



ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>11 математика і статистика</i>
Спеціальність	<i>113 прикладна математика</i>
Освітня програма	<i>Наука про дані та математичне моделювання</i>
Статус дисципліни	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>3 курс, осінній семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>105 год.</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>залік</i>
Розклад занять	
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: <i>доктор фіз.-мат. наук, доцент, Лось Валерій Миколайович, v_los@yahoo.com</i> Практичні / Семінарські: <i>доктор фіз.-мат. наук, доцент, Лось Валерій Миколайович, v_los@yahoo.com</i>
Розміщення курсу	<i>Немає</i>

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Функціональний аналіз є одним із центральних розділів сучасної математики. Він переважно вивчає нескінченномірні простори і оператори в них. Поняття та методи функціонального аналізу дозволяють на строгому математичному рівні формувати постановки як класичних, так і сучасних математичних задач та будувати їх розв'язки. Функціональний аналіз знаходить свої застосування в таких суміжних областях, як диференціальні та інтегральні рівняння, рівняння математичної фізики, обчислювальна математика, теорія ймовірностей тощо.

Мета та завдання кредитного модуля

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів здатностей:

- до логічного мислення, формування особистості студентів, розвиток їх інтелекту і здібностей;
- до принадної інтуїції та ерудиції у питаннях застосовування математичних методів, виховання у студентів необхідної математичної культури;
- використовувати методи функціонального аналізу в теоретичних і прикладних дослідженнях;
- доводити розв'язок задачі до зрозумілого результату — числа, формули, точного якісного висновку із застосуванням для цього адекватного математичного та алгоритмічного апаратів;
- уміння аналізувати отримані результати, здатності до узагальнення, постановки задачі та вибору шляхів її розв'язання;
- самостійно вивчати та використовувати математичну літературу, здатності до розвитку гнучкості мислення, творчої самостійності та дій.

Основні завдання навчальної дисципліни.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають продемонструвати такі результати навчання:

ЗНАННЯ:

- основних понять теорії метричних і лінійних нормованих просторів;
- базових понять теорії лінійних операторів;
- зв'язків між основними поняттями в цих теоріях;
- формулювань теорем теорії та наслідків з них;

УМІННЯ:

- застосовувати отримані знання до розв'язання конкретних задач;
- самостійно працювати з підручниками, довідковою літературою, інтернет-ресурсами;

ДОСВІД:

- самостійного розв'язання широкого кола задач, пов'язаних зі змістом курсу;
- підняття рівня власної математичної освіти і культури.

Компетентності:

- здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями, генерувати нові ідеї,
- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу,
- знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності,
- здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем,
- здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі,
- здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

- дисципліні «Функціональний аналіз» передують дисципліни «Математичний аналіз», «Алгебра та геометрія», «Диференціальні рівняння-1» навчального плану підготовки бакалаврів за спеціальністю 113 Прикладна математика;
- дисципліна «Функціональний аналіз» забезпечує вивчення дисциплін «Рівняння математичної фізики» та «Основи нелінійного аналізу» навчального плану підготовки бакалаврів за спеціальністю 113 Прикладна математика а також дисциплін «Чисельні методи математичної фізики», «Моделювання складних систем» навчального плану підготовки магістрів за спеціальністю 113 Прикладна математика.

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Метричні простори і їх відображення.

Тема 1.1. Метричні простори. Метрика. Збіжність в метричному просторі. Відкриті множини. Замкнені множини і замикання. Сепарабельні метричні простори. Повні метричні простори. Поповнення метричного простору.

Тема 1.2. Відображення метричних просторів. Неперервні відображення. Рівномірна неперервність. Принцип стискаючих відображень та його узагальнення. Компактні множини і їх властивості. Критерії компактності. Неперервні відображення компактних множин та їх властивості. Теорема Арцела-Асколі.

Розділ 2. Лінійні нормовані і гільбертові простори.

Тема 2.1. Лінійні нормовані простори. Лінійні простори. Базис Гамеля. Вимірність простору. Приклади. Норма на лінійному просторі. Банахові простори. Лінійні нормовані простори функцій і послідовностей. Скінченновимірні лінійні нормовані простори.

Тема 2.2. Гільбертові простори. Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Рівність паралелограма. Неперервність скалярного добутку за двома аргументами. Гільбертові простори. Ортогональність. Ортогональне доповнення. Опуклі множини. Теореми про метричну і ортогональну проекцію. Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя. Ортонормовані базиси. Повні і замкнені ортонормовані системи. Рівність Парсеваля. Теорема Шмідта про ортогоналізацію. Ізоморфізм гільбертових просторів.

Розділ 3. Лінійні функціонали, оператори і спряжений простір.

Тема 3.1. Неперервні лінійні функціонали. Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу. Рівносильність неперервності і обмеженості. Ядро лінійного функціоналу. Норма лінійного функціоналу. Приклади лінійних неперервних функціоналів.

Тема 3.2. Спряжений простір. Простір лінійних функціоналів і його повнота. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в гільбертовому просторі і просторі $C[a,b]$. Продовження лінійного функціоналу за неперервністю. Теорема Гана-Банаха та її наслідки. Лінійні неперервні функціонали в конкретних просторах функцій і послідовностей.

Тема 3.3 Обмежені лінійні оператори. Неперервність лінійного оператора в точці на всьому просторі. Обмеженість і неперервність лінійного оператора. Норма лінійного оператора. Простір лінійних обмежених операторів. Умови його повноти.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова література

1. Дороговцев А. Я. Математический анализ. – Киев: Факт, 2004. – 558 с.
2. Колмогоров Л. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
3. Березанський Ю. М. Ус Г. Ф., Шефтель В. Г. Функціональний аналіз. – Львів, Видавець І. С. Чижиков, 2014. – 560 с.
4. Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Методы решения задач по функциональному анализу. – Киев : «Вища школа», 1990. – 480 с.

Допоміжна література

1. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.
2. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи в упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекційні заняття

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Означення метричного простору. Нерівності Гельдера та Мінковського. Основні приклади метричних просторів. Збіжність в метричних просторах.
2	Відкриті та замкнені кулі. Відкриті множини. Замкнені множини. Замикання. Сепарабельні метричні простори.
3	Повнота метричних просторів. Приклади повних та неповних метричних просторів. Теорема про поповнення метричного простору.
4	Компактні простори. Покриття множини. Секвенціальна компактність. Властивості компактних множин. Приклади.
5	Критерії компактності Кантора та Хаусдорфа. Критерій компактності в R^n .
6	Неперервні відображення метричних просторів. Рівномірна неперервність. Неперервні відображення компактних множин та їх властивості. Теорема Арцела.
7	Принцип стискаючих відображень та його застосування. Стискаюче відображення. Нерухома точка. Теорема Банаха. Застосування.
8	Лінійні простори. Базис Гамеля. Вимірність простору. Приклади. Норма на лінійному просторі.
9	Банахові простори. Лінійні нормовані простори функцій і послідовностей. Скінченновимірні лінійні нормовані простори.
10	Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Рівність паралелограма. Неперервність скалярного добутку за двома аргументами.
11	Гільбертові простори. Ортогональність. Ортогональне доповнення. Теорема про ортогональну проекцію.
12	Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя. Ортонормовані базиси. Повні і замкнені ортонормовані системи. Рівність Парсеваля.

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
13	Теорема Шмідта про ортогоналізацію. Ізоморфізм гільбертових просторів.
14	Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу. Рівносильність неперервності і обмеженості. Ядро лінійного функціоналу.
15	Норма лінійного функціоналу. Приклади лінійних неперервних функціоналів.
16	Простір лінійних функціоналів і його повнота. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в гільбертовому просторі (теорема Рісса). Продовження лінійного функціоналу за неперервністю.
17	Теорема Гана-Банаха та її наслідки. Лінійні неперервні функціонали в конкретних просторах функцій і послідовностей.
18	Неперервність лінійного оператора в точці на всьому просторі. Обмеженість і неперервність лінійного оператора. Норма лінійного оператора. Простір лінійних обмежених операторів. Умови його повноти.

Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань
1	Приклади метричних просторів. Збіжність в конкретних просторах функцій і послідовностей. Відкриті множини і їх властивості. Замкнені множини і їх властивості. Замикання множини.
2	Приклади повних і неповних метричних просторів. Теорема про поповнення. Оператор стиску. Теорема Банаха, застосування.
3	Означення і властивості компактних множин. Відносно компактні і передкомпактні множини. Властивості неперервних відображень компактних множин.
4	Лінійні простори. Скінченновимірні і нескінченновимірні лінійні простори. Приклади норм на скінченновимірних і нескінченновимірних просторах. Основні лінійні нормовані простори функцій і послідовностей.
5	Скалярний добуток послідовностей і функцій. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Гільбертові простори функцій і послідовностей. Метрика і ортогональна проекція.

6	Ортонормовані системи. Теорема про ортогоналізацію. Нерівність Бесселя і рівність Парсеваля. Ортонормовані базиси в просторах L_2 і l_2 .
7	Неперервність функціоналу в окремій точці і на просторі. Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу. Норма лінійного функціоналу.
8	Приклади лінійних операторів. Дослідження їх обмеженості. Знаходження норми операторів.

6. Самостійна робота студента

Самостійна робота студента полягає:

- підготовка до лекційних та практичних занять – систематично до 2 год. на заняття,
- підготовка до модульних контрольних робіт - до 5 год на роботу,
- підготовка до колоквіуму - до 5 год.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

1. Систематичне відвідування лекційних і практичних занять.
2. Перескладання (переписування) модульної контрольної роботи не передбачене.
3. У випадку недостатньої кількості балів (менше 60) перед заліком може бути дано додаткові завдання, щоб добрати бали до 60.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Рейтинг студента з кредитного модуля складається з:

- 1) балів за виконання модульної контрольної роботи;
- 2) балів за активність на практичних заняттях
- 3) балів за відповідь на колоквіумі
- 4) заохочувальних балів

СИСТЕМА РЕЙТИНГОВИХ БАЛІВ

1. Бали за модульну контрольну роботу

Модульна контрольна робота поділяється на дві 45-хвилинні контрольні роботи, що проводяться у вигляді тестів. Завдання на тестові контрольні роботи містять по 5 типових практичних прикладів.

Кількість балів за розв'язання кожного прикладу: 3 бали.

Критерії оцінювання:

3 – правильна відповідь;

0 – неправильна відповідь;

Викладач має право після завершення тесту вибірково запросити фотокопії студентських робіт та поставити нуль балів за завдання, розв'язання яких буде відсутнє чи неправильне.

Максимальна кількість балів за модульний контроль:

3 бали $\times$ 5 завд. $\times$ 2 тест. контр. роб. = **30 балів.**

2. Бали за активність на практичних заняттях

Бали нараховуються за плідну роботу та відповіді на практичних заняттях. Але не більше ніж **10 балів** протягом усього семестру.

1 бал --- самостійно правильно розв'язане завдання і прокоментоване розв'язання

0.5 бала --- плідна робота на практичному занятті (ці бали нараховуються, якщо студент був присутній на занятті і виконував усі практичні завдання, які на ньому розв'язувалися)

0 балів --- пасивна робота на практичному занятті

3. Бали за відповідь на колоквиумі

Колоквиум відбувається у формі усної співбесіди викладача із студентом. Викладач задає студенту поступово декілька питань, на які студент відразу повинен надавати свою відповідь. Питання викладача можуть бути як продовженням опитування за попереднім питанням, так і бути на іншу тему.

За відповідь на кожне питання студент отримує певну кількість балів. Питання, в залежності від їх складності можуть вартувати від 1 до 5 балів.

Максимальна кількість балів за відповідь на колоквиумі дорівнює **10 балів**.

Під час відповіді на питання колоквиуму максимальну кількість балів студент отримує у випадку, якщо він надав повні та правильні відповіді на всі запитання викладача або припустився незначних похибок, які не вплинули на саму відповідь.

Нуль балів студент отримує у випадку, коли відповідь на запитання взагалі не була надана або містить грубі помилки. Якщо відповідь частково правильна, то студент за неї отримує, як правило, кількість балів, вдвічі меншу за максимально можливу за відповідне запитання.

4. Заохочувальні бали

Викладач має право заохотити студента певною додатковою кількістю балів (максимально – 5 балів за семестр) за надання оригінального розв'язання задачі чи розв'язання додаткового складного завдання.

5. Розрахунок шкали (R) рейтингу

Семестрова складова рейтингової шкали **R_с = 50 балів**, вона визначається як сума балів, отриманих за виконання модульної контрольної роботи, активність на практичних заняттях та відповідь на колоквиумі.

Рейтингова шкала з дисципліни дорівнює:

$$R = 60 + 40 * (R_{\max} - R_{\text{доп}}) / (R_c - R_{\text{доп}}) = 100 \text{ балів},$$

тут **R_{max}** = 50 – максимальний можливий семестровий рейтинг студента,

R_{доп} = 25 – мінімальна кількість балів, необхідна для допуску.

6. Умова допуску до семестрової атестації та визначення оцінки

Необхідною умовою допуску студента до семестрової атестації є семестровий рейтинг студента (**R_{ст}**) не менше 50 % від **R_с**, тобто не менше **25 балів**. В іншому разі студент повинен виконати додаткову роботу та підвищити свій рейтинг.

Сумарний рейтинг студента **R_д** визначається за формулою

$$R_d = 60 + 40 * (R_{\text{ст}} - R_{\text{доп}}) / (R_c - R_{\text{доп}}) + 20 + 1,6 * R_{\text{ст}} + R_s,$$

тут **R_s** – сумарна кількість заохочувальних балів.

Оцінка виставляється відповідно до значення R_D :

Сумарний рейтинг R_D	Оцінка
95-100	Відмінно
85-94	Дуже добре
75-84	Добре
65-74	Задовільно
60-64	Достатньо
$25 \leq R_D \leq 59$	Незараховано
$R_{ст} < 25$	Не допущений

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено проф, д.ф.-м.н., доц. Лось Валерій Миколайович.

Ухвалено кафедрою ПМА (протокол № 12 від 02.06.2021р.)

Погоджено Методичною комісією факультету¹ (протокол № 7 від 24.06.2021р.)

¹ Методичною радою університету – для загальноуніверситетських дисциплін.