Ряди кватерніонів	44
3.3.1 Функціональні ряди кватерніонів	46
3.3.2 Степеневі ряди кватерніонів	50
Висновки до 3 розділу	53
4 ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ	54
4.1 Постановка задачі проектування	55

4.2	Обґрунтування функцій програмного продукту	56
4.3	Обґрунтування системи параметрів програмного продукту .	59
4.4	Аналіз експертного оцінювання параметрів	62
4.5	Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій	66
4.6	Економічний аналіз варіантів розробки ПП	67
4.7	Вибір кращого варіанту ПП техніко- економічного рівня	73
4.8	Висновки до 4 розділу	74
Висновки		75
Показчик		77
Перелік джерел посилання		80
Додаток А Слайди презентації		82

ВСТУП

Кватерніони, введені Вільямом Роуеном Гамільтоном у 1843 році, є узагальненням комплексних чисел і мають важливе значення у багатьох наукових і технічних галузях.

$$a + ib, \quad i^2 = -1$$

Кватерніони використовуються для опису обертання в тривимірному просторі, оскільки вони уникають проблем, таких як “gimbal lock”, які виникають при використанні кутів Ейлера.

Метою цієї роботи є дослідження алгебраїчних властивостей кватерніонів, їх матричного та векторного представлень, а також граничних властивостей послідовностей та рядів.

Перший розділ охоплює основні визначення та властивості кватерніонів, матричне та векторне представлення для ефективного здійснення обертання. Другий розділ порівнює методи опису обертання, підкреслюючи переваги кватерніонів перед кутами Ейлера та матрицями обертання. Також описується застосування кватерніонів у фізиці, зокрема у квантовій механіці та теорії відносності. Третій розділ включає границі послідовності кватерніонів, властивості рядів та функціональних рядів.

Робота охоплює широкий спектр аспектів теоритичного апарату кватерніонів і її узагальнення.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1. Кватерніони

Означення 1.1. *Кватерніоном* називається вираз

$$a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$$

де $1, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$1, i, j, k$$

називаються *базисними кватерніонами*. Множину всіх кватерніонів будемо позначати як

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Означення 1.2. $z = a + bi + cj + dk$. *Дійсною частиною* кватерніону називається число

$$\operatorname{Re} z = a$$

Уявною частиною кватерніона називається вираз

$$\operatorname{Im} z = bi + cj + dk$$

а сам кватерніон тоді представляється як сума дійсної та уявної частин

$$z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$$

Означення 1.3. *Спряженням* до кватерніону $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$ називається кватерніон

$$\bar{z} = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z$$

Означення 1.4. Нормою кватерніону $z = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ називається число

$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Означення 1.5. Кватерніони називаються *рівними* (еквівалентними), якщо рівні коефіцієнти при кожному базисному кватерніоні, тобто

$$(a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k} = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) \Leftrightarrow (a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2)$$

Означення 1.6. Додаванням кватерніонів

$$z_1 = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}, \quad z_2 = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$$

називається операція покомпонентного додавання коефіцієнтів при базисних кватерніонах

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\mathbf{k}$$

Означення 1.7. Множенням кватерніонів називається операція, визначена на базисних кватерніонах наступним чином

$$\begin{array}{llll} 1 \cdot 1 = 1, & 1 \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i}, & 1 \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j}, & 1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{i} \cdot 1 = \mathbf{i}, & \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -1, & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \cdot 1 = \mathbf{j}, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{k}, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = -1, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \cdot 1 = \mathbf{k}, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j}, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i}, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -1, \end{array}$$

для якої виконується:

- комутативність за додаванням;
- асоціативність за додаванням;
- асоціативність по множенню;
- дистрибутивність множення відносно додавання.

Для довільних кватерніонів

$$z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k, \quad z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$$

множення виконується згідно з властивостями вище:

$$\begin{aligned}
 z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = \\
 &= a_1 \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + \\
 &\quad + b_1 i \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + \\
 &\quad + c_1 j \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + \\
 &\quad + d_1 k \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + \\
 &\quad + b_1 a_2 i - b_1 b_2 + b_1 c_2 k - b_1 d_2 j + \\
 &\quad + c_1 a_2 j - c_1 b_2 k - c_1 c_2 + c_1 d_2 i + \\
 &\quad + d_1 a_2 k + d_1 b_2 j - d_1 c_2 i - d_1 d_2 = \\
 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + \\
 &\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i + \\
 &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j + \\
 &\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Зауваження 1.1. Як видно з означення 1.7, операція множення не комутативна, тож взагалі кажучи, для $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$

$$z_1 \cdot z_2 \neq z_2 \cdot z_1$$

Зауваження 1.2. З означення 1.7 і 1.3 випливає, що

$$\begin{aligned}
 z \cdot \bar{z} &= (a + b i + c j + d k)(a - b i - c j - d k) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\
 \bar{z} \cdot z &= (a - b i - c j - d k)(a + b i + c j + d k) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2
 \end{aligned}$$

таким чином, добуток із спряженням кватерніоном комутує. А норму кватерніону (означення 1.4) можна задати як

$$\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{\bar{z} \cdot z}$$

Означення 1.8. Оберненим до кватерніону z називається кватерніон z^{-1} такий, що

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

Твердження 1.1. Для будь-якого $\mathbb{H} \ni z \neq 0$ існує єдиний обернений кватерніон z^{-1} , причому він комутує

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$$

і дорівнює

$$z^{-1} = \frac{1}{\|z\|^2} \bar{z}$$

Доведення. Нехай $z = a + bi + cj + dk$. Доведемо існування, явно пред'явивши обернений кватерніон. Із зауваження 1.2 випливає, що

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \|z\|^2$$

тому

$$z \cdot \left(\frac{1}{\|z\|^2} \bar{z} \right) = 1$$

отже, з означення 1.8 оберненого елемента

$$z^{-1} = \frac{1}{\|z\|^2} \bar{z} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} (a - bi - cj - dk)$$

А оскільки кватерніон комутує при множенні на спряжений до нього (зауваження 1.2), то також маємо аналогічну властивість і для оберненого

$$z^{-1} \cdot z = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \bar{z} \cdot z = \frac{1}{\|z\|^2} \|z\|^2 = 1$$

Тепер доведемо єдиність. Нехай $\hat{z}$ – ще один обернений елемент, тобто

$$z \cdot z^{-1} = 1, \quad z \cdot \hat{z} = 1$$

тоді

$$\hat{z} = 1 \cdot \hat{z} = (z^{-1} \cdot z) \hat{z} = z^{-1} (z \cdot \hat{z}) = z^{-1} \cdot 1 = z^{-1}$$

в силу раніше отриманої комутативності знайденого z^{-1} та асоціативності (означення 1.7). ■

Означення 1.9. *Ступенем кватерніону z називається операція, визначена для $n \in \mathbb{N}$ як*

$$\begin{aligned} z^n &\stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{z \cdot z \cdots z}_n \\ z^{-n} &\stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{(z^{-1})(z^{-1}) \cdots (z^{-1})}_n = (z^{-1})^n \\ z^0 &\stackrel{\text{def}}{=} 1 \end{aligned}$$

Твердження 1.2. *Якщо $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, то*

$$(z_1 z_2 \cdots z_n)^{-1} = z_n^{-1} \cdots z_2^{-1} z_1^{-1}$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції.

БАЗА: $n = 2$. Безпосередньо перевіряється, що

$$(z_1 z_2)(z_2^{-1} z_1^{-1}) = z_1 \underbrace{(z_2 z_2^{-1})}_1 z_1^{-1} = z_1 z_1^{-1} = 1$$

отже, за означенням 1.8, $z_2^{-1} z_1^{-1} = (z_1 z_2)^{-1}$.

ПРИПУЩЕННЯ. Нехай твердження вірне для деякого $n \in \mathbb{N}$

$$(z_1 z_2 \cdots z_n)^{-1} = z_n^{-1} \cdots z_2^{-1} z_1^{-1}$$

КРОК ІНДУКЦІЇ. Доведемо справедливість для $n + 1$. Покладемо

$$z = z_1 z_2 \cdots z_n$$

тоді із припущення

$$z^{-1} = z_n^{-1} \cdots z_2^{-1} z_1^{-1}$$

Таким чином, застосовуючи факт для двох кватерніонів, маємо

$$(z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1})^{-1} = (z \cdot z_{n+1})^{-1} = z_{n+1}^{-1} \cdot z^{-1} = z_{n+1}^{-1} \cdot z_n^{-1} \cdots z_2^{-1} z_1^{-1}$$

■

Твердження 1.3. Якщо $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{H}$, то

$$\|z_1 z_2 \cdots z_n\| = \|z_1\| \|z_2\| \cdots \|z_n\|$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції.

БАЗА: $n = 2$. з твердження 1.1

$$z^{-1} = \frac{1}{\|z\|^2} \bar{z} \Leftrightarrow \bar{z} = \|z\|^2 z^{-1}$$

тому із зауваження 1.2, використовуючи властивість оберненого елемента (твердження 1.2), маємо

$$\begin{aligned} \|z_1 z_2\| &= \sqrt{(z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})} = \\ &= \sqrt{(z_1 z_2)(\bar{z}_2 \bar{z}_1)} = \sqrt{z_1 (z_2 \bar{z}_2) \bar{z}_1} = \\ &= \sqrt{z_1 \|z_2\|^2 \bar{z}_1} = \|z_2\| \sqrt{z_1 \bar{z}_1} = \|z_1\| \|z_2\| \end{aligned}$$

ПРИПУЩЕННЯ. Нехай твердження вірне для деякого $n \in \mathbb{N}$

$$\|z_1 z_2 \cdots z_n\| = \|z_1\| \|z_2\| \cdots \|z_n\|$$

КРОК ІНДУКЦІЇ. Доведемо справедливість для $n + 1$. Покладемо

$$z = z_1 z_2 \cdots z_n$$

тоді

$$\begin{aligned} \|z_1 z_2 \cdots z_n\| &= \|z \cdot z_{n+1}\| = \sqrt{(z z_{n+1})(\overline{z z_{n+1}})} = \\ &= \sqrt{(z z_{n+1})(\bar{z}_{n+1} \bar{z})} = \sqrt{z (z_{n+1} \bar{z}_{n+1}) \bar{z}} = \\ &= \sqrt{z \|z_{n+1}\|^2 \bar{z}} = \|z_{n+1}\| \sqrt{z \bar{z}} = \\ &= \|z\| \|z_{n+1}\| = \|z_1\| \|z_2\| \cdots \|z_n\| \|z_{n+1}\| \end{aligned}$$

■

Наслідок 1.3.1. Якщо $z \in \mathbb{H}$, $n \in \mathbb{N}$, то $\|z^n\| = \|z\|^n$

1.2. Матричне представлення кватерніонів

Теорема 1.4 (Матричне представлення кватерніонів).

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \sim \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Доведення. Потрібно показати, що наступне відображення

$$M: \langle \mathbb{H}, +, \cdot \rangle \rightarrow \langle \text{Mat}_{4 \times 4}, +, \cdot \rangle$$

є ізоморфізмом.

В першу чергу, зазначимо, що воно задано коректно через означення 1.5.

Доведемо, що відображення є бієктивним. Розглянемо довільну матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

тоді для неї знайдеться кватерніон з коефіцієнтами, що відповідають першому рядку

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

причому лише він. Справді, нехай

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \leftarrow \tilde{a} + \tilde{b}\mathbf{i} + \tilde{c}\mathbf{j} + \tilde{d}\mathbf{k} \mapsto M(a + \tilde{b}\mathbf{i} + \tilde{c}\mathbf{j} + \tilde{d}\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} & \tilde{d} \\ -\tilde{b} & \tilde{a} & -\tilde{d} & \tilde{c} \\ -\tilde{c} & \tilde{d} & \tilde{a} & \tilde{b} \\ -\tilde{d} & -\tilde{c} & \tilde{b} & \tilde{a} \end{pmatrix}$$

але тоді з визначення рівності матриць, отримуємо

$$a = \tilde{a}, \quad b = \tilde{b}, \quad c = \tilde{c}, \quad d = \tilde{d}$$

Тепер доведемо, що M – гомоморфізм, тобто

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{H} \quad \begin{cases} M(z_1 + z_2) = M(z_1) + M(z_2), \\ M(z_1 \cdot z_2) = M(z_1) \cdot M(z_2) \end{cases}$$

Нехай $z_1 = a_1 + b_1 \mathbf{i} + c_1 \mathbf{j} + d_1 \mathbf{k}$, $z_2 = a_2 + b_2 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + d_2 \mathbf{k}$, тоді

$$\begin{aligned} M(z_1 + z_2) &= M((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \mathbf{i} + (c_1 + c_2) \mathbf{j} + (d_1 + d_2) \mathbf{k}) = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 & -(d_1 + d_2) & c_1 + c_2 \\ -(c_1 + c_2) & d_1 + d_2 & a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ -(d_1 + d_2) & -(c_1 + c_2) & b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ -c_1 & d_1 & a_1 & -b_1 \\ -d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 \\ -c_2 & d_2 & a_2 & -b_2 \\ -d_2 & -c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \\ &= M(a_1 + b_1 \mathbf{i} + c_1 \mathbf{j} + d_1 \mathbf{k}) + M(a_2 + b_2 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + d_2 \mathbf{k}) = M(z_1) + M(z_2) \end{aligned}$$

Аналогічно розглянемо

$$\begin{aligned} M(z_1 \cdot z_2) &= M((a_1 + b_1 \mathbf{i} + c_1 \mathbf{j} + d_1 \mathbf{k}) \cdot (a_2 + b_2 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + d_2 \mathbf{k})) = \\ &= M \left(\begin{aligned} &(a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) \mathbf{i} + \\ &+ (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) \mathbf{j} + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) \mathbf{k} \end{aligned} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) & (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) & (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) & (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) \\ -(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) & (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) & -(a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) & (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) \\ -(a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) & (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) & (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) & -(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) \\ -(a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) & -(a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) & (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) & (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ -c_1 & d_1 & a_1 & -b_1 \\ -d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 \\ -c_2 & d_2 & a_2 & -b_2 \\ -d_2 & -c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= M(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot M(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = M(z_1) \cdot M(z_2)$$

Таким чином, довели, що пред'явлене відображення M є бієктивним гомоморфізмом – ізоморфізмом, тому будь-який кватерніон допускає матричне представлення. ■

Матричне представлення в теоремі 1.4 не єдине, існує всього 48 різних способів матричного представлення (див. [1]), проте тут і далі будемо використовувати отриману форму.

Матрицю, що відповідає кватерніону будемо позначати відповідною великою літерою ($z \sim Z$).

Наслідок 1.4.1.

$$1 \sim E, \quad i \sim I, \quad j \sim J, \quad k \sim K$$

де

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Доведення. Для довільного кватерніону $z = a + bi + cj + dk$, йому взаємно однозначно відповідає матриця

$$Z = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

по теоремі 1.4, так що, без втрати загальності, згрупувавши однакові коефіцієнти, можемо записати як суму

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \\
+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

причому єдиним способом, тому

$$a + b\textcolor{red}{i} + c\textcolor{green}{j} + d\textcolor{blue}{k} \sim aE + b\textcolor{red}{I} + c\textcolor{green}{J} + d\textcolor{blue}{K}$$

і по черзі вважаючи кожен коефіцієнт, крім одного, рівним нулю, отримуємо матричне представлення кожного з базисних кватерніонів.

$$1 = 1 + 0 \cdot \textcolor{red}{i} + 0 \cdot \textcolor{green}{j} + 0 \cdot \textcolor{blue}{k} \sim 1 + 0 \cdot \textcolor{red}{I} + 0 \cdot \textcolor{green}{J} + 0 \cdot \textcolor{blue}{K} = E$$

$$\textcolor{red}{i} = 0 + 1 \cdot \textcolor{red}{i} + 0 \cdot \textcolor{green}{j} + 0 \cdot \textcolor{blue}{k} \sim 0 + 1 \cdot \textcolor{red}{I} + 0 \cdot \textcolor{green}{J} + 0 \cdot \textcolor{blue}{K} = \textcolor{red}{I}$$

$$\textcolor{green}{j} = 0 + 0 \cdot \textcolor{red}{i} + 1 \cdot \textcolor{green}{j} + 0 \cdot \textcolor{blue}{k} \sim 0 + 0 \cdot \textcolor{red}{I} + 1 \cdot \textcolor{green}{J} + 0 \cdot \textcolor{blue}{K} = \textcolor{green}{J}$$

$$\textcolor{blue}{k} = 0 + 0 \cdot \textcolor{red}{i} + 0 \cdot \textcolor{green}{j} + 1 \cdot \textcolor{blue}{k} \sim 0 + 0 \cdot \textcolor{red}{I} + 0 \cdot \textcolor{green}{J} + 1 \cdot \textcolor{blue}{K} = \textcolor{blue}{K}$$

■

Наслідок 1.4.2. $\forall z \in \mathbb{H} \quad 2\|z\| = \|Z\|_2$

Доведення.

$$\begin{aligned}
\|Z\|_2 &= \left\| \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \right\|_2 = \\
&= \sqrt{\sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 z_{nm}^2} = \sqrt{\begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \\ &+ (b^2 + a^2 + d^2 + c^2) + \\ &+ (c^2 + d^2 + a^2 + b^2) + \\ &+ (d^2 + c^2 + b^2 + a^2) \end{aligned}} =
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)} = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 2\|z\|$$

■

Твердження 1.5. $\forall z \in \mathbb{H} \quad (\|z\| = 1) \Leftrightarrow (Z - \text{ортогональна})$

Доведення. Нехай $z = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, з твердження 1.1 випливає, що обернений кватерніон існує і дорівнює

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} (a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = \\ &= \left(\frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{-b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{-c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{-d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

а тоді по теоремі 1.4

$$\begin{aligned} z^{-1} &\sim \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{-b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{-c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{-d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\ \frac{b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{-c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\ \frac{c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{-d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\ \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{-b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

причому ця матриця буде оберненою до Z за властивістю гомоморфізму.

Таким чином

$$Z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} Z^T$$

Отже

$$Z^T Z = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) Z^{-1} Z = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) E$$

звідси маємо

$$\left(\|z\| = 1\right) \Leftrightarrow \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\right) \Leftrightarrow \left(Z^T Z = E\right) \Leftrightarrow \left(Z - \text{ортогональна}\right)$$

■

Зауваження 1.3. Твердження 1.5 також можна було довести, використовуючи наступний підхід: зауважимо, що

$$\bar{z} \sim \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}^T = Z^T$$

а тоді по теоремі 1.4, через гомоморфізм, з одного боку

$$\bar{z} \cdot z \sim Z^T Z$$

а з іншого боку, із зауваження 1.2 і наслідка 1.4.1 теореми 1.4

$$\bar{z} \cdot z = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \sim (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)E$$

так що через єдиність матричного представлення, маємо

$$Z^T Z = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)E$$

звідси отримуємо ту ж умову на ортогональність ($a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$).

1.3. Векторне представлення кватерніонів

З визначення кватерніонів випливає, що $z = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ однозначно задається своїми коефіцієнтами, тому можна було розглядати представле-

ння кватерніонів як чотиривимірні вектори

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \sim \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

проте природного ізоморфізму $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ побудувати не вдасться. Доведеться вводити нову операцію для векторів

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 \\ a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2 \\ a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 \\ a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2 \end{bmatrix}$$

яка б просто відповідала за означенням 1.7 множення кватерніонів.

Однак можна розглядати дійсну та уявну частину кватерніону (означення 1.2) окремо

$$z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$$

Таким чином, кватерніону $z = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ зіставляється пара

$$z \sim (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = (a, b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})$$

І ось тепер уявну частину представимо вже як тривимірний вектор

$$z \sim \left(a, \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} \right)$$

отримавши відповідність

$$\mathbb{H} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

З цих міркувань природним чином виникає

Означення 1.10. *Скалярною частиною кватерніону z називається число $\operatorname{Re} z$. Векторною частиною кватерніону z називається тривимірний вектор, що відповідає уявній частині $\operatorname{Im} z$.*

Використовуючи результати аналітичної геометрії [2] та введені позначення

$(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток векторів

$[\cdot, \cdot]$ – векторний добуток векторів

$(\cdot, \cdot, \cdot)$ – мішаний добуток векторів

Доведемо

Теорема 1.6. Нехай $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ та

$$z_1 \sim (a_1, \vec{v}_1), \quad z_2 \sim (a_2, \vec{v}_2)$$

Тоді

$$z_1 \cdot z_2 \sim (a_1 a_2 - (\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 + [\vec{v}_1, \vec{v}_2]) \quad (1.2)$$

Доведення. Нехай $z_1 = a_1 + b_1 \mathbf{i} + c_1 \mathbf{j} + d_1 \mathbf{k}$, $z_2 = a_2 + b_2 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + d_2 \mathbf{k}$, тоді

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

а з означення 1.7

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + \\ &+ (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) \mathbf{i} + \\ &+ (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) \mathbf{j} + \\ &+ (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) \mathbf{k} \sim \\ &\sim \left(a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2, \begin{bmatrix} a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1 \\ a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - d_2 b_1 \\ a_1 d_2 + a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left(a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2), \quad a_1 \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 d_2 - c_2 d_1 \\ d_1 b_2 - d_2 b_1 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left(a_1 a_2 - (\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 + [\vec{v}_1, \vec{v}_2] \right) \end{aligned}$$

■

Наслідок 1.6.1. Якщо $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 = 0$, то $z_1 \cdot z_2 \sim (-(\vec{v}_1, \vec{v}_2), [\vec{v}_1, \vec{v}_2])$

Це пояснює означення 1.10. Таким чином, для чисто уявних кватерніонів (дійсна частина дорівнює нулю), векторне представлення – пара з скалярного та векторного творів тривимірних векторів, побудованих з коефіцієнтів уявної частини кватерніону. Тому саме такий ізоморфізм є найбільш природним, адже операція множення кватерніонів переходить у відповідні операції множення векторів.

Далі у цьому розділі розглядатимемо саме такі кватерніони.

Зауваження 1.4. Векторну відповідність кватерніону будемо позначати як відповідність вектору без втрати загальності

$$v \sim \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k} \sim \left(0, \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right)$$

Зауваження 1.5. Базисні вектори в $\mathbb{R}^3$ найчастіше позначаються як

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

і тоді вектор розкладається за базисом як

$$\vec{v} = b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}$$

Такий запис безпосередньо пов'язаний з відповідним кватерніоном

$$v = b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}$$

що й спричинило появу таких позначень.

Отриманий ізоморфізм корисний при використанні у зворотний бік: маючи тривимірні вектори, переходити до кватерніонів, щоб вивести корисні властивості, що буде показано далі.

Наслідок 1.6.2. Якщо $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, то $v_1 \cdot v_2 \sim [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$

Доведення. Нехай $v_1 \sim \vec{v}_1$, $v_2 \sim \vec{v}_2$, тоді з наслідка 1.6.1

$$v_1 \cdot v_2 \sim \left(-(\vec{v}_1, \vec{v}_2), [\vec{v}_1, \vec{v}_2] \right) = (0, [\vec{v}_1, \vec{v}_2])$$

оскільки $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$. ■

Зауваження 1.6. Векторний добуток базисних векторів повністю відповідає правилу множення базисних кватерніонів (означення 1.7), зокрема

$$\begin{aligned} [\vec{i}, \vec{j}] &= \vec{k} \sim i \cdot j = k, \\ [\vec{k}, \vec{j}] &= -\vec{i} \sim k \cdot j = -i \end{aligned}$$

Залишається лише питання коректності, адже векторний добуток, на відміну множення кватерніонів, не є асоціативним, тому окремо розглянемо випадок векторного представлення множення трьох кватерніонів.

Твердження 1.7. Якщо $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, $a, b, c \in \mathbb{H}$ такі, що

$$\vec{a} \sim a, \quad \vec{b} \sim b, \quad \vec{c} \sim c$$

Тоді

$$abc \sim \left(-(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), -\vec{a}(\vec{b}, \vec{c}) + \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) \right)$$

Доведення. Запишемо умову у повній формі, тобто

$$a \sim (0, \vec{a}), \quad b \sim (0, \vec{b}), \quad c \sim (0, \vec{c})$$

І тоді загалом, використовуючи формулу (1.2), з одного боку

$$\begin{aligned} a(bc) &\sim \left\{ bc \sim (-(\vec{b}, \vec{c}), [\vec{b}, \vec{c}]) \right\} \sim \\ &\sim \left(-0 \cdot (\vec{b}, \vec{c}) - (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]), 0[\vec{b}, \vec{c}] - (\vec{b}, \vec{c})\vec{a} + [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] \right) = \\ &= \left(-(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]), -(\vec{b}, \vec{c})\vec{a} + [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] \right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

а з іншого боку

$$\begin{aligned}
 (ab)c &\sim \left\{ ab \sim (-(\vec{a}, \vec{b}), [\vec{a}, \vec{b}]) \right\} \sim \\
 &\sim \left(-(\vec{a}, \vec{b})0 - ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}), -(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 0[\vec{a}, \vec{b}] + [[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] \right) = \\
 &= \left(-([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}), -(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + [[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] \right) \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

За властивістю мішаного добутка

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$$

тому скалярна частина (1.3) і (1.4) збігається. Покажемо, що векторні частини рівні, використовуючи наступні властивості векторного добутка

1) Антикомутативність

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = -[\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]]$$

2) Формула подвійного векторного добутка

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

Розписавши векторні частини (1.3) та (1.4), знаходимо

$$\begin{aligned}
 -(\vec{b}, \vec{c})\vec{a} + [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] &= -(\vec{b}, \vec{c})\vec{a} + (\vec{a}, \vec{c})\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{c} \\
 -(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + [[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] &= -(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} - [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \\
 &= -(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} - (\vec{c}, \vec{b})\vec{a} + (\vec{a}, \vec{c})\vec{b} = \\
 &= -(\vec{b}, \vec{c})\vec{a} + (\vec{a}, \vec{c})\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{c}
 \end{aligned}$$

■

Теорема 1.8 (про обертання). *Нехай $\mathbb{R}^3 \ni \vec{u}$ – вісь обертання, одиничний вектор, $\mathbb{R}^3 \ni \vec{v}$ – довільна точка в тривимірному просторі. Тоді точка, повернута на кут φ навколо осі матиме координати*

$$\vec{v}' \sim uv\bar{u}$$

де

$$v \sim \vec{v}, \quad u \sim \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right)$$

Доведення. Насамперед, нормалізуємо вісь і покладемо

$$\vec{r} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Тепер спроектуємо вектор $\vec{v}$ на вісь $\vec{r}$ так, що

$$\vec{v} = \text{pr}_{\vec{r}}\vec{v} + \text{ort}_{\vec{r}}\vec{v}$$

і оскільки $\|\vec{r}\| = 1$, то

$$\text{pr}_{\vec{r}}\vec{v} = (\vec{v}, \vec{r})\vec{r}$$

і тоді

$$\text{ort}_{\vec{r}}\vec{v} = \vec{v} - \text{pr}_{\vec{r}}\vec{v} = \vec{v} - (\vec{v}, \vec{r})\vec{r}$$

Оскільки $\text{ort}_{\vec{r}}\vec{v} \perp \vec{r}$, а $\text{pr}_{\vec{r}}\vec{v} \parallel \vec{r}$, то поворот навколо осі $\vec{r}$ вплине лише на ортогональну частину, а результат обертання вихідного вектора буде представлятися як

$$\vec{v}' = \text{pr}_{\vec{r}} + (\text{ort}_{\vec{r}}\vec{v})'$$

див. рис. [1.1](#)

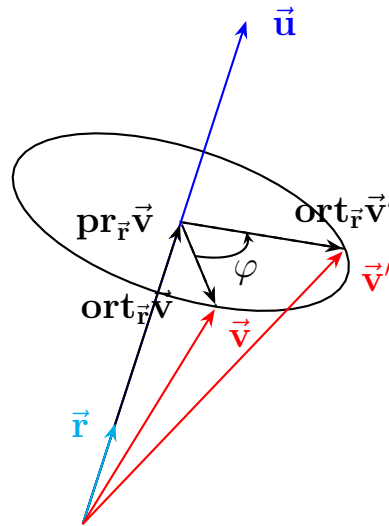


Рисунок 1.1

Розглянемо $[\vec{r}, \text{ort}_{\vec{r}} \vec{v}]$, з визначення

$$\vec{r}, \text{ort}_{\vec{r}} \vec{v}, [\vec{r}, \text{ort}_{\vec{r}} \vec{v}]$$

взаємноперпендикулярні та утворюють праву трійку (див. 1.2)

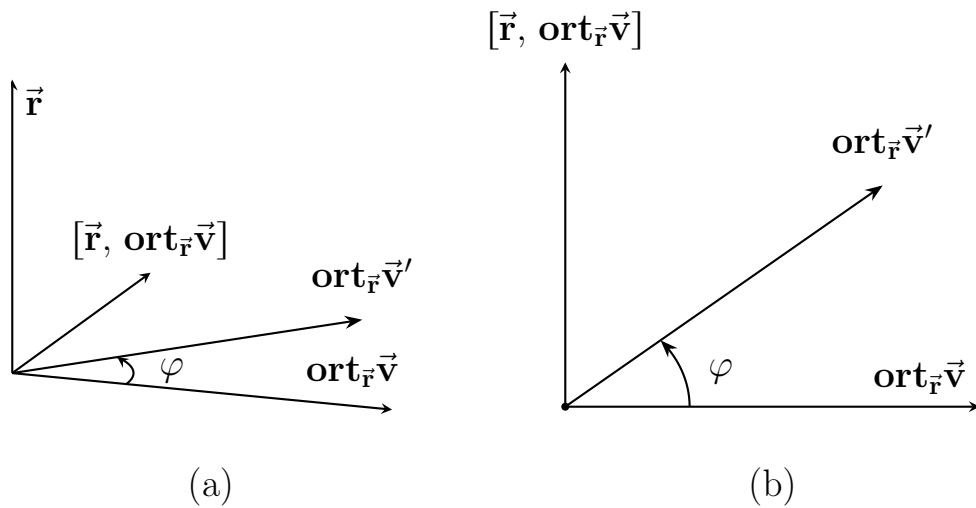


Рисунок 1.2. (a) – правая трійка, (b) – вид зверху

тому

$$(\text{ort}_{\vec{r}} \vec{v})' = \cos \varphi \text{ort}_{\vec{r}} \vec{v} + \sin \varphi [\vec{r}, \text{ort}_{\vec{r}} \vec{v}]$$

І тоді знаходимо

$$\begin{aligned}
\vec{v}' &= \mathbf{pr}_{\vec{r}}\vec{v} + (\mathbf{ort}_{\vec{r}}\vec{v})' = \mathbf{pr}_{\vec{r}}\vec{v} + \cos \varphi \mathbf{ort}_{\vec{r}}\vec{v} + \sin \varphi [\vec{r}, \mathbf{ort}_{\vec{r}}\vec{v}] = \\
&= \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \mathbf{pr}_{\vec{r}}\vec{v} + \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \mathbf{ort}_{\vec{r}}\vec{v} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} [\vec{r}, \mathbf{ort}_{\vec{r}}\vec{v}] = \\
&= \cos^2 \frac{\varphi}{2} (\mathbf{pr}_{\vec{r}}\vec{v} + \mathbf{ort}_{\vec{r}}\vec{v}) + \sin^2 \frac{\varphi}{2} (\mathbf{pr}_{\vec{v}} - \mathbf{ort}_{\vec{r}}) + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} [\vec{r}, \mathbf{ort}_{\vec{r}}\vec{v}] = \\
&= \cos^2 \frac{\varphi}{2} \vec{v} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} ((\vec{v}, \vec{r})\vec{r} - \vec{v} + (\vec{r}, \vec{r})) + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} [\vec{r}, \vec{v} - (\vec{v}, \vec{r})\vec{r}] = \\
&= \left\{ [\vec{r}, \vec{v} - (\vec{v}, \vec{r})\vec{r}] = [\vec{r}, \vec{v}] - (\vec{v}, \vec{r})[\vec{r}, \vec{r}] = [\vec{r}, \vec{v}] - (\vec{v}, \vec{r}) \cdot 0 = [\vec{r}, \vec{v}] \right\} = \\
&= \cos^2 \frac{\varphi}{2} \vec{v} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} ((\vec{v}, \vec{r})\vec{r} - \vec{v} + (\vec{r}, \vec{r})) + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} [\vec{r}, \vec{v}] = \\
&= \left\{ 2[\vec{r}, \vec{v}] = [\vec{r}, \vec{v}] + [\vec{r}, \vec{v}] = [\vec{r}, \vec{v}] - [\vec{v}, \vec{r}] \right\} = \\
&= \cos^2 \frac{\varphi}{2} \vec{v} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} ((\vec{v}, \vec{r})\vec{r} - \vec{v} + (\vec{v}, \vec{r})\vec{r}) + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} [\vec{r}, \vec{v}] - \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} [\vec{v}, \vec{r}]
\end{aligned}$$

Із зауваження 1.4 та наслідка 1.6.2 теореми 1.6

$$\vec{v} \sim v, [\vec{r}, \vec{v}] \sim rv, [\vec{v}, \vec{r}] \sim vr$$

окремо розглянемо

$$\begin{aligned}
(\vec{r}, \vec{r}) - \vec{v} + (\vec{v}, \vec{r})\vec{r} &= \\
&= -(-(\vec{v}, \vec{r})\vec{r} + 1 \cdot \vec{v} - (\vec{r}, \vec{r})\vec{r}) = \\
&= -(-(\vec{r}, \vec{v})\vec{r} + (\vec{r}, \vec{v}) - (\vec{v}, \vec{r})\vec{r})
\end{aligned}$$

і зауважимо, що $-(\vec{r}, \vec{v}) + \vec{r}(\vec{r}, \vec{v}) - (\vec{v}, \vec{r})\vec{r}$ в точності збігається з формою векторної частини з твердження 1.7, тому можемо записати кватерніон, що породжує

$$(-(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}), -(\vec{r}, \vec{v})\vec{r} + (\vec{r}, \vec{r})\vec{v} - (\vec{v}, \vec{r})\vec{r}) \sim rvr$$

причому

$$(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}) = (\vec{r}, [\vec{v}, \vec{r}]) = 0$$

тому rvr є чисто уявний кватерніон і із зауваження 1.4

$$rvr \sim -(\vec{r}, \vec{v})\vec{r} + (\vec{r}, \vec{r})\vec{v} - (\vec{v}, \vec{r})\vec{r}$$

або ж

$$-rvr \sim (\vec{v}, \vec{r})\vec{r} - \vec{v} + (\vec{v}, \vec{r})\vec{r}$$

де

$$v \sim \vec{v}, \quad r \sim \vec{r}$$

Таким чином, повертаючись до $\vec{v}'$, отримуємо, що

$$\begin{aligned} \vec{v}' &\sim \cos^2 \frac{\varphi}{2} v - \sin^2 \frac{\varphi}{2} rvr + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} rv - \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} vr = \\ &= \cos^2 \frac{\varphi}{2} v + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} rv - \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} vr - \sin^2 \frac{\varphi}{2} rvr = \\ &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} r \right) \cos \frac{\varphi}{2} v - \text{big}(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} r) \sin \frac{\varphi}{2} vr = \\ &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} r \right) v \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} r \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Позначимо

$$u = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} r$$

і тоді отримаємо

$$\vec{v}' \sim uv\bar{u}$$

причому

$$u \sim \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} \vec{r} \right) = \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right)$$

■

Означення 1.11. Кватерніон $u \sim \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right)$ з теореми 1.8 називається *кватерніоном обертання навколо $\vec{u}$ на кут φ* .

Наслідок 1.8.1. В умовах теореми 1.8 справедливо

$$\vec{v}' \sim \bar{u}vu$$

але обертання відбуватиметься у протилежному напрямку, тобто по більшому куту.

Доведення. Покладемо $\varphi' = 2\pi - \varphi$, тоді з (1.5)

$$\begin{aligned}
 \vec{v}' &\sim \left(\cos \frac{\varphi'}{2} + \sin \frac{\varphi'}{2} r \right) v \left(\cos \frac{\varphi'}{2} - \sin \frac{\varphi'}{2} r \right) = \\
 &= \left(\cos \frac{2\pi - \varphi}{2} + \sin \frac{2\pi - \varphi}{2} r \right) v \left(\cos \frac{2\pi - \varphi}{2} - \sin \frac{2\pi - \varphi}{2} r \right) = \\
 &= \left(\cos(\pi - \frac{\varphi}{2}) + \sin(\pi - \frac{\varphi}{2}) r \right) v \left(\cos(\pi - \frac{\varphi}{2}) - \sin(\pi - \frac{\varphi}{2}) r \right) = \\
 &= \left(-\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} r \right) v \left(-\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} r \right) = \\
 &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} r \right) v \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} r \right) = \bar{u} v u
 \end{aligned}$$

■

Наслідок 1.8.2. В умовах теореми 1.8, обертання навколо $-\vec{v}$ здійснює той самий поворот, але на кут $2\pi - \varphi$ (як показано на рис. 1.3).

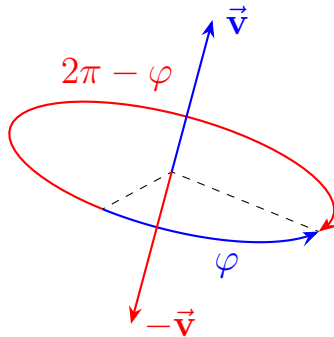


Рисунок 1.3

Зауваження 1.7. Кути φ і $\varphi + 2\pi$ вважаються однаковими, але з (1.5)

$$\begin{aligned}
 &\left(\cos \frac{2\pi + \varphi}{2} + \sin \frac{2\pi + \varphi}{2} r \right) v \left(\cos \frac{2\pi + \varphi}{2} - \sin \frac{2\pi + \varphi}{2} r \right) = \\
 &= \left(\cos(\pi + \frac{\varphi}{2}) + \sin(\pi + \frac{\varphi}{2}) r \right) v \left(\cos(\pi + \frac{\varphi}{2}) - \sin(\pi + \frac{\varphi}{2}) r \right) = \\
 &= \left(-\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} r \right) v \left(-\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} r \right) = \\
 &= (-u) v \overline{(-u)}
 \end{aligned}$$

при цьому

$$(-1)uv(-1)\bar{u} = uv\bar{u}$$

Таким чином, u і $-u$ збігаються з точки зору кватерніону обертання навколо $\vec{v}$ і u описує обертання на $\varphi + 2\pi(2n)$, а $-u$ на $\varphi + 2\pi(2n + 1)$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Наслідок 1.8.3 (композиція обертань). *Нехай u_1, u_2 – кватерніони обертання навколо $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ на кути φ_1, φ_2 відповідно. Тоді для послідовного повороту $\vec{v} \sim v$ на кут φ_1 навколо $\vec{u}_1$, а потім на кут φ_2 навколо $\vec{u}_2$ справедливо*

$$\vec{v}' \sim (u_2 u_1) v \overline{(u_2 u_1)}$$

Доведення. По теоремі 1.8 виконаємо спочатку перше обертання

$$\vec{v}' \sim u_1 v \bar{u}_1 = \tilde{v}$$

а потім друге для нового вектора $\vec{v}'$ і отримаємо остаточний результат

$$\vec{v}' \sim u_2 \tilde{v} \bar{u}_2 = u_2 (u_1 v \bar{u}_1) \bar{u}_2 = (u_2 u_1) v (\bar{u}_1 \bar{u}_2) = (u_2 u_1) v \overline{(u_2 u_1)}$$

в силу асоціативності множення кватерніонів, зв'язку зворотного кватерніону зі сполученим (твердження 1.1) та твердження 1.2. ■

Висновки до 1 розділу

Було детально розглянуто основні визначення та властивості кватерніонів. Починаючи з формальних означень, алгебраїчних властивостей, підкреслюючи некомутативність множення. Було показано, як кватерніони використовуються для представлення тривимірних обертань, що є фундаментальною властивістю для подальшого дослідження їх застосувань.

ПОРІВНЯННЯ ПРИКЛАДНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ

Теорема 1.8 є найбільш часто використовуваним застосуванням кватерніонів, оскільки дозволяє обчислити координати точки в тривимірному просторі після обертання навколо осі шляхом множення кватерніонів, що значною мірою спрощує обчислення.

2.1. Якісне порівняння кватерніонів з матрицею повороту

Найбільш поширеним способом перетворення простору є матриці, що задають лінійні трансформації, у тому числі й поворот.

Будь-який поворот у тривимірному просторі можна задати за допомогою *кутів Ейлера* (див. [3]) з відповідними матрицями обертання

α – поворот навколо $\vec{k}$

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

β – поворот навколо $\vec{j}$

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

γ – поворот навколо $\vec{i}$

$$R_x(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

а тоді довільний поворот у просторі представляється як композиція обертань навколо кожної осі

$$\begin{aligned} R &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Такий підхід є найбільш природним і скрізь знаходить своє застосування в авіації для опису положення літального засобу простору. Відповідні повороти називаються *крен* (*roll*), *тангаж* (*pitch*) та *ризання* (*yaw*)

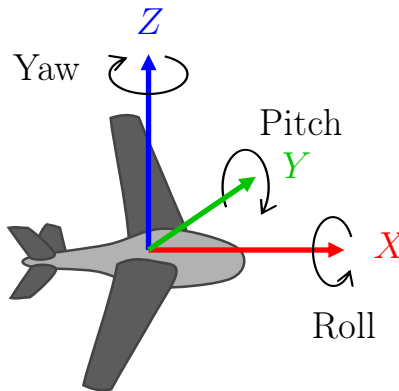
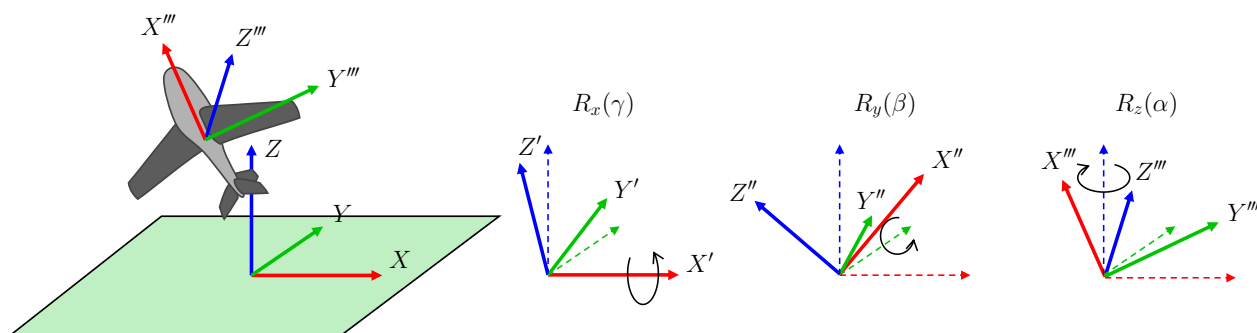


Рисунок 2.1

Рисунок 2.2. Композиція поворотів R_x , R_y , R_z

За великим рахунком, кожен триосьовий гіроскоп використовує таку систему представлення повороту (див. рис. 2.3)

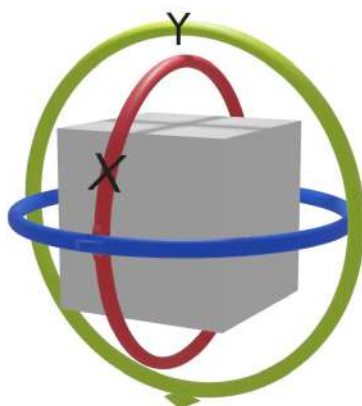


Рисунок 2.3. Модель гіроскопа

зокрема, акселерометр, який нині є у більшості електронних девайсів, що дозволяє визначити положення у просторі. Наприклад, смартфон або окуляри віртуальної реальності (див. рис. 2.4)

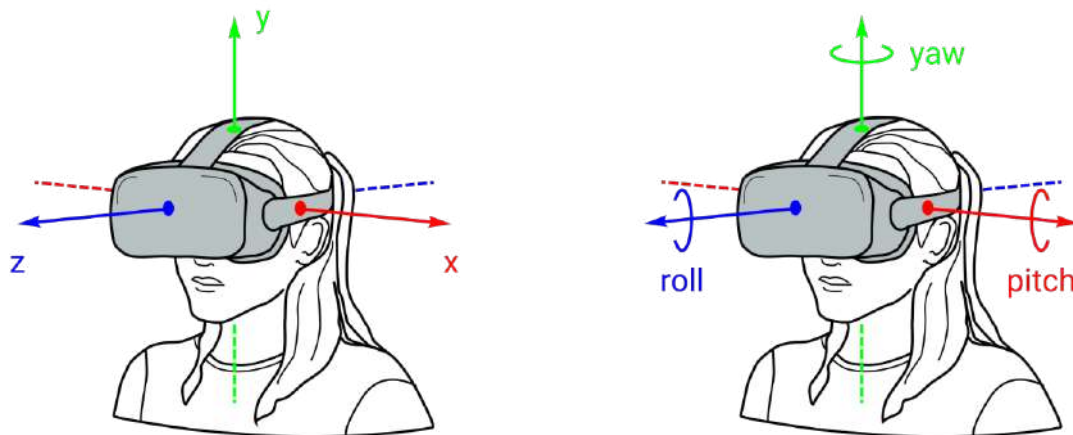


Рисунок 2.4

Незважаючи на широке поширення кутів Ейлера, даний метод представлення повороту має декілька недоліків

- 1) *Блокування обертання (складання рамок) або “gimbal lock”* (див. [4; 5]) – конфігурація композиції поворотів, при якому губиться *ступінь свободи* (див. рис. 2.5).

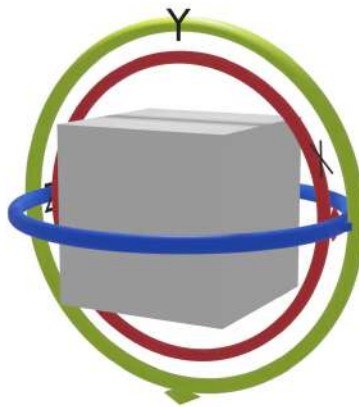


Рисунок 2.5. Ситуація “gimbal lock”

Це відбувається, наприклад, якщо $\beta = \frac{\pi}{2}$, тоді

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & 0 \\ -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

і незалежно від α і γ , обертання відбуватиметься в одному напрямку. Справді, це можна побачити, спростивши останній вираз

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha + \gamma) & \cos(\alpha + \gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha + \gamma) & \sin(\alpha + \gamma) & 0 \end{pmatrix}$$

Таким чином, було втрачено одну ступінь свободи. У той же час, якщо розглянути відповідний кватерніон повороту

$$u = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \textcolor{red}{i} \right) \left(\cos \frac{\pi/2}{2} + \sin \frac{\pi/2}{2} \textcolor{green}{j} \right) \left(\cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \textcolor{blue}{k} \right)$$

не матиме подібної проблеми.

- 2) *Інтерполяція* поворотів, яка застосовується при моделюванні, а також комп'ютерній графіці, зокрема, для анімації прольоту камери (див.[5]). Нехай задані трійки кутів $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ і $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, між якими потрібно провести інтерполяцію. Найпростіший спосіб – лінійна інтерполяція

$$\alpha_t = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$$

$$\beta_t = t\beta_1 + (1-t)\beta_2$$

$$\gamma_t = t\gamma_1 + (1-t)\gamma_2$$

$$0 \leq t \leq 1$$

і тоді інтерполяція для кутів Ейлера, матриця повороту в проміжних значеннях обчислюється в проміжних значеннях кута

$$\forall t \in [0, 1] \quad R_z(\alpha_t) R_y(\beta_t) R_x(\gamma_t)$$

Однак при такому підході виникає проблема при переході через період 2π , через що відбувається стрибок (див. рис. 2.6) замість очікуваного руху (див. рис. 2.7).

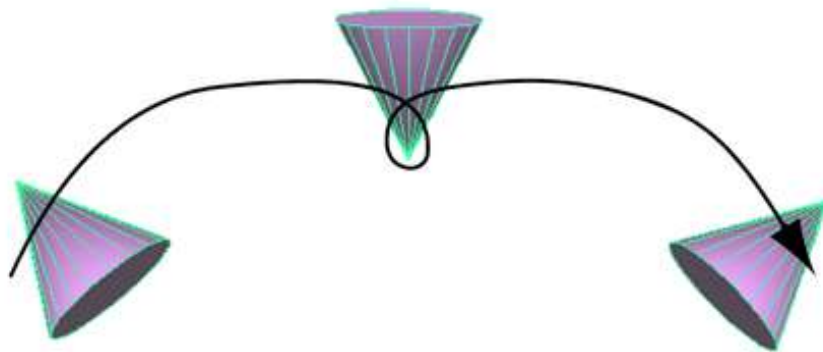


Рисунок 2.6. Неправильна інтерполяція

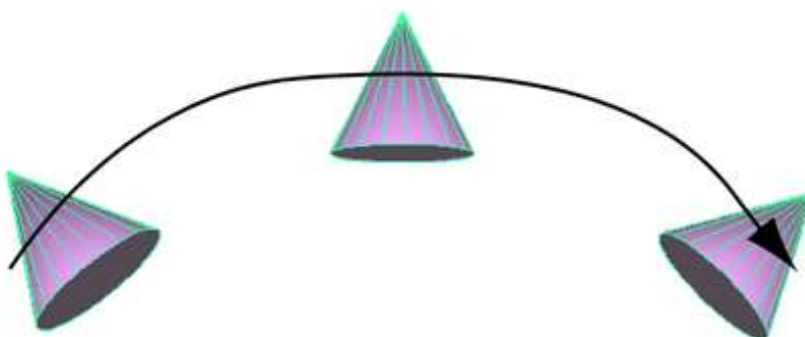


Рисунок 2.7. Правильна інтерполяція

А для кватерніонів обертання u_1 , u_2 , лінійну інтерполяцію можна описати безпосередньо як

$$\forall t \in [0, 1] \quad tu_1 + (1 - t)u_2 \quad (2.1)$$

адже композиція поворотів є множення кватерніонів (наслідок 1.8.3 теореми 1.8). Але через зауваження 1.7, інтерполяція (2.1) не позбавлена проблеми на рис. 2.6.

Проте для кватерніонів існує проста форма сферичної інтерполяції (див. [5])

$$\forall t \in [0, 1] \quad \frac{\sin(t\theta)u_1 + \sin((1-t)\theta)u_2}{\sin(\theta)}$$

де θ – кут між u_1 і u_2 .

2.2. Кількісне порівняння кватерніонів з матрицею повороту

Для того, щоб порівняти матрицю повороту з кватерніонами, слід звести завдання до єдиної постановки обертання навколо осі. Тому для

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{r}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

виведемо матрицю повороту. Для цього представимо нормалізований вектор за допомогою *напрямних косінусів* (див. рис. 2.8)

$$\vec{\mathbf{r}} = \cos \alpha \vec{\mathbf{i}} + \cos \beta \vec{\mathbf{j}} + \cos \gamma \vec{\mathbf{k}}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

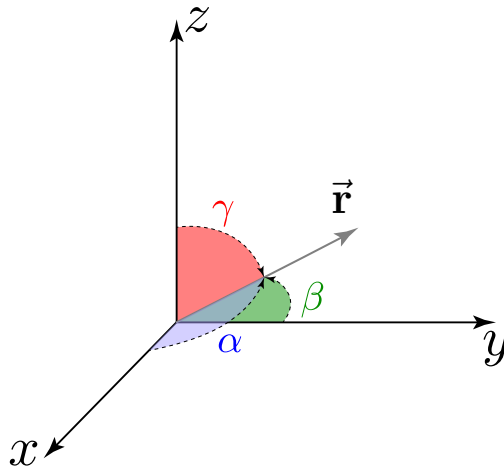


Рисунок 2.8. Кути між $\vec{\mathbf{r}}$ та осями координат

Це завжди можна зробити (див. [3]) і тоді обертання навколо $\vec{\mathbf{r}}$ можна представити як композицію лінійних трансформацій

- 1) Обертання навколо $\vec{\mathbf{i}}$ – це просто $R_x(\varphi)$
- 2) Перетворення $\vec{\mathbf{i}}$ в $\vec{\mathbf{r}}$ – це робиться безпосередньо за допомогою кутів Ейлера, так як $\vec{\mathbf{r}}$ був представлений за допомогою напрямних косінусів і тоді після всіх перетворень та спрощень, приходимо до остаточного вигляду матриці повороту

$$R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) \cdot R_x(\varphi) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi + b_0^2(1 - \cos \varphi) & b_0 c_0(1 - \cos \varphi) - d_0 \sin \varphi & b_0 d_0(1 - \cos \varphi) + c_0 \sin \varphi \\ c_0 b_0(1 - \cos \varphi) + d_0 \sin \varphi & \cos \varphi + c_0^2(1 - \cos \varphi) & c_0 d_0(1 - \cos \varphi) - b_0 \sin \varphi \\ d_0 b_0(1 - \cos \varphi) - c_0 \sin \varphi & d_0 c_0(1 - \cos \varphi) + b_0 \sin \varphi & \cos \varphi + d_0^2(1 - \cos \varphi) \end{pmatrix}$$

Отже, коли завдання уніфіковано, можемо перейти до чисельного порівняння. Насамперед відзначимо використання пам'яті: для матриці необхідно зберігати 9 значень, а кватерніону обертання лише 4. Далі в таблицях 2.1-2.3 розглянемо кількість обчислень залежно від операцій: (**A**) – додавань/віднімань і (**M**) – множення (докладніше див. [4]).

Таблиця 2.1. Порівняння кількості операцій для одного повороту

Подання	A	M
Множення матриці на вектор	6	9
Множення кватерніонів (1.1)	24	32
Векторне представлення кватерніону (1.2)	17	24

Таблиця 2.2. Порівняння кількості операцій для композиції двох поворотів

Подання	А	М
Матриця повороту	18	27
Кватерніон обертання	12	16

Таблиця 2.3. Порівняння кількості операцій для інтерполяції поворотів

Подання	А	М
Матриця повороту	58	77
Кватерніон обертання	8	16

Таким чином, матриця повороту має перевагу лише коли потрібно виконувати одне й те саме обертання, а коли необхідно складати різні повороти або виконувати інтерполяцію, кватерніони потребують менше обчислювальних ресурсів. Причому тут не враховується кількість операцій, необхідних формування матриці повороту насамперед і вважається, що вже задана числова матриця. Так що в дійсності матриці повороту вимагають ще більше додаткових обчислень.

2.3. Застосування кватерніонів у фізиці

Кватерніони також знайшли своє місце у фізиці (див. [6]), а саме ця характеристика опису обертання (теорема 1.8 разом з наслідком 1.8.2) дозволила формалізувати *спін електронів* у квантовій фізиці причому половинний кут $\frac{\varphi}{2}$, що виникає у формулі (1.5), збігається з кутовим моментом електрона (див. рис. 2.9).

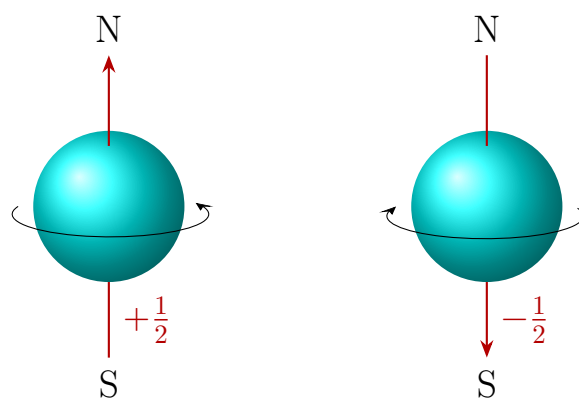


Рисунок 2.9. Спін електрона

Висновки до 2 розділу

Було проведено якісне та кількісне порівняння методів опису обертання, зокрема кватерніонів, кутів Ейлера та матриць обертання. Було показано, що кватерніони мають значні переваги в задачах, що вимагають інтерполяції обертань або комбінування декількох обертань. Обговорено застосування кватерніонів у фізиці, включаючи квантову механіку для опису спіну електронів.

ЗБІЖНІСТЬ

3.1. Границя послідовності кватерніонів

Перейдемо до розгляду послідовностей, елементами яких будуть довільні кватерніони

$$\{z_n\}, \quad z_n \in \mathbb{H}$$

Означення 3.1. Кватерніон $z \in \mathbb{H}$ називається *границею* послідовності кватерніонів $\{z_n\}$ якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: (n > N) \Rightarrow (\|z_n - z\| < \varepsilon)$$

Означення 3.2. Якщо існує границя z послідовності $\{z_n\}$, то вона називається *збіжною* і факт збіжності позначається як

$$z_n \rightarrow z \text{ або } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

Теорема 3.1. Збіжність послідовності кватерніонів еквівалентна одночасної збіжності числових послідовностей коефіцієнтів, тобто при $n \rightarrow \infty$

$$(a_n + b_n i + c_n j + d_n k \rightarrow a + b i + c j + d k) \Leftrightarrow (a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, c_n \rightarrow c, d_n \rightarrow d)$$

Доведення. Нехай $z = a + b i + c j + d k \in \mathbb{H}$ і

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k \in \mathbb{H}, \quad z \rightarrow z_n$$

$\Rightarrow$ Зафіксуємо $\varepsilon > 0$, тоді знайдеться $N \in \mathbb{N}$ таке, що виконується $\|z_n - z\| < \varepsilon$ для $n > N$, а тоді

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &= \sqrt{(a_n - a)^2} \leq \\
&\leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2} = \\
&= \|(a_n - a) + (b_n - b)\mathbf{i} + (c_n - c)\mathbf{j} + (d_n - d)\mathbf{k}\| = \\
&= \|z_n - z\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що

$$(n > N) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)$$

і це ніщо інше як визначення збіжності числової послідовності $a_n \rightarrow a$. Абсолютно аналогічно отримуємо результат для збіжності інших послідовностей коефіцієнтів.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $c_n \rightarrow c$, $d_n \rightarrow d$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і з визначення числових послідовностей, знайдуться $N_a, N_b, N_c, N_d \in \mathbb{N}$ такі, що

$$\begin{aligned}
(n > N_a) &\Rightarrow (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}) \\
(n > N_b) &\Rightarrow (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}) \\
(n > N_c) &\Rightarrow (|c_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}) \\
(n > N_d) &\Rightarrow (|d_n - d| < \frac{\varepsilon}{2})
\end{aligned}$$

Покладемо $N = \max\{N_a, N_b, N_c, N_d\}$ і тоді і за властивістю границі числових послідовностей, маємо

$$\begin{aligned}
\|z_n - z\| &= \|(a_n - a) + (b_n - b)\mathbf{i} + (c_n - c)\mathbf{j} + (d_n - d)\mathbf{k}\| = \\
&= \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2} < \\
&< \sqrt{(\frac{\varepsilon}{2})^2 + (\frac{\varepsilon}{2})^2 + (\frac{\varepsilon}{2})^2 + (\frac{\varepsilon}{2})^2} = \sqrt{4 \frac{\varepsilon^2}{4}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Тим самим отримавши, що для довільно вибраного $\varepsilon > 0$, було знайдено $N \in \mathbb{N}$, що виконується

$$(n > N) \Rightarrow (\|z_n - z\| < \varepsilon)$$



Теорема 3.2 (критерій Коші). *Послідовність кватерніонів $\{z_n\}$ збігається тоді і лише тоді, коли*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: (n_1, n_2 > N) \Rightarrow (\|z_{n_1} - z_{n_2}\| < \varepsilon)$$

Доведення. Нехай $z_n = a_n + b_n \mathbf{i} + c_n \mathbf{j} + d_n \mathbf{k} \in \mathbb{H}$, $n \in \mathbb{N}$, тоді по теоремі 3.1, збіжність $\{z_n\}$ еквівалентна збіжності числових послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, для яких критерій Коші виконується, тим самим отримуємо відповідний факт для послідовності кватерніонів $\{z_n\}$. ■

Теорема 3.3 (арифметичні властивості). *Якщо $\{z_{1n}\}$, $\{z_{2n}\}$ – послідовності кватерніонів, що збігаються, тоді*

- а) $\{z_{1n} \pm z_{2n}\}$ – збігається
- б) $\forall u, v \in \mathbb{H} \quad \{uz_{1n}v\}$ – збігається

Доведення. Нехай

$$\begin{aligned} z_{1n} &= a_{1n} + b_{1n} \mathbf{i} + c_{1n} \mathbf{j} + d_{1n} \mathbf{k} \in \mathbb{H} \\ z_{2n} &= a_{2n} + b_{2n} \mathbf{i} + c_{2n} \mathbf{j} + d_{2n} \mathbf{k} \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

тоді за означенням 1.6 і за означенням 1.7 сума та множення кватерніонів також є кватерніоном, які позначимо як

$$\begin{aligned} z_{1n} \pm z_{2n} &= a_n^{\pm} + b_n^{\pm} \mathbf{i} + c_n^{\pm} \mathbf{j} + d_n^{\pm} \mathbf{k} \in \mathbb{H} \\ uz_{1n}v &= a_n^{\times} + b_n^{\times} \mathbf{i} + c_n^{\times} \mathbf{j} + d_n^{\times} \mathbf{k} \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

А тоді теореми 3.1, відповідні арифметичні властивості випливають із властивостей числових послідовностей коефіцієнтів кватерніонів.

$$\left. \begin{aligned} &\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\} \\ &\{b_{1n}\}, \{b_{2n}\} \\ &\{c_{1n}\}, \{c_{2n}\} \\ &\{d_{1n}\}, \{d_{2n}\} \end{aligned} \right\} - \text{збігаються} \Rightarrow \left. \begin{aligned} &\{a_{1n}^{\pm}\}, \{a_{2n}^{\times}\} \\ &\{b_{1n}^{\pm}\}, \{b_{2n}^{\times}\} \\ &\{c_{1n}^{\pm}\}, \{c_{2n}^{\times}\} \\ &\{d_{1n}^{\pm}\}, \{d_{2n}^{\times}\} \end{aligned} \right\} - \text{збігаються}$$

Аналогічно для границі в нерівностях. ■

Означення 3.3. Послідовність кватерніонів $\{z_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: (n > N) \Rightarrow (\|z_n\| < \varepsilon)$$

нескінченно великою, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: (n > N) \Rightarrow (\|z_n\| > \frac{1}{\varepsilon})$$

Зауваження 3.1. Нескінченні малі послідовності позначають як

$$z_n \rightarrow 0$$

оскільки означення співпадає для збіжності до $0 \in \mathbb{H}$.

3.2. Функціональні послідовності кватерніонів

Будь-яка послідовність кватерніонів $\{z_n\}$ являє собою відображення

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{H}$$

тобто

$$g(1) = z_1, g(2) = z_2, \dots, g(n) = z_n$$

Розглянемо більш загальний випадок відображення

$$f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

Приклад 3.1.

$$1) \quad f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, f(z) = z^2$$

$$3) \quad f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, f(z) = \operatorname{Re} z$$

$$2) \quad f: \mathbb{H} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{H}, f(z) = z^{-1}$$

$$4) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}, f(x) = xj$$

Означення 3.4. Функціональною послідовністю кватерніонів називається послідовність відображень

$$f_n: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad n \in \mathbb{N}$$

і позначається як $\{f_n\}$.

Для фіксованого кватерніону $z_0 \in \mathbb{H}$, функціональна послідовність $\{f_n\}$ стає звичайною послідовністю кватерніонів

$$f_1(z_0), f_2(z_0), \dots, f_n(z_0)$$

Означення 3.5. Функціональна послідовність $\{f_n\}$ збігається у точці $z_0 \in \mathbb{H}$, якщо існує границя послідовності $\{f_n(z_0)\}$ значень функцій у цій точці. Якщо $\mathbb{H} \supset H$ – множина точок, в яких збігається $\{f_n\}$, то функція $f: H \rightarrow \mathbb{H}$ називається *граничною функцією* послідовності $\{f_n\}$ та

$$f_n \rightarrow f$$

називається *поточковою збіжністю*.

Означення 3.6. Функціональна послідовність $\{f_n\}$ збігається рівномірно на множині H , якщо існує така функція $f: H \rightarrow \mathbb{H}$, що виконується

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall z \in \mathbb{H} \quad (n > N) \Rightarrow \left(\sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_n(z) - f(z)\| < \varepsilon \right)$$

позначається як

$$f_n \rightrightarrows f$$

і називається *рівномірною збіжністю*.

3.3. Ряди кватерніонів

Нехай $\{z_n\}$ – послідовність кватерніонів. Розглянемо суму перших n членів цієї послідовності

$$S_n = \underbrace{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}_n$$

Отримали $\{S_n\}$ – нову послідовність кватерніонів.

Означення 3.7. Послідовність $\{S_n\}$ називається *частковою сумою* послідовності $\{z_n\}$.

Означення 3.8. *Рядом кватерніонів* називається границя часткових сум $\{S_n\}$ послідовності кватерніонів $\{z_n\}$ і позначається як

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

Для довільного $N \in \mathbb{N}$ кватерніон z_n називається *загальним членом ряду*.

Означення 3.9. Якщо послідовність часткових сум збігається $S_n \rightarrow S$, то кватерніон $S \in \mathbb{H}$ називається *сумою ряду*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

а сам ряд називається *збіжним*, в іншому випадку – *розбіжним*.

Твердження 3.4 (необхідна умова збіжності).

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n - \text{збігається} \right) \Rightarrow \left(z_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \right)$$

Доведення. Нехай $\{S_n\}$ – послідовність часткових сум і $\mathbb{H} \ni S$ – сума ряду, тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

■

Означення 3.10. Ряд кватерніонів $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$$

числовий ряд норм членів послідовності $\{z_n\}$.

Зауваження 3.2. Оскільки ряд кватерніонів – границя послідовності (часткових сум) кватерніонів, то справедливі усі твердження, що й для послідовностей. А за рахунок теореми 3.1 мають місце всі факти, що і для числових рядів. Сформулюємо ці теореми.

Теорема 3.5 (арифметичні властивості). *Якщо ряди кватерніонів*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{1n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_{2n}$$

збігаються, а $u, v \in \mathbb{H}$, то

а) $\sum_{n=1}^{\infty} z_{1n} \pm \sum_{n=1}^{\infty} z_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (z_{1n} \pm z_{2n})$

б) $u(\sum_{n=1}^{\infty} z_{1n})v = \sum_{n=1}^{\infty} uz_{1n}v$

Доведення. Нехай $\{S_{1n}\}, \{S_{2n}\}$ – часткові суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty} z_{1n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} z_{2n}$ відповідно. Оскільки ряди збігаються за умовою, то збігаються послідовності часткових сум і тоді результат є безпосереднім наслідком теореми 3.3. ■

Теорема 3.6 (критерій Коші). *Нехай $\{z_n\}$ – послідовність кватерніонів. Ряд кватерніонів $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається тоді і лише тоді, коли*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall p \in \mathbb{N} \quad (n > N) \Rightarrow (\|z_n + \dots + z_{n+p}\| < \varepsilon)$$

Доведення. Нехай $\{S_n\}$ – послідовність часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, тоді застосовуючи критерій Коші (теорема 3.2) для послідовності

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: (n_1, n_2 > N) \Rightarrow (\|S_{n_1} - S_{n_2}\| < \varepsilon)$$

можемо вважати без втрати загальності, що $n_1 > n_2$, тоді ці числа можна представити як

$$n_2 = n - 1, \quad n_1 = n + p$$

де $n, p \in \mathbb{N}$ і тоді

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \|S_{n_1} - S_{n_2}\| = \|S_{n+p} - S_{n-1}\| = \\ &= \|\underbrace{z_1 + \cdots + z_{n-1}} + z_n + \cdots + z_{n+p} - \underbrace{(z_1 + \cdots + z_{n-1})}\| = \\ &= \|z_n + \cdots + z_{n+p}\| \end{aligned}$$

■

Теорема 3.7 (теорема Вейєрштрасса). *Нехай $\{z_n\}$ – послідовність кватерніонів, $\{c_n\}$ – числова послідовність і $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається. Тоді якщо*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|z_n\| \leq c_n$$

то $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається абсолютно.

Доведення. Оскільки $\{c_n\}$ збігається, то виконується критерій Коші (теорема 3.2), а завдяки (3.7) маємо

$$\|z_n + \cdots + z_{n+p}\| \leq \|c_n + \cdots + c_{n+p}\| < \varepsilon$$

Таким чином, критерій Коші виконується і для $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$, отже $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається абсолютно. ■

3.3.1. Функціональні ряди кватерніонів

Аналогічно функціональним послідовностям (див. пункт 3.2) розглядаються функціональні ряди кватерніонів.

Означення 3.11. *Функціональним рядом кватерніонів називається границя часткових сум функціональної послідовності кватерніонів $\{f_n\}$ і позначається як*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in \mathbb{H}$$

Часткові суми функціонального ряду являють собою функціональні послідовності, отже їхня границя (ряд) може збігатися поточно та рівномірно. Розглянемо критерій збіжності.

Теорема 3.8 (критерій Коші). *Нехай $\{f_n\}$ – функціональна послідовність кватерніонів, $g: H \rightarrow \mathbb{H}$. Функціональний ряд збігається рівномірно до g на множині $H \subset \mathbb{H}$*

$$\sum_{k=1}^n f_k(z) \Rightarrow g$$

тоді і лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall p \in \mathbb{N} \quad (n > N) \Rightarrow \left(\sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_n(z) + \dots + f_{n+p}(z)\| < \varepsilon \right)$$

Доведення.

$\Rightarrow$ Нехай

$$\sum_{n=1}^n f_k(z) \Rightarrow g$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$, тоді за означенням 3.6 знайдеться $N \in \mathbb{N}$, що виконується

$$\forall n > N \quad \sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_{n-1}(z)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

У тому числі, $\forall p \in \mathbb{N} \quad n + p > N$, тому

$$\sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_{n+p}(z) - g(z)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Отже

$$\begin{aligned}
& \sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z) - g(z)\| = \\
& = \sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_1(z) + \cdots + f_{n+p}(z) - (f_1(z) + \cdots + f_{n+p}(z)) + g(z) - g(z)\| \leq \\
& \leq \sup_{z \in \mathbb{H}} (\|f_1(z) + \cdots + f_{n+p}(z) - g(z)\| + \|f_1(z) + \cdots + f_{n+p}(z) - g(z)\|) \leq \\
& \leq \sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_1(z) + \cdots + f_{n+p}(z) - g(z)\| + \sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_1(z) + \cdots + f_{n+p}(z) - g(z)\| < \\
& < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай виконується умова

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: p \in \mathbb{N} \quad (n > N) \Rightarrow \left(\sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_n(z) + \cdots + f_{n+p}(z)\| < \varepsilon \right)$$

тоді для довільного $z_0 \in \mathbb{H}$

$$\|f_n(z_0) + \cdots + f_{n+p}(z_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_n(z) + \cdots + f_{n+p}(z)\| < \varepsilon$$

Таким чином, ця умова відповідає критерію Коші для послідовності кватерніонів часткових сум (теорема 3.2)

$$s_n(z_0) = \sum_{k=1}^n f_k(z_0)$$

отже $\{s_n(z_0)\}$ збігається за будь-якого $z_0 \in \mathbb{H}$ і отже існує гранична функція

$$\forall z \in \mathbb{H} \quad s(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) \quad (3.1)$$

Далі перейдемо до поточної межі в нерівності

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|s_n(z) - s_{n+p}(z)\| < \varepsilon \Rightarrow \|s_n(z) - s(z)\| < \varepsilon$$

а тоді, з (3.1), оскільки це має місце для всіх $z \in \mathbb{H}$, то

$$\sup_{z \in \mathbb{H}} \|s_n(z) - s(z)\| < \varepsilon$$

Отже, отримали, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: (n > N) \Rightarrow \left(\sup_{z \in \mathbb{H}} \|s_n(z) - s(z)\| < \varepsilon \right)$$

а це ніщо інше, як визначення рівномірної збіжності ряду, адже

$$s_n(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$$

а $s(z)$ *equivg*(z) в силу єдиності границі. ■

Означення 3.12. Функціональний ряд кватерніонів $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ називається *абсолютно збіжним у точці* $z_0 \in \mathbb{H}$, якщо збігається числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(z_0)\|$$

Теорема 3.9 (Вейєрштрасса). *Нехай $\{f_n\}$ – функціональна послідовність кватерніонів, $\{c_n\}$ – числова послідовність і $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається. Тоді якщо*

$$\forall z \in \mathbb{H} \quad \|f_n(z)\| \leq c_n$$

то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ збігається рівномірно і абсолютно.

Доведення. За умовою, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається, а тоді за критерієм Коші для числових рядів, виконується

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall p \in \mathbb{N} \quad (n > N) \Rightarrow (|c_n + \cdots + c_{n+p}| < \varepsilon)$$

тоді з умови

$$\forall z \in \mathbb{H} \quad \|f_n(z)\| + \cdots + \|f_{n+p}(z)\| \leq c_n + \cdots + c_{n+p}$$

отже

$$\forall z \in \mathbb{H} \quad \|f_n(z)\| + \cdots + \|f_{n+p}(z)\| < \varepsilon \tag{3.2}$$

звідки отримуємо абсолютну збіжність у кожній точці, оскільки (3.2) є умовою критерію Коші числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(z)\|$.

В той же час

$$\|f_n(z) + \cdots + f_{n+p}(z)\| \leq \|f_n(z)\| + \cdots + \|f_{n+p}(z)\| \quad (3.3)$$

так що з (3.2) та (3.3), маємо

$$\forall z \in \mathbb{H} \quad \|f_n(z) + \cdots + f_{n+p}(z)\| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_n(z) + \cdots + f_{n+p}(z)\| < \varepsilon$$

А це вже умова Коші для функціонального ряду (теорема 3.8), отже $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ збігається рівномірно. ■

3.3.2. Степеневі ряди кватерніонів

Означення 3.13. Функціональний ряд кватерніонів виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z - v)^n$$

називається *степеневим рядом* кватерніонів, де $\mathbb{H} \ni v$ – *центр ряду*, $\{u_n\}$ – послідовність кватерніонів – *коефіцієнти ряду*.

Теорема 3.10 (Абеля). *Якщо степеневий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z - v)^n$$

збігається у $\mathbb{H} \ni z_0 \neq v$, то він

- а)** *Збігається абсолютно в кожній точці $S_o = \{z \in \mathbb{H} \mid \|z - v\| < \|z_0 - v\|\}$*
- б)** *Збігається рівномірно на множині $S_r = \{z \in \mathbb{H} \mid \|z - v\| \leq r\}$, $r \in (0, \|z_0 - v\|)$*

Доведення. За умовою, ряд кватерніонів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0 - v)^n$ збігається, відповідно за критерієм Коші (теорема 3.2) для $\varepsilon = 1$ існує $N \in \mathbb{N}$, що для

$n_1 = n + 1, n_2 = n$ виконується

$$(n > N) \Rightarrow (\|u_n(z_0 - v)^n\| < 1)$$

Покладемо

$$K = \max\{\|u_1(z_0 - v)^1\|, \dots, \|u_N(z_0 - v)^N\|, 1\}$$

і тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n(z_0 - v)^n\| < K$$

Розглянемо $S_r = \{z \in \mathbb{H} \mid \|z - v\| \leq r\}, r \in (0, \|z_0 - v\|)$

$$\begin{aligned} \forall z \in S_r \quad \|u_n(z - v)^n\| &\leq \|u_n r^n\| = \\ &= \|u_n(z_0 - v)^n\| \frac{r^n}{\|(z_0 - v)^n\|} = \\ &= \|u_n(z_0 - v)^n\| \left(\frac{r}{\|z_0 - v\|} \right)^n \end{aligned} \quad (3.4)$$

в силу наслідка 1.3.1 твердження 1.3. Покладемо

$$c = \frac{r}{\|z_0 - v\|}$$

причому $c < 1$, оскільки $\forall z \in S_r \quad r < \|z_0 - v\|$. І тоді з (3.4) отримали оцінку кожного члена ряду

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in S_r \quad \|u_n(z - v)^n\| < Kc^n$$

у своїй, числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Kc^n$ збігається як сума геометричної прогресії. Таким чином, по теоремі 3.9 Абеля, функціональний ряд кватерніонів

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z - v)^n$$

збігається поточково на S_r . Одночасно з цим отримуємо абсолютну збіжність $S_{\circ} = \{z \in \mathbb{H} \mid \|z - v\| < \|z_0 - v\|\}$, оскільки для будь-якої точки $z_1 \in S_{\circ}$ можна взяти

$$r_1 = \frac{\|z_0 - v\| + \|z_1 - v\|}{2}$$

і тоді $z_1 \in S_{r_1}$, отже абсолютна збіжність виконується у кожній точці $S_{\circ}$. ■

Суть теореми Абеля в тому, що якщо відомо, що степеневий ряд кватерніонів збігається в конкретній точці, то він також збігається і в області, що містить її. А тепер цікаво дізнатися, в яких же точках степеневий ряд збігається в першу чергу.

Теорема 3.11. *Будь-який степеневий ряд кватерніонів виду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z - v)^n \quad (3.5)$$

збігається у всіх точках множини

$$S = \{z \in \mathbb{H} \mid \|z - v\| < R\} \quad (3.6)$$

і розходиться в $\mathbb{H} \setminus \bar{S}$, де

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|u_n\|}}$$

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $z_0 \in \mathbb{H}$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0 - v)^n$ – ряд кватерніонів, а $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n(z_0 - v)^n\|$ – числовий ряд з невід’ємними членами, для якого можемо застосувати радикальну ознаку збіжності:

- при $q < 1$ ряд збігається
- при $q > 1$ ряд розбігається

де

$$q = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|u_n(z_0 - v)^n\|} = \|z_0 - v\| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|u_n\|}$$

отже

$$q < 1 \Leftrightarrow \|z_0 - v\| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|u_n\|} < 1 \Leftrightarrow \|z_0 - v\| \frac{1}{R} < 1 \Leftrightarrow \|z_0 - v\| < R$$

Таким чином, множина точок, в яких збігається степеневий ряд (3.5) визначається умовою вище і це множина

$$S = \{z \in \mathbb{H} \mid \|z - v\| < R\}$$

Аналогічна умова для розбіжності: $\|z_0 - v\| > R$, тобто ряд (3.5) розбігається для множини кватерніонів

$$\mathbb{H} \setminus \bar{S} = \{z \in \mathbb{H} \mid \|z - v\| > R\}$$

■

Означення 3.14. Число R з теореми 3.11 називається *радіусом збіжності* степеневого ряду (3.5), а множина (3.6) сферою збіжності.

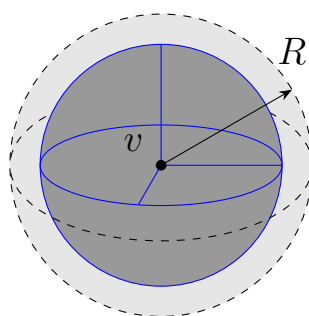


Рисунок 3.1. Сфера збіжності

Висновки до 3 розділу

Було виконано формалізацію послідовностей кватерніонів та отримано критерій збіжності, описані властивості, що впливають з отриманих результатів. Розглянота збіжність рядів, функціональних рядів кватерніонів, та її окремий випадок – степеневі ряди, для яких отримано узагальнені теореми Коші, Вейерштрасса та теорему Абеля про радіус збіжності.

ФУНКЦІОНАЛЬНО- ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

В данному розділі буде проведено оцінювання основних характеристик для програмного продукту комп'ютерного моделювання оберту об'єкту у тривимірному просторі за допомогою математичного апарату кватерніонів.

Дана реалізація буде сприяти проведенню усіх необхідних досліджень, що дасть змогу якісно дослідити питання не лише в Україні, а у всьому світі. Також в даному дослідженні показано різні варіанти реалізації для забезпечення найбільш коректної та оптимальної стратегії вибору, що має вплив на економічні фактори та сумісність з майбутнім програмним продуктом. Для цього застосовувався апарат функціонально-вартісного аналізу.

Функціонально-вартісний аналіз (ФВА) передбачає собою технологію, що дозволяє оцінити реальну вартість продукту або послуги незалежно від організаційної структури компанії. ФВА проводиться з метою виявлення резервів зниження витрат за рахунок ефективніших варіантів виробництва, кращого співвідношення між споживчою вартістю виробу та витратами на його виготовлення. Для проведення аналізу використовується економічна, технічна та конструкторська інформація.

Алгоритм функціонально-вартісного аналізу включає в себе визначення послідовності етапів розробки продукту, визначення повних витрат (рі-

чних) та кількості робочих часів, визначення джерел витрат та кінцевий розрахунок вартості програмного продукту.

4.1. Постановка задачі проектування

У роботі застосовується метод ФВА для проведення техніко-економічного аналізу розробки системи прогнозу стійкості фінансових показників. Оскільки рішення стосовно проектування та реалізації компонентів, що розробляється, впливають на всю систему, кожна окрема підсистема має її задовольняти. Тому фактичний аналіз представляє собою аналіз функцій програмного продукту, призначеного для збору, обробки та проведення аналізу даних по компанії.

Технічні вимоги до програмного продукту є наступні:

- функціонування на персональних комп'ютерах із стандартним набором компонентів;
- зручність та зрозумілість для користувача;
- швидкість обробки даних та доступ до інформації в реальному часі;
- можливість зручного масштабування та обслуговування;
- мінімальні витрати на впровадження програмного продукту.

4.2. Обґрунтування функцій програмного продукту

Головна функція F_0 – розробка можливого програмного продукту, яка дозволяє аналізувати різні характеристики, що безпосередньо впливають на стійкість підприємства. Беручи за основу цю функцію, можна виділити наступні:

F_1 — вибір самої програми.

F_2 — якісний аналіз даних.

F_3 — графічні показники.

Кожна з цих функцій має декілька варіантів реалізації:

— Функція F_1 :

а) Eviews.

б) R.

— Функція F_2 :

а) Застосування вбудованих функцій.

б) Створення своїх обчислень значень.

— Функція F_3 :

а) Використання шаблонних графіків.

б) Створення своїх.

Варіанти реалізації основних функцій наведені у морфологічній карті системи (рис. [4.1](#)).

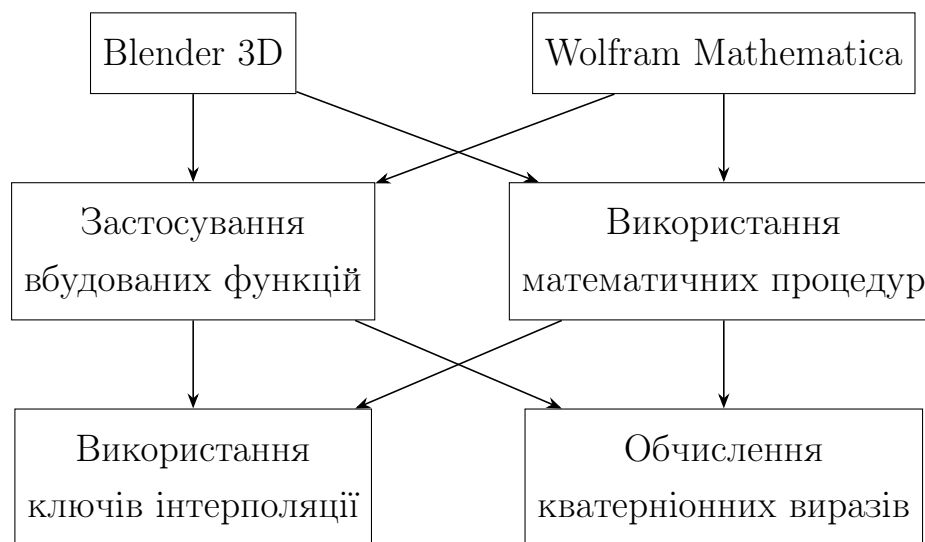


Рисунок 4.1. Морфологічна карта

Морфологічна карта відображає множину всіх можливих варіантів основних функцій. Позитивно-негативна матриця показана в таблиці 4.1

Таблиця 4.1. Позитивно-негативна матриця

Функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
F_1	А	GPL ліцензія з відкритим кодом, безкоштовний доступ	На написання коду необхідно мати базові навички та вміння
	Б	Наявна реалізація більшості математичних функцій	Високі вимоги до комп'ютерного обладнання, займає багато місця на жорсткому диску

Продовження таблиці 4.1.

Функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
F_2	А	Доступність та легкість при написанні	Іноді не відповідає задачі яку треба розв'язати
	Б	Ідеально описують усі необхідні характеристики	Достатньо затратно реалізовувати свої алгоритми для подальшої реалізації
F_3	А	Зручний візуальний інтерфейс	Деякий функціонал відсутній
	Б	При виконанні власних досліджень краще може передавати висновки	Необхідно достатньо багато часу для написання програми для побудови та знаходження всього необхідного в задачі

На основі аналізу позитивно-негативної матриці робимо висновок, що при розробці програмного продукту деякі варіанти реалізації функцій варто відкинути, тому, що вони не відповідають поставленим перед програмним продуктом задачам. Ці варіанти відзначені у морфологічній карті.

— Функція F_1 :

Перевагу даємо загальнодоступності. Для спрощення роботи по написанню коду варіант Б має бути відкинтий.

— Функція F_2 :

Програма допускає обрання обох варіантів. Можливо використати варіанти А чи Б.

— Функція F_3 :

Реалізація першого варіанту є сприйнятливою для програми. Це варіант А.

Таким чином, будемо розглядати такий варіанти реалізації ПП:

$$F_1A - F_2A - F_3A$$

$$F_1A - F_2B - F_3A$$

Для оцінювання якості розглянутих функцій обрана система параметрів, описана нижче.

4.3. Обґрунтування системи параметрів програмного продукту

На основі даних, розглянутих вище, визначаються основні параметри вибору, які будуть використані для розрахунку коефіцієнта технічного рівня.

Для того, щоб охарактеризувати програмний продукт, будемо використовувати наступні параметри:

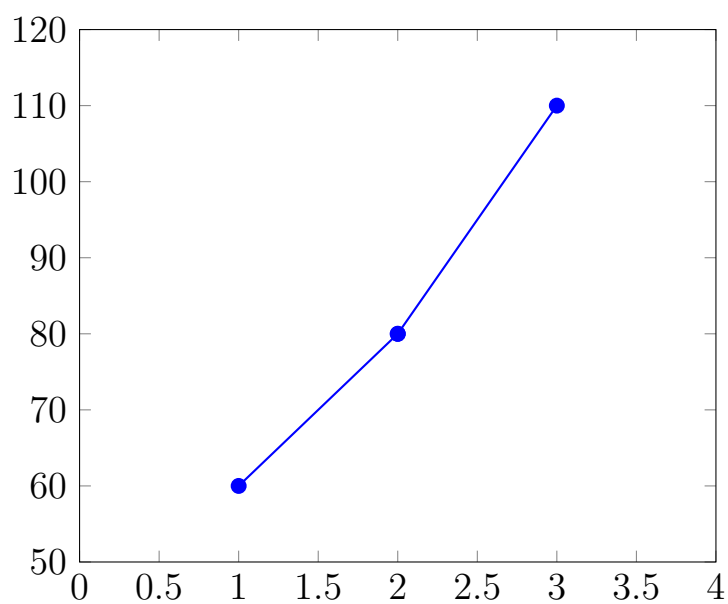
- X_1 – швидкодія мови програмування;
- X_2 – об’єм пам’яті для обчислень та збереження даних;
- X_3 – час обчислення проміжних значень інтерполяції;
- X_4 – потенційний об’єм програмного коду.

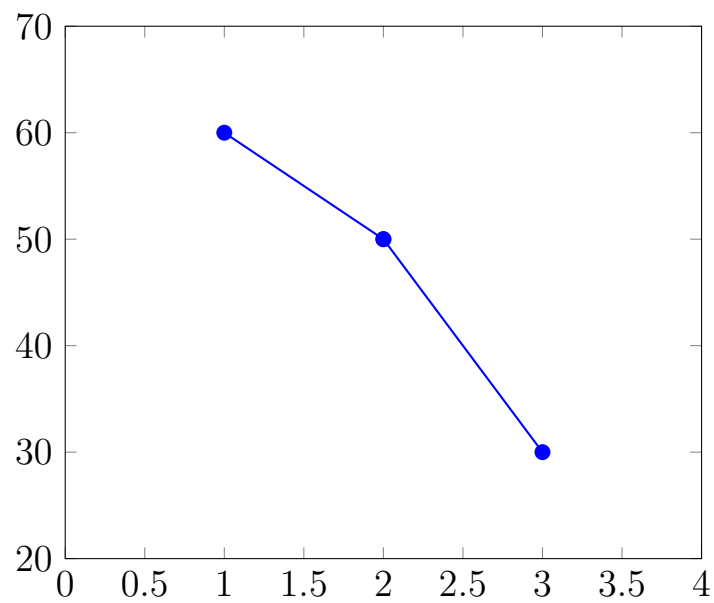
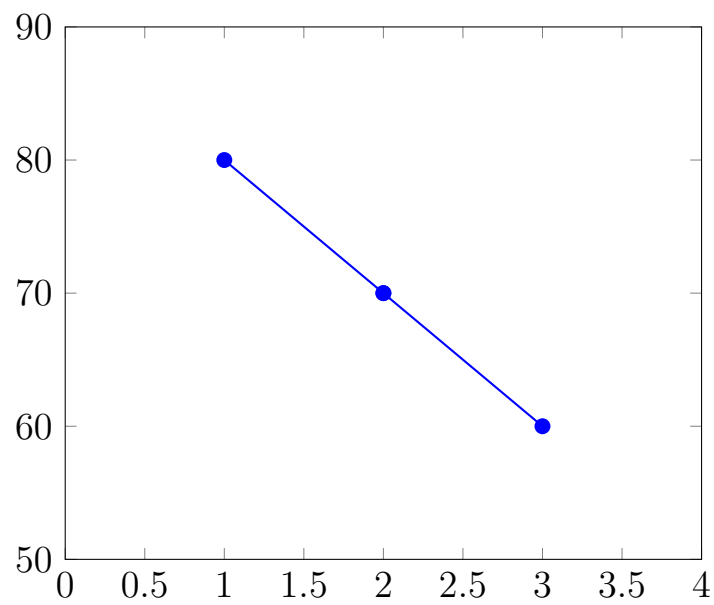
Гірші, середні і кращі значення параметрів вибираються на основі вимог замовника й умов, що характеризують експлуатацію програмного продукту, як показано у таблиці [4.2](#)

Таблиця 4.2. Основні параметри програмного продукту

Назва Параметра	Умовні позначення	Одиниці виміру	Значення параметра		
			гірші	середні	кращі
Швидкодія мови програмування	X_1	оп/мс	310	640	880
Об'єм пам'яті	X_2	Мб	2900	1500	1000
Час обчислення проміжних значень інтерполяції	X_3	мс	65	35	10
Потенційний об'єм програмного коду	X_4	кількість рядків коду	150	50	35

За даними таблиці 4.2 будуються графічні характеристики параметрів – рис. 4.2-4.4.

Рисунок 4.2. X_1 , швидкодія мови програмування

Рисунок 4.3. X_2 , об'єм пам'ятіРисунок 4.4. X_3 , час попередньої обробки даних

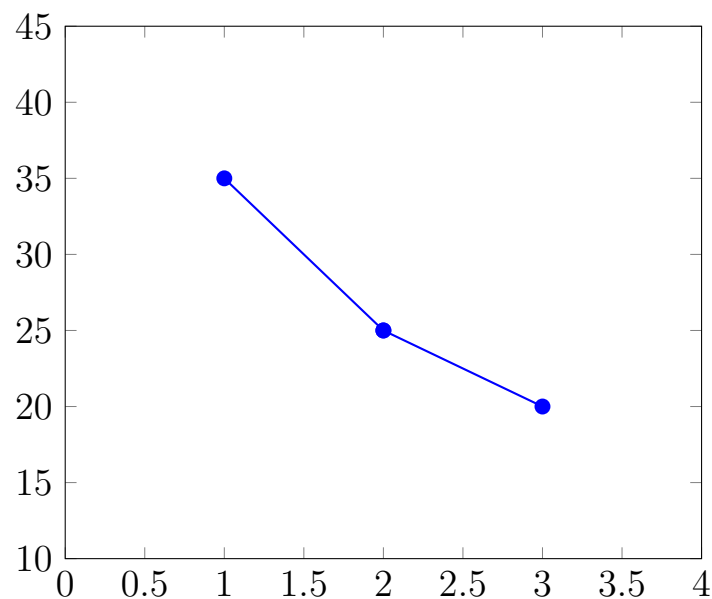


Рисунок 4.5. X_4 , потенційний об'єм програмного коду

4.4. Аналіз експертного оцінювання параметрів

Після детального обговорення й аналізу кожний експерт оцінює ступінь важливості кожного параметру для конкретно поставленої цілі – розробка програмного продукту, який дає найбільш точні результати при знаходженні параметрів моделей адаптивного прогнозування і обчислення прогнозних значень.

Значимість кожного параметра визначається методом попарного порівняння. Оцінку проводить експертна комісія із 7 людей. Визначення коефіцієнтів значимості передбачає:

- визначення рівня значимості параметра шляхом присвоєння різних рангів;
- перевірку придатності експертних оцінок для подальшого використання;

- визначення оцінки попарного пріоритету параметрів;
- обробку результатів та визначення коефіцієнту значимості.

Для перевірки степені достовірності експертних оцінок, визначимо наступні параметри:

- 1) сума рангів кожного з параметрів і загальна сума рангів:

$$R_i = \sum_{j=1}^N r_{ij} R_{ij} = N \frac{n(n+1)}{2} = 70$$

де N – число експертів, n – кількість параметрів;

- 2) середня сума рангів:

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = 17,5$$

- 3) відхилення суми рангів кожного параметра від середньої суми рангів:

$$\Delta_i = R_i - T$$

Сума відхилень по всіх параметрах повинна дорівнювати 0;

- 4) загальна сума квадратів відхилення:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = 89$$

Порахуємо коефіцієнт узгодженості:

$$W = \frac{12S}{N^2(n^3 - n)} = \frac{12 \cdot 89}{7^2(4^3 - 4)} = 0.691 > W_k = 0.67$$

Ранжування можна вважати достовірним, тому що знайдений коефіцієнт узгодженості перевищує нормативний, котрий дорівнює 0.67.

Результати експертного ранжування наведені у таблиці [4.3](#)

Таблиця 4.3. Результати ранжування параметрів

Параметр	Назва параметра	Одиниці виміру	Ранг параметра за оцінкою експерта							Сума рангів R_i	Відхилення Δi	Δi^2
			1	2	3	4	5	6	7			
X_1	Швидкодія мови програмування	Оп/мс	1	2	2	1	3	1	3	13	-4.5	20.25
X_2	Об'єм пам'яті	Мб	4	4	3	4	4	4	2	25	7.5	56.25
X_3	Час попередньої обробки даних	мс	2	1	4	3	1	2	1	14	-3.5	12.25
X_4	Потенційний об'єм програмного коду	Кількість рядків коду	3	3	1	2	2	3	4	18	0.5	0.25
Разом			10	10	10	10	10	10	10	70	0	89

Скориставшись результатами ранжирування, проведемо попарне порівняння всіх параметрів і результати занесемо у таблицю 4.4

Таблиця 4.4. Попарне порівняння параметрів

Параметри	Експерти							Кінцева оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X_1 і X_2	<	<	<	<	<	<	<	<	0,5
X_1 і X_3	<	>	>	<	<	<	>	<	0,5

Продовження таблиці 4.4.

Параметри	Експерти							Кінцева оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X_1 і X_4	<	<	<	<	<	<	<	<	0,5
X_2 і X_3	>	>	>	>	>	>	>	>	1,5
X_2 і X_4	<	>	<	<	>	<	<	<	0,5
X_3 і X_4	<	<	<	<	<	<	<	<	0,5

Числове значення, що визначає ступінь переваги i -го параметра над j -тим, a_{ij} визначається по формулі:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1.5 & X_i > X_j \\ 1.0 & X_i = X_j \\ 0.5 & X_i < X_j \end{cases}$$

З отриманих числових оцінок переваги складемо матрицю $A = ||a_{ij}||$.

Для кожного параметра зробимо розрахунок вагомості K_{vi} за наступними формулами:

$$K_{vi} = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^n b_i}$$

$$b'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j$$

Як видно з таблиці 4.5, різниця значень коефіцієнтів вагомості не перевищує 2%, тому більшої кількості ітерацій не потрібно.

Таблиця 4.5. Розрахунок вагомості параметрів

Параметри X_i	Параметри X_j				Перша ітер.		Друга ітер.		Третя ітер.	
	X_1	X_2	X_3	X_4	b_i	K_i	b_i^1	K_i^1	b_i^2	K_i^2
X_1	1	0,5	0,5	0,5	2,5	0,16	9,25	0,16	34,125	0,16

Продовження таблиці 4.5.

Параметри X_i	Параметри X_j				Перша ітер.		Друга ітер.		Третя ітер.	
	X_1	X_2	X_3	X_4	b_i	K_i	b_i^1	K_i^1	b_i^2	K_i^2
X_2	1,5	1	1,5	0,5	4,5	0,28	16,25	0,28	59,125	0,28
X_3	1,5	0,5	1	0,5	3,5	0,22	12,25	0,21	41,875	0,2
X_4	1,5	1,5	1,5	1	5,5	0,34	21,25	0,35	77,875	0,36
Всього:					16	1	59	1	213	1

4.5. Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій

Визначаємо рівень якості кожного варіанту виконання основних функцій окремо.

Абсолютні значення параметрів X_2 (об'єм пам'яті), X_3 (час попередньої обробки даних) та X_4 (потенційний об'єм програмного коду) відповідають технічним вимогам умов функціонування даного ПП.

Абсолютне значення параметра X_1 (швидкість роботи мови програмування) обрано не найгіршим.

Коефіцієнт технічного рівня для кожного варіанта реалізації ПП розраховується так (таблиця 4.6):

$$K_K(j) = \sum_{i=1}^n b_{i,j} B_{i,j}$$

де

n — кількість параметрів;

K_i — коефіцієнт вагомості i -го параметра;

B_i — оцінка i -го параметра в балах.

Таблиця 4.6. Розрахунок показників рівня якості варіантів реалізації основних функцій ПП

Основні функції	Варіант реалізації функції	Параметри	Абсолютне значення параметра	Бальна оцінка параметра	Коефіцієнт вагомості параметра	Коефіцієнт рівня якості
F_1	А	X_1	131	31	0,51	7.2
F_3	А	X_2	47	22	0,22	8.13
F_4	Б	X_3	1	17	0,11	1.7
	А	X_4	10	27	0,42	2.97

За даними з таблиці 4.6 за формулою:

$$K_K = K[F_{1k}] + K[F_{2k}] + \dots + K[F_{zk}]$$

визначаємо рівень якості кожного з варіантів:

$$K_{K1} = 7.2 + 8.13 + 1.7 = 17.03;$$

$$K_{K2} = 7.2 + 8.13 + 2.97 = 18.3.$$

Як видно з розрахунків, кращим є 2 варіант, для якого коефіцієнт технічного рівня має найбільше значення.

4.6. Економічний аналіз варіантів розробки ПП

Для визначення вартості розробки ПП спочатку проведемо розрахунок трудомісткості.

Всі варіанти включають в себе два окремих завдання:

1. Розробка проекту програмного продукту;
2. Розробка програмної оболонки;

Завдання 1 за ступенем новизни відноситься до групи А, завдання 2 – до групи Б. За складністю алгоритми, які використовуються в завданні 1 належать до групи 1; а в завданні 2 – до групи 3.

Для реалізації завдання 1 використовується довідкова інформація, а завдання 2 використовує інформацію у вигляді даних.

Проведемо розрахунок норм часу на розробку та програмування для кожного з завдань.

Загальна трудомісткість обчислюється як:

$$T_O = T_P \cdot K_{\Pi} \cdot K_{СК} \cdot K_M \cdot K_{СТ} \cdot K_{СТ.М}$$

де

T_P — трудомісткість розробки ПП;

K_{Π} — поправочний коефіцієнт;

K_{Π} — коефіцієнт на складність вхідної інформації;

$K_{СК}$ — коефіцієнт рівня мови програмування;

$K_{СТ}$ — коефіцієнт використання стандартних модулів і прикладних програм;

$K_{СТ.М}$ — коефіцієнт стандартного математичного забезпечення.

Для першого завдання, виходячи із норм часу для завдань розрахункового характеру степеню новизни А та групи складності алгоритму 1, трудомісткість дорівнює: $T_P = 37$ людино-днів. Поправочний коефіцієнт, який враховує вид нормативно-довідкової інформації для першого завдання: $K_{\Pi} = 1.8$ Поправочний коефіцієнт, який враховує складність контролю вхідної та вихідної інформації для всіх семи завдань рівний 1: $K_{СК} = 1$.

Оскільки при розробці першого завдання використовуються стандартні модулі, врахуємо це за допомогою коефіцієнта $K_{СТ} = 0.9$. Тоді загальна трудомісткість програмування першого завдання дорівнює:

$$T_2 = 29 \cdot 0.9 \cdot 0.8 = 20.88 \text{ людино-днів.}$$

Складаємо трудомісткість відповідних завдань для кожного з обраних варіантів реалізації програми, щоб отримати їх трудомісткість:

$$T_I = (59,94 + 20.88 + 4.8 + 20.88) \cdot 8 = 852 \text{ людино-днів.}$$

$$T_{II} = (59,94 + 20.88 + 6.91 + 20.88) \cdot 8 = 868,88 \text{ людино-днів.}$$

Найбільш високу трудомісткість має варіант II.

В розробці беруть участь два програмісти з окладом 17000 грн., один аналітик в області даних з окладом 19000. Визначимо середню зарплату за годину за формулою:

$$C_{\text{ч}} = \frac{M}{T_m \cdot t} \text{ грн.,}$$

де

M — місячний оклад працівників;

T_m — кількість робочих днів тиждень;

t — кількість робочих годин в день.

$$C_{\text{ч}} = \frac{18000 + 12500 + 20100}{3 \cdot 21 \cdot 8} = 100.39 \text{ грн.,}$$

Тоді, розрахуємо заробітну плату за формулою:

$$C_{\text{зп}} = C_{\text{ч}} \cdot T_i \cdot K_{\text{д}}$$

де

$C_{\text{ч}}$ — величина погодинної оплати праці програміста;

T_i — трудомісткість відповідного завдання;

K_d — норматив, який враховує додаткову заробітну плату.

Зарплата розробників за варіантами становить:

$$\text{I. } C_{3П} = 100.39 \cdot 852 \cdot 1.2 = 102638.73 \text{ грн.}$$

$$\text{II. } C_{3П} = 100.39 \cdot 868.88 \cdot 1.2 = 104672.23 \text{ грн.}$$

Відрахування на єдиний соціальний внесок становить 22%:

$$\text{I. } C_{ВІД} = C_{3П} \cdot 0.22 = 102638.73 \cdot 0.22 = 22580.52 \text{ грн.}$$

$$\text{II. } C_{ВІД} = C_{3П} \cdot 0.22 = 104672.23 \cdot 0.22 = 23027.89 \text{ грн.}$$

Тепер визначимо витрати на оплату однієї машино-години. (C_M)

Так як одна ЕОМ обслуговує одного програміста з окладом 19300 грн., з коефіцієнтом зайнятості 0.2 то для однієї машини отримаємо:

$$C_{Г} = 12 \cdot M \cdot K_3 = 12 \cdot 19300 \cdot 0.2 = 46320 \text{ грн.}$$

З урахуванням додаткової заробітної плати:

$$C_{3П} = C_{Г} \cdot (1 + K_3) = 46320 \cdot (1 + 0.2) = 55584 \text{ грн.}$$

Відрахування на соціальний внесок:

$$C_{ВІД} = C_{3П} \cdot 0.22 = 55584 \cdot 0.22 = 12228.48 \text{ грн.}$$

Амортизаційні відрахування розраховуємо при амортизації 29% та вартості ЕОМ – 10000 грн.

$$C_A = K_{ТМ} \cdot K_A \cdot Ц_{ПР} = 1.4 \cdot 0.29 \cdot 10000 = 4060 \text{ грн.,}$$

де

$K_{ТМ}$ — коефіцієнт, який враховує витрати на транспортування та монтаж приладу у користувача;

K_A — річна норма амортизації;

$\Pi_{\text{ПР}}$ — договірна ціна приладу.

Витрати на ремонт та профілактику розраховуємо як:

$$C_P = K_{\text{ТМ}} \cdot \Pi_{\text{ПР}} \cdot K_P = 1.4 \cdot 10000 \cdot 0.08 = 1120 \text{ грн.},$$

де

K_P — відсоток витрат на поточні ремонти.

Ефективний годинний фонд часу ПК за рік розраховуємо за формулою:

$$T_{\text{ЕФ}} = (D_K - D_B - D_C - D_P) \cdot t_3 \cdot K_B = (365 - 104 - 12 - 16) \cdot 8 \cdot 0.34 = 633.76 \text{ години},$$

де

D_K — календарна кількість днів у році;

D_B, D_C — відповідно кількість вихідних та святкових днів;

D_P — кількість днів планових ремонтів устаткування;

t — кількість робочих годин в день;

K_B — коефіцієнт використання приладу у часі протягом зміни.

Витрати на оплату електроенергії розраховуємо за формулою:

$$C_{\text{ЕЛ}} = T_{\text{ЕФ}} \cdot N_C \cdot K_3 \cdot \Pi_{\text{ЕН}} = 633.76 \cdot 0.34 \cdot 0.3 \cdot 5.23 = 338.08 \text{ грн.},$$

де

N_C — середньо-споживча потужність приладу;

K_3 — коефіцієнтом зайнятості приладу;

$\Pi_{\text{ЕН}}$ — тариф за 1 КВт-годин електроенергії.

Накладні витрати розраховуємо за формулою:

$$C_H = C_{\text{ПР}} \cdot 0.67 = 10000 \cdot 0.67 = 6700 \text{ грн.}$$

Тоді, річні експлуатаційні витрати будуть:

$$C_{\text{ЕКС}} = C_{\text{ЗП}} + C_{\text{ВІД}} + C_A + C_P + C_{\text{ЕЛ}} + C_H$$

$$C_{\text{ЕКС}} = 55584 + 12228.48 + 4060 + 1120 + 338.08 + 6700 = 80030.56 \text{ грн.}$$

Собівартість однієї машино-години ЕОМ дорівнюватиме:

$$C_{\text{М-Г}} = C_{\text{ЕКС}} / T_{\text{ЕФ}} = 80030.56 / 633.76 = 126.27 \text{ грн/год.}$$

Оскільки в даному випадку всі роботи, які пов'язані з розробкою програмного продукту ведуться на ЕОМ, витрати на оплату машинного часу, в залежності від обраного варіанта реалізації, складає:

$$C_M = C_{\text{М-Г}} \cdot T$$

I. $C_M = 126.27 \cdot 852 = 107582.04 \text{ грн.}$

II. $C_M = 126.27 \cdot 868.88 = 109713.47 \text{ грн.}$

Накладні витрати складають 67% від заробітної плати:

$$C_H = C_{\text{ЗП}} \cdot 0.67$$

I. $C_H = 107582.04 \cdot 0.67 = 72079.96 \text{ грн.}$

II. $C_H = 109713.47 \cdot 0.67 = 73508.02 \text{ грн.}$

Отже, вартість розробки ПП за варіантами становить:

$$C_{\text{ПП}} = C_{\text{ЗП}} + C_{\text{ВІД}} + C_M + C_H$$

I. $C_{\text{ПП}} = 102638.73 + 22580.52 + 107931.36 + 72079.96 = 305230.57 \text{ грн.}$

II. $C_{\text{ПП}} = 104672.23 + 23027.89 + 110069.71 + 73508.02 = 311277.85 \text{ грн.}$

4.7. Вибір кращого варіанту ПП техніко-економічного рівня

Розрахуємо коефіцієнт техніко-економічного рівня за формулою:

$$K_{\text{ТЕР}j} = K_{\text{К}j}/C_{\text{ф}j},$$
$$K_{\text{ТЕР}1} = 17.03/305230.57 = 5.579 \cdot 10^{-5},$$
$$K_{\text{ТЕР}2} = 18.3/311277.85 = 5.878 \cdot 10^{-5}.$$

Як бачимо, найбільш ефективним є другий варіант реалізації програми з коефіцієнтом техніко-економічного рівня $K_{\text{ТЕР}2} = 5.878 \cdot 10^{-5}$.

Після виконання функціонально-вартісного аналізу програмного комплексу що розроблюється, можна зробити висновок, що з альтернатив, що залишились після першого відбору двох варіантів виконання програмного комплексу, оптимальним є перший варіант реалізації програмного продукту. У нього виявився найкращий показник техніко-економічного рівня якості $K_{\text{ТЕР}} = 5.878 \cdot 10^{-5}$.

Цей варіант реалізації програмного продукту має такі параметри:

- Вибір програмного продукту – Eviews;
- Реалізація важливої постановки з допомогою вбудованих функцій;
- Використання стандартного інтерфейсу для побудови значень.

Даний варіант виконання програмного комплексу дає користувачу зручний інтерфейс, швидку реалізацію програми та доступний функціонал для роботи.

4.8. Висновки до 4 розділу

В даному розділі було проведено повний функціонально-вартісний аналіз програмного продукту. Також було знайдено оцінку основних функцій програмного продукту.

В результаті виконання функціонально-вартісного аналізу програмного комплексу що розроблюється, було визначено та проведено оцінку основних функцій програмного продукту, а також знайдено параметри, які його характеризують.

На основі аналізу вибрано варіант реалізації програмного продукту.

ВИСНОВКИ

У цій роботі були розглянуті кватерніони

$$a + bi + cj + dk$$

які спочатку були введені як узагальнення комплексних чисел

$$a + ib, \quad i^2 = -1$$

Однак, розвиваючи теорію кватерніонного аналізу, були отримані прикладні результати, такі як:

- опис обертання об'єктів у просторі;
- якісна інтерполяція між кутами повороту;
- зручність обчислення композиції.

Не дивлячись на те, що кватерніони можна вважати чотирьохвимірним математичним об'єктом за рахунок наявності чотирьох незалежних базисних кватерніонів

$$1, i, j, k$$

саме така конструкція дозволила описувати оберти у тривимірному просторі, причому робити це якісніше за відомий метод кутів Ейлера й матричної композиції, що підтверджується практичними прикладами та порівнянням.

Розуміючи потенціал кватерніонів, було проведене узагальнення теорії математичного аналізу на множину кватерніонів, а саме:

- арифметичні властивості обчислення добутку, спряження, степеня кватерніонів;
- послідовності кватерніонів;

- граничні властивості кватерніонів;
- відображення $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ кватерніонів та функціональні послідовності;
- ряди кватерніонів, зокрема степеневі ряди.

Було зацентовано увагу саме на ряди кватерніонів, отримано критерії та ознаки збіжності. А для степеневих рядів було доведено узагальнення теореми Абеля про сферу збіжності.

Наостанок, для програмної реалізації комп'ютерного застосування кватерніонів для обчислення інтерполяції, було проведено функціональновартісний аналіз.

ПОКАЖЧИК

А

Арифметичні властивості

— послідовностей [41](#)

— рядів [45](#)

Б

Базисний

— кватерніон [6](#)

Блокування обертання *див.*

Gimbal lock

В

Векторна частина кватерніону [18](#)

Властивості

— арифметичні [41](#), [45](#)

Г

Границя

— послідовності кватерніонів [39](#)

Гранична функція [43](#)

Д

Дійсна частина кватерніону [6](#)

Додавання

— кватерніонів [7](#)

Е

Еквівалентність

— кватерніонів *див.* Рівність кватерніонів

З

Загальний член ряду [44](#)

Збіжна

— послідовність кватерніонів [39](#)

Збіжність

— абсолютна [45](#), [49](#)

— поточкова [43](#)

— рівномірна [43](#)

І

Інтерполяція [33](#)

К

Кватерніон [6](#)

— базисний [6](#)

— обертання [26](#)

— рівний [7](#)

— спряжений [6](#)

Коефіцієнт степеневого ряду [50](#)

Критерій Коші [47](#)

Критерій Коші [45](#)

Кути Ейлера [29](#)

М

Множення

— кватерніонів 7

Н

Напрямні косінуси 35

Нескінченно

— велика послідовність 42

— мала послідовність 42

Норма

— кватерніону 7

О

Операція

— додавання 7

— множення 7

П

Послідовність

— нескінченно велика 42

— нескінченно мала 42

Р

Радіус збіжності 53

Рівність

— кватерніонів 7

Ряд

— збіжний 44

— розбіжний 44

Ряд кватерніонів 44

— степеневий 50

— функціональний 47

С

Скалярна частина кватерніону 18

Складання рамок *див.* Gimbal lock

Спін електронів 37

Спряження

— кватерніона 6

Ступінь кватерніону 10

Ступінь свободи 32

Сума

— ряду 44

— часткова 44

Сфера збіжності 53

Т

Теорема

— Абеля 50

— Вейерштрасса 49

— Вейерштрасса 46

— про обертання 23

У

Уявна частина кватерніону 6

Ф

Функціональною послідовністю
кватерніонів 43

Ц

Центр степеневого ряду 50

Ч

Частина

— кватерніона

— — дійсна 6

— кватерніону

— — векторна [18](#)

— — скалярна [18](#)

— — уявна [6](#)

Часткова сума послідовності [44](#)

G

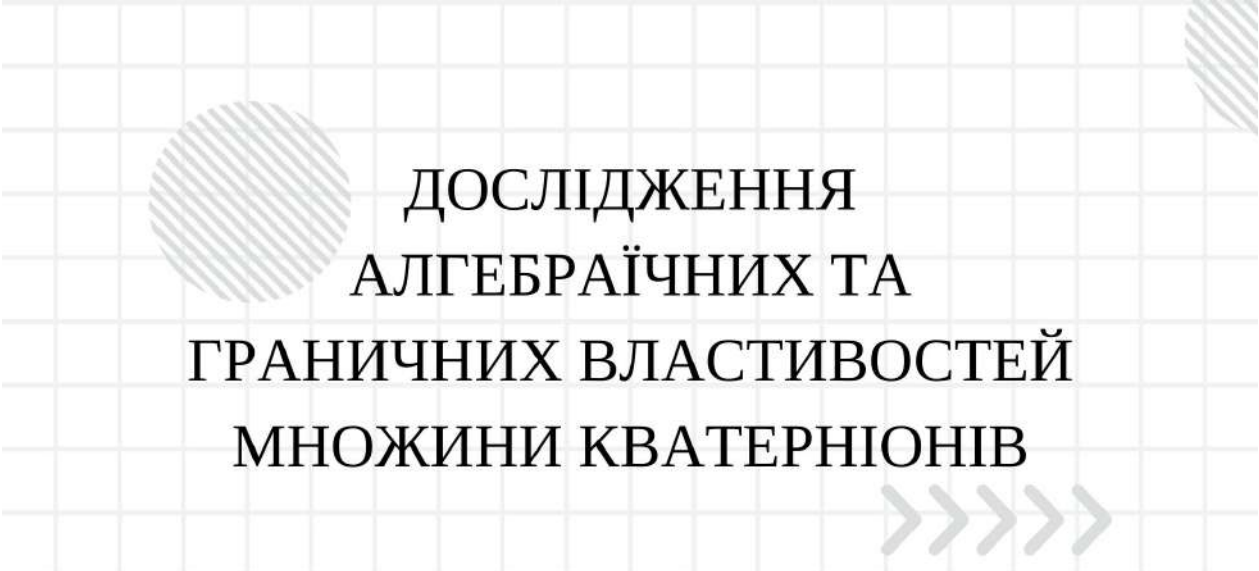
Gimbal lock [32](#)

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. *Farebrother R. W., Groß J., Troschke S.-O.* Matrix representation of quaternions // *Linear Algebra and its Applications.* — 2003. — Vol. 362. — P. 251–255. — ISSN 0024-3795. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(02\)00535-9](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00535-9). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379502005359>.
2. Алгебра та геометрія. Конспект лекцій з курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» : навчальний посібник для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз», освітніх програм «Системний аналіз і управління; Системний аналіз фінансового ринку» / КПП ім. Ігоря Сікорського / О. О. Калюжний, А. Ю. Мальцев, Г. Б. Подколзін, Ю. А. Чаповський. — Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського¹, 2019. — С. 127. — URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/27818>.
3. *Morawiec A.* Orientations and Rotations. — Springer Berlin Heidelberg, 2004. — ISBN 978-3540407348. — DOI: [10.1007/978-3-662-09156-2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-09156-2). — URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-09156-2>.
4. *Kim S., Kim M.* Rotation Representations and Their Conversions // *IEEE Access.* — 2023. — Vol. 11. — P. 6682–6699. — ISSN 2169-3536. — DOI: [10.1109/access.2023.3237864](https://doi.org/10.1109/access.2023.3237864). — URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10019271>.
5. *Dam E., Koch M., Lillholm M.* Quaternions, Interpolation and Animation. Vol. 2. — Datalogisk Institut, Københavns Universitet, 1998.

-
6. *Sanctuary B.* Quaternion Spin. — 2024. — May. — DOI: [10.20944/preprints202302.0055.v4](https://doi.org/10.20944/preprints202302.0055.v4). — URL: https://www.researchgate.net/publication/380771579_Quaternion_Spin.

СЛАЙДИ ПРЕЗЕНТАЦІЇ



ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ГРАНИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МНОЖИНИ КВАТЕРНІОНІВ

ІПСА | 2024

кер., доц. Подколзін Г. Б.

Шушар Антон КА-01

Предмет: алгебраїчні властивості та збіжність на множини кватерніонів.

Об'єкт: множина кватерніонів.

Мета: дослідження алгебраїчних та граничних властивостей множини кватерніонів.

Актуальність: кватерніони є дуже використовними для опису геометричних перетворень та у складних фізичних моделях.

Функціональні, а особливо степеневі, ряди відіграють важливу роль в аналітичному описі функцій. Такий підхід дозволить вводити аналоги диференціювання та інтегрування, які звичайним чином перенести на кватерніони не вдасться через некомутативність.

ЗМІСТ

- Арифметичні властивості кватерніонів
- Матричне представлення кватерніонів
- Векторне представлення кватерніонів
- Застосування кватерніонів для обчислення обертання у просторі, інтерполяція поворотів
- Граничні властивості кватерніонів, збіжність
- Ряди та функціональні ряди кватерніонів

ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Кватерніоном називається вираз

$$a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$$

де $1, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$1, i, j, k$$

називаються *базисними кватерніонами*. Множину всіх кватерніонів будемо позначати як

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Дійсною частиною кватерніону називається число

$$\operatorname{Re} z = a$$

Уявною частиною кватерніона називається вираз

$$\operatorname{Im} z = bi + cj + dk$$

Спряженням до кватерніону $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$ називається кватерніон

$$\bar{z} = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z$$

Нормою кватерніону $z = a + bi + cj + dk$ називається число

$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

АРИФМЕТИЧНІ ВАСИВНОСТІ

Додаванням кватерніонів $z_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ $z_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ називається

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

Множенням кватерніонів називається операція, визначена на базисних кватерніонах

$1 \cdot 1 = 1,$	$1 \cdot i = i,$	$1 \cdot j = j,$	$1 \cdot k = k,$
$i \cdot 1 = i,$	$i \cdot i = -1,$	$i \cdot j = k,$	$i \cdot k = -j,$
$j \cdot 1 = j,$	$j \cdot i = -k,$	$j \cdot j = -1,$	$j \cdot k = i,$
$k \cdot 1 = k,$	$k \cdot i = j,$	$k \cdot j = -i,$	$k \cdot k = -1,$

ПРЕДСТАВЛЕННЯ

МАТРИЧНЕ

ВЕКТОРНЕ

МАТРИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

$$a + bi + cj + dk \sim \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

тобто ізоморфізм

$$M: \langle \mathbb{H}, +, \cdot \rangle \rightarrow \langle \text{Mat}_{4 \times 4}, +, \cdot \rangle$$

Арифметичні операції кватерніонів однозначно відповідають арифметичним операціям матриць.

ВЕКТОРНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

$$\mathbb{H} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

$$z \sim \left(a, \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} \right)$$

ВЕКТОРНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

$$\vec{v} = b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}$$

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v \sim \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad bi + cj + dk \sim \left(0, \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} [\vec{i}, \vec{j}] &= \vec{k} \sim i \cdot j = k, \\ [\vec{k}, \vec{j}] &= -\vec{i} \sim k \cdot j = -i \end{aligned}$$

ВЕКТОРНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

$$\mathbb{H} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

Ізоморфізм добутку для представлення

Теорема. Нехай $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ та

$$z_1 \sim (a_1, \vec{v}_1), \quad z_2 \sim (a_2, \vec{v}_2)$$

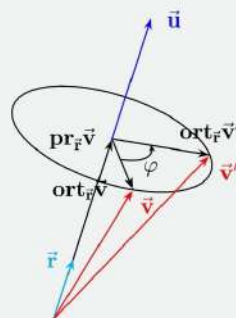
Тоді

$$z_1 \cdot z_2 \sim (a_1 a_2 - (\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 + [\vec{v}_1, \vec{v}_2])$$

Наслідок. Якщо $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 = 0$, то $z_1 \cdot z_2 \sim (-(\vec{v}_1, \vec{v}_2), [\vec{v}_1, \vec{v}_2])$

ВЕКТОРНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

Обертання вектора $\vec{v}$ навколо
вісі $\vec{u}$ простим описується за
допомогою кватерніонів.



12

Київ | 2024 | ІПСА | КПІ

ВЕКТОРНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

Теорема (про обертання). Нехай $\mathbb{R}^3 \ni \vec{u}$ – вісь обертання, одиничний
вектор, $\mathbb{R}^3 \ni \vec{v}$ – довільна точка в тривимірному просторі. Тоді точка,
повернута на кут φ навколо осі матиме координати

$$\vec{v}' \sim uv\bar{u}$$

де

$$v \sim \vec{v}, \quad u \sim \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right)$$

Кватерніон $u \sim \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right)$ називається кватерніоном обертання навколо $\vec{u}$ на кут φ .

13

Київ | 2024 | ІПСА | КПІ

ОБЕРТАННЯ

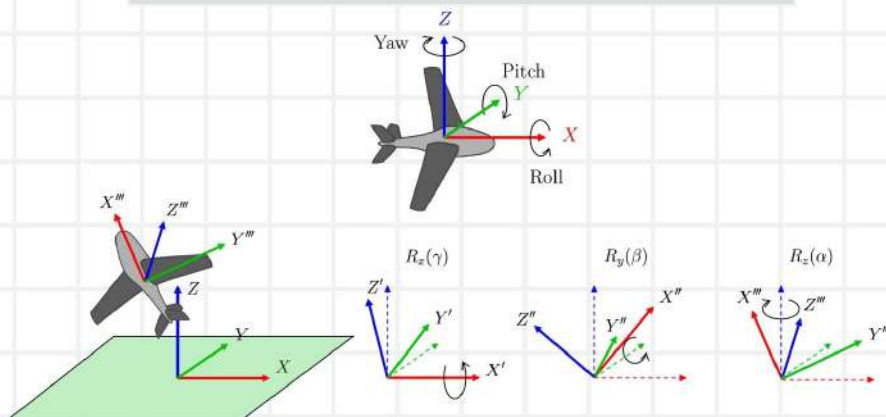
Найбільш поширеним способом перетворення простору є матриці. Повороти описуються наступним чином

Кути Ейлера

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad R_x(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

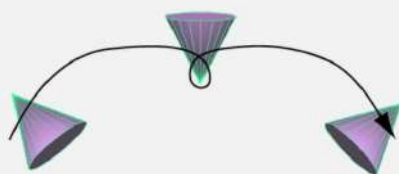
$$R = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix}$$

ОБЕРТАННЯ



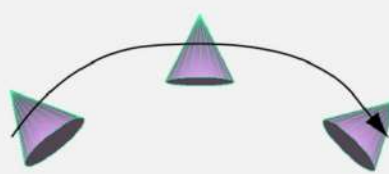
ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

Матриці повороту



Неправильна інтерполяція

Кватерніони



Правильна інтерполяція

16

Київ | 2024 | ІПСА | КПІ

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

Матриці повороту

$$\forall t \in [0, 1] \quad R_z(\alpha_t) R_y(\beta_t) R_x(\gamma_t)$$

$$\alpha_t = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$$

$$\beta_t = t\beta_1 + (1-t)\beta_2$$

$$\gamma_t = t\gamma_1 + (1-t)\gamma_2$$

$$0 \leq t \leq 1$$

Кватерніони

$$\forall t \in [0, 1] \quad tu_1 + (1-t)u_2$$

$$\forall t \in [0, 1] \quad \frac{\sin(t\theta)u_1 + \sin((1-t)\theta)u_2}{\sin(\theta)}$$

17

Київ | 2024 | ІПСА | КПІ



ЗБІЖНІСТЬ

Послідовності кватерніонів

Означення 3.1. Кватерніон $z \in \mathbb{H}$ називається *границею* послідовності кватерніонів $\{z_n\}$ якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: (n > N) \Rightarrow (\|z_n - z\| < \varepsilon)$$

$$z_n \rightarrow z \quad \text{або} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$



ЗБІЖНІСТЬ

Теорема. $(a_n + b_n i + c_n j + d_n k \rightarrow a + b i + c j + d k) \Leftrightarrow (a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, c_n \rightarrow c, d_n \rightarrow d)$

Теорема (арифметичні властивості).

а) $\{z_{1n} \pm z_{2n}\}$ – збігається

б) $\forall u, v \in \mathbb{H} \quad \{u z_{1n} v\}$ – збігається

ЗБІЖНІСТЬ

Означення. Функціональна послідовність $\{f_n\}$ збігається у точці $z_0 \in \mathbb{H}$, якщо існує границя послідовності $\{f_n(z_0)\}$

$$f_n \rightarrow f$$

називається *поточковою збіжністю*.

Означення. Функціональна послідовність $\{f_n\}$ збігається рівномірно на множині H , якщо існує така функція $f: H \rightarrow \mathbb{H}$, що виконується

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall z \in \mathbb{H} \quad (n > N) \Rightarrow \left(\sup_{z \in \mathbb{H}} \|f_n(z) - f(z)\| < \varepsilon \right)$$

$$f_n \rightrightarrows f$$

називається *рівномірною збіжністю*.

РЯДИ

$$S_n = \underbrace{z_1 + z_2 + \dots + z_n}_n$$

Означення. Рядом кватерніонів називається границя часткових сум $\{S_n\}$ послідовності кватерніонів $\{z_n\}$ і позначається як

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

Означення. Якщо послідовність часткових сум збігається $S_n \rightarrow S$, то кватерніон $S \in \mathbb{H}$ називається *сумою ряду*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$



РЯДИ

Теорема (критерій Коші). Нехай $\{z_n\}$ – послідовність кватерніонів.

Ряд кватерніонів $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається тоді і лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall p \in \mathbb{N} \quad (n > N) \Rightarrow (\|z_n + \dots + z_{n+p}\| < \varepsilon)$$

Теорема (теорема Вейерштрасса). Нехай $\{z_n\}$ – послідовність кватерніонів, $\{c_n\}$ – числова послідовність і $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається. Тоді якщо

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|z_n\| \leq c_n$$

то $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається абсолютно.



ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Означення. Функціональним рядом кватерніонів називається границя часткових сум функціональної послідовності кватерніонів $\{f_n\}$ і позначається як

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in \mathbb{H}$$

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Теорема (критерій Коші). Нехай $\{f_n\}$ – функціональна послідовність кватерніонів, $g: H \rightarrow \mathbb{H}$. Функціональний ряд збігається рівномірно до g на множині $H \subset \mathbb{H}$

$$\sum_{k=1}^n f_k(z) \Rightarrow g$$

тоді і лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall p \in \mathbb{N} \quad (n > N) \Rightarrow \left(\sup_{z \in H} \|f_n(z) + \dots + f_{n+p}(z)\| < \varepsilon \right)$$

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Означення. Функціональний ряд кватерніонів $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ називається *абсолютно збіжним у точці* $z_0 \in \mathbb{H}$, якщо збігається числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(z_0)\|$$

Теорема (Вейерштрасса). Нехай $\{f_n\}$ – функціональна послідовність кватерніонів, $\{c_n\}$ – числова послідовність і $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається. Тоді якщо

$$\forall z \in \mathbb{H} \quad \|f_n(z)\| \leq c_n$$

то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ збігається рівномірно і абсолютно.

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Означення. Функціональний ряд кватерніонів виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z - v)^n$$

називається *степеневим рядом* кватерніонів, де $\mathbb{H} \ni v$ – *центр ряду*, $\{u_n\}$ – послідовність кватерніонів – *коефіцієнти ряду*.

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Теорема (Абеля). Якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z - v)^n$$

збігається у $\mathbb{H} \ni z_0 \neq v$, то він

- а) Збігається абсолютно в кожній точці $S_o = \{z \in \mathbb{H} \mid \|z - v\| < \|z_0 - v\|\}$
- б) Збігається рівномірно на множині $S_r = \{z \in \mathbb{H} \mid \|z - v\| \leq r\}$, $r \in (0, \|z_0 - v\|)$

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Теорема (Коші-Адамара). *Будь-який степеневий ряд кватерніонів виду*

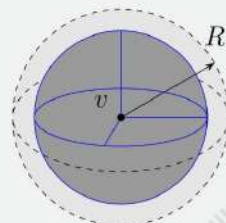
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (z - v)^n$$

збігається у всіх точках множини

$$S = \{z \in \mathbb{H} \mid \|z - v\| < R\}$$

і розходиться в $\mathbb{H} \setminus \bar{S}$, де

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|u_n\|}}$$



БІБЛІОГРАФІЯ

- 🔍 Farebrother R. W., Groß J., Troschke S.-O. Matrix representation of quaternions // Linear Algebra and its Applications — 2003
- 🔍 Morawiec A. Orientations and Rotations. — Springer Berlin Heidelberg — 2004
- 🔍 Kim S., Kim M. Rotation Representations and Their Conversions // IEEE Access. — 2023

**ДЯКУЮ ЗА
УВАГУ**

