

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ-З

КУРСОВА РОБОТА

Тема «Перехідні процеси в електричних ланцюгах»

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 171 «Електроніка»,
спеціалізаціями «Електронні системи і компоненти»,
«Електронні прилади та пристрої»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Теорія електричних кіл: Курсова робота. Тема «Перехідні процеси в електричних ланцюгах» [електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», спеціалізацій «Електронні системи і компоненти», «Електронні прилади та пристрої» / КПІ імені Ігоря Сікорського; уклад.: В.Я. Ромашко, Л.М. Батрак. – Електронні текстові данні (1 файл: 1,14 Мбайт). – Київ : КПІ імені Ігоря Сікорського, 2019. – 41 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 01.04.2019 р.)
за поданням Вченої ради факультету (протокол № 03/2019 від 25.03.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ-3

КУРСОВА РОБОТА

Тема «Перехідні процеси в електричних ланцюгах»

Укладачі: *Ромашко Володимир Якович, д-р техн. наук, проф.*
Батрак Лариса Миколаївна, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор *Вербицький Є. В., канд. техн. наук, доц.*

Рецензенти: *Чадюк В. О., канд. техн. наук, доц.*

Посібник призначений для студентів, які навчаються за спеціальністю 171 «Електроніка» і тих, хто вивчає електротехніку та електроніку. Наводиться завдання на курсову роботу та методичні вказівки щодо її виконання. Курсова робота полягає в розрахунку перехідного процесу в електричному ланцюзі постійного струму операторним і класичним методами. Розглядаються методи розрахунків перехідних процесів в ланцюгах і наводяться приклади розв'язання таких задач.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ	5
МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ	8
КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ	10
ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ	17
ЗАВДАННЯ НА КУРСОВУ РОБОТУ	25
ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОБОТИ	27
ЛІТЕРАТУРА	40

ВСТУП

Навчальна програма курсу "Теорія електричних кіл" передбачає виконання студентами курсової роботи в четвертому семестрі.

Мета курсової роботи - закріплення теоретичних розділів курсу і придбання навиків самостійного застосування основних положень теорії при вирішенні конкретних завдань розрахунку електричних кіл.

Темою курсової роботи є розрахунок електричного кола, в якому відбувається комутація. Правильне і чітке виконання курсової роботи та її захист є хорошим підготовчим етапом для вивчення інших дисциплін спеціальності.

При виконанні курсової роботи використовуються матеріали теоретичних розділів попереднього семестру, в яких розглядалися лінійні кола. Після ознайомлення із завданням студентові необхідно повторити ті розділи курсу "Теорія електричних кіл", які необхідні для виконання курсової роботи, користуючись конспектом лекцій і вказаною літературою. Після цього можна приступати до розрахунків.

Представлені вказівки містять методичні поради по вивченню теорії, методику розрахунку перехідних процесів класичним і операторним методом, а також типові задачі з рішеннями і висновками, на які необхідно звернути особливу увагу. Рекомендується застосування ЕОМ при розрахунку та побудові графіків перехідного процесу.

При виконанні завдання рекомендується наступний порядок роботи.



1. За рекомендованими підручниками та методичними вказівками вивчається теоретичний матеріал відповідно до програми курсу.

2. Розглядається методика розрахунку перехідних процесів у розгалужених електричних колах.

3. Аналізується рішення типових завдань і здійснюється рішення свого варіанта.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Комутація – стрибкоподібна зміна структури електричного кола або параметрів його елементів. Комутація - це вмикання, вимикання, перемикавання елементів ланцюга, зміна параметрів елементів кола і т. п. Для більшості реальних процесів можна вважати, що комутація відбувається миттєво.

Комутація на схемах позначається у вигляді ключа зі стрілкою, що позначає замикання  або розмикання .

В лінійних колах комутація вважається ідеальною, тобто:

- 1) ключ представляє собою або розрив, або провід;
- 2) тривалість переходу електричного кола з одного стану в інше дорівнює нулю.

Перехідний процес - це електромагнітний процес переходу електричного кола від одного робочого режиму до іншого. Він виникає в моменти комутації. Таким чином перехідний процес в електричному колі - це процес зміни в часі струмів та напруг на елементах кола, які викликані комутацією.

Вважають, що перехідний процес виникає у момент часу $t = 0$.

Момент часу відразу після комутації позначають $t = (0_+)$, а момент часу безпосередньо перед комутацією $t = (0_-)$.

Вимушений режим – режим роботи електричного кола, який існує після закінчення перехідного процесу, внаслідок дії зовнішніх джерел енергії.

Усталений режим – вимушений режим електричного кола, при якому напруги і струми в ланцюзі є періодичними (зокрема постійними).

Вільний режим – режим роботи електричного кола, який існує тільки під час перехідного процесу, при відсутності в ньому зовнішніх джерел енергії.

Перехідний процес в лінійних ланцюгах можна розглядати як результат накладання двох процесів: вимушеного, який начебто виникає одразу після комутації і вільного, що існує тільки під час перехідного процесу.

Стала часу – час, протягом якого вільна складова перехідного процесу

зменшується в $e = 2,72$ рази, порівняно з початковими значеннями.

Для RL - ланцюга стала часу $\tau_L = L/R$.

Для RC - ланцюга стала часу $\tau_C = RC$.

Розмірність сталої часу – секунда.

Тривалість перехідного процесу – час, протягом якого в ланцюзі струми або напруги змінюються від одного робочого режиму до іншого. Теоретично перехідний процес триває нескінченно довго. У практичних розрахунках з похибкою до 3% вважають тривалість перехідного процесу дорівнює 3τ , де τ — стала часу ланцюга. У розрахунках з похибкою до 1 % тривалість перехідного процесу приймають рівною 5τ .

Початкові умови - це струми та напруги в елементах ланцюга у момент комутації, $t = t(0_+)$.

Незалежні початкові умови - це струми в індуктивностях та напруги на ємностях у момент комутації $t(0_+)$.

Залежні початкові умови - напруги і струми в інших елементах електричного кола у момент комутації $t(0_+)$. Вони визначаються з незалежних початкових умов з використанням законів Кірхгофа.

Нульові початкові умови – якщо в момент комутації напруга на всіх ємностях і струми в усіх індуктивностях кола дорівнюють нулю.

Ненульові початкові умови - якщо хоча б в одному реактивному елементі кола незалежні початкові умови відрізняються від нуля.

Розрахунок перехідних процесів базується на використанні **законів комутації**.

Перший закон комутації (закон збереження потокозчеплення).

Магнітні потоки, зчеплені з індуктивностями кола, у момент комутації зберігають ті значення, які були перед комутацією, і починають змінюватись саме з цих значень.

Другий закон комутації (закон збереження заряду).

Електричні заряди на ємностях електричного кола у момент комутації зберігають ті значення, які були перед комутацією і починають змінюватися саме з цих значень.

На практиці, за виключенням особливих випадків (некоректні комутації), допустиме використання вказаних законів в іншому формулюванні.

Перший закон комутації: Струм в гілці з індуктивністю не може змінюватись стрибкоподібно і в момент комутації зберігає те значення, яке було безпосередньо перед комутацією

$$i_L(0_+) = i_L(0_-),$$

де $i_L(0_+)$ - струм в індуктивності відразу після комутації.

$i_L(0_-)$ - струм в індуктивності безпосередньо перед комутацією.

Другий закон комутації. Напруга на ємності не може змінюватись стрибкоподібно і в момент комутації зберігає те значення, яке було безпосередньо перед комутацією

$$u_C(0_+) = u_C(0_-),$$

де $u_C(0_+)$ - напруга на ємності відразу після комутації;

$u_C(0_-)$ – напруга на ємності безпосередньо перед комутацією.

Час перехідного процесу відраховується від моменту комутації.

МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

При аналізі перехідних процесів в електричних ланцюгах найчастіше застосовують наступні методи:

1. Класичний, що полягає у безпосередньому інтегруванні диференціальних рівнянь, що описують електромагнітний стан ланцюга.

2. Операторний, що полягає у вирішенні системи алгебраїчних рівнянь відносно зображень шуканих змінних з подальшим переходом від знайдених зображень до оригіналів.

3. Метод змінних стану, що представляє собою упорядкований спосіб визначення електромагнітного стану ланцюга на основі рішення системи диференціальних рівнянь першого порядку, записаних у нормальній формі (формі Коші).

Класичний метод

Назва методу «класичний» відображає використання в ньому рішень диференціальних рівнянь з постійними параметрами методами класичної математики. Цей метод має фізичну наочність і зручний для розрахунку простих ланцюгів.

Класичний метод розрахунку перехідних процесів полягає у безпосередньому інтегруванні диференціальних рівнянь, що описують зміни струмів і напруг на ділянках кола у перехідному режимі.

Операторний метод

В основі операторного методу лежить перетворення Лапласа та операційне числення, відомі з курсу вищої математики. Операторний метод дозволяє проводити аналіз перехідних процесів при впливі напруг та струмів будь-якої форми і не вимагає визначення сталих інтегрування, що істотно спрощує аналіз електричних ланцюгів, порядок яких є вищим ніж перший.

Диференціальні рівняння відносно оригіналу (функції часу) замінюються алгебраїчними рівняннями відносно операторних зображень цих функцій часу. Систему рівнянь відносно зображень можна отримати використовуючи операторну схему заміщення, що враховує початкові умови.

В результаті рішення системи алгебраїчних рівнянь знаходять зображення шуканих функцій, а потім, застосовуючи операцію зворотного перетворення - оригінали, тобто шукані перехідні функції.

Метод змінних стану

Метод змінних стану ґрунтується на впорядкованому складанні та вирішенні системи диференціальних рівнянь першого порядку, які сформовані відносно похідних, тобто записані у вигляді, найбільш зручному для застосування чисельних методів інтегрування, реалізованих засобами обчислювальної техніки.

Рівняння елекромагнітного стану - це система рівнянь, які визначають режим роботи (стан) електричного кола.

Кількість змінних стану, а отже, число рівнянь стану дорівнює числу незалежних накопичувачів енергії.

До рівнянь стану висуваються дві основні вимоги:

- незалежність рівнянь;
- можливість відновлення на основі змінних стану (змінних, щодо яких записані рівняння стану) будь-яких інших змінних.

КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ

Основні положення розрахунку перехідного процесу класичним методом

Класичний метод аналізу перехідних процесів заснований на складанні системи диференціальних та алгебраїчних рівнянь з використанням рівнянь елементів і законів Кірхгофа для миттєвих струмів і напруг у ланцюгу:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}; \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}; \quad u_R(t) = Ri_R(t).$$

Для визначення шуканої змінної, систему одержаних рівнянь шляхом виключення інших змінних приводять до одного лінійного диференційного рівняння n -го порядку з постійними коефіцієнтами:

$$a_n \frac{d^n i_{\hat{e}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_{\hat{e}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 i_{\hat{e}}}{dt^2} + a_1 \frac{d i_{\hat{e}}}{dt} + a_0 i_{\hat{e}} = f_{\hat{e}}(t)$$

або

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s i_{\hat{e}}}{dt^s} = f(t),$$

де $i(t)$ - шукана змінна; $f(t)$ – зовнішні джерела енергії, що діють на електричний ланцюг.

З курсу математики відомо, що повне рішення такого лінійного диференціального рівняння визначається у вигляді суми двох складових:

$$i(t) = i'(t) + i''(t) = i_{\hat{a}^{\hat{e}}}(t) + i_{\hat{a}\hat{i}}(t).$$

Перша складова називається вільною та визначається як загальне рішення відповідного однорідного рівняння, яке одержане шляхом прирівнювання нулю правої частини $f(t) = 0$.

$$a_n \frac{d^n i_{\hat{e}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_{\hat{e}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 i_{\hat{e}}}{dt^2} + a_1 \frac{d i_{\hat{e}}}{dt} + a_0 i_{\hat{e}} = 0.$$

Для визначення загального рішення складають характеристичне рівняння, яке одержують шляхом заміни k -тої похідної на p^k . При цьому сама

змінна замінюється на одиницю.

Характеристичне рівняння

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0 = 0$$

є алгебраїчним рівнянням n – го ступеня і його корені p_k визначають загальне рішення однорідного диференціального рівняння:

$$i_{\text{дзв}}(t) = \sum_{k=1}^n A^k e^{p_k t},$$

де A_k - сталі інтегрування.

Рішення останнього рівняння записано для випадку не кратних коренів p_k .

Сталі інтегрування визначають використовуючи відомі незалежні початкові умови.

Зауважимо, що в однорідному диференціальному рівнянні права частина прирівнюється нулю, що фізично означає відсутність у ланцюзі зовнішніх джерел енергії. При цьому струми і напруги в гілках ланцюга будуть залежати лише від параметрів самого ланцюга, а також його початкових запасів енергії. Фізично очевидно, що для реальних ланцюгів вільна складова $i_{\text{віль}}(t)$ з часом прагнучиме до нуля. Ця складова існує лише під час перехідного процесу. Таким чином, вільна складова не залежить від виду зовнішніх джерел і її характер визначається тільки властивостями ланцюга, що виник після комутації.

Друга складова $i_{\text{вим}}(t)$ повного рішення диференційного рівняння називається вимушеною і є частковим рішенням неоднорідного диференціального рівняння (з ненульовою правою частиною).

З математики відомо, що вид часткового рішення визначається видом правої частини рівняння $f(t)$. Якщо $f(t)$ є періодичною функцією (зокрема $f(t) = \text{const}$), $i_{\text{вим}}(t)$ також буде періодичною функцією (зокрема $i_{\text{вим}}(t) = \text{const}$). У цьому випадку вимушений режим називають усталеним

$$i_{\text{вим}}(t) = i_{\text{уст}}(t).$$

Таким чином, вимушена складова обумовлена впливом зовнішніх джерел енергії. При $t \rightarrow \infty$ шукана змінна $i(t) \rightarrow i_{\text{вим}}(t)$.

Вимушену складову струму або напруги визначають аналізуючи усталений режим роботи ланцюга, що утворився після комутації. При цьому можна застосовувати будь-які відомі методи розрахунку. Вимушена складова залежить від виду джерела напруги і параметрів кола, яке утворилося після комутації.

Таким чином, закон зміни струму або напруги в перехідному режимі визначається такими факторами: схемою та параметрами елементів ланцюга, який утворився після комутації, зовнішніми джерелами енергії, а також початковими запасами енергії в реактивних елементах.

Методика розрахунку перехідного процесу класичним методом

1. Визначають незалежні початкові умови; для цього розраховується струм в індуктивностях і напруга на ємностях перед комутацією;
2. Визначають вимушені складові струмів і напруг після комутації (усталений режим);
3. Використовуючи закони Кірхгофа, складають систему рівнянь для миттєвих значень напруг і струмів після комутації, задаючись попередньо напрямком струмів в гілках;
4. Шляхом виключення усіх невідомих, крім шуканої величини, одержують диференційне рівняння для її визначення.
5. Складають характеристичне рівняння і визначають його корені;
6. Записують повне рішення шуканої величини як суму вимушеної і вільної складових. При цьому слід пам'ятати, що аналітичний вираз вільної складової залежить від виду коренів характеристичного рівняння;
7. Визначають сталі інтегрування, використовуючи початкові умови.

Приклад розрахунку перехідного процесу класичним методом

Знайти струми та напруги в ланцюзі (рис. 1) під час перехідного процесу, що виникає після комутації. Визначити їх аналітичні вирази при $U = 1000$ В, $R_1 = 120$ Ом, $R_2 = 50$ Ом, $R_3 = 100$ Ом, $L = 0.4$ Гн.

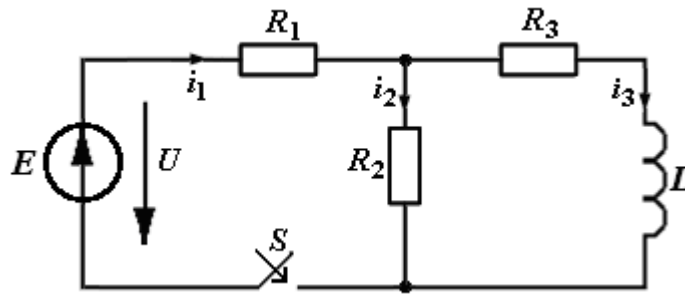


Рис. 1

1. Визначаємо незалежні початкові умови. Для цього розраховуємо струм в індуктивності перед комутацією. До комутації струм у електричному колі (у котушці індуктивності) був відсутній, тому що ключ S був розімкнутий:

$$i_L(0_-) = i_3(0_-) = 0.$$

2. Визначаємо вимушені складові струмів і напруг після комутації (усталений режим):

$$i_{1\text{â}} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 6.522 \text{ A};$$

$$i_{2\text{â}} = i_{1\text{â}} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{E R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} = 4.348 \text{ A};$$

$$i_{3\text{â}} = i_{1\text{â}} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{E R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} = 2.174 \text{ A};$$

$$U_{L\text{â}} = 0 \text{ В.}$$

3. Використовуючи закони Кірхгофа, складаємо систему рівнянь для миттєвих значень напруг і струмів після комутації:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3; \\ E &= i_1 R_1 + i_2 R_2; \\ E &= i_1 R_1 + i_3 R_3 + L \frac{di_3}{dt}. \end{aligned}$$

4. Шляхом виключення усіх невідомих, крім шуканої величини, знаходимо диференціальне рівняння для визначення шуканої величини i_3 :

$$i_2 = \frac{E - i_1 R_1}{R_2}.$$

Із третього рівняння:

$$i_1 = \frac{E - i_3 R_3 - L \frac{di_3}{dt}}{R_1}.$$

Тоді

$$i_2 = \frac{E - \left(\frac{E - i_3 R_3 - L \frac{di_3}{dt}}{R_1} \right) R_1}{R_2} = \frac{E - \left(E - i_3 R_3 - L \frac{di_3}{dt} \right)}{R_2} = \frac{i_3 R_3 + L \frac{di_3}{dt}}{R_2}.$$

Отримані значення i_2 і i_1 підставимо в перше рівняння:

$$\frac{E - i_3 R_3 - L \frac{di_3}{dt}}{R_1} = \frac{i_3 R_3 + L \frac{di_3}{dt}}{R_2} + i_3;$$

$$\frac{E - i_3 R_3 - L \frac{di_3}{dt}}{R_1} = \frac{i_3 R_3 + L \frac{di_3}{dt}}{R_2} + i_3;$$

$$L \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{di_3}{dt} + \left(\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2} \right) i_3 = E.$$

5. Складаємо характеристичне рівняння і визначаємо його корені.

Для визначення вільної складової $i_{3\text{віль}}$ треба розв'язати однорідне

диференційне рівняння:

$$L \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{di_{3\hat{a}^3\check{e}}}{dt} + \left(\frac{RR + RR + RR}{R_2} \right) i_{3\hat{a}^3\check{e}} = 0.$$

Характеристичне рівняння:

$$\delta L \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) + \left(\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2} \right) = 0.$$

Корінь характеристичного рівняння:

$$\delta = - \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{L(R_1 + R_2)} = -338.235 \text{ c}^{-1}.$$

6. Записуємо повне рішення шуканої величини як суму вимушеної і вільної складових:

$$i_3 = i_{3\hat{a}\check{e}i} + i_{3\hat{a}^3\check{e}} = \frac{ER_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} + A \cdot \hat{a}^{-\frac{t}{\tau}}.$$

7. Визначимо сталу інтегрування A , з урахуванням початкових умов. Оскільки у момент комутації ($t = 0$) початковий струм в котушці дорівнює нулю, одержуємо таке співвідношення:

$$\frac{ER_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} + A \cdot \hat{a}^{-\frac{t}{\tau}} = 0.$$

Отже

$$A = - \frac{ER_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}.$$

Стала часу електричного ланцюга при замиканні ключа S , є величиною оберненою до кореня характеристичного рівняння:

$$\tau = \frac{1}{|\delta|} = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{1}{338.235} = 0.00295 \text{ c}.$$

Таким чином, після замикання ключа S , струм в котушці в перехідному режимі змінюється за таким законом:

$$i_3 = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} - \left(\frac{ER_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} \right) \cdot \overset{\circ}{a}^{-\frac{t}{\tau}} =$$

$$= E \frac{R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} \left(1 - \overset{\circ}{a}^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Знаючи струм $i_3(t)$, визначаємо усі інші струми та напруги, користуючись законами Ома та Кірхгофа.

$$i_2 = \frac{i_3R_3 + L \frac{di_3}{dt}}{R_2}.$$

Якщо $L \frac{di_3}{dt} = E \frac{R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} \cdot -\frac{1}{\tau} \overset{\circ}{a}^{-\frac{t}{\tau}}$, то

$$i_2 = \frac{ER_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} - \left(\frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{ER_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} \right) \overset{\circ}{a}^{-\frac{t}{\tau}}.$$

$$i_2(t) = 4.348 + 1.535 \cdot e^{-338.325t} \text{ A.}$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = 4.348 + 1.535e^{-338.235t} + 2.174 - 2.174e^{-338.235t} =$$

$$= 6.522 - 0.639e^{-338.235t}.$$

$$u_L(t) = i_2R_2 - i_3R_3 = 50(4.348 + 1.535e^{-338.235t}) - 100(2.174 - 2.174e^{-338.235t}) =$$

$$= 294.118e^{-338.235t}.$$

10. Струми та напруги під час перехідного процесу

$$i_1(t) = i_{1\overset{\circ}{a}\overset{\circ}{i}} + i_{1\overset{\circ}{a}\overset{\circ}{\bar{e}}} = 6,522 - 0,639 \cdot e^{-338.235t} \text{ A.}$$

$$i_2(t) = i_{2\overset{\circ}{a}\overset{\circ}{i}} + i_{2\overset{\circ}{a}\overset{\circ}{\bar{e}}} = 4.348 + 1.535 \cdot e^{-338.235t} \text{ A.}$$

$$i_3(t) = i_{3\overset{\circ}{a}\overset{\circ}{i}} + i_{3\overset{\circ}{a}\overset{\circ}{\bar{e}}} = 2.174 - 2.174 \cdot e^{-338.235t} \text{ A.}$$

$$u_L(t) = u_{L\overset{\circ}{a}\overset{\circ}{i}} + u_{L\overset{\circ}{a}\overset{\circ}{\bar{e}}} = 294.118 \cdot e^{-338.235t} \text{ B.}$$

ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ

Основні положення розрахунку перехідного процесу операторним методом

Операторний метод - це метод розрахунку перехідних процесів в електричних ланцюгах, заснований на перенесенні розрахунку перехідного процесу з області функцій дійсної змінної (часу t) в область функцій комплексної змінної (або операторної змінної), в якій диференціальні рівняння перетворюються на алгебраїчні.

Перетворення функцій дійсної змінної в операторну функцію проводиться за допомогою методів операційного числення:

- Задану функцію дійсної змінної $f(t)$ перетворюють спеціальним математичним прийомом у функцію комплексного змінного $F(p)$. При цьому $f(t)$ називають оригіналом, $F(p)$ – його зображенням. Замість вихідних диференціальних рівнянь одержують алгебраїчні рівняння для зображень;
- Отримані операторні рівняння розв'язують щодо комплексного змінного $F(p)$ для шуканої функції;
- Спеціальним математичним прийомом здійснюється перехід від функції комплексної змінної $F(p)$ до її оригіналу, тобто до шуканої функції часу $f(t)$.

Таким чином, складні математичні операції рішення диференціальних рівнянь замінюються рішенням простих - алгебраїчних рівнянь, записаних у операторної формі.

Для перетворення функції дійсного змінного $f(t)$ у функцію комплексного змінного $F(p)$ користуються перетворенням Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Слід зазначити, що між зображенням і оригіналом немає рівності, а є тільки відповідність.

В довідниках з математики наведено понад 1500 оригіналів та відповідних їм зображень. Найпоширеніші з них наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Оригінал	Зображення	Оригінал	Зображення
A	$\frac{A}{p}$	$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi + \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p - \alpha)}$	t	$\frac{1}{p^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$e^{j(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}$	$\int f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$

Заключним етапом розрахунку перехідних процесів операторним методом є знаходження оригіналу функції за її відомим зображенням. Це можна зробити за таблицями, наведеними у підручниках та довідниках.

При виконанні завдання слід скористатися аналітичним методом переходу від зображення до оригіналу, а саме за допомогою формули теореми розкладання:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \cdot e^{p_k t},$$

де $x(t)$ - струм або напруга;

n – порядок диференційного рівняння електричного ланцюга.

Методика розрахунку перехідного процесу операторним методом

1. Визначають незалежні початкові умови;
2. Переходять до операторної схеми заміщення, в якій пасивні елементи замінюють відповідними операторними опорами, а джерела струму і напруги їх відповідними операторними зображеннями.

При цьому слід врахувати, що на місці реактивних елементів крім їх операторних опорів з'являються додаткові джерела енергії, що враховують початкові запаси енергії в цих реактивних елементах.

3. Знаходять операторні зображення струмів і напруг в ланцюзі одним з методів розрахунку електричного кола шляхом рішення звичайних алгебраїчних рівнянь та їх систем;
4. Переходять від знайдених зображень струмів і напруг до функцій дійсної змінної за допомогою методів операційного числення.

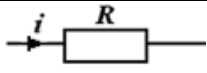
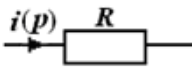
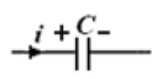

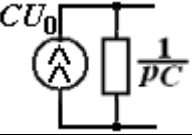
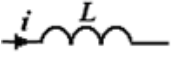
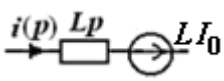
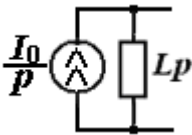
Обчислення оригіналу за формулою теореми розкладання слід вести в такій послідовності:

- 1) Прирівнюючи $H(p)$ нулю, визначають корені одержаного рівняння p_1, p_2, p_3 і т. д.;
- 2) Визначають похідну знаменника дроби $H(p)$;
- 3) Обчислюють чисельник $G(p)$ та $H(p)$, підставляючи в нього почерзі корені p_1, p_2, p_3, \dots ;
- 4) Визначають оригінал $f(t)$, проводячи обчислення окремих доданків і підсумовуючи їх.

Порядок складання операторної схеми заміщення

Для знаходження зображення шуканої функції часу доцільно перейти до операторної схеми заміщення. Для цього у схемі, що утворилась після комутації елементи електричного ланцюга замінюють їх операторними зображеннями, як показано в табл. 2.

Таблиця 2

Елемент електричного кола	Зв'язок між миттєвими значеннями струму і напруги	Зв'язок між операторними зображеннями струму і напруги	Операторна схема заміщення ділянки
	$U_R = iR$	$U_R(p) = I(p)R$	
	$U_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_C(0)$	$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_C(0)}{p}$	
			
	$U_L = L \frac{di}{dt}$	$U_L(p) = pLI(p) - Li(0)$	
			

За нульових початкових умов в операторних схемах відсутні внутрішні джерела енергії LI_0 і $\frac{CU_0}{p}$.

Приклад розрахунку перехідного процесу операторним методом

Знайти струми та напруги в елементах ланцюга (рис. 1) під час перехідного процесу, викликаного комутацією.

1. Визначаємо незалежні початкові умови. До комутації ключ S був розімкнутий і струм у котушці індуктивності відсутній:

$$i_L(0_-) = i_3(0_-) = 0 .$$

2. Представимо операторну схему заміщення кола (рис. 2) для після комутаційного режиму.

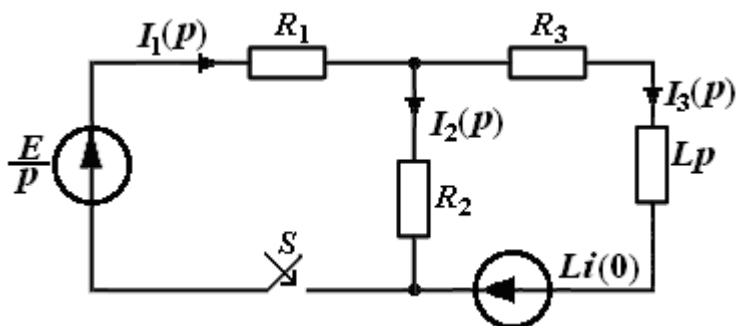


Рис.2.

Так як струм в індуктивності до комутації був рівний нулю, внутрішня ЕРС $Li(0)$ також рівна нулю, в подальших розрахунках вона не враховується.

3. Для знаходження струмів та напруг в операторній формі складемо рівняння для знаходження струму в індуктивності, користуючись правилом «чужого плеча»:

$$I_3(p) = I_1(p) \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + pL} .$$

Вхідний струм можна знайти як:

$$I_1(p) = \frac{\frac{E}{p}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot (R_3 + pL)}{R_2 + R_3 + pL}} .$$

Вираз для струму в гілці з індуктивністю в операторній формі:

$$I_3(p) = \frac{\frac{E}{p}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot (R_3 + pL)}{R_2 + R_3 + pL}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + pL} =$$

$$= \frac{ER_2}{p(R_1R_2 + R_1R_3 + R_1Lp + R_2R_3 + R_2Lp)}.$$

$$I_3(p) = \frac{ER_2}{p(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) + L(R_1 + R_2)p^2}. \quad (*)$$

5. Для знаходження оригіналу $i_3(t)$ скористаємося теоремою розкладання. Введемо позначення:

$$G(p) = ER_2;$$

$$H(p) = p^2 \cdot L(R_1 + R_2) + p \cdot (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3);$$

$$H'(p) = 2p \cdot L(R_1 + R_2) + (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3).$$

$$i_3(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{ER_2}{2p_k L(R_1 + R_2) + (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} \cdot e^{p_k t} =$$

$$= \frac{ER_2}{2p_1 L(R_1 + R_2) + (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{ER_2}{2p_2 L(R_1 + R_2) + (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} e^{p_2 t}.$$

Визначаємо корені поліному знаменника при $H(p) = 0$. Ці корені зручно визначати з виразу (*):

$$p_1 = 0; \quad \delta_2 = -\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{L(R_1 + R_2)} = -338.235 \text{ c}^{-1}.$$

$$\tau = \frac{1}{p_2} = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{1}{338.235} = 0.00295 \text{ c}.$$

Струм під час перехідного процесу:

$$i_3(t) = \frac{ER_2}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} \cdot e^0 +$$

$$+ \frac{ER_2}{2 \cdot \left(-\frac{L(R_1 + R_2)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \right) \cdot L(R_1 + R_2) + (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} e^{-\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{L(R_1 + R_2)}t}$$

$$i_3(t) = \frac{50000}{23000} e^0 - \frac{50000}{23000} e^{-338235t} = 2.174 - 2.174e^{-338235t}.$$

6. Вираз для струму в першій гілці в операторній формі:

$$I_1(p) = \frac{\frac{E}{p}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot (R_3 + pL)}{R_2 + R_3 + pL}} = \frac{E(R_2 + R_3 + pL)}{p(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_1Lp + R_2Lp)}.$$

$$I_1(p) = \frac{E(R_3 + R_2) + ELp}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)p + L(R_1 + R_2)p^2}.$$

Як видно з одержаного виразу, знаменник співпадає з отриманим раніше поліномом виразу (*). Отже корені при визначенні будь-якого параметру будуть однакові.

7. Для знаходження оригіналу $i_1(t)$ також скористаємося теоремою розкладання, вводячи позначення:

$$G(p) = p(EL) + E(R_3 + R_2);$$

$$H(p) = p^2 \cdot L(R_1 + R_2) + p \cdot (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3);$$

$$H'(p) = 2p \cdot L(R_1 + R_2) + (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3).$$

$$i_1(t) = \frac{p_1EL + E(R_3 + R_2)}{2p_1L(R_1 + R_2) + (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} \cdot e^{p_1t} +$$

$$+ \frac{p_2EL + E(R_3 + R_2)}{2p_2L(R_1 + R_2) + (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} e^{p_2t}$$

Струм $i_1(t)$ під час перехідного процесу:

$$i_1(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{E(R_3 + R_2)}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} \cdot e^k = \frac{U_0(R_3 + R_2)}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} \cdot e^0 +$$

$$+ \frac{U_0(R_3 + R_2) - \left(\frac{L(R_1 + R_2)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \right) U_0 L}{2 \cdot \left(-\frac{L(R_1 + R_2)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \right) \cdot L(R_1 + R_2) + (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} e^{-\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{L(R_1 + R_2)} t}.$$

$$i_1(t) = \frac{150000}{23000} e^0 - \frac{14706}{23000} e^{-338.235t} = 6.522 - 0.639e^{-338.235t}.$$

Значення знайдених струмів повністю співпадає зі значенням, одержаним класичним методом.

8. Струм $i_2(t)$ та напругу на котушці визначимо використовуючи закони Ома та Кірхгофа

$$i_2(t) = i_1(t) - i_3(t) = 6.522 - 0.639e^{-338.235t} - 2.174 + 2.174e^{-338.235t} =$$

$$= 4.348 + 1.535e^{-338.235t}.$$

$$u_L(t) = i_2R_2 - i_3R_3 = 50(4.348 + 1.535e^{-338.235t}) - 100(2.174 - 2.174e^{-338.235t}) =$$

$$= 294.118e^{-338.235t}$$

Струми та напруги під час перехідного процесу

$$i_1(t) = 6,522 - 0,639 \cdot e^{-338.235t} \text{ A.}$$

$$i_2(t) = 4.348 + 1.535 \cdot e^{-338.235t} \text{ A.}$$

$$i_3(t) = 2.174 - 2.174 \cdot e^{-338.235t} \text{ A.}$$

$$u_L(t) = 294.118 \cdot e^{-338.235t} \text{ B.}$$

ЗАВДАННЯ НА КУРСОВУ РОБОТУ

1. Для заданого електричного ланцюга (с. 39) розрахувати перехідний процес в усіх елементах при замиканні та розмиканні ключа S . Розрахунок провести класичним та операторним методом.

2. Побудувати у відповідному масштабі узгоджені часові діаграми струмів та напруг в усіх елементах електричного ланцюга.

3. Визначити сталу часу τ електричного ланцюга при замкненому та розімкненому стані ключа S .

4. Розрахувати тривалість перехідного процесу при замиканні та розмиканні ключа S .

ЗВІТ ПРО РОБОТУ ПОВИНЕН МІСТИТИ:

1) Титульний листок, на якому обов'язково вказується № варіанта та № залікової книжки;

2) Вступ, де наводяться короткі теоретичні відомості по темі роботи.

3) Формулювання завдання на роботу;

3) Схема електричного ланцюга, на якій вказано параметри усіх елементів і вибрані напрямки струмів;

4) Розрахунок перехідного процесу класичним методом:

- схема електричного ланцюга при замкненому ключі та її розрахунок;

- схема електричного ланцюга при розімкненому ключі та її розрахунок;

5) Розрахунок перехідного процесу операторним методом :

- операторна схема заміщення при замкненому ключі та її розрахунок;

- операторна схема заміщення при розімкненому ключі та її розрахунок;

б) Таблиця з формулами для визначення сталих часу, їх чисельні значення, а також тривалості перехідного процесу;

7) Графіки узгоджених часових діаграм струмів та напруг на елементах електричного ланцюга;

8) Висновки по роботі.

* ЗАУВАЖЕННЯ: Весь розрахунок ведеться у загальному вигляді. Аналітичні вирази для струмів та напруг треба одержувати у загальному вигляді, і лише при побудові графіків цих струмів та напруг в одержані аналітичні вирази підставляються параметри елементів схеми і у відповідному масштабі будують графіки.

ПАРАМЕТРИ ПАСИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Параметри пасивних елементів схеми наведені в табл. 3.

Таблиця 3

N вар	R_1 [Ом]	R_2 [Ом]	R_3 [Ом]	C [мкФ] L [мГн]	N вар	R_1 [Ом]	R_2 [Ом]	R_3 [Ом]	C [мкФ] L [мГн]
01	1	3	5	1	17	4	6	8	17
02	2	4	6	2	18	3	5	7	18
03	3	5	7	3	19	2	4	6	19
04	4	6	8	4	20	1	3	5	20
05	5	7	9	5	21	10	20	30	2
06	6	8	10	6	22	20	30	10	4
07	7	9	11	7	23	30	10	20	6
08	8	10	12	8	24	20	10	30	8
09	9	11	13	9	25	50	100	200	10
10	10	12	14	10	26	100	200	50	12
11	14	12	10	11	27	200	100	50	14
12	9	11	13	12	28	50	200	100	16
13	8	10	12	13	29	100	50	200	18
14	7	9	11	14	30	200	50	100	20
15	6	8	10	15	31	50	50	50	25
16	5	7	9	16	32	100	100	100	35

ПАРАМЕТРИ СХЕМИ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЛАНЦЮГА*Джерело енергії*

В якості джерела енергії залежно від № варіанта може використовуватись джерело напруги E або джерело струму J відповідно до табл. 4, де

$$E = 2 \text{ №}_{\text{ВАР}} [\text{В}]; J = \frac{1}{2} \text{ №}_{\text{ВАР}} [\text{А}].$$

Таблиця 4

	№ групи парний	№ групи непарний
№ варіанту парний	E	J
№ варіанту непарний	J	E

Номер варіанта для груп ДС співпадає з номером студента у списку відповідної групи N .

Для груп ДЕ номер варіанта дорівнює $33 - N$ (номер студента у списку).

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Розрахувати перехідний процес в усіх елементах електричного ланцюга (рис. 3) при замиканні та розмиканні ключа S .

Параметри елементів: $J = 1$ А; $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 100$ Ом; $R_3 = 50$ Ом; $C = 1$ мкФ.

Припускаємо, що напрямок струмів є таким як вказано на рис. 3

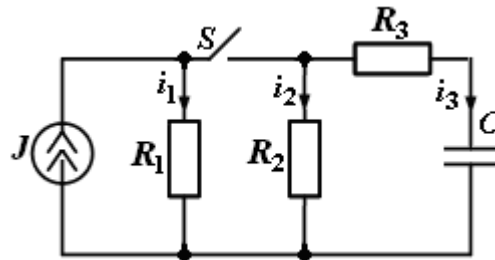


Рис. 3

Розрахунок перехідного процесу класичним методом

Замикання ключа

Після замикання ключа S схема електричного ланцюга має вигляд рис. 4.

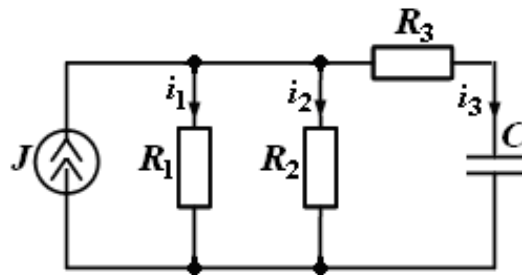


Рис. 4

Будемо шукати напругу на конденсаторі C як суму вимушеної u'_C та вільної u''_C складових:

$$u_C = u'_C + u''_C.$$

1. Вимушена складова u'_C співпадає з напругою на конденсаторі в усталеному режимі. Оскільки в усталеному режимі струм через конденсатор C не протікає, вимушена напруга на ньому буде співпадати з напругою на паралельно з'єднаних резисторах R_1 та R_2 .

$$u'_C = U'_C = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

2. Для знаходження вільної складової складемо диференціальне рівняння електричного ланцюга відносно напруги на конденсаторі u_C .

Струм i_3 співпадає із струмом конденсатора i_C , який у свою чергу пропорційний швидкості зміни напруги на конденсаторі

$$i_3 = i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Якщо позначити напругу на джерелі струму як $u_{ВХ}$, суму струмів i_1 та i_2 можна записати таким чином:

$$i_1 + i_2 = \frac{u_{\hat{a}\hat{o}}}{R_{12}},$$

$$\text{де } R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Напруга $u_{ВХ}$ співпадає з напругою на послідовно з'єднаних елементах C та R_3 , яку можна описати таким чином :

$$u_{\hat{a}\hat{o}} = u_C + u_{R_3} = u_C + i_3 R_3 = u_C + R_3 C \cdot \frac{du_C}{dt}.$$

У відповідності з першим законом Кірхгофа можна записати :

$$i_1 + i_2 + i_3 = J.$$

Або підставляючи одержані вище співвідношення :

$$\frac{\left(u_C + CR_3 \cdot \frac{dU_C}{dt} \right)}{\left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right)} + C \cdot \frac{du_C}{dt} = J.$$

Приводячи подібні, одержуємо остаточний вигляд диференційного рівняння електричного ланцюга відносно напруги на ємності u_C :

$$C \cdot \left(R_3 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} + 1 \right) \frac{du_C}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) u_C = J.$$

3. Для визначення вільної складової u_C'' треба розв'язати *однорідне* диференційне рівняння:

$$C \left(R_3 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} + 1 \right) \frac{du_C''}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} u_C'' = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння :

$$p \left[C \left(R_3 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} + 1 \right) \right] + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} = 0.$$

Корінь характеристичного рівняння :

$$p = - \frac{(R_1 + R_2)/R_1 \cdot R_2}{C [R_3 (R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2]/R_1 \cdot R_2} = - \frac{R_1 + R_2}{C [R_3 (R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2]}.$$

Стала часу електричного ланцюга при замиканні ключа S , є величиною оберненою до кореня характеристичного рівняння:

$$\tau_3 = \frac{1}{p} = C \frac{[R_3 (R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2]}{R_1 + R_2} = C \left(R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right).$$

4. Таким чином, напруга на конденсаторі в перехідному режимі описується таким виразом :

$$u_C = u_C' + u_C'' = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + A \cdot e^{-t/\tau_3}.$$

5. Визначимо сталу інтегрування A , з урахуванням початкових умов. Оскільки у момент комутації ($t = 0$) початкова напруга на конденсаторі

дорівнює нулю $u_C(0) = 0$, одержуємо таке співвідношення:

$$0 = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + A;$$

Отже

$$A = -J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

6. Таким чином, після замикання ключа S , напруга на конденсаторі C в перехідному режимі змінюється за таким законом :

$$u_C(t) = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-t/\tau_3} \right).$$

7. Знаючи напругу на конденсаторі $u_C(t)$, визначаємо усі інші струми та напруги, використовуючи співвідношення, одержані в п. 2.

Так струм i_3 :

$$i_3(t) = i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\left(R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right)} \cdot e^{-t/\tau_3}.$$

Аналогічно визначаємо інші струми та напруги.

Розмикання ключа

Після розмикання ключа електричний ланцюг розпадається на два взаємно не пов'язані ланцюги (рис. 5).

Оскільки ліва частина ланцюга не містить реактивні елементи, перехідний процес в ній буде відбуватися миттєво і одразу після комутації в резисторі R_1 встановлюється струм $i_1 = J$.

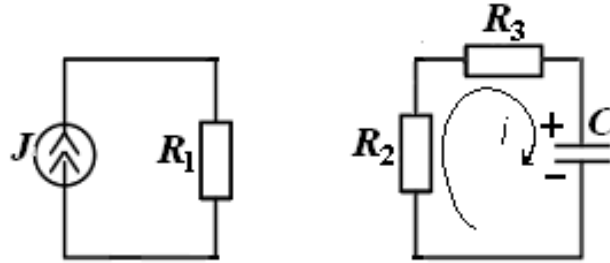


Рис. 5

Права частина ланцюга містить реактивний елемент – конденсатор C . Отже в ній буде відбуватися перехідний процес, який будемо шукати у вигляді суми вимушеної і вільної складових

$$u_C = u'_C + u''_C.$$

1. Оскільки після комутації у правій частині ланцюга зовнішні джерела енергії відсутні, вимушена напруга на конденсаторі $u'_C = 0$.

2. Для знаходження вільної складової складаємо диференціальне рівняння відносно напруги на конденсаторі u_C з урахуванням прийнятого напрямку струму i .

$$i(R_2 + R_3) + u_C = 0.$$

Оскільки $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$,

одержуємо остаточний вигляд диференціального рівняння:

$$C(R_2 + R_3) \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Оскільки зовнішні джерела енергії відсутні, диференціальне рівняння ланцюга є однорідним.

3. Складемо характеристичне рівняння і визначимо його корінь:

$$C(R_2 + R_3) \cdot p + 1 = 0,$$

$$p = -\frac{1}{C(R_2 + R_3)}.$$

Отже стала часу при розмиканні ключа:

$$\tau_p = \frac{1}{p} = C(R_2 + R_3).$$

4. Таким чином напруга на конденсаторі C в перехідному режимі описується таким виразом:

$$u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_p}}.$$

5. Визначимо сталу інтегрування з урахуванням початкових умов.

У момент комутації ($t = 0$) початкова напруга на конденсаторі $u_C(0)$ дорівнювала усталеній напрузі попереднього режиму:

$$u_C(0) = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Отже

$$A = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

6. Таким чином, напруга на конденсаторі після розмикання ключа S змінюється за таким законом :

$$u_C(t) = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_p}}.$$

7. Знаючи напругу на конденсаторі, визначаємо струм та напругу на інших елементах.

Струм в електричному колі:

$$i = i_C = C \frac{du_C}{dt} = -J \cdot \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{(R_2 + R_3)} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_p}}.$$

Знак мінус говорить про те, що реальний напрямок струму буде протилежний до вказаного на рис.

Напругу на резисторах R_2 та R_3 знаходимо відповідно як iR_2 та iR_3 .

Розрахунок перехідного процесу операторним методом

Замикання ключа

1. Переходимо до операторної схеми заміщення:

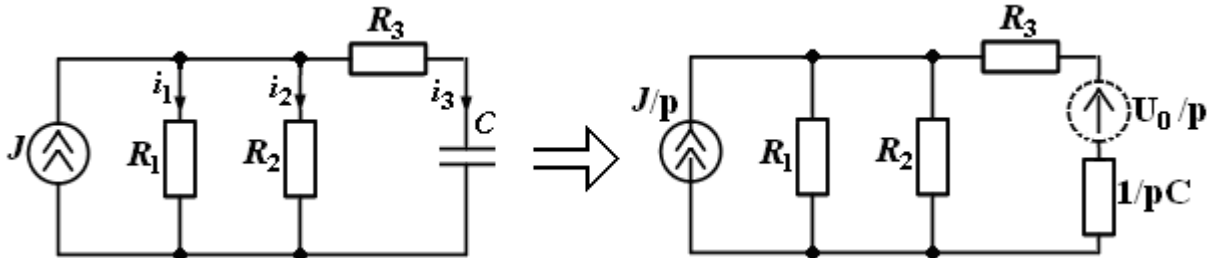


Рис. 6

Оскільки початкова напруга на конденсаторі у момент замикання ключа ($t = 0$) $u_C(0) = U_0 = 0$ в операторній схемі заміщення фактично відсутнє додаткове джерело напруги $\frac{U_0}{p}$.

2. Будемо шукати зображення напруги на конденсаторі як:

$$U_C(p) = I_3(p) \cdot \frac{1}{pC}.$$

3. Зображення струму $I_3(p)$ за методом чужого опору:

$$I_3(p) = \frac{J}{p} \cdot R_{12} \frac{1}{R_3 + pC + R_{12}},$$

де $R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

4. З урахуванням п. п. 2, 3 зображення напруги на конденсаторі :

$$U_C(p) = \frac{J}{p} \cdot \frac{R_{12}}{pC} \cdot \frac{1}{R_3 + \frac{1}{pC} + R_{12}} = \frac{J}{p} \cdot \frac{R_{12}}{pC(R_3 + R_{12}) + 1}.$$

5. Для знаходження оригіналу $u_C(t)$ скористаємося теоремою розкладання.

Вводимо позначення:

$$G(p) = J \cdot R_{12};$$

$$H(p) = p \cdot [pC(R_3 + R_{12}) + 1] = p^2 [C(R_3 + R_{12})] + p;$$

$$H'(p) = 2pC(R_3 + R_{12}) + 1.$$

Корені характеристичного рівняння $H(p) = 0$ будуть такими:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -\frac{1}{C(R_3 + R_{12})}; \quad \tau_3 = \frac{1}{p_2} = C(R_3 + R_{12}).$$

Відповідно до теореми розкладання:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \sum_{k=1}^2 \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{JR_{12}}{2p_1 C(R_3 + R_{12}) + 1} \cdot e^{p_1 t} + \frac{JR_{12}}{2p_2 C(R_3 + R_{12}) + 1} e^{p_2 t} = \\ &= JR_{12} \left(1 - e^{-t/\tau} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи, що $R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, одержаний вираз повністю співпадає з

виразом, одержаним класичним методом.

6. Усі інші струми та напруги можна визначити в часовій області з використанням одержаної напруги $u_C(t)$, аналогічно класичному методу. Можна також спочатку з операторної схеми заміщення визначити операторні зображення відповідних струмів та напруг, а потім з використанням теореми розкладання визначити їх оригінали. Наприклад, зображення напруги на резисторі R_3 :

$$U_{R_3}(p) = I_3(p) \cdot R_3.$$

Зображення напруги на резисторах R_1 та R_2 :

$$U_{R_{12}}(p) = I_3(p) \cdot \left(R_3 + \frac{1}{pC} \right) \text{ і т.д.}$$

Розмикання ключа

1. Операторна схема заміщення представлена на рис. 7.

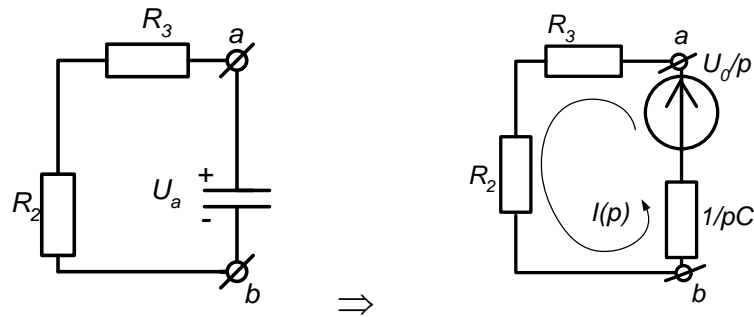


Рис. 7

У момент розмикання ключа на конденсаторі C була початкова напруга U_0 , яка дорівнює усталеній напрузі попереднього режиму $U_0 = J \cdot R_{12}$.

2. Зображення струму, що виникає в колі після розмикання ключа :

$$I(p) = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{1}{R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}} = \frac{U_0 \cdot C}{pC(R_2 + R_3) + 1} \cdot p$$

3. Зображення напруги на конденсаторі C , це є зображення напруги між точками a та b :

$$U_c(p) = \frac{U_0}{p} - I(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p[pC(R_2 + R_3) + 1]}$$

4. Для знаходження оригіналу $u_c(t)$ скористаємося теоремою розкладання. Оскільки зображення напруги $U_c(p)$ є сумою двох складових, теорему розкладання треба було б застосувати до кожної складової окремо.

Однак зображення першої складової є табличним, тобто $\frac{U_0}{p} \stackrel{\bullet}{=} U_0 \cdot \frac{1}{p}$.

Отже теорему розкладання застосуємо тільки для другої складової.

Вводимо позначення :

$$G(p) = U_0;$$

$$H(p) = p[pC(R_2 + R_3) + 1] = p^2C(R_2 + R_3) + p;$$

$$H'(p) = 2pC(R_2 + R_3) + 1.$$

Корені характеристичного рівняння $H(p) = 0$ будуть такими :

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -\frac{1}{C(R_2 + R_3)}; \quad \tau_p = \frac{1}{p_2} = C(R_2 + R_3).$$

Відповідно до теореми розкладання:

$$u_C(t) = U_0 - \sum_{k=1}^2 \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \cdot e^{p_k t} =$$

$$= U_0 - \frac{U_0}{2p_1 C(R_2 + R_3) + 1} \cdot e^{p_1 t} - \frac{U_0}{2p_2 C(R_2 + R_3) + 1} \cdot e^{p_2 t} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_p}}$$

Враховуючи, що $U_0 = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ запишемо остаточний вираз:

$$u_C = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_p}},$$

який співпадає з одержаним класичним методом.

Таким чином, результати одержані класичним та операторним методом повністю співпадають. Після одержання результатів у загальному вигляді, підставляємо чисельні значення параметрів елементів, розраховуємо параметри перехідного процесу і будуємо графіки.

Основні параметри перехідного процесу

Стан ключа S \ Параметр	τ , формула	τ , чисельне значення	τ_p , тривалість перехідного процесу ($t_{\text{ПН}} \approx 3\tau$)
Замкнений	$\tau_3 = C(R_3 + R_{12})$	$0.1 \cdot 10^{-3} \text{ c}$	$0.3 \cdot 10^{-3} \text{ c}$
Розімкнений	$\tau_p = C(R_2 + R_3)$	$0.15 \cdot 10^{-3} \text{ c}$	$0.45 \cdot 10^{-3} \text{ c}$

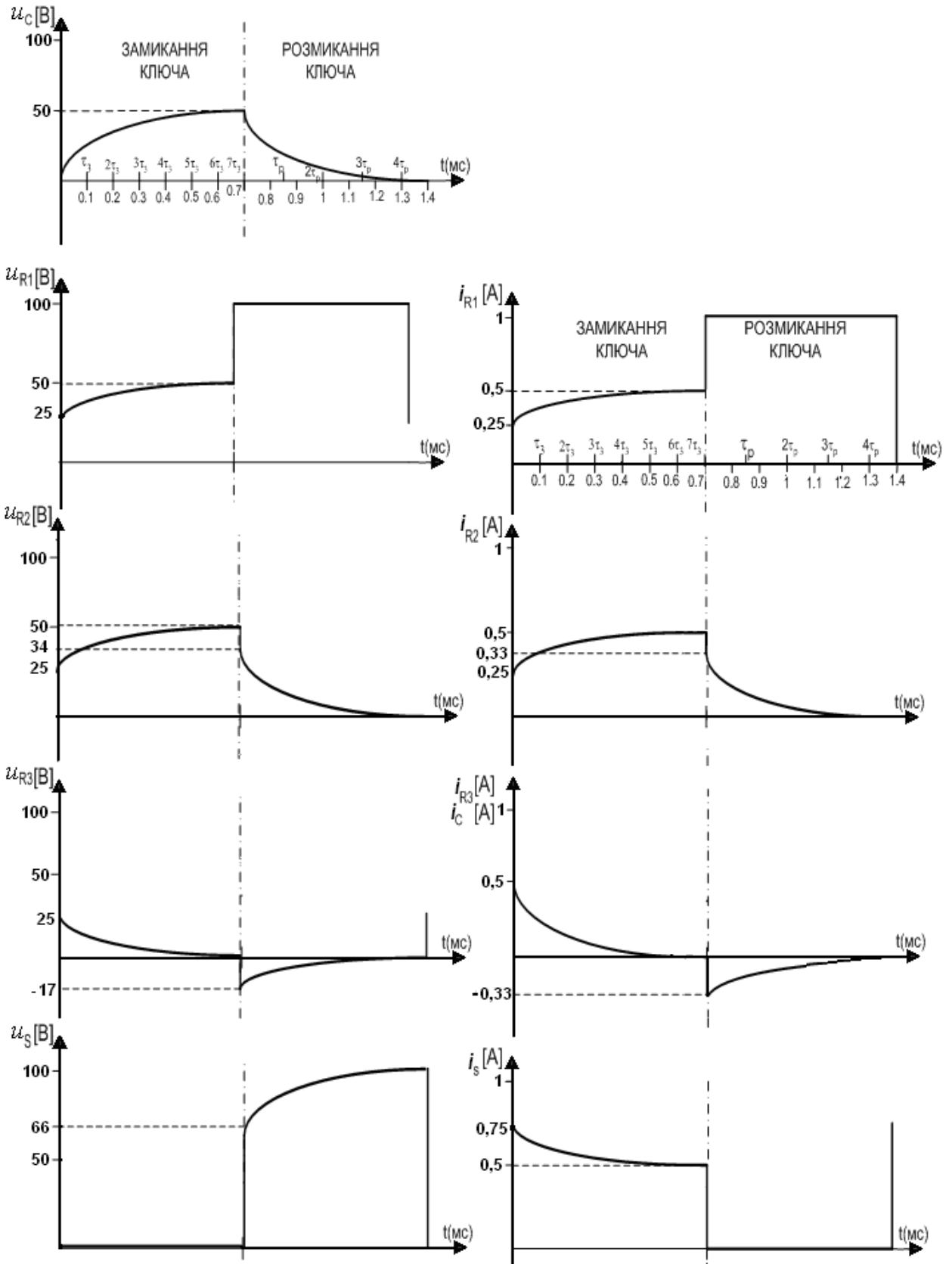
ВИСНОВКИ

Результати одержані класичним та операторним методом повністю співпадають.

При розрахунках класичним методом доводиться шукати сталі інтегрування з урахуванням початкових умов в реактивних елементах, що у загальному випадку ускладнює задачу. Так для визначення сталих інтегрування в електричному ланцюзі n - го порядку треба знати початкові умови в усіх n реактивних елементах, а також $(n - 1)$ їх похідні у момент комутації. При цьому задача визначення сталих інтегрування зводиться до розв'язання системи n алгебраїчних рівнянь з n невідомими сталими інтегрування. Однак для ланцюгів першого порядку ця задача є простою і знаходження сталої інтегрування зводиться до розв'язання лінійного алгебраїчного рівняння.

При розрахунках операторним методом сталі інтегрування визначати не доводиться, оскільки початкові умови враховуються в операторній схемі заміщення і, отже, в операторних рівняннях електричного ланцюга.

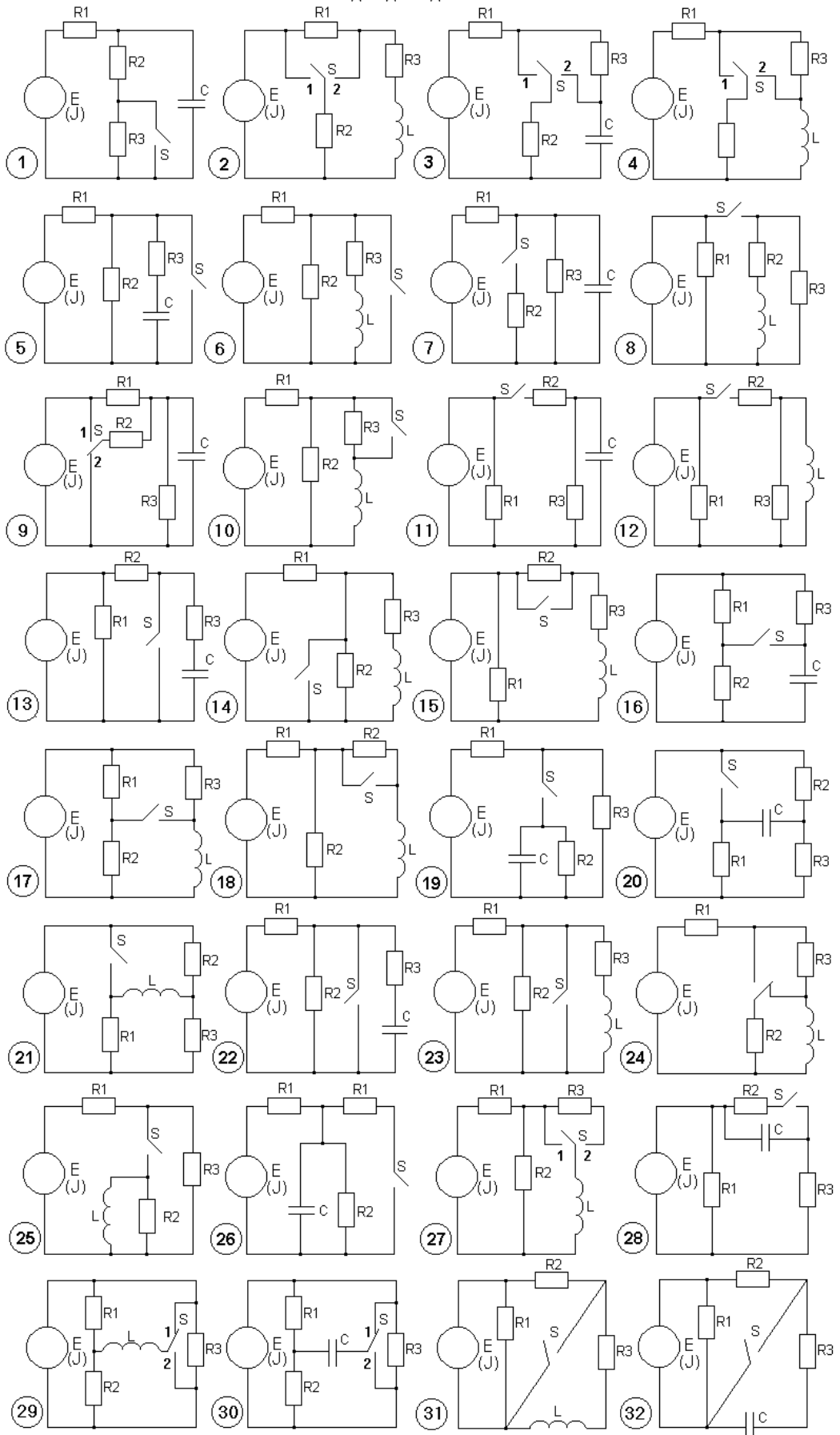
Складність розрахунків перехідних процесів класичним та операторним методом для електричних ланцюгів 1 - го порядку приблизно однакова. Однак для ланцюгів 2 - го та більш високих порядків складність розрахунків класичним методом зростає швидше, ніж операторним.



Часові діаграми напруг на елементах ланцюга

Часові діаграми струмів в елементах ланцюга

Схеми для дослідження



ЛІТЕРАТУРА

1. Конспект лекцій з дисципліни «Теорія електричних кіл». Частина III. – Перехідні процеси.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: учебн. для электротехн., энерг., приборостроит. спец. вузов. / Л. А. Бессонов. – 9 – е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая шк., 1996. – 638 с. Библиогр.: с. 632. – На пер. Теоретические основы электротехники. – 10 000 экз. – ISBN 5-06-002160-2.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: учебник. / Л. А. Бессонов. – 11 - е изд., перераб. и доп. – М.: «Гардарики» 2007. – 701 с. Библиогр.: с. 695. – На пер. Теоретические основы электротехники. – 5 000 экз. – ISBN 5-8297 - 0046 - 8.
4. Нейман Л.В., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: В 2-х т. учеб. для вузов. Том 1. - 3-е изд., перераб. и доп. / Л. В. Нейман, К. С. Демирчян. - Л.: Энергоиздат, Ленингр. Отд-ние, 1981. – 536 с. – На пер. Теоретические основы электротехники. – 60 000 экз.
5. Основы теории цепей / Г. В. Зевеке, П.А. Ионкин., А. В. Нетушил и др. – Изд. 5-е, перераб. и доп. - М.: Энергоатомиздат, 1989. – 527 с. – Библиогр.: с. 513. – На пер. Основы теории цепей. 50 000 экз.
6. Жуйков В.Я. Перехідні процеси: навч. посіб. / В. Я Жуйков, В. Я. Ромашко. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 184 с. – Бібліогр.: с. 183 – 184. – 200 пр.
7. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники / Под ред. П. А. Ионкина, - М.: Энергоиздат, 1982. – 767 с. – Библиогр.: с. 762. – На пер. Сборник задач и упражнений по ТОЭ. – 50 000 экз.
8. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники / Под ред. Л. А. Бессонова, - М.: Высш. шк., 1980. - 472 с. – Библиогр.: с. 468. – На пер. Сборник задач по ТОЭ. – 67 000 экз.