МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

МОРАВЕЦЬКА КАТЕРИНА ВІТАЛІЇВНА

УДК 517.98+515.164.17

МІРИ НА БАНАХОВИХ МНОГОВИДАХ З РІВНОМІРНОЮ СТРУКТУРОЮ

01.01.01 — Математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського".

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Богданський Юрій Вікторович,
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",
професор кафедри математичних методів системного аналізу

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор
Загороднюк Андрій Васильович,
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника,
проректор з наукової роботи;

кандидат фізико-математичних наук
Рабанович Вячеслав Іванович,
Інститут математики НАН України,
старший науковий співробітник
відділу функціонального аналізу.

Захист відбудеться «20» лютого 2019 р. о $16^{\underline{00}}$ на засіданні спеціалізованої вченої ради К 26.002.31 Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" за адресою:
03056, Київ, пр. Перемоги, 37, корпус № 7, ауд. 423.

З дисертацією можна ознайомитись у Науково-технічній бібліотеці ім. Г.І. Денисенка Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" за адресою:
03056, Київ, пр. Перемоги, 37.

Автореферат розісланий «16» січня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Ільєнко М.К.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертація присвячена дослідженню мір на гладких нескінченновимірних многовидах. В дисертації запропоновано метод побудови асоційованих мір на поверхнях скінченної корозмірності, вкладених у банахів многовид з обмеженою структурою. Отримано узагальнення критерію слабкої диференційовності мір для випадку диференційовності уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою.

Актуальність теми.

Потреба узагальнення понять класичного аналізу на випадок функцій нескінченного аргументу і пов'язані з ними об'єкти виникла цілком природно у зв'язку з розвитком математичної фізики, зокрема, варіаційного числення. Це призвело до виникнення такої математичної дисципліни як нескінченновимірний аналіз. Незважаючи на те, що на початкових етапах перенесення понять аналізу на нескінченновимірний випадок відбувалося без особливих складностей (диференціальне числення, деякі прості задачі теорії диференціальних рівнянь), виявилося, що при переході до інтегрування і теорії диференціальних рівнянь математичної фізики, при вивченні яких необхідне інтегрування, виникають серйозні труднощі.

Плідним виявився напрям в теорії інтегрування, пов'язаний з розвитком теорії випадкових процесів, починаючи з робіт Н. Вінера і А.Н. Колмогорова. Особливості інтегрування у функціональних просторах розглядаються у роботах Р. Камерона і В. Мартіна, присвячених теорії вінерівських інтегралів. Нескінченновимірні диференціальні рівняння також виникають у теорії випадкових процесів (наприклад, при вивченні так званих статистичних розв'язків еволюційних рівнянь класичної математичної фізики, починаючи з роботи Є. Хопфа).

Іншим поштовхом для розвитку нескінченновимірного аналізу були роботи Фейнмана з квантової механіки та електродинаміки, в яких був введений і використаний широковідомий тепер “інтеграл Фейнмана”. Але, як це часто буває у фізиці, зроблено це було без необхідного математичного обґрунтування. З іншого боку в роботах Ю. Швінгера з квантової електродинаміки з'явилися рівняння у функціональних похідних, які також потребували для свого дослідження розвитку процедур інтегрування в функціональних просторах. Іншим джерелом рівнянь в функціональних похідних були також роботи Є. Хопфа зі статистичної гідродинаміки. Все це створило серйозні передумови для математичного розвитку нескінченновимірного аналізу.

Важливим фактом, що визначив актуальність теорії міри в рамках нескінченновимірного аналізу, стала особлива роль мір в нескінченновимірному аналізі. Виявилося, що в нескінченновимірному просторі відсутня стандартна міра типу міри Лебега (тобто ненульова міра, яка є інваріантною відносно зсувів), а тому немає канонічного способу ототожнення мір з узагальненими функціями за рахунок представлення їх щільностями відносно міри Лебега. В зв'язку з цим потрібно розглядати одночасно і простір функцій, і простір мір окремо, а отже, виникає необхідність побудови аналізу мір, паралельного до аналізу функцій. Це природним чином зумовлює виникнення теорії диференційовності мір та поверхневого інтегрування.

Теорія диференційовних мір вперше була запропонована С.В. Фоміним на Міжнародному конгресі математиків у Москві в 1966 році в якості кандидату на роль нескінченновимірного аналогу теорії розподілів Соболева-Шварца, і після цього отримала широкий розвиток. Перше детальне дослідження диференційовних мір на лінійних просторах було проведено у роботах В.І. Авербуха, О.Г. Смолянова, та С.В. Фоміна (1971, 1972). Інше означення диференційовності мір було введене А.В. Скороходом (1975). Основні результати всіх цих досліджень коротко викладені в книгах О.Г. Смолянова (1979) та Ю.Л. Далецького, С.В. Фоміна (1983). В 70–80-х роках значний розвиток ця тематика отримала в роботах школи О.Г. Смолянова. Огляд основних досягнень теорії диференційовних мір за перше двадцятиліття її існування зроблено у статті В.І. Богачова та О.Г. Смолянова (1990). Деякі застосування вказаної теорії наведено у книгах Н.В. Норіна (1996) та А.В. Угланова (2000). Загалом, з теорії диференційовних мір і її застосувань опубліковано сотні робіт. Детальний виклад результатів, пов'язаних з диференціальними властивостями мір на нескінченновимірних просторах, наведено у монографії В.І. Богачова (2008).

Вихідною ціллю для розвитку теорії диференційовних мір С.В. Фоміним був розвиток теорії псевдодиференціальних операторів для нескінченновимірних диференціальних рівнянь. Однак, як це часто буває з плідними ідеями, теорія диференційовних мір швидко переросла первинні рамки і стала ефективним знаряддям в широкому колі різноманітних застосувань, таких як стохастичний аналіз, квантова теорія поля та нелінійний аналіз. На сьогоднішній день вона стрімко розвивається та являю собою область, багату на цікаві проблеми, важливі для проникнення в сутність нескінченновимірних явищ.

Проблема побудови поверхневих мір на поверхнях, вкладених у нескінченновимірний простір, є одним з ключових питань нескінченновимірного аналізу. Необхідність теорії інтегрування викликана потребами теоретичної фізики та випадкових процесів, однак складність обумовлена неможливістю використання класичних підходів скінченновимірного аналізу. Застосування теорії інтегрування є в багатьох областях, зокрема, у теорії нескінченновимірних розподілів і диференціальних рівнянь, випадкових процесах, варіаційному численні. Перші, початкові кроки в вирішенні даної задачі були запропоновані А.В. Скороходом (1975). В роботах А.В. Угланова (1998, 2000 та ряд інших робіт) був розвинений апарат поверхневого інтегрування в просторах Фреше. Інший підхід до побудови поверхневих мір було запропоновано В.І. Богачовим (1990) та О.В. Пугачовим (2008). Ю.В. Богданським (2012) розглянуто ще один спосіб побудови поверхневих мір для поверхні, вкладеної в банахів многовид.

У сучасному аналізі як по внутрішнім причинам, так і під стимулюючим впливом теоретичної фізики все більшу роль відіграють нелінійні многовиди. Змістовні аналітичні побудови на них є неможливими без теорії інтегрування, тою чи іншою мірою пов’язаною з додатковими структурами. І якщо у випадку нескінченновимірного лінійного простору з використанням гауссівських мір вдається побудувати ослаблений варіант гармонічного аналізу, на нелінійних многовидах немає і такої можливості. В зв’язку з цим виникає необхідність опису достатньо широкого класу мір, властивості яких були б узгодженими з гладкою структурою многовиду, а також алгебраїчними структурами, що, можливо, на ньому наявні. Таким класом є міри, диференційовні уздовж векторних полів. Вивчення їх властивостей являє собою важливу задачу.

Банахові многовиди з рівномірною структурою, що розглядаються у дисертації, природним чином виникають у нескінченновимірному аналізі та стохастичній диференціальній геометрії. Зокрема, Ю. Л. Далецьким та Я.І. Білопольською (1989) для вказаного класу многовидів побудовано глобальні розв’язки стохастичних диференціальних рівнянь. Ю.В. Богданським (2012) отримано варіант формули Гаусса-Остроградського на банахових многовидах з рівномірною структурою. Ю.Е. Глікліх (2011) подібне означення розглядає і для випадку ріманових многовидів.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” в рамках ініціативної теми «Застосування математичних методів в дослідженні інтегральних характеристик детермінованих та стохастичних складних систем» (номер державної реєстрації 0118U003669).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є вивчення властивостей борелівських мір на банахових многовидах з обмеженою структурою. Поставлена мета включая в себе виконання таких завдань:

- Дослідити поняття диференційовності борелівських мір уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою. Узагальнити на вказаний випадок критерій В.І. Богачова слабкої диференційовності.
- Запропонувати метод побудови поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності, вкладених у нескінченновимірний банахів многовид з обмеженою структурою.
- Встановити достатні умови для існування асоційованої поверхневої міри.
- Дослідити транзитивні властивості запропонованої конструкції.
- Обґрунтувати адекватність конструкції на прикладі скінченновимірних просторів та показати її узгодженість із класичними результатами.

Об’єктом дослідження є борелівські міри на банахових многовидах з обмеженою структурою.

Предметом дослідження є диференціальні властивості борелівських мір уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного і функціонального аналізу, диференціальних рівнянь, теорії міри та диференціальної геометрії.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертаційної роботи, які визначають її наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

- Отримано узагальнення критерію В.І. Богачова слабкої диференційовності за напрямком на лінійно опуклих просторах для випадку диференційовності уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою.
- Запроваджено поняття асоційованої диференціальної форми та строго трансверсального набору векторних полів для поверхонь скінченної корозмірності, що вкладені у банахові многовиди з обмеженою структурою.
- Запропоновано метод побудови асоційованих поверхневих мір першого та другого типів. Виявлено достатні умови існування відповідної поверхневої міри.
- Доведено теорему “про узгодженість”, тобто однозначність задання поверхневої міри другого типу асоційованою диференціальною формою, незалежно від набору векторних полів, використаних при побудові.
- Показано транзитивність асоційованих поверхневих мір. Показано, що при подвійному вкладенні поверхні S у многовид M (S вкладена у Σ, що в свою чергу вкладена у M) безпосередня побудова поверхневої міри на S при розгляді її вкладення в M призводить до того ж результату, що і двоетапна побудова через поверхневу міру на Σ.
- Обґрунтовано адекватність запропонованої конструкції на прикладі скінченновимірного простору та ріманова многовиду.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальше використання в різних розділах теорії міри та диференціальної геометрії.

Особистий внесок здобувача. Постановка задачі, визначення напрямку та плану дослідження належить науковому керівнику здобувача д. ф.-м. н., проф. Ю. В. Богданському. За результатами дисертації автором опубліковано п’ять робіт, дві з яких у співавторстві з науковим керівником. У спільних роботах особисті внески співаторів є рівноцінними.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювалися на наукових конференціях та семінарах:

- Вісімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, м. Київ, 7–10 жовтня 2017 року;
- Шістнадцята міжнародна науково-технічна конференція SAIT 2014, м. Київ, 26–30 травня 2014 року;

- конференція в рамках II туру Всеукраїнського конкурсу студентських наукових робіт з математичних наук, м. Івано-Франківськ, 20–22 березня 2014 року;
- Науковий семінар “Числення Маллявена та його застосування” відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України (керівник: д. ф.-м. н., проф. А. А. Дороговцев), 23 лютого 2016 року;
- Науковий семінар “Алгебра і аналіз” ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ” (керівник: д. ф.-м. н., проф. Ю. В. Богданський);
- Науковий семінар кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (керівник: д. ф.-м. н., проф. А. В. Загороднюк), 28 листопада 2018 року;

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 8 наукових праць, у тому числі 5 статей у наукових фахових виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз (з них 3 статті у науковому виданні України, яке включене до баз Scopus та Web of Science), 3 тези доповідей у збірниках матеріалів конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, висновків, переліку використаних джерел та списку публікацій здобувача. Основний текст дисертації складає 173 сторінки друкованого тексту, перелік використаних джерел налічує 56 посилань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У **вступі** до дисертації обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету роботи, визначено завдання і методи дослідження, висвітлено наукову новизну отриманих результатів. Розглянуто структуру роботи і коротко викладено зміст основної частини роботи, а також наведено інформацію щодо апробації результатів та публікацій за темою дисертації.

У **першому розділі** проведено огляд літератури за темою дисертації. Розглянуто клас банахових многовидів зі спеціальною рівномірною структурою. Наведено основні означення та властивості з теорії диференційовних мір та вказано різні підходи до визначення диференційовних мір. Наведено огляд підходів до побудови поверхневих мір в нескінченновимірних просторах.

Означення 1.1. *Атлас $\Omega = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$ на банаховому многовиді M називається обмеженим, якщо існує число $K > 0$ таке, що відображення склейки $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ для кожної пари карт атласа задовольняє умову:*

$$x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \Longrightarrow \begin{cases} \big\|(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})'(x)\big\| \leqslant K, \\ \big\|(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})''(x)\big\| \leqslant K. \end{cases}$$

Означення 1.3. *Обмежений атлас Ω називається рівномірним, якщо існує таке $r > 0$, що для будь-якої точки $p \in M$ існує така карта $(U, \varphi) \in \Omega$, що $\varphi(U)$ містить кулю в E з центром в $\varphi(p)$ радіуса r.*

Другий розділ присвячено поверхневим мірам на поверхнях скінченної корозмірності на банахових многовидах з рівномірною структурою. Запропоновано метод побудови асоційованої міри на поверхні скінченної корозмірності за допомогою строго трансверсального до поверхні набору векторних полів, які попарно комутують. Під дією потоку вказаного набору векторних полів поверхня переходить в окіл на многовиді, для якого визначено вихідну міру. Граничним переходом одержується значення бажаної поверхневої міри.

Розглядаються обмежені тензорні поля T на M, тобто такі, для яких існує число $C > 0$, що задовольняє умову:

$$\big((U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega;\ x \in \varphi_\alpha(U_\alpha)\big) \Longrightarrow \Big(\big\|T_\alpha(x)\big\| \leqslant C;\ \big\|T'_\alpha(x)\big\| \leqslant C\Big).$$

Якщо задано два банахові многовиди M_1 та M_2 з обмеженими атласами Ω_1 та Ω_2 відповідно, то можна розглядати обмежені морфізми, тобто такі функції $f\colon M_1 \to M_2$, для яких існує таке число $C > 0$, що для кожної пари карт $(U, \varphi) \in \Omega_1$ та $(V, \psi) \in \Omega_2$ виконується умова:

$$\begin{cases} p \in U, \\ f(p) \in V. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Big\|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'\big(\varphi(p)\big)\Big\| \leqslant C, \\ \Big\|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})''\big(\varphi(p)\big)\Big\| \leqslant C. \end{cases}$$

Введено поняття вкладеної поверхні, асоційованої форми поверхні та трансверсального (строго трансверсального) до поверхні набору векторних полів.

Нехай M є зв'язним банаховим многовидом класу C^2, наділеним обмеженою структурою. Через T_xM позначатитемо дотичний простір до M в точці $x \in M$.

Означення 2.1. *Підмножину $S \subset M$ назвемо (вкладеною) поверхнею в M скінченної корозмірності m, якщо існує многовид N з обмеженою структурою, модельним простором якого є підпростір E_1 в E корозмірності m, відкритий окіл V нуля $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ та обмежений ізоморфізм $g\colon N \times V \to U \subset M$ на відкриту підмножину U в M, для якого $g\big(N \times \{\vec{0}\}\big) = S$.*

Означення 2.2. *Нехай S — поверхня в M корозмірності m; $g\colon N \times V \to$ $\to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає вкладення поверхні S в M; ω — диференціальна m-форма класу C^1_b, визначена на U (або на більшій відкритій підмножині в M). Нехай для будь-якої точки $x \in S$ простір T_xS є асоційованим підпростором зовнішньої форми $\omega(x)$ в просторі T_xM $\Big($інакше кажучи, $T_xS = \big\{Y \in T_xM \mid i_Y\omega(x) = 0\big\}$, де i_Y — внутрішній добуток зовнішньої форми $\omega(x)$ на вектор $Y\Big)$. Додатково припускаємо, що для деякого (а тому і для будь-якого еквівалентного) обмеженого атласу Ω на M, підпорядкованого даній обмеженій структурі, виконується умова: існує $\alpha > 0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in (0, \alpha)$ можна знайти $\delta > 0$, для якого для будь-яких $x \in S_{-\varepsilon}$ і карти $(U, \varphi) \in \Omega$ в точці x (т.е. $x \in U$) для представлення*

ω в цій карті має місце нерівність $\left\|\omega_\varphi\big(\varphi(x)\big)\right\| \geqslant \delta$. Тоді форму ω назвемо асоційованою формою поверхні S.

Означення 2.3. *Набір векторних полів $\vec{Z} = \{Z_1, Z_2 \ldots, Z_m\}$ назвемо трансверсальним до S, якщо для кожної точки $x \in S$ має місце нерівність: $\omega(\vec{Z})(x) := \omega(Z_1, \ldots, Z_m)(x) \neq 0$ і строго трансверсальним до S, якщо існує $\alpha > 0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in (0, \alpha)$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $x \in S_{-\varepsilon}$ має місце нерівність: $\left|\omega(\vec{Z})(x)\right| \geqslant \delta$.*

Наступна лема гарантує коректність останнього означення.

Лема 2.1. *Означення трансверсальності та строгої трансверсальності до S набору векторних полів $\vec{Z}$ не залежить від вибору асоційованої форми ω поверхні S.*

Для поверхні S розглядаються “внутрішні околи” $S_{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$:

$$S_{-\varepsilon} = \big\{x \in S \mid \rho(x, M \backslash U) \geqslant \varepsilon\big\}.$$

Тоді множини $S_{-\varepsilon}$ збігають до S при $\varepsilon \searrow 0$ (тобто утворюють направленість вкладених множин, для яких $\bigcup\limits_{\varepsilon>0} = S$). Таким чином для побудови поверхневої міри на S достатньо побудувати узгоджені між собою міри на множинах $S_{-\varepsilon}$.

Позначимо через $\Phi_t^X = \Phi^X(t; \cdot)$ потік векторного поля X (визначений локально) і для набору векторних полів $\vec{Z} = \{Z_1, Z_2 \ldots, Z_m\}$, що попарно комутують, для $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ покладемо: $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} := \Phi_{t_1}^{Z_1}\Phi_{t_2}^{Z_2} \ldots \Phi_{t_m}^{Z_m}$ (значення $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}$ не залежить від порядку множників завдяки комутації). Покладемо також $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} A := \{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}(x) \mid x \in A\}$, $\Phi_W^{\vec{Z}} A := \{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}(x) \mid \vec{t} \in W; x \in A\}$.

Наступні два результати показують, що під дією сумісного потоку строго трансверсального до S набору векторних полів, що попарно комутують, при малих r множина $B_r \times S_{-\varepsilon}$ гомеоморфно відображується в область на многовиді M (тут і далі через B_r позначено відкриту кулю радіусу r в $\mathbb{R}^m$ з центром в нулі).

Теорема 2.1. *Нехай S — вкладена в M поверхня корозмірності m; $g\colon N \times V \to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає S. Нехай набір $\vec{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ векторних полів класу $C_b^1(U)$, що попарно комутують, є строго трансверсальним до поверхні S. Крім того нехай для заданого $\varepsilon > 0$ існують такі $r_0 > 0$ та $r_1 > 0$, що відображення $\Phi^{\vec{Z}}$ є визначеним на $B_{r_1}(S_{-\varepsilon}) \times B_{r_0}$. Тоді існує окіл $W = W(\varepsilon)$ нуля в $\mathbb{R}^m$ такий, що:*
а) відображення $\Phi^{\vec{Z}}\colon S_{-\varepsilon} \times W \ni \big(x, \vec{t}\big) \mapsto \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x \in \Phi_W^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}$ взаємно однозначне;
б) існує окіл W_1 нуля в $\mathbb{R}^m$, для якого $\Phi_W^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon} \supset g\big(N_{-2\varepsilon} \times W_1\big)$.

Лема 2.6. *Нехай $\varepsilon > 0$ і відображення $\Phi\colon S_{-\varepsilon} \times W \to \Phi_W^{\vec{X}} S_{-\varepsilon} \subset U$ побудовано згідно з теоремою 2.1. Тоді існує таке $p > 0$, що $\overline{B}_{2p} \subset W$ і відображення $\Psi = \Phi\Big|_{S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p}\colon S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p \to \Phi_{\overline{B}_p}^{\vec{X}} S_{-\varepsilon}$ — гомеоморфізм $S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p$ на замкнену підмножину многовиду M.*

Якщо μ — скінченна борелівська міра на M, то для кожної борелівської множини $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ можна розглянути міру w_A на $\mathcal{B}(\overline{B}_p)$, визначену формулою:

$$w_A(B) = w_A^{\vec{X}}(B) = \mu(\Phi_B^{\vec{X}} A),$$

а для кожної множини $B \in \mathcal{B}(\overline{B}_p)$ розглянути міру ν_B на $\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, визначену рівністю:

$$\nu_B(A) = w_A(B) = \mu(\Phi_B^{\vec{X}} A).$$

Нехай λ_m — інваріантна міра Лебега на $\mathbb{R}^m$, $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$. Розглянемо границю:

$$\frac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec{0}) := \lim_{r\to 0} \frac{w_A(B_r)}{\lambda_m(B_r)} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \nu_{B_r}(A). \tag{1}$$

Якщо вказана границя існує для кожного $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, тоді вона задає скінченну борелівську міру $\sigma_{\vec{X},\varepsilon}$ на $S_{-\varepsilon}$. Оскільки значення $\sigma_{\vec{X}}(A)$ не залежить від $\varepsilon > 0$, міри $\sigma_{\vec{X},\varepsilon}$ коректно продовжуються до (не обов'язково скінченної) міри $\sigma_{\vec{X}}$ на $\mathcal{B}(S)$.

Означення 2.4. *Міру $\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{X}}[\mu]$, що визначається рівністю* (1) *назвемо поверхневою мірою першого типу на S (що породжена набором полів $\vec{X}$).*

Наступна теорема встановлює достатні умови існування поверхневої міри першого типу.

Теорема 2.2. *Нехай S — вкладена в M поверхня корозмірності m, і $g\colon N \times V \to U \subset M$ — відповідний обмежений ізоморфізм; $\vec{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ — строго трансверсальний до S набір визначених на U або на більшій відкритій підмножині $\widetilde{U} \subset M$ повних векторних полів класу C_b^1, що попарно комутують. Крім того, покладемо відображення $\Phi\colon S \times \mathbb{R}^m \ni (x, \vec{t}) \mapsto \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x \in \Phi_{\mathbb{R}^m}^{\vec{Z}} S$ взаємно однозначним. Нехай μ — скінченна борелівська міра на M, і для кожного монотонно зростаючого набору натуральних чисел $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_s \leqslant m$ $\big(s \in \{1, 2, \ldots, m\}\big)$ існує $d_{Z_{k_1}} d_{Z_{k_2}} \ldots d_{Z_{k_s}} \mu$ (на області визначення векторних полів з набору $\vec{Z}$). Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ існує границя, визначена формулою* (1).

Будемо називати трійку $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгодженою, якщо вона задовольняє умови теореми 2.2.

Означення 2.5. *Трійку $(S, \vec{Z}, \mu)$ будемо називати узгодженою, якщо:*

- S — вкладена в $U \subset M$ поверхня корозмірності m;

- $\vec{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ — строго трансверсальний до S набір векторних полів класу $C_b^1(\widetilde{U})$, де $U \subset \widetilde{U} \subset M$. При цьому поля з набору $\vec{Z}$ є повними та попарно комутують, і крім того відображення потоку $\Phi\colon S \times \mathbb{R}^m \to \Phi_{\mathbb{R}^m}^{\vec{Z}} S$ взаємно однозначне;

- μ — скінченна борелівська міра на M (або хоча б на $\widetilde{U}$), для якої для кожного монотонно зростаючого набору натуральних чисел $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_s \leqslant m$ $\big(s \in \{1, 2, \ldots, m\}\big)$ існує $d_{Z_{k_1}} d_{Z_{k_2}} \ldots d_{Z_{k_s}} \mu$ на $\mathcal{B}(\widetilde{U})$.

У випадку узгодженої трійки для кожної множини $A \in \mathcal{B}(S)$ має місце рівність:

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = (d_{X_1} d_{X_2} \dots d_{X_m} \mu)(\widehat{A}), \qquad \text{де } \widehat{A} = \Phi_C^{\vec{X}} A; \;\; C = \bigtimes_{k=1}^{m} (-\infty, 0],$$

звідки випливає обмеженість варіації міри $\sigma_{\vec{X}}$ на $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$.

Будемо розглядати також узгоджені в широкому сенсі трійки, які не обов'язково задовольняють умови теореми 2.2, проте для них визначено поверхневу міру.

Означення 2.6. *Трійку $(S, \vec{Z}, \mu)$, в якій строго трансверсальний до S набір векторних полів, що попарно комутують, визначено при кожному $\varepsilon > 0$ лише на деякому околі поверхні $S_{-\varepsilon}$ (вимога повноти полів відсутня), але існують такі $r_0(\varepsilon) > 0$ та $r_1(\varepsilon) > 0$, що відображення $\Phi^{\vec{Z}}$ є визначеним на $(S_{-\varepsilon})_{r_1(\varepsilon)} \times B_{r_0(\varepsilon)}$ і при цьому для кожної множини $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ визначено границю* (1), *а тому і відповідну міру $\sigma_{\vec{Z}}[\mu]$, назвемо узгодженою в широкому сенсі.*

Далі передбачається, що міра μ є невід'ємною.

Нехай f — обмежена борелівська функція на S і $\varepsilon > 0$. Тоді функція $\widehat{f}$, отримана продовженням f першим інтегралом кожного векторного поля Z_k на деякий окіл $S_{-\varepsilon}$ вигляду $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$, належить до класу C_b^1. Наступна лема показую, що при домноженні векторних полів на функцію $\widehat{f}$ відповідна поверхнева міра домножується на f^m (похідна Радона-Нікодима).

Лема 2.8. *Нехай трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгоджена в широкому сенсі; функція $\widehat{f}$ належить до класу C_b^1; $\widehat{f}\big|_S = f$ і для кожного $\varepsilon > 0$ функція $\widehat{f}$ є першим інтегралом векторних полів Z_k системи $\vec{Z}$ в деякому околі $S_{-\varepsilon}$ вигляду $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$; $\inf\limits_S f > 0$. Тоді трійка $(S, \widehat{f}\vec{Z}, \mu)$ узгоджена в широкому сенсі і виконується рівність*

$$\sigma_{\widehat{f}\vec{Z}}[\mu] = f^m \cdot \sigma_{\vec{Z}}[\mu].$$

Основним результатом розділу є наступна теорема, згідно з якою поверхнева міра першого типу не залежить від вибору строго трансверсального набору векторних полів $\vec{X}$, використаного при обчисленні границі, а лише від значень $\big|\omega(\vec{X})\big|\,\Big|_S$.

Теорема 2.3. *Нехай на M задано рівномірний атлас Ω; ω — асоційована m-форма поверхні S, вкладеної в M; трійки $(S, \vec{Y}, \mu)$ і $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгоджені. Нехай $\big|\omega(\vec{Z})\big|\,\Big|_S = \big|\omega(\vec{Y})\big|\,\Big|_S$. Тоді $\sigma_{\vec{Y}} = \sigma_{\vec{Z}}$.*

Твердження теореми 2.3 залишається вірним також у тому випадку, коли трійки $\{S, \vec{Y}, \mu\}$ і $\{S, \vec{Z}, \mu\}$ узгоджені в широкому сенсі і при цьому міри $\sigma_{\vec{Y}}$ і $\sigma_{\vec{Z}}$ є скінченними на S.

Нехай трійки $\{S, \vec{Y}, \mu\}$ та $\{S, \vec{Z}, \mu\}$ узгоджені. Тоді відповідно до останньої теореми міри $\dfrac{1}{\left|\omega(\vec{Y})\right|\Big|_S} \cdot \sigma_{\vec{Y}}$ і $\dfrac{1}{\left|\omega(\vec{Z})\right|\Big|_S} \cdot \sigma_{\vec{Z}}$ співпадають на $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$. Тим самим можливим стає введення поняття поверхневої міри другого типу, яка залежить лише від асоційованої форми поверхні, та не залежить від вибору строго трансверсального до поверхні набору векторних полів.

Означення 2.7. *Поверхневою мірою другого типу на S, індукованою мірою μ і асоційованою формою ω, назвемо міру $\mu_\omega = \dfrac{1}{\left|\omega(\vec{Z})\right|\Big|_S} \cdot \sigma_{\vec{Z}}$, де $\vec{Z}$ — строго трансверсальний до S набір векторних полів класу $C_b^1(M)$, які попарно комутують і для яких трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгоджена.*

Наступні два приклади гарантують існування асоційованої форми та строго трансверсального до поверхні набору векторних полів, що попарно комутують. Таким чином, використання запропонованої конструкції є можливим для будь-якої вкладеної поверхні скінченної корозмірності і достатньо гладкої міри.

Приклад 2.1. *Нехай $g\colon N \times V \to g(N \times V) = U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає вкладену поверхню S корозмірності m. Нехай B_r — куля радіусу $r > 0$ з центром в $\vec{0}$, компактно вкладена в V ($\overline{B}_r \subset V$); h — неперервно диференційовна функція на V, для якої $h(\vec{0}) \neq 0$, $h(\vec{v}) = 0$ для $\vec{v} \notin B_r$. Нехай P_2 — проекція $N \times V$ на V. Тоді визначена на U m-форма $\omega = \left(g^{-1}\right)^* P_2^*(h\,dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_m)$ задовольняє всі умови m-форми, асоційованої з поверхнею S.*

Приклад 2.2. *Нехай $g\colon N \times V \to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, який визначає S, і нехай куля $W = B_r \subset \mathbb{R}^m$ компактно вкладена в V. Відображення $f\colon \vec{s} \mapsto \dfrac{2r}{\pi} \cdot \dfrac{\operatorname{arctg}\|\vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}\vec{s}$ ($\vec{s} \neq 0$), $h(\vec{0}) = \vec{0}$ дифеоморфно відображує $\mathbb{R}^m$ на кулю $W = B_r(\vec{0}) \subset \mathbb{R}^m$. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — векторні поля на W, f-зв'язані з полями $\dfrac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial s_m}$ на $\mathbb{R}^m$, а поля $\eta_1, \ldots, \eta_m$ на V отримані продовженням полів ξ_k нулем ззовні W. Якщо $P\colon N \times V \to V$ — проекція на другий множник, то поля $Y_1, \ldots, Y_m$ на $N \times V$, P-зв'язані з полями $\eta_1, \ldots, \eta_m$, попарно комутують та утворюють строго трансверсальний набір до поверхні $N \times \{\vec{0}\}$. Тоді набір векторних полів $Z_1, \ldots, Z_m$, g-зв'язаних з $Y_1, \ldots, Y_m$, задовольняє вимоги, накладені на систему полів в теоремі 2.2.*

Третій розділ присвячено вивченню транзитивних властивостей асоційованих поверхневих мір та дослідженню узгодженості запропонованої конструкції з класичними результатами. Розглядається випадок подвійного вкладення поверхонь, тобто ситуація, коли поверхня Σ вкладена в M, а поверхня S вкладена у Σ. В такому разі S можна також розглядати як вкладену в M поверхню (скінченної корозмірності). Показано, що поверхневу міру на S можна будувати як вкладенням S в M безпосередньо, так і в два етапи, будуючи спочатку поверхневу міру на Σ, а потім асоційовану з нею поверхневу міру на S.

Обидва підходи призводять до еквівалентних результатів. Розглянуто два приклади застосування конструкції поверхневих мір та показано її адекватність класичним результатам. Побудовано міру, асоційовану з мірою Лебега, на поверхні, вкладеній у скінченновимірний простір $\mathbb{R}^n$, а також поверхневу міру, асоційовану з мірою об'єму, на поверхні, вкладеній у ріманів многовид.

Нехай M — банахів многовид з рівномірною структурою. Вважаємо, що $\Sigma \subset M$ — вкладена в M поверхня корозмірності m, $g_1\colon N_1 \times V_1 \to U \subset M$ — відповідний ізоморфізм, для якого $\Sigma = g_1\big(N_1 \times \{\vec{0}_{\mathbb{R}^m}\}\big)$. Нехай тепер S — вкладена в Σ поверхня корозмірності n, $g_2\colon N_2 \times V_2 \to U_1 \subset \Sigma$ — відповідний ізоморфізм, $S = g_2\big(N_2 \times \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}\big)$. Тоді S також являє собою вкладену в M поверхню корозмірності $m+n$, відповідний ізоморфізм позначатитемо через $h\colon N_2 \times V_2 \times V_1 \to \widetilde{U} \subset M$, причому $S = h\big(N_2 \times \{\vec{0}_{\mathbb{R}^{m+n}}\}\big)$ і $\Sigma \bigcap \widetilde{U} = U_1$.

Наступний результат встановлює зв'язок між асоційованими формами вкладень Σ в M, S в Σ та S в M.

Лема 3.1. *Нехай α — асоційована m-форма вкладення поверхні Σ в M, а β — диференціальна n-форма класу C_b^1 на $\widetilde{U}$, обмеження якої $\widetilde{\beta}$ на $\Sigma \bigcap \widetilde{U} = U_1$ збігається з асоційованою n-формою вкладення поверхні S в Σ. Тоді визначена на $\widetilde{U}$ диференціальна $(m+n)$-форма $\omega = \alpha \wedge \beta$ є асоційованою формою вкладення S в M.*

Підмножина $U_1 \subset \Sigma$ також являє собою вкладену в M поверхню, і відповідний ізоморфізм $g_1\colon \widetilde{N_1} \times V_1 \to \widetilde{U} \subset M$ є звуженням g_1 на множину $\widetilde{N_1} \times V_1$, де $\widetilde{N_1} \times \{\vec{0}\} = (g_1)^{-1}(U_1) \subset N_1 \times \{\vec{0}\}$. При цьому асоційованість форм і строга трансверсальність наборів векторних полів зберігається.

Будуємо такий строго трансверсальний до S (при вкладенні в M) набір повних векторних полів $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_{m+n}\}$ класу $C_b^1(\widetilde{U})$, що попарно комутують, для якого виконується умови:

1) поля $X_1, \ldots, X_n$ є дотичними до поверхні U_1;

2) піднабір полів $\widetilde{\vec{X}} = \{X_{n+1}, \ldots, X_{m+n}\}$ строго трансверсальний до U_1;

3) набір $\vec{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ обмежень на U_1 полів X_k, $k \leqslant n$, строго трансверсальний до S при її вкладенні в Σ;

4) відображення $\Phi^{\widetilde{\vec{X}}}\colon \Sigma \times \mathbb{R}^m \to \Phi^{\widetilde{\vec{X}}}_{\mathbb{R}^m}\Sigma$ взаємно однозначне.

Наступні два результати показують транзитивність асоційованих поверхневих мір першого та другого типів.

Теорема 3.1. *Нехай $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_{m+n}\}$ — строго трансверсальний до S набір визначених на U повних полів класу C_b^1, що попарно комутують, причому поля $X_1, \ldots, X_n$ є дотичними до поверхні Σ, а піднабір полів $\widetilde{\vec{X}} = \{X_{n+1}, \ldots, X_{m+n}\}$ строго трансверсальний до Σ, і при цьому відображення $\Phi^{\widetilde{\vec{X}}}\colon \Sigma \times \mathbb{R}^m \to \Phi^{\widetilde{\vec{X}}}_{\mathbb{R}^m}\Sigma$ взаємно однозначне. Крім того, набір $\vec{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ обмежень на Σ векторних полів X_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) класу C_b^1 є строго трансверсальним до S при її вкладенні в Σ. Тоді, якщо трійка $(S, \vec{X}, \mu)$ є узгодже-*

ною, то узгодженими є також трійки $(\Sigma, \widetilde{\vec{X}}, \mu)$ *та* $(S, \vec{Y}, \sigma_{\widetilde{\vec{X}}})$ *(при вкладенні* S *в* Σ*), і при цьому*

$$\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{Y}}[\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}].$$

Теорема 3.2. *Нехай в умовах леми 3.1* m*-форма* α *є замкненою. Тоді* $\mu_{\alpha\wedge\beta} = (\mu_\alpha)_{\widetilde{\beta}}$.

При побудові асоційованих поверхневих мір похідна Радона-Нікодима зберігається, що стверджується у наступній лемі.

Лема 3.3. *Нехай трійка* $(S, \vec{Z}, \mu)$ *узгоджена; функція* $\widehat{f}$ *визначена в області, де задані векторні поля з набору* $\vec{Z}$*, і належить до класу* C_b^1*;* $\widehat{f}$ *є першим інтегралом полів* Z_k *набору* $\vec{Z}$ *і* $\widehat{f}\big|_S = f$*. Тоді трійка* $(S, \vec{Z}, \widehat{f}\cdot\mu)$ *узгоджена і має місце рівність:*

$$\sigma_{\vec{Z}}[\widehat{f}\cdot\mu] = f\cdot\sigma_{\vec{Z}}[\mu]. \tag{2}$$

Якщо ж трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ *є узгодженою в широкому сенсі, а функція* $\widehat{f}$ *визначена і належить до класу* C_b^1 *лише в околах вигляду* $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}}\times W_1)$*, тоді трійка* $(S, \vec{Z}, \widehat{f}\cdot\mu)$ *також є узгодженою в широкому сенсі і виконується рівність* (2).

Адекватність конструкції поверхневих мір підтверджується на прикладі вкладеної в $\mathbb{R}^m$ поверхні S корозмірності $k < m$, заданої відповідно до означення 2.1 обмеженим C_b^2-ізоморфізмом $g\colon D\times V\to U\subset\mathbb{R}^m$, де $D\subset\mathbb{R}^{m-k}$, $V\subset\mathbb{R}^k$, $g\big(D\times\{\vec{0}\}\big) = S$.

В якості строго трансверсального до S набору векторних полів, що попарно комутують, можна взяти набір $\vec{X} = \{X_1,\ldots,X_k\}$ полів на U, g-зв'язаних з постійними векторними полями $Y_i = \begin{pmatrix}\vec{0}_{m-k+i-1}\\ 1\\ \vec{0}_{k-i}\end{pmatrix}$ — одиниця на $(m-k+i)$-ій позиції, $i = 1,\ldots,k$. Поверхнева міра $\sigma_{\vec{X}}$ першого типу на S визначається рівністю:

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = \lim_{r\to 0}\frac{\lambda_m\big(\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(A)\big)}{\lambda_k(B_r)} = \int\limits_{g_D^{-1}(A)} \big|\det g'(\vec{x},\vec{0})\big|\,d\vec{x}, \qquad A\in\mathcal{B}(S),$$

де через g_D позначено функцію $z = (z_1,\ldots,z_{m-k})\mapsto g\big(z_1,\ldots,z_{m-k},\vec{0}\big)\in S$, визначену на D.

Асоційованою формою поверхні S є диференціальна k-форма $\nu = (g^{-1})^*(dt_{m-k+1}\wedge\ldots\wedge dt_m)$ на U. Поверхнева міра другого типу на S, індукована мірою λ_m та нормованою асоційованою формою $\omega(\vec{x}) = \dfrac{\nu(\vec{x})}{\|\nu(\vec{x})\|}$, збігається з класичною площею:

$$\sigma_\omega(A) = \iint\limits_{g_D^{-1}(A)} \sqrt{\det[g_D{}'(\vec{x})^T g_D{}'(\vec{x})]}\, d\vec{x}, \qquad A \in \mathcal{B}(S). \tag{3}$$

У випадку, коли поверхня S є графіком функції $f\colon D \to \mathbb{R}$ класу C_b^2, $D \subset \mathbb{R}^{m-1}$, функцію $g\colon D \times (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^m$ можна задати рівністю $g(z_1, \dots, z_{m-1}, t) = (z_1, \dots, z_{m-1}, t + f(\vec{z}_{m-1}))$, і тоді формула (3) перетвориться у загальновідому формулу площі поверхні:

$$\sigma_\omega(A) = \iint\limits_{\pi_{m-1}(A)} \sqrt{1 + \|\mathbf{grad} f(\vec{x})\|^2}\, d\vec{x}, \qquad A \in \mathcal{B}(S),$$

де π_{m-1} — оператор проектування на перші $m-1$ координат.

Розглянуто також приклад ріманового многовиду з рівномірною структурою (з модельним простором $\mathbb{R}^m$). Нехай задано ріманів многовид M і вкладена в його компактну підмножину $\overline{U}$ замкнена поверхня S, тобто $S = g\big(N \times \{\vec{0}\}\big)$, де $g\colon N \times D \to U \subset M$ — C_b^2-ізоморфізм, N — многовид з обмеженою структурою, моделлю якого є $\mathbb{R}^{m-k}$, D — відкритий окіл нуля в $\mathbb{R}^k$. Тоді S також являє собою ріманів многовид з рімановим тензором, що індукується вкладенням. На $\overline{U}$ ріманів тензор T задає міру об'єму V, а індукований тензор $\widetilde{T}$ визначає міру об'єму $\widetilde{V}$ на S.

Диференціальна k-форма $\nu = (g^{-1})^* P^*(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)$ на U, де $P\colon N \times D \to$ $\to D$ — проекція на другу координату, є асоційованою формою поверхні S. Для асоційованої k-форми ω, отриманої нормуванням ν (за рімановою нормою), асоційована з мірою об'єму V поверхнева міра другого типу співпадає з мірою об'єму $\widetilde{V}$ на S, що обґрунтовує адекватність конструкції.

Четвертий розділ присвячено дослідженню слабкої диференційовності мір уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою. Отримано ряд критеріїв для слабкої диференційовності. Основним результатом розділу є узагальнення критерію В.І. Богачова слабкої диференційовності, який описує диференційовність міри μ через ліпшицевість функцій $t \mapsto \mu_t(A)$, $A \in \mathcal{B}(M)$.

Для борелівської міри μ на банаховому многовиді M з рівномірною структурою і обмеженого векторного поля X з потоком Φ_t розглядається зсув $\mu_t = \mu \circ \Phi_t$ міри μ вздовж X. Відомими є означення неперервності та диференційовності міри уздовж векторного поля, що узагальнюють відповідні властивості за напрямком.

Означення 4.1. *Борелівська μ називається неперервною вздовж векторного поля X, якщо*

$$\lim_{t \to 0} \|\mu_t - \mu\| = 0.$$

Означення 4.2. *Міра μ називається диференційовною за Фоміним (в сильному сенсі) вздовж векторного поля X, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{B}(M)$ функція $t \mapsto \mu_t(A)$ є диференційовною на $\mathbb{R}$.*

Означення 4.3. *Міра μ називається диференційовною за Скороходом (в слабкому сенсі) вздовж векторного поля X, якщо для кожної функції $f \in C_b(M)$ функція*

$$F_f(t) = \int_M f\big(\Phi_{-t}(x)\big)\,\mu(dx) = \int_M f\,d\mu_t$$

є диференційовною на $\mathbb{R}$.

Наступні два критерії демонструють зв'язок між сильною та слабкою диференційовністю.

Теорема 4.1. *Міра μ диференційовна за Фоміним вздовж векторного поля X тоді і тільки тоді, коли існує така міра ν на $\mathcal{B}(M)$, що*

$$\mu_t(A) = \mu(A) + \int_0^t \nu_s(A)\,ds, \qquad \forall A \in \mathcal{B}(M),\ t \in \mathbb{R}.$$

і при цьому виконується одна з двох умов: ν неперервна вздовж X або ν абсолютно неперервна відносно μ. При цьому $d_X\mu = \nu$.

Теорема 4.2. *Наступні умови є еквівалентними:*
1) Міра μ диференційовна за Скороходом уздовж векторного поля X.
2) Існує така міра ν на $\mathcal{B}(M)$, що для всіх множин $A \in \mathcal{B}(M)$ і всіх $t \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\mu_t(A) = \mu(A) + \int_0^t \nu_s(A)\,ds.$$

3) Існує така міра ν на $\mathcal{B}(M)$, що для всіх функцій $f \in C_b(M)$ виконується рівність

$$\int_M f(x)\,(\mu_t - \mu)(dx) = \int_0^t \int_M f\big(\Phi_{-s}(x)\big)\,\nu(dx)\,ds, \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

4) Існує міра така ν на $\mathcal{B}(M)$, що рівність (4) *виконується для будь-якої обмеженої борелівської функції f на M.*
При цьому міра ν, визначена в умовах 2-4, збігається з похідною Скорохода міри μ.

Таким чином сильна диференційовність міри μ еквівалентна її слабкій диференційовності при абсолютно неперервній відносно μ похідній Скорохода

$d_X\mu$ (або неперервній вздовж X).

Для випадку, коли міра є радонівською, має місце також послаблений варіант останнього критерію.

Наслідок 4.1. *Нехай міра є μ радонівською, $\mathcal{F} \subset C_b(M)$ — деякий клас функцій, що розділяє точки M (тобто для будь-яких різних точок $x, y \in M$ існує така функція $f \in \mathcal{F}$, що $f(x) \neq f(y)$). Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) Міра μ диференційовна за Скороходом уздовж X і має радонівську похідну Скорохода.

2) Існує радонівська міра ν, для якої рівність (4) *виконується для всіх функцій $f \in \mathcal{F}$.*

3) Існує така радонівська міра ν на M, що для будь-якої функції $f \in \mathcal{F}$ функція $F_f(t) = \int_M f\, d\mu_t$ є диференційовною на $\mathbb{R}$ і при цьому $F_f'(t) = \int_M f\, d\nu_t$.

Міра ν з 2 і 3 є похідною Скорохода від μ.

Справедливим є також критерій диференційовності через формулу інтегрування частинами.

Наслідок 4.2. *Нехай простір $C_b^1(M)$ розділяє точки многовиду M, а μ та ν — радонівські міри на M. Тоді μ є слабко диференційовною уздовж обмеженого векторного поля X і $d_X\mu = \nu$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $f \in C_b^1(M)$ має місце рівність*

$$\int\limits_M f\, d\nu = -\int\limits_M \partial_X f\, d\mu.$$

Наступний результат є узагальненням критерію слабкої диференційовності, отриманого В.І. Богачовим для випадку диференційовності за напрямком на лінійно опуклих просторах. Відповідно до вказаного критерію слабка диференційовність міри μ є еквівалентною ліпшицевості всіх функцій $t \mapsto \mu_t(A)$, де $A \in \mathcal{B}(M)$. Наведено варіанти критерію для банахового простору та банахового многовиду з рівномірною структурою.

Теорема 4.3. *Нехай M — банахів простір, μ — знакозмінна скінченна радонівська міра на $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$, X — векторне поле класу C^1 на M. І нехай існує число $L > 1$ таке, що для кожної точки $x \in M$ виконуються нерівності $\|X(x)\| \leqslant L$, $\|X'(x)\| \leqslant L$. Тоді міра μ є диференційовною за Скороходом вздовж X в тому і тільки тому разі, коли існує таке число $\gamma > 0$, що для кожної множини $A \in \mathcal{A}$ існує таке $c(A)$, що:*

$$\big|\mu_t(A) - \mu(A)\big| \leqslant c(A)\,|t|, \qquad \forall t \in [-\gamma, \gamma].$$

Теорема 4.4. *Нехай банахів многовид M з рівномірним атласом $\Omega = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$ допускає розбиття одиниці класу C^1, X — векторне поле класу $C_b^1(M)$, μ — знакозмінна скінченна радонівська міра на $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$. Тоді міра*

μ диференційовна за Скороходом вздовж X в тому і тільки тому разі, коли існує таке число $\gamma > 0$, що для кожного $A \in \mathcal{A}$ існує $c(A)$ таке, що:

$$\left|\mu_t(A) - \mu(A)\right| \leqslant c(A)\,|t|, \qquad \forall t \in [-\gamma, \gamma].$$

Як наслідок маємо, що на банаховому многовиді з рівномірним атласом, що допускає розбиття одиниці класу C^1, слабка похідна радонівської міри є також радонівською.

Автор висловлює подяку своєму науковому керівникові Ю.В. Богданському за постановку задачі та цінні поради.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню борелівських мір на банахових многовидах з обмеженою структурою. Основні результати роботи:

1. Отримано узагальнення критерію В.І. Богачова слабкої диференційовності за напрямком на лінійно опуклих просторах для випадку диференційовності уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою.
2. Запроваджено поняття асоційованої диференціальної форми та строго трансверсального набору векторних полів для поверхонь скінченної корозмірності, що вкладені у банахові многовиди з обмеженою структурою.
3. Запропоновано метод побудови асоційованих поверхневих мір першого та другого типів. Виявлено достатні умови існування відповідної поверхневої міри.
4. Доведено теорему "про узгодженість", тобто однозначність задання поверхневої міри другого типу асоційованою диференціальною формою, незалежно від набору векторних полів, використаних при побудові.
5. Показано транзитивність асоційованих поверхневих мір. Показано, що при подвійному вкладенні поверхні S у многовид M (S вкладена у Σ, що в свою чергу вкладена у M) безпосередня побудова поверхневої міри на S при розгляді її вкладення в M призводить до того ж результату, що і двоетапна побудова через поверхневу міру на Σ.
6. Обґрунтовано адекватність запропонованої конструкції на прикладі скінченновимірного простору та ріманова многовиду.

Публікації за темою дисертації:

1. Моравецька К. В. Диференційовність борелівських мір уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою // Укр. мат. журн. — 2016. — т.68, № 10. — С. 1348–1364 (входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, **Web of Science**, MathSciNet, zbMATH).

2. Богданский Ю.В., Моравецкая Е. В. Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. — 2017. — т. 69, № 8. — С. 1030–1048 (входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, **Web of Science**, MathSciNet, zbMATH). Особисті внески співавторів є рівноцінними.
3. Богданский Ю.В., Моравецкая Е. В. Транзитивность поверхностных мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. — 2017. — т. 69, № 10. — С. 1299–1309 (входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, **Web of Science**, MathSciNet, zbMATH). Особисті внески співавторів є рівноцінними.
4. Моравецька К. В. Альтернативна конструкція поверхневих мір у скінченновимірних просторах та її узгодженість із класичним підходом // Наукові вісті НТУУ "КПІ" — 2017, № 4. — С. 66–72 (входить до міжнародних наукометричних баз WorldCat, OpenAIRE, РІНЦ та EBSCO).
5. Моравецька К. В. Конструкція поверхневих мір на поверхнях, укладених у ріманові багатовиди з рівномірною структурою // Сист. досл. та інф. техн. — 2017, № 4. — С. 130–138 (входить до міжнародних наукометричних баз Index Copernicus, DOAJ, ВІНІТІ, РІНЦ та EBSCO).
6. Моравецька К. В. Критерій слабкої диференційовності мір вздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою. Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 16-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2014, м. Київ, 26–30 травня 2014 року, Київ : ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ", 2014. с. 126.
7. Моравецкая Е. В. Слабая дифференцируемость борелевских мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой. Національні наукові обрії: проблеми, перспективи, новації : матеріали Всеукраїнської заочної науково-практичної конференції "Національні наукові обрії: проблеми, перспективи, новації", м. Харків, 26–27 грудня 2016 року / Наукове партнерство "Центр наукових технологій". — Харків : НП "ЦНТ", 2016. С. 45–49.
8. Богданский Ю. В., Моравецкая Е. В. Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой. Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, м. Київ, 7–10 жовтня 2017 року, Київ : НТУУ "КПІ", 2017. т. 1. С. 176–180. Особисті внески співавторів є рівноцінними.

АНОТАЦІЯ

Моравецька К.В. Міри на банахових многовидах з рівномірною структурою — рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз"

— Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ, 2018.

Дисертація присвячена диференційовним мірам на банахових многовидах з рівномірною структурою.

Запропоновано метод побудови асоційованих мір на поверхнях скінченної корозмірності, вкладених у банахів многовид з рівномірною структурою. Введено поняття асоційованої диференціальної форми поверхні та строго трансверсального до поверхні набору векторних полів. Доведено теорему “про узгодженість”, згідно з якою поверхнева міра задається однозначно асоційованою диференціальною формою поверхні. Показано транзитивність запропонованої конструкції. На прикладі міри Лебега в скінченновимірному просторі $\mathbb{R}^n$ та міри об’єму на рімановому многовиді з рівномірною структурою обґрунтовано її адекватність.

Отримано узагальнення низки результатів з теорії диференційовних мір на лінійних просторах на випадок банахових многовидів з рівномірною структурою. Доведено критерій слабкої диференційовності міри уздовж обмеженого векторного поля, що узагальнює відомий результат В.І. Богачова.

Ключові слова: банахів многовид з рівномірною структурою, борелівська міра, диференційовність мір уздовж векторних полів за Фоміним та за Скороходом, поверхнева міра, вкладена поверхня, асоційована форма поверхні, трансверсальний набір векторних полів.

АННОТАЦИЯ

Моравецкая Е.В. Меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой — рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.01 — “Математический анализ” — Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского”, Киев, 2018.

Диссертация посвящена дифференцируемым мерам на банаховых многообразиях с равномерной структурой.

Предложено метод построения ассоциированных мер на поверхностях конечной коразмерности, вложенных в банахово многообразие с равномерной структурой. Введено понятие ассоциированной дифференциальной формы поверхности и строго трансверсального к поверхности набора векторных полей. Доказано теорему “про согласованность”, в соответствии с которой поверхностная мера задается однозначно ассоциированной дифференциальной формой поверхности. Показано транзитивность предложенной конструкции. На примере меры Лебега в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ и меры объема на римановом многообразии с равномерной структурой обосновано ее адекватность.

Получено обобщение ряда результатов классической теории дифференцируемых мер на линейных пространствах на случай банаховых многообразий с равномерной структурой. Доказано критерий слабой дифференцируемости меры вдоль ограниченного векторного поля, который обобщает известный результат В.И. Богачева.

Ключевые слова: банахово многообразие с равномерной структурой, борелевская мера, дифференцируемость мер вдоль векторных полей по Фомину и по Скороходу, поверхностная мера, вложенная поверхность, ассоциированная форма поверхности, трансверсальный набор векторных полей.

ABSTRACT

Moravetska K.V. Measures on Banach manifolds with uniform structure – Manuscript.

PhD Thesis in specialty 01.01.01 "Mathematical Analysis" – National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to differentiable measures on Banach manifolds with uniform structure. A construction of associated surface measures on embedded surfaces with finite codimension is proposed. A criterion for weak differentiability of measures is generalized to the case of differentiation along vector fields on Banach manifolds with uniform structure.

The main part of the thesis consists of four sections. Section 1 is devoted to the review of works related to the topic of the dissertation research. A class of Banach manifolds with a special structure, namely Banach manifolds with uniform structure is considered, and some of their properties are indicated. Various existing approaches to the definition of differentiable measures are indicated and an overview of some known results on the theory of measure differentiability is presented. The Fomin and Skorokhod differentiability along directions and along vector fields on linear spaces and nonlinear manifolds is considered, as well as the connection between them is determined. An overview of approaches to the construction of surface measures and surface integration in infinite-dimensional Hilbert spaces and nonlinear manifolds is presented, several variants of the generalization of the Gauss-Ostrogradsky formula are presented.

Section 2 presents the construction of surface measures in Banach manifolds with uniform structure. A method for constructing associate measures of the first and second type on an embedded surface of finite codimension is proposed.

The concepts of an embedded surface of finite codimension, an associated surface form and strictly transversal to the surface set of vector fields are introduced. Examples are given and some elementary properties are noted.

For a Borel measure on a Banach manifold with bounded structure a construction of the associated surface measure on embedded surface is proposed with the usage of strictly transversal to the surface set of mutually commuting vector fields. Under the action of the flow of a given set of vector fields, any subset of the surface can be transformed into a certain area on a manifold for which the initial measure is determined. Passing to the limit yields the value of the desired surface measure (the first type).

Sufficient conditions for the existence of a first type surface measure are given. The concepts of a coherent and coherent in the broad sense triple $(S, \vec{Z}, \mu)$ are introduced (the triple consists of a surface, a set of vector fields, and measure) for which a surface measure is defined.

Some properties of the proposed construction are proved. The main result of the section is a consistency theorem, according to which in case of Banach manifold with uniform structure the first type surface measure depends only on associated differential form and does not depend on a specific strictly transversal set of vector fields used during construction. Due to this property, the concept of surface type of the second type, independent of a set of vector fields, is correctly introduced.

Section 3 deals with the study of the transitive properties of associated surface measures and the study of the coherence of the proposed construction with classical results. The case of double embedding of surfaces is considered, that is, the situation when the Σ is an embedded into M surface of finite codimension and the surface S is embedded into Σ. In this case, S can also be regarded as a surface (with finite codimension) embedded in M. It is proved that the proposed construction of surface measures is transitive, that is, the direct construction of the surface measure on S when considering its embedding in M leads to the same result as the two-stage construction with the surface measure on Σ.

Two examples of the usage of proposed construction of associated surface measures are considered. The surface measure associated with the Lebesgue measure is constructed on a parametrically defined surface in a finite-dimensional space $\mathbb{R}^n$, which, in the case of normalization, coincides with the classical area. For the Riemann volume measure on a Riemann manifold with uniform structure first and second type associated surface measures are obtained for embedded Riemann submanifold. It is shown that the obtained measure coincides with the volume measure on the surface given by the induced tensor. Thus, the adequacy of the proposed approach to the construction of surface measures on finite-dimensional surfaces in infinite-dimensional spaces is substantiated.

Section 4 is devoted to the study of the measure differentiability along vector fields. Plenty of results from the classical theory, which is based on measure shifts along constant direction, is generalized to the case of shifts along integral curves of vector fields. In particular, for the Radon measure, the criterion of differentiability through the integration by parts formula is obtained, where the derivative is transferred from function to measure.

The main result of the last section is the criterion of weak measure differentiability along bounded vector field, which generalizes the known result of V.I. Bogachev, obtained for differentiability along direction on a linear space. In accordance with this criterion, the weak differentiability of the measure μ is equivalent to the Lipschity of all shift functions $t \mapsto \mu_t(A)$.

KEYWORDS: Banach manifold with uniform structure, Borel measure, Fomin and Skorokhod measure differentiability along vector fields, surface measure, embedded surface, associated surface form, transversal set of vector fields.