

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А. В. Немировський, В. Й. Котовський, Д. В. Савченко

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за всіма освітніми програмами
природничих та технічних спеціальностей

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2023

УДК 537.8
В 19

Автори: *Немировський Анатолій Володимирович*
Котовський Віталій Йосипович, д-р техн. наук, проф.
Савченко Дарія Вікторівна, д-р фіз.-мат. наук

Рецензент *Решетняк, С.О.*, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
зав. каф. загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Чурсанова М.В.*, канд. фіз.-мат. наук

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 2 від 26.10.2023 р.)
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 10 від 25.10.2023 р.)

Немировський А. В.
В 19 Загальна фізика. Електродинаміка. Методи розв'язування задач [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здоб. ступ. бак. за всіма ОП природ. та техн. спец. / А. В. Немировський, В. Й. Котовський, Д. В. Савченко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл: 4,70 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 150 с.

Навчальний посібник містить теоретичний та практичний матеріал з курсу загальної фізики. Метою посібника є ознайомлення студентів із загальними принципами та методами розв'язування задач з електродинаміки. У посібнику викладено різні методи розв'язування задач при визначенні основних характеристик електромагнітного поля. Особливу увагу приділено формуванню у студентів навичок та розуміння використання математичного апарату електродинаміки. Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за всіма освітніми програмами природничих та технічних спеціальностей, а також може бути корисним при вивченні дисциплін з методики викладання фізики здобувачами ступеня магістра за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія».

УДК 537.8

Реєстр. № НП 23/24-137. Обсяг 6,8 авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© А. В. Немировський, В. Й. Котовський, Д. В. Савченко, 2023
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

ЗМІСТ

Вступ.....	7
Короткі теоретичні відомості.....	9
1. Електричний струм, визначення опору.....	16
Задача 1. [3,№ 3.149].....	16
Задача 2. [3,№ 3.151].....	18
Задача 3. [3,№ 3.155].....	20
Задача 4. [3,№ 3.156].....	24
Задача 5. [3,№ 3.157].....	26
Задача 6. [3,№ 3.158].....	29
Задача 7. [3,№ 3.161].....	31
Задача 8. [3,№ 3.162].....	32
Задача 9. [3,№ 3.163].....	33
Задача 10. [3,№ 3.164].....	35
Задача 11. [3,№ 3.169].....	36
2. Конденсатор в електричному колі.....	39
Задача 12. [3,№ 3.170].....	39
Задача 13. [3,№ 3.171].....	41
Задача 14. [3,№ 3.172].....	42
Задача 15. [3,№ 3.197].....	45
Задача 16. [3,№ 3.206].....	46
Задача 17. [3,№ 3.208].....	48
3. Постійне магнітне поле.....	50
Задача 18. [3,№ 3.221].....	50
Задача 19. [3,№ 3.222].....	51
Задача 20. [3,№ 3.225].....	55
Задача 21. [3,№ 3.228].....	57
Задача 22. [3,№ 3.230].....	60
Задача 23. [3,№ 3.232].....	62
Задача 24. [3,№ 3.233].....	64

Задача 25. [3, № 3.236].....	66
Задача 26. [3, № 3.238].....	68
Задача 27. [3, № 3.239].....	69
Задача 28. [3, № 3.240].....	71
Задача 29. [3, № 3.244].....	73
Задача 30. [3, № 3.245].....	74
Задача 31. [3, № 3.246].....	76
Задача 32. [3, № 3.250].....	78
Задача 33. [3, № 3.261].....	80
4. Електромагнітна індукція.....	83
Задача 34. [3, № 3.299].....	83
Задача 35. [3, № 3.300].....	84
Задача 36. [3, № 3.301].....	86
Задача 37. [3, № 3.302].....	88
Задача 38. [3, № 3.303].....	90
Задача 39. [3, № 3.307].....	92
Задача 40. [3, № 3.309].....	93
Задача 41. [3, № 3.310].....	94
Задача 42. [3, № 3.311].....	97
Задача 43. [3, № 3.312].....	102
Задача 44. [3, № 3.314].....	103
Задача 45. [3, № 3.315].....	105
Задача 46. [3, № 3.316].....	107
Задача 47. [3, № 3.317].....	108
Задача 48. [3, № 3.320].....	110
5. Індуктивність в електричному колі.....	111
Задача 49. [3, № 3.324].....	111
Задача 50. [3, № 3.326].....	113
Задача 51. [3, № 3.327].....	114
Задача 52. [3, № 3.334].....	116

Задача 53. [3, № 3.335].....	117
Задача 54. [3, № 3.346].....	118
6. Енергія магнітного поля.....	121
Задача 55. [3, № 3.348].....	121
Задача 56. [3, № 3.352].....	123
Задача 57. [3, № 3.353].....	124
7. Рівняння Максвелла.....	126
Задача 58. [3, № 3.362].....	126
Задача 59. [3, № 3.363].....	128
Задача 60. [3, № 3.364].....	130
Задача 61. [3, № 3.365].....	132
Задача 62. [3, № 3.366].....	134
Задача 63. [3, № 3.367].....	136
Задача 64. [3, № 3.370].....	138
Задача 65. [3, № 3.371].....	140
Задача 66. [3, № 3.372].....	141
Задача 67. [3, № 3.373].....	142
Задача 68. [3, № 3.374].....	143
Задача 69. [3, № 3.375].....	144
Задача 70. [3, № 3.376].....	145
Задача 71. [3, № 3.389].....	147
Література.....	150

ВСТУП

Теорія англійського фізика Максвелла, що описала теорію єдиного електромагнітного поля, створеного будь-якою системою зарядів і струмів систематизувала велику кількість фізичних явищ, починаючи від електростатичного поля нерухомих зарядів до змінного електромагнітного поля включаючи (світло) оптичні явища. Тут ми розглянемо фізичні особливості явищ пов'язаних з рухомими електричними зарядами та електромагнітними полями.

Іноді студенти мають низьку мотивацію до розв'язання задач з розділу «Електродинаміка». Можливо це пов'язано з непростою теорією даного розділу, складними формами математичного запису законів електродинаміки, такі поняття як градієнт (grad) дивергенція (div) ротор (rot), з якими ми вже знайомились при розв'язуванні задач з електростатики [1], або [1*], набувають більшого поширення та важливішого значення.

Розв'язування задач з розділу електродинаміки звичайно відрізняється від попередніх розділів, але це не звільняє нас від необхідності пам'ятати основні положення та підходи до розв'язування задач з механіки [2], або [2*], і термодинаміки, котрі необхідні нам і в цьому розділі.

Можливо труднощі виникають ще й тому, що програма з вищої математики з основами диференціального та інтегрального числення, елементів векторного аналізу сформована так, що наведені розділи вивчаються значно пізніше, ніж це необхідно для розв'язування задач з фізики. При розгляді фізичної задачі дуже важливо розуміти її як проблему саме фізичну. Не варто, звичайно, зневажати вивченням математичних методів, виробленням навичок використання знань по математиці при освоєнні матеріалу й одержання технічних навичок по їх застосуванню.

Всі розглянуті задачі взяті зі збірника [3], і для більшості з них наведений можливо занадто детальний розгляд ходу розв'язування, але нагадування деяких теорем геометрії та тригонометричних співвідношень

нікому не може завадити, а для деяких запропонований один з коротких схематичних методів, що вимагає детального розбору та продумування. В деяких задачах окремі пункти необхідно розв'язати самостійно.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Ми будемо розглядати струм в провідному середовищі, головним чином в металах. Носіями струму в металах є електрони.

Електричний струм - це по суті впорядковане перенесення електричних зарядів.

Кількісною мірою електричного струму є сила струму (слово «сила» історична назва), тобто, величина заряду, що переноситься через деяку поверхню площею S за одиницю часу, тобто згідно наведеного означення

$$I = \frac{dq}{dt} . \quad (1)$$

Що власне є швидкістю зміни заряду. Важливою характеристикою при нерівномірному розподілі струму через поверхню S є вектор густини струму, модуль котрого визначають як

$$J = \frac{dI}{dS} \quad (2)$$

Тепер електричний струм можна визначити ще і як потік [] вектора густини струму через поверхню S .

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{S} \quad (3)$$

Нагадаємо, під інтегралом скалярний добуток двох векторів, $d\vec{S} = dS \vec{n}$, $\vec{n}$ - вектор нормалі, і величина струму може бути додатною, від'ємною та рівною нулю.

Якщо маємо замкнуту систему то $\oint_S \vec{j} d\vec{s}$ дає заряд, що виходить за одиницю часу назовні з об'єму V обмеженому поверхнею S . Тобто

$$\oint_S \vec{j} d\vec{s} = -\frac{dq}{dt}, \quad (4)$$

де знак мінус вказує на зменшення заряду в замкнутому об'ємі. Власне рівняння (4) є математичним записом закону збереження заряду. Його називають рівнянням неперервності.

Без детального висвітлення переходу (що наведено в [1]) від інтегральної до диференціальної запишемо рівняння неперервності в локальній формі

$$\overline{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt} \quad (5)$$

Тобто дивергенція вектора густини струму $\overline{\nabla} \cdot \vec{j}$ в даній точці простору рівна швидкості зменшення густини заряду.

Одним з головних законів є експериментально відкритий закон Ома для однорідного провідника

$$I = \frac{U}{R} \quad (6)$$

Величина сили струму, що прорікає однорідним провідником пропорційна різниці потенціалів (напрузі $U = \varphi_1 - \varphi_2$) на кінцях провідника. $\frac{1}{R}$ - коефіцієнт пропорційності, R - опір провідника.

У випадку однорідного циліндричного провідника

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (7)$$

де ρ - питомий опір провідника, залежить від матеріалу, наводиться в таблицях, l - довжина циліндричного провідника, S - площа поперечного перерізу.

Важливе значення при розв'язуванні задач відіграє закон Ома в локальній формі. Для ізотропного провідника рівняння (6) перепишемо

$$jdS = \frac{Edl}{\rho \frac{dl}{dS}} \Rightarrow$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (8)$$

Дане рівняння пов'язує вектор густини струму, питомого опору провідника та вектора напруженості електричного поля в деякій точці провідного середовища.

Для розгалужених електричних кіл розв'язування задач полегшують правила Кірхгофа.

Перше правило відноситься до вузлів електричного кола (точка в якій з'єднуються більше ніж 2 провідники) стверджує, що алгебраїчна сума сил струмів що сходяться у вузлі рівна нулю.

$$\sum I_k = 0 \quad (9)$$

Друге правило Кірхгофа використовують для будь якого замкнутого контуру розгалуженого кола.

$$\sum I_k R_k = \sum \varepsilon_k \quad (10)$$

- алгебраїчна сума падінь напруг на елементах контуру рівна алгебраїчній сумі е.р.с. (електрорушійних сил), що діють в цьому контурі. Нижче ми розглянемо задачі на використання другого правила Кірхгофа.

Проходження струму по провіднику, який має опір, супроводжується виділенням теплоти, тобто нагріванням провідника. Це невід'ємна властивість електричного струму, що при переносі заряду між точками з потенціалом φ_1 та φ_2 виконується робота

$$dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = I(\varphi_1 - \varphi_2)dt, \quad (11)$$

зважаючи, що $I = \frac{dq}{dt}$. Згідно з законом збереження енергії, ця робота за відсутності інших можливостей, переходить у внутрішню енергію, тобто виділяється у вигляді теплоти. $dA = dQ$ або

$$dQ = IUdt. \quad (12)$$

З врахуванням закону Ома для ділянки кола $I = \frac{U}{R}$ можемо записати

$$dQ = I^2 R dt \quad (13)$$

Рух електричних зарядів супроводжується ще одним унікальним явищем – виникнення магнітного поля. Магнітне поле точкового заряду, що рухається зі швидкістю $\vec{v} = \text{const} \ll c$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3} \quad (14)$$

$\vec{B}$ - вектор індукції магнітного поля, μ_0 - магнітна стала, $\vec{r}$ - радіус вектор точки, в якій визначається $\vec{B}$ - вектор індукції. Нагадаємо, квадратні дужки то векторний добуток двох векторів, а значить вектор $\vec{B}$ напрямлений перпендикулярно до площини в якій лежать вектори $\vec{v}$ та $\vec{r}$, і його напрям визначають за «правилом» правого гвинта.

Для магнітного поля, як і для електричного справедливий принцип суперпозиції, тобто поле що створюється кількома зарядами рівне векторній сумі кожного з них

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i \quad (15)$$

З (14) та (15) легко отримати закон Біо - Савара, який дозволяє визначити індукцію магнітного поля утвореного постійним електричним струмом.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3} dV \quad (16)$$

або

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad (17)$$

До основних законів магнітного поля відноситься теорема Гауса, на жаль мало придатна для розв'язування задач по визначенню індукції магнітного поля

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad (18)$$

В диференціальній (локальній) формі її записують

$$\overline{\nabla B} = 0 \quad \text{або} \quad \text{div} \overline{B} = 0 \quad (19)$$

Вона лише виражає те, що лінії магнітного поля не мають ні початку ні кінця, тобто не існує магнітних зарядів, на яких лінії магнітного поля починались би, або закінчувались.

На щастя є теорема про циркуляцію вектора $\overline{B}$, котра в магнетизмі виконує таку ж роль, як теорема Гауса в електростатиці, тобто значно полегшує визначення індукції магнітного поля для деяких орієнтацій струму.

$$\oint_L \overline{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{вн}} \quad (20)$$

В диференціальній (локальній) формі її записують

$$[\overline{\nabla}, \overline{B}] = \mu_0 \vec{J} \quad \text{або} \quad \text{rot} \overline{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (21)$$

З боку магнітного поля на заряд, що рухається буде діяти магнітна сила

$$\vec{F} = q[\vec{v}\overline{B}] \quad (22)$$

Повна електромагнітна сила враховує ще й силу що діє з боку електричного поля, і її називають силою Лоренца

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}\overline{B}]$$

І основу єдиної теорії електричних та магнітних полів узагальнюють рівняння Максвелла.

Інтегральна форма		Диференціальна форма
$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s}$	Закон ел.-магн. індукції	$[\vec{\nabla} \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, або $rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0$	Теорема Гауса для магнітного поля	$\vec{\nabla} \vec{B} = 0$, або $div \vec{B} = 0$
$\oint_S \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s}$	Теорема про циркуляцію магн. поля	$[\vec{\nabla} \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, або $rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dV$	Теорема Гауса для електричного поля	$\vec{\nabla} \vec{D} = 0$, або $div \vec{D} = \rho$

Рівняння Максвелла можуть бути записані і в іншому вигляді, якщо використати так звані матеріальні співвідношення: $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$, та $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$

ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

Задача 1. [3. №3.149]

Довгий рівномірно заряджений по поверхні циліндр радіусом $a = 1,0 \text{ см}$ рухається зі швидкістю $v = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ вздовж своєї осі. Напруженість електричного поля безпосередньо біля поверхні циліндра $E = 0,9 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$.

Визначити струм обумовлений механічним перенесенням заряду.

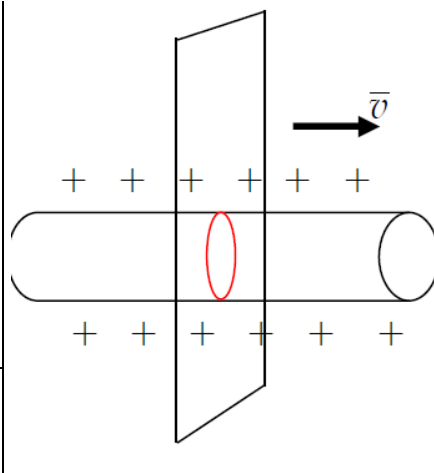
$$a = 1,0 \text{ см}$$

$$v = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$E = 0,9 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$$

$$\sigma = \text{const}$$

$$I = ?$$



Величину струму визначимо

як $I = \frac{dq}{dt}$, тобто, як заряд,

що в одиницю часу проходить через уявну площину.

Заряд на поверхні циліндра визначає величину напруженості електричного поля, що і варто використати для визначення швидкості перенесення заряду.

Використаємо теорему Гауса. Розподіл заряду має осьову симетрію, тому за гаусову поверхню виберемо циліндр з радіусом, що наближається до a . Тоді теорему Гауса запишемо

$$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{вн}}$$

Для циліндра інтеграл по поверхні розпишемо як суму інтегралів через бічну поверхню та поверхню площі основ

$$2 \int_{s_{\text{осн}}} \vec{E} d\vec{s} + \int_{s_{\text{бічн.}}} \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{вн}}$$

Відповідно до [2] де детально показано, що потік вектора $\vec{E}$ через площі основ рівний нулю, матимемо

$$\int_{S_{\text{бчн.}}} E ds = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{вн}}$$

Диференціюючи останнє рівняння матимемо

$$E ds = \frac{1}{\varepsilon_0} dq_{\text{вн}}$$

Елемент площі бічної поверхні циліндра $ds = 2\pi a dl$ тому

$$E 2\pi a dl = \frac{1}{\varepsilon_0} dq_{\text{вн}}$$

Розділимо обидві частини рівняння на нескінченно малий проміжок часу dt

$$E 2\pi a \frac{dl}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{dq}{dt}$$

І з врахуванням того, що $\frac{dl}{dt} = v$, а $\frac{dq}{dt} = I$ отримаємо

$$\boxed{I = 2\pi\varepsilon_0 a E v}$$

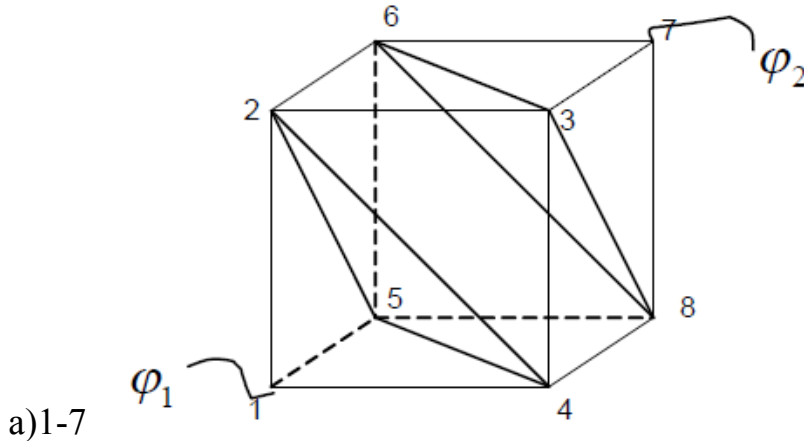
Тобто, величина струму, що створюється рухомим зарядженим циліндром залежить від напруженості поля, радіуса циліндра та швидкості його руху.

Задача 2. [3. №3.151]

Знайти опір дротяного каркасу, який має форму куба (див. рис.), при підключенні його до електричного кола між точками:

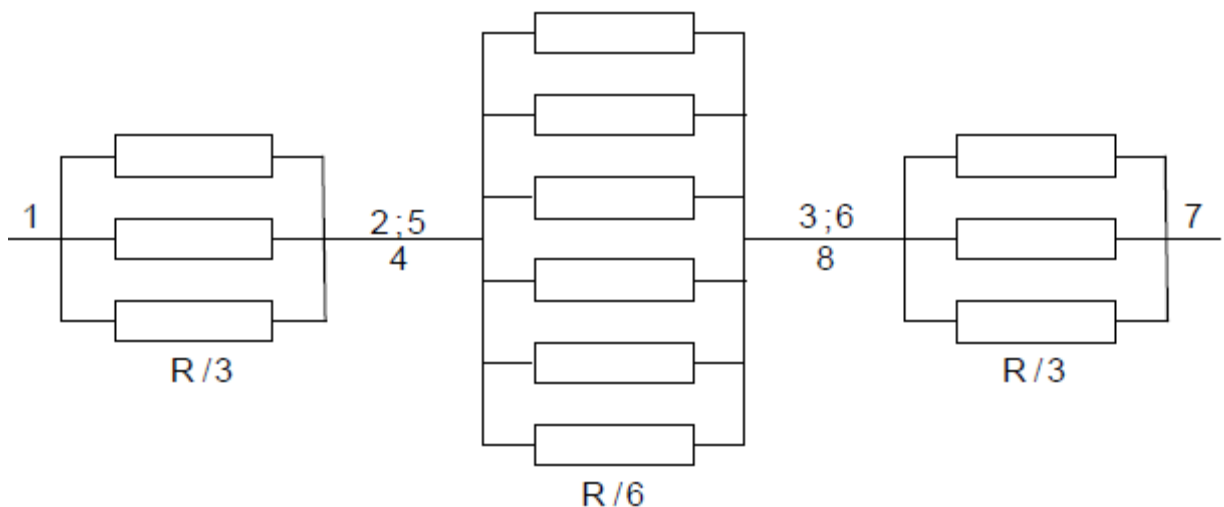
а) 1-7; б) 1-2; в) 1-3.

Опір кожного ребра каркасу дорівнює R .



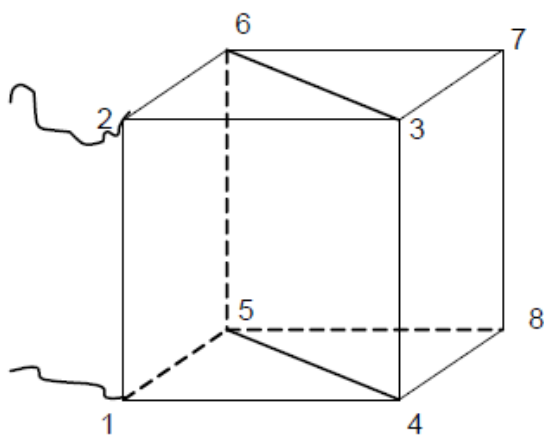
Якщо до точки 1 прикласти потенціал φ_1 , а до точки 7 відповідно φ_2 , то зважаючи на рівність опорів ребер куба рівними будуть падіння напруг, тому точки 2, 5, 4 матимуть однакові потенціали наприклад - φ_A аналогічно падіння напруг відносно φ_2 дадуть рівні потенціали в точках 3, 6, 8 - φ_B . Між точками з потенціалами φ_A та φ_B увімкнено паралельно шість опорів.

З'єднаємо точки, які мають рівні потенціали та зобразимо схему в іншому вигляді (розгорнуту) в якій рівні потенціали об'єднані в одну точку.



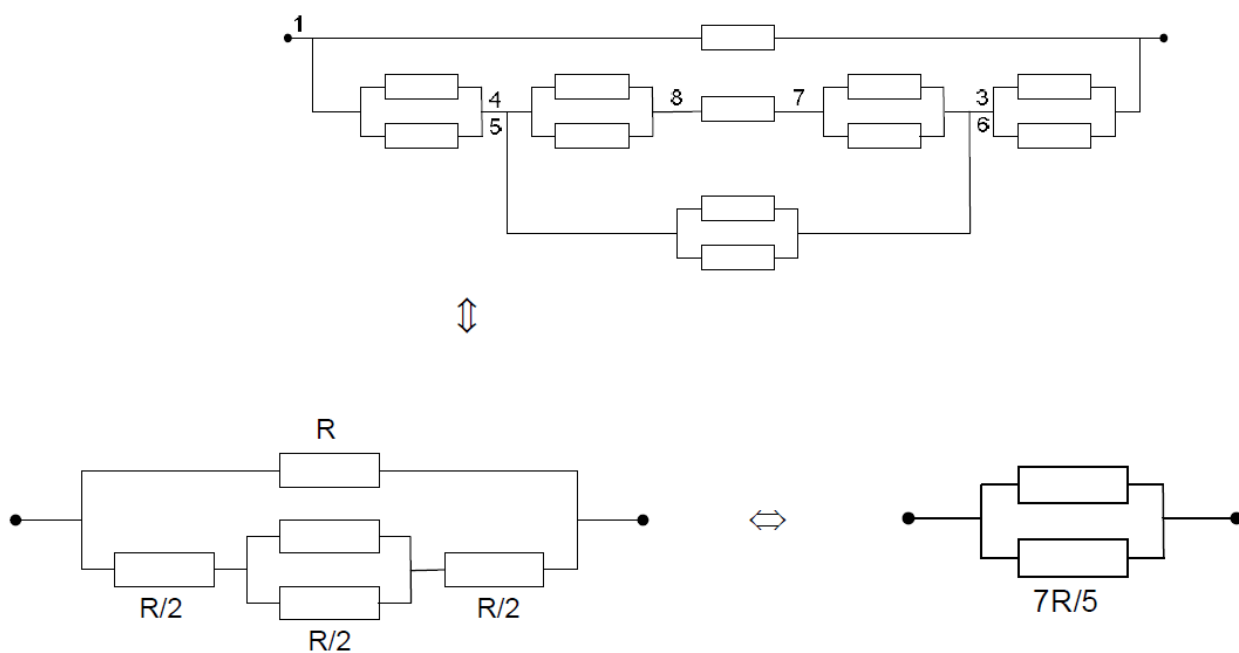
Отже, отримали схему з послідовних та паралельних з'єднань резисторів, в якій легко обрахувати загальний опір :

$$R_{\Sigma} = \frac{4R + R}{6} = \frac{5}{6} R$$

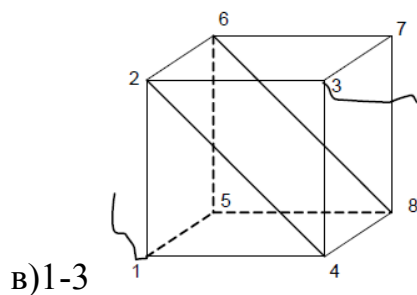


б)1-2

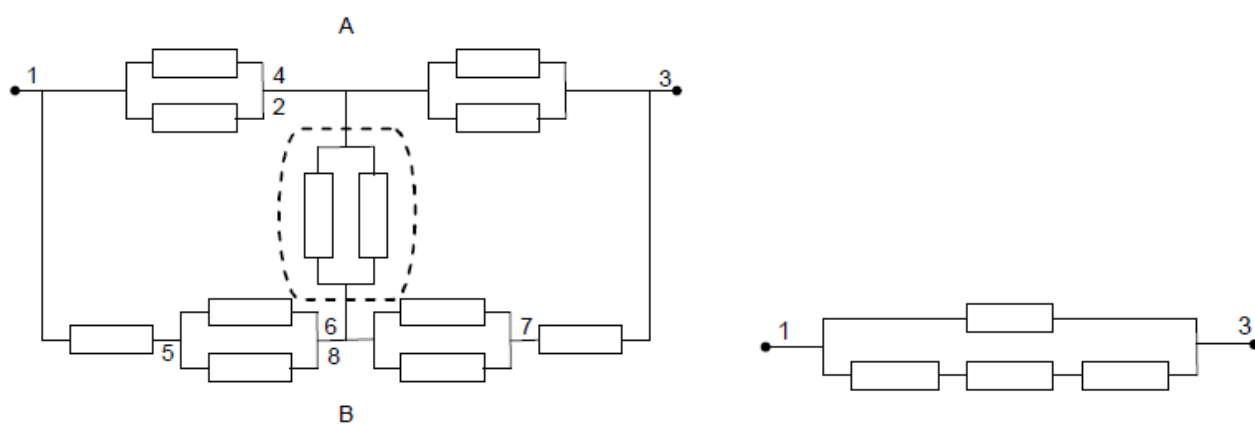
Аналогічно діємо в двох інших випадках. З'єднаємо точки, які мають рівні потенціали та зобразимо схему в іншому вигляді (розгорнуту). Отже, отримали схему :



$$\frac{1}{R_{\Sigma}} = \frac{1}{R} + \frac{5}{7R} \Rightarrow R_{\Sigma} = \frac{7}{12} R$$



Зобразимо розгорнуту схему:

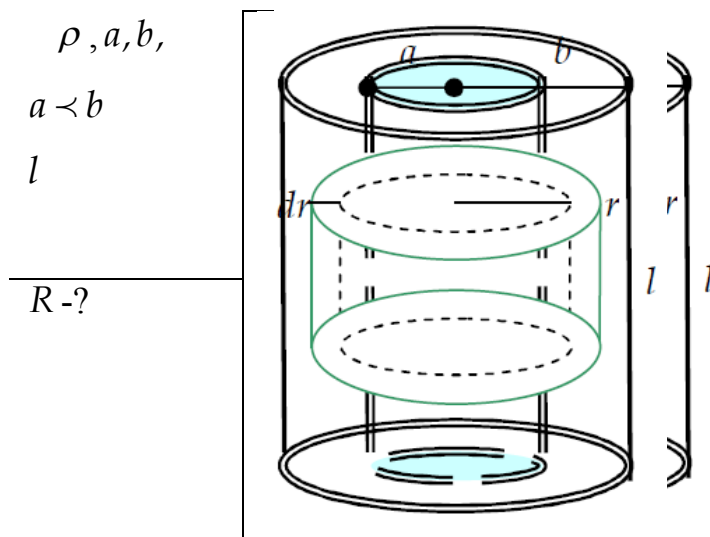


В силу симетрії задачі електричний струм між точками А та В не тече.

$$\frac{1}{R_{\Sigma}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} \Rightarrow R_{\Sigma} = \frac{3R}{4}$$

Задача 3. [3, №3.155]

Однорідне слабо провідне середовище з питомим опором ρ заповнює простір між двома коаксіальними тонкими циліндрами, які мають ідеальну провідність. Радіуси циліндрів a та b , причому $a < b$ довжина кожного циліндра l . Нехтуючи крайовими ефектами, знайти опір середовища між циліндрами.



Величина опору R входить в дві основні формули: закон Ома для однорідної ділянки кола -

$$I = \frac{U}{R}, \quad (3.1)$$

власне де і вводиться поняття опору провідника та одиниці його вимірювання [1 Ом], і

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (3.2)$$

Формула (3.2) демонструє залежність опору від довжини, площі поперечного перерізу і матеріалу і справедлива лише для однорідного циліндричного провідника. Розв'язати задачу не означає знайти вираз, котрий відповідатиме наведеному у відповіді даній автором збірника.

Запишемо формулу електричного опору циліндричного провідника. Виділимо концентрично розташований тонкий циліндричний шар на відстані від центру r і товщиною dr котрий можна представити як сукупність циліндрів довжиною dr і загальною площею поперечного перерізу $S = 2\pi r \cdot l$. Тоді опір цього нескінченно тонкого шару провідника

$$dR = \rho \frac{1}{2\pi \cdot l} \frac{dr}{r}$$

Для того, щоб знайти весь опір нам необхідно інтегрувати отримане рівняння:

$$\int_0^R dR = \frac{\rho}{2\pi l} \int_a^b \frac{dr}{r} \quad \boxed{R = \frac{\rho}{2\pi \cdot l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Подібний розв'язок даної задачі пропонується багатьма викладачами та наводиться в Інтернеті, хоча згідно формули (3.2) не має ніякого фізичного змісту, оскільки згадана формула справедлива для струму, що тече вздовж циліндра довжиною l , а в даному випадку l входить до площі поперечного перерізу.

Ми запропонуємо інший підхід для розв'язування даної задачі, з використанням рівняння (3.1). Власне ми повинні визначити величину струму при визначеній величині напруги. $R = \frac{U}{I}$

Для цього уявно зарядимо внутрішній циліндр позитивним зарядом q . Тоді для гаусової поверхні радіусом $b > r > a$ запишемо

$$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.3)$$

Тоді напруженість поля в кожній точці цієї поверхні буде

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r \cdot l}$$

Це дає змогу визначити різницю потенціалів між коаксіальними

циліндрами

$$d\varphi = -E dr \Rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_a^b \frac{dr}{r}$$
$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{b}{a} \quad (3.4)$$

З закону Ома в локальній формі $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \rho \vec{j}$

Підставимо в (3.3) значення напруженості

$$\rho \oint_s \vec{j} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} .$$

Але оскільки $\oint_s \vec{j} d\vec{s} = I$ тут повний струм то

$$I = \frac{q}{\epsilon_0 \rho} \quad (3.5)$$

З врахуванням (3.4) та (3.5)

$$R = \frac{U}{I}$$

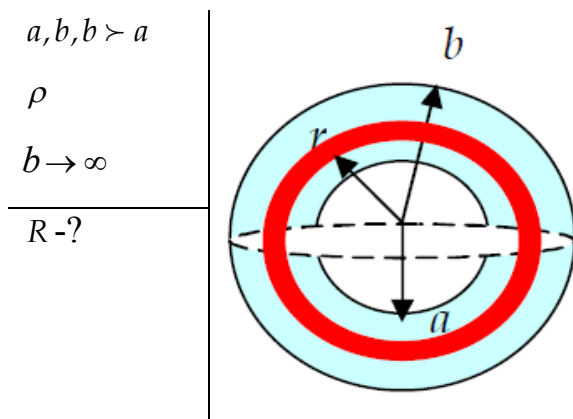
матимемо

$$R = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon_0 \rho}{q} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\rho}{2\pi \cdot l} \ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

Запропонований цей спосіб дає ту ж відповідь не порушуючи фізичних принципів, а доказує їх справедливість.

Задача 4. [3, №3.156]

Навколо металічної кульки радіуса a знаходиться концентрична тонка металічна оболонка радіуса b . Простір між цими електродами заповнений слабо провідним середовищем з питомим опором ρ . Знайти опір простору між електродами. Розглянути також випадок $b \rightarrow \infty$.



Запишемо формулу електричного опору циліндричного провідника:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (4.1)$$

Виділимо концентрично розташований тонкий сферичний шар на відстані від центру r і товщиною dr котрий можна представити як сукупність шарів довжиною dr і загальною площею поперечного перерізу $S = 4\pi r^2$. Тоді опір цього нескінченно тонкого шару $dR = \rho \frac{1}{4\pi} \frac{dr}{r^2}$, оскільки ці опори з'єднані послідовно, то тоді загальний опір простору між електродами знайдемо шляхом інтегрування

$$\int_0^R dR = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \Rightarrow R = -\frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \Big|_a^b = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\boxed{R = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{b-a}{ab}}$$

Для того, щоб знайти електричний опір у випадку $b \rightarrow \infty$, необхідно скористатись правилом визначення границі:

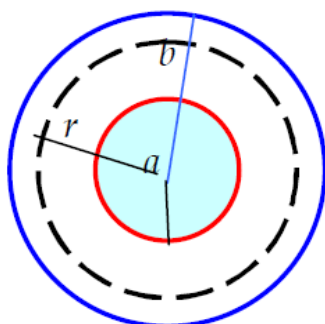
$$R = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\rho}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\rho}{4\pi \cdot a}$$

При $b \rightarrow \infty$:

$$\boxed{R = \frac{\rho}{4\pi \cdot a}}$$

Ми знову навели поширене але не вірне розв'язання даної задачі.

Правильним буде розв'язування аналогічне наведеному в попередній задачі.



Уявно зарядимо металеву кульку позитивним зарядом q . Тоді для гаусової поверхні радіусом $b > r > a$ запишемо

$$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.2)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$d\varphi = -E dr \Rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

З закону Ома в локальній формі $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ значення напруженості.

Підставимо в (4.2)

$$\rho \oint_s \vec{j} d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Але оскільки $\oint_s \vec{j} d\vec{s} = I$ тут повний струм

$$I = \frac{q}{\varepsilon_0 \rho}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{ab} \cdot \frac{\varepsilon_0 \rho}{q} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{b-a}{ab}}$$

Задача 5. [3, №3.157]

Простір між двома провідними концентричними сферами, радіуси котрих a та b ($a < b$) заповнений однорідним слабо провідним середовищем. Ємність такої системи рівна C . знайти питомий опір середовища, якщо різниця потенціалів між сферами відімкнутими від зовнішньої напруги зменшується в η разів за час Δt .

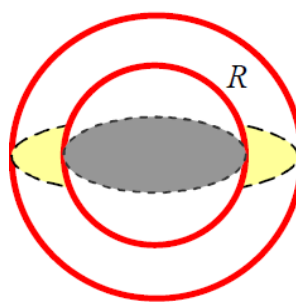
a, b
($a < b$)

C

$$\eta = \frac{U_0}{U}$$

Δt

$\rho - ?$



Згідно рівняння неперервності

$$\oint_s \vec{j} d\vec{s} = -\frac{dq}{dt} \quad (5.1),$$

а за законом Ома в локальній формі

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (5.2)$$

Підставимо (5.2) в (5.1)

$$\frac{1}{\rho} \oint_s \bar{E} d\bar{s} = -\frac{dq}{dt} \quad (5.3)$$

Інтеграл лівої частини рівняння (5.3) це за теоремою Гауса

$$\oint_s \bar{E} d\bar{s} = \frac{q_{\theta n}}{\varepsilon \varepsilon_0} \quad (5.4)$$

де $q_{\theta n}$ заряд на внутрішній сфері в довільний момент часу. Звідки

$$E = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{1}{4\pi r^2}$$

Враховуючи що $E = -\frac{d\varphi}{dr}$

$$d\varphi = -\frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0 4\pi} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\frac{q_{\theta n}}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{1}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q_{\theta n}}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{b-a}{ab} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{q_{\theta n}}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{4\pi \cdot ab}{b-a} U \quad (5.5)$$

Рівняння (5.5) підставимо в (5.4) а інтеграл з (5.4) в (5.3)

$$\frac{1}{\rho} \frac{4\pi \cdot ab}{b-a} U = -\frac{dq}{dt} \quad (5.6)$$

і оскільки $q = CU \Rightarrow dq = CdU$ перепишемо (5.6)

$$\frac{1}{\rho} \frac{4\pi \cdot ab}{b-a} U = -C \frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{4\pi \cdot ab}{b-a} dt = -C \frac{dU}{U}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{4\pi \cdot ab}{b-a} \int_0^{\Delta t} dt = -C \int_{U_0}^U \frac{dU}{U}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{4\pi \cdot ab \Delta t}{b-a} = C \ln \eta \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{4\pi \cdot ab \Delta t}{C(b-a) \ln \eta}}$$

Наведемо також «традиційне» але не коректне отримання правильної відповіді. Як і в попередній задачі знаходимо $dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2} \Rightarrow$

$$\int_0^R dR = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \Rightarrow R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Оскільки $I = \oint_s \bar{j} d\bar{s}$, $\oint_s \bar{j} d\bar{s} = -\frac{dq}{dt}$ то

$$I = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d(CU)}{dt} = -C \frac{dU}{dt}$$

тоді закон Ома $I = \frac{U}{R}$ запишемо $-C \frac{dU}{dt} = \frac{4\pi \cdot a \cdot b}{\rho(b-a)} U$ і отже

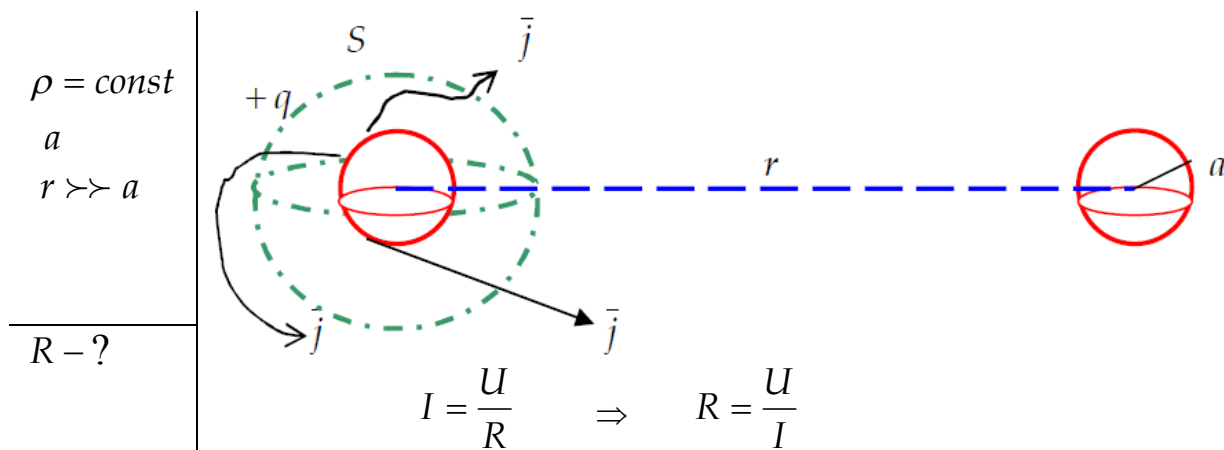
$$-C \frac{dU}{U} = \frac{4\pi \cdot a \cdot b}{\rho(b-a)} dt$$

$$-C \int_{U_0}^U \frac{dU}{U} = \frac{4\pi \cdot a \cdot b}{\rho(b-a)} \int_0^{\Delta t} dt \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{4\pi \cdot ab \Delta t}{b-a} = C \ln \eta \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho = \frac{4\pi \cdot ab \Delta t}{C(b-a) \ln \eta}}$$

Задача 6. [3. №3.158]

Дві металевих кульки однакового радіусу a знаходяться в однорідному слабо провідному середовищі з питомим опором ρ . Знайти опір середовища між кулями при умові, що відстань між ними значно перевищує a



Отже, для визначення величини опору нам необхідно визначити різницю потенціалів, тобто напругу U між двома кулями та величину струму I .

Уявно зарядимо обидві кульки рівними за величиною, але протилежними за знаком зарядами q . Лінії вектора густини струму виходять в усіх напрямках з першої кульки і спрямовуються до другої, як показано на рисунку. Тоді потік вектора густини струму через замкнуту поверхню S дорівнюватиме повному струму

$$\oint_S \vec{j} d\vec{s} = I \quad (6.1)$$

У відповідності з законом Ома в локальній формі

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (6.2)$$

Підставимо (6.2) в (6.1) і отримаємо

$$\frac{1}{\rho} \oint_S \vec{E} d\vec{s} = I \quad (6.3)$$

Зважаючи на те, що згідно теореми Гауса $\oint_s \vec{E} d\vec{s} = \frac{q_{\text{вн}}}{\epsilon\epsilon_0}$ рівняння (6.3)

буде мати вигляд

$$I = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0\rho} \quad (6.4)$$

Знайдемо потенціал на поверхні першої кульки

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{a}$$

і відповідно на поверхні другої

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{-q}{a},$$

тоді

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \Rightarrow U = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{a} \Rightarrow$$

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 a} \quad (6.5)$$

Тепер враховуючи (6.4) та (6.5)

$$R = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 a} \frac{\epsilon\epsilon_0\rho}{q} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\rho}{2 \cdot \pi \cdot a}}$$

Задача 7. [3. №3.161]

Простір між обкладинками плоского конденсатора заповнений склом з питомим опором $\rho = 100 \text{ ГОм} \cdot \text{м}$. Ємність конденсатора $C = 4,0 \text{ нФ}$. Знайти електричний струм витоку через конденсатор при поданні на нього напруги $U=2,0 \text{ кВ}$.

$\rho = 100 \cdot 10^9 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ $C = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$ $U = 2 \cdot 10^3 \text{ В}$ $I = ?$	Запишемо формулу для визначення електричного струму через його густину: $I = \int \bar{j} d\bar{s} \quad (7.1)$
--	---

Згідно закону Ома в локальній формі, густина струму в кожній точці:

$$\bar{j} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{E} \quad (7.2)$$

В свою чергу, напруженість поля плоского конденсатора:

$$E = \frac{U}{d}, \quad (7.3)$$

де d - відстань між пластинами.

Електроємність плоского конденсатора запишемо:

$$C = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d} \Rightarrow \frac{S}{d} = \frac{C}{(\varepsilon \cdot \varepsilon_0)} \quad (7.4)$$

Отже, підставимо (7.2) та (7.3) в (7.1) - формулу для електричного струму і отримаємо:

$$I = \int \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{d} \cdot dS$$

В результаті інтегрування матимемо

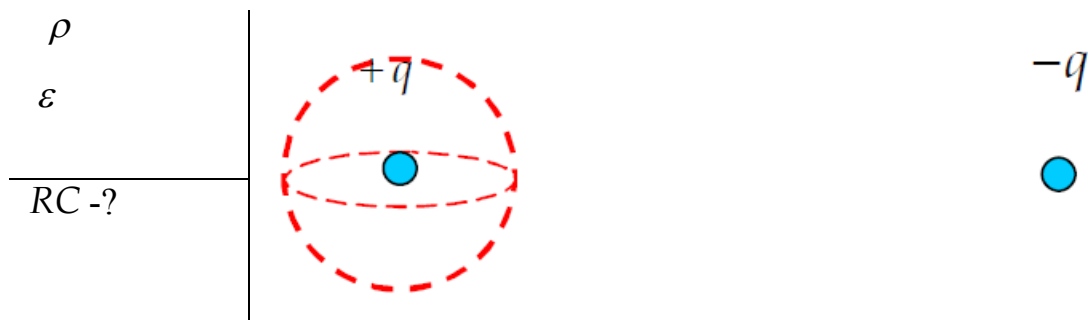
$$I = \frac{U}{\rho} \left(\frac{S}{d} \right) \Rightarrow$$

З врахуванням рівняння (7.4) буде

$$I = \frac{UC}{\varepsilon_0 \varepsilon \rho}$$

Задача 8. [3. №3.162]

Два провідники довільної форми знаходяться в середовищі з питомим опором ρ та діелектричною проникністю ε . Знайти значення добутку RC для даної системи, де R - опір середовища між провідниками, C - взаємна ємність провідників при існуванні середовища.



Подумки зарядимо провідники зарядами $+q$ та $-q$. Так як середовище між ними слабо провідне, то поверхні провідників являються екіпотенціальними та конфігурація електричного поля така сама, що і при відсутності середовища. Навколо, наприклад, позитивно зарядженого провідника, розмістимо замкнену поверхню S , яка безпосередньо прилягає до поверхні провідника, і обчислимо окремо R та C :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\oint j_n dS} = \frac{U}{\sigma \oint E_n dS},$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\oint D_n dS}{U} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \oint E_n dS}{U},$$

$$R = \frac{U}{\sigma \oint E_n dS}, \quad C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \oint E_n dS}{U},$$

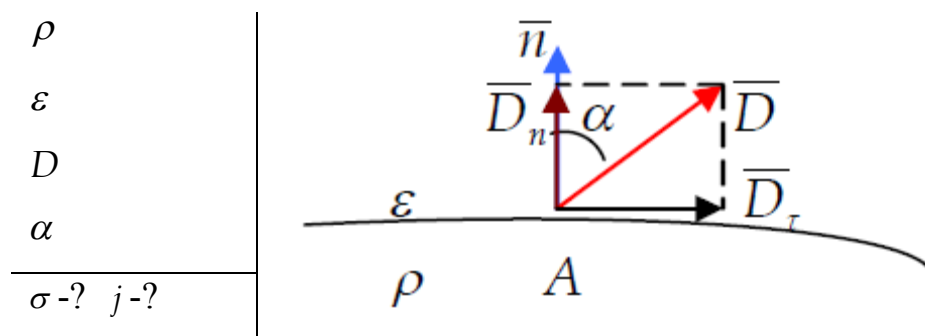
де інтеграли беруться по даній поверхні S . При обчисленні R був використаний закон Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, при обчисленні C - теорема Гауса і те що $D = \varepsilon \varepsilon_0 E$. Добуток отриманих виразів:

$$RC = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma} = \varepsilon \varepsilon_0 \rho$$

$RC = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma} = \varepsilon \varepsilon_0 \rho$
--

Задача 9. [3. №3.163]

Провідник з питомим опором ρ межує з діелектриком, який має діелектричну проникність ε . В точці А біля поверхні провідника електрична індукція дорівнює D , причому вектор $\vec{D}$ направлений від провідника і утворює кут α з нормаллю до поверхні. Знайти поверхневу густину заряду на провіднику в околі точки А та густину електричного струму в околі цієї точки.



Поверхнева густина зарядів на провіднику:

$$\sigma = D_n = D \cos \alpha$$

Густина струму знайдемо за законом Ома в локальній формі:

$$\vec{j} = \vec{E} / \rho .$$

З рівняння неперервності $\oint \vec{j} d\vec{S} = 0$ витікає, що нормальні складові вектора $\vec{j}$ рівні, а так як в діелектрику $j_n = 0$ (електричного струму немає), то і в провіднику $j_n = 0$. Таким чином, вектор $\vec{j}$ в провіднику дотичний до його поверхні. В стані рівноваги електричне поле в середині провідника $\vec{E} = 0$.

З іншого боку, з теореми про циркуляцію вектора $\vec{E}$ слідує, що тангенціальні складові його по різні боки межі поділу однакові, і це означає, що

$$E = E_\tau = D \sin \alpha / \varepsilon \varepsilon_0 ,$$

де E_τ - тангенціальна складова електричного поля. Враховуючи все це, отримаємо:

$$j = \frac{E}{\rho} = \frac{D \sin \alpha}{\varepsilon \varepsilon_0 \rho} .$$

$$\sigma = D_n = D \cos \alpha$$

$$j = \frac{D \sin \alpha}{\varepsilon \varepsilon_0 \rho}$$

Задача 10. [З. №3.164]

Зазор між пластинами плоского конденсатора заповнений неоднорідним слабо провідним середовищем, питома провідність якого змінюється з напрямом, що перпендикулярний до пластин, по лінійному закону від $\sigma_1 = 1,0$ пСм/м до $\sigma_2 = 2,0$ пСм/м. Площа кожної пластини $S = 230$ см², ширина зазору $b = 2,0$ мм. Знайти електричний струм через конденсатор при напрузі на ньому $U = 300$ В.

$$\sigma_1 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ См/м}$$

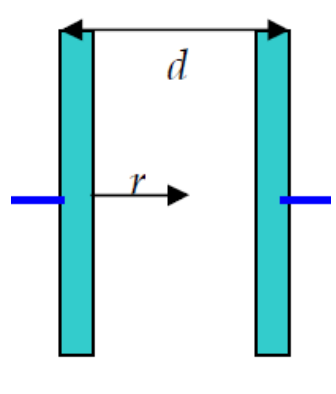
$$\sigma_2 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ См/м}$$

$$b = 2,0 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$S = 230 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$$

$$U = 300 \text{ В}$$

$$I - ?$$



Питома провідність на одиницю довжини визначимо як

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b} \Rightarrow$$

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma(r)} d\sigma = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b} \int_0^r dr$$

Питома провідність, як функція відстані:

$$\sigma(r) = \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b} \cdot r \quad (10.1)$$

Повний опір середовища між пластинами:
$$R = \int_0^b \frac{1}{S \cdot \sigma(r)} dr$$

В вище записану формулу підставимо (10.1) отримаємо:

$$R = \frac{1}{S} \int_0^b \frac{1}{\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b} \cdot r \right)} \cdot dr \Rightarrow$$

$$R = \frac{1}{S} \int_0^b \frac{b}{\sigma_2 - \sigma_1} \frac{d\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b} r \right)}{\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b} \cdot r \right)} dr$$

Взявши інтеграл:

$$R = \frac{1}{S} \frac{b}{\sigma_2 - \sigma_1} \left(\ln \left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b} b \right) - \ln \sigma_1 \right) \quad R = b \cdot \frac{\ln(\sigma_2) - \ln(\sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1) \cdot S}$$

Згідно закону Ома для ділянки кола

$$I = \frac{U}{R}.$$

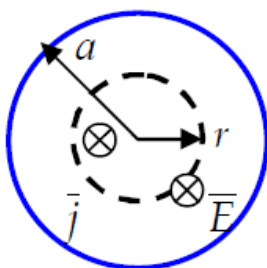
Підставимо знайдений вище вираз для повного опору:

$$I = \frac{U \cdot (\sigma_2 - \sigma_1) \cdot S}{b \cdot \ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)}$$

Задача 11. [З. №3.169]

Довгий провідник, круглого перерізу з радіусом a , зроблений з матеріалу, питомий опір якого залежить тільки від відстані r до осі провідника по закону $\rho = \alpha/r^2$, де α - константа. Знайти: а) напруженість електричного поля в провіднику, при якій по ньому буде проходити електричний струм I . б) опір одиниці довжини такого провідника.

a
$\rho = \alpha/r^2$
$\alpha = \text{const}$
I
$E - ? \quad \frac{R}{l} - ?$



а) Напруженість E поля за законом Ома пов'язана із густиною струму j ,

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (11.1)$$

Помножимо обидві частини рівняння скалярно на вектор $d\vec{s}$

$$\vec{j} d\vec{s} = \frac{1}{\rho} \vec{E} d\vec{s} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\bar{j}d\bar{s} &= \frac{r^2}{\alpha} \bar{E} d\bar{s} \\ \int_0^l \bar{j}d\bar{s} &= \frac{1}{\alpha} E \int_0^a 2\pi r dr r^2 \Rightarrow \\ I &= \frac{2\pi E}{\alpha} \int_0^a r^3 dr\end{aligned}\tag{11.2}$$

Напруженість E однакова у всіх точках перерізу даного провідника, тобто не залежить від r . У цьому легко переконатися, взявши прямокутний контур усередині провідника так, щоб одна сторона контуру співпадала, наприклад, з віссю провідника, і потім застосувавши до цього контуру теорему про циркуляцію вектора напруженості E .

В результаті інтегрування (11.2)

$$I = \frac{\pi E a^4}{2\alpha}$$

виразимо E , і отримаємо:

$$\boxed{E = \frac{2\alpha \cdot I}{\pi \cdot a^4}}\tag{11.3}$$

б) Опір одиниці довжини провідника можна визначити за допомогою формули:

$$R = \frac{U}{I}$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на довжину l цієї ділянки провідника до якого відносяться R та U ,

$$\frac{R}{l} = \frac{U}{l} \frac{1}{I}$$

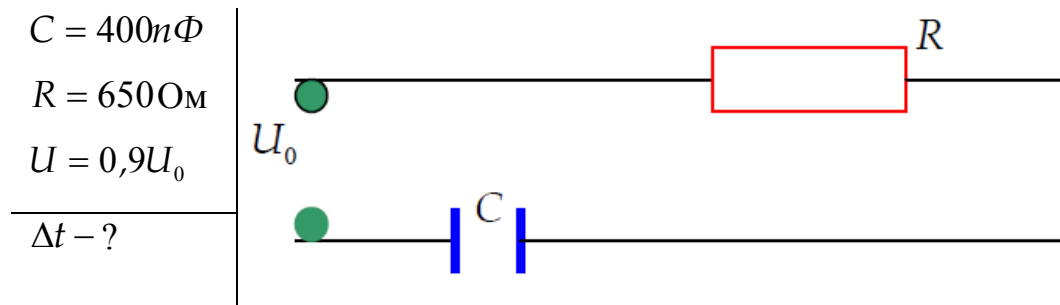
і оскільки $\frac{U}{l} = E$ використовуючи (11.3) матимемо

$$\frac{R}{l} = \frac{2\alpha \cdot I}{\pi \cdot a^4} \frac{1}{I} \Rightarrow \boxed{\frac{R}{l} = \frac{2\alpha}{\pi \cdot a^4}}$$

КОНДЕНСАТОР В ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ

Задача 12. [3. №3.170]

Конденсатор ємністю $C = 400\text{нФ}$ підключили через опір $R = 650\text{Ом}$ до джерела постійної напруги U_0 . Через скільки часу напруга на конденсаторі стане $U = 0,9U_0$?



Запишемо друге правило Кірхгофа для даного контуру, де сума спадів напруг на опорі R та конденсаторі C рівна напрузі U_0 на джерелі:

$$U_R + U_C = U_0 \text{ або}$$

$$IR + \frac{q}{C} = U_0$$

$$\frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} = U_0 \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{U_0}{R} - \frac{q}{RC}$$

Розділимо змінні та інтегруємо

$$\frac{dq}{\frac{U_0}{R} - \frac{q}{RC}} = dt$$

Використаємо спосіб внесення константи під знак диференціала

$$\begin{aligned}
& -RC \int_0^q \frac{d(\frac{U_0}{R} - \frac{q}{RC})}{\frac{U_0}{R} - \frac{q}{RC}} = \int_0^{\Delta t} dt \\
& -RC \ln \frac{\frac{U_0}{R} - \frac{q}{RC}}{\frac{U_0}{R}} = \Delta t \Rightarrow \\
& -RC \ln \frac{\frac{U_0}{R} - \frac{q}{RC}}{\frac{U_0}{R}} = \Delta t \quad \text{і оскільки} \quad \frac{q}{C} = U \\
& -RC \ln \frac{U_0 - U}{U_0} = \Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = -RC \ln(1 - \frac{U}{U_0})} \\
& \boxed{\Delta t = RC \ln 10}
\end{aligned}$$

Ми вибрали не найкращий шлях розв'язування.

Громіздкий підінтегральний вираз, довга послідовність викладу, але можна спростити.

ІІ спосіб. За правилом Кірхгофа

$$R \frac{dq}{dt} + U = U_0$$

В попередньому випадку ми переходили до двох змінних q та t . Краще буде перейти до змінних U та t . Для цього диференціюємо рівняння

$$\begin{aligned}
q &= CU \quad \Rightarrow \\
dq &= C dU \quad \text{тоді} \\
RC \frac{dU}{dt} &= U_0 - U
\end{aligned}$$

Розділяємо змінні

$$RC \frac{dU}{U_0 - U} = dt \Rightarrow dt = -RC \frac{d(U_0 - U)}{U_0 - U}$$

Знак мінус з'являється при внесенні константи під диференціал

$$\int_0^{\Delta t} dt = -RC \int_0^{0,9U_0} \frac{d(U_0 - U)}{U_0 - U} \Rightarrow \Delta t = -RC \ln \frac{U_0 - 0,9U_0}{U_0}$$

$$\boxed{\Delta t = RC \ln 10}$$

Задача 13 . [3. №3.171]

Конденсатор заповнений діелектриком з проникністю $\varepsilon = 2,1$, втрачає за час $\tau = 3,0 \times 10^{-6}$ половину наданого йому заряду. Вважаючи, що зменшення заряду відбувається лише внаслідок протікання його через діелектричну прокладку, знайти її питомий опір.

$\varepsilon = 2,1$ $\tau = 180 \text{с}$ $q = \frac{q_0}{2}$ $\rho - ?$	Запишемо рівняння неперервності $-\frac{dq}{dt} = \int_s \vec{j} d\vec{s} \quad (13.1)$
---	--

Закон Ома в локальній формі

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (13.2)$$

Підставимо (13.2) в (13.1)

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \oint_S \vec{E} d\vec{s}$$

Оскільки за теоремою Гауса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}$$

то

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0\rho} q$$

Розділимо змінні та інтегруємо

$$\int_{q_0}^{\frac{q_0}{2}} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{\epsilon\epsilon_0\rho} \int_0^\tau dt$$

$$\ln \frac{1}{2} = -\frac{1}{\epsilon\epsilon_0\rho} \tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{\tau}{\epsilon\epsilon_0 \ln 2}}$$

Тут ми внесли знак мінус під логарифм.

Задача 14. [3. №3.172]

Коло складається з джерела постійної е.р.с. $\mathcal{E}$ і послідовно приєднаних до нього опору R та конденсатора C . Внутрішній опір джерела нехтовно малий. В момент часу $t = 0$ ємність конденсатора різко зменшили в η разів. Знайти струм в колі як функцію часу t .

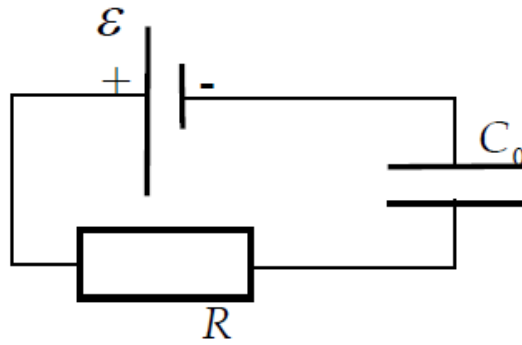
$$\varepsilon$$

$$R, C$$

$$t = 0$$

$$\eta = \frac{C_0}{C}$$

$$I = f(t) - ?$$



На рисунку показана електрична схема до початку відліку часу.

$$I = 0, U_C = \varepsilon, C_0 = \frac{q}{\varepsilon}$$

При різкому зменшенні ємності конденсатора, а це можна досягнути наприклад збільшенням відстані між пластинами, або при видаленні діелектричної прокладки між пластинами, величина заряду q конденсатора не може зменшитись різко, а різко зросте напруга на конденсаторі

$$U = \frac{q}{C}$$

при цьому відбудеться перерозподіл зарядів, що означає наявність струму в колі з початковим значенням

$$I_0 = \frac{U - \varepsilon}{R}.$$

Оскільки за умовою $C = \frac{C_0}{\eta}$ і в початковий момент часу $q = \varepsilon C_0$ отримаємо

$$U = \frac{q}{C} = \frac{\eta q}{C_0} = \frac{\eta \varepsilon C_0}{C_0} = \eta \varepsilon \Rightarrow I_0 = \frac{\eta \varepsilon - \varepsilon}{R}$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}(\eta - 1)$$

Запишемо II правило Кірхгофа

$$IR + U = \varepsilon \Rightarrow IR = -\frac{q}{C} + \varepsilon$$

Диференціюємо дане рівняння по часу

$$R \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{C} \frac{dq}{dt}$$

Згідно означення струму $I = \frac{dq}{dt}$ перепишемо

$$R \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{C} I$$

Диференціальне рівняння першого ступеня з двома змінними розв'язується шляхом інтегрування після розділення змінних

$$\begin{aligned} \frac{dI}{I} &= -\frac{1}{RC} dt \\ \int_{I_0}^{I(t)} \frac{dI}{I} &= -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{I(t)}{I_0} = -\frac{1}{RC} t \end{aligned}$$

Потенціюючи матимемо

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC} t}$$

Підставимо величини I_0 та $C \Rightarrow$ $I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (\eta - 1) e^{-\frac{\eta}{RC_0} t}$

Задача 15. [З. №3.197]

Відомий опір провідника R , що не залежить від температури та загальна теплоємність C . В момент часу $t = 0$, на нього подали постійну напругу U . Найдти залежність температури провідника від часу, вважаючи, що теплова потужність, котра випромінюється ним у навколишній простір, $q = k(T - T_0)$, де $k = \text{const}$, T_0 - температура навколишнього середовища та провідника в початковий момент.

R, C, U	Кількість теплоти, що виділяється в провіднику при проходженні струму dQ іде на нагрівання провідника dQ_1 та на виділення в навколишній простір dQ_2
$t = 0$	
$q = k(T - T_0)$	
$k = \text{const}$	
$T = f(t) - ?$	

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 \Rightarrow$$

$$\frac{U^2}{R} dt = CdT + qdt \quad (15.1)$$

Враховуючи умову

$$\frac{U^2}{R} dt = CdT + k(T - T_0)dt \Rightarrow CdT = \left(\frac{U^2}{R} - k(T - T_0)\right)dt$$

і розділяючи змінні отримаємо

$$\frac{CdT}{\frac{U^2}{R} - k(T - T_0)} = dt \Rightarrow$$

$$\frac{dT}{\frac{U^2}{kR} + T_0 - T} = \frac{k}{C} dt \quad (15.2)$$

Введемо позначення $(\frac{U^2}{kR} + T_0) = a$ тоді (15.2) запишемо

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{a-T} = \frac{k}{C} \int_0^t dt \Rightarrow -\ln \frac{T-a}{T_0-a} = \frac{k}{C} t \Rightarrow \frac{T-a}{T_0-a} = e^{-\frac{kt}{C}}$$

замінюючи a отримаємо

$$T = T_0 + \frac{U^2}{kR} \left(1 - e^{-\frac{kt}{C}} \right)$$

Задача 16. [3. №3.206]

Обкладинкам конденсатора ємністю $C = 2 \text{ мкФ}$ надали різнойменні заряди $q_0 = 1 \text{ мкКл}$. Після обкладки замкнули на опір $R = 5,0 \text{ МОм}$. Знайти:
а) заряд, що пройшов через даний опір за час $\tau = 2,00 \text{ с}$; б) кількість теплоти, що виділилась на опорі за той же час.

$$C = 2 \text{ мкФ}$$

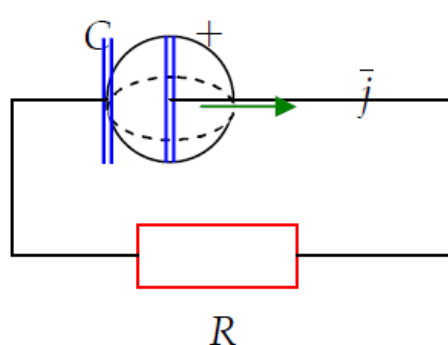
$$q_0 = 1 \text{ мкКл}$$

$$R = 5,0 \text{ МОм}$$

$$\tau = 2,00 \text{ с}$$

$$\Delta q - ?$$

$$Q - ?$$



За другим правилом Кірхгофа

$$IR = \frac{q}{C} \quad (16.1)$$

роль е.р.с. відіграє конденсатор.

Згідно рівняння неперервності

$$I = \oint \vec{j} d\vec{s} = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad (16.2)$$

Підставляючи (16.1) в (16.2) матимемо

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{q}{RC} \Rightarrow -\frac{dq}{q} = \frac{1}{RC} dt$$
$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^\tau dt \Rightarrow \ln \frac{q}{q_0} = -\frac{\tau}{RC} \Rightarrow$$
$$q = q_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} \quad (16.3)$$

$$\Delta q = q_0 - q = q_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}\right)$$

Кількість теплоти можна визначити за законом Джоуля-Ленца

$$dQ = I^2 R dt$$

Величину струму підставимо з рівняння (16.1)

$$dQ = \left(\frac{q}{RC}\right)^2 R dt \Rightarrow dQ = \frac{q^2}{RC^2} dt$$

а величину заряду, оскільки він залежить від часу, з рівняння (16.3)

$$dQ = \frac{1}{RC^2} q_0^2 e^{-\frac{2t}{RC}} dt$$

Інтегрування правої частини рівняння в межах від 0 до τ отримаємо

$$Q = \frac{q_0^2}{2C} \left(1 - e^{-\frac{2\tau}{RC}}\right)$$

Однак кількість теплоти котра виділяється на опорі можна визначити простіше, адже вона буде рівна зменшенню енергії конденсатора

$$dQ = -dW \Rightarrow Q = W_1 - W_2 \Rightarrow Q = \frac{q_0^2}{2C} - \frac{q^2}{2C}$$

Значення q беремо з рівняння (16.3)

$$Q = \frac{q_0^2}{2C} - \frac{q_0^2}{2C} (1 - e^{-\frac{2\tau}{RC}}) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{q_0^2}{2C} (1 - e^{-\frac{2\tau}{RC}})}$$

Задача 17 [3.№ 3.208]

Сила струму в колі змінюється за законом $I = I_0 \sin \omega t$. Знайти кількість теплоти, що виділиться в провіднику опором $R = 10 \cdot \text{Ом}$ за четверть періоду (від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{T}{4}$, де $T = 10\text{с}$).

$I = I_0 \sin \omega t$ $R = 10 \cdot \text{Ом}$ $t_1 = 0, t_2 = \frac{T}{4}$ $T = 10\text{с}$	Кількість теплоти, що виділяється в провіднику при проходженні струму dQ за законом Джоуля-Ленца $dQ = I^2 R dt$
$T(t) - ?$	

Враховуючи умову

$$dQ = I_0^2 R \sin^2 \omega t \cdot dt \quad (17.1)$$

Понизимо степінь синуса

$$dQ = I_0^2 R \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) \cdot dt \quad (17.2)$$

$$\int_0^Q dQ = \frac{I_0^2 R}{2} \left(\int_0^{\frac{T}{4}} dt - \int_0^{\frac{T}{4}} \cos 2\omega t dt \right)$$

зважаючи, що $\omega = \frac{2\pi}{T}$ після інтегрування матимемо

$$Q = \frac{I_0^2 R}{2} \left(\frac{T}{4} - \left(\frac{T}{4\pi} \sin \frac{2\pi}{T} 2 \frac{T}{4} \right) \right) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{I_0^2 R T}{8}}$$

ПОСТІЙНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ

Задача 18. [З. №3.221]

Точковий заряд рухається зі швидкістю $v = 900 \frac{M}{c}$. В деякий момент часу в точці спостереження P напруженість електричного поля цього заряду $E = 600 \frac{B}{M}$, а між векторами $\vec{E}$ та $\vec{v}$ кут $\alpha = 30^\circ$. Знайти індукцію B магнітного поля, що утворює даний заряд в точці P в цей момент часу.

$v = 900 \frac{M}{c}$
 $E = 600 \frac{B}{M}$
 $\alpha = 30^\circ$
 $B - ?$

Магнітне поле заряду, що рухається з $v < c$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^3} [\vec{v}, \vec{r}] \quad (18.1)$$

Напрямок вектора $\vec{B}$ визначають за правилом правої трійки векторів або за мнемонічним правилом «свердлика» яке іноді також називають правилом «штопора». В нашому випадку в точці P вектор магнітної індукції $\vec{B}$ буде напрямлений за площину рисунка, що й позначено хрестиком. Розписуючи векторний добуток в правій частині рівняння (18.1), запишемо величину модуля вектора $\vec{B}$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^3} v r \sin \alpha \quad \text{або}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^2} v \sin \alpha \quad (18.2)$$

З формули для напруженості електричного поля точкового заряду

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

величину $\frac{q}{r^2} = 4\pi\epsilon_0 E$ підставимо в (18.2) тоді

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} 4\pi\epsilon_0 E v \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{B = \mu_0 \epsilon_0 E v \sin \alpha} \quad (18.3)$$

Для простоти обчислень доцільно використати співвідношення, що об'єднує магнітну сталу μ_0 , електричну сталу ϵ_0 зі швидкістю світла у вакуумі c

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}},$$

тоді рівняння (18.3) матиме вигляд

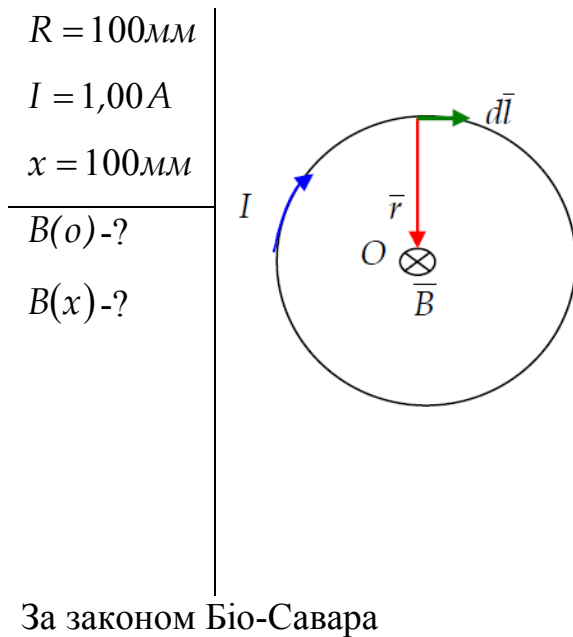
$$\boxed{B = \frac{1}{c^2} E v \sin \alpha}$$

Задача 19. [3. №3.222]

По круговому витку радіусом $R = 100\text{мм}$ з тонкого дроту циркулює струм $I = 1,00\text{А}$. Знайти магнітну індукцію:

а) в центрі витка;

б) на осі витка на відстані віддаленій від центру на $x = 100\text{мм}$



Як просять в умові задачі спочатку знайдемо магнітну індукцію в центрі витка. При напрямі струму за годинниковою стрілкою, як показано на рисунку вектор $\vec{B}$ в точці O напрямлений перпендикулярно за площину рисунка згідно правила правої трійки векторів.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad (19.1)$$

Нескінченно малий вектор $d\vec{l}$, що співпадає з напрямом струму направимо по дотичній і від нього до точки O проведемо радіус-вектор. Модуль вектора магнітної індукції

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2},$$

оскільки, кут між векторами $(d\vec{l}, \vec{r}) = \frac{\pi}{2}$

Тоді зважаючи що $r = R$ матимемо

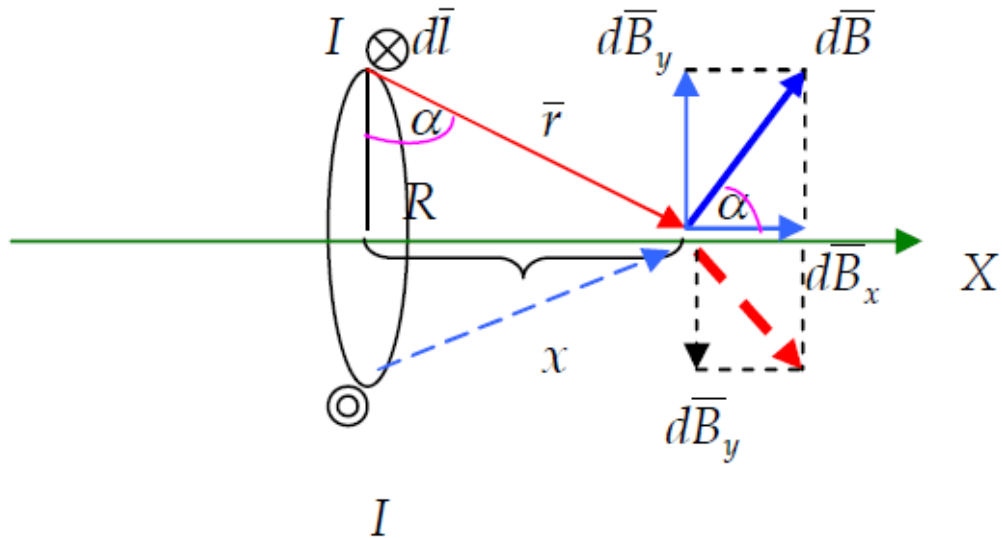
$$\int_0^{B_0} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow$$

$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$

(19.2)

Даючи відповідь на пункт б) ми побачимо, що відповідь на пункт а) можна отримати інакше.

На вісі X зобразимо кільце перпендикулярно до площини рисунка.



Напрямок струму, котрий співпадає з вектором $d\vec{l}$ покажемо так, що в верхній частині кільця він іде «від нас» а в нижній «до нас». Від $d\vec{l}$ проведемо радіус-вектор до довільної точки на осі. Очевидно, що кут між векторами $(d\vec{l}, \vec{r}) = \frac{\pi}{2}$.

Побудуємо вектор $d\vec{B}$ і згідно правила правої трійки векторів він буде перпендикулярним до радіус-вектора. Модуль вектора магнітної індукції

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2},$$

розкладемо на дві взаємно перпендикулярні складові.

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \alpha,$$

$$dB_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha$$

Складова

$$dB_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha$$

вельми цікава, хоча б тому що при інтегруванні ми отримаємо нуль. Але ж це можна зрозуміти без інтегрування. Якщо ми виберемо $d\vec{l}$ в нижній частині кільця, то побачимо, що у-складова $d\vec{B}_y$ напрямлена протилежно так що в сумі отримаємо нуль. Тоді як х-складові всі мають один напрям.

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \alpha$$

З геометричних міркувань запишемо

$$r^2 = x^2 + R^2, \quad \cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

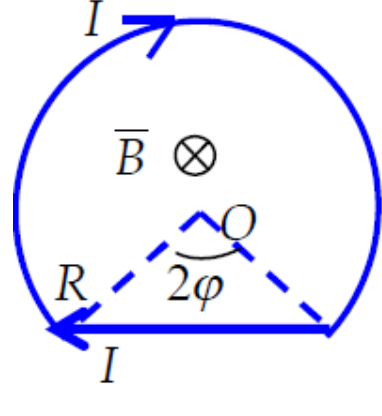
$$\int_0^{B(x)} dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi(x^2 + R^2)} \frac{R}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl$$

$$\boxed{B(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (19.3)$$

Для магнітної індукції в центрі витка $B(0)$ достатньо підставити в (19.3) $x = 0$ і ми отримаємо результат що і в рівнянні (19.2).

Задача 20. [3. №3.225]

Струм $I = 5\text{ A}$ тече вздовж тонкого замкнутого провідника. Радіус вигнутої ділянки провідника $R = 120\text{ мм}$, кут $2\varphi = 90^\circ$ (див. рис.). Знайти магнітну індукцію в точці O .

$I = 5\text{ A}$ $R = 120\text{ мм}$ $2\varphi = 90^\circ$ $B_O = ?$		При заданому напрямі струму вектор магнітної індукції в точці O напрямлений перпендикулярно за площину рисунка згідно правила правої трійки векторів.
$\vec{B}_O = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (20.1)$		

І оскільки вектор $\vec{B}_1$, що утворюється вигнутою ділянкою, має той же напрям що і вектор $\vec{B}_2$ від прямолінійної ділянки, то $B_O = B_1 + B_2$, тобто сумі модулів цих величин.

При визначенні B_1 скористуємось наведеним в пункті а) попередньої задачі але з іншими межами інтегрування.

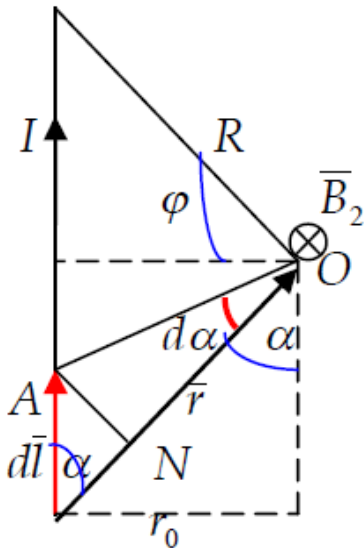
$$\int_0^{B_1} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{\frac{3}{2}\pi R} dl \Rightarrow$$

$$\underline{B_1 = \frac{3}{8} \frac{\mu_0 I}{R}} \quad (20.2)$$

Для визначення B_2 використаємо окремий рисунок.

На прямому відрізку провідника виділимо вектор $d\vec{l}$ і від нього проведемо радіус-вектор до точки O , в якій визначаємо величину індукції магнітного поля.

Модуль вектора магнітної індукції за
законом Біо-Савара буде



$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \sin \alpha \quad (20.3)$$

В цьому рівнянні змінними є dl , α , B_2
 r , тому для переходу до двох змінних щоб
мати змогу про інтегрувати, використаємо
геометричні співвідношення з рисунка.

До речі, абсолютно аналогічні міркування використовувались в [1] при
розв'язуванні задачі [№3.11]. З рисунку $AN = dl \sin \alpha$, і воно ж
 $AN = r d\alpha$, тобто $dl \sin \alpha = r d\alpha$ і тепер (20.3) матиме вигляд

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r d\alpha}{r^2} \Rightarrow$$

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\alpha}{r} \quad (20.4)$$

Величину r визначимо з $\frac{r_0}{r} = \sin \alpha$ і $\frac{r_0}{R} = \cos \varphi$ тепер (20.4)

перепишемо

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R \cos \varphi} \sin \alpha \cdot d\alpha$$

або

$$\int_0^{B_2} dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R \cos \varphi} \int_{\frac{\pi}{2}-\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi} \sin \alpha \cdot d\alpha \Rightarrow$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R \cos \varphi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \right] \Rightarrow$$

За допомогою тригонометричних перетворень отримаємо:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R \cos \varphi} [\sin \varphi) - (-\sin \varphi)] \Rightarrow$$

$$\underline{B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \operatorname{tg} \varphi} \quad (20.5)$$

Підставляючи (20.2) і (20.5) в (20.1) матимемо

$$\boxed{B_O = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \left(\frac{3}{4} \pi + \operatorname{tg} \varphi \right)}$$

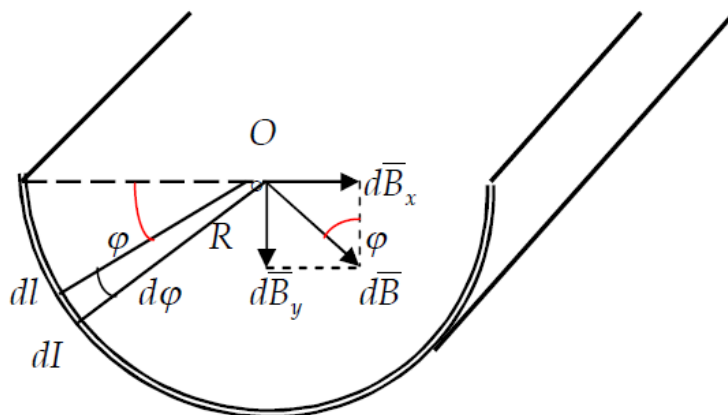
Задача 21. [З. №3.228]

Струм $I = 11,0 \text{ A}$ тече по довгому прямому провіднику, переріз котрого має форму тонкого півкільця радіусом $R = 5,0 \text{ см}$. Знайти індукцію магнітного поля в центрі півкільця точці O .

$$I = 11,0 \text{ A}$$

$$R = 5,0 \text{ см}$$

$$B_O - ?$$



Розглянемо нескінченно малу частинку півкільця dl по якій проходить струм dI напрямлений від нас. Утворений ним вектор $d\vec{B}$ матиме напрям, як

показано на рисунку перпендикулярно до радіуса. Розкладемо $d\vec{B}$ на дві складових $d\vec{B}_x$ і $d\vec{B}_y$. З рисунка видно, що при симетричному виборі dl з правого боку при розкладі на складові ігрекові протилежно напрямлені і в сумі дадуть нуль, $\int dB_y = 0$ а інтегрування $d\vec{B}_x$ і дасть нам шукане значення B_0 , напрям якого співпадатиме з $d\vec{B}_x$.

Для прямого провідника по якому тече струм dI модуль вектора магнітної індукції буде

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi R} dI \quad (21.1)$$

Оскільки нас цікавить x-складова, то як видно з рисунку

$$dB_x = dB \sin \varphi$$

або

$$dB_x = \frac{\mu_0}{2\pi R} dI \sin \varphi \quad (21.2)$$

Для зменшення кількості змінних використаємо поняття лінійної густини струму, тобто запишемо величину струму, що приходить на одиницю довжини перерізу

$$\frac{dI}{dl} = \frac{I}{\pi R}$$

Тут I - весь струм, що тече через переріз заданий в умові.

Тоді:

$$dI = \frac{I}{\pi} \frac{dl}{R}$$

і якщо ще скористатись основною властивістю центрального кута, що відношення довжини дуги до радіуса рівне величині центрального кута в радіанах, тоді

$$\frac{dl}{R} = d\varphi$$

і рівняння (21.2) матиме вигляд

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \varphi \cdot d\varphi$$

Як видно з рисунку величина кута φ змінюється від нуля до π

$$\int_0^{B_O} dB_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \int_0^{\pi} \sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi}$$

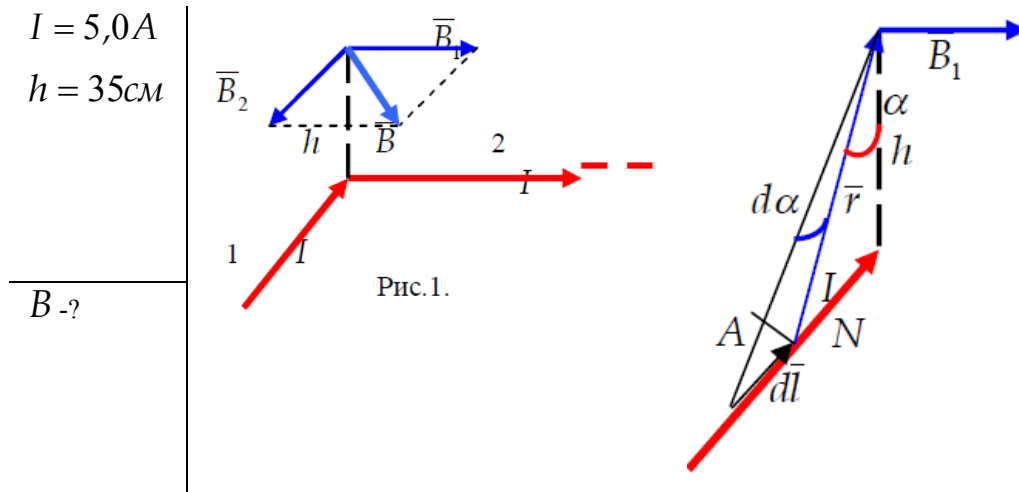
Підставляючи значення кута φ матимемо

$$\boxed{B_O = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}}$$

Відмітимо що вектор індукції магнітного поля в точці O при вибраному нами напрямі струму, буде спрямований праворуч.

Задача 22. [3. №3,230]

Довгий провідник зі струмом $I = 5,0\text{A}$ зігнутий під прямим кутом. Знайти магнітну індукцію в точці, що розташована від площини провідника на $h = 35\text{см}$ на перпендикулярі, котрий проходить через точку перегину.



Ділянка провідника 1 в заданій точці створить індукцію $\vec{B}_1$ вектор якої визначається за правилом правої трійки векторів і направлений паралельно напрямку струму в ділянці 2. Аналогічно $\vec{B}_2$ буде антипаралельний напрямку струму в ділянці 1.

Тоді згідно принципу суперпозиції

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

А модуль вектора індукції

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} . \quad (22.1)$$

Отже проблема зводиться до визначення B_1 і B_2 .

Для визначення B_1 використаємо закон Біо-Савара.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

Модуль вектора $\vec{B}_1$ запишемо

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \alpha \quad (22.2)$$

Виділимо на ділянці 1 нескінченно малий вектор $d\vec{l}$, напрям якого співпадає з напрямом струму. Проведемо радіус-вектор від $d\vec{l}$ до точки, в якій ми визначаємо B_1 .

Використовуючи геометричні співвідношення (аналогічні в *задачі №3.225*) запишемо $dl \cos \alpha = r d\alpha \Rightarrow \frac{dl}{r} = \frac{d\alpha}{\cos \alpha}$, тоді рівняння (22.2) запишемо

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} d\alpha \quad (22.3)$$

Враховуючи що $\frac{h}{r} = \cos \alpha \Rightarrow r = \frac{h}{\cos \alpha}$ підставимо в (22.3)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{h} \cos \alpha \cdot d\alpha \Rightarrow \int_0^{B_1} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cdot d\alpha$$

Результат інтегрування буде

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot h}$$

Зрозуміло, що аналогічним способом знайдемо B_2

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot h}$$

Використовуючи теорему Піфагора (22.1) отримаємо

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot l} \sqrt{2}$$

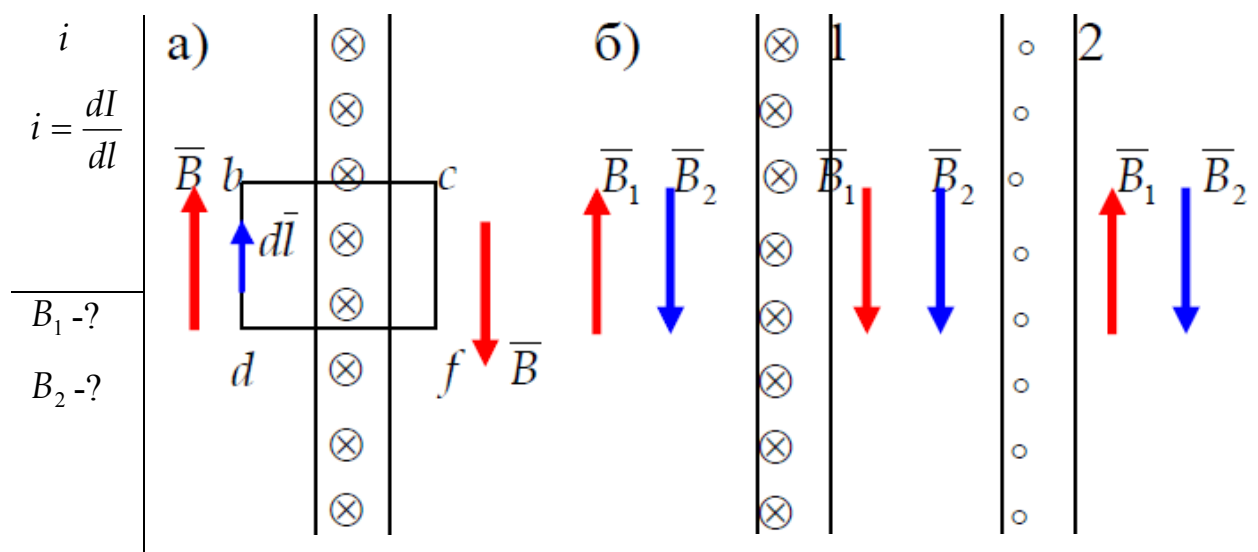
До речі, правильну відповідь можна отримати визначаючи магнітну індукцію використовуючи теорему про циркуляцію для нескінченно довгого провідника беручи $\frac{1}{2}$ величини, тобто $B_1 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot l}$ і відповідно $B_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot l}$. Це некоректно. Бо якщо провідник не нескінчений то змінюється конфігурація поля і теорема про циркуляцію не працює.

Задача 23. [3. №3,232]

Знайти індукцію магнітного поля створеного струмом, рівномірно розподіленим:

а) по площині з лінійною густиною i ;

б) по двох паралельних площинах з лінійними густинами i та $-i$.



На рисунку до пункту а) зображений переріз площини і струм спрямований від нас, що показано за допомогою хрестиків. Напрямок вектора магнітної індукції визначаємо за правилом правої трійки векторів, що й позначено на рисунку. Величину вектора магнітної індукції будемо визначати за допомогою теореми про циркуляцію

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{вн}} \quad (23.1)$$

Ліва частина рівняння – циркуляція вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру L , а права – добуток магнітної сталої μ_0 на той струм, що знаходиться всередині контуру.

Замкнутий контур зобразимо у вигляді прямокутника $befd$ і виберемо напрям обходу контуру $d\vec{l}$ за годинниковою стрілкою. Тоді ліву частину рівняння (23.1) розпишемо

$$\int_b^c \vec{B} d\vec{l} + \int_c^f \vec{B} d\vec{l} + \int_f^d \vec{B} d\vec{l} + \int_d^b \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{вн}} \quad (23.2)$$

Для визначення струму, що знаходиться в контурі з даних в умові

$$i = \frac{dI}{dl} \Rightarrow dI = i dl,$$

тоді (23.2) перепишемо

$$\int_b^c B dl \cos(\vec{B} d\vec{l}) + \int_c^f B dl \cos(\vec{B} d\vec{l}) + \int_f^d B dl \cos(\vec{B} d\vec{l}) + \int_d^b B dl \cos(\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 i \int_0^l dl$$

Перший і третій інтеграли лівої частини рівняння рівні нулю, тому що в цьому випадку кут між $\vec{B}$ і $d\vec{l}$ рівний $\frac{\pi}{2}$, а $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

$$\int_c^f B dl \cos(\vec{B} d\vec{l}) + \int_d^b B dl \cos(\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 i \int_0^l dl$$

На відрізку bd напрямки векторів $\vec{B}$ і $d\vec{l}$ збігаються, кут дорівнює нулю, а $\cos 0 = 1$ і якщо $bd = l$ в результаті інтегрування матимемо

$$2Bl = \mu_0 i \cdot l \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2}}$$

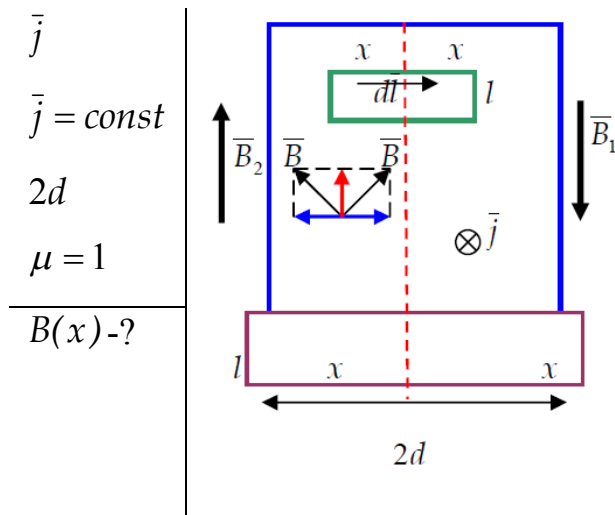
З отриманого результату видно, що ззовні поле однорідне, тобто не залежить від відстані і у всіх точках однакове, хоча має різні напрямки з різних боків площини.

б) Якщо ми маємо дві площини з протилежними напрямками струмів, як добре видно з рисунка між площинами вектори індукції мають один напрям і за принципом суперпозиції $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ а за пластинами по тій же причині поле буде відсутнє. За результатами попереднього пункту величина поля між пластинами буде в два рази більше, тобто

$$\boxed{B = \mu_0 i}$$

Задача 24. [3. №3,233]

Однорідний струм густиною $\vec{j}$ тече всередині необмеженої площини товщиною $2d$ паралельно до її поверхні. Знайти індукцію магнітного поля цього струму як функцію відстані x від середньої площини пластини $\mu = 1$.



Визначимо індукцію магнітного поля $B(x < d)$, тобто всередині площини з використанням теореми про циркуляцію

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{j} d\vec{s} \quad (24.1)$$

Виберемо замкнутий контур – прямокутник довжиною $2x$ та шириною l . При обході контуру за годинниковою стрілкою перепишемо (24.1)

$$\int_0^l \vec{B} d\vec{l} + \int_0^{2x} \vec{B} d\vec{l} + \int_0^l \vec{B} d\vec{l} + \int_0^{2x} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_0^d \vec{j} d\vec{s} \quad (24.2)$$

Вектор густини струму $\vec{j}$ напрямлений за площину рисунка, що означає що вектор індукції зліва від середньої площини буде спрямований вгору, а з правого боку вниз. Оскільки горизонтальні складові вектора індукції, як видно з рисунка, в сумі дають нуль, то в лівій частині рівняння (24.2) другий і четвертий інтеграли будуть рівні нулю, тобто

$$\int_0^l \vec{B} d\vec{l} + \int_0^l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_0^d \vec{j} d\vec{s}$$

Тоді ліва частині рівняння буде рівна $B \cdot 2l$, а права, тобто струм що пронизує площу обмежену контуром буде рівна $\mu_0 j 2xl$ тому що вектор нормалі співпадає з вектором густини струму $\vec{j}$, тобто

$$2B \cdot l = \mu_0 j 2xl \Rightarrow \boxed{B(x < d) = \mu_0 j x}$$

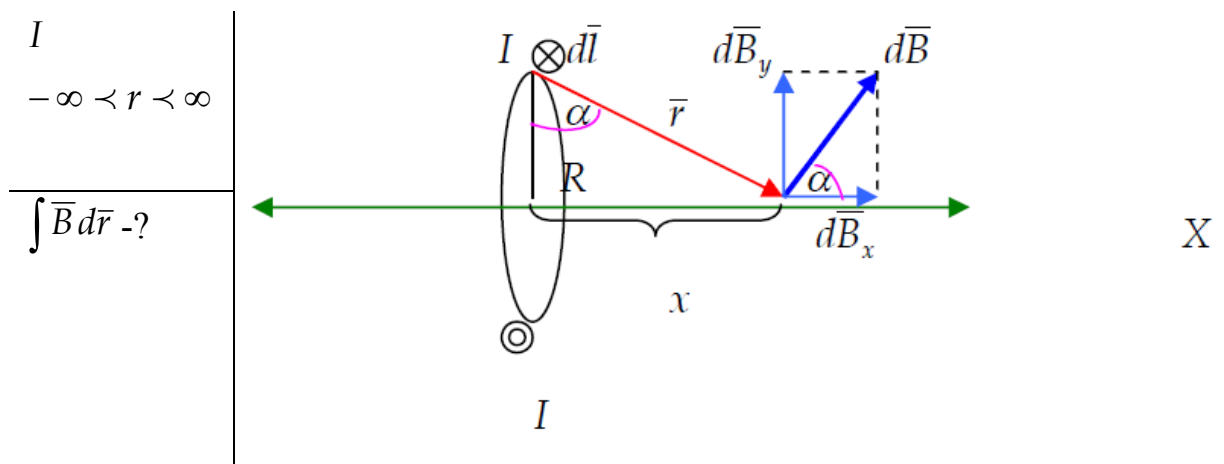
Для випадку ($x \succ d$) виберемо аналогічний контур тоді

$$\int_0^l B dl + 0 + \int_0^l B dl = \mu_0 \int_0^d j 2l dx \Rightarrow \boxed{B(x \succ d) = \mu_0 j d}$$

Важливо відмітити що всередині площини магнітне поле залежить від відстані і ліворуч від середньої площини напрямлене вертикально вгору а ліворуч - вниз. Такий же напрям має індукція поля обабіч площини, правда ззовні поле однорідне, тобто не залежить від відстані і у всіх точках однакове.

Задача 25. [3. №3,236]

Для кругового витка зі струмом I знайти інтеграл $\int \vec{B} d\vec{r}$ вздовж осі витка в межах від $-\infty$ до ∞ . Пояснити отриманий результат.



Круговий виток розташований перпендикулярно площині рисунку, причому напрям струму у верхній точці кільця напрямлений від нас (позначення хрестик) а в нижній до нас (позначення точка).

За законом Біо-Савара знайдемо індукцію магнітного поля на осі кільця на відстані x . $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$, модуль вектора $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$,

оскільки, кут між векторами $(d\vec{l}, \vec{r}) = \frac{\pi}{2}$.

В проекціях на осі

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \alpha, \quad \text{а} \quad \int dB_y = 0$$

Традиційно використовуємо геометричні співвідношення для зменшення кількості змінних.

$$r^2 = x^2 + R^2; \quad \cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}},$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl$$

$$\int_0^B dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow B(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ми визначили величину магнітної індукції в довільно вибраній точці $B(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{B} d\vec{r} = \int_{-\infty}^{\infty} B(x) dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} B(x) dx = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

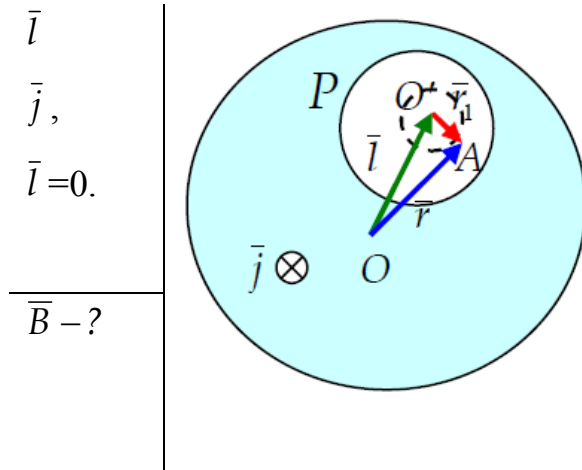
Зробимо заміну $x = R \tan \alpha \Rightarrow dx = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha$ тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(x) dx = \frac{\mu_0 I}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cdot d\alpha = \mu_0 I$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} B(r) dr = \mu_0 I}$$

Задача 26. [3. №3,238]

В однорідному довгому прямому провіднику круглого перерізу є кругла циліндрична порожнина, вісь якої паралельна осі дроту і зміщена від центру на відстань $\vec{l}$. По провіднику тече постійний струм з густиною $\vec{j}$. Знайти індукцію магнітного поля всередині порожнини. Розглянути випадок $\vec{l}=0$.



Точку А вибираємо довільно на відстані $\vec{r}_1$ від центра порожнини. Від центра провідника точки О проведемо радіус-вектор $\vec{r}$ до точки А. Центр порожнини точку O' з'єднаємо з точкою А радіус-вектором $\vec{r}_1$.

Підходи до розв'язування даної задачі дуже подібні до задачі №3.25 наведеної в [1, ст.23], а також до задачі №1.231 в [2, ст.20], що є ще одним доказом того, що всі розділи фізики тісно пов'язані.

Для того щоб ми могли використати теорему про циркуляцію, ми уявно заповнимо порожнину таким же провідником. Тоді ми зможемо знайти індукцію в точці А, вибираючи замкнутий контур радіуса ОА тобто B_{OA} і окремо для контуру радіусом $O'A$ - $B_{O'A}$. тоді за принципом суперпозиції індукція в точці А

$$\vec{B}_A = \vec{B}_{OA} - \vec{B}_{O'A} \quad (26.1)$$

Знак мінус по причині відсутності провідника в порожнині.

За теоремою про циркуляцію $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{s} \Rightarrow$ для замкнутого контуру радіуса ОА

$$B_{OA} 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 ,$$

що в векторному вигляді буде

$$\bar{B}_{OA} = \frac{\mu_0}{2} [\bar{j}, \bar{r}] \quad (26.2)$$

Відповідно для контуру радіусом $O'A$

$$\oint_{L_1} \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 \int_{S_1} \bar{j} d\bar{s} \Rightarrow B_{O'A} 2\pi r_1 = \mu_0 j \pi r_1^2$$

в векторному вигляді буде

$$\bar{B}_{O'A} = \frac{\mu_0}{2} [\bar{j}, \bar{r}_1] \quad (26.3)$$

Якщо зауважити, що $\bar{r} = \bar{l} + \bar{r}_1 \Rightarrow$

$$\bar{l} = \bar{r} - \bar{r}_1 \quad (26.4)$$

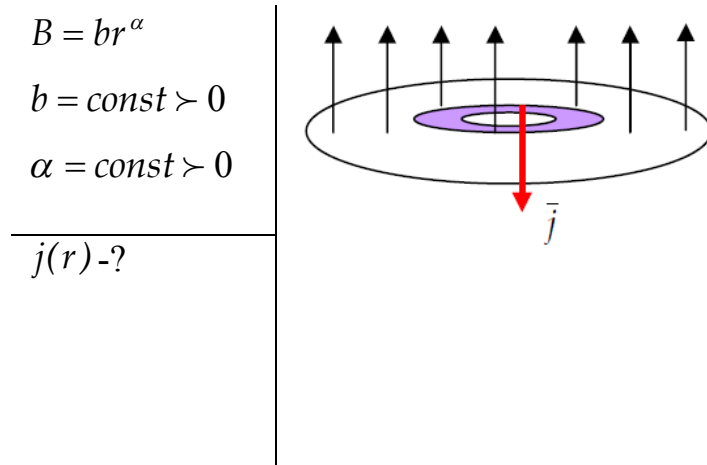
Рівняння (26.1) з врахуванням (26.2), (26.3), (26.4) запишемо у векторній формі

$$\boxed{\bar{B}_A = \frac{\mu_0}{2} [\bar{j}, \bar{l}]}$$

Задача 27. [З. №3,239]

Знайти густину струму як функцію відстані r від осі аксіально-симетричного паралельного потоку електронів, якщо індукція магнітного

поля всередині потоку залежить від r як $B = br^\alpha$, де b та α - додатні константи.



Виділимо замкнутий контур у вигляді нескінченно вузького кільця радіусом r і шириною dr . За теоремою про циркуляцію

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{j}(r) d\vec{s} \quad (27.1)$$

Площу кільця знайдемо як

$$ds = 2\pi r dr,$$

тоді (27.1) матиме вигляд

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_s j(r) 2\pi r dr \quad (27.2)$$

Лівий інтеграл рівняння (27.2) ми можемо брати, тому що у всіх точках контуру L радіусом r буде сталою $\vec{B}$, а правий – ні, тому що вид функції $j(r)$ невідомий.

$$B 2\pi r = 2\pi \mu_0 \int_s j(r) r dr$$

після скорочування і заміни B з умови матимемо

$$br^{\alpha}r = \mu_0 \int_s j(r)rdr \Rightarrow$$

$$br^{\alpha+1} = \mu_0 \int_s j(r)rdr \quad (27.3)$$

Щоб позбавитись від інтеграла в правій частині диференціюємо рівняння (27.3)

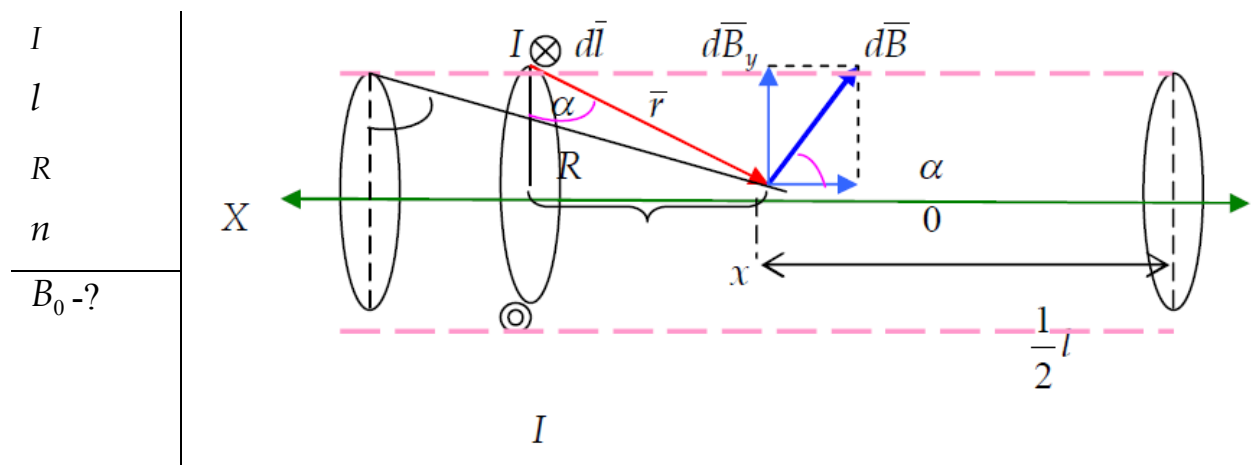
$$b(\alpha + 1)r^{\alpha}dr = \mu_0 j(r)rdr$$

і після скорочування отримаємо

$$j(r) = \frac{b(\alpha + 1)}{\mu_0} r^{\alpha-1}$$

Задача 28. [№3,240]

Одношарова котушка (соленоїд) має довжину l та радіус перерізу R . Число витків на одиницю довжини n . Знайти індукцію магнітного поля в центрі котушки, якщо її струм I .



Визначимо величину індукції магнітного поля, яку створює один виток соленоїда (вважаємо його кільцевим струмом) розташований на довільній відстані від його центру.

За законом Біо-Савара знайдемо індукцію магнітного поля на осі кільця на відстані x . $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$, модуль вектора $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$, оскільки, кут між векторами $(d\vec{l}, \vec{r}) = \frac{\pi}{2}$. В проекціях на осі

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \alpha, \quad \int dB_y = 0$$

$$r^2 = x^2 + R^2, \quad \cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}},$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl$$

$$\int_0^B dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow B_{01}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Тепер необхідно інтегрувати по всіх витках. $B_0 = \int B dN$ Число витків на одиницю довжини $n = \frac{N}{l} = \frac{dN}{dx}$. $\Rightarrow dN = n dx$

$$B_0 = \int \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2 n dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Зробимо заміну $x = R \tan \alpha \Rightarrow dx = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha$ тоді

$$(R^2 + R^2 \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}} = R^3 \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)^{\frac{3}{2}} = R^3 \frac{1}{\cos^3 \alpha} \Rightarrow$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 I n}{2} 2 \int_0^{\alpha_0} \cos \alpha \cdot d\alpha \Rightarrow B_0 = \mu_0 n I \sin \alpha_0$$

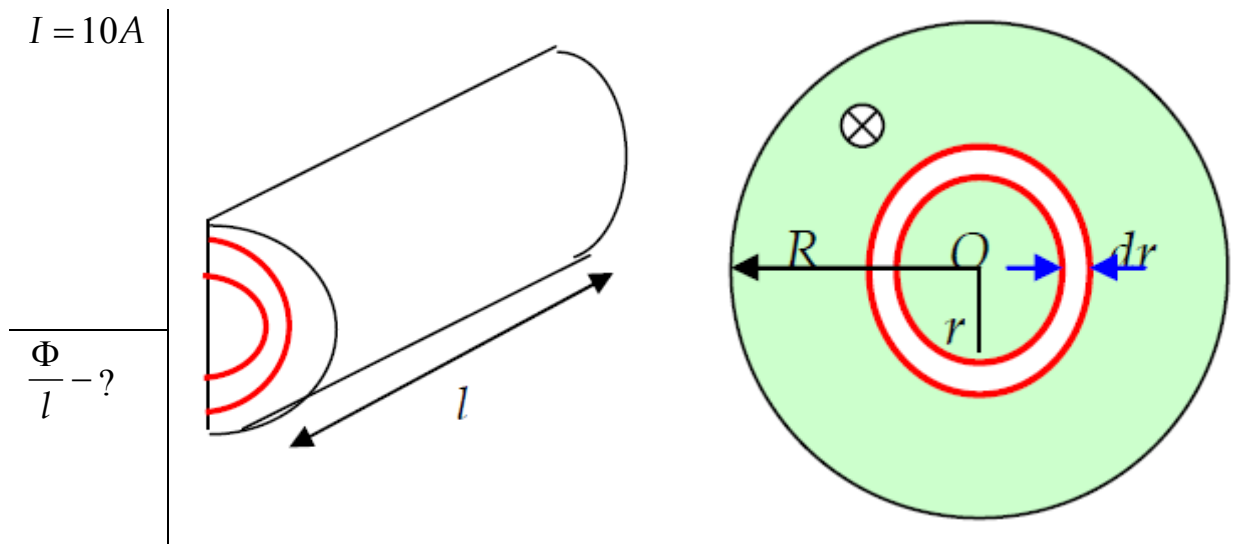
і оскільки як видно з рисунка $\sin \alpha_0 = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{l}\right)^2}}$

Матимемо

$$B_0 = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{l}\right)^2}}$$

Задача 29. [3. №3,244]

Струм $I = 10\text{A}$ тече довгим прямим дротом круглого перерізу. Нехтуючи впливом речовини дроту, знайти магнітний потік через одну з половин його осьового перерізу в розрахунку на метр довжини.



Зрозуміло, що величина магнітної індукції B залежатиме від відстані від центру, тобто $B = B(r)$. Для визначення B на довільній відстані r від центру дроту використаємо теорему про циркуляцію

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{s} \quad (29.1)$$

Густина струму $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2}$. Площа кільцевої смужки $ds = 2\pi r dr$.

Результат інтегрування рівняння (29.1)

$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 \Rightarrow$$

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi R^2} r \quad (29.2)$$

Магнітний потік $d\Phi = \vec{B} d\vec{s}$, для нескінченно малої частини потоку $d\Phi$, що відповідає половині осьового перерізу дроту $ds = l dr$, тобто

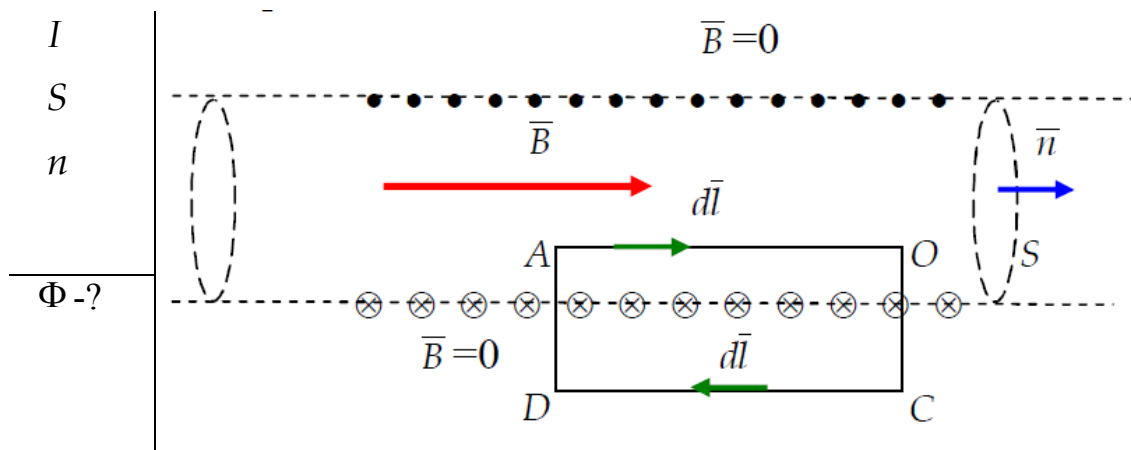
$$d\Phi = B(r) l dr \quad (29.3)$$

Підставимо (29.2) в (29.3)

$$\int_0^R d\Phi = \frac{\mu_0 I \cdot l}{2\pi R^2} \int_0^R r dr \Rightarrow \boxed{\frac{\Phi}{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}}$$

Задача 30. [З. №3,245]

Є дуже довгий прямий соленоїд зі струмом I . Площа поперечного перерізу соленоїда S , кількість витків на одиницю довжини n . Знайти потік вектора $\vec{B}$ через торець соленоїда.



На рисунку показано поздовжній переріз соленоїда. Струм I , що циркулює у витках соленоїда показано так, що з верхньої частини витка він виходить «до нас», а в нижню входить «від нас». Якщо згідно умови соленоїд дуже довгий прямий, то всередині нього буде утворюватись однорідне магнітне поле $\vec{B} = \text{const}$. Ззовні поле буде відсутнє $\vec{B} = 0$. Величина потоку вектора $\vec{B}$

$$\Phi = \vec{B} \vec{S} \quad \text{або} \quad \Phi = BS \cos(\vec{B} \vec{n})$$

Оскільки кут між векторами $\vec{B}$ і вектором нормалі $\vec{n}$ рівний нулю, а $\cos(\vec{B} \vec{n}) = 1$ то

$$\Phi = BS$$

і задача зводиться до визначення величини індукції магнітного поля B . А її ми можемо визначити використовуючи теорему про циркуляцію вектора $\vec{B}$.

Виберемо замкнутий контур довжиною l тоді

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{вн}} \quad (30.1)$$

Замкнутий контур зобразимо у вигляді прямокутника $AOCD$, де $AO = l$ і виберемо напрям обходу контуру $d\vec{l}$ за годинниковою стрілкою. Тоді ліву частину рівняння (30.1) розпишемо

$$\int_A^O \vec{B} d\vec{l} + \int_O^C \vec{B} d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{вн}} \quad (30.2)$$

Інтеграли з межами інтегрування OC та DA рівні нулю оскільки в скалярному добутку $\cos = 0$. Інтеграл з межами інтегрування CD рівний також нулю, оскільки там $\vec{B} = 0$. Так як замкнутий контур $AOCD$ пронизує кількість струмів N , то

$$I_{\text{вн}} = NI,$$

і рівняння (30.2) перепишемо

$$\int_A^O \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 NI \Rightarrow Bl = \mu_0 NI \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

Зважаючи, що $\frac{N}{l} = n$ - кількість витків на одиницю довжини, то

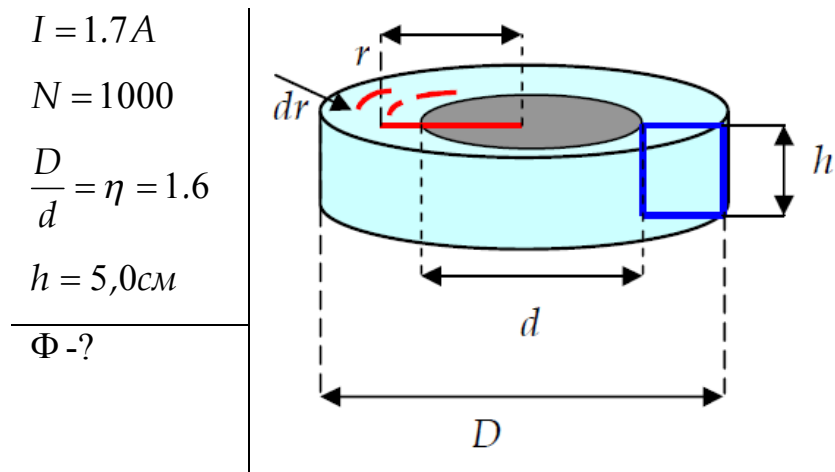
$$B = \mu_0 n I$$

Тепер потік вектора $\vec{B}$ через торець соленоїда буде

$$\boxed{\Phi = \mu_0 n I S}$$

Задача 31. [3. №3,246]

Маємо кільцевий соленоїд прямокутного перерізу. Знайти магнітний потік через цей переріз якщо струм в обмотці $I = 1.7 \text{ A}$, загальне число витків $N = 1000$, відношення зовнішнього діаметру до внутрішнього $\frac{D}{d} = \eta = 1.6$ і товщина $h = 5,0 \text{ см}$



Виберемо замкнутий контур L радіусом r . Тоді за теоремою про циркуляцію

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{вн}}$$

оскільки в одному витку струм I то сумарний струм, що пронизує контур

$$I_{\text{вн}} = NI,$$

тоді

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 NI$$

Результат інтегрування

$$B 2\pi r = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Величину потоку запишемо

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{s},$$

де $ds = h dr$.

Тоді

$$d\Phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \frac{dr}{r}$$

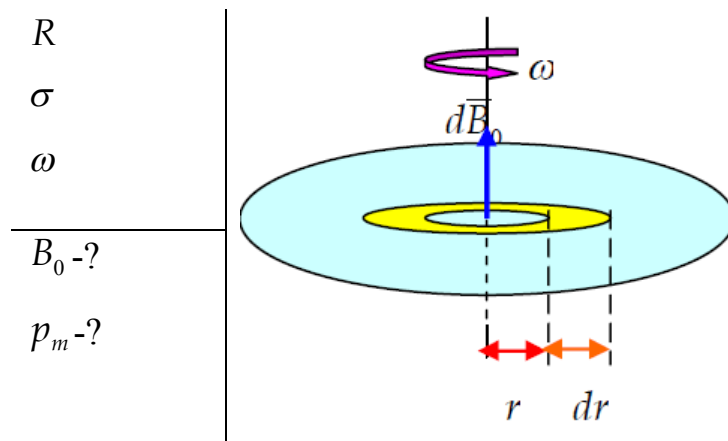
$$\int_0^{\Phi} d\Phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \frac{D}{d}}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \eta}$$

Задача 32. [№3. 3,250]

Непровідний тонкий диск радіусом R рівномірно заряджений з одного боку з поверхневою густиною зарядів σ , обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Знайти:

- індукцію магнітного поля в центрі диску;
- магнітний момент диску.



Розглянемо смужку, що має протяжність радіальної координати $r \rightarrow r + dr$. Площа смужки $ds = 2\pi r dr$, і її заряд:

$$\sigma = \frac{dq}{ds} \Rightarrow dq = \sigma \cdot ds \Rightarrow dq = 2\pi\sigma \cdot r dr$$

Оскільки струм, то є заряд, що проходить через поперечний переріз провідника в одиницю часу, то через якийсь довільний переріз полоси при

обертанні диску за час одного оберту (період) $T = \frac{2\pi}{\omega}$ пройде елементарний струм

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{dq\omega}{2\pi} \Rightarrow dI = \frac{2\pi\sigma\omega \cdot r dr}{2\pi}.$$

$$dI = \sigma\omega \cdot r dr$$

Відомо, що кільцевий струм в центрі створює індукцію магнітного поля величина якої буде

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r}, \text{ тоді}$$

$$dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr}{2r} \Rightarrow \int_0^{B_0} dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R dr$$

Індукція магнітного поля в центрі диску буде

$$B_0 = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} R$$

Магнітний момент кільцевого струму

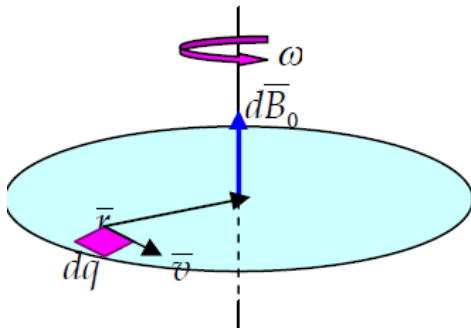
$$d\bar{p}_m = dI \pi \cdot r^2 \bar{n},$$

де $\bar{n}$ - вектор нормалі до поверхні диску. Повний магнітний момент знайдемо інтегруванням

$$p_m = \int \pi \cdot r^2 dI = \pi \sigma \omega \int_0^R r^3 dr \Rightarrow$$

$$p_m = \frac{1}{4} \pi \sigma \omega \cdot R^4$$

Інакше величину індукції можна визначити використовуючи наступні міркування. Виберемо на поверхні диску нескінченно малу площадку ds , заряд якої dq вважаємо точковим. Відомо, що магнітне поле точкового заряду, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$ визначається $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$, а для нашого випадку



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

При заданому напрямі обертання напрям вектора магнітної індукції визначається за правилом векторного добутку – права трійка векторів і буде спрямований вгору, як показано на рисунку.

Модуль вектора $d\vec{B}$ запишемо

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dqv}{r^2} \sin(\vec{v}, \vec{r}).$$

Враховуючи, що $v = \omega r$ отримаємо

$$\int_0^{B_0} dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R dr \Rightarrow \boxed{B_0 = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} R}$$

Задача 33. [З. №3,261]

Квадратна рамка зі струмом $I = 0,90A$ розташована в одній площині з довгим прямим провідником, по якому тече струм $I_0 = 5,0A$. Сторона рамки $a = 8,0cm$. Через середини протилежних сторін проходить вісь рамки

паралельна провіднику і віддалена від нього на відстань, котра в $\eta = 1,5$ більша за сторону рамки.

Знайти:

а) силу Ампера, що діє на рамку;

б) механічну роботу необхідну для повільного обороту рамки навколо осі на 180° .

$$I = 0,90 \text{ A},$$

$$I_0 = 5,0 \text{ A},$$

$$a = 8,0 \text{ см},$$

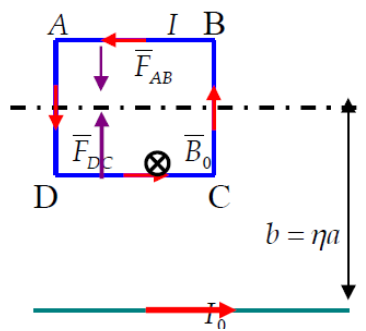
$$b = \eta a,$$

$$\eta = 1,5$$

$$\alpha = 180^\circ$$

$$F_A - ?$$

$$A - ?$$



Виходячи з умови симетрії задачі $F_{AD} = -F_{BC}$ і їх сума рівна нулю. Сили, що діють на ділянки AB та CD теж протилежно напрямлені, але модулі їх різні, оскільки величина поля що діє на ділянку CD за теоремою про циркуляцію буде

$$B_{CD} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \cdot a(\eta - \frac{1}{2})}, \quad B_{AB} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \cdot a(\eta + \frac{1}{2})},$$

або перепишемо

$$B_{CD} = \frac{\mu_0 I_0}{\pi \cdot a(2\eta - 1)}, \quad B_{AB} = \frac{\mu_0 I_0}{\pi \cdot a(2\eta + 1)}$$

Сила Ампера, $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$, оскільки вектор $d\vec{l}$, що співпадає з напрямом струму для всіх сторін рамки перпендикулярний вектору $\vec{B} \Rightarrow dF = IdlB$ для сторони CD

$$\int_0^a dF = \frac{\mu_0 I I_0}{\pi a(2\eta - 1)} \int_0^a dl \Rightarrow F_{CD} = \frac{\mu_0 I I_0}{\pi(2\eta - 1)};$$

Відповідно

$$F_{AB} = \frac{\mu_0 I_0}{\pi(2\eta + 1)}$$

Для визначення сили Ампера, що діє на рамку $F_A = F_{DC} - F_{AB}$, тобто

$$F_A = \frac{\mu_0 I_0}{\pi} \left(\frac{1}{2\eta - 1} - \frac{1}{2\eta + 1} \right) \Rightarrow \boxed{F_A = \frac{2\mu_0 I_0}{\pi(4\eta^2 - 1)}}$$

ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

Задача 34. [3. №3,299]

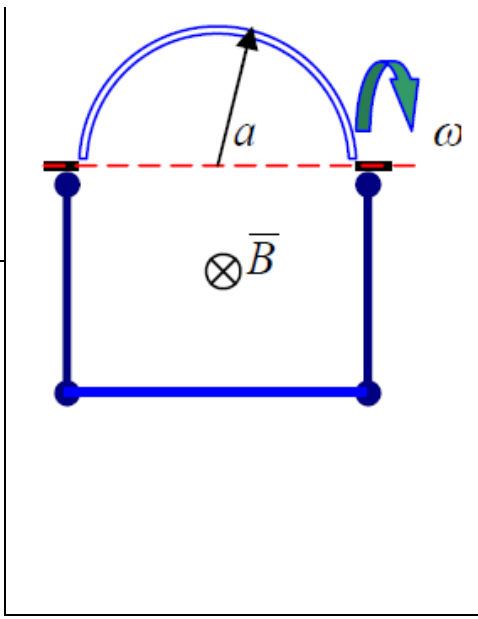
Контур знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією B . Верхню частину контуру у вигляді півкола радіусом a обертають з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі. В момент $t = 0$ магнітний потік через контур максимальний. Знайти е.р.с. індукції в контурі як функцію часу t .

B

a

$t = 0 \Rightarrow \Phi = \Phi_{\max}$

$\varepsilon(t) - ?$



$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\Phi = \vec{B}\vec{s} = Bs \cos(\vec{B}\vec{n})$$

Оскільки $t = 0 \Rightarrow \Phi = \Phi_{\max}$, це означає, що $\cos(\vec{B}\vec{n}) = \cos \omega \cdot t$, тобто початкова фаза рівна нулю, а фаза рівна одиниці.

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \frac{\pi \cdot a^2}{2} B \cos \omega \cdot t$$

Величина потоку, що залежить від часу

$$\Phi(t) = \frac{\pi \cdot a^2}{2} B \cos \omega \cdot t$$

Беремо похідну від потоку по часу

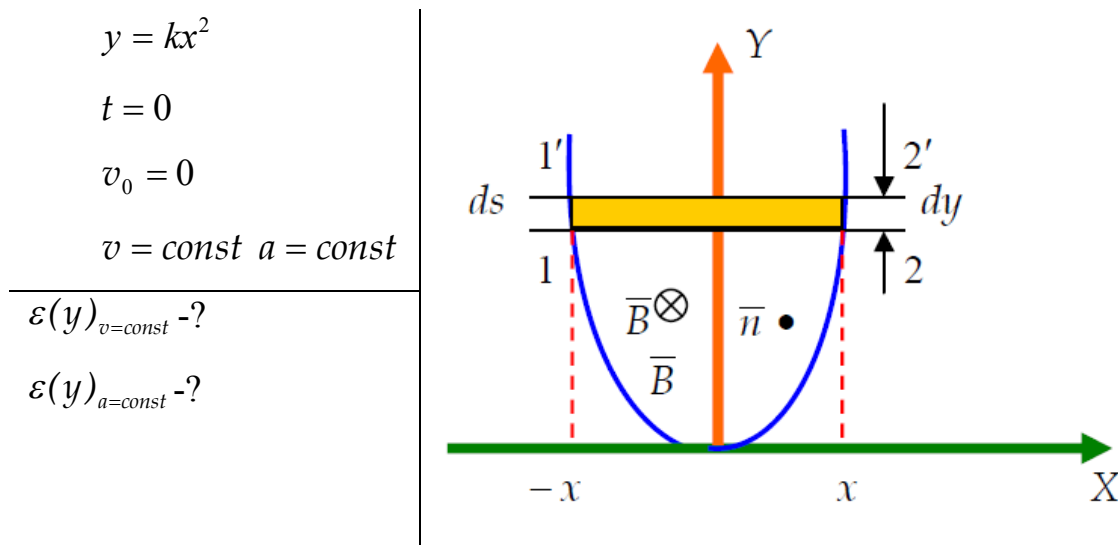
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi \cdot a^2}{2} B \omega \sin \omega \cdot t \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{\pi \cdot a^2}{2} B \omega \sin \omega \cdot t}$$

Задача 35. [З. №3,300]

Дріт, що має форму параболи $y = kx^2$ знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією. З вершини параболи в момент $t = 0$ почали переміщувати перемичку 1-2. Знайти е.р.с. індукції в контурі, що утворюється, як функцію y , якщо перемичку переміщують:

а) зі сталою швидкістю v

б) з постійним прискоренням a , причому в момент $t = 0$ швидкість перемички була рівна нулю.



Розглянемо перемичку 1-2 в довільний момент часу переміщується в положення 1'–2'. При цьому площа замкнутого контуру зростає на величину

$$ds = 2x dy$$

При цьому зміна магнітного потоку

$$d\Phi = \bar{B} d\bar{s} \Rightarrow$$

$$d\Phi = B ds \cos(\bar{B}, \bar{n}) \quad (35.1)$$

Оскільки вектор $\vec{B}$ напрямлений за площину рисунка, а вектор нормалі $\vec{n}$ до нас то $\cos(\vec{B}, \vec{n}) = -1$, тобто

$$d\Phi = -Bds \quad (35.2)$$

Тепер ds перепишемо замінивши x з рівняння параболи

$$ds = 2\sqrt{\frac{y}{k}} \cdot dy$$

Рівняння (35.2) запишемо

$$d\Phi = -2B\sqrt{\frac{y}{k}} \cdot dy \quad (35.3)$$

За законом електромагнітної індукції Фарадея

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Якщо розділити обидві частини рівняння (35.3) на dt

$$\frac{d\Phi}{dt} = -2B\sqrt{\frac{y}{k}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Зважаючи, що $\frac{dy}{dt} = v$ отримаємо

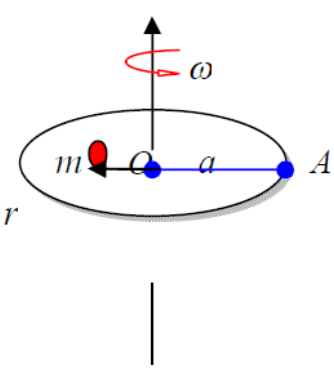
$$\boxed{\varepsilon(y)_{v=const} = 2Bv\sqrt{\frac{y}{k}}}$$

Якщо перемичка буде рухатись вздовж осі Y з сталим прискоренням $a = \text{const}$ то швидкість можна записати $v^2 - v_0^2 = 2ay$ так як $v_0 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2ay}$ і нарешті

$$\varepsilon(y)_{a=\text{const}} = Bv\sqrt{\frac{8a}{k}}$$

Задача 36. [3. №3,301]

Металевий диск радіусом $a = 25\text{см}$ обертають з постійною кутовою швидкістю $\omega = 130 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ навколо осі. Знайти різницю потенціалів між центром та краєм диску, якщо: а) магнітне поле відсутнє, б) наявне зовнішнє перпендикулярне до диску однорідне магнітне поле з індукцією $B = 5,0\text{мТл}$

$a = 25\text{см}$ $\omega = 130 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ $B = 5,0\text{мТл}$ $\varphi_O - \varphi_A \text{ -?}$		а). Під дією відцентрової сили відбувається переміщення вільних електронів $F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad (36.1)$ де m маса електрона
--	---	---

Сепарація відбувається поки не зрівняються відцентрові сили та сили електричного поля

$$m\omega^2 r = eE(r) \quad (36.2)$$

де e заряд електрона

З рівняння (36.2)

$$E(r) = \frac{m\omega^2 r}{e} \quad (36.3)$$

З іншого боку напруженість електричного поля зв'язана з різницею потенціалів співвідношенням

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \Rightarrow d\varphi = -E(r)dr \quad (36.4)$$

тоді останнє з врахуванням (3) запишемо

$$\int_{\varphi_O}^{\varphi_A} d\varphi = -\frac{m\omega^2}{e} \int_0^a r dr \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi_O - \varphi_A = \frac{m\omega^2 a^2}{2e}} \quad \underline{\varphi_O - \varphi_A = 3 \cdot 10^{-9} (B)}$$

б). У випадку наявності перпендикулярного магнітного поля B , крім відцентрової сили на рух електронів впливатиме магнітна складова сили Лоренца.

$$F_M = evB \sin(\vec{v}, \vec{B})$$

Тоді рівняння (36.2) запишемо

$$m\omega^2 r + evB = eE(r) \Rightarrow m\omega^2 r + e\omega \cdot rB = eE(r)$$

Рівняння (36.4) з врахуванням останнього буде

$$\int_{\varphi_O}^{\varphi_A} d\varphi = -\frac{m\omega^2}{e} \int_0^a r dr - \omega B \int_0^a r dr \Rightarrow \varphi_O - \varphi_A = \frac{m\omega^2 a^2}{2e} + \frac{\omega \cdot Ba^2}{2}$$

Першим доданком правої частини можна знехтувати, як дуже малим в порівнянні з другим через масу електрона, тому

$$\boxed{\varphi_O - \varphi_A = \frac{\omega \cdot B a^2}{2}}$$

$$\underline{\varphi_O - \varphi_A \approx 20 \cdot 10^{-3} (B)}$$

II спосіб. а) Відцентрові сили виконують роботу проти сил електричного поля по переміщенню електрона

$$dA = ed\varphi \quad (36.5)$$

котра визначається кінетичною енергією обертального руху

$$dA = dW = \frac{\omega^2}{2} dI \quad (36.6)$$

тут $I = mr^2$ – момент інерції електрона

$$dI = 2mrdr \quad (36.7)$$

Тоді (36.6) з врахуванням (36.5) та (36.7) запишемо

$$\int_0^{\Delta\varphi} d\varphi = \frac{m\omega^2}{2e} 2 \int_0^a r dr \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \frac{m\omega^2 a^2}{2e}}$$

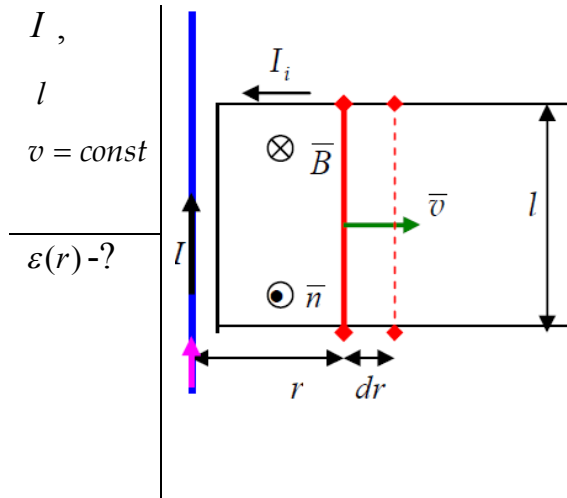
б). При наявності поля $d\varphi = \frac{1}{e} dA \Rightarrow d\varphi = \frac{1}{e} F dr$ оскільки

$F = m\omega^2 r + e\omega \cdot rB$ результат матимемо той, що наведено вище.

Задача 37. [З. №3,302]

Довгий прямий провідник зі струмом I та II подібний провідник з рухомою перетинкою розташовані в одній площині. Перетинку довжиною l

переміщують праворуч з постійною швидкістю v . Знайти е.р.с. індукції в контурі, як функцію відстані r .



$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (37.1)$$

Прямий провідник зі струмом I створюватиме в контурі магнітне поле

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}, \quad (37.2)$$

котре легко визначається за теоремою про циркуляцію вектора $\vec{B}$ ($\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$) що залежить від r . Оскільки величина магнітної індукції при $dr \rightarrow 0$ - $\vec{B} = \text{const}$, то зміна магнітного потоку

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{s} \Rightarrow d\Phi = \vec{B} ds \vec{n}$$

$$d\Phi = B \cdot ds \cos(\vec{B}; \vec{n})$$

Скажемо кілька слів про вектор нормалі $\vec{n}$. В законі електромагнітної індукції (37.1) знак мінус зв'язаний з правилом Ленца, згідно з яким виникаючий в контурі індукційний струм циркулює таким чином, щоб створене ним магнітне поле протидіяло тій причині, що його породила. Оскільки в нашому випадку відбувається зростання величини потоку $d\Phi = \vec{B} ds \vec{n}$ через зростання площі, то індукційний струм буде напрямлений проти руху годинникової стрілки і створюване ним індукційне магнітне поле, напрям якого визначаємо за правилом правого гвинта буде направлене до нас, як і вектор нормалі $\vec{n}$.

Отже між вектором індукції зовнішнього поля і вектором нормалі $\vec{n}$ кут рівний $180^\circ \Rightarrow d\Phi = -B \cdot ds$, де $ds = l dr$, тоді (37.1) запишемо

$$\varepsilon = \frac{B \cdot l \cdot dr}{dt}$$

і зазначаючи, що $\frac{dr}{dt} = v$ з врахуванням (37.2) отримаємо

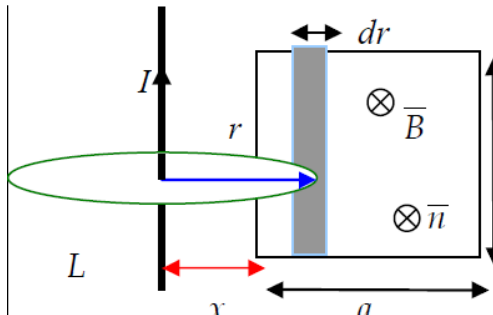
$$\varepsilon(r) = \frac{\mu_0 I \cdot l v}{2\pi \cdot r} .$$

Задача 38. [З. №3,303]

Квадратна рамка зі стороною a та довгий прямий провідник зі струмом I розташовані в одній площині. Рамку поступально зміщують направо з постійною швидкістю v . Знайти е.р.с. індукції в рамці, як функцію відстані x .

$I ,$
 $a ,$
 $v ,$
 $v = const$

 $\varepsilon(x) - ?$



За законом Фарадея

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (38.1)$$

магнітний потік

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{s} \Rightarrow$$

$$d\Phi = B \cdot ds \cos(\vec{B}, \vec{n}), \quad (38.2)$$

В вузькій смужці площею

$$ds = a dr \quad (38.3)$$

індукція магнітного поля $\vec{B}$ залишатиметься сталою і легко визначається за теоремою про циркуляцію вектора $\vec{B}$ за контуром L

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (38.4)$$

і оскільки потік магнітної індукції через рамку залежить від відстані від провідника зі струмом, обчислимо весь потік підставивши (38.3) та (38.4) в (38.2)

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot a dr \cos(\vec{B} \hat{\cdot} \vec{n}) \Rightarrow \int_0^\Phi d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \cos(\vec{B} \hat{\cdot} \vec{n}) \int_x^{x+a} \frac{dr}{r} \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \cos(\vec{B} \hat{\cdot} \vec{n}) \ln \frac{x+a}{x}$$

Оскільки при віддаленні рамки величина потоку зменшується, за правилом Ленца кут між вектором індукції та вектором нормалі рівний 0° а $\cos(\vec{B} \hat{\cdot} \vec{n}) = 1$ то

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln \frac{x+a}{x} \quad (38.5)$$

Тепер рівняння (38.1)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt} = -v \frac{d\Phi}{dx}$$

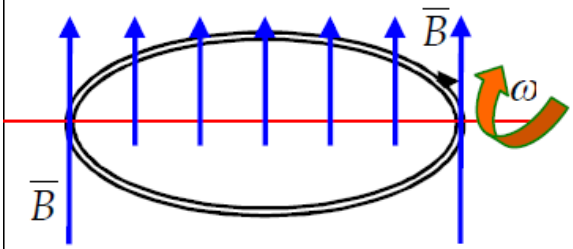
Візьмемо похідну по x в рівнянні (38.5)

$$\varepsilon = -v \frac{d\Phi}{dx} = -v \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \frac{x}{x+a} \left(-\frac{a}{x^2}\right)$$

$$\boxed{\varepsilon = v \frac{\mu_0 I}{2\pi} a^2 \frac{1}{x(x+a)}}$$

Задача 39. [3. №3,307]

Круговий контур, котрий має площу S та опір R крутять з постійною кутовою швидкістю ω навколо його діаметра, який перпендикулярний до однорідного магнітного поля з індукцією B . Нехтуючи магнітним полем індукційного струму, знайти, яким моментом сили $N(t)$ необхідно діяти на контур в цих умовах. В момент $t = 0$ площа контура перпендикулярна до напрямку магнітного поля.

$S,$ $R,$ $\omega,$ $\vec{B} = \text{const}$ B		За законом Фарадея $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow$ $IR = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (39.1)$
$N(t) - ?$		

І оскільки магнітний потік

$$\Phi = BS \cos \omega t \Rightarrow$$

$$I = \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t \quad (39.2)$$

Магнітний момент даного контуру $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ отже

$$p_m = IS \quad (39.3)$$

На контур зі струмом вміщений в однорідне магнітне поле діє механічний момент

$$\vec{N} = [\vec{p}_m \vec{B}],$$

модуль якого

$$N = p_m B \sin(\bar{B}, \bar{n}).$$

При обертанні контуру кут буде змінюватись

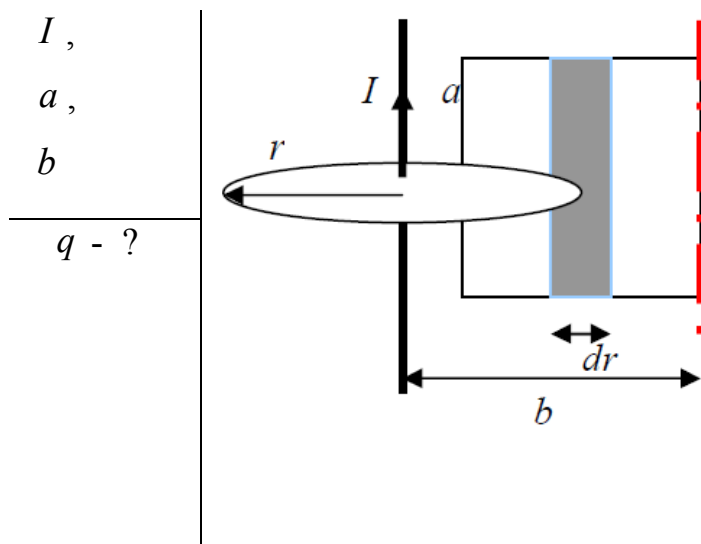
$$N = p_m B \sin \omega t \quad (39.4)$$

Підставляючи (39.2) та (39.3) в (39.4) матимемо

$$N = \frac{B^2 S^2 \omega}{R} \sin^2 \omega t$$

Задача 40. [З. №3,309]

Квадратна дротяна рамка зі стороною a та прямий провідник з постійним струмом I розташовані в одній площині. Опір рамки R . Її перевернули навколо осі, що знаходиться на віддалі b від провідника на 180° . Знайти кількість електрики, що пройшла через рамку.



За законом Фарадея

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \\ IR &= -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \\ \frac{dq}{dt} R &= -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \\ dq &= -\frac{1}{R} d\Phi \quad (40.1) \end{aligned}$$

зміна магнітного потоку $d\Phi = \bar{B} d\bar{s}$ отже

$$d\Phi = B \cdot ds, \quad (40.2)$$

Прямий провідник зі струмом I створюватиме в контурі на відстані r магнітне поле

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}, \quad (40.3)$$

(котре легко визначається за теоремою про циркуляцію вектора $\vec{B}$ $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$), що залежить від r , але у проміжку dr величина індукції залишається *const*.

Зміна площі

$$ds = a dr \quad (40.4)$$

тоді (40.1) з врахуванням (40.2), (40.3), та (40.4) запишемо

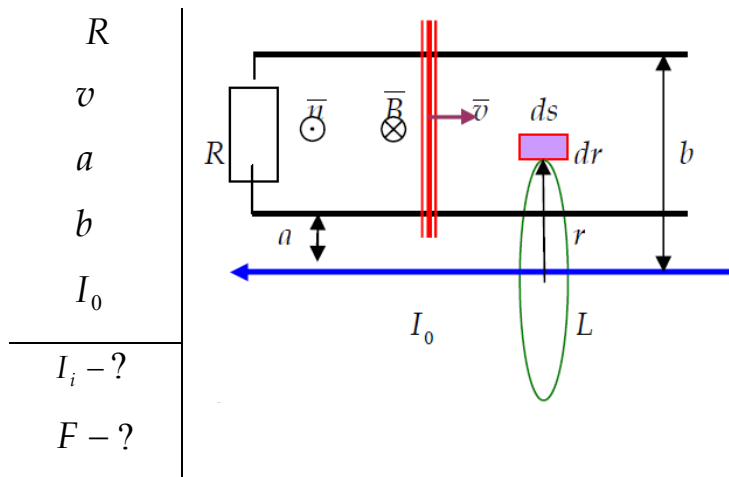
$$\int_0^q dq = -\frac{\mu_0 a I}{2\pi R} \int_{b-a}^{b+a} \frac{dr}{r} \Rightarrow q = -\frac{\mu_0 a I}{2\pi R} \ln \frac{b+a}{b-a} \Rightarrow$$

$$\boxed{q = \frac{\mu_0 a I}{2\pi R} \ln \frac{b-a}{b+a}}$$

Задача 41. [З. №3,310]

На відстанях a та b від довгого прямого провідника з постійним струмом I_0 розташовані два паралельних до нього дроти, замкнуті на одному кінці опором R , по яких без тертя переміщують з постійною швидкістю v стержень-перемичку. Нехтуючи опором дротів стержня та ковзних контактів, а також індуктивністю контуру, знайти:

- величину та напрям індукційного струму в стержні;
- силу, необхідну для утримання постійності швидкості.



Закон електро-магнітної індукції в трактовці Максвела записується

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} d\vec{s} \quad (41.1)$$

Напрямок індукційного струму за правилом Ленца протидіє зростанню магнітного потоку, тому кут між вектором $\vec{B}$ та нормалі $\vec{n}$ рівний 180° .

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int B(r) ds \cos \pi \Rightarrow$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int B(r) ds \quad (41.2)$$

Залежність $B(r)$ можна знайти за теоремою про циркуляцію вектора $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_0 \Rightarrow$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad (41.3)$$

Оскільки швидкість руху стала,

$$ds = vt \cdot dr \quad (41.4)$$

Тут dr нескінченно мала ширина смужки, де індукція магнітного поля $\vec{B}$ залишається незмінною.

Рівняння (41.2) з врахуванням (41.3) та (41.4) матиме вигляд

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} v t \frac{dr}{r} \quad (41.5)$$

Оскільки права частина – циркуляція вектора напруженості електричного поля по замкнутому контуру рівна е.р.с. то

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \varepsilon = I_i R \quad (41.5)$$

запишемо

$$I_i = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \int_a^b \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \cdot v t \frac{dr}{r} \Rightarrow I_i = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \cdot \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} v t \int_a^b \frac{dr}{r} \Rightarrow I_i = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \cdot v t \ln \frac{b}{a} \right)$$

і диференціюючи по часу праву половину рівняння матимемо

$$\boxed{I_i = \frac{1}{R} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \cdot v \ln \frac{b}{a}} \quad (41.6)$$

При $v = \text{const}$ сила з якою мають діяти на перемичку має бути рівною силі Ампера. $F = F_A$

$$d\vec{F}_A = I_i [d\vec{r}, \vec{B}]$$

і оскільки кут між векторами $d\vec{r}$ та $\vec{B}$ рівний $\frac{\pi}{2}$ то

$$dF_A = I_i B(r) dr$$

з рівняння (41.3) підставимо значення тоді

$$\int_0^{F_A} dF = I_i \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

і після інтегрування з врахуванням значення індукційного струму з (41.6) матимемо

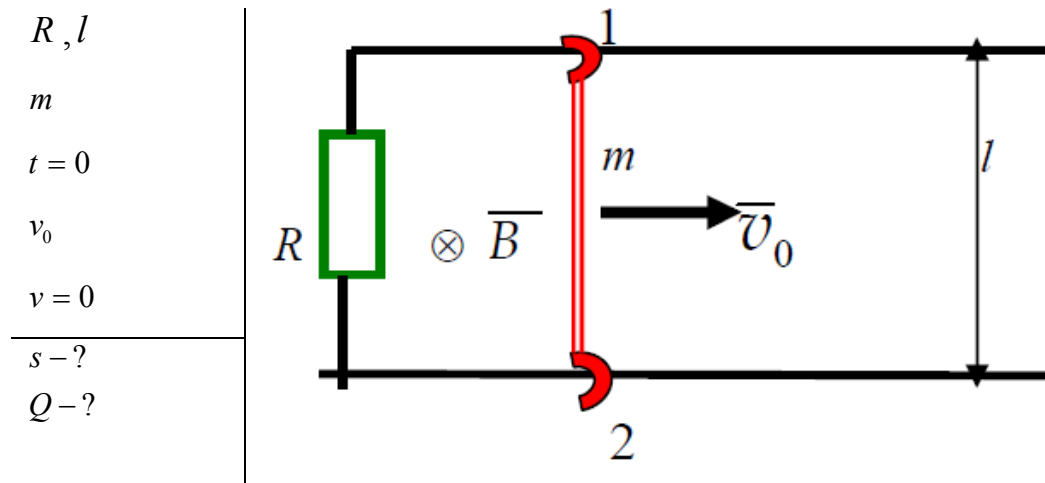
$$F = \frac{\mu_0^2 I_0^2}{4\pi^2} \frac{v}{R} \ln^2 \left(\frac{b}{a} \right) \quad (41.7)$$

Величину сили, для утримання постійної швидкості ми можемо визначити значно простіше. Оскільки переміщення відбувається без тертя то потужність механічної дії має бути рівна тепловій потужності, тобто $\bar{F} \cdot \bar{v} = I_i^2 R \Rightarrow F = \frac{I_i^2 R}{v}$ з врахуванням (41.6) отримаємо результат, який виражений рівнянням (41.7).

Задача 42. [З. №3,311]

Провідник 12 масою m ковзає без тертя по двох довгих провідних направляючих, розташованих на відстані l одна від одної. З лівого боку вони замкнуті опором R . Система знаходиться у вертикальному магнітному полі з індукцією B . В момент $t = 0$ провіднику 12 надали початкову швидкість v_0 направлену праворуч. Нехтуючи опором направляючих та стержня 12, а також самоіндукцією, знайти:

- відстань пройдену провідником до зупинки;
- кількість теплоти, котра виділиться при цьому на опорі.



Рівняння руху провідника

$$m \frac{dv}{dt} = -F \quad (42.1)$$

Тут F сила Ампера, гальмівна тому знак мінус. Для визначення сили Ампера

$$F = IBl$$

необхідно визначити струм, використовуючи закон електромагнітної індукції.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} ,$$

зважаючи, що

$$d\Phi = B dS \cos(B, dS)$$

і $dS = l dx$ отримаємо

$$\varepsilon = -B \frac{dS}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv ,$$

тоді сила струму

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{R}$$

і сила Ампера

$$F = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

то рівняння (42.1) запишемо

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{B^2 l^2 v}{R} \quad (42.2)$$

помноживши обидві частини рівняння на переміщення ds , $\frac{ds}{dt} = v$

матимемо:

$$\begin{aligned} m \frac{dv ds}{dt} &= - \frac{B^2 l^2 v}{R} ds \Rightarrow m v dv = - \frac{B^2 l^2}{R} v ds \\ dv &= - \frac{B^2 l^2}{m R} ds \Rightarrow \int_{v_0}^0 dv = - \frac{B^2 l^2}{m R} \int_0^s ds \Rightarrow -v_0 = - \frac{B^2 l^2}{m R} s \Rightarrow \\ &\boxed{s = \frac{m v_0 R}{B^2 l^2}} \end{aligned}$$

або, інакше в (42.2) розділяючи змінні отримаємо

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = - \frac{B^2 l^2}{m R} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = - \frac{B^2 l^2}{m R} t \Rightarrow$$

$$v = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \quad (42.3)$$

або

$$v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

де

$$\tau = \frac{mR}{B^2 l^2} \quad (42.4)$$

тут τ має зміст характерного часу сповільнення стержня. Оскільки, шлях до зупинки

$$s = \int_0^{\infty} v(t) dt \Rightarrow s = v_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = v_0 \tau$$

Тобто

$$\boxed{s = v_0 \frac{mR}{B^2 l^2}}$$

Кількість теплоти за законом Джоуля-Ленца

$$Q = \int_0^{\infty} I^2 R dt$$

Підставимо величину струму

$$Q = \int_0^{\infty} \frac{B^2 l^2 v^2}{R} dt$$

І оскільки швидкість теж залежить від часу з врахуванням (42.3) отримаємо

$$Q = \frac{B^2 l^2}{R} v_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{mv_0^2}{2}$$

Другий спосіб наведемо схематично

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -F, \quad F = IBl \\ IR &= -B \frac{dS}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} \quad I = -\frac{Bl}{R} \frac{dx}{dt} \\ F &= -\frac{B^2 l^2}{R} \frac{dx}{dt} \quad m \frac{dv}{dt} = \frac{B^2 l^2}{R} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \\ dx &= \frac{mR}{B^2 l^2} dv \quad dx = \frac{mR}{B^2 l^2} \int_{v_0}^0 dv \end{aligned}$$

Робота виконана силами поля рівна зміні кінетичної енергії $dA = dK$

$$dK = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv dv, \quad dA = F_A dx,$$

де $F_A = IBl$

Відповідно

$$I = \varepsilon \cdot R = -\frac{d\Phi}{dt} R,$$

причому

$$d\Phi = B l dx \Rightarrow mv dv = F_A dx \Rightarrow mv dv = -B^2 l^2 R \frac{dx}{dt} dx$$

після скорочувань

$$m \int_{v_0}^0 dv = -B^2 l^2 R \int_0^s dx \Rightarrow -mv_0 = -RB^2 l^2 s \Rightarrow \boxed{s = v_0 \frac{mR}{B^2 l^2}}.$$

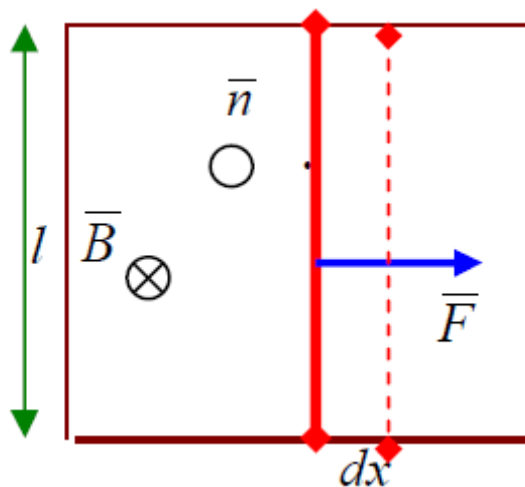
За відсутності тертя, вся кінетична енергія надана провіднику перейшла в тепло.

$$\boxed{Q = \frac{mv_0^2}{2}}$$

Задача 43. [З. №3,312]

По П - подібному провіднику розташованому в горизонтальній площині в однорідному магнітному полі з індукцією B , котре перпендикулярно до площини провідника. Вздовж паралельних сторін провідника може ковзати без тертя провідник-перетинка довжиною l та масою m та опором R . В момент часу $t = 0$ на перетинку почали діяти з постійною горизонтальною силою $F = \text{const}$ і вона почала переміщуватись праворуч. Знайти залежність швидкості від часу, нехтуючи самоіндукцією та опором П – подібного провідника.

$B,$
$B = \text{const}$
$l,$
$m,$
$R,$
$t = 0$
$F = \text{const}$
$v(t) - ?$



За основним рівнянням динаміки

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{F}_A$$

або в проекціях на вісь X

$$m \frac{dv}{dt} = F - F_A$$

де

$$F_A = IBl \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$m \frac{dv}{dt} = F - IBl \quad (43.1)$$

Величину струму знайдемо з закону Фарадея

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad d\Phi = \bar{B} d\bar{s} = B s \cos(\bar{B} \bar{n}) = -Bl dx$$

$$IR = Bl \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$I = \frac{Blv}{R} \quad (43.2)$$

Тепер (43.1) з врахуванням (43.2) перепишемо

$$m \frac{dv}{dt} = F - \frac{B^2 l^2}{R} v \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{F - \frac{B^2 l^2}{R} v} = \frac{1}{m} \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\ln \frac{F - \frac{B^2 l^2}{R} v}{F} = -\frac{B^2 l^2}{mR} t \Rightarrow 1 - \frac{B^2 l^2}{FR} v = e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \Rightarrow$$

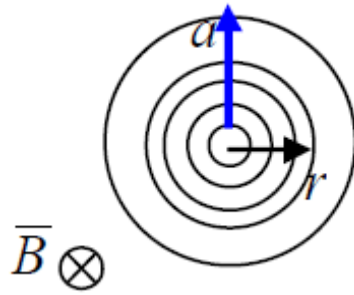
$$\boxed{v(t) = \frac{FR}{B^2 l^2} (1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t})}$$

Задача 44 . [З. №3,314]

Плоска спіраль з дуже великою кількістю витків N , що щільно прилягають один до іншого, знаходиться в магнітному однорідному полі перпендикулярному площині спіралі, що змінюється з часом за законом

$B = B_0 \sin \omega t$, де B_0 та ω - *const*. Зовнішній радіус витків рівний a . Знайти амплітудне значення е.р.с. в спіралі.

N	
$B = B_0 \sin \omega t$	
B_0, ω - <i>const</i>	
a	
ε_m - ?	



$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\Phi_1 = \bar{B}\bar{s} = Bs \cos 180^\circ = -Bs,$$

якщо замість B підставити дані з умови, то $\Phi_1 = -B_0 \pi \cdot r^2 \sin \omega \cdot t$ - магнітний потік через один виток радіуса r .

Тоді е.р.с. що виникає в одному витку

$$\varepsilon_1 = \omega \cdot B_0 \pi \cdot r^2 \cos \omega \cdot t \quad (44.1)$$

Оскільки витки з'єднані послідовно, то

$$\varepsilon_\Sigma = \int \varepsilon_1(r) dN \quad (44.2)$$

Кількість витків на одиницю довжини радіуса $\frac{dN}{dr} = \frac{N}{a}$ отже

$$dN = \frac{N}{a} dr \quad (44.3)$$

тепер (44.2) з врахуванням (44.1) та (44.3) запишемо

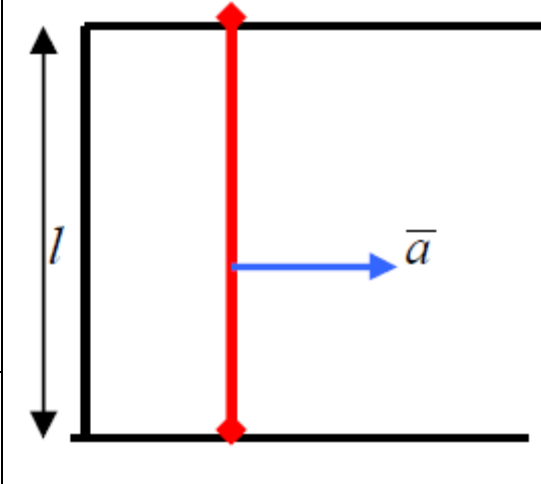
$$\varepsilon = \pi \cdot \omega \cdot B_0 \frac{N}{a} \cos(\omega \cdot t) \int_0^a r^2 dr \Rightarrow \varepsilon = \frac{\pi \cdot \omega \cdot B_0 N \cdot a^2}{3} \cos(\omega \cdot t),$$

звідки амплітудне значення

$$\varepsilon_m = \frac{\pi \cdot \omega \cdot B_0 N \cdot a^2}{3}$$

Задача 45. [З. №3,315]

П - подібний провідник знаходиться в однорідному магнітному полі, котре перпендикулярно до площини провідника та змінюється зі швидкістю $\dot{B} = 0,10 \frac{\text{Тл}}{\text{с}}$. Вздовж паралельних сторін провідника переміщують без початкової швидкості провідник перетинку з прискоренням $a = 10 \frac{\text{см}}{\text{с}}$. Довжина перетинки $l = 20 \text{ см}$. Знайти е.р.с. індукції в контурі через $t = 2,0 \text{ с}$ після початку руху, якщо в початковий момент площа контуру та індукція магнітного поля рівні нулю.

$\dot{B} = 0,10 \frac{\text{Тл}}{\text{с}},$ $a = 10 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ $l = 20 \text{ см}$ $t = 2,0 \text{ с}$ $\varepsilon - ?$		$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (45.1)$ $\Phi = \vec{B}\vec{s} = Bs \cos 180 = -Bs$ $\Rightarrow \Phi = -Bs$ оскільки $B = f(t)$ та $s = f(t)$ то зміна магнітного потоку $d\Phi = -s dB - B ds$
--	--	---

і при діленні обох частин рівняння на dt матимемо

$$-\frac{d\Phi}{dt} = s \frac{dB}{dt} + B \frac{ds}{dt}$$

з врахуванням (45.1) отримаємо

$$\underline{\varepsilon = s \frac{dB}{dt} + B \frac{ds}{dt}} \quad (45.2)$$

Площа змінюється $s(t) = l \cdot x(t)$ і зважаючи, що $x(t) = \int v(t) dt$, а $v(t) = at$

$$\begin{aligned} x(t) &= a \int_0^t t dt \quad \Rightarrow \\ s(t) &= l \frac{at^2}{2} \end{aligned} \quad (45.3)$$

З рівняння зміни площі контуру

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= l \frac{dx}{dt} = l \cdot v(t) = lat \quad \Rightarrow \\ \frac{ds}{dt} &= lat \end{aligned} \quad (45.4)$$

З $\dot{B} = \frac{dB}{dt}$ визначаємо

$$\int_0^B dB = \dot{B} \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad B = \dot{B} \cdot t \quad (45.5)$$

Підставимо (45.3), (45.4). (45.5) в (45.2)

$$\varepsilon = l \frac{at^2}{2} \dot{B} + lat^2 \dot{B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = \frac{3}{2} lat^2 \dot{B}}$$

Задача 46. [3. №3,316]

Всередині довгого соленоїда знаходиться котушка з кількістю витків N та площею поперечного перерізу S . Котушку обертають з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі, що співпадає з її діаметром та перпендикулярною до осі соленоїда. Знайти ЕРС індукції в котушці, якщо індукція магнітного поля змінюється з часом як $B = B_0 \sin \omega t$ і в момент $t = 0$ вісь котушки співпадала з віссю соленоїда.

N	Використаємо закон електромагнітної індукції Фарадея	
S		
ω		
$B = B_0 \sin \omega t$		
$t = 0$		
$\varepsilon - ?$	Оскільки магнітний потік через один виток	
		$\Phi = BS \cos \varphi$ (46.2)
З врахуванням	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ маємо	

$$d\varphi = \omega \cdot dt \Rightarrow \varphi = \omega \cdot t$$

Рівняння (46.2) запишемо як

$$\Phi = BS \cos \omega \cdot t$$

тоді величина потоку через всю котушку з врахуванням того, що індукція змінюється як задано в умові отримаємо

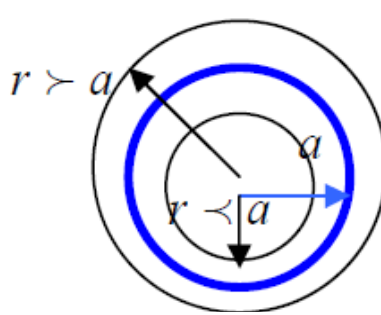
$$\Phi = NB_0 S \cos \omega t \sin \omega t \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2} NB_0 S \sin 2\omega t$$

тоді згідно (46.1) візьмемо похідну $\frac{d\Phi}{dt}$ і отримаємо

$$\varepsilon = NB_0 S \omega \cos 2\omega \cdot t$$

Задача 47. [3. №3,317]

В довгому прямому соленоїді з перерізом радіуса a та числом витків на одиницю довжини n змінюють струм зі сталою швидкістю $\dot{I} = \frac{dI}{dt}$ (А/с). Знайти модуль напруженості вихрового електричного поля, як функцію віддалі від осі соленоїда. Зобразити приблизний графік цієї залежності.

$\dot{I} = \frac{dI}{dt}$ (А/с), a , n $E(r) - ?$		Закон Фарадея в трактовці Максвелла $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s} \quad (47.1)$
--	--	--

Індукція в довгому соленоїді $\vec{B} = const$ в усіх точках і може бути визначена з використанням теореми про циркуляцію матимемо

$$B = \mu\mu_0 nI \quad (47.2)$$

Якщо виберемо контур всередині соленоїда радіусом $r < a$ то площа елемента обмеженого цим контуром $ds = 2\pi \cdot r dr$. Тоді інтеграл в правій частині за умови $\vec{B} \uparrow \downarrow d\vec{s}$

$$\int_S \vec{B} d\vec{s} = -2\pi\mu\mu_0 nI \int_0^r r dr = -\pi\mu\mu_0 nI r^2 \quad (47.3)$$

Підставимо (47.3) в (47.1)

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = \mu\mu_0 n \pi \cdot r^2 \frac{dI}{dt} \Rightarrow E 2\pi \cdot r = \mu\mu_0 n \pi \cdot r^2 \frac{dI}{dt} \Rightarrow E_{r < a} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n \pi \cdot r \frac{dI}{dt}$$

і згідно умови $\dot{I} = \frac{dI}{dt}$ матимемо

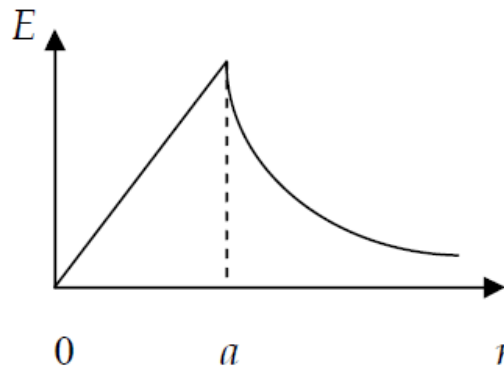
$$E_{r < a} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n \pi \cdot r \dot{I}$$

У випадку $r > a$ $\oint_L \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int_0^{\pi a^2} \bar{B} d\bar{s}$ інтеграл правої частини беруть лише в межах площі перерізу соленоїда, оскільки, зовні соленоїда магнітне поле практично відсутнє, за умови $\bar{B} \uparrow \downarrow d\bar{s}$

$$E 2\pi \cdot r = \mu\mu_0 n \pi \cdot a^2 \frac{dI}{dt} \Rightarrow E_{r > a} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n \frac{dI}{dt} \frac{a^2}{r}$$

$$E_{r > a} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n \dot{I} \frac{a^2}{r}$$

Залежність $E(r)$ – графічно матиме вигляд



Задача 48. [3. №3,320]

Магнітний потік через нерухомий контур з опором R змінюється на протязі часу τ за законом $\Phi = at(\tau - t)$. Знайти кількість теплоти, що виділяється в контурі за цей час. Індуктивністю контуру знехтувати.

$R,$	Закон Джоуля-Ленца
$\Phi = at(\tau - t)$	
τ	
$Q - ?$	$Q = \int_0^{\tau} I^2 R dt .$

Для визначення струму використаємо закон електромагнітної індукції Фарадея

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

з врахуванням умови отримаємо

$$\varepsilon = -\frac{d(at\tau - at^2)}{dt} \Rightarrow \varepsilon = a(2t - \tau) \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{a}{R}(2t - \tau)$$

Звідки

$$Q = \int_0^{\tau} \frac{a^2}{R} (2t - \tau)^2 dt \Rightarrow Q = \frac{a^2}{R} (4 \int_0^{\tau} t^2 dt - 4\tau \int_0^{\tau} t dt + \tau^2 \int_0^{\tau} dt) \Rightarrow$$

$$Q = \frac{a^2}{R} (\frac{4}{3} \tau^3 - 2\tau^3 + \tau^3)$$

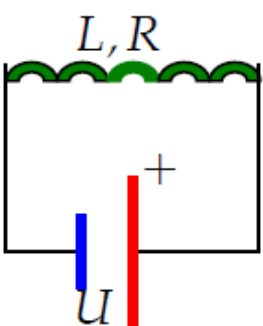
і нарешті отримуємо

$$Q = \frac{a^2 \tau^3}{3R}$$

ІНДУКТИВНІСТЬ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ

Задача 49. [З. №3,324]

Котушку індуктивності $L = 300\text{мГн}$ і опором $R = 140\text{мОм}$. увімкнули до джерела постійної напруги. Через скільки часу струм через котушку досягне $\eta = 50\%$ установленого значення.

$R = 140\text{мОм}$ $L = 300\text{мГн}$ $\eta = 50\%$ $U = \text{const}$ $t - ?$		Якщо значення струму, що встановиться $I_0 = \frac{U}{R} \quad (49.1)$ то $\eta = \frac{I}{I_0} \quad (49.2)$
---	---	---

Зі зміною струму виникає е.р.с. самоіндукції

$$\varepsilon_{ci} = -L \frac{dI}{dt}$$

І за другим правилом Кірхгофа для нашого кола отримаємо

$$RI = U - L \frac{dI}{dt} \quad (49.3)$$

де RI падіння напруги на активному опорі котушки. Рівняння (49.3) можна переписати у вигляді

$$U - RI = L \frac{dI}{dt} \quad (49.4)$$

Введемо нову змінну $u = U - IR$ тоді $du = -RdI$, і зважаючи, що $dI = -\frac{du}{R}$ рівняння (49.4) перепишемо

$$u = -\frac{L}{R} \frac{du}{dt}$$

після розділення змінних отримаємо

$$\frac{du}{u} = -\frac{L}{R} dt \Rightarrow \int_U^{U-IR} \frac{du}{u} = -\frac{L}{R} \int_0^t dt, \Rightarrow \ln \frac{U-IR}{U} = -\frac{L}{R} t$$

Враховуючи (49.1) отримаємо

$$\ln\left(1 - \frac{I}{I_0}\right) = -\frac{L}{R} t \quad (49.5)$$

і з врахуванням рівняння (49.2) остаточно отримаємо

$$\boxed{t = -\frac{R}{L} \ln(1 - \eta)}$$

Цікаво, що з рівняння (49.5) можна отримати рівняння зміни струму з часом

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

де $\tau = \frac{L}{R}$ параметр затухання.

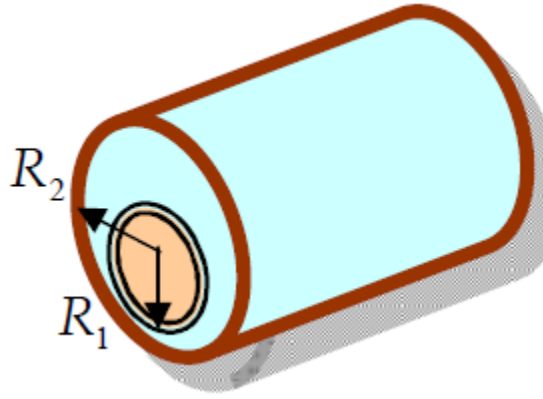
Задача 50. [3. №3,326]

Знайти індуктивність одиниці довжини кабелю, котрий являє собою два тонкостінних коаксіальних циліндри, якщо радіус зовнішнього в $\eta = 3,6$ рази більший від внутрішнього. Магнітну проникність середовища між циліндрами вважати рівною одиниці.

$$\eta = \frac{R_2}{R_1} = 3,6$$

$$\mu = 1$$

$$\frac{L}{l} - ?$$



За наявності струму в кабелі густину енергії магнітного поля можна записати

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0} \quad (50.1)$$

З іншого боку $W = \frac{LI^2}{2} = \int \omega dV$ тому індуктивність запишемо як

$$L = \int \frac{B^2}{\mu\mu_0 I^2} dV \quad (50.2)$$

Індукцію магнітного поля B в між стінному об'ємі визначимо за теоремою про циркуляцію

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 I_{\text{вн}} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r} \quad (50.3)$$

Легко показати, що для контуру $r < R_1$ індукція магнітного поля рівна нулю оскільки струм не пронизує контур, а для $r > R_2$ індукція магнітного поля рівна нулю, тому що сума струмів всередині контуру рівна нулю – по

внутрішньому та зовнішньому тонкостінних циліндрах струми ідуть в протилежних напрямках. Зважаючи, що

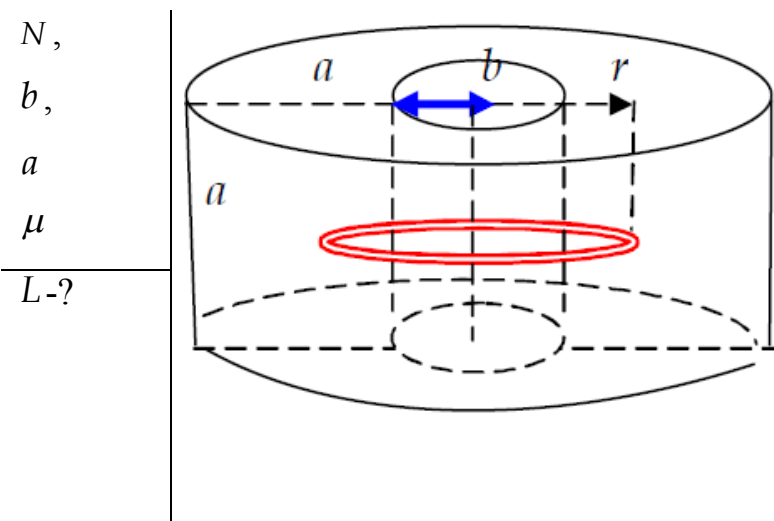
$$dV = l \cdot 2\pi r dr$$

рівняння (50.2) з врахуванням (50.3) матиме вигляд

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{L}{l} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \eta}$$

Задача 51. [З. №3,327]

Визначити індуктивність тороїдального соленоїда з N витками, внутрішній радіус якого рівний b а поперечний переріз має форму квадрата зі стороною a , Простір всередині соленоїда заповнений однорідним парамагнетиком з магнітною проникністю μ .



За наявності в соленоїді незмінного струму I густину енергії магнітного поля можна записати

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0} \quad (51.1)$$

За означенням густина енергії

$$\omega = \frac{dW}{dV} \quad (51.2)$$

$W = \int \omega dV$ Враховуючи, що власна енергія струму $W = \frac{LI^2}{2}$ та рівняння

(51.1) матимемо

$$\frac{LI^2}{2} = \int \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0} dV$$

тоді індуктивність запишемо

$$L = \int \frac{B^2}{\mu\mu_0 I^2} dV \quad (51.3)$$

Індукцію магнітного поля визначимо за теоремою про циркуляцію

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 I_{\text{вн}}$$

і оскільки всередині контуру є N витків, то

$$B2\pi r = \mu\mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\pi r}$$

З врахуванням останнього рівняння (51.3) буде мати вигляд

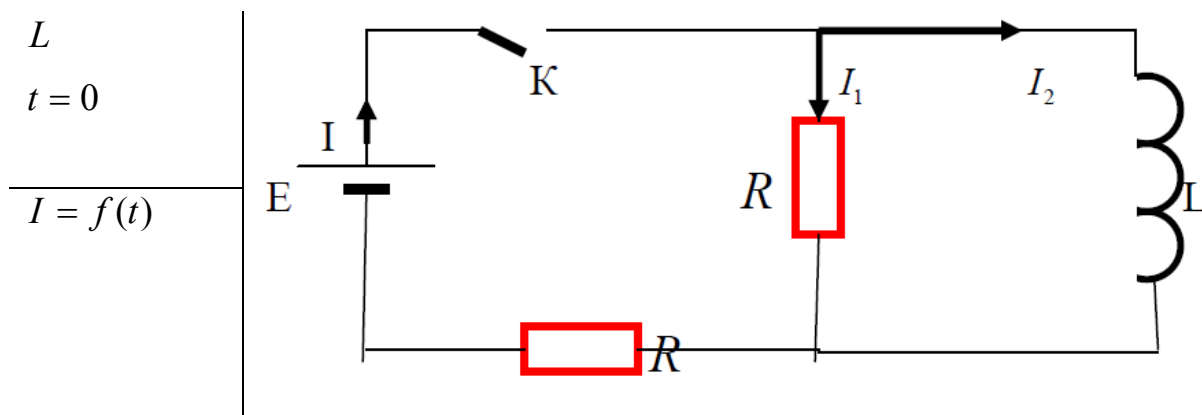
$$L = \int \frac{\mu\mu_0 N^2}{4\pi^2 r^2} dV \quad (51.4)$$

Для тороїда $dV = a \cdot 2\pi r dr$ отже

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 a}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)}$$

Задача 52. [3. №3.334]

Знайти закон зміни струму з часом, котрий тече через індуктивність L в схемі після замикання ключа K в момент часу $t = 0$



Запишемо друге правило Кірхгофа для контуру EKRR

$$\varepsilon = I_1 R + IR \quad (52.1)$$

І для контуру EKLR відповідно

$$\varepsilon - L \frac{dI_2}{dt} = IR \quad (52.2)$$

Зважаючи, що $I_1 = I - I_2$ рівняння (52.1) перепишемо

$$\varepsilon = IR - I_2 R + IR \Rightarrow \varepsilon = 2IR - I_2 R \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{2R} - \frac{I_2}{2}$$

з врахуванням останнього рівняння (52.2) перепишемо

$$\varepsilon - 2L \frac{dI_2}{dt} = -I_2 R \Rightarrow \varepsilon + I_2 R = 2L \frac{dI_2}{dt}$$

розділяючи змінні отримаємо

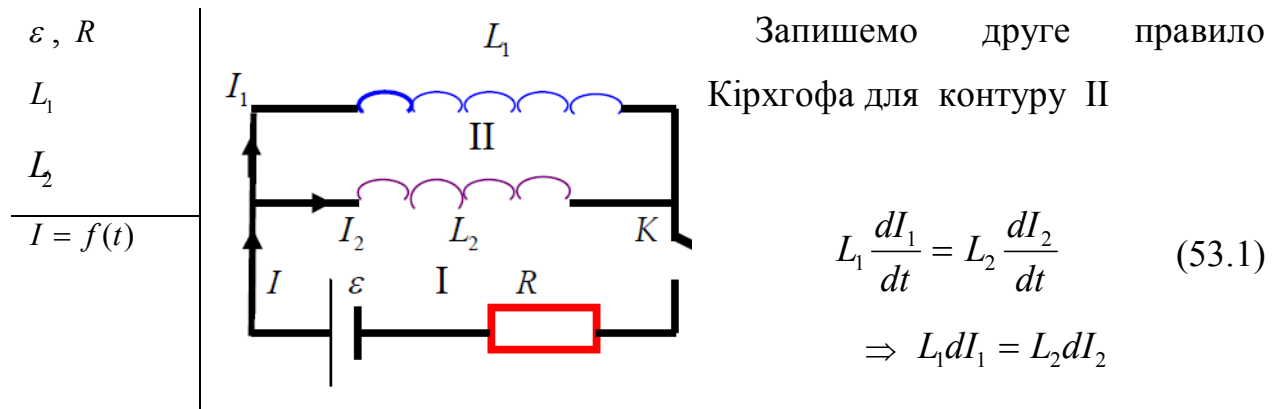
$$dt = 2L \frac{dI_2}{\varepsilon + I_2 R} \Rightarrow \int_0^t dt = 2L \int_0^I \frac{dI_2}{\varepsilon + I_2 R} \Rightarrow \frac{2L}{R} \ln(\varepsilon + I_2 R) \Big|_0^I = t$$

$$\ln\left(\frac{\varepsilon + IR}{\varepsilon}\right) = \frac{R}{2L} t \Rightarrow 1 + I \frac{R}{\varepsilon} = e^{-\frac{Rt}{2L}} \Rightarrow$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{2L}})$$

Задача 53. [З. №3,335]

В схемі відомі ε джерела, опір R та індуктивності котушок L_1 та L_2 . Внутрішній опір джерела та опори котушок нехтовно малі. Знайти усталені струми в схемі після замикання ключа К.



і інтегруючи від 0 до I матимемо

$$L_1 I_1 = L_2 I_2 \quad (53.2)$$

для контуру I при усталеному значенні $\varepsilon = IR$

Зважаючи, що $I_1 = I - I_2$ отримаємо

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R} - I_2$$

тоді з врахуванням (53.2) матимемо

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R} - I_1 \frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{\varepsilon \cdot L_2}{R(L_1 + L_2)}}$$

І відповідно

$$\boxed{I_2 = \frac{\varepsilon \cdot L_1}{R(L_1 + L_2)}}$$

Задача 54. [З. №3.346]

Котушка індуктивності $L = 2,0 \text{ мкГн}$ з опором $R = 1,0 \text{ Ом}$ вмикаються до джерела постійної е.р.с. $\varepsilon = 3,0 \text{ В}$. Паралельно до котушки вмикається опір $R_0 = 2,0 \text{ Ом}$. Знайти кількість теплоти, що виділиться в котушці після розмикання ключа К. Внутрішнім опором джерела знехтувати.

$L = 2,0 \text{ мкГн}$

$R = 1,0 \text{ Ом}$

$\varepsilon = 3,0 \text{ В}$

$R_0 = 2,0 \text{ Ом}$

$Q - ?$

$\varepsilon = I_L R$

Кількість теплоти що виділяється на опорі котушки залежить від t

$dQ = I^2 R dt$ (54.1)

При замкнутому ключі за другим правилом Кірхгофа для великого контуру

(54.2)

Після розмикання, зміна величини струму призводить до появи е.р.с. самоіндукції і циркуляції струму в II контурі.

За II правилом Кірхгофа для контуру II

$$IR + IR_0 = \varepsilon_{si} \Rightarrow I(R + R_0) = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\int_{I_L}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R+R_0}{L} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{I}{I_L} = -\frac{(R+R_0)}{L} t \Rightarrow$$

$$\frac{I}{I_L} = e^{-\left(\frac{R+R_0}{L}\right)t} \quad (54.3)$$

і оскільки з (54.2) $I_L = \frac{\varepsilon}{R}$ то (54.3) запишемо

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\left(\frac{R+R_0}{L}\right)t} \quad (54.4)$$

підставивши (4) в (1) матимемо

$$\int_0^Q dQ = \frac{\varepsilon^2}{R} \int_0^\infty e^{-2\left(\frac{R+R_0}{L}\right)t} dt \Rightarrow Q = -\frac{\varepsilon^2}{R} \frac{L}{2(R+R_0)} e^{-2\left(\frac{R+R_0}{L}\right)t} \Big|_0^\infty \Rightarrow$$

$$\boxed{Q = \frac{\varepsilon^2}{R^2} \frac{L}{2\left(1 + \frac{R_0}{R}\right)}}.$$

2-й спосіб. При розімкнутому ключі енергія зосереджена в контурі II

$$W = \frac{LI^2}{2} \quad (54.5)$$

буде поступово виділятись на опорі R_0 та опорі котушки індуктивності

$$W = Q_R + Q_L \quad (54.6)$$

У відповідності до закону Джоуля-Ленца кількості теплоти будуть пропорційні величинам опорів, тобто

$$\frac{Q_R}{Q_L} = \frac{R_0}{R} \quad \Rightarrow \quad Q_R = Q_L \frac{R_0}{R} \quad ,$$

тоді (54.6) з врахуванням (54.5) запишемо

$$Q_L \left(\frac{R_0}{R} + 1 \right) = \frac{LI^2}{2}$$

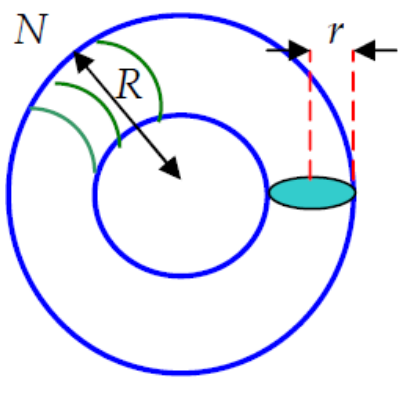
і оскільки з (54.2)

$$I_L = \frac{\varepsilon}{R} \quad \Rightarrow \quad Q_L \left(\frac{R_0}{R} + 1 \right) = \frac{L}{2} \frac{\varepsilon^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{\varepsilon^2}{R^2} \frac{L}{2(1 + \frac{R_0}{R})}}$$

ЕНЕРГІЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

Задача 55. [З. №3,348]

На тор з магнетика намотано $N = 500$ витків. Знайти енергію магнітного поля, якщо при струмі $I = 2,0\text{ A}$ магнітний потік через поперечний переріз тора $\Phi = 1,0\text{ мкВб}$

$N = 500$ $I = 2,0\text{ A}$ $\Phi_1 = 1,0\text{ мкВб}$ $W = ?$		Густина енергії магнітного поля
---	---	---------------------------------

$$\omega = \frac{\overline{B}\overline{H}}{2},$$

і відповідно за означенням

$$\omega = \frac{dW}{dV}, \quad W = \omega V$$

де V - об'єм тороїда

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot 2\pi R$$

Тоді

$$W = \frac{BH}{2} \pi \cdot r^2 2\pi R \tag{55.1}$$

Напруженість магнітного поля знайдемо використовуючи теорему про циркуляцію вектора $\vec{H}$.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_i$$

Зважаючи що всередині тороїда поле однорідне, тобто $\vec{B} = \text{const}$ і $\vec{H} = \text{const}$ циркуляцію можемо брати за довільним внутрішнім контуром, отже

$$H 2\pi R = NI \Rightarrow$$

$$\underline{H = \frac{NI}{2\pi R}} \quad (55.2)$$

Величину індукції магнітного поля знайдемо з величини потоку через поперечний переріз тора

$$\Phi_1 = \vec{B} \vec{s} \Rightarrow \Phi_1 = B \pi \cdot r^2$$

$$\underline{B = \frac{\Phi_1}{\pi \cdot r^2}} \quad (55.3)$$

Підставимо (55.2), (55.3) в (55.1)

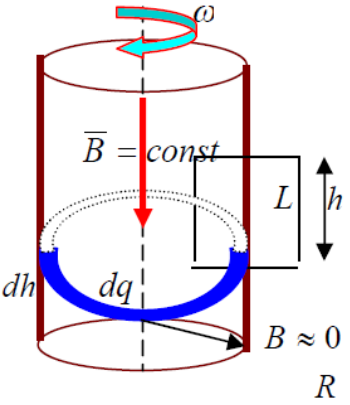
$$W = \frac{1}{2} \frac{\Phi_1}{\pi \cdot r^2} \frac{NI}{2\pi R} \pi \cdot r^2 2\pi R$$

після скорочувань, отримаємо

$$\boxed{W = \frac{\Phi_1 NI}{2}}$$

Задача 56. [3. №3,352]

Довгий циліндр радіуса a , рівномірно заряджений по поверхні обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Знайти енергію магнітного поля на одиницю довжини циліндра, якщо лінійна густина заряду циліндра рівна λ і $\mu = 1$.

$R = a$ ω_0 $\lambda = \text{const}$ $\mu = 1$ $\frac{dW}{dh} - ?$		$dW = \omega dV \Rightarrow dW = \omega \pi \cdot a^2 dh$ $\frac{dW}{dh} = \omega \pi \cdot a^2$ Оскільки $\omega = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu \mu_0} \Rightarrow \mu = 1$ $\frac{dW}{dh} = \frac{1}{2} \frac{\pi \cdot a^2 B^2}{\mu_0} \quad (56.1)$
---	---	---

Тобто задача зводиться до визначення величини індукції магнітного поля, котре виникає при обертання зарядженого циліндра. За теоремою про циркуляцію (з-н Ампера) за контуром L

$$\oint_L \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 \int dI, \quad (56.2)$$

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{dq \omega_0}{2\pi}, \quad dI = \frac{\lambda \omega_0}{2\pi} dh$$

тоді (56.2) запишемо

$$\oint_L \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 \frac{\lambda \omega_0}{2\pi} \int_0^h dh \Rightarrow Bh = \mu_0 \frac{\lambda \omega_0}{2\pi} h \Rightarrow$$

$$B = \mu_0 \frac{\lambda \omega_0}{2\pi} \quad (56.3)$$

Підставляючи (56.3) в (56.1) матимемо

$$\frac{dW}{dh} = \frac{\mu_0 a^2 \lambda^2 \omega_0^2}{8\pi} .$$

Задача 57. [З. №3,353]

При якій напруженості електричного поля в вакуумі об'ємна густина енергії цього поля буде такою ж, як у магнітного поля $B = 1.0$ Тл також у вакуумі?

$\varepsilon = 1$	Об'ємна густина енергії	$\omega = \frac{dW}{dV}$
$\mu = 1$		
$B = 1.0$ Тл		
$\omega_M = \omega_E$		
$E = ?$		

Об'ємну густину енергії електричного поля через величину напруженості запишемо

$$\omega_E = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}$$

Об'ємна густина енергії магнітного поля

$$\omega_M = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$$

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow E = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Розглянемо співвідношення, що об'єднує магнітну сталу μ_0 , електричну сталу ε_0 зі швидкістю світла у вакуумі c

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

матимемо

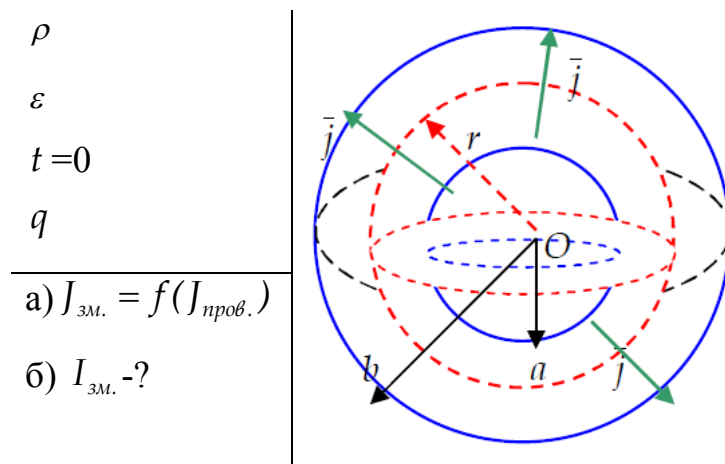
$$\boxed{E = cB}$$

РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

Задача 58. [З. №3,362]

Простір між двома концентричними металевими сферами заповнено однорідним слабо провідним середовищем з питомим опором ρ і діелектричною проникністю ε . В момент $t=0$ внутрішній сфері надали деякого заряду. Знайти:

- а) зв'язок між векторами густини струму зміщення і струму провідності в будь-якій точці в один і той же момент;
- б) струм зміщення через будь-яку замкнуту поверхню, яка знаходиться повністю в середовищі і охоплює внутрішню сферу, якщо заряд цієї сфери в даний момент дорівнює q .



Густина струму провідності $J_{пров.} = \frac{dI}{ds}$ і густина струму зміщення

$J_{зм.} = \frac{\partial D}{\partial t}$ входять в рівняння Максвелла, яке визначає ротор вектора напруженості магнітного поля

$$[\nabla \overline{H}] = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \quad (58.1)$$

При наданні заряду внутрішній сфері радіусом a і провідним середовищем між внутрішньою сферою і зовнішньою радіуса b буде

проходити струм в радіальних напрямках, що і показано векторами густини струму провідності $\bar{J}$.

Як випливає з (58.1) густина струму провідності $\bar{J}$ повинна породжувати магнітне поле. В нашому випадку радіальна компонента напруженості магнітного поля дорівнює нулю, бо інакше потік вектора магнітного поля через замкнуту геометричну поверхню з центром O не дорівнював би нулю, що забороняє теорема Гауса для магнітного поля. Перпендикулярна радіальному напрямку складова також дасть нульове магнітне поле, оскільки завжди знайдеться симетрична протилежно напрямлена складова. Отже $H = 0$ і $[\nabla H] = 0$ і у відповідності з (58.1)

$$\bar{J} = -\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Тобто густина струму провідності рівна густині струму зміщення

$$J_{зм.} = J_{пров.}$$

б) Для визначення величини струму зміщення через замкнуту поверхню, зауважимо, що він буде рівним величині струму провідності через ту ж поверхню, а аналогічне завдання ми розглядали в *задачі №3.156*.

Побудуємо сферу радіуса r .

Для поверхні радіусом $b \succ r \succ a$ запишемо теорему Гауса

$$\oint_s \bar{E} d\bar{s} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (58.2)$$

З закону Ома в локальній формі $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ значення напруженості $\vec{E} = \rho \cdot \vec{j}$

підставимо в (58.2)

$$\rho \oint_s \vec{j} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon} .$$

Але оскільки $\oint_s \vec{j} d\vec{s} = I$ тут струм провідності через замкнуту поверхню то

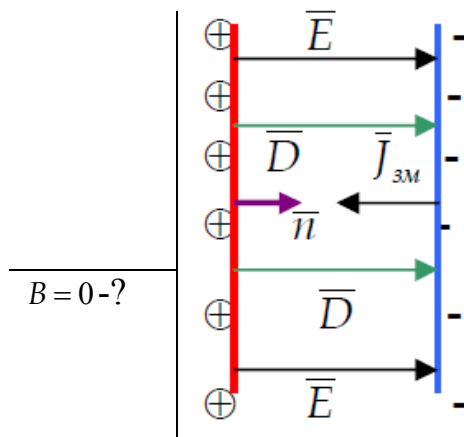
$$I = \frac{\cdot q}{\epsilon_0 \epsilon \rho}$$

Отже струм зміщення

$$I_{зм.} = \frac{\cdot q}{\epsilon_0 \epsilon \rho}$$

Задача 59. [3. №3,363]

Плоский конденсатор утворений двома дисками, між якими знаходиться однорідне слабо провідне середовище. Конденсатор зарядили й відключили від джерела напруги. Нехтуючи крайовими ефектами, доказати, що магнітне поле усередині конденсатора відсутнє.



Джерелами магнітного поля є струм провідності, густина якого

$$J_{\text{пров.}} = \frac{dI}{dS} \quad (59.1)$$

та струм зміщення з густиною $\bar{J}_{\text{зм.}} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$. Оскільки між пластинами конденсатора слабо провідне середовище, то буде виникати струм провідності при розряджанні через простір між пластинами, що в свою чергу буде приводити до зменшення заряду пластин, тобто величини електричного поля. Наявність струму провідності приводить до зменшення поверхневої густини заряду σ , а отже, і D . Струм провідності буде супроводжуватися струмом зміщення $J_{\text{см}}$, так як струм зміщення виникає при зміні електричного поля. За Максвеллом

$$[\nabla H] = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Магнітне поле буде рівне нулю $H = 0$, коли права частина рівняння - повний струм (струм провідності плюс струм зміщення) дорівнює нулю. Це й треба доказати. Тобто

$$\begin{aligned} \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} &= 0 \Rightarrow \\ \bar{J} &= -\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (59.2)$$

Напруженість електричного поля між двома різнойменно зарядженими пластинами $E = \sigma / \epsilon \epsilon_0$ зважаючи що $\bar{D} = \epsilon \epsilon_0 \bar{E}$ в векторному вигляді запишемо

$$\vec{D} = \sigma \cdot \vec{n}$$

Тоді густина струму зміщення

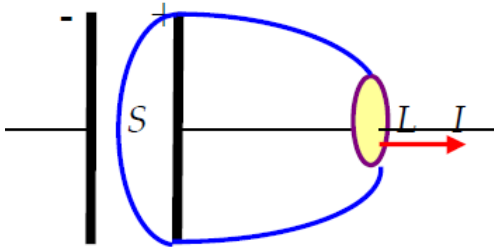
$$\vec{J}_{зм.} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \vec{n}$$

Якщо врахувати, що $\sigma = \frac{dq}{ds}$ то $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dq}{ds} \right)$, і зважаючи, що $\frac{dq}{dt} = I$ та $\frac{dI}{ds} = j_{пров.}$ матимемо $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{dI}{dS}$, що в векторному вигляді дасть

$$\boxed{-\frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{j}_{пров.}}$$

Задача 60. [З. №3,364]

Плоский повітряний конденсатор, площа кожної пластини якого $S = 100 \text{ см}^2$ послідовно увімкнтий в коло змінного струму. Знайти амплітуду напруженості електричного поля в конденсаторі, якщо амплітуда синусоїдального струму в з'єднувальних провідниках $I_m = 1,0 \text{ mA}$ і частота струму $\omega = 1,6 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$.

$S = 100 \text{ см}^2,$ $I_m = 1,0 \text{ mA},$ $\omega = 1,6 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ $\varepsilon = 1$ $I(t) = I_m \sin \omega t$ $E_m - ?$		Згідно теореми про циркуляцію за контуром L $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (60.1)$
--	---	---

З іншого боку циркуляція вектора $\vec{H}$ за контуром L дорівнює потоку вектора густини повного струму через довільну поверхню, що опирається на

вказаний контур. Тому використаємо теорему про циркуляцію в трактуванні Максвелла, що справджується завжди

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} \quad (60.2)$$

В рівнянні (60.2) потік вектора густини повного струму беремо через площу поверхні S що рівна площі пластини конденсатора. І оскільки струм провідності не пронизує дану поверхню $\vec{j} = 0$ рівняння (60.2) перепишемо

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \quad (60.3)$$

Ліві частини рівнянь (60.1) та (60.3) рівні тож рівні і праві, враховуючи, що струм I в рівнянні (60.1) згідно умови змінюється за законом синуса, матимемо

$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = I_m \sin \omega t$$

Інтеграл від правої частини рівняння (60.3) буде

$$\frac{\partial D}{\partial t} S = I_m \sin \omega t. \quad (60.4)$$

Використаємо зв'язок $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ і так, як з умови $\epsilon = 1$ $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ рівняння (60.4) перепишемо

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} S = I_m \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \partial E = \frac{1}{\epsilon_0 S} I_m \sin \omega t \partial t.$$

Результатом інтегрування цього рівняння буде

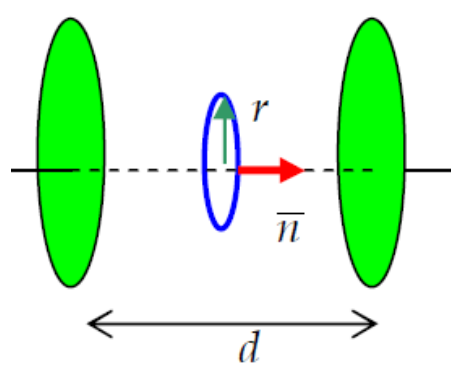
$$E = -\frac{1}{\varepsilon_0 \omega S} I_m \cos \omega t$$

отже амплітуда напруженості електричного поля буде

$$E_m = \frac{I_m}{\varepsilon_0 \omega \cdot S}$$

Задача 61. [3. №3,365]

Простір між пластинами плоского конденсатора, що мають форму круглих дисків, заповнений однорідним слабко провідним середовищем з питомою провідністю σ та діелектричною проникливістю ε . Відстань між пластинами d . Нехтуючи краєвими ефектами, знайти напруженість магнітного поля між пластинами на відстані r від їх осі, якщо на конденсатор подано змінну напругу $U = U_m \cos \omega t$.

$\sigma,$ d $\varepsilon,$ $U = U_m \cos \omega t$ $H(r) - ?$		Оскільки напруга на конденсаторі змінюється за законом косинуса (гармонічним) то і напруженість електричного поля в просторі між пластинами буде змінюватись за тим же законом, тобто
--	---	--

$$E = \frac{U_m}{d} \cos \omega t \quad (61.1)$$

Виберемо коловий контур L радіуса r , площа якого паралельна пластинам конденсатора. У відповідності з рівнянням Максвелла

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_s (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{s} \quad (61.2)$$

І струм провідності ($\sigma \neq 0$) і змінне електричне поле будуть породжувати змінне магнітне поле $\vec{H}$. За законом Ома в локальній формі густина струму провідності $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ що з врахуванням (61.1) дасть для модуля вектора $\vec{j}$

$$j = \sigma \frac{U_m}{d} \cos \omega t. \quad (61.3)$$

Густину струму зміщення $\frac{\partial D}{\partial t}$ знайдемо використовуючи співвідношення $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ і рівняння (61.1) матимемо

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_m}{d} \cos \omega t \right) \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial t} = -\epsilon \epsilon_0 \omega \frac{U_m}{d} \sin \omega t \quad (61.4)$$

Зважаючи на те, що вектори $\vec{j}$ та $\vec{E}$ паралельні між собою та колінеарні до вектора нормалі площі обмеженої контуром, L скалярні добутки в правій частині рівняння (61.2) будуть визначатись знаком косинуса в кожен момент часу, підставимо в (61.2) рівняння (61.3) та (61.4)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_s \left(\sigma \frac{U_m}{d} \cos \omega \cdot t - \epsilon \epsilon_0 \omega \frac{U_m}{d} \sin \omega t \right) ds \Rightarrow$$

$$H 2\pi r = \frac{U_m}{d} (\sigma \cos \omega t - \varepsilon \varepsilon_0 \omega \sin \omega t) \pi r^2 \Rightarrow$$

$$H(r) = \frac{U_m r}{2d} (\sigma \cos \omega t - \varepsilon \varepsilon_0 \omega \sin \omega t) \quad (61.5)$$

Зрозуміло, що напруженість магнітного поля теж змінюється за гармонічним законом типу $H = H_m \cos(\omega t + \alpha)$. Щоб представити (61.5) в такому вигляді позначимо $\sigma = A \cos \alpha$, а $\varepsilon \varepsilon_0 \omega = A \sin \alpha$ і отже

$$\cos^2 \alpha = \frac{\sigma^2}{A^2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{(\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2}{A^2} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2}.$$

Тоді

$$H(r) = \frac{U_m r}{2d} \sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2} (\cos \alpha \cos \omega t - \sin \alpha \sin \omega t)$$

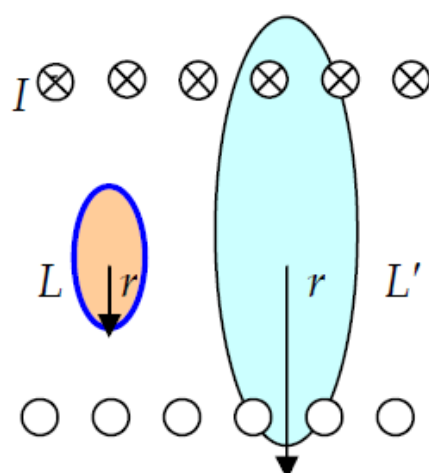
$$\boxed{H(r) = \frac{U_m r}{2d} \sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2} \cos(\omega t + \alpha)}$$

Величину α можна визначити із співвідношень (61.6) як

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \omega}{\sigma}$$

Задача 62. [З. №3,366]

Довгий прямий соленоїд має n витків на одиницю довжини. По ньому тече струм $I = I_m \sin \omega t$. Знайти густину струму зміщення як функцію відстані r від осі соленоїда.

$n,$ $I = I_m \sin \omega t,$ $\frac{\partial D}{\partial t} = f(r) - ?$		Запишемо рівняння Максвелла для циркуляції вектора $\vec{E}$
		$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} d\vec{s} \quad (62.1)$

Враховуючи співвідношення $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ рівняння (62.1) запишемо для $\epsilon = 1$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \oint_L \vec{D} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} d\vec{s} \quad (62.2)$$

1. Циркуляція вектора $\vec{D}$ по контуру L для $r < R$ дасть змогу визначити густину струму зміщення всередині соленоїда.

Зважаючи на те, що вектор $\vec{B}$ колінеарний до вектора нормалі площі обмеженої контуром L , скалярні добутки в правій частині рівняння (62.2) будуть визначатись знаком синуса в кожен момент часу, і враховуючи що магнітне поле всередині соленоїда визначене за теоремою про циркуляцію вектора $\vec{B}$ - $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$, рівне $B = \mu_0 n I$ матимемо

$$\frac{1}{\epsilon_0} \oint_L \vec{D} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mu_0 n I_m \sin \omega t \cdot ds \Rightarrow \quad (62.3)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} D 2\pi r = -\mu_0 n I_m \pi r^2 \frac{d}{dt} (\sin \omega t)$$

Після скорочувань та диференціювання обох частин рівняння за часом отримаємо

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \mu_0 n I_m r \frac{d^2}{dt^2} (\sin \omega t) \Rightarrow \boxed{\frac{dD}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 n \omega^2 I_m}{2} (\sin \omega t)}$$

2. Для випадку $r > R$ виберемо контур L' і рівняння (62.3) буде відрізнятись в цьому випадку лише тим, що інтеграл $\int_s \vec{B} d\vec{s}$ беремо лише до R , оскільки зовні соленоїда індукція магнітного поля рівна 0. Тому інтегруючи (62.3) отримаємо

$$\frac{1}{\varepsilon_0} D 2\pi r = -\mu_0 n I_m \pi R^2 \frac{d}{dt} (\sin \omega t) \Rightarrow \boxed{\frac{dD}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 n \omega^2 R^2 I_m}{2r} (\sin \omega t)}$$

Враховуючи співвідношення між універсальними константами

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

кінцевий результат запишемо як

$$\boxed{\frac{dD}{dt} = \frac{n \omega^2 R^2 I_m}{2c^2 r} (\sin \omega t)}$$

Задача 63. [3. №3,367]

Точковий заряд q рухається з нерелятивістською швидкістю $\vec{v} = \text{const}$. Знайти густину струму зміщення $\vec{j}_{CM}$ в точці Р, що знаходиться на відстані r від заряду на прямій:

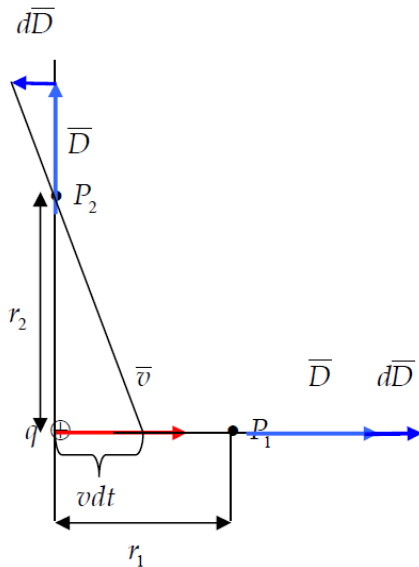
- 1) яка співпадає з його траєкторією;
- 2) яка перпендикулярна до його траєкторії й яка проходить через заряд.

$q, r,$ $\bar{v} = \text{const}$ $v \ll c$	Густина струму зміщення $\vec{j}_{3M} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, тому розв'язання завдання зводиться до визначення вектора $\vec{D}$ у зазначених точках і знаходженню його похідної за часом. В обох випадках
$j_{3M} - ?$	

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{e}_r, \quad (63.1)$$

де $\vec{e}_r$ — орт вектора $\vec{r}$ (так як $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$).

Знайдемо похідну $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.



1. У точці P_1 , (див. рис., де передбачається, що $q > 0$) похідна по часу від (63.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= -\frac{2q}{4\pi r^3} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \vec{e}_r = \frac{2q\bar{v}}{4\pi r^3}, \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{2q\bar{v}}{4\pi r^3} \end{aligned} \quad (63.2)$$

Отже, якщо $q > 0$, вектор $\vec{j}_{CM} \uparrow\uparrow \bar{v}$, і навпаки. Тут враховано, що для точки P_1 , похідна $\partial r / \partial t = -v$.

Якби точка P, перебувала не перед зарядом q (по ходу його руху), а за ним, то вектор $\vec{j}_{CM}$ був би спрямований у той же бік й мав би той же модуль.

2. Запишемо для двох подібних трикутників пропорцію стосовно точки P_2

$$\frac{dD}{D} = \frac{vdt}{r},$$

тут можна записати: в векторному вигляді оскільки заряд віддаляється від точки P_2

$$\frac{d\bar{D}}{dt} = -\frac{D}{r} \bar{v}$$

І з врахуванням (63.1) матимемо

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = -\frac{q\bar{v}}{4\pi r^3}. \quad (63.3)$$

Якщо $q > 0$, то $\vec{j}_{CM} \uparrow \downarrow \bar{v}$, і навпаки. З (63.2) і (63.3) запишемо величини струмів зміщення

$$1) \boxed{\vec{j}_{CM} = \frac{q\bar{v}}{2\pi r^3}},$$

$$2) \boxed{\vec{j}_{CM} = -\frac{q\bar{v}}{4\pi r^3}}$$

Задача 64. [З. №3,370]

Довести за допомогою рівнянь Максвелла, що:

- а) змінне в часі магнітне поле не може існувати без електричного поля;
- б) однорідне електричне поле не може існувати при наявності змінного в часі магнітного поля.

а) $\vec{B} = \vec{B}(t)$

б) $\vec{E} = const$

Запишемо закон електромагнітної індукції Фарадея в трактовці Максвелла в диференційній формі

$$[\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{або} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (64.1)$$

а) Якщо $\vec{B} = \vec{B}(t)$, то права частина рівнянь (64.1) не дорівнює нулю, тобто $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$, і відповідно ліва частина (64.1) теж не дорівнює нулю

$$[\nabla \vec{E}] \neq 0. \quad (64.2)$$

Нагадаємо, що

$$[\nabla \vec{E}] = \frac{\partial E_x}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \vec{k} \quad (64.3)$$

У відповідності до рівняння (64.2) слідує, що не рівні нулю просторові похідні вектора $\vec{E}$, що можливо тільки при наявності електричного поля, тобто наявність змінного в часі магнітного поля супроводжується наявністю змінного електричного поля, що й треба було довести.

б) Якщо $\vec{B} = \vec{B}(t)$, то $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ і відповідно

$$[\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0.$$

Але в однорідному електричному полі $\vec{E} = \text{const}$, воно постійне в кожній точці простору. Тоді похідні від вектора $\vec{E}$ по координатах рівні нулю і відповідно (64.3)

$$[\nabla \vec{E}] = 0$$

А це суперечить рівнянню (64.1), а отже умові існування змінного магнітного поля.

Задача 65. [3. №3,371]

Показати, що з рівнянь Максвелла випливає закон збереження електричного заряду, тобто $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$	Запишемо теорему Гауса для вектора $\vec{D}$
	$\nabla \vec{D} = \rho$

(65.1)

І рівняння Максвелла, - теорема про циркуляцію магнітного поля для *rot* вектора $\vec{H}$

$$[\nabla, \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (65.2)$$

Помножимо скалярно обидві частини (65.2) на векторний оператор Гамільтона ∇ .

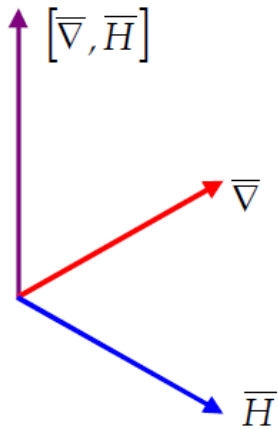
$$\begin{aligned} \nabla[\nabla, \vec{H}] &= \nabla \vec{j} + \nabla \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \\ \nabla[\nabla, \vec{H}] &= \nabla \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{D} \end{aligned} \quad (65.3)$$

Нагадаємо векторний оператор Гамільтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

при множенні на вектор (наприклад $[\nabla, \vec{H}]$), тобто $rot \vec{H}$ дає величину дивергенції даного вектора.

Оскільки ліва частина рівняння (65.3) ($div(rot)$) рівна 0 (скалярний добуток векторів між якими кут 90°) дивись рисунок, то (65.3) з врахуванням (65.1) буде



$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Ми отримали рівняння неперервності, яке і є по суті законом збереження електричного заряду.

Задача 66. [3. №3,372]

Показати, що рівняння Максвелла $[\vec{\nabla} \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ та $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ є сумісними, тобто перше не суперечить другому

Візьмемо від рівняння $[\vec{\nabla} \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ дивергенцію. При цьому врахуємо, як і в попередніх задачах, що дивергенція — це похідна по просторовим координатам.

$$\vec{\nabla} [\vec{\nabla} \vec{E}] = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \vec{B}),$$

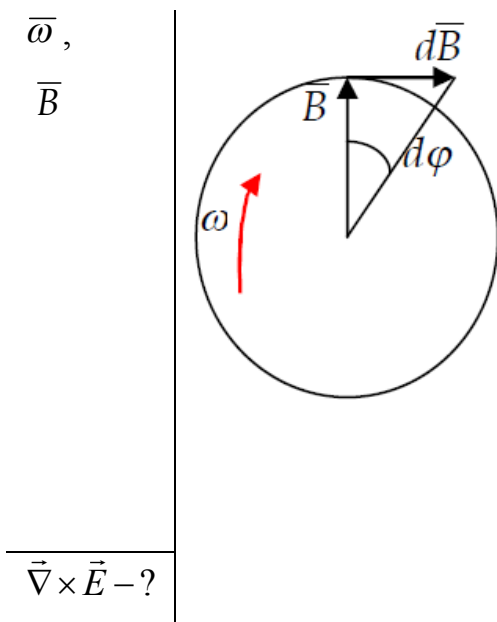
Оскільки ліва частина останнього рівняння ($div(rot)$) рівна 0

$$\vec{\nabla} [\vec{\nabla} \vec{E}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}{\partial t} = 0.$$

Якщо похідна по часу від деякої величини рівна нулю, то сама величина залишається незмінною $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = const$ і це не суперечить $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

Задача 67. [3. №3,373]

У деякій області інерційної системи відліку є магнітне поле, яке обертається з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ й індукція якого дорівнює $\bar{B}$. Знайти $\bar{\nabla} \times \bar{E}$ в цієї області як функцію векторів $\bar{\omega}$ й $\bar{B}$.



Ми повинні визначити ротор електричного поля

$$\text{rot} \bar{E} = \bar{\nabla} \times \bar{E} = [\bar{\nabla} \bar{E}]$$

Запишемо закон електромагнітної індукції Фарадея в трактовці Максвелла в диференційній формі, куди входить $[\bar{\nabla} \bar{E}]$

$$[\bar{\nabla} \bar{E}] = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (67.1)$$

З рівняння (67.1) видно, що вектор $[\bar{\nabla} \bar{E}]$ спрямований протилежно вектору $\partial \bar{B}$, про що свідчить знак мінус у векторному рівнянні. З рисунка

$$\begin{aligned} \frac{dB}{B} &= \text{tg}(d\varphi) \approx d\varphi \Rightarrow \\ dB &= B d\varphi \end{aligned} \quad (67.2)$$

Враховуючи, що $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$ тоді розділивши обидві половини рівняння (67.2) на dt

Отримаємо

$$\frac{dB}{dt} = B \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$$

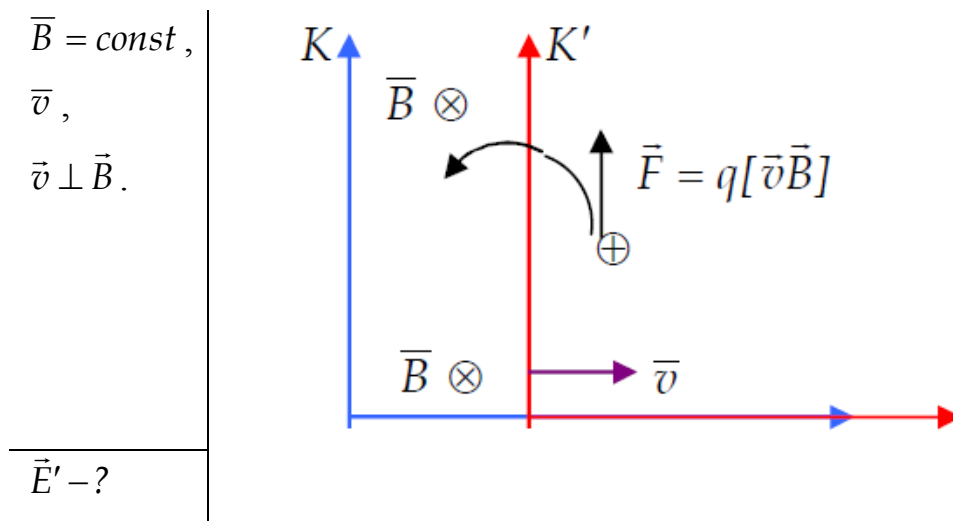
$$\frac{dB}{dt} = B\omega \quad (67.3)$$

Тепер рівняння (67.1) з врахуванням (67.3) в векторному виді буде

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = [\vec{\nabla} \vec{E}] = -[\vec{\omega} \vec{B}]$$

Задача 68. [З. №3,374]

В інерційній K -системі відліку є тільки однорідне магнітне поле з індукцією $\vec{B}$. Знайти напруженість електричного поля в K' -системі, яка рухається з нерелятивістською швидкістю $\vec{v}$ відносно K -системи, причому $\vec{v} \perp \vec{B}$. Для вирішення задачі розглянути сили, які діють на уявний заряд в обох системах відліку в момент, коли швидкість заряду в K' -системі дорівнює нулю



Розглянемо K -систему. В ній на уявний заряд буде діяти сила Лоренца

$$\vec{F} = q[\vec{v} \vec{B}] \quad (68.1)$$

і вона буде змінювати тільки напрямок вектора швидкості, а не його величину (заряд буде рухатись по дузі кола, в площині, яка перпендикулярна вектору $\vec{B}$), тому що в K - системі тільки однорідне магнітне поле і $\vec{v} \perp \vec{B}$.

Розглянемо тепер K' -систему. В ній заряд знаходиться в стані спокою $v = 0$, тому єдина сила що може діяти на нього, буде мати електричну природу:

$$\vec{F}' = q\vec{E}' \quad (68.2)$$

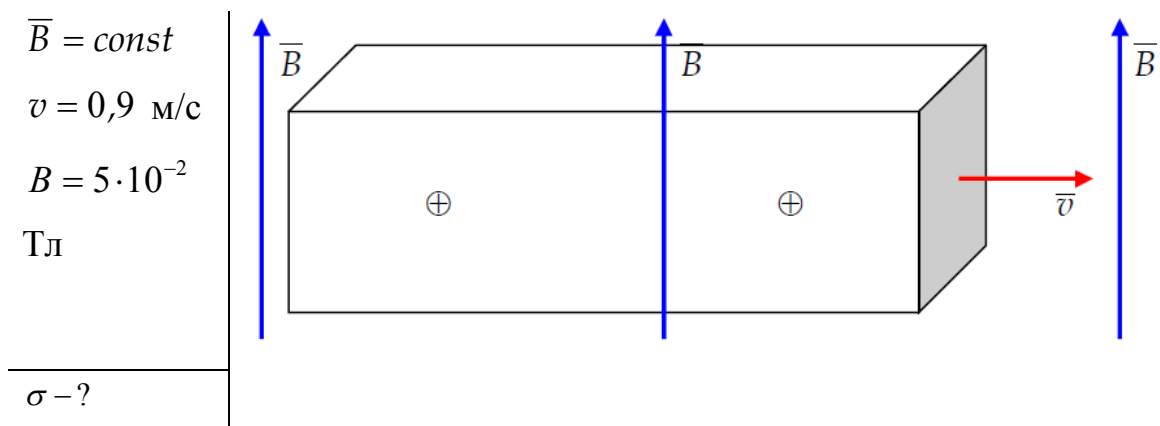
При $v \ll c$ сила інваріантна ($F = F'$), звідки, прирівнюючи (68.1) і (68.2) ми отримуємо

$$q[\vec{v}\vec{B}] = q\vec{E}'$$

$$\boxed{\vec{E}' = [\vec{v}\vec{B}]}$$

Задача 69. [З. №3,375]

Велика пластинка з не феромагнітного металу рухається з постійною швидкістю $v = 90$ см/с в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 50$ мТл, як показано на малюнку. Знайти поверхневу густину зарядів, що виникають на площинах пластинки через її рух.



Метал пластинки не феромагнітний, тому безпосередньої взаємодії магнітного поля з пластинкою не буде.

Але пластинка рухається, в магнітному полі з нею разом рухаються вільні електрони, на які буде діяти магнітна складова сили Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}]$. Внаслідок чого електрони будуть концентруватись на задній стороні пластинки, на передній буде надлишок позитивних зарядів, з'являється електричне поле сила якого $\vec{F} = q\vec{E}$ компенсує магнітну складову сили Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}]$. Звідки

$$E = vB$$

Нашу пластинку ми можемо розглядати як систему двох пластин, що мають протилежні заряди. Напруженість електричного поля для цієї системи

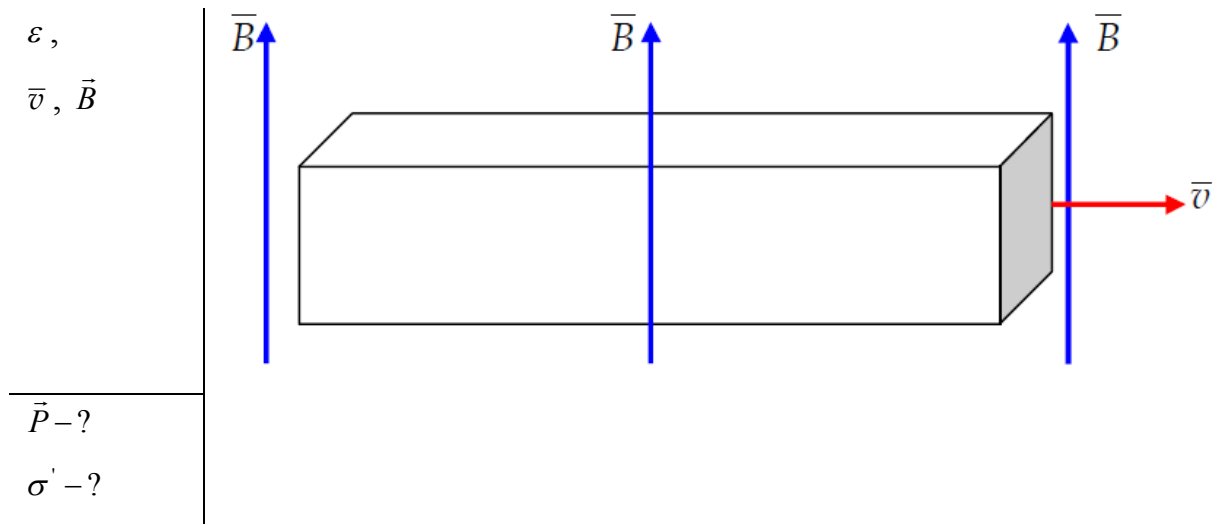
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

що забезпечує поверхневу густину зарядів

$$\sigma = \epsilon_0 E \Rightarrow \boxed{\sigma = \epsilon_0 v B}$$

Задача 70. [3. №3,376]

Велика пластинка з однорідного діелектрика із проникністю ϵ рухається з постійною нерелятивістською швидкістю $\vec{v}$ в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$, як показано на малюнку. Знайти поляризованість $\vec{P}$ діелектрика й поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів



У системі відліку, яка пов'язана із пластинкою, буде спостерігатися крім магнітного поля ще й електричне, зумовлене перерозподілом зарядів магнітною складовою сили Лоренца, позначимо його E'_0 . Відповідно до формул перетворення полів $\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]$, де $E = 0$, отримаємо

$$\vec{E}'_0 = [\vec{v}\vec{B}].$$

Поляризованість діелектрика

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}' = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} [\vec{v}\vec{B}],$$

де χ — це діелектрична сприйнятливість і її зв'язок з ε записується так $\varepsilon = \chi + 1$. Відмітимо, ми врахували, що усередині діелектрика електричне поле буде визначатись

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 / \varepsilon.$$

Поверхнева густина зв'язаних зарядів

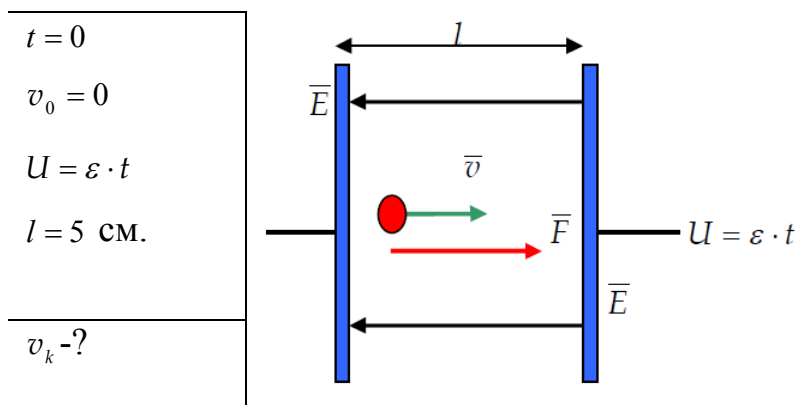
$$|\sigma'| = P = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} vB,$$

причому на тій поверхні пластинки, що звернена до нас $\sigma' > 0$, на протилежній $\sigma' < 0$. Отже

$$\boxed{\bar{P} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} [\bar{v}\bar{B}]}, \quad \boxed{|\sigma'| = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} vB}$$

Задача 71. [З. №3,389]

У момент часу $t = 0$ із одної пластини плоского конденсатора вилетів електрон з незначною швидкістю. Між пластинами прикладена прискорююча напруга, яка змінюється за законом $U = \varepsilon \cdot t$, де $\varepsilon = 100$ В/с. Відстань між пластинами $l = 5$ см. З якою швидкістю електрон наблизиться до протилежної пластини?



На електрон буде діяти сила електричного поля, вектор якої протилежно напрямлений до вектора $\bar{E}$, оскільки електрон має від'ємний заряд. І ця сила надаватиме електрону масою m прискорення

$$m \frac{dv}{dt} = eE \tag{71.1}$$

Зважаючи, що в нашому випадку напруженість поля пов'язана з напругою співвідношенням

$$E = \frac{U}{l}$$

І враховуючи дані з умови рівняння (71.1) перепишемо

$$m \frac{dv}{dt} = e \frac{\varepsilon \cdot t}{l}$$

Розділимо змінні

$$\begin{aligned} dv = \frac{e\varepsilon}{ml} t dt &\Rightarrow \int_0^{v(t)} dv = \frac{e\varepsilon}{ml} \int_0^t t dt \\ v(t) &= \frac{e\varepsilon}{ml} \frac{t^2}{2} \end{aligned} \quad (71.2)$$

Щоб визначити час прольоту електрона запишемо

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v(t) dt$$

З врахуванням (71.2) матимемо

$$\begin{aligned} ds &= \frac{e\varepsilon}{2ml} t^2 dt \\ \int_0^l ds &= \frac{e\varepsilon}{2ml} \int_0^t t^2 dt \Rightarrow l = \frac{e\varepsilon}{6ml} t^3 \\ t &= \sqrt[3]{\frac{6ml^2}{\varepsilon \cdot e}} \end{aligned} \quad (71.3)$$

Підставимо (71.3) в рівняння (71.2):

$$v = \frac{\varepsilon \cdot e}{2ml} \cdot \left(\frac{6ml^2}{\varepsilon \cdot e} \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9\varepsilon \cdot el}{2m}}.$$

$$\boxed{v = \sqrt[3]{\frac{9\varepsilon \cdot el}{2m}}}$$

В цій задачі цікавою є величина швидкості, яку набув електрон завдяки електричному полю на відстані $l = 5$ см.

$$v = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 100 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,05}{2 \cdot 0,911 \cdot 10^{-30}}} = 16 \text{ км/с}$$

Порівняйте з I - ю та II - ю космічними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Загальна фізика. Електростатика: методи розв'язув. задач на допомогу студ. фіз.-мат. ф-ту та ф-тів техн. спец. Усіх форм нав/ авт.: А.В. Немировський, О.О. Керіта, О.О. Штофель.-Київ.:НТУУ «КПІ» ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка» 2017.- 44с.

1*. Загальна фізика. Електростатика: [Електронний ресурс] методи розв'язування задач на допомогу студентам фізико-математичного факультету та факультетів технічних спеціальностей/ А.В. Немировський, О.О. Керіта, О.О. Штофель; КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017.- 44с, Назва з екрана – Доступ: <http://ela.kpi.ua/jspui/handle/123456789/20474>

2. Загальна фізика. Динаміка (Текст): метод. рек. до розв'яз. задач для студ. фіз.-мат. ф-ту та ф-тів техн. спец./ Уклад.: А.В. Немировський, О.В. Дрозденко, О.П. Кузь.-К.:НТУУ «КПІ», 2011.- 32с.

2* Загальна фізика. Динаміка [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до розв'язування задач для студентів інституту телекомунікаційних систем та інших технічних факультетів / НТУУ «КПІ» ; А. В. Немировський, О. В. Дрозденко, О. П. Кузь. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,34 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2011. - Назва з екрана. – Доступ: <http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/1332>

3. Иродов И. Е. Задачи по общей физике [Текст] : Учебное пособие. /И. Е. Иродов. – СПб.: Издательство «Лань», 2001. – 416 с. – 5000 экз. - ISBN 5-8114-0319-4