

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ
АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ
ГЕОМЕТРІЇ,
ЧАСТИНА II
Практикум, розрахункова робота

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальностей 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»,
144 «Теплоенергетика», 184 «Гірництво»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Вища математика: Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії, частина II: Практикум, розрахункова робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 144 «Теплоенергетика», 184 «Гірництво» /КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н. Л. Денисенко, В. Ф. Зражевська. – Електронні текстові дані (1 файл: 1.1 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 43 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №8 від 24.06.2021 р.)
за поданням Вченої ради Інституту енергозбереження та енергоменеджменту (протокол № 12 від 31.05.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ, ЧАСТИНА II

Практикум, розрахункова робота

Укладачі: *Денисенко Наталя Леонідівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Зражевська Віра Федорівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Дудкін М. Є.*, докт. фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент *Рева Н. В.*, канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач кафедри математичної фізики НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Навчальний посібник розрахований на студентів енергетичних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів і має на меті допомогти студентам у виконанні розрахункової роботи з вищої математики на тему «Площина. Рівняння прямої в просторі». Крім індивідуальних завдань, посібник містить в стислій формі основні теоретичні відомості та приклади розв'язання типових задач на тему розрахункової роботи. Посібник може бути корисним студентам очної і заочної форм навчання для організації самостійної роботи, а також викладачам для забезпечення аудиторного або дистанційного вивчення курсу «Вища математика».

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ

Вступ	4
1. Площина	5
1.1. Основні рівняння площини	5
1.2. Відстань від точки до площини	8
1.3. Кут між площинами. Взаємне розташування двох площин	11
2. Пряма в просторі	13
2.1. Рівняння прямої в просторі	13
2.2. Кут між двома прямими. Взаємне розташування двох прямих	15
2.3. Кут між прямою і площиною. Взаємне розташування прямої і площини в просторі	17
3. Приклади змішаних задач про площину і пряму в просторі	20
Варіанти завдань розрахункової роботи	27
Список рекомендованої і використаної літератури	43

Вступ

Мета навчального посібника – допомогти студентам глибше оволодіти матеріалом з курсу «Вища математика» на тему «Площина. Рівняння прямої в просторі». У роботі надано основні теоретичні поняття, які повинен знати студент для того, щоб розв'язувати приклади, також наведено приклади розв'язання типових задач. У посібнику запропоновано 40 варіантів індивідуальних завдань по розглянутій темі.

Посібник може бути корисним для студентів очної та заочної форм навчання технічних спеціальностей, що вивчають вищу математику, а також для організації самостійної роботи.

Запропоновані задачі можуть бути корисними для викладачів при організації навчального процесу в форматі дистанційного навчання та при складанні контрольних завдань і завдань для розрахункової роботи на тему «Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії».

1. ПЛОЩИНА

1.1. Основні рівняння площини

У прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ площина Π може бути задана одним із нижче наведених видів рівнянь.

1. *Рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n} = \{A; B; C\}$:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Такий вектор $\vec{n}$ називається **нормальним** вектором площини.

2. *Загальне рівняння площини:*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

де A, B, C – координати нормального вектора $\vec{n}$, а D – вільний член рівняння.

3. *Рівняння площини, яка проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ (які не лежать на одній прямій):*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

4. *Рівняння площини у відрізках на осях:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (4)$$

де числа a, b, c – величини відрізків, які відтинає площина на осях Ox , Oy , Oz відповідно.

5. *Нормальне рівняння площини:*

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0, \quad (5)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси нормального вектора $\vec{n}$, який направлений з початку координат в сторону площини; p – відстань від початку координат до площини.

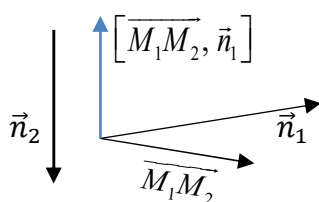
Для того, щоб загальне рівняння площини звести до нормального рівняння необхідно помножити обидві частини цього рівняння на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, де знак обираємо протилежним знаку вільного члена D .

Можна довести, що в декартовій системі координат будь-яка площина в просторі є рівнянням першого степеня відносно змінних x, y, z ; і, навпаки, кожне лінійне рівняння першого степеня відносно змінних x, y, z вигляду (2) визначає площину в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$.

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3, 5, -2)$ і $M_2(5, 8, 3)$ перпендикулярно до площини $\Pi_1: 7x - y + 5z - 10 = 0$.

Розв'язання. Оскільки шукана площина Π_2 проходить через точку M_1 , то її координати $x_1 = 3, y_1 = 5, z_1 = -2$. Знайдемо нормальний вектор $\vec{n}_2 = \{A; B; C\}$ площини Π_2 . З умови відомо, що:

- площина Π_2 проходить через точки M_1 і M_2 , тому вектор $\vec{n}_2$ перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $\overrightarrow{M_1M_2} = \{2; 3; 5\}$;
- площина Π_2 перпендикулярна до площини Π_1 , тому їхні нормальні вектори також перпендикулярні, тобто $\vec{n}_2 \perp \vec{n}_1$, де $\vec{n}_1 = \{7; -1; 5\}$.



Звідси отримаємо

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \perp \overrightarrow{M_1M_2}, \\ \vec{n}_2 \perp \vec{n}_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2 \parallel [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n}_1] \Rightarrow \vec{n}_2 = \lambda [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n}_1],$$

де $\lambda = \text{const} \neq 0$ (можна покласти $\lambda = 1$).

Обчислимо векторний добуток

$$[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n}_1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(15 - (-5)) - \vec{j}(10 - 35) + \vec{k}(-2 - 21) = 20\vec{i} + 25\vec{j} - 23\vec{k} = \{20; 25; -23\}.$$

Отже, $\vec{n}_2 = \lambda\{20; 25; -23\} = \{20\lambda; 25\lambda; -23\lambda\}$, тому $A = 20\lambda$, $B = 25\lambda$, $C = -23\lambda$.

Таким чином, внаслідок формули (1) знаходимо рівняння площини, яка проходить через задану точку M_1 перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}_2$:

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, звідки шукане рівняння площини має вигляд $20\lambda(x - 3) + 25\lambda(y - 5) - 23\lambda(z + 2) = 0$ або $\Pi_2: 20x + 25y - 23z - 231 = 0$.

Приклад 2. Скласти рівняння площини Π , що проходить через точку $M(3, -1, 2)$ перпендикулярно до площин $\Pi_1: 2x - 2y + z - 3 = 0$ і $\Pi_2: y + 10 = 0$.

Розв'язання. Оскільки шукана площина Π проходить через точку M , то координати точки $x_1 = 3$, $y_1 = -1$, $z_1 = 2$. Знайдемо нормальний вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ площини Π . З рівнянь площин Π_1 і Π_2 записуємо координати векторів їх нормалей: $\vec{n}_1 = \{2; -2; 1\}$, $\vec{n}_2 = \{0; 1; 0\}$. Оскільки $\Pi \perp \Pi_1$, то $\vec{n} \perp \vec{n}_1$. Аналогічно, $\Pi \perp \Pi_2 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{n}_2$. Отже, $\vec{n} \parallel [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \Rightarrow \vec{n} = \lambda[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$. Знаходимо векторний добуток і покладемо $\lambda = 1$:

$$[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{k}.$$

Таким чином, $\vec{n} = \{-1, 0, 2\}$ і за формулою (1) знаходимо рівняння площини, яка проходить через задану точку M_1 перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}$:

$$-(x - 3) + 0(y + 1) + 2(z - 2) = 0 \text{ або } \Pi: x - 2z + 1 = 0.$$

Приклад 3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1, 2, 2)$ і $M_2(1, 0, -2)$ та відсікає від осі абсцис відрізок $a = 3$.

Розв'язання. Записуємо рівняння площини у відрізках відповідно до

рівняння (4): $\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Щоб знайти невідомі b, c , скористаємось тим, що

площина проходить через точки $M_1(-1, 2, 2)$ і $M_2(1, 0, -2)$, тобто при підстановці координат точок в рівняння площини воно перетворюється на тотожність. Таким чином, маємо систему відносно невідомих b, c :

$$\begin{cases} \frac{-1}{3} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{0}{b} + \frac{-2}{c} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Отже, рівняння шуканої площини у відрізках має вигляд: $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-3} = 1$, або рівняння площини в загальному вигляді: $x + 3y - z - 3 = 0$.

1.2. Відстань від точки до площини

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини Π : $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, яка задана нормальним рівнянням, обчислюється за формулою:

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|. \quad (6)$$

Число $\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p$ називається **відхиленням** точки M_0 від заданої площини Π . При цьому, якщо $\delta > 0$, то точка M_0 і початок координат лежать по різні сторони від площини Π ; а якщо $\delta < 0$, то точка M_0 і початок координат лежать по одну сторону від заданої площини Π .

Зауваження. Якщо задано загальне рівняння площини $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ і точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, яка не лежить на цій площині, то відстань від точки M_0 до площини Π можна обчислити за формулою

$$d(M_0, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (7)$$

Приклад 4. Довести, що площина $2x - 2y - z - 1 = 0$ не перетинає відрізок AB , обмежений точками $A(2; 3; 4)$ і $B(-5; 0; 3)$.

Розв'язання. Зводимо рівняння площини до нормального виду. Множимо ліву і праву частини рівняння $2x - 2y - z - 1 = 0$ на нормуючий множник

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{3} \quad (\text{знак } \mu \text{ плюс, бо } D = -1 < 0): \quad \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} = 0.$$

Знаходимо відхилення точок A і B від заданої площини:

$$\delta_A = \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 4 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3} < 0, \quad \delta_B = \frac{2}{3} \cdot (-5) - \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} = -\frac{14}{3} < 0.$$

Оскільки відхилення однакового знаку мінус, то обидві точки A , B і початок відліку точка O лежать по одну сторону від площини. Отже, відрізок AB не має спільних точок з площиною.

Приклад 5. Скласти рівняння площини Π_2 , яка проходить через точку $A(-5, 0, 4)$ паралельно до площини $\Pi_1: 2x + 5y - 8z - 13 = 0$. Знайти відстань від точки $M_0(2, -1, 6)$ до шуканої площини.

Розв'язання. Для знаходження рівняння площини Π_2 необхідно знати точку, яка належить даній площині, і її нормальний вектор. Площина Π_2 проходить через точку A , тому координати точки $x_A = -5$, $y_A = 0$, $z_A = 4$. Знайдемо нормальний вектор $\vec{n}_2 = \{A; B; C\}$ площини Π_2 . З умови відомо, що площина Π_2 паралельна до площини Π_1 , тому їхні нормальні вектори будуть колінеарними, тобто $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, звідки маємо $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$, де $\lambda = \text{const} \neq 0$ (можна покласти $\lambda = 1$), $\vec{n}_1 = \{2; 5; -8\}$. Отже, $\vec{n}_2 = \lambda \{2; 5; -8\} = \{2\lambda; 5\lambda; -8\lambda\}$, тому $A = 2\lambda$, $B = 5\lambda$, $C = -8\lambda$. Таким чином, за формулою (1): $A(x - x_A) + B(y - y_A) + C(z - z_A) = 0$ шукане рівняння площини має вигляд: $2\lambda(x + 5) + 5\lambda(y - 0) - 8\lambda(z - 4) = 0$, або, спрощуючи вираз, отримаємо: $\Pi_2: 2x + 5y - 8z + 42 = 0$.

Для знаходження відстані від точки M_0 до шуканої площини Π_2 спочатку потрібно звести загальне рівняння площини $\Pi_2: 2x + 5y - 8z + 42 = 0$

до нормального рівняння. Для цього помножимо всі доданки цього рівняння на нормуючий множник (в μ вибираємо знак мінус, бо $D = 42 > 0$)

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-8)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{93}}$$

і одержимо нормальне рівняння площини

$$\Pi_2: -\frac{2}{\sqrt{93}}x - \frac{5}{\sqrt{93}}y + \frac{8}{\sqrt{93}}z - \frac{42}{\sqrt{93}} = 0.$$

Використовуючи формулу (6), обчислюємо шукану відстань

$$\begin{aligned} d(M_0, \Pi_2) &= |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p| = \\ &= \left| -\frac{2}{\sqrt{93}} \cdot 2 - \frac{5}{\sqrt{93}} \cdot (-1) + \frac{8}{\sqrt{93}} \cdot 6 - \frac{42}{\sqrt{93}} \right| = \left| -\frac{7}{\sqrt{93}} \right| = \frac{7\sqrt{93}}{93}. \end{aligned}$$

Зауваження. Відстань від точки $M_0(2, -1, 6)$ до шуканої площини $\Pi_2: 2x + 5y - 8z + 42 = 0$ також можна знайти за формулою (7):

$$\begin{aligned} d(M_0, \Pi_2) &= \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) - 8 \cdot 6 + 42|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-8)^2}} = \\ &= \frac{|-7|}{\sqrt{93}} = \frac{7\sqrt{93}}{93}. \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти відстань між паралельними площинами

$$\Pi_1: 24x - 15y + 21z + 5 = 0, \quad \Pi_2: 8x - 5y + 7z - 1 = 0.$$

Розв'язання. Переконаємось спочатку, що площини Π_1 і Π_2 паралельні.

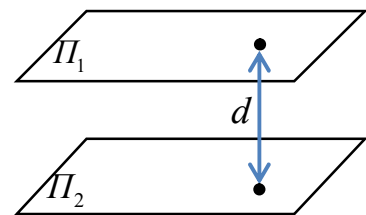
Дійсно, оскільки координати нормальних векторів $\vec{n}_1 = \{24; -15; 21\}$ і

$\vec{n}_2 = \{8; -5; 7\}$ є пропорційними $\frac{24}{8} = \frac{-15}{-5} = \frac{21}{7}$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, тому $\Pi_1 \parallel \Pi_2$.

Відстань між паралельними площинами дорівнює відстані від будь-якої точки на одній площині до іншої площини.

Поклавши, наприклад, в першому рівнянні $x = 0$ і

$y = 0$, одержимо $z = -\frac{5}{21}$ і, таким чином, знаходимо



точку $M_1\left(0; 0; -\frac{5}{21}\right)$, яка належить площині Π_1 .

Відстань від цієї точки M_1 до іншої площини Π_2 дорівнює

$$\begin{aligned} d(M_1, \Pi_2) &= \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{\left|8 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 7 \cdot \left(-\frac{5}{21}\right) - 1\right|}{\sqrt{8^2 + (-5)^2 + 7^2}} = \frac{\left|-\frac{8}{3}\right|}{\sqrt{138}} = \frac{8\sqrt{138}}{414}. \end{aligned}$$

Отже, відстань між даними паралельними площинами дорівнює $d = \frac{8\sqrt{138}}{414}$.

1.3. Кут між площинами. Взаємне розташування двох площин

Нехай задано дві площини

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

- Під кутом φ між площинами Π_1 та Π_2 розуміємо один з двограних кутів, утворених цими площинами, і знаходимо як кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ та $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (8)$$

Для знаходження гострого кута між площинами потрібно взяти чисельник правої частини по модулю.

- (умова паралельності двох площин) $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.
- (умова перпендикулярності двох площин) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Приклад 7. Визначити, при яких значеннях α , β наступні пари рівнянь $\Pi_1: \alpha x + 4y + 2z - 10 = 0$, $\Pi_2: x + \beta y - 3z - 1 = 0$ будуть визначати паралельні площини.

Розв'язання. Оскільки $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, то їхні нормальні вектори $\vec{n}_1 = \{\alpha; 4; 2\}$, $\vec{n}_2 = \{1; \beta; -3\}$ колінеарні: $\frac{\alpha}{1} = \frac{4}{\beta} = \frac{2}{-3}$. Із складеної пропорції знаходимо:

$$2\beta = -12 \Rightarrow \beta = -6, \alpha = -\frac{2}{3}.$$

Приклад 8. Визначити, при якому значенні α наступні пари рівнянь $\Pi_1: 3x + 4y + \alpha z - 10 = 0$, $\Pi_2: x - y - 3z - 1 = 0$ будуть визначати перпендикулярні площини.

Розв'язання. Площини Π_1, Π_2 перпендикулярні, тому їхні нормальні вектори $\vec{n}_1 = \{3; 4; \alpha\}$, $\vec{n}_2 = \{1; -1; -3\}$ також перпендикулярні:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow 3 - 4 - 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}.$$

Приклад 9. Знайти кут між площинами $\Pi_1: 12x - 5y + z - 25 = 0$, $\Pi_2: x - 7z - 13 = 0$.

Розв'язання. Кут φ між нормальними векторами $\vec{n}_1 = \{12; -5; 1\}$ та $\vec{n}_2 = \{1; 0; -7\}$ заданих площин Π_1 та Π_2 дорівнює одному з двограних кутів,

утворених цими площинами. Тому $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$. Знаходимо

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 12 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 + 1 \cdot (-7) = 5, |\vec{n}_1| = \sqrt{12^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{170};$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-7)^2} = \sqrt{50}.$$

$$\text{Отже, } \cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{170} \cdot \sqrt{50}} = \frac{1}{2\sqrt{85}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{\sqrt{85}}{170} \approx 87^\circ.$$

2. ПРЯМА В ПРОСТОРИ

2.1. Рівняння прямої в просторі

Пряма L в просторі $Oxyz$ може бути задана рівнянням одного з наступних видів:

1. Канонічними рівняннями прямої в просторі

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}, \quad (9)$$

де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – задана точка прямої L ; $\vec{s} = \{p; q; r\}$ – вектор паралельний до прямої L , який називається **напрямним** вектором прямої.

2. Параметричними рівняннями прямої в просторі

$$\begin{cases} x = pt + x_0, \\ y = qt + y_0, \\ z = rt + z_0, \end{cases} \quad (10)$$

де параметр $t \in R$, $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$, $\vec{s} = \{p; q; r\}$ – напрямний вектор прямої.

3. Рівняннями прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (11)$$

4. Загальними рівняннями прямої (пряма в просторі задається як лінія перетину двох непаралельних площин):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (12)$$

де нормальні вектори $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ – не колінеарні.

Приклад 10. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої через дві задані точки $M_1(1; -2; -3)$ і $M_2(0; -4; 3)$.

Розв'язання. Використовуємо формулу (11) і складаємо канонічні рівняння прямої: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{6}$. Параметричні рівняння складаємо, користуючись

формулою (10):
$$\begin{cases} \frac{x-1}{-1} = t \\ \frac{y+2}{-2} = t \\ \frac{z+3}{6} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -2t - 2 \\ z = 6t - 3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

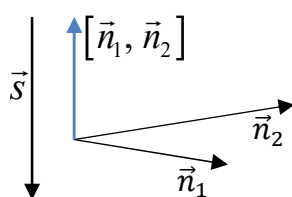
Приклад 11. Написати канонічні рівняння прямої $L: \begin{cases} 5x - y + z + 4 = 0, \\ x - 2y - 6z - 1 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Для знаходження канонічних рівнянь прямої використаємо формулу (9). Знайдемо яку-небудь точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на заданій прямій. Для цього в обох рівняннях покладемо, наприклад, $z_0 = 0$ і розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 5x_0 - y_0 + 4 = 0, \\ x_0 - 2y_0 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{звідки } x_0 = -1, y_0 = -1. \text{ Отже, точка } M_0(-1; -1; 0) \text{ належить}$$

заданій прямій L .

Оскільки пряма L є лінією перетину двох площин, то нормальні вектори $\vec{n}_1 = \{5; -1; 1\}$ і $\vec{n}_2 = \{1; -2; -6\}$ цих площин перпендикулярні до прямої L , а тому вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ перпендикулярні до напрямного вектора $\vec{s}$ прямої L .



Звідси отримаємо $\begin{cases} \vec{s} \perp \vec{n}_1, \\ \vec{s} \perp \vec{n}_2, \end{cases} \Rightarrow \vec{s} \parallel [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \Rightarrow$

$$\vec{s} = \lambda [\vec{n}_1, \vec{n}_2], \text{ де } \lambda = \text{const} \neq 0 \text{ (можна покласти } \lambda = 1).$$

Обчисливши векторний добуток

$$[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 31\vec{j} - 9\vec{k},$$

знаходимо напрямний вектор: $\vec{s} = 8\lambda\vec{i} + 31\lambda\vec{j} - 9\lambda\vec{k} = \{8\lambda; 31\lambda; -9\lambda\}$. Отже, канонічні рівняння прямої мають вигляд: $\frac{x+1}{8} = \frac{y+1}{31} = \frac{z}{-9}$.

2.2. Кут між двома прямими. Взаємне розташування двох прямих

Нехай задано дві прямі в просторі

$$L_1: \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}.$$

- Під кутом φ між прямими L_1 та L_2 розуміють кут між напрямними векторами $\vec{s}_1 = \{p_1; q_1; r_1\}$ та $\vec{s}_2 = \{p_2; q_2; r_2\}$ цих прямих:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}.$$

Для знаходження гострого кута потрібно взяти модуль правої частини.

- Умова паралельності прямих: $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$.
- Умова перпендикулярності прямих: $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$, тобто $p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0$.

Приклад 12. Перевірити, чи перпендикулярні прямі

$$L_1: \frac{x-15}{16} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-7}{5} \quad \text{та} \quad L_2: \begin{cases} 8x - 3y + 6z - 13 = 0, \\ 4y - 7z - 9 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Якщо дві прямі L_1 та L_2 перпендикулярні, то їхні напрямні вектори $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$ теж будуть перпендикулярними. Очевидно, що $\vec{s}_1 = \{16; -2; 5\}$, а оскільки $\vec{s}_2 \perp \vec{n}_1$ та $\vec{s}_2 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{s}_2 \parallel [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \Rightarrow \vec{s}_2 = \lambda [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ (покладемо $\lambda = 1$, тоді $\vec{s}_2 = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$), де $\vec{n}_1 = \{8; -3; 6\}$ і $\vec{n}_2 = \{0; 4; -7\}$ – нормальні вектори площин, лінією перетину яких є пряма L_2 . Знаходимо

$$[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -3 & 6 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 56\vec{j} + 32\vec{k},$$

тому $\vec{s}_2 = \{-3; 56; 32\}$.

Оскільки скалярний добуток $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 16 \cdot (-3) + (-2) \cdot 56 + 5 \cdot 32 = 0$, то $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, тому задані прямі також перпендикулярні, що і треба було перевірити.

Приклад 13. Довести, що дві прямі $L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-5}$ і

$L_2: \frac{x-5}{0} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Пряма L_1 проходить через точку $M_1(-1; -1; 2)$ і її напрямний вектор $\vec{s}_1 = \{3; 2; -5\}$. Пряма L_2 проходить через точку $M_2(5; -1; 0)$ і її напрямний вектор $\vec{s}_2 = \{0; -1; 2\}$. Прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині, якщо вектори $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = \{6; 0; -2\}$ компланарні. Умовою компланарності векторів є рівність нулю їх мішаного добутку: $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$. Знаходимо мішаний добуток векторів:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 0 + 6 - (0 + 30 + 0) = 0.$$

Таким чином, прямі лежать в одній площині і, оскільки вони не паралельні ($\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ не колінеарні), то вони перетинаються.

Результат задачі може бути сформульований в загальному вигляді.

- Дві прямі в просторі $L_1: \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$, $L_2: \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$ лежать в одній площині, якщо їхні напрямні вектори $\vec{s}_1 = \{p_1, q_1, r_1\}$ та

$\vec{s}_2 = \{p_2, q_2, r_2\}$ і вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ компланарні, тобто мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \vec{s}_1 \vec{s}_2 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

При цьому, прямі або перетинаються (якщо $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ не колінеарні), або паралельні (якщо $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$). Якщо $\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$, то прямі мимобіжні.

2.3. Кут між прямою і площиною. Взаємне розташування прямої і площини в просторі

Нехай задана пряма в просторі $L: \frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}$ з напрямним вектором $\vec{s} = \{p, q, r\}$ і площина $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ з нормальним вектором $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

- Під кутом φ між прямою L площиною Π розуміють довільний з двох суміжних кутів, що утворений прямою і її проекцією на площину. Синус кута φ , $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, може бути знайдений за формулою:

$$\sin \varphi = \frac{|Ap + Bq + Cr|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \quad (13)$$

- Умова перпендикулярності прямої і площини: $L \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{s}$, тобто

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r}.$$

- Умова паралельності прямої і площини (без спільних точок):

$$L \parallel \Pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \text{ і } M_1(x_1, y_1, z_1) \notin \Pi, \text{ тобто } \begin{cases} Ap + Bq + Cr = 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0. \end{cases}$$

- Пряма лежить в площині: $\vec{s} \perp \vec{n}$ і $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$, тобто

$$\begin{cases} Ap + Bq + Cr = 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Приклад 14. Знайти гострий кут φ між прямою $L: \begin{cases} x - 3y + 2z - 1 = 0, \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ і

площиною $\Pi: x - 4y - 2 = 0$.

Розв'язання. Нормальний вектор площини Π має вигляд $\vec{n} = \{1; -4; 0\}$.

Знайдемо напрямний вектор $\vec{s}$ прямої L (див. Приклад 11):

$$\vec{n}_1 = \{1; -3; 2\}, \vec{n}_2 = \{1; -1; 1\},$$

$$[\vec{n}_1 \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} + 11\vec{k} = \{-1; 1; 2\} \Rightarrow \vec{s} = \{-1; 1; 2\}. \quad \text{Користуємось}$$

$$\text{формулою (13): } \sin \varphi = \frac{|-1 - 4|}{\sqrt{1+16} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{5}{\sqrt{102}} = \frac{5\sqrt{102}}{102} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{5\sqrt{102}}{102}.$$

Приклад 15. Довести, що пряма $L: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{8}$ лежить в площині

$$\Pi: 2x + 4y + z - 6 = 0.$$

Розв'язання. 1. Перевіряємо, що вектор нормалі площини $\vec{n} = \{2; 4; 1\}$ і напрямний вектор прямої $\vec{s} = \{-2; -1; 8\}$ перпендикулярні: $\vec{n} \cdot \vec{s} = -4 - 4 + 8 = 0$.

2. Покажемо, що точка $M_1(2; 1; -2)$, яка належить прямій, належить і площині.

Підставимо координати точки в рівняння площини: $4 + 4 - 2 - 6 = 0$. Рівняння перетворюється на тотожність.

Отже, обидві умови (14) виконані, тому пряма лежить в площині.

Приклад 16. Знайти значення α , при якому пряма $L: \frac{x+2}{\alpha} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-3}$

паралельна площині $\Pi: x + 3y - 2z - 4 = 0$.

Розв'язання. Умова паралельності прямої і площини – перпендикулярність нормального вектора площини $\vec{n} = \{2; 3; -2\}$ і напрямного вектора прямої $\vec{s} = \{\alpha; 4; -3\}$. Складаємо скалярний добуток цих векторів і знаходимо значення α , при якому він дорівнює нулю: $2\alpha + 12 + 6 = 0 \Rightarrow \alpha = -9$.

Щоб з'ясувати, чи буде пряма лежати в площині, підставляємо координати точки $M_1(-2; -1; 2)$, через яку проходить пряма, в рівняння площини: $-2 - 3 - 4 - 4 \neq 0$. Отже, пряма і площина паралельні і спільних точок не мають.

Приклад 17. Скласти рівняння площини Π , що проходить через точку $M_1(2, -1, 3)$ перпендикулярно до прямої: $L: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ 4x - 3z - 9 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Знаходимо напрямний вектор $\vec{s}$ прямої: $\vec{s} \parallel [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, де $\vec{n}_1 = \{1; -1; 2\}$, $\vec{n}_2 = \{4; 0; -3\}$.

$$[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 11\vec{j} + 4\vec{k} = \{3; 11; 4\} \Rightarrow \vec{s} = \{3; 11; 4\}.$$

Оскільки пряма і площина перпендикулярні, то нормальний вектор $\vec{n}$ площини Π колінеарний напрямному вектору прямої $\vec{s}$, отже, можемо вибрати вектор $\vec{n} = \vec{s} = \{3; 11; 4\}$. Користуючись рівнянням (1), складаємо рівняння площини:

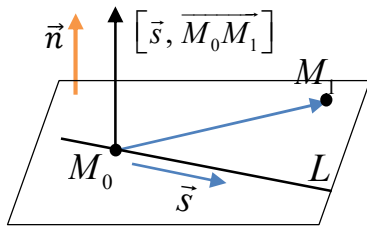
$$\Pi: 3(x - 2) + 11(y + 1) + 4(z - 3) = 0 \quad \text{або} \quad \Pi: 3x + 11y + 4z - 7 = 0.$$

3. ПРИКЛАДИ ЗМІШАНИХ ЗАДАЧ ПРО ПЛОЩИНУ І ПРЯМУ В ПРОСТОРИ

Розглянемо деякі типові задачі, що відносяться до рівнянь площини і прямої в просторі.

Приклад 18. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $L: \frac{x-10}{11} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+6}{-13}$ і точку $M_1(5, -10, -9)$.

Розв'язання. Знайдемо нормальний вектор $\vec{n}$ площини Π . Так як площина Π проходить через пряму L , то її нормальний вектор $\vec{n}$



перпендикулярний до напрямного вектора $\vec{s}$ прямої L , де $\vec{s} = \{11; 3; -13\}$. З іншого боку, точка $M_0(10, -3, -6)$ належить прямій L , тому належить і шуканій площині, таким чином, вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ перпендикулярний до

нормального вектора $\vec{n}$, де $\overrightarrow{M_0M_1} = \{-5; -7; -3\}$.

Звідси отримаємо $\vec{n} \perp \vec{s}$, $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M_1} \Rightarrow \vec{n} \parallel [\vec{s}, \overrightarrow{M_0M_1}]$. Обчисливши векторний добуток

$$[\vec{s}, \overrightarrow{M_0M_1}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 11 & 3 & -13 \\ -5 & -7 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -13 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 11 & -13 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -100\vec{i} + 98\vec{j} - 62\vec{k},$$

знаходимо нормальний вектор площини: $\vec{n} = \{-100; 98; -62\}$.

Оскільки площина Π проходить через точку M_1 , то за формулою (1) запишемо рівняння шуканої площини

$$-100(x-5) + 98(y+10) - 62(z+9) = 0$$

або $\Pi: 50x - 49y + 31z - 461 = 0$.

Приклад 19. Скласти рівняння площини Π , яка проходить через пряму

$$L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1} \text{ та паралельна прямій } L_2: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = 4t - 3 \end{cases}$$

Розв'язання. Напрямні вектори прямих $\vec{s}_1 = \{1; -2; -1\}$, $\vec{s}_2 = \{3; 2; 4\}$ паралельні площині Π . Отже, їх векторний добуток є нормальним вектором площини:

$$[\vec{s}_1, \vec{s}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k} \Rightarrow \vec{n} = \{-6; -7; 8\}.$$

Точка $M_1(3, 2, 1)$ належить площині, оскільки вона лежить на прямій L_1 , яка лежить в площині Π . Користуючись (1), складаємо рівняння площини

$$\Pi: -6(x-3) - 7(y-2) + 8(z-1) = 0 \text{ або } 6x + 7y - 8z - 8 = 0.$$

Приклад 20. Скласти рівняння площини Π , яка проходить через дві паралельні прямі: $L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ та $L_2: \frac{x+5}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-4}{-1}$.

Розв'язання. Прямі L_1 і L_2 паралельні, оскільки $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 = \{1; -2; -1\}$. Точка $M_1(3, 2, 1) \in L_1$, точка $M_2(-5, -2, 4) \in L_2$. Оскільки площина Π проходить через прямі L_1 і L_2 , то $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-8; -4; 3\} \in \Pi$. Отже, знаходимо нормальний вектор площини $\vec{n}$: $\vec{n} \perp \vec{s}_1$, $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \Rightarrow \vec{n} \parallel [\vec{s}_1, \overrightarrow{M_1M_2}]$. Знаходимо векторний добуток:

$$[\vec{s}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ -8 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 5\vec{j} - 20\vec{k} = \{-10; 5; -20\} \Rightarrow \vec{n} = \{2; -1; 4\}.$$

Оскільки шукана площина Π проходить через точку M_1 , то, користуючись формулою (1), маємо рівняння площини Π :

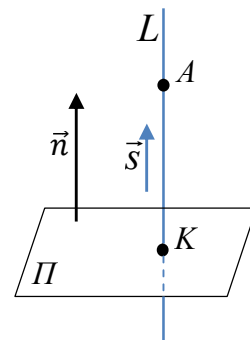
$$2(x-3) - (y-2) + 4(z-1) = 0 \text{ або } 2x - y + 4z - 8 = 0.$$

Приклад 21. Знайти проєкцію точки $A(11, 5, -9)$ на площину $\Pi: 7x + 10y - 5z + 2 = 0$.

Розв'язання. Проєкцією точки A на площину Π є точка K , яка є основою перпендикуляра проведеного з точки A на задану площину. Розв'яжемо задачу в декілька кроків.

1. Знайдемо рівняння прямої L , яка проходить через точку A перпендикулярно до заданої площини Π .

Оскільки $L \perp \Pi$, то напрямний вектор $\vec{s}$ прямої L колінеарний до нормального вектора $\vec{n}$ площини Π , де $\vec{n} = \{7; 10; -5\}$. Тому $\vec{s} \parallel \vec{n} \Rightarrow \vec{s} = \lambda \vec{n} = \{7\lambda; 10\lambda; -5\lambda\}$, де $\lambda = \text{const} \neq 0$ (можна покласти $\lambda = 1$) і згідно з



формулою (9) канонічні рівняння прямої мають вигляд:

$$L: \frac{x-11}{7} = \frac{y-5}{10} = \frac{z+9}{-5}. \text{ Прирівнюючи ці рівняння до параметра } t$$

$\frac{x-11}{7} = t, \frac{y-5}{10} = t, \frac{z+9}{-5} = t$, отримаємо параметричні рівняння прямої:

$$L: \begin{cases} x = 7t + 11, \\ y = 10t + 5, \\ z = -5t - 9, \end{cases} \text{ де } t \in \mathbb{R}.$$

2. Знайдемо точку K як перетин прямої L і площини Π . Для цього розв'яжемо

$$\text{систему рівнянь } \begin{cases} x = 7t + 11, \\ y = 10t + 5, \\ z = -5t - 9, \\ 7x + 10y - 5z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{шляхом підставлення рівнянь прямої}$$

(перших трьох рівнянь системи) у рівняння площини (четверте рівняння):

$$7(7t + 11) + 10(10t + 5) - 5(-5t - 9) + 2 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

Підставляючи значення $t = -1$ в параметричні рівняння прямої, отримаємо координати точки K : $x = 4, y = -5, z = -4$.

Отже, точка $K(4; -5; -4)$ є проєкцією точки A на площину Π .

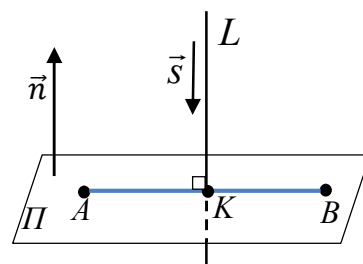
Приклад 22. Знайти проєкцію точки $A(9, -1, 7)$ на пряму

$L: \frac{x+8}{7} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-4}{10}$. Знайти точку B , симетричну точці A відносно заданої прямої.

Розв'язання. Проєкцією точки A на пряму L є точка K , яка є основою перпендикуляра проведеного з точки A на задану пряму. Точки A і B розташовані на одному перпендикулярі до заданої прямої і на однаковій відстані від неї. Розв'яжемо задачу в декілька кроків.

1. Знайдемо рівняння площини Π , яка проходить через точку A перпендикулярно до заданої прямої L .

Оскільки $\Pi \perp L$, то нормальний вектор $\vec{n}$ площини Π колінеарний до напрямного вектора $\vec{s}$ прямої L , де $\vec{s} = \{7; 0; 10\}$. Тому $\vec{n} \parallel \vec{s} \Rightarrow \vec{n} = \lambda \vec{s} = \{7\lambda; 0; 10\lambda\}$, де $\lambda = \text{const} \neq 0$ (можна покласти $\lambda = 1$) і внаслідок формули (1) запишемо рівняння площини



$$7\lambda(x-9) + 0(y+1) + 10\lambda(z-7) = 0 \text{ або } \Pi: 7x + 10z - 133 = 0.$$

2. Знайдемо точку K як перетин прямої L і площини Π . Для цього спочатку запишемо параметричні рівняння прямої L :

$$\begin{cases} \frac{x+8}{7} = t, \\ \frac{y+5}{0} = t, \\ \frac{z-4}{10} = t \end{cases} \Rightarrow L: \begin{cases} x = 7t - 8, \\ y = -5, \\ z = 10t + 4. \end{cases}$$

Підставимо ці рівняння прямої у рівняння площини:

$$7(7t - 8) + 10(10t + 4) - 133 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Підставляючи значення $t = 1$ в параметричні рівняння прямої, отримаємо координати точки K : $x = -1, y = -5, z = 14$.

Отже, точка $K(-1; -5; 14)$ є проєкцією точки A на пряму L .

3. Знайдемо точку B , симетричну точці A відносно заданої прямої. Оскільки $AK = KB$, то із формул ділення відрізка AB навпіл маємо:

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}, y_K = \frac{y_A + y_B}{2}, z_K = \frac{z_A + z_B}{2},$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{9 + x_B}{2}, -5 = \frac{-1 + y_B}{2}, 14 = \frac{7 + z_B}{2}.$$

Звідки $x_B = -11$, $y_B = -9$, $z_B = 21$.

Таким чином, точка $B(-11; -9; 21)$ симетрична точці A відносно прямої L .

Приклад 23. Знайти відстань d між паралельними прямими

$$L_0: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-3} \text{ та } L_1: \frac{x-7}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-3}.$$

Розв'язання. Прямі L_0 і L_1 паралельні, оскільки $\vec{s}_0 = \vec{s}_1 = \{-1; 2; -3\}$. Точка $M_0(0, 2, 0) \in L_0$, точка $M_1(7, 0, 1) \in L_1$. Щоб знайти відстань між прямими, треба знайти відстань від будь-якої точки на одній прямій до другої прямої. Розв'яжемо задачу в декілька кроків.

1. Через точку M_0 проведемо площину, перпендикулярну до прямих L_0 і L_1 .

Оскільки для перпендикулярної площини Π нормальний вектор $\vec{n} = \vec{s}_0 = \vec{s}_1 = \{-1; 2; -3\}$, то за формулою (1) маємо:

$$-x + 2(y - 2) - 3z = 0 \Rightarrow \Pi: x - 2y + 3z + 4 = 0.$$

2. Знаходимо точку перетину побудованої площини Π і прямої L_1 – точку O .

Для цього параметричні рівняння прямої L_1

$$L_1: \begin{cases} \frac{x-7}{-1} = t \\ \frac{y}{2} = t \\ \frac{z-1}{-3} = t \end{cases} \Rightarrow L_1: \begin{cases} x = -t + 7, \\ y = 2t, \\ z = -3t + 1. \end{cases}$$

підставимо в рівняння площини Π :

$-t + 7 - 4t - 9t + 3 + 4 = 0 \Rightarrow -14t = -14 \Rightarrow t = 1$. Підставляючи значення $t = 1$ в параметричні рівняння прямої L_1 , отримаємо координати точки O :
 $x_o = 6, y_o = 2, z_o = -2$.

3. Відстань M_0O і буде відстанню між паралельними прямими:

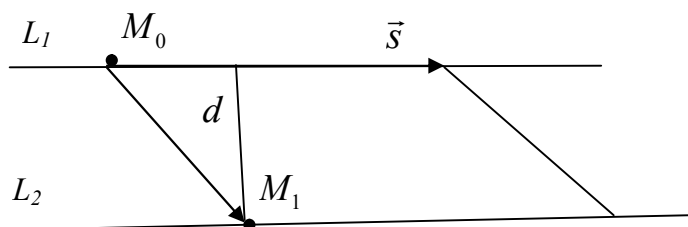
$$d = \sqrt{(0-6)^2 + (2-2)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{40}.$$

Зауваження. Відстань між паралельними прямими також можна знайти з інших міркувань. Нехай задано дві паралельні прямі в просторі

$$L_0: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}, \quad L_1: \frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}$$

з напрямним вектором $\vec{s} = \{p; q; r\}$, точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L_0$, $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$.

Розглянемо паралелограм, побудований на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{s}$. Тоді для



знаходження відстані між паралельними прямими d треба знайти довжину висоти, проведеної з вершини M_1 .

Враховуючи, що модуль векторного добутку визначає площу паралелограма, побудованого на зведених до спільного початку векторах, отримуємо рівність:

$$|\overrightarrow{[M_0M_1, \vec{s}]}| = |\vec{s}| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{[M_0M_1, \vec{s}]}|}{|\vec{s}|}. \quad (15)$$

Застосуємо формулу (15) і знайдемо відстань між паралельними прямими для умови Прикладу 23. Знаходимо $\overrightarrow{M_0M_1} = \{7; -2; 1\}$,

$$\left[\overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{s}_1 \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 20\vec{j} + 14\vec{k} = \{4; 20; 14\}.$$

Тоді

$$d = \frac{\left| \left[\overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{s} \right] \right|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{16 + 400 + 144}}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \sqrt{\frac{560}{14}} = \sqrt{40}.$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ
з теми «Площина. Рівняння прямої в просторі»

Варіант № 1

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1, 2, 4)$ перпендикулярно до площин $x - 2y + 4z - 1 = 0$, $-2x + 3y + z - 1 = 0$.
2. Знайти проєкцію точки $A(1, 3, -2)$ на площину $3x + y - 2z + 4 = 0$.
Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої площини.
3. Знайти відстань від точки $A(1, 3, -2)$ до прямої $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$.

Варіант № 2

1. Перевірити, чи паралельні прямі $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$ та $L_2: \begin{cases} 2x + 3y - 4z - 1 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$
2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1, 5, 2)$ і паралельна до прямих $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{1}$ та $L_2: \frac{x+7}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{1}$.
3. Знайти значення α , при якому пряма $L: \frac{x-3}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+12}{\alpha}$ паралельна площині $\Pi: x + 5y - 3z - 1 = 0$.

Варіант № 3

1. Знайти відстань між паралельними площинами $x + 4y - 4z - 1 = 0$,
 $x + 4y - 4z + 7 = 0$.
2. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму
 $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}$ і точку $M_1(-1, -2, 2)$.
3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1, -3, 5)$ і
 $M_2(-2, 1, -3)$ та відсікає від осі вісь аплікат відрізок $c = 5$.

Варіант № 4

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1, 2, 3)$ і
 $M_2(3, -1, 2)$ перпендикулярно до площини $2x + 3y - 4z - 5 = 0$.
2. Знайти точку перетину прямої, яка проходить через точки $M_1(5, 1, -3)$ та
 $M_2(-3, -5, 1)$, і площини $2x - 7y + 3z - 13 = 0$.
3. Перевірити, чи перетинає площина $2x + y - 2z + 10 = 0$ відрізок AB ,
обмежений точками $A(2, -1, -4)$ і $B(-4, 3, -3)$.

Варіант № 5

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-1, 2, 3)$
паралельно до площини $x - y + 3z - 1 = 0$. Знайти відстань від точки
 $M_0(-1, 1, 7)$ до шуканої площини.
2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(7, -1, 3)$
перпендикулярно до прямої $L: \begin{cases} x + y - 2z - 4 = 0, \\ 5x + y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$
3. Знайти об'єм куба, дві грані якого лежать на площинах
 $6x - 18y - 9z - 28 = 0$ і $6x - 18y - 9z - 5 = 0$.

Варіант № 6

1. Перевірити, чи лежать дві прямі $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{3}$ і

$$L_2: \frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-2} \text{ в одній площині.}$$

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1;1;-2)$ і $M_2(1; -3; 4)$ та відсікає від осі ординат відрізок $b = 2$.
3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(2, 0, -3)$

перпендикулярно до прямої: $L: \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0, \\ 4x - z + 2 = 0. \end{cases}$

Варіант № 7

1. Написати канонічні рівняння прямої $L: \begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через прямі

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{2} \text{ та } \frac{x+1}{-1} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-5}{0}.$$

3. Знайти відстань d між паралельними прямими $L_1: \frac{x+2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-4}$ та

$$L_2: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-4}.$$

Варіант № 8

1. Знайти кут між прямими $L_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{3}$ та $L_2: \begin{cases} 2x+3y-4z-1=0, \\ x+4y-z-5=0. \end{cases}$
2. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$ і точку $M_1(3, -2, 1)$.
3. Визначити, при яких значеннях α, β наступні пари рівнянь $\Pi_1: 3x+4y+\alpha z-1=0$, $\Pi_2: 4x+\beta y-z-1=0$ будуть визначати паралельні площини.

Варіант № 9

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1, -2, 0)$ і $M_2(4, -1, 3)$ перпендикулярно до площини $x+5y-4z-12=0$.
2. Знайти проєкцію точки $A(1, 2, -3)$ на площину $x-2y-4z+12=0$.
Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої площини.
3. Знайти гострий кут φ між прямою $L: \begin{cases} x-4y+2z-1=0, \\ 2x-2y+z+3=0 \end{cases}$ і площиною $\Pi: x-3y+2z-2=0$.

Варіант № 10

1. Знайти відстань між паралельними площинами $5x-4y-z-3=0$, $10x-8y-2z+1=0$.
2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-3, 1, 7)$ і паралельна до прямих $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{1}$ та $L_2: \frac{x+7}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{1}$.
3. Знайти відстань від точки $M_0(2, -1, 0)$ до прямої $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+11}{-1}$.

Варіант № 11

1. Перевірити, чи лежать дві прямі $L_1: \frac{x-4}{-5} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-2}{2}$ і

$L_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$ в одній площині.

2. Знайти проєкцію точки $A(-3, 1, 0)$ на пряму $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{1}$. Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої прямої.

3. Знайти значення α , при якому пряма $L: \frac{x+1}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z+2}{\alpha}$ паралельна площині $\Pi: 5x - y - z + 4 = 0$.

Варіант № 12

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(7, 1, -4)$ паралельно до площини $x + 5y - 4z - 12 = 0$. Знайти відстань від точки $M_0(2, 1, -7)$ до шуканої площини.

2. Знайти точку перетину прямої, яка проходить через точки $M_1(5, -4, 7)$ та $M_2(3, 0, -1)$, і площини $6x - y - 8z - 2 = 0$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1, 3, -4)$ і $M_2(-1, 1, -5)$ та відсікає від осі абсцис відрізок $a = 4$.

Варіант № 13

1. Визначити, при якому значенні α наступні пари рівнянь $\Pi_1: \alpha x - 4y + 5z - 30 = 0$, $\Pi_2: x - 4y + z - 1 = 0$ будуть визначати перпендикулярні площини.
2. Знайти проєкцію точки $A(-1, -3, 5)$ на площину $4x + 3y - 2z - 6 = 0$.
Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої площини.
3. Перевірити, чи будуть прямі $L_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ і $L_2: \frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{7}$ мимобіжними.

Варіант № 14

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(-1, 0, 3)$, $B(5, -1, 1)$, $C(2, -1, -5)$.
2. Знайти проєкцію точки $A(4, 2, -1)$ на пряму $\frac{x-6}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої прямої.
3. Скласти рівняння площини Π , що проходить через точку $M_1(-4, -1, 2)$ перпендикулярно до прямої: $L: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ 4x + y + z - 2 = 0. \end{cases}$

Варіант № 15

1. Перевірити, чи перпендикулярні прямі $L_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$ та

$$L_1: \begin{cases} x-3y-z-6=0, \\ 4x-y+2z+1=0. \end{cases}$$

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через прямі

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{0} \text{ та } \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

3. Знайти відстань d між паралельними прямими $L_1: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{3}$ та

$$L_2: \frac{x-7}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{3}.$$

Варіант № 16

1. Знайти кут між прямими $L_1: \frac{x+1}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{1}$ та $L_2: \begin{cases} x-3y-2z-1=0, \\ x+y-4z+2=0. \end{cases}$

2. Перевірити, чи лежить пряма $\frac{x+7}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{4}$ на площині

$$2x - y + z + 12 = 0.$$

3. Знайти відстань від точки $A(-2; -1; 4)$ до прямої $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-4}$

Варіант № 17

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1, 5, 3)$ перпендикулярно до площин $3x - 4y + 3z - 1 = 0$, $x + 3y - 8 = 0$.

2. Знайти точку перетину прямої, яка проходить через точки $M_1(-1, -1, 2)$ та $M_2(-3, 0, 5)$, і площини $x - 3y + 6z - 1 = 0$.

3. Довести, що площина $2x - 2y - z + 7 = 0$ не перетинає відрізок AB , обмежений точками $A(-1; 3; 4)$ і $B(-5; 7; 3)$.

Варіант № 18

1. Написати канонічні рівняння прямої $L: \begin{cases} x - 3y - z - 6 = 0, \\ 4x - y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$
2. Знайти проєкцію точки $A(16, -7, -1)$ на пряму $\frac{x-6}{1} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+1}{3}$.
Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої прямої.
3. Перевірити, чи лежать дві прямі $L_1: \frac{x}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{2}$ і $L_2: \frac{x-5}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{2}$ в одній площині.

Варіант № 19

1. Знайти кут між прямими $L_1: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-3}{1}$ та $L_2: \begin{cases} x - y - 2z - 3 = 0, \\ 5x + y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$
2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(2, 0, -1)$ перпендикулярно до прямої $L: \begin{cases} x - 3y - 2z - 1 = 0, \\ x + y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$
3. Знайти об'єм куба, дві грані якого лежать на площинах $2x - y + 2z - 10 = 0$ і $4x - 2y + 4z - 1 = 0$

Варіант № 20

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-3, 0, 5)$ паралельно до площини $2x - y + 3z - 7 = 0$. Знайти відстань від точки $M_0(-1, -1, 2)$ до шуканої площини.
2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-4, 4, 1)$ і паралельна до прямих $L_1: \frac{x+6}{5} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ та $L_2: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$.
3. Перевірити, чи будуть прямі $L_1: \frac{x+1}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-4}$ і $L_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{1}$ мимобіжними.

Варіант № 21

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1, -3, 3)$ паралельно до площини $3x - 4y + 3z - 1 = 0$. Знайти відстань від точки $M_0(4, 1, 5)$ до шуканої площини.
2. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z}{-1}$ і точку $M_1(4, 0, -2)$.
3. Знайти значення α , при якому пряма $L: \frac{x}{-3} = \frac{y+7}{\alpha} = \frac{z-2}{-3}$ паралельна площині $\Pi: 7x + 3y + 5z - 4 = 0$.

Варіант № 22

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1, 0, 3)$ і $M_2(-4, -1, 2)$ перпендикулярно до площини $7x - 4y - 2z - 8 = 0$.
2. Знайти точку перетину прямої, яка проходить через точки $M_1(4, -3, -5)$ та $M_2(-2, -1, 3)$, і площини $4x + 7y - z + 9 = 0$.
3. Визначити, при якому значенні α наступні пари рівнянь $\Pi_1: 5x - y + \alpha z - 2 = 0$, $\Pi_2: \alpha x + y + 3z - 1 = 0$ будуть визначати перпендикулярні площини.

Варіант № 23

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(6, 2, -4)$, $B(0, -1, 4)$, $C(-2, 1, -1)$.
2. Знайти проєкцію точки $A(-1, -3, 4)$ на площину $x + 5y - 2z - 6 = 0$.
3. Скласти рівняння площини Π , що проходить через точку $M_1(-1, -5, 0)$ перпендикулярно до прямої: $L: \begin{cases} x - 2y - 2z - 1 = 0, \\ 4y - z + 1 = 0. \end{cases}$

Варіант № 24

1. Визначити, при якому значенні α наступні пари рівнянь $\Pi_1: x + \alpha y - 4z - 5 = 0$, $\Pi_2: 3x + 5y + \alpha z - 1 = 0$ будуть визначати перпендикулярні площини.
2. Знайти проєкцію точки $A(-2, -7, 10)$ на пряму $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+2}{-6}$.
3. Скласти рівняння площини через точку $A(-2, -7, 10)$, що перпендикулярна до площин $x - 2y + 3 = 0$ і $x + y - z + 7 = 0$.

Варіант № 25

1. Знайти відстань між паралельними площинами $x + 2y - 4z + 3 = 0$,
 $2x + 4y - 8z - 1 = 0$.
2. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму
 $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-3}{1}$ і точку $M_1(-3, -1, 0)$.
3. Знайти відстань d між паралельними прямими $L_1: \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{3}$ та
 $L_2: \frac{x-7}{-3} = \frac{y}{5} = \frac{z+4}{3}$.

Варіант № 26

1. Написати канонічні рівняння прямої $L: \begin{cases} 2x - y + 5z + 1 = 0, \\ 5x + y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$
2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(4, -5, 3)$
перпендикулярно до прямої $\frac{x+7}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{4}$.
3. Довести, що площина $2x - y - 2z - 7 = 0$ не перетинає відрізок AB ,
обмежений точками $A(1; 3; -1)$ і $B(5; -2; 3)$.

Варіант № 27

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(6, 2, -4)$
перпендикулярно до площин $5x - 4y - z - 3 = 0$, $x - y - 4z + 3 = 0$.
2. Знайти точку перетину прямої, яка проходить через точки $M_1(2, 3, -3)$
та $M_2(0, -7, 1)$, і площини $5x + 2y - z - 2 = 0$.
3. Знайти гострий кут між прямою $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-2}{-1}$ і площиною
 $x + y - 3z - 7 = 0$.

Варіант № 28

1. Перевірити, чи паралельні прямі $L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{2}$ та

$$L_2: \begin{cases} 2x + y - 3z + 4 = 0, \\ 2x - 3y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-6}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ і площини $x - 3y - 5z + 4 = 0$.

3. Визначити, при яких значеннях α, β наступні пари рівнянь $\Pi_1: \alpha x + 4y - z - 1 = 0$, $\Pi_2: x - 3y - \beta z - 11 = 0$ будуть визначати паралельні площини.

Варіант № 29

1. Перевірити, чи перетинає площина $x - 2y - 2z + 6 = 0$ перетинає відрізок AB , обмежений точками $A(2; -5; 1)$ і $B(5; -1; -3)$.
2. Знайти проєкцію точки $A(4, -6, 3)$ на площину $5x - 8y + z - 1 = 0$.
3. Знайти кут між прямими $L_1: \frac{x-6}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ та $L_2: \begin{cases} x - 3y + z + 6 = 0, \\ 5x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$

Варіант № 30

1. Перевірити, чи перпендикулярні прямі $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}$ та

$$L_2: \begin{cases} x - y - 3z - 3 = 0, \\ 4x - 2y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+2}{2} = \frac{y-6}{0} = \frac{z-3}{-5}$ і точку $M_1(5, -1, 1)$.

3. Знайти кут між площинами $x - 3y - z - 6 = 0$, $4x - y + 9z + 1 = 0$.

Варіант № 31

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-3, 0, 5)$ і $M_2(1, -1, -2)$ перпендикулярно до площини $2x - y + 3z - 7 = 0$.
2. Знайти точку перетину прямої, яка проходить через точки $M_1(2, 2, -7)$ та $M_2(0, -6, 5)$, і площини $x - 2y - 5z - 10 = 0$.
3. Перевірити, чи будуть прямі $L_1: \frac{x+2}{-4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{5}$ і $L_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{-3}$ мимобіжними.

Варіант № 32

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1, -2, 0)$ перпендикулярно до площин $6x + y - 4z - 3 = 0$, $7x - 2y + 4z - 3 = 0$.
2. Перевірити, чи лежить пряма $\frac{x-3}{-3} = \frac{y+8}{1} = \frac{z-1}{4}$ на площині $2x + 2y + z + 9 = 0$.
3. Знайти гострий кут φ між прямою $L: \begin{cases} x - 3y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + 3z - 1 = 0. \end{cases}$ і площиною $\Pi: 3x - 4y + z - 2 = 0$

Варіант № 33

1. Визначити, при якому значенні α наступні пари рівнянь $\Pi_1: 2x - y + \alpha z - 10 = 0$, $\Pi_2: 3x - 2y + 4z - 1 = 0$ будуть визначати перпендикулярні площини.
2. Знайти проєкцію точки $A(1, 0, -3)$ на пряму $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-3}{-1}$.
3. Знайти гострий кут φ між прямою $L: \begin{cases} 4x - y - z - 1 = 0, \\ x - 3y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$ і площиною $\Pi: x - 4y + z - 2 = 0$.

Варіант № 34

1. Знайти кут між прямими $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z}{-1}$ та $L_2: \begin{cases} 2x + y - 4z + 1 = 0, \\ 3x - 2z + 1 = 0. \end{cases}$
2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-1, -2, 7)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-3}{-3} = \frac{y+8}{-2} = \frac{z-1}{4}$.
3. Знайти значення α , при якому пряма $L: \frac{x+2}{\alpha} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-2}{2}$ паралельна площині $\Pi: x + 3y + \alpha z - 4 = 0$.

Варіант № 35

1. Перевірити, чи паралельні прямі $L_1: \frac{x}{-5} = \frac{y-2}{17} = \frac{z}{-2}$ та $L_2: \begin{cases} 2x - 5z + 1 = 0, \\ 5x + y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$
2. Знайти проєкцію точки $A(4, -5, 0)$ на площину $3x - 4y - 2z - 3 = 0$.
3. Довести, що дві прямі $L_1: \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$ і $L_2: \frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+5}{-7}$ лежать в одній площині.

Варіант № 36

1. Написати канонічні рівняння прямої $L: \begin{cases} 2x + y - 3z + 4 = 0, \\ 2x - 3y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$
2. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-5}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-4}$ і площини $x - 2y + 3z + 9 = 0$.
3. Скласти канонічні і параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $A(8, 1, -2)$ перпендикулярно до площини $5x + 3y - 4z - 3 = 0$.

Варіант № 37

1. Визначити, при яких значеннях α , β наступні пари рівнянь $\Pi_1: \alpha x - y + z - 1 = 0$, $\Pi_2: 2x + \beta y + 5z - 12 = 0$ будуть визначати паралельні площини.
2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-2, -1, 3)$ перпендикулярно до прямої $L: \begin{cases} x - y - 2z - 4 = 0, \\ 2x + y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$
3. Знайти кут між прямими $L_1: \frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ та $L_2: \begin{cases} x - y + z - 6 = 0, \\ 5x - 2y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$

Варіант № 38

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(-1, -2, 0)$, $B(-4, -1, 2)$, $C(2, 1, -4)$.
2. Знайти проєкцію точки $A(3, -8, 1)$ на площину $5x - 8y + z - 1 = 0$. Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої площини.
3. Знайти кут між площинами $2x - y + 5z + 9 = 0$, $5x + y - z + 5 = 0$.

Варіант № 39

1. Знайти кут між площинами $7x - y + 4z + 1 = 0$, $3x - 2z + 5 = 0$.
2. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-3}{-6} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1}$ і точку $M_1(5, -3, 0)$.
3. Перевірити, чи будуть прямі $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ і $L_2: \frac{x-5}{7} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+2}{2}$ мимобіжними.

Варіант № 40

1. Перевірити, чи перпендикулярні прямі $L_1: \frac{x-5}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-4}$ та

$$L_2: \begin{cases} 4x - 3y - z - 1 = 0, \\ x - 2y + 4z + 2 = 0. \end{cases}$$

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через прямі

$$\frac{x-5}{0} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-2} \text{ та } \frac{x+1}{-6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

3. Скласти рівняння площини Π , що проходить через точку $M_1(2, -2, 4)$

перпендикулярно до прямої: $L: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ 3x - 2y + z - 2 = 0. \end{cases}$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. I: Учеб. пособие для втузов.— 5-е изд., испр.— М.: Высш. шк., 1999.— 304 с.: ил.
2. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навч. посібн.— К.: А.С.К., 2006.— 648 с.: ил.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: Учеб.: для вузов.— 5-е изд.— М.: Наука, Физматлит, 1999.— 224 с.
4. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Часть V.— 2-е изд.— Харьков, Издательство Харьковского университета, 1972.— 412 с.
5. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для втузов.— СПб: «Специальная Литература», 1998.— 200 с.: ил.
6. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учеб. пособие для втузов.— 2-е изд., доп.— М.: Высш. шк., 1994.— 206 с.: ил.
7. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть.— М.: Рольф, 2002.— 288 с.: ил.