

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Фізико-Математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК _____

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
Олег КЛЕСОВ
«__» _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

**за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова
математика»**

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Гранична поведінка випадкових блукань з відбиттям»

Виконав (-ла):

студент (-ка) II курсу, групи ОМ-91мн

Приходько Олександр Олександрович _____

Науковий керівник:

Доктор фізико-математичних наук, професор

Пилипенко Андрій Юрійович _____

Рецензент:

Доктор фізико-математичних наук, ст. наук. співроб.,

Арясова Ольга Вікторівна _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студент (-ка) _____

Київ – 2021 року

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

Фізико-Математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Приходьку Олександру Олександровичу

1. Тема дисертації «Гранична поведінка випадкових блукань з відбиттям», науковий керівник дисертації Пилипенко Андрій Юрійович, професор, доктор фізико-математичних наук, затверджені наказом по університету від «__» _____ 20__ р. № _____

2. Термін подання студентом дисертації: 11 травня 2021

3. Об'єкт дослідження: модель випадкового блукання з відбиттям

4. Предмет дослідження: функціональні граничні теореми для випадкових блукань з відбиттям

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

5.1) Ознайомитись з теорією слабкої збіжності у просторі Скорохода;

5.2) Розібрати релевантні статті;

5.3) Знайти умови, при яких граничний процес це відбитий Броунівський рух (reflected Brownian motion);

5.4) Узагальнити результати попередніх авторів, щоб отримати процес з відстрибами із нуля;

5.5) Дослідити модель з повільно змінними хвостами;

5.5) Підготувати статті за темою дисертації.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 14 слайдів презентації, 5 графіків.

7. Орієнтовний перелік публікацій і конференцій:

7.1) A. Pilipenko, O. Prykhodko, “On a limit behaviour of a random walk penalised in the lower half-plane”, Theory of stochastic processes, vol. 25(41), no.2, 2020.

7.2) A. Iksanov, A. Pilipenko, O. Prykhodko, “A functional limit theorem for a random walk perturbed by positive alpha-stable jumps”.

7.3) O. Prykhodko “The limit behaviour of a random walk with arrests”, Theory of stochastic processes, Vol.24 (40), no.2, 2019, pp.79-88.

7.4) Singular diffusions: analytic and stochastic approaches, I, Potsdam, April, 1 - 3, 2019.

7.5) Modern problems in probability theory and mathematical analysis, Vorokhta, February, 26 – 29, 2020.

7.6) IX Ukrainian conference of young researchers in physics and mathematics, Kyiv, April, 10-11, 2020.

8. Дата видачі завдання 03 лютого 2021 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомитись з теорією слабкої збіжності у просторі Скорохода	03/02 – 10/02	Виконано
2.	Розібрати релевантні статті	10/02 – 20/02	Виконано
3.	Дослідити модель з відбиттям, сформулювати умови на відбиття, щоб граничний процес був відбитим броунівським рухом	20/02 – 10/03	Виконано
4.	Узагальнити результати попередніх авторів, щоб отримати процес з відстрибами із нуля	10/03 – 30/03	Виконано
5.	Дослідити модель з повільно змінними хвостами	30/03 – 20/04	Виконано
6.	Підготувати статті за темою дисертації	20/04 – 15/05	Виконано

Студент

Олександр ПРИХОДЬКО

Науковий керівник

Андрій ПИЛИПЕНКО

Реферат

Магістерська дисертація містить 37 сторінок та 19 джерел.

Об'єктом дослідження є випадкові блукання з відбиттям та граничні теореми для них.

Метою роботи є доведення функціональних граничних теорем для послідовностей випадкових блукань з відбиттям, де нормування береться з теореми Донскера.

Актуальність даного напрямку досліджень зумовлюється тим, що моделі випадкових блукань з відбиттям використовуються у різних науках. Наприклад, це моделі додатних відсоткових ставок у фінансовій математиці чи моделі випаровування газів з рідини у фізиці.

В роботі використовуються поняття слабкої збіжності у функціональних просторах, таких як простір неперервних функцій чи простір Скорохода, а також деякі понятті з теорії повільно змінних функцій та методи теорії відновлення.

У роботі розглянуто модель випадкового блукання з відбиттям. Ця модель полягає в тому, що прирости вище нуля це незалежні однаково розподілені випадкові величини з середнім 0 та скінченною ненульовою дисперсією; а нижче нуля – це інші незалежні (між собою та від попередніх) однаково розподілені додатні випадкові величини. Доведено, що в залежності від приростів нижче нуля може існувати три різні режими. Коли їхнє математичне сподівання скінченне, то граничний процес це броунівський рух з відбиттям. Коли вони належать області притягіння стійкої випадкової величини з параметром $\alpha \in (0,1)$, то граничний процес це броунівський рух зі стрибко-подібним виходом з 0. Коли їхні хвости це повільно змінні функції, то границі не існує.

Результати магістерської дисертації оформлено у вигляді двох статей. Перша стаття з А. Пилипенком прийнята до публікації у журнал *Theory of Stochastic Processes*. Друга стаття з А. Пилипенком та А. Іксановим підготовлена до публікації.

Ключові слова: випадкові блукання, функціональна гранична теорема, броунівський рух зі стрибко-подібним виходом з 0, феллерівський броунівський рух.

Abstract

The master's thesis contains 37 pages and 19 references.

The object of the research are random walks with reflection and their limit behaviour.

The purpose of this work is to prove the functional limit theorems for sequences of random walks with reflection, where scaling is taken from Donsker's theorem.

The relevance of this research is due that the random walks with reflection are used in different industries. For example, these are models of positive interest rates in financial mathematics or models of evaporation of gases from liquids in physics.

We use concepts of weak convergence in functional spaces, such as the space of continuous functions or the space of Skorokhod, and some concepts from the theory of slowly varying functions and methods of renewal theory.

In this work we consider a model of a random walk with reflection. This random walk has increments above zero that are independent identically distributed random variables with mean 0 and finite variance; and below zero those are independent (of each other and of the previous ones) identically distributed positive random variables. We prove that depending on the increments below zero the limit process can have three different modes. When their mathematical expectation is finite, the limit process is a reflected Brownian motion. When they belong to the domain of attraction of a stable random variable with parameter $\alpha \in (0,1)$, the limit process is a Brownian motion with a jump-exit from 0. When their tails are slowly varying functions, the limit does not exist.

Two papers are drawn from the results of this thesis. The first paper with A. Pilipenko is to be published by journal "Theory of Stochastic Processes". The second paper is a preprint with A. Pilipenko and A. Iksanov.

Keywords: random walks, functional limit theorem, Brownian motion with jump-exit from 0, reflected Brownian motion, Feller Brownian motion.

Зміст

1	Вступ	7
2	Теоретична частина	10
2.1	Простір Скорохода	10
2.1.1	Простір Скорохода на інтервалі $\mathcal{D}[0, 1]$	11
2.1.2	Простір Скорохода на півпрямій $\mathcal{D}[0, \infty)$	11
2.1.3	Один критерій для характеристики збіжності у просторі Скорохода	12
2.2	Теорема Донскера	13
2.3	Теорема Скорохода про єдиний ймовірнісний простір	14
2.4	Випадкові величини з регулярно змінними хвостами	14
3	Основна частина	15
	Позначення	15
	Формулювання результатів	16
	Ідеї доведення	17
3.1	Аналіз моделі	19
3.2	Доведення теореми 3.1: $\mathbb{E}\eta < \infty$	22
3.3	Доведення теореми 3.3: η має регулярно змінний хвіст	24
3.4	Доведення теореми 3.5: η має повільно змінний хвіст	31
4	Висновки	34

Розділ 1

Вступ

Моделі випадкових блукань з відбиттям від 0 є добре дослідженими, див. наприклад [Whi02, Параграф 5]. Такі моделі природно виникають у різних областях, таких як економіка, біологія, фінансова математика, фізика, тощо. Також вони зустрічаються у теорії масового обслуговування, наприклад [Bro77]. Крім того, неперервним аналогом блукань з відбиттям можна вважати стохастичні диференційні рівняння з відбиттям, див. наприклад роботи [Tan79], [Pil14]. Поведінка стохастичного диференційного рівняння у точці відбиття описується за допомогою крайових умов Феллера-Вентцеля, [Fel52].

Розглянемо наступну модель. Нехай випадкові величини ξ та $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ є незалежними однаково розподіленими з $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma < \infty$; η та $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ також незалежні (між собою та від попередніх) і однаково розподілені. Розглянемо випадкове блукання $\tilde{S}$:

$$\tilde{S}(0) = 0, \quad \tilde{S}(n+1) = \begin{cases} \tilde{S}(n) + \xi_{n+1} & \text{якщо } \tilde{S}(n) > 0 \\ \tilde{S}(n) + \eta_{n+1} & \text{якщо } \tilde{S}(n) \leq 0, \end{cases} \quad n \geq 0. \quad (1.1)$$

Таким чином, на $(0, \infty)$ це блукання має прирости розподілені як ξ , а на $(-\infty, 0]$ — розподілені як η .

Випадкові блукання такої природи зустрічаються в різних науках. Наприклад, економічна інтерпретацію може бути така: нехай кожного дня ми

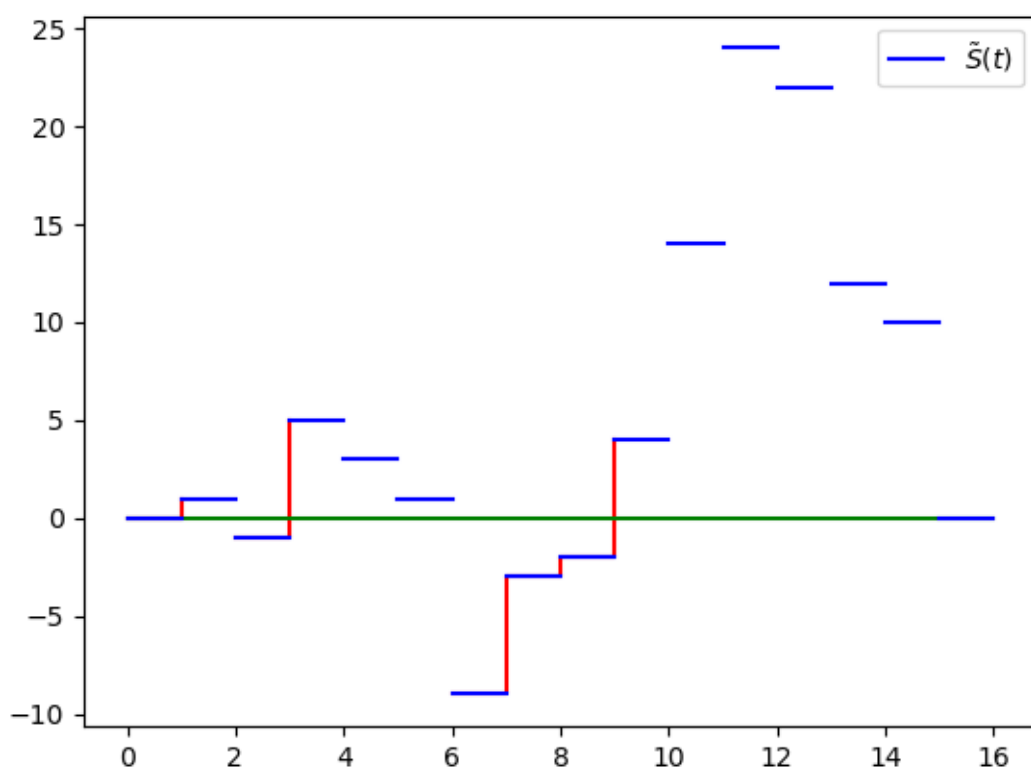


Рис. 1.1: Реалізація $\tilde{S}$ (з “càdlàg” інтерполяцією). Червоні вертикальні лінії вказують на стрибки розподілені як η .

фіксуємо об’єм товару, що є в магазині, мінус об’єм замовленого товару. З одного боку, цей товар поступово продається, з іншого — власник магазину замовляє маленькі партії товару, щоб покрити ймовірний дефіцит. Можна вважати, що у звичайний день приріст (додатний чи від’ємний) товару у магазині — це випадкова величина ξ , така ж як і у нас в моделі, тобто вона має скінченну дисперсію та $\mathbb{E}\xi = 0$. Коли товар закінчується і, можливо, магазин набрав більше замовлень, ніж може обробити, власник замовляє “незвично-велику” партію. Якщо цієї партії не вистачило, замовляється ще одна, і так далі. У ці дні магазин також перестає торгувати. Можна вважати, що розмір цих замовлень розподілений як η . За такою самою моделлю працює вантажний термінал — потяги залишають товар, забирають товар; якщо товару на станції зовсім нема, то вона простоює, тому її намагаються наповнити.

Іншу інтерпретацію можна знайти у фізиці випаровування газів з рідини, наприклад модель балістичного випаровування [JLF⁺14]. Молекули газу дифундують у рідину, але процес змішування дуже повільний, тому можна вважати, що має місце відбиття таке як ми роздивляємось у моделі (3.1). Зазвичай нас цікавить розподіл швидкостей частинок, що виштовхуються з поверхні рідини. Цей розподіл у середовищі без екрану є розподілом Максвелла. Але, якщо має місце зміна середовища, то декілька статей вказують на можливі інші розподіли, суб- та супер-Максвелловські [JLF⁺14], [HKF⁺16], [KS16].

Наша задача проаналізувати границю нормованої послідовності процесів $\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{S}(nt)$. Зважаючи на розподіл η ми будемо відрізняти три випадки:

1. η має скінченне математичне сподівання:

$$\mathbb{E}\eta < \infty.$$

2. розподіл η має правильно змінний хвіст з параметром $\alpha \in (0, 1)$, а тому належить до області притягіння стійкої випадкової величини, див. наприклад [Fel71, Theorem XIII.6.2]

3. розподіл η має повільно змінний хвіст

$$\mathbb{P}(\eta > x) \sim l(x), \quad l \in R_0,$$

де R_0 це множина повільно змінних функцій, [BGT87, Визначення 1.4.2].

Розділ 2

Теоретична частина

2.1 Простір Скорохода

Позначимо через $\mathcal{D}(K)$ простір функцій x на множині $K \subset \mathbb{R}_+$, які неперервні справа та мають границю зліва (такі функції прийнято називати “càdlàg”, акронім з французької “continue à droite, limites à gauche”). Зазвичай в якості множини K ми будемо брати відрізок $[0, 1]$ або півпрямую $[0, \infty)$. Не складно помітити, що довільний елемент $\mathcal{D}(K)$ може мати лише розриви першого роду, тобто для всіх $t \in K$ існують обидва значення $x(t-)$ та $x(t+)$. Крім того, простір неперервних функцій на K , який зазвичай позначають $C(K)$, міститься в $\mathcal{D}(K)$.

Для $x \in \mathcal{D}(K)$ і $O \subset K$ покладемо

$$w_x(O) = w(x, O) = \sup_{s, t \in O} |x(t) - x(s)|.$$

Наступна лема показує як виглядають функції у $\mathcal{D}(K)$.

Лемма 2.1. *Нехай $[a, b] \subset K$. Тоді для кожного $x \in K$ та довільного $\varepsilon > 0$, існують точки $t_0, t_1, \dots, t_n$ такі, що*

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

і для $i = 1, 2, \dots, n$

$$w_x[t_{i-1}, t_i] < \varepsilon.$$

Доведення див. у [Bil99] або [EK86]. Тобто довільний $x \in \mathcal{D}(\mathcal{K})$ є обмеженим на $[a, b] \subset K$ і лише скінченна кількість розривів $|x(t+) - x(t-)|$, що лежить в інтервалі $t \in [a, b]$, перевищує наперед заданий додатний рівень.

2.1.1 Простір Скорохода на інтервалі $\mathcal{D}[0, 1]$

Нехай Λ це множина зростаючих, неперервних функцій з $[0, 1]$ на $[0, 1]$,

$$\Lambda \ni \lambda : [0, 1] \mapsto [0, 1], \quad \lambda 0 = 0, \quad \lambda 1 = 1.$$

Введемо метрику $d(x, y)$ для $x, y \in \mathcal{D}[0, 1]$ наступним чином. Спочатку покладемо

$$d(x, y) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda t - t| \vee \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(\lambda t)| \right\}. \quad (2.1)$$

Ця метрика визначає топологію Скорохода. Послідовність z_n збігається до z у цій топології, якщо існує послідовність $\lambda_n \in \Lambda$ така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \circ \lambda_n(t) = z(t)$ рівномірно по t і $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(t) = t$ рівномірно по t . Таким чином, якщо z_n рівномірно збігається до z , то має місце збіжність у топології Скорохода. Однак, зі збіжності у топології Скорохода може не впливати навіть поточкова збіжність, візьмемо, наприклад, $z_n := 1_{[0, 1/2 + 1/n)}$, $z := 1_{[0, 1/2)}$. Тоді

$$z_n \rightarrow z, \text{ у } \mathcal{D}[0, 1], \text{ але } 1 = z_n(1/2) \neq z(1/2) = 0.$$

І навпаки, з поточної збіжності не впливає збіжність у топології Скорохода, наприклад

$$z(t) := 3t - 1_{t > 1/2}, \quad z_n(t) := z(t) 1_{t \notin (1/2 - 1/n, 1/2]}. \quad (2.2)$$

Обґрунтування для цього прикладу дамо у Зауваженні 2.4.

2.1.2 Простір Скорохода на півпрямій $\mathcal{D}[0, \infty)$

Спочатку наведемо приклад, який вкаже на можливі проблеми при означенні топології на півпрямій. Розглянемо $z_n := 1_{[0, 1 - 1/n)}$, $z := 1_{[0, 1)}$. Зрозуміло, що

$z_n \rightarrow z$ у $\mathcal{D}[0, 2]$, але $z_n \not\rightarrow z$ у $\mathcal{D}[0, 1]$. Проблема авжеж у розриві у точці 1, отже означення топології на $\mathcal{D}[0, \infty)$ повинно враховувати точки розриву.

Для довільного $A > 0$ позначимо аналогічно до (2.1) метрику на $[0, A]$

$$d_A(x, y) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \sup_{t \in [0, A]} |\lambda t - t| \vee \sup_{t \in [0, A]} |x(t) - y(\lambda t)| \right\},$$

і функцію згладжування g_A

$$g_A := \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \leq A - 1, \\ A - t, & \text{якщо } A - 1 < t \leq A, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Нарешті, означимо метрику d_∞ :

$$d_\infty(x, y) := \sum_{A=1}^{\infty} \frac{1 \wedge d_A(g_A x, g_A y)}{2^A}.$$

Теорема 2.2. *Послідовність $\{z_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}[0, \infty)$ збігається до z_0 у метриці d_∞ тоді й тільки тоді, коли $d_A(z_n, z_0) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ для всіх A точок неперервності функції z_0 .*

Доведення див. у, наприклад, [Bil99, Theorem 16.2].

2.1.3 Один критерій для характеристики збіжності у просторі Скорохода

Наведемо тут [EK86, Proposition 6.5]:

Критерій 2.3. *Нехай $\{z_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}(\mathcal{K})$. Тоді $J_1\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ тоді й тільки тоді, коли для довільної послідовності $\{\xi_n \in K\}_{n \geq 0}$ такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi_0$, справджується наступне*

С.і *Всі граничні точки множини $\{z_n(\xi_n)\}_{n \geq 1}$ це або $z_0(\xi_0)$, або $z_0(\xi_0-)$;*

C.ii Якщо $z_n(\xi_n) \rightarrow z(\xi)$, $n \rightarrow \infty$, то як тільки $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$, така що $\eta_n \geq \xi_n$, $n \geq 1$ і $\eta_n \rightarrow \xi$, $n \rightarrow \infty$, то виконано

$$z_n(\eta_n) \rightarrow z(\xi), \quad n \rightarrow \infty;$$

C.iii Якщо $z_n(\xi_n) \rightarrow z(\xi-)$, $n \rightarrow \infty$, то як тільки $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$, така що $\eta_n \leq \xi_n$, $n \geq 1$ і $\eta_n \rightarrow \xi$, $n \rightarrow \infty$, то виконано

$$z_n(\eta_n) \rightarrow z(\xi-), \quad n \rightarrow \infty.$$

Зауваження 2.4. Критерій дає можливість легко перевірити приклад (2.2). Справді, оберемо послідовність $\xi_n := \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$. Тоді $z_n(\xi_n) = 0$, чим порушує умову **C.i**.

2.2 Теорема Донскера

Теорема 2.5. Нехай $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — це послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин. Припустимо також, що $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\mathbb{E}\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$. Покладемо

$$S_n(t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_i.$$

Тоді у просторі $\mathcal{D}[0, \infty)$ має місце слабка збіжність

$$S_n \xrightarrow{d} W, \quad n \rightarrow \infty,$$

де W — це броунівський рух.

Нехай $h : X \rightarrow X'$, неперервне відображення з метричного простору X у метричний простір X' . Тоді якщо $x_n \xrightarrow{d} x$ у X , то і $h(x_n) \xrightarrow{d} h(x)$ у X' . Таким чином, теорему Донскера можна застосувати до таких функціоналів як $x \mapsto \min_{s \leq t} x(s)$ або $x \mapsto \int_0^t \sin(x(s)) ds$.

2.3 Теорема Скорохода про єдиний ймовірнісний простір

Теорема 2.6. *Нехай x випадковий елемент у сепарабельному просторі X . Припустимо, що деяка послідовність $x_n \xrightarrow{d} x$, $n \rightarrow \infty$ у X . Тоді існує ймовірнісний простір $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{\mathbb{P}})$ і випадкові елементи $\tilde{x}_n$, $\tilde{x}$ на ньому, такі що $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$, $n \rightarrow \infty$, м.н.*

Доведення можна знайти у [Bil99, Theorem 6.7]. Таким чином, в поєднанні з теоремою Донскера, теорема Скорохода є сильним інструментом, бо дає можливість працювати зі збіжністю майже напевно.

2.4 Випадкові величини з регулярно змінними хвостами

Визначення 2.7. Випадкова величина η має регулярно змінний хвіст, якщо для деякого $\alpha \in [0, 2]$

$$\mathbb{P}(|\eta| > x) \sim x^{-\alpha} l(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Ми будемо користуватися наступною теоремою.

Теорема 2.8. *Нехай $\{\eta_i\}_{i \geq 1}$ — це послідовність незалежних однаково розподілених додатних випадкових величин, що мають регулярно змінний хвіст з параметром $\alpha \in (0, 1)$. Тоді, існує така послідовність $\{a_n\}_{n \geq 1}$, що*

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \eta_i \xrightarrow{d} U_\alpha(t) \quad \text{у } \mathcal{D}[0, \infty), \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

де U_α — це α -стійкий субординатор.

Доведення можна знайти у [Kal21, Theorem 16.14].

Розділ 3

Основна частина

Позначення

Модель (1.1) еквівалентна (з точністю до перерахунку ξ_i та η_i) наступній

$$\tilde{S}(0) = 0, \quad \tilde{S}(n) = \sum_{i=1}^{n-T(n)} \xi_i + \sum_{i=1}^{T(n)} \eta_i, \quad n \geq 1, \quad (3.1)$$

де $T(n)$ це кількість візитів у $(-\infty, 0]$ до моменту n :

$$T(n) = \#\{k < n : \tilde{S}(k) \leq 0\}, \quad n \geq 1.$$

Надалі ми будемо працювати саме з цим зображенням моделі. Покладемо

$$S_\xi(n) := \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad S_\eta(n) := \sum_{i=1}^n \eta_i, \quad (3.2)$$

Тоді

$$\tilde{S}(n) = S_\xi(n - T(n)) + S_\eta(T(n)).$$

Позначимо через W броунівський рух, а через M — його поточний мінімум з оберненим знаком, також через m позначимо поточний мінімум S_ξ (з оберненим знаком)

$$m(n) = -\min_{k \leq n} S_\xi(k), \quad M(t) = -\min_{s \leq t} W(s). \quad (3.3)$$

Формулювання результатів

Теорема 3.1. Нехай $\tilde{S}$ лінійно інтерпольовано для $t \geq 0$:

$$\tilde{S}(t) = \tilde{S}(\lfloor t \rfloor) + (t - \lfloor t \rfloor)\tilde{S}(\lceil t \rceil).$$

Послідовність процесів

$$\left(\frac{\tilde{S}(nt)}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \right)_{n \geq 1}$$

збігається слабо в $C[0, \infty)$ до відбитого броунівського руху (*reflected Brownian motion*)

$$W_{\text{reflected}}(t) := W(t) + M(t).$$

Зауваження 3.2. Добре відомо, що $W_{\text{reflected}}$ має такий самий розподіл як модуль броунівського руху $|W|$, див. [Pil14, Теорема 1.3.2].

Теорема 3.3. Нехай для $t \geq 0$

$$\tilde{S}(t) = \tilde{S}(\lfloor t \rfloor).$$

Послідовність процесів

$$\left(\frac{\tilde{S}(nt)}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \right)_{n \geq 1}$$

збігається слабо в $\mathcal{D}[0, \infty)$ до броунівського руху з відстрибами від 0 (*Brownian motion with jump-exit from 0*)

$$W_\alpha(t) = W(t) + U_\alpha \circ U_\alpha^{(-1)} \circ M(t), \tag{3.4}$$

де U_α — це α -стійкий субординатор та

$$U_\alpha^{(-1)}(t) = \inf\{s \geq 0 : U_\alpha(s) > t\}.$$

Зауваження 3.4. Схоже блукання вже роздивлялися у статті [PP14]. Але там блукання було цілочисельне та ξ не могло бути менше -1 .

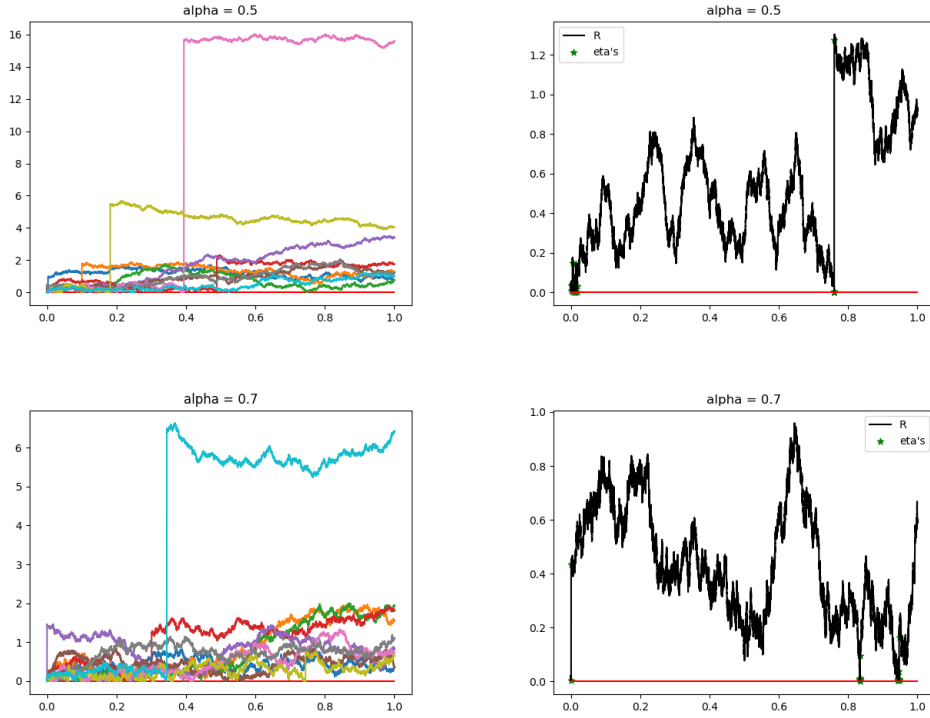


Рис. 3.1: Моделювання процесу W_α за допомогою блукання $\tilde{S}$

Теорема 3.5. Нехай для $t \geq 0$

$$\tilde{S}(t) = \tilde{S}(\lfloor t \rfloor).$$

Для послідовності процесів

$$\left(\frac{\tilde{S}(nt)}{\sqrt{n}}, t \in [0, 1] \right)_{n \geq 1}$$

немає слабкої границі в $\mathcal{D}[0, 1]$. Більш того для довільного $t > 0$

$$\max_{s \leq t} \frac{\tilde{S}(ns)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Іншими словами, коли розподіл η має повільно змінний хвіст, то процес вибухає на початку.

Ідеї доведення

Для того, щоб довести Теорему 3.1 ми аналізуємо швидкість зростання T . Таким чином ми отримуємо оцінку на $\max_{i < T(n)} \eta_i$. Загалом, доведення спи-

рається на аналіз моделі зроблений у пункті 3.1.

Для доведення Теорема 3.3 ми спочатку знаходимо заміну часу, таку щоб процес не опускався нижче 0, показуємо, що так трансформований процес збігається до того, що треба; нарешті, встановлюємо, що заміна часу достатньо гарна, щоб оригінальний процес збігався також.

Остання теорема 3.5 базується на тому, що перестриб рівня n блуканням S_η росте набагато швидше за n , див. (3.41). Це відома властивість, доведена Рогозіним, див. наприклад [BGT87, Theorem 8.8.2]. Отже, ми показуємо, що цей перестриб трапляється до $T(n)$, тому що лише таким чином він може вплинути на значення $\tilde{S}(n)$.

3.1 Аналіз моделі

Лемма 3.6. Для кожного $n \geq 1$

$$S_\eta(T(n) - 1) \leq m(n - T(n)) < S_\eta(T(n)) + \max_{i \leq n} |\xi_i| \quad (3.6)$$

Доведення. Нерівність зліва очевидна, коли $T(n) = 1$. Нехай $T(n) > 1$ та для деякого $n \geq 1$

$$S_\eta(T(n) - 1) > m(n - T(n)). \quad (3.7)$$

Оберемо $k < n$, таке що $T(n) = T(k + 1)$ і $T(k) + 1 = T(n)$. Це завжди можливо, оскільки $T(n) > 1$. Звідси

$$\tilde{S}(k) = S_\xi(k - T(k)) + S_\eta(T(k)) > -m(k - T(k)) + S_\eta(T(n) - 1).$$

З (3.7) ми знаємо, що $\tilde{S}(k) > 0$. Таким чином $T(k) = T(k + 1)$, що суперечить нашому вибору k .

Для доведення нерівності справа помітимо, що $\tilde{S}$ має стрибок вниз в момент $k \geq 1$ лише коли $\tilde{S}(k - 1) > 0$ і $S_\xi(k - T(k))$ стрибає вниз. Отже для кожного $k \geq 1$

$$-\max_{i \leq k - T(k)} |\xi_i| \leq \tilde{S}(k) - \tilde{S}(k - 1) < \tilde{S}(k) = S_\xi(k - T(k)) + S_\eta(T(k)).$$

Таким чином

$$S_\eta(T(k)) + \max_{i \leq k - T(k)} |\xi_i| \geq -S_\xi(k - T(k)).$$

Беручи максимум по $k \leq n$ від обох частин нерівності ми отримуємо

$$S_\eta(T(n)) + \max_{i \leq n} |\xi_i| \geq -\min_{k \leq n} S_\xi(k - T(k)) = -\min_{k \leq n - T(n)} S_\xi(k) = m(n - T(n)).$$

■

З теореми Донскера маємо слабку збіжність у $C[0, \infty)$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_\xi(n \cdot) \xrightarrow{d} W(\cdot), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тому за теоремою Скорохода [Bil99, Theorem 6.7] ми можемо побудувати ймовірнісний простір з випадковими елементами $\hat{S}_\xi^{(n)}$ та $\hat{W}$ такими, що

$$\hat{S}_\xi^{(n)} \stackrel{d}{=} S_\xi, \quad \hat{W} \stackrel{d}{=} W, \quad n \geq 1 \quad (3.8)$$

і має місце рівномірна збіжність на компактах з $[0, \infty)$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \hat{S}_\xi^{(n)}(nt) \Rightarrow \hat{W}(t) \text{ коли } n \rightarrow \infty \text{ м.н.} \quad (3.9)$$

Для того, щоб підкреслити, що далі ми будемо працювати на цьому новому просторі ми пишемо кришечку, коли будемо використовувати елементи, які залежать від $\hat{S}_\xi^{(n)}$. Без втрати загальності можемо вважати, що новий простір також містить послідовність $\{\eta_k\}_{k \geq 1}$. За допомогою послідовностей $\{\hat{S}_\xi^{(n)}(k)\}$ та $\{S_\eta(k)\}$ ми можемо тепер побудувати $\{\hat{T}^{(n)}(k)\}$, $\{\hat{\tilde{S}}^{(n)}(k)\}$, $\{\hat{m}^{(n)}(k)\}$ замість відповідних $\{T(k)\}$, $\{\tilde{S}(k)\}$, $\{m(k)\}$. Зауважте, що в цих конструкціях послідовності $\{\hat{S}_\xi^{(n)}(k)\}$ залежать від n , а $\{S_\eta(k)\}$ не залежить. Найчастіше ми будемо відкидати верхній індекс (n) , тому наприклад замість $\hat{S}_\xi^{(n)}$ ми будемо писати $\hat{S}_\xi$.

З нерівності (3.6) випливає що

$$S_\eta(\hat{T}(nt) - 1) \leq \hat{m}(nt) \text{ м.н.} \quad (3.10)$$

для всіх $t \geq 0$.

Поділимо обидві частини на $\sqrt{n}$. З (3.9) маємо

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists n_1 \forall n > n_1 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} S_\eta(\hat{T}(nt) - 1) \leq -\min_{s \leq t} \hat{W}(s) + \varepsilon_1 \text{ м.н.} \quad (3.11)$$

Зауважте, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{T}(k) = +\infty$ м.н., тому що $\liminf_{k \rightarrow \infty} S_\xi(k) = -\infty$ м.н.

Отже

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists n'_1 \forall n > n'_1 \quad \frac{\hat{T}(nt) - 1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\hat{T}(nt) - 1}{S_\eta(\hat{T}(nt) - 1)} (-\min_{s \leq t} \hat{W}(s) + \varepsilon_1) \text{ м.н.} \quad (3.12)$$

З закону великих чисел для S_η випливає

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{T}(nt)}{\sqrt{n}} \leq \frac{-\min_{s \leq t} \hat{W}(s)}{\mathbb{E}\eta} \text{ м.н.} \quad (3.13)$$

Якщо $\mathbb{E}\eta = \infty$, то справа маємо 0.

Наслідок 3.7. Для довільного $A > 0$

$$\sup_{t \leq A} \frac{T(nt)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Оскільки $\hat{T}$ неспадна, ми маємо

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\hat{T}(nt)}{n} \leq \frac{\hat{T}(n)}{n}.$$

Наслідок випливає з (3.13), тому що $\hat{T} \stackrel{d}{=} T$. ■

Лемма 3.8. Має місце збіжність у $C[0, \infty)$:

$$\frac{\hat{m}(nt - \hat{T}(nt))}{\sqrt{n}} \Rightarrow -\min_{s \leq t} \hat{W}(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Зафіксуємо $A > 0$. З (3.9) та (3.13) випливає рівномірна збіжність на $[0, A]$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{m}(nt) = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{m}^{(n)}(nt) \Rightarrow -\min_{s \leq t} \hat{W}(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

та

$$t - \frac{\hat{T}(nt)}{n} = t - \frac{\hat{T}^{(n)}(nt)}{n} \Rightarrow t, \quad n \rightarrow \infty,$$

з ймовірністю 1.

Оскільки $t - \frac{\hat{T}(nt)}{n} \in [0, A]$ та граничні функції неперервні, їхні композиції рівномірно збіжні до композиції граничних функцій. ■

Зауваження 3.9. У лемі 3.8 ми можемо використовувати лінійну або “càdlàg” інтерполяцію.

3.2 Доведення теореми 3.1: $\mathbb{E}\eta < \infty$

Зафіксуємо $A > 0$. Досить довести, що рівномірно по $t \in [0, A]$ для $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_\eta(\hat{T}(nt)) \Rightarrow -\min_{s \leq t} \hat{W}(s) \text{ м.н.} \quad (3.14)$$

Інша частина теореми 3.1 випливає з (3.9).

З лем 3.6 та 3.8 ми маємо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_\eta(\hat{T}(nt) - 1) \leq -\min_{s \leq t} \hat{W}(s) \text{ м.н.} \quad (3.15)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_\eta(\hat{T}(nt)) + \frac{\max_{i \leq An} |\hat{\xi}_i|}{\sigma\sqrt{n}} \right) \geq -\min_{s \leq t} \hat{W}(s) \text{ м.н.} \quad (3.16)$$

Отже для того, щоб довести (3.14) досить показати, що по-перше

$$\frac{\max_{i \leq An} |\hat{\xi}_i|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

і по-друге

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|S_\eta(\hat{T}(nt)) - S_\eta(\hat{T}(nt) - 1)| = \frac{1}{\sqrt{n}}\eta_{\hat{T}(nt)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.18)$$

З (3.13) для довільного $\delta > 0$ завжди можна обрати $K > 0$ так, щоб

$$\mathbb{P}(\hat{T}(An) \leq K\sqrt{n}) > 1 - \delta.$$

Таким чином з ймовірністю більше $1 - \delta$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\eta_{\hat{T}(nt)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{i \leq K\sqrt{n}} \eta_i.$$

Виходячи з цього, обидві (3.17) і (3.18) випливають з [Gut13, Theorem 6.2.1].

Однак, ми сформулюємо просте твердження, яке це доводить.

Твердження 3.10. *Нехай випадкова величина ζ така, що для деякого $\kappa > 0$ справджується $\mathbb{E}|\zeta|^\kappa < \infty$. Тоді для послідовності незалежних між собою копій $\{\zeta_i \stackrel{d}{=} \zeta\}_{i \geq 1}$ маємо, що для довільного $\delta > 0$ та $K > 0$*

$$\mathbb{P}\left(\max_{i \leq Kn} |\zeta_i| < \delta n^{1/\kappa}\right) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Можна написати

$$\mathbb{P}\left(\max_{i \leq Kn} |\zeta_i| < \delta n^{1/\kappa}\right) = \left(1 - \mathbb{P}(|\zeta| \geq \delta n^{1/\kappa})\right)^{Kn}.$$

Коли $n \rightarrow \infty$

$$n \log\left(1 - \mathbb{P}(|\zeta| \geq \delta n^{1/\kappa})\right) \sim -n \mathbb{P}(|\zeta| \geq \delta n^{1/\kappa}). \quad (3.19)$$

З нерівності Маркова

$$0 \leq n \mathbb{P}(|\zeta| \geq \delta n^{1/\kappa}) \leq \frac{1}{\delta} \mathbb{E}(|\zeta|^\kappa; |\zeta| \geq \delta n^{1/\kappa}). \quad (3.20)$$

Оскільки $|\zeta|^\kappa$ інтегровні, з теореми Лебега випливає збіжність до 0 у (3.20).

Зрештою, твердження випливає з еквівалентності (3.19) та неперервності експоненти. ■

3.3 Доведення теореми 3.3: η має регулярно змінний хвіст

Згідно до [Kal21, Theorem 16.14] існує така послідовність $\{k_n\}_{n \geq 1}$ і α -стійкий субординатор U_α , що у просторі $\mathcal{D}[0, \infty)$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_\eta(k_n \cdot) \xrightarrow{d} U_\alpha, \quad n \rightarrow \infty.$$

Більш того, оскільки ξ та η незалежні

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_\xi(n \cdot), \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_\eta(k_n \cdot) \right) \xrightarrow{d} (W, U_\alpha), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Таким чином, за теоремою Скорохода можна побудувати розширення ймовірнісного простору, який ми будували у (3.8), (3.9), і випадкові елементи на ньому $\{\hat{S}_\eta^n\}_{n \geq 1}$ і $\hat{U}_\alpha$, такі що

$$\hat{S}_\xi^{(n)} \stackrel{d}{=} S_\xi, \quad \hat{W} \stackrel{d}{=} W, \quad S_\eta \stackrel{d}{=} \hat{S}_\eta^n, \quad U_\alpha \stackrel{d}{=} \hat{U}_\alpha, \quad n \geq 1, \quad (3.22)$$

і має місце збіжність у просторі $C[0, \infty) \times \mathcal{D}[0, \infty)$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\hat{S}_\xi^{(n)}(n \cdot) \rightarrow \hat{W}, \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\hat{S}_\eta^{(n)}(k_n \cdot) \rightarrow \hat{U}_\alpha, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.} \quad (3.23)$$

Для того, щоб спростити позначення, ми відкидаємо верхній індекс n та кришечку, бо зараз всі випадкові величини матимуть кришечку.

Розглянемо процес R , визначений для $n \geq 0$ наступним чином

$$R(n) = S_\xi(n) + S_\eta \circ S_\eta^{(-1)} \circ m(n). \quad (3.24)$$

Лемма 3.11. *Нехай для $n \geq 0$*

$$\lambda(n) = \inf\{k \geq 1 : k - T(k) = n\}. \quad (3.25)$$

Тоді

$$\tilde{S} \circ \lambda(n) = R(n), \quad n \geq 0. \quad (3.26)$$

Доведення. Оскільки функція $k \mapsto k - T(k)$ має область значень увесь $\mathbb{N}$, то $\lambda(n)$ існує завжди. Крім того, з означення λ випливає

$$\lambda(n) - T \circ \lambda(n) = n.$$

Це доводить частину твердження:

$$S_\xi(k - T(k))|_{k=\lambda(n)} = S_\xi(n). \quad (3.27)$$

Тепер покажемо, що

$$S_\eta^{(-1)} \circ m(n) = T \circ \lambda(n). \quad (3.28)$$

Функція λ побудована так, що вона пропускає час коли $\tilde{S}$ менше або дорівнює 0, тобто для довільного k

$$\tilde{S}(k) > 0 \iff \exists n > 0 \quad \lambda(n) = k. \quad (3.29)$$

Нехай для деякого $k > 0$ маємо $\tilde{S}(k - 1) > 0$ і $\tilde{S}(k) \leq 0$, тоді зрозуміло, що

$$-S_\xi(k - T(k)) = m(k - T(k)).$$

Нехай крім того $l > k$ найменше таке число, що $\tilde{S}(l) > 0$. З (3.29) випливає, що існує n таке, що $\lambda(n) = l$. Тому $T \circ \lambda(n)$ це кількість елементів послідовності $\{\eta_r\}_{r \geq 1}$, яка необхідна для того, щоб $\tilde{S}$ стала більше 0. Ця кількість дорівнює

$$T \circ \lambda(n) = S_\eta^{(-1)} \circ m(k - T(k)).$$

Помітимо, що $k - T(k) = l - T(l)$, і скористаємося означенням λ :

$$T \circ \lambda(n) = S_\eta^{(-1)} \circ m(l - T(l)) = S_\eta^{(-1)} \circ m(n).$$

Отже, ми переконалися, що (3.28) справедливо для деяких n . Покажемо, що обидві функції не зростають для всіх інших n . Доведемо спочатку для $T \circ \lambda$. Функція T зростає лише, коли $\tilde{S}$ відвідує $(-\infty, 0]$. Нехай це відбулось при деякому k , тобто нехай $\tilde{S}(k) \leq 0$. Тоді існує n таке, що

$$\lambda(n - 1) < k < \lambda(n).$$

Але це і є умови, які ми накладали на n раніше.

Тепер доведемо для $S_\eta^{(-1)} \circ m$. Нехай $\tilde{S}(k) > 0$ і m має стрибок в точці $k - T(k)$, тоді

$$S_\eta(T(k)) > -S_\xi(k - T(k)) = m(k - T(k)).$$

Візьмемо n таке, щоб $\lambda(n) = k$. Тоді

$$T(\lambda(n)) \geq S_\eta^{(-1)} \circ m(n).$$

Оскільки $T \circ \lambda$ не має інших стрибків, крім тих, коли $\tilde{S}$ менше або дорівнює 0; $S_\eta^{(-1)} \circ m$ монотонна та $S_\eta^{(-1)} \circ m(0) = T(\lambda(0)) = 1$, то і $S_\eta^{(-1)} \circ m$ не має інших стрибків.

Тепер лема випливає з (3.27) та (3.28). ■

Лемма 3.12. Для процесу R означеного у (3.24) маємо збіжність у $\mathcal{D}[0, \infty)$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}R(n\cdot) \rightarrow W_\alpha, \quad n \rightarrow \infty, \text{ м.н..} \quad (3.30)$$

Доведення. Наступне твердження є добре відомим, див. наприклад [Res87, Proposition 0.1].

Твердження 3.13. Нехай $F \in \mathcal{D}[0, \infty)$ зростаюча функція та $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$. Припустимо, що послідовність неспадних функцій $\{F_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{D}[0, \infty)$ така, що $F_n(t) \rightarrow F(t)$, $n \rightarrow \infty$, для довільної t точки неперервності функції F . Тоді

$$\forall T > 0 \quad \sup_{x \in [0, T]} |F_n^{(-1)}(x) - F^{(-1)}(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

З твердження випливає, що

$$\frac{1}{k_n} S_\eta^{(-1)}(\sigma\sqrt{n}\cdot) \xrightarrow{a.s.} U_\alpha^{(-1)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.31)$$

З [SH11, Theorem 3.6] випливає, що

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_\eta \circ S_\eta^{(-1)}(\sigma\sqrt{n}\cdot) \xrightarrow{a.s.} U_\alpha \circ U_\alpha^{(-1)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.32)$$

Для $f \in \mathcal{D}[0, \infty)$ покладемо $\text{Disc}(f) := \{a : f(a-) \neq f(a+)\}$ — це множина точок розриву функції f .

Лемма 3.14. *Нехай $\{x_n, y_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}[0, \infty) \times \mathcal{D}[0, \infty)$, y_n неспадна для $n \geq 0$, y_0 неперервна та $J_1\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ і $J_1\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Припустимо також, що якщо $y(t) \in \text{Disc}(x)$, то $\#\{u : y(u) = y(t)\} = 1$. Тоді*

$$x_n \circ y_n \rightarrow x \circ y, \quad n \rightarrow \infty,$$

в J_1 топології.

Доведення. Перевіримо виконання умов Критерію 2.3. Зафіксуємо $t > 0$ і нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$. Оскільки y неперервна, то зі збіжності у J_1 топології випливає рівномірна збіжність на компактах $y_n \rightarrow y, n \rightarrow \infty$. Звідки

$$y_n(t_n) \rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Оберемо $\xi_n := y_n(t_n)$, $n \geq 1$, $\xi_0 := y(t)$. Застосуємо твердженням 2.3 до x_n , тоді граничні точки множини $\{x_n \circ y_n(t_n) = x_n(\xi_n)\}_{n \geq 1}$ це або $x(\xi_0) = x \circ y(t)$, або $x(\xi_0-) = x(y(t)-)$. Отже, щоб показати C.i нам лише треба довести, що $x(y(t)-) = x \circ y(t)$ або $x(y(t)-) = x \circ y(t-)$. Якщо $y(t) \notin \text{Disc}(x)$, тоді $x(y(t)-) = x \circ y(t)$. Інакше, припустимо, що $y(t) \in \text{Disc}(x)$. З умов леми, ми маємо $y(s) < y(t)$ для довільних $s < t$. Тому $x(y(t)-) = x \circ y(t-)$. Для $t = 0$ умова C.i безперечно вірна.

Щоб показати C.ii припустимо, що $x_n \circ y_n(t_n) \rightarrow x \circ y(t)$ та $\{s_n\}_{n \geq 1}$ така, що $s_n \geq t_n$, $n \geq 1$ і $s_n \rightarrow t$, $n \rightarrow \infty$. Оскільки y_n монотонна

$$\eta_n := y_n(s_n) \geq y_n(t_n) = \xi_n.$$

Таким чином, з твердження 2.3 для x_n , випливає

$$x_n \circ y_n(s_n) = x_n(\eta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x(\xi_0) = x \circ y(t).$$

Частина C.iii випливає аналогічно. ■

Нагадаємо позначення для поточного мінімуму броунівського руху (3.3):

$$M(t) = -\min_{s \leq t} W(s).$$

Застосуємо лему для

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_\eta \circ S_\eta^{(-1)}(\sigma\sqrt{n}\cdot), & y_n &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} m(n\cdot), \\ x &= U_\alpha \circ U_\alpha^{(-1)}, & y &= M. \end{aligned}$$

Для цього необхідно перевірити, що

$$\mathbb{P}\left(\#\{u : M(u) = a\} = 1, \text{ коли } a \in \text{Disc}(U_\alpha \circ U_\alpha^{(-1)})\right) = 1. \quad (3.33)$$

Для довільного рівня $a \geq 0$ (див. наприклад [SP12, Lemma 11.17])

$$\#\{u : M(u) = a\} = 1 \text{ м.н.}$$

Множина $\text{Disc}(U_\alpha \circ U_\alpha^{(-1)})$ зліченна. Таким чином, ми перевірили (3.33) та довели, що

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_\eta \circ S_\eta^{(-1)} \circ m(n\cdot) \xrightarrow{a.s.} U_\alpha \circ U_\alpha^{(-1)} \circ M, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.34)$$

Згадаємо (3.9) :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_\xi(n\cdot) \xrightarrow{a.s.} W, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже, лема доведено, бо сума двох доданків неперервна операція у $\mathcal{D}[0, \infty) \times \mathcal{D}[0, \infty)$, коли хоча б один з доданків неперервний (див. наприклад [Whi80, Theorem 4.1]). ■

Зауважимо, що заміна часу $\frac{\lambda(nt)}{\sqrt{n}}$ неспадна і розривна. Отже, ми не можемо дістатися збіжності $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \tilde{S}(n\cdot)$ до W_α у $\mathcal{D}[0, \infty)$ за визначенням. Отже, далі ми будемо з цим боротися.

Позначимо

$$f_n(t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \tilde{S}(nt) \text{ та } \lambda_n(t) := \frac{\lambda(nt)}{n}.$$

Нехай $\{t_k^n\}_{k \geq 1} = \text{Disc}(\lambda_n)$ та $u_k^n := \lambda_n(t_k^n -)$, $v_k^n := \lambda_n(t_k^n +)$, і також функція $\mathcal{Y}_n : R_+ \mapsto R_+$, така що

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_n t = u_k^n - \frac{1}{n}, & \text{if } t = t_k^n \\ \mathcal{Y}_n t = t, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

За конструкцією $\tilde{S}$ та λ , а саме, що вони мають стрибки в одні і ті самі моменти часу, справедливо що

$$\tilde{S}(\mathcal{Y}_n t) = \tilde{S}(t-).$$

Отже

$$f_n(\mathcal{Y}_n t) = f_n(t-).$$

Будемо використовувати Критерій 2.3. Нехай $\{w_n\}_{n \geq 0}$ така що $w_n \rightarrow w_0 \in \mathbb{R}_+$. Оберемо $A > 0$ таку, щоб $\{w_n\}_{n \geq 0} \subset [0, A)$. Для того, щоб показати C.i, припустимо, що $f_n(w_n)$ збігається, коли $n \rightarrow \infty$. Якщо це не так, то можна оберемо таку підпослідовність. Для кожного n покладемо

$$t_n := t_n^w := \mathcal{Y}_n \lambda_n^{(-1)}(w_n). \quad (3.35)$$

З Наслідку 3.7 ми маємо, що $\lambda_n^{(-1)}$ збігається рівномірно, а отже і

$$t_n \rightarrow w_0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Зауважимо, що

$$|f_n \circ \lambda_n(t_n) - f_n(w_n)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{i \leq An} \xi_i. \quad (3.36)$$

Справді, якщо $w_n \in [u_k^n, v_k^n)$ для деякого k , то $f_n(u_k^n -) = f_n \circ \lambda_n(t_n) > 0$. Отже приріст випадкового блукання $\tilde{S}$ з $u_k^n -$ до w_n не більше за ξ . Якщо $w_n \notin [u_k^n, v_k^n)$ для всіх k , то $\lambda_n(t_n) = w_n$. Оскільки $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, то за твердженням 3.10

$$\frac{\max_{1 \leq i \leq nA} |\xi_i|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.37)$$

Згадаємо, що $f_n \circ \lambda_n$ збігається до W_α у D . Тобто ми можемо застосувати **C.i** до нього, щоб отримати, що єдині граничні точки послідовності $f_n \circ \lambda_n(t_n)$ — це $W_\alpha(\xi_0)$ та $W_\alpha(\xi_0-)$. Отже з (3.36) маємо, що ті самі точки, а саме $W_\alpha(\xi_0)$ та $W_\alpha(\xi_0-)$, є єдиними граничними для $f_n(w_n)$.

Щоб показати **C.ii** припустимо, що $f_n(w_n) \rightarrow f(w_0)$ і $\{v_n\}_{n \geq 1}$ така, що $v_n \geq w_n$, $n \geq 1$ та $v_n \rightarrow w_0$, $n \rightarrow \infty$. Оберемо $A > 0$ такою, щоб $\{w_n, v_n\}_{n \geq 1} \subset [0, A)$. Розглянемо послідовності $\{t_n^w, t_n^v\}_{n \geq 1}$, утворені аналогічно до (3.35). Може статися, що $t_n^w > t_n^v$, тому введемо

$$t_n^{v'} := \begin{cases} t_n^w, & \text{if } t_n^w > t_n^v, \\ t_n^v, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Зауважимо, що $\lambda_n(t_n^{v'}) = \lambda_n(t_n^v)$. Отже

$$\begin{aligned} |f(v_n) - f(w_0)| &\leq |f(v_n) - f_n \circ \lambda_n(t_n^v)| + |f_n \circ \lambda_n(t_n^v) - f(w_0)| \\ &= |f(v_n) - f_n \circ \lambda_n(t_n^v)| + |f_n \circ \lambda_n(t_n^{v'}) - f(w_0)|. \end{aligned}$$

Перший доданок аналогічний до (3.36), де замість t_n^w та w_n взяли t_n^v та v_n . Тому ми робимо висновок, що він збігається до 0, коли $n \rightarrow \infty$.

З (3.36) ми знаємо, що $f_n \circ \lambda_n(t_n^w) \rightarrow f(w_0)$, $n \rightarrow \infty$. З **C.ii**, застосованого до $f_n \circ \lambda_n$, випливає, що

$$f_n \circ \lambda_n(t_n^{v'}) \rightarrow f(w_0), \quad n \rightarrow \infty.$$

Це завершує доведення **C.ii**.

Для того, щоб показати **C.iii**, додаткові конструкції не потрібні і доведення таке саме, тому ми його пропускаємо.

3.4 Доведення теореми 3.5: η має повільно змінний хвіст

Досить довести (3.5). Нехай

$$N_\eta(x) := S_\eta^{(-1)}(x) = \inf\{k : S_\eta(k) > x\}, \quad x \geq 0.$$

Нехай $c > 0$, $K > 0$, $0 < \varepsilon < K$ і $0 < t \leq 1$, тоді справедливі включення

$$\begin{aligned} \left\{ \max_{i \leq nt} \frac{\tilde{S}(i)}{\sqrt{n}} \geq c \right\} &= \left\{ \max_{i \leq nt} \left(S_\xi(i - T(i)) + S_\eta(T(i)) \right) \geq c\sqrt{n} \right\} \\ &\supset \left\{ \min_{i \leq n} S_\xi(i) \geq -K\sqrt{n} \right\} \cap \left\{ S_\eta(T(nt)) > (K + c)\sqrt{n} \right\} \\ &= \left\{ \min_{i \leq n} S_\xi(i) \geq -K\sqrt{n} \right\} \cap \left\{ N_\eta((K + c)\sqrt{n}) \leq T(nt) \right\} \\ &\supset \left\{ \min_{i \leq n} S_\xi(i) \geq -K\sqrt{n} \right\} \cap \left\{ N_\eta(\varepsilon\sqrt{n}) \leq T(nt) \right\} \\ &\quad \cap \left\{ \eta_{N_\eta(\varepsilon\sqrt{n})} > (K + c)\sqrt{n} \right\}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Тут друге включення випливає з того, що коли

$$\eta_{N_\eta(\varepsilon\sqrt{n})} > (K + c)\sqrt{n},$$

то відразу

$$N_\eta((K + c)\sqrt{n}) = N_\eta(\varepsilon\sqrt{n}).$$

Лемма 3.15. *Нехай дійсні числа $j, l, a > 0$ такі що $j + l < n$, тоді*

$$\left\{ \min_{i \leq j} S_\xi(i) \leq -a \right\} \cap \left\{ T(n) < l \right\} \subset \left\{ N_\eta(a) \leq T(j + l) \right\}.$$

Доведення. Припустимо, що $\min_{i \leq j} S_\xi(i) = -A \leq -a$ і його було вперше досягнуто в момент $i = i^* \leq j$. Позначимо через u найменший розв'язок рівняння

$$u - T(u) = i^*.$$

Нехай k таке що

$$\tilde{S}(u) \leq \tilde{S}(u+1) \leq \dots \leq \tilde{S}(u+k-1) \leq 0 < \tilde{S}(u+k),$$

що означає, що $\tilde{S}$ потрібно k стрибків, щоб стати додатнім. Зауважимо, що $T(u) + k = T(u+k)$.

Припустимо, що $T(n) < l$. Тоді $k < l$. Звідси

$$u+k < j+l < n.$$

Оскільки k таке що $\tilde{S}(u+k) > 0$, то з визначення $\tilde{S}$ ми маємо $S_\eta(T(u+k)) > A$ і таким чином

$$N_\eta(a) \leq N_\eta(A) \leq T(u+k) = T(i^* + T(u) + k) = T(i^* + T(u+k)) \leq T(j+l).$$

■

Скористаємося лемою 3.15 з $j = l = \frac{nt}{2}$ та $a = \varepsilon\sqrt{n}$, щоб розширити включення (3.38)

$$\begin{aligned} & \left\{ \max_{i \leq nt} \frac{\tilde{S}(i)}{\sqrt{n}} \geq c \right\} \\ \supset & \left\{ \min_{i \leq n} S_\xi(i) \geq -K\sqrt{n} \right\} \cap \left\{ N_\eta(\varepsilon\sqrt{n}) \geq T(nt) \right\} \cap \left\{ \eta_{N_\eta(\varepsilon\sqrt{n})} > (K+c)\sqrt{n} \right\} \\ \supset & \left\{ \min_{i \leq n} S_\xi(i) \geq -K\sqrt{n} \right\} \cap \left\{ \min_{i \leq nt/2} S_\xi(i) \leq -\varepsilon\sqrt{n} \right\} \cap \left\{ T(n) < \frac{nt}{2} \right\} \\ & \cap \left\{ \eta_{N_\eta(\varepsilon\sqrt{n})} > (K+c)\sqrt{n} \right\}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{i \leq nt} \frac{\tilde{S}(i)}{\sqrt{n}} \geq c \right) & \geq \mathbb{P}\left(\text{подія у правій частині (3.39)} \right) \\ & = 1 - \mathbb{P}\left(\text{подія у правій частині (3.39)} \right) \\ & \geq 1 - \mathbb{P}\left(\min_{i \leq n} S_\xi(i) \leq -K\sqrt{n} \right) - \mathbb{P}\left(\min_{i \leq nt/2} S_\xi(i) \geq -\varepsilon\sqrt{n} \right) \\ & \quad - \mathbb{P}\left(T(n) > \frac{nt}{2} \right) - \mathbb{P}\left(\eta_{N_\eta(\varepsilon\sqrt{n})} < (K+c)\sqrt{n} \right). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Нехай $\delta > 0$. Ми доведемо, що кожний від’ємний доданок у правій частині останньої нерівності більший за $-\delta$ для досить великого n . Оберемо $K > 0$ і $0 < \varepsilon < K$ так, щоб

$$\mathbb{P}\left(|N_\eta(0, 1)| > K\right) < \delta, \quad \mathbb{P}\left(|N_\eta(0, 1)| < \varepsilon\sqrt{\frac{2}{t}}\right) < \delta.$$

Оскільки

$$-\min_{i \leq nt} \frac{S_\xi(i)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} |N_\eta(0, t)|, \quad n \rightarrow \infty,$$

то ми маємо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{P}\left(\min_{i \leq n} S_\xi(i) \leq -K\sqrt{n}\right) + \mathbb{P}\left(\min_{i \leq nt/2} S_\xi(i) \leq -\varepsilon\sqrt{n}\right) \right) \leq 2\delta.$$

З [BGT87, теорема 8.8.2] випливає, що

$$\frac{\eta_{N_\eta(\varepsilon\sqrt{n})}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty, \quad n \rightarrow \infty. \tag{3.41}$$

Отже, останній член у правій частині (3.40) збігається до 0.

Нарешті, наслідок 3.7 завершує доведення.

Розділ 4

Висновки

Ця робота є дослідженням моделі (3.1) для різних розподілів η . Як обговорювалось раніше, дослідження поведінки для процесів з граничними умовами є складною задачею. Модель, яку ми розглядаємо є прикладом процесу, де граничні умови задано у вигляді “відбиття”. Ми досягли мети, а саме:

1. встановили функціональну граничну теорему для процесу з відбиттям у випадку скінченного математичного сподівання η ;
2. узагальнили результати попередніх авторів, коли η належить області притягання α -стійкої випадкової величини для $\alpha \in (0, 1)$;
3. дослідили поведінку блукання для η , що мають повільно змінні хвости.

Список використаних джерел

- [BGT87] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular variation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [Bil99] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley, 1999.
- [Bro77] P. J. Brockwell. Stationary distributions for dams with additive input and content-dependent release rate. *Advances in Applied Probability*, 9(3):645–663, September 1977.
- [EK86] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov Processes*. John Wiley & Sons, Inc., March 1986.
- [Fel52] W. Feller. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. *The Annals of Mathematics*, 55(3):468, May 1952.
- [Fel71] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*. Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- [Gut13] A. Gut. *Probability: A Graduate Course*. Springer New York, 2013.
- [HKF⁺16] C. Hahn, Z. R. Kann, J. A. Faust, J. L. Skinner, and G. M. Nathanson. Super-maxwellian helium evaporation from pure and salty water. *The Journal of Chemical Physics*, 144(4):044707, January 2016.

- [JLF⁺14] A. M. Johnson, D. K. Lancaster, J. A. Faust, C. Hahn, A. Reznickova, and G. M. Nathanson. Ballistic evaporation and solvation of helium atoms at the surfaces of protic and hydrocarbon liquids. *The Journal of Physical Chemistry Letters*, 5(21):3914–3918, October 2014.
- [Kal21] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer International Publishing, 2021.
- [KS16] Z. R. Kann and J. L. Skinner. Sub- and super-maxwellian evaporation of simple gases from liquid water. *The Journal of Chemical Physics*, 144(15):154701, April 2016.
- [Pil14] A. Pilipenko. *An introduction to stochastic differential equations with reflection*. Potsdam:Universitätsverlag, 09 2014.
- [PP14] A. Pilipenko and Yu. Prykhodko. Limit behaviour of a simple random walk with non-integrable jump from a barrier. *Theory of Stochastic Processes*, 19 (35)(1):52–61, 2014.
- [Res87] S. I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer New York, 1987.
- [SH11] P. Straka and B.I. Henry. Lagging and leading coupled continuous time random walks, renewal times and their joint limits. *Stochastic Processes and their Applications*, 121(2):324–336, February 2011.
- [SP12] R. L. Schilling and L. Partzsch. *Brownian Motion*. DE GRUYTER, May 2012.
- [Tan79] H. Tanaka. Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions. *Hiroshima Mathematical Journal*, 9(1), January 1979.

- [Whi80] W. Whitt. Some useful functions for functional limit theorems. *Mathematics of Operations Research*, 5(1):67–85, February 1980.
- [Whi02] W. Whitt. *Stochastic-process limits : an introduction to stochastic-process limits and their application to queues*. Springer series in operations research. Springer, New York, 2002.