Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Вища математика

Елементи лінійної і векторної алгебри, аналітична геометрія

Практикум

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Укладачі: Н. Л. Денисенко, В. Ф. Зражевська

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

УДК 51 (076)
Д33

Укладачі: *Денисенко Наталя Леонідівна*, канд. фіз.-мат. наук
Зражевська Віра Федорівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *Александрович І. М.*, канд. фіз.-мат. наук, доц., доцент кафедри обчислювальної математики КНУ ім. Тараса Шевченка

Відповідальний редактор *Дудкін М. Є.,* д-р фіз.-мат. наук, проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 29.02.2024 р.)
за поданням вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 3 від 21.02.2024 р.)

Д33 **Вища математика.** Елементи лінійної і векторної алгебри, аналітична геометрія [Електронний ресурс] : практикум : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра спец. 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н. Л. Денисенко, В. Ф. Зражевська. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 168 с.

Навчальний посібник розрахований для студентів закладів вищої освіти, які вивчають дисципліну «Вища математика» і охоплює такі розділи: елементи лінійної алгебри, елементи векторної алгебри, елементи аналітичної геометрії. У посібнику стисло наведено основні теоретичні відомості, які містять основні поняття, означення, властивості і формулювання теорем, а також розібрано достатню кількість розв'язання деяких типових задач. Також посібник містить завдання розрахункових робіт з цих тем.

Посібник може бути корисним при самостійній роботі студентів під час вивчення вище зазначених розділів курсу вищої математики, а також може бути використаний викладачами при проведенні практичних занять і контрольних заходів.

УДК 51 (076)

Реєстр. № НП 23/24-323. Обсяг 7,3 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальний посібник охоплює такі розділи дисципліни «Вища математика» як елементи лінійної алгебри, елементи векторної алгебри та аналітична геометрія. У посібнику стисло викладені основні теоретичні відомості, які містять основні поняття, означення і формули, властивості та формулювання теорем, а також доступно і наочно розібрано достатню кількість розв'язання типових прикладів, що допомагає студентам набути досвіду практичного застосування. Також посібник містить завдання розрахункових робіт з цих тем для закріплення вивченого матеріалу.

Посібник викладено на рівні, який доступний широкому колу студентів закладів вищої освіти з різним рівнем математичної підготовки. Посібник може бути корисним при самостійній роботі студентів під час вивчення вище зазначених розділів курсу вищої математики, а також може бути використаний викладачами при проведенні практичних занять і контрольних заходів.

1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Поняття матриці

Означення. Матрицею A розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, розташованих в m рядках і n стовпцях і позначають

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

або скорочено записують $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Матриці, зазвичай, позначають великими латинськими літерами. Числа a_{ij} називаються **елементами** матриці. Перший індекс i в елементі a_{ij} вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Наприклад, матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ має 2 рядки і 3 стопці, тобто розмір матриці 2×3. Елемент 4 стоїть в другому рядку і першому стовпці, тобто $a_{21} = 4$.

Матриця, у якої лише один рядок $(m = 1)$ називається матрицею-рядком: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$. Матриця, у якої лише один стовпець $(n = 1)$, — матрицею-стовпцем: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Якщо у матриці кількість рядків і стовпців однакова, тобто $m = n$, то матриця називається **квадратною** порядку n. Для квадратної матриці порядку n набір елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворює **головну діагональ**, а набір $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ — **бічну діагональ**.

Наприклад, матриця $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ квадратна третього порядку. Елементи 1, –2, 7 утворюють головну діагональ, а елементи 5, –2, 0 — бічну діагональ.

Квадратна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1, а всі інші елементи рівні 0 називається **одиничною** і, зазвичай, позначається E:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця, в якої всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю називається **діагональною**.

Матриця розміру $m\times n$, усі елементи якої дорівнюють нулю, називається **нульовою** і позначається $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Квадратна матриця називається **трикутною**, якщо всі елементи, що розташовані нижче (або вище) головної діагоналі, дорівнюють нулю. Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

1.2. Лінійні дії над матрицями

1. Операція порівняння. Матриці A і B називаються **рівними**, якщо вони мають однаковий розмір і мають рівні відповідні елементи: $a_{ij}=b_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

2. Додавання матриць. Сумою матриць A та B однакового розміру $m\times n$ називають матрицю $A+B$ розміру $m\times n$, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A та B:

$$(a+b)_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Тобто матриці додаються поелементно. Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & -5\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1 & -3 & -3\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$, то $A+B=\begin{pmatrix}1+1 & 2-3 & -3-3\\ 4+2 & 1+0 & -5+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -6\\ 6 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Основні властивості операції додавання матриць:

1. $A+B=B+A;$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C;$
3. $A+O=A;$
4. для кожної матриці A існує протилежна матриця $(-A)$ така, що $A+(-A)=O.$

3. Множення матриці на число. Добутком матриці A розміром $m\times n$ на число k називають матрицю kA розміру $m\times n$, елементи якої дорівнюють добутку елементів матриці A на число k:

$$(ka)_{ij}=ka_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Тобто матрицю множать на число поелементно. Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & -5\end{pmatrix}$, то $3A=3\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & -9\\ 12 & 3 & -15\end{pmatrix}$.

Основні властивості операції множення матриці на число:

1. $1\cdot A=A$;
2. $(k_1+k_2)\cdot A=k_1A+k_2A$, де k_1,k_2 — деякі числа;
3. $k(A+B)=kA+kB$;
4. $k_1(k_2A)=(k_1k_2)\cdot A.$

Різницю матриць $A-B$ можна визначити через операції додавання матриць і множення матриць на скаляр: $A-B=A+(-1)B$.

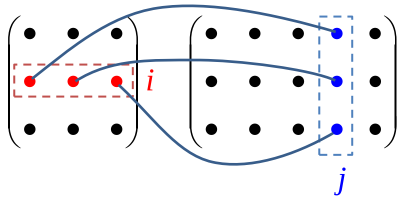
4. Множення матриць. Операція множення двох матриць вводиться тільки для випадку, коли кількість стовпців першої матриці в добутку дорівнює кількості рядків другої матриці. Такі матриці називаються **узгодженими**.

Добутком матриці A розміром $m\times k$ на матрицю B розміром $k\times n$ називають матрицю $C=AB$ розміром $m\times n$, кожний елемент c_{ij} якої знаходиться за формулою:

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{k} a_{il}\,b_{lj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}\,,\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\,.$$

Тобто кожний елемент c_{ij} матриці добутку, який стоїть в i-тому рядку та j-тому стовпці, дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

Схематично знаходження c_{ij} зображується так:



Наприклад, знайдемо добуток AB, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & -5\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

Матриця A розміру 2×3, матриця B розміру 3×2, тобто кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої і дорівнює 3. Отже, добуток матриць існує. Знаходимо c_{11}: для цього сумуємо добутки відповідних елементів першого рядка A і першого стовпчика B: $c_{11}=1\cdot 2+2\cdot 1+(-3)\cdot 0=4$. Для знаходження c_{12} сумуємо добутки відповідних елементів першого рядка A і другого стовпчика B: $c_{12}=1\cdot(-3)+2\cdot(-1)+(-3)\cdot 2=-11$. Для знаходження c_{21} сумуємо добутки відповідних елементів другого рядка A і першого стовпчика B:

$c_{21} = 4\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-5)\cdot 0 = 9$. Для знаходження c_{22} сумуємо добутки відповідних елементів другого рядка A і другого стовпчика B: $c_{21} = 4\cdot(-3) + 1\cdot(-1) + (-5)\cdot 2 = -23$. Остаточно, $C = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 9 & -23 \end{pmatrix}$.

Тепер для заданих матриць знайдемо добуток BA. Матриця B розміру 3×2, матриця A розміру 2×3, тому добуток BA існує і має розмір 3×3. Отримаємо

$$D = BA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-3)\cdot 4 & 2\cdot 2 + (-3)\cdot 1 & 2\cdot(-3) + (-3)\cdot(-5) \\ 1\cdot 1 + (-1)\cdot 4 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot(-3) + (-1)\cdot(-5) \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 4 & 0\cdot 2 + 2\cdot 1 & 0\cdot(-3) + 2\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 9 \\ -3 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Основні властивості множення матриць:

1. в загальному випадку $AB \neq BA$;
2. $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$;
3. $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$, $\quad (A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;
4. $k(A\cdot B) = (kA)\cdot B = A\cdot(kB)$;
5. $A_{m\times n}\cdot E_n = E_m\cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$;
6. $A_{m\times n}\cdot O_{n\times k} = O_{m\times k}$; $O_{n\times k}\cdot A_{k\times m} = O_{n\times m}$.

Якщо для матриць A та B виконується співвідношення $AB = BA$, то їх називають **переставними**. Одинична матриця E_n та нульова матриця O_n порядку n переставні з будь-якою квадратною матрицею того ж порядку.

Під поняттям **піднесення матриці до степеня *n*** розуміють добуток квадратної матриці саму на себе n разів і позначають отриману матрицю як A^n:

$$A^n = \underbrace{A\cdot A\cdot \ldots \cdot A}_{n\ разів}.$$

Для одиничної матриці E маємо $E^n = E$.

5. Транспонування матриць. Запис елементів рядків матриці у відповідні стовпці або елементів стовпців матриці у рядки у тому ж порядку називають **транспонуванням**. Матрицю, розміром $n \times m$, яку одержують з матриці A розміром $m \times n$ транспонуванням стовпців (рядків), називають **транспонованою матрицею** до матриці A і позначають A^T, тобто $a_{ij}^T = a_{ji}$, де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Матрицю A називають **симетричною**, якщо $A = A^T$.

Очевидні властивості: $\left(A^T\right)^T = A$; $(kA)^T = kA^T$;

$$(A+B)^T = A^T + B^T;\quad (AB)^T = B^T A^T.$$

Наприклад, знайдемо транспоновану матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. Транспонована матриця буде мати вигляд: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

Приклад 1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$(A+2B)C^T, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. $(A+2B)C^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 11 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-8 & 15+6 & 10-2 \\ 3+44 & 3-33 & 2+11 \\ 0+24 & 0-18 & 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 & 8 \\ 47 & -30 & 13 \\ 24 & -18 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти значення матричного многочлена $f(C)$, якщо $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $f(C) = C^2 + 2C - 3E_2$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2 & -1+3 \\ 2-6 & -2+9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2-3 & 2-2-0 \\ -4+4-0 & 7-6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.3. Визначники: означення, формули для обчислення визначників 2-го і 3-го порядків

Розглянемо квадратну матрицю A порядку n.

Означення. Визначником (детермінантом) квадратної матриці A називають число, яке позначають $\det A = |A|$ і обчислюють за правилом:

1. при $n = 1$ $\det A = a_{11}$;

2. при $n > 1$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k}, \tag{1.1}$$

де M_{1k} — визначник матриці порядку $n-1$, яку одержано з матриці A викреслюванням 1-го рядка та k-го стовпця.

Виходячи з означення визначника, можна отримати зручні формули для підрахунку визначників 2-го і 3-го порядків.

Формула обчислення визначника 2-го порядку, який відповідає матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

тобто від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, віднімаємо добуток елементів, що стоять на бічній діагоналі.

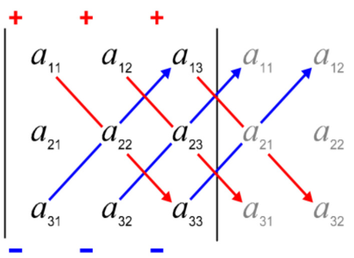
Наприклад, обчислимо визначник другого порядку: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 4 = 11$.

Формула обчислення визначника 3-го порядку, який відповідає матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ має вигляд

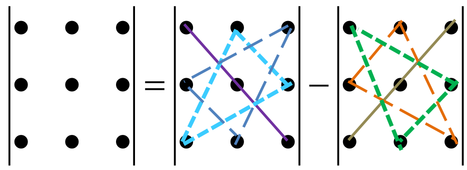
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Щоб запам’ятати формулу можна скористатися такими правилами.

1. Правило Саррюса: запис визначника розширюється дописуванням з правої сторони перших двох його стовпців, додаються добутки елементів на головній діагоналі та на її паралелі (добутки елементів вздовж "червоних стрілок") і віднімаються добутки елементів на бічній діагоналі та на її паралелях (добутки елементів вздовж "синіх стрілок"):



2. Правило трикутників: перші три доданки визначника є сумою добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, і добутків елементів, що є вершинами двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі; аналогічно утворюються доданки зі знаком «мінус», де за основу беремо побічну діагональ:



Наприклад, обчислимо визначник 3-го порядку за правилом Саррюса:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{matrix} = 2\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-4)\cdot 5 + 0\cdot 3\cdot 1 -$$

$$-0\cdot 1\cdot 5 - 2\cdot(-4)\cdot 1 - (-1)\cdot 3\cdot 2 = 38.$$

Визначник матриці, одержаної викреслюванням з матриці A i-того рядка та j-того стовпця, називають **доповняльним мінором** M_{ij} елемента a_{ij}. Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ називають **алгебраїчним доповненням** елемента a_{ij}.

Наприклад, знайдемо доповняльний мінор і алгебраїчне доповнення елемента a_{21} матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Для знаходження доповняльного мінору M_{21} обчислюємо визначник матриці, що утворилась викреслюванням в матриці A другого рядка і першого стовпця: $M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$. Тоді $A_{21} = (-1)^{2+1}(-2) = 2$.

1.4. Властивості визначників

1. Транспонування матриці не змінює її визначника.

2. Перестановка двох рядків (стовпців) визначника змінює знак.

3. Спільний множник всіх елементів деякого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

4. Визначник дорівнює нулю, якщо визначник містить:

1) нульовий рядок (стовпець);

2) два однакові рядки (стовпці);

3) пропорційні рядки (стовпці).

5. Якщо кожен елемент i-го рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких i-тий рядок (стовпець) складається з перших доданків, а у другого – з других. Інші елементи усіх трьох визначників однакові.

6. Якщо один із рядків (стовпців) є лінійною комбінацією його інших рядків, то визначник дорівнює 0.

7. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного з його рядків (стовпців) додаються елементи іншого рядка (стовпця), попередньо помножені на одне й те саме число.

Наслідок: визначник не змінюється, якщо до одного його рядку (стовпця) додається лінійна комбінація інших рядків (стовпців).

8. ***Розклад визначника за елементами рядка (стовпця)***: визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого з його рядків (стовпців) на їхні алгебраїчні доповнення. Тобто справедливі формули:

розкладу визначника за *i*-тим рядком:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \ 1 \le i \le n \tag{1.2}$$

та **розкладу визначника за *j*-тим стовпцем**:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}, \ 1 \le j \le n . \tag{1.3}$$

9. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця), дорівнює нулю.

10. Визначник добутку матриць n-го порядку дорівнює добутку визначників цих матриць, тобто $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Властивість 8 дає можливість обчислювати визначник n-го порядку, розкладаючи його за елементами будь-якого рядка (стовпця), а не тільки 1-го, як це сформульовано в означенні визначника.

Наприклад, обчислимо визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами 3-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot A_{31} + 1\cdot A_{32} + 2\cdot A_{33} = 5(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$+2(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - (-8) + 2\cdot 5 = 38.$$

Тепер обчислимо заданий визначник, розклавши його за елементами, наприклад, 1-го стовпця:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot A_{11} + 3\cdot A_{21} + 5\cdot A_{31} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+5(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(2+4) - 3\cdot(-2-0) + 5\cdot(4-0) = 38.$$

Як видно з властивості 8, в загальному випадку визначник n-го порядку зводиться до обчислення n визначників $(n-1)$-го порядку. При цьому, якщо деякі елементи рядка або стовпця, за якими розкладається визначник, дорівнюють нулю, то доданки, що відповідають цим елементам у розкладі визначника, випадають. Тому доцільно, використовуючи властивості визначника, перетворити спочатку визначник так, щоб у деякому рядку (або стовпцю) всі елементи, крім одного, дорівнювали нулю.

Приклад 3. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-3&-2\\2&1&-1&3\\2&-2&4&-3\\1&-3&-2&5\end{vmatrix}.$$

Розв'язання. **І спосіб.** Перетворимо спочатку визначник так, щоб у першому рядку всі елементи, крім одного, дорівнювали нулю:

$\begin{vmatrix}1&2&-3&-2\\2&1&-1&3\\2&-2&4&-3\\1&-3&-2&5\end{vmatrix}=$ (помножимо перший стовпчик на -2 і додамо до другого) $=\begin{vmatrix}1&0&-3&-2\\2&-3&-1&3\\2&-6&4&-3\\1&-5&-2&5\end{vmatrix}=$ (помножимо перший стовпчик на 3 і додамо до третього стовпчика) $=\begin{vmatrix}1&0&0&-2\\2&-3&5&3\\2&-6&10&-3\\1&-5&1&5\end{vmatrix}=$ (помножимо перший стовпчик на 2 і додамо до четвертого стовпчика) $=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-3&5&7\\2&-6&10&1\\1&-5&1&7\end{vmatrix}.$

Отриманий визначник розкладемо за елементами першого рядка за формулою (1.2):

$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&3&5&7\\2&-6&10&1\\1&-5&1&7\end{vmatrix}=1\cdot A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3&5&7\\-6&10&1\\-5&1&7\end{vmatrix}=$ (помножимо елементи третього рядка на -10 і додамо до елементів другого рядка) $=\begin{vmatrix}-3&5&7\\44&0&-69\\-5&1&7\end{vmatrix}=$

(помножимо елементи третього рядка на –5 і додамо до елементів першого рядка)$=\begin{vmatrix} 22 & 0 & -28 \\ 44 & 0 & -69 \\ -5 & 1 & 7 \end{vmatrix}=$ (розкладемо визначник за елементами другого стовпчика за формулою (1.3)) $=1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 22 & -28 \\ 44 & -69 \end{vmatrix}=22\begin{vmatrix} 1 & 28 \\ 2 & 69 \end{vmatrix}=22(69-56)=286$.

II спосіб. Розкладемо визначник четвертого порядку за елементами, наприклад, першого рядка за формулою (1.2), одержимо

$$\Delta=1\cdot A_{11}+2\cdot A_{12}+(-3)\cdot A_{13}+(-2)\cdot A_{14}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}-3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}-2\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=\big(1\cdot4\cdot5+(-1)\cdot(-3)\cdot(-3)+(-2)\cdot(-2)\cdot3-3\cdot4\cdot(-3)-(-1)\cdot(-2)\cdot5-(-3)\cdot(-2)\cdot1\big)-$$
$$-2\cdot\big(2\cdot4\cdot5+(-1)\cdot(-3)\cdot1+2\cdot(-2)\cdot3-3\cdot4\cdot1-(-1)\cdot2\cdot5-(-3)\cdot(-2)\cdot2\big)-$$
$$-3\cdot\big(2\cdot(-2)\cdot5+1\cdot(-3)\cdot1+2\cdot(-3)\cdot3-3\cdot(-2)\cdot1-1\cdot2\cdot5-(-3)\cdot(-3)\cdot2\big)+$$
$$+2\cdot\big(2\cdot(-2)\cdot(-2)+1\cdot4\cdot1+2\cdot(-3)\cdot(-1)-(-1)\cdot(-2)\cdot1-1\cdot2\cdot(-2)-4\cdot(-3)\cdot2\big)=$$

$$=(20-9+12+36-10-6)-2(40+3-12-12+10-12)-3(-20-3-18+6-10-18)+$$
$$+2(8+4+6-2+4+24)=43-34+189+88=286.$$

***<u>Приклад 4</u>*.** Користуючись властивостями визначника, довести справедливість рівності:

$$\begin{vmatrix} \cos2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}=0.$$

Розв'язання. Додамо елементи другого стовпця до третього**:**

$\begin{vmatrix} \cos2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha \\ \cos2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta+\cos^2\beta \\ \cos2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma+\cos^2\gamma \end{vmatrix}=$ (до елементів другого стовпця застосуємо формули пониження степеня) $=\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} & 1 \\ \cos 2\beta & \dfrac{1+\cos 2\beta}{2} & 1 \\ \cos 2\gamma & \dfrac{1+\cos 2\gamma}{2} & 1 \end{vmatrix}=$ (з елементів другого стовпця винесемо спільний множник ½) $=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & 1+\cos 2\alpha & 1 \\ \cos 2\beta & 1+\cos 2\beta & 1 \\ \cos 2\gamma & 1+\cos 2\gamma & 1 \end{vmatrix}$ = (запишемо визначник як суму двох визначників) $=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & 1 & 1 \\ \cos 2\beta & 1 & 1 \\ \cos 2\gamma & 1 & 1 \end{vmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \cos 2\beta & \cos 2\beta & 1 \\ \cos 2\gamma & \cos 2\gamma & 1 \end{vmatrix}$ = (перший визначник дорівнює нулю, оскільки другий і третій стовпчики однакові, другий визначник дорівнює нулю, оскільки першій і другий стовпчики однакові) $= 0 + 0 = 0$.

1.5. Обернена матриця

Квадратна матриця називається **виродженою**, якщо її визначник дорівнює нулю, і **невиродженою** у протилежному випадку.

Означення. Оберненою до квадратної матриці A порядку n називають матрицю A^{-1}, таку, що $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$, де E_n – одинична матриця.

Матрицю A, для якої існує обернена матриця, називають **оборотною**.

Доводиться, що **якщо матриця A квадратна і невироджена, то обернена матриця A^{-1} існує та єдина**.

Нехай матриці A та B квадратні порядку n. Обернення матриць має наступні *властивості*:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$; **2.** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

3. $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$; **4.** $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$;

5. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Знаходити обернену матрицю можна за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T, \qquad (1.4)$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

<u>**Схема побудови оберненої матриці**</u> A^{-1} до матриці A (третього порядку):

1) обчислюємо визначник $\det A \neq 0$;

2) обчислюємо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів a_{ij} матриці A;

3) складаємо приєднану матрицю з алгебраїчних доповнень $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ і транспонуємо її: $A^* = \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$;

4) обернену матрицю обчислюємо за формулою $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*}$.

<u>***Приклад 5***</u>**.** Для матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ знайти обернену матрицю A^{-1}.

Розв'язання. 1) Для існування A^{-1} підрахуємо визначник і перевіримо, що він не дорівнює 0:

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ (домножили елементи другого стовпчика на 2 і додали до елементів першого стовпчика) = $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Отже,

A^{-1} існує.

2) Знаходимо A_{ij} для кожного елемента матриці:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4;$ $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2;$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4;$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -7;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2;$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4;$ $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5.$

Складаємо матрицю з алгебраїчних доповнень елементів і транспонуємо її:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -7 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді з (1.4) маємо $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^* = \dfrac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}.$

Перевіримо, що $A^{-1}A = E$.

Дійсно, $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 & 0 \cdot (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 & 0 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \\ -1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 5 & -1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{7}{4} \cdot 3 + \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot 5 & \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{7}{4} \cdot 1 + \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot 1 & \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{7}{4} \cdot 2 + \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Матриця A^* називається **приєднаною** до матриці A. Тому цей метод знаходження оберненої матриці називається **метод приєднаної матриці**.

1.6. Розв'язування матричних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Розглянемо матричне рівняння виду

$$AX = B,$$

де A та B — відомі матриці розміром $n \times n$ та $n \times k$ відповідно. Якщо матриця A оборотна, то існує єдиний розв'язок матричного рівняння — матриця X розміром $n \times k$. Щоб знайти X домножуємо ліву і праву частини рівняння на A^{-1} і користуємось означенням оберненої матриці:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow E_n X = A^{-1}B \Rightarrow$$

$$X = A^{-1}B. \tag{1.5}$$

Аналогічно, матричне рівняння

$$XA = B$$

з оборотною матрицею A має розв'язок

$$X = BA^{-1}. \tag{1.6}$$

<u>Приклад 6</u>. Знайти матрицю X, яка є розв'язком матричного рівняння : $BXA = C$, де $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Щоб знайти матрицю X домножимо рівняння на B^{-1} зліва

$$\underbrace{B^{-1} \cdot B}_{=E} XA = B^{-1} \cdot C \Rightarrow EXA = B^{-1}C \Rightarrow XA = B^{-1}C$$

і на A^{-1} справа

$$X \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{=E} = B^{-1}C \cdot A^{-1} \Rightarrow XE = B^{-1}CA^{-1} \Rightarrow X = B^{-1}CA^{-1}.$$

Знаходимо B^{-1} : $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -6+5=-1$;

$$A_{11}=(-1)^2(-2)=-2;\ A_{12}=(-1)^3(-1)=1;\ A_{21}=(-1)^3 5=-5;\ A_{22}=(-1)^4 3=3.$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо A^{-1} : $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2-1=1$;

$$A_{11}=(-1)^2(-2)=-2;\ A_{12}=(-1)^3 1=-1;\ A_{21}=(-1)^3 1=-1;\ A_{22}=(-1)^4(-1)=-1.$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо невідому матрицю X:

$$X=B^{-1}CA^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8-5 & 6+10 \\ -4+3 & -3-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 16 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6-16 & -3-16 \\ 2+9 & 1+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -22 & -19 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $BXA=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -22 & -19 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -66+55 & -57+50 \\ 22-22 & 19-20 \end{pmatrix}\times$

$$\times\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 & -7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11-7 & -11+14 \\ 0-1 & 0+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=C.$$

1.7. Ранг матриці та його знаходження методом обвідних мінорів

Розглянемо матрицю A розміром $m\times n$. Виберімо в матриці A будь-які k рядків і k стовпців, де $1\le k\le \min(m,n)$. Визначник порядку k, складений з елементів, які стоять на перетині вибраних рядків і стовпців, називають **мінором *k*-того порядку** M_k матриці A.

Наприклад, одним з мінорів другого порядку матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ є визначник складений з елементів, які стоять на перетині першого і третього рядків та другого і третього стовпців: $M_2=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Означення. Найбільший з порядків відмінних від нуля мінорів матриці A називають її **рангом** і позначають rgA або $rangA$.

Тобто натуральне число r називають рангом матриці A, якщо серед мінорів r-го порядку цієї матриці є принаймні один відмінний від нуля, а всі мінори $(r+1)$-го порядку і вищого дорівнюють нулю.

Мінор матриці, порядок якого дорівнює рангу матриці, називають **базисним**, а рядки і стовпці, що утворюють базисний мінор, називають **базисними рядками і стовпцями**.

Є декілька методів знаходження рангу матриці.

Розглянемо спочатку **метод обвідних мінорів** знаходження рангу матриці. Метод ґрунтується на наступній **теоремі**: якщо матриця A містить мінор k-того порядку, що не дорівнює нулю, а всі мінори $(k+1)$-го порядку, що обводять цей мінор, рівні нулю, то число k є рангом матриці.

Алгоритм методу обвідних мінорів можна сформулювати наступним чином. Нехай у матриці знайдено мінор k-го порядку $M_k \neq 0$. Розглянемо лише ті мінори $(k+1)$-го порядку, які містять в собі вибраний мінор M_k. Якщо вони всі дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k. У протилежному випадку серед обвідних мінорів існує ненульовий мінор $(k+1)$-го порядку, і вся процедура повторюється.

<u>Приклад 7</u>. Обчислити ранг матриці методом обвідних мінорів:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -2 & 3\\ 3 & 6 & -3 & 5\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. **а)** Знаходимо ненульовий мінор 2-го порядку: $M_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3\neq 0$

і складаємо мінори третього порядку, які його включають. Таких мінорів два. Перший утворений елементами першого, другого і четвертого стовпців; а другий – елементами першого, третього і четвертого стовпців:

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 6 & 5\end{vmatrix}=0;\quad M_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 3\\ 3 & -3 & 5\end{vmatrix}=0.$$

Усі обвідні мінори 3-го порядку дорівнюють нулю. Отже, $rgA=2$. Мінор $M_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}$ є базисним; перший, другий рядок та перший і четвертий стовпці є базисними.

б) Мінор другого порядку, відмінний від нуля, знайдемо на перетині перших двох рядків та перших двох стовпців $M_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-6=-7$.

Мінор третього порядку, який є обвідним для M_2, знайдемо на перетині першого, другого і четвертого рядка та першого, другого і четвертого стовпця:

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 4\\ 7 & 7 & 1\end{vmatrix}=-1+84-14-7-28-6=28.$$

Оскільки $M_4=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -7 & -13 & 6\\ 5 & -14 & -26 & 12\\ 7 & -14 & -26 & 8\end{vmatrix}=0$,

то ранг матриці дорівнює 3.

Для квадратної матриці можна встановити зв'язок між її виродженістю (невиродженістю) та рангом матриці.

1. Визначник квадратної матриці A n-го порядку дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли її ранг менше від n, тобто

$$\det A = 0 \Leftrightarrow rgA < n .$$

2. Визначник квадратної матриці A n-го порядку відмінний від нуля тоді й лише тоді, коли її ранг дорівнює порядку матриці, тобто

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow rgA = n . \qquad (1.7)$$

1.8. Знаходження рангу матриці за допомогою елементарних перетворень

До *елементарних перетворень матриці* (ЕПМ) відносять:

1) перестановку місцями двох рядків (стовпців);

2) множення всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на число $k \neq 0$;

3) додавання до всіх елементів будь якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число $\lambda \neq 0$;

4) транспонування матриці.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними*** і позначаються $A \sim B$, якщо одна із них отримана з іншої за допомого елементарних перетворень.

Властивості рангу матриці

1) $0 \leq rangA \leq \min(m,\ n)$.

Причому $rangA = 0$ тоді і лише тоді, коли $A = 0$ – нульова матриця.

2) Ранг матриці не зміниться, якщо:

- матрицю транспонувати;
- викреслити нульовий рядок (стовпчик) матриці;
- при елементарних перетвореннях матриці.

За допомогою елементарних перетворень, які не змінюють рангу матриці, матрицю зводять до трикутного (східчастого або трапецеподібного) вигляду, де всі елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю. Потім легко знаходимо базисний мінор, шляхом знаходження відмінного від нуля визначника трикутної матриці (на головній діагоналі якої немає нульових елементів). Кількість ненульових рядків вказує на ранг матриці.

Приклад 8. Обчислити ранг матриці методом елементарних перетворень:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -2 & 3\\ 3 & 6 & -3 & 5\end{pmatrix}$; **б)** $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -3 & 4 & -8\\ 5 & 1 & -1 & 7 & -14\\ 7 & 7 & 9 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

Розв'язання. **а)** Виконаємо такі елементарні перетворення:

від другого рядка матриці віднімемо перший рядок, помножений на 2;

від третього рядка віднімемо перший рядок, помножений на –3.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -2 & 3\\ 3 & 6 & -3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}II_{p.}=II_{p.}-I_p\cdot 2;\\ III_{p.}=III_{p.}-I_p\cdot 3\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2-1\cdot 2 & 4-2\cdot 2 & -2-(-1)\cdot 2 & 3-3\cdot 2\\ 3-1\cdot 3 & 6-2\cdot 3 & -3-(-1)\cdot 3 & 5-3\cdot 3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}II_{p.}\div(-3);\\ III_{p.}\div 4\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}\text{до третього рядка}\\ \text{додамо другий рядок:}\\ III_{p.}=III_{p.}+II_{p.}\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1+1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тут третій рядок є нульовим, тому будь-який мінор третього порядку буде рівним нулю. Звели матрицю до східчастого вигляду, отримали два ненульових рядки. Вибираємо мінор другого порядку так, щоб отримати визначник трикутної матриці, на головній діагоналі якої немає нульових елементів. Наприклад, мінор другого порядку, відмінний від нуля, знайдемо на перетині перших двох рядків та третього і четвертого стовпців $M_2=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Отже, ранг матриці дорівнює $rgA = 2$, а базисний мінор: $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

б) $$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & -8 \\ 5 & 1 & -1 & 7 & -14 \\ 7 & 7 & 9 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} II_{p.} = II_{p.} - 2 \cdot I_{p.} \\ III_{p.} = III_{p.} - 5 \cdot I_{p.}; \\ IV_{p.} = IV_{p.} - 7 \cdot I_{p.} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 2 \\ 2-2\cdot 1 & -1-2\cdot 3 & -3-2\cdot 5 & 4-2\cdot(-1) & -8-2\cdot 2 \\ 5-5\cdot 1 & 1-5\cdot 3 & -1-5\cdot 5 & 7-5\cdot(-1) & -14-5\cdot 2 \\ 7-7\cdot 1 & 7-7\cdot 3 & 9-7\cdot 5 & 1-7\cdot(-1) & -2-7\cdot 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -13 & 6 & -12 \\ 0 & -14 & -26 & 12 & -24 \\ 0 & -14 & -26 & 8 & -16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} III_{p.} = III_{p.} + II_{p.} \cdot (-2); \\ IV_{p.} = IV_{p.} + II_{p} \cdot (-2) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -13 & 6 & -12 \\ 0 & -14-7\cdot(-2) & -26-13\cdot(-2) & 12+6\cdot(-2) & -24-12\cdot(-2) \\ 0 & -14-7\cdot(-2) & -26-13\cdot(-2) & 8+6\cdot(-2) & -16-12\cdot(-2) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -13 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} IV_{p} \div 4; \\ \textit{поміняємо місцями} \\ \textit{третій (нульовий)} \\ \textit{і четвертий рядки}; \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -13 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Звели матрицю до східчастого вигляду, отримали три ненульових рядки. Вибираємо мінор третього порядку так, щоб отримати визначник трикутної матриці, на головній діагоналі якої немає нульових елементів. Наприклад, мінор третього порядку, відмінний від нуля, знайдемо на перетині перших двох і четвертого стовпців та всіх трьох рядків: $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Отже, ранг матриці дорівнює $rgB = 3$, а знайдений мінор — базисний.

1.9. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Основні означення

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$ має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.8}$$

де a_{ij}, b_i, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ — задані числа. Числа a_{ij} називають *коефіцієнтами* системи, b_i — *вільними членами*.

Систему лінійних алгебричних рівнянь називають **однорідною**, якщо вільні члени всіх рівнянь нульові, та **неоднорідною**, якщо хоча б один з них відмінний від нуля. Якщо кількість рівнянь співпадає з кількістю невідомих, таку систему лінійних рівнянь називають **квадратною**.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються **еквівалентними**, якщо множина їхніх розв'язків збігається, тобто будь-який розв'язок однієї системи є водночас розв'язком іншої, і навпаки.

Якщо скористатись правилом множення матриць і умовою рівності матриць, систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1.8) можна записати у еквівалентному **матричному вигляді**:

$$AX = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Матрицю A, елементами якої є коефіцієнти системи, називають **основною матрицею системи**. **Розширеною матрицею** $\overline{A}$ системи називають матрицю системи, яку доповнено стовпцем вільних членів:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \qquad (1.10)$$

Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь є будь-яка сукупність дійсних чисел $x_1 = c_1, x_2 = c_2, ..., x_n = c_n$, яка при підстановці в кожне рівняння системи перетворює його в тотожність.

Якщо система має хоча б один розв'язок, то вона називається **сумісною**, і **несумісною**, якщо не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається **визначеною**, якщо вона має єдиний розв'язок, і **невизначеною**, якщо вона має безліч розв'язків.

Розв’язати систему означає:

1) з’ясувати, чи є система сумісною або несумісною;

2) в разі сумісності системи, знайти множину її розв’язків.

1.10. Дослідження сумісності системи лінійних алгебричних рівнянь

Розглянемо систему (1.8). Відповідь на питання сумісності системи дає теорема Кронекера-Капеллі.

Теорема Кронекера - Капеллі (критерій сумісності системи). *Система лінійних алгебричних рівнянь* (1.8) *з розширеною матрицею* (1.10) *сумісна тоді й лише тоді, коли ранг матриці A системи дорівнює рангу розширеної матриці* $\overline{A}$ *системи:* $rgA = rg\overline{A}$.

Наслідки з теореми.

1. Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці й дорівнює кількості невідомих $rgA = n$, то система має єдиний розв’язок, тобто система є сумісною і визначеною.

2. Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від кількості невідомих $rgA = rg\overline{A} < n$, то система має безліч розв'язків, тобто система є сумісною і невизначеною.

1.11. Квадратні системи з невиродженою матрицею

Розглянемо СЛАР, де кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих $m = n$, тобто

$$AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

і матриця A невироджена, тобто $\det A \neq 0$. Тоді, $rgA = rg\overline{A} = n$ і, як випливає з теореми Кронекера — Капеллі, система має єдиний розв'язок.

Розглянемо різні методи знаходження цього розв'язку.

1.11.1. Матричний метод розв'язання СЛАР

Для невиродженої матриці існує обернена матриця A^{-1}. Тоді, відповідно до формули (1.5), $X = A^{-1}B.$

<u>Приклад 9</u>. Знайти розв'язок системи рівнянь матричним методом:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо неоднорідну квадратну систему. Складаємо основну матрицю системи з коефіцієнтів при невідомих: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Визначник матриці A знайдено в прикладі 5: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, отже матриця невироджена, $rgA = n = 3$ і система має єдиний розв'язок.

Записуємо систему в еквівалентному матричному вигляді

$$AX = B \text{ , де } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді, враховуючи значення A^{-1}, знайдене в прикладі 5, знаходимо:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 10 \\ (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot 10 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{7}{4} \cdot 6 - \frac{5}{4} \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$.

1.11.2. Формули Крамера

За формулами Крамера розв'язок системи (1.11) знаходиться за формулами

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \ , \tag{1.12}$$

де $\Delta = \det A$, а Δ_i — визначник матриці, одержаної з матриці A заміною i-го стовпця на стовпець вільних членів.

Приклад 10. Знайти розв'язок системи за формулами Крамера $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$

Розв'язання. Дослідження системи на визначеність проводилось в прикладі 8. Обчислюємо відповідно до формули (1.12) визначники:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 20 - 4 + 12 = -8; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 20 - 40 - 12 = -8;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 20 + 6 - 30 - 10 - 12 + 30 = 4.$$

Отже, $x_1 = \dfrac{-8}{-4} = 2,\ x_2 = \dfrac{-8}{-4} = 2,\ x_3 = \dfrac{4}{-4} = -1.$

1.12. Довільні неоднорідні системи лінійних рівнянь

Нехай система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.13}$$

є сумісною і невизначеною: $rgA = rg\overline{A} = r,\ 1 \le r \le \min(m,n)$. Будемо вважати, що базисний мінор розташований у перших r рядках і стовпцях матриці A. Відкинемо останні $(m - r)$ рівнянь системи (1.13):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{1.14}$$

Можна строго довести, що отримана скорочена система (1.14), є еквівалентною початковій (всі відкинуті рівняння є лінійною комбінацією r-перших рівнянь системи). Назвемо $x_1, x_2, .., x_r$ — базисними, а $x_{r+1}, x_{r+2}, .., x_n$ — вільними невідомими. Перенесемо доданки, які містять вільні невідомі, у праву частину рівняння (1.14):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_r - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_r - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Вільним невідомим надаємо довільних значень $x_{r+1}=C_1,\ x_{r+2}=C_2,\ \dots\ ,\ x_n=C_{n-r}$; де $C_1,\ C_2,\ \dots\ ,\ C_{n-r}\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}C_1-\dots-a_{1n}C_{n-r}\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}C_1-\dots-a_{rn}C_{n-r}\ . \end{cases} \tag{1.15}$$

Скорочена система (1.15) відносно $x_1, x_2, .., x_r$ є квадратною з невиродженою матрицею (матриця системи – базисний мінор). Розв'язавши систему (наприклад, із застосуванням формул Крамера), маємо вираз базисних невідомих через вільні:

$$x_1=x_1(C_1,C_2,...,C_{n-r}),\ x_2=x_2(C_1,C_2,...,C_{n-r}),\ \dots\ ,\ x_r=x_r(C_1,C_2,...,C_{n-r}).$$

Таким чином, отримано розв'язок системи (1.13), в якому базисні змінні виражені через вільні:

$$x_1=x_1(C_1,C_2,...,C_{n-r}),\ x_2=x_2(C_1,C_2,...,C_{n-r}),\ \dots\ ,\ x_r=x_r(C_1,C_2,...,C_{n-r}),$$
$$x_{r+1}=C_1,\ x_{r+2}=C_2,\ \dots\ ,\ x_n=C_{n-r}\ .$$

Такий розв'язок називається **загальним**. **Частинним** розв'язком системи називається такий загальний розв'язок системи, в якому вільні змінні набули конкретного значення.

Приклад 11**.** Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_4=2; \\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4=6; \\ 4x_1-2x_2+2x_4=3. \end{cases}$$

Розв'язання. Для перевірки системи на сумісність знаходимо ранги матриці системи і розширеної матриці.

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Знаходимо ненульовий мінор 2-го порядку:

$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Обчислюємо мінори 3-го порядку, що його обводять:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \; M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rgA = 2.$$

$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Для матриці $\overline{A}$ існує ще один мінор 3-го порядку:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rg\overline{A} = 3.$$

Оскільки $rgA \neq rg\overline{A}$, то система несумісна.

Приклад 12. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6; \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Ранг матриці системи $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ знаходився в прикладі 11: $rgA = 2$. Для знаходження рангу розширеної матриці $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ обчислюємо мінор третього порядку:

$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg\overline{A} = 2$. Отже, $rgA = rg\overline{A} = 2 < n = 4$, система сумісна і невизначена (тобто має нескінченну кількість розв'язків). В якості базисного мінору візьмемо $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Оскільки при виборі базисного мінору обрали перший і третій стовпці, змінні x_1, x_3 є базисними, а змінні x_2, x_4 є вільними. Покладемо $x_2 = C_1, x_4 = C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, і запишемо скорочену рівносильну систему:

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 + C_1 - C_2, \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 + C_1 - C_2. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок скороченої системи: $x_1 = \dfrac{2 + C_1 - C_2}{2};\ x_3 = 2$.

Таким чином, загальний розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{2 + C_1 - C_2}{2};\ x_2 = C_1;\ x_3 = 2;\ x_4 = C_2, \quad \text{де } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Знайдемо частинний розв'язок системи. Нагадаємо, що частинним розв'язком системи називається такий загальний розв'язок системи, в якому вільні змінні C_1, C_2 набули конкретного значення. Якщо прийняти, наприклад, $C_1 = 1, C_2 = 3$, можна обчислити усі невідомі і таким чином знайти частинний розв'язок: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3.$

1.13. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Розглянемо систему m лінійних рівнянь із n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\ ; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\ ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.16}$$

СЛАР (1.16) шляхом елементарних перетворень зведемо до трикутного або трапецеподібного вигляду, тобто

● трикутний вигляд:

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \cdots + a_{1(n-1)}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1; \\ c_{22}x_2 + \ \cdots \ + c_{2(n-1)}x_{n-1} + c_{2n}x_n &= \widetilde{b_2}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + c_{(n-1)n}x_n &= \widetilde{b_{n-1}}; \\ c_{nn}x_n &= \widetilde{b_n}; \end{aligned}\right. \tag{1.17}$$

● трапецеподібний вигляд:

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \cdots \ + a_{1n}x_n &= b_1 \, ; \\ c_{22}x_2 + \ \cdots \ + c_{2n}x_n &= \widetilde{b_2} \, ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n &= \widetilde{b_r} \, ; \\ 0 &= \widetilde{b_{r+1}} \, ; \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 &= \widetilde{b_m} \, . \end{aligned}\right. \tag{1.18}$$

СЛАР (1.17) розв’язують знизу догори, починаючи з останнього рівняння.

Система (1.18) має r рівнянь та n невідомих. Тоді знаходимо розв’язки $x_1, x_2, \dots, x_n$ цієї системи із наступних міркувань.

1) Якщо хоча б одне із значень $\widetilde{b_{r+1}}, \ \dots \ , \widetilde{b_m}$ відмінне від нуля, то система несумісна (не має розв’язків).

2) Якщо $\widetilde{b_{r+1}} = \cdots = \widetilde{b_m} = 0$, то система має безліч розв’язків, отже, система сумісна, але невизначена. Тоді, перших r невідомих це <u>*основні (базисні)*</u> невідомі, а решта $(n-r)$ невідомих — <u>*вільні*</u> (приймають довільні сталі значення). Базисні невідомі виражають через вільні невідомі.

Розв’язуючи СЛАР (1.16) методом Гаусса, до трикутного (або трапецеподібного) вигляду для зручності зводять не систему рівнянь, а розширену матрицю системи (матрицю, яка утворена приєднанням до основної матриці стовпчика вільних членів)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

і виконують елементарні перетворення <u>**лише над рядками**</u> цієї матриці.

Метод Гаусса менш громіздкий у обчисленнях на відміну від матричного методу і формул Крамера та його можна застосовувати і тоді, коли основний визначник системи дорівнює нулю.

<u>Приклад 13</u>. Розв'язати систему методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 10; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -2; \\ -13x_1 + 8x_2 + 22x_3 - 11x_4 = 1; \\ 12x_1 - 7x_2 - 23x_3 + 9x_4 = 1. \\ -3x_1 - 7x_2 + 11x_3 = -6; \end{cases}$

Розв'язання. **а)** Виписуємо розширену матрицю заданої системи та приведемо її до трикутного (або трапецеподібного) вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{ділимо всі елементи першого} \\ \text{рядка на } 2 \Rightarrow \text{ I}_p \div 2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \text{анулюємо виділені елементи у першому стовпці:} \\ II_p = I_p \cdot (-3) + II_p; \\ III_p = I_p \cdot (-5) + III_p; \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 1\cdot(-3)+3 & -0.5\cdot(-3)+1 & 0\cdot(-3)+2 & 1\cdot(-3)+6 \\ 1\cdot(-5)+5 & -0.5\cdot(-5)+1 & 0\cdot(-5)+2 & 1\cdot(-5)+10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 2.5 & 2 & 3 \\ 0 & 3.5 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} II_p = II_p \cdot 2; \\ III_p = III_p \cdot 2; \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \text{тепер працюємо з другим і третім рядком,} \\ \text{анулюємо виділений елемент у другому стовпці:} \\ III_p = II_p \cdot (-7) + III_p \cdot 5; \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 5\cdot(-7)+7\cdot 5 & 4\cdot(-7)+4\cdot 5 & 6\cdot(-7)+10\cdot 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right).$$

Таким чином, система рівнянь набуває вигляду $\begin{cases} 1\cdot x_1+(-0.5)\cdot x_2+0\cdot x_3=1, \\ 0\cdot x_1+5\cdot x_2+4\cdot x_3=6, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+(-8)\cdot x_3=8. \end{cases}$

Розв'язуючи її знизу догори, поступово знайдемо всі розв'язки:

$$\begin{cases} x_1=1+0.5x_2, \\ x_2=\dfrac{1}{5}(6-4x_3), \\ x_3=-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2, \\ x_2=2, \\ x_3=-1. \end{cases}$$

б) Випишемо розширену матрицю системи і зводимо її до трапецеподібного вигляду:

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ -13 & 8 & 22 & -11 & 1 \\ 12 & -7 & -23 & 9 & 1 \\ -3 & -7 & 11 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{поміняємо місцями елементи} \\ \text{першого і другого рядків:} \\ \mathrm{II}_p \leftrightarrow \mathrm{I}_p \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -5 & 1 & 1 \\ -13 & 8 & 22 & -11 & 1 \\ 12 & -7 & -23 & 9 & 1 \\ -3 & -7 & 11 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{анулюємо елементи першого стовпця:} \\ II_p=I_p\cdot(-2)+II_p; \\ III_p=I_p\cdot 13+III_p; \\ IV_p=I_p\cdot(-12)+IV_p; \\ V_p=I_p\cdot 3+V_p \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1\cdot(-2)+2 & -1\cdot(-2)-1 & 1\cdot(-2)-5 & 2\cdot(-2)+1 & -2\cdot(-2)+1 \\ 1\cdot 13-13 & -1\cdot 13+8 & 1\cdot 13+22 & 2\cdot 13-11 & -2\cdot 13+1 \\ 1\cdot(-12)+12 & -1\cdot(-12)-7 & 1\cdot(-12)-23 & 2\cdot(-12)+9 & -2\cdot(-12)+1 \\ 1\cdot 3-3 & -1\cdot 3-7 & 1\cdot 3+11 & -2\cdot 3+0 & -2\cdot 3-6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 35 & 15 & -25 \\ 0 & 5 & -35 & -15 & 25 \\ 0 & -10 & 14 & -6 & -12 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} III_p=III_p+II_p\cdot 5; \\ IV_p=II_p\cdot(-5)+IV_p; \\ V_p=II_p\cdot 10+V_p \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 38 \end{array}\right) \sim \left[III_p \leftrightarrow V_p\right] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Отримали трапецеподібну матрицю, в якій три ненульових рядки, нульові рядки викреслюємо. Повертаємось від еквівалентної матриці до системи рівнянь:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + (-1)\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = -2; \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 - 7\cdot x_3 - 3\cdot x_4 = 5; \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 38. \end{cases}$$

Із останнього рівняння маємо $0 = 38$, ця рівність не має смислу, тому робимо висновок, що система не сумісна і розв'язків не має.

Зауважимо, що для розширеної матриці $\bar{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 38 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$ ранг дорівнює 3, бо базисний мінор $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 38 \end{vmatrix} = 38 \neq 0$.

А для основної матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -13 & 8 & 22 & -11 \\ 12 & -7 & -23 & 9 \\ -3 & -7 & 11 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$ ранг дорівнює $rgA = 2$, бо базисний мінор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Із теореми Кронекера-Капеллі маємо, що якщо $rgA \neq rg\bar{A}$, то система не сумісна і не має розв'язків.

Приклад 14. Дослідити систему на сумісність. Якщо вона сумісна, то знайти її загальний розв'язок, використовуючи метод Гаусса.

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 1; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2; \\ 8x_1 + 7x_2 - 23x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

Розв'язання. **а)** Випишемо розширену матрицю системи і зводимо її до трепецеподібного вигляду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \textit{анулюємо} \\ \textit{виділений елемент}: \\ III_p = III_p - II_p \cdot 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9-9 & 4-15 & 1-6 & 7-6 & 2-12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & -1 & -10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \textit{усно}: \ I_p \cdot (-3), \ II_p \cdot 2 \Rightarrow \\ \textit{тоді} \ \ II_p = I_p \cdot (-3) + II_p \cdot 2; \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 2\cdot(-3)+3\cdot 2 & 7\cdot(-3)+5\cdot 2 & 3\cdot(-3)+2\cdot 2 & 1\cdot(-3)+2\cdot 2 & 6\cdot(-3)+4\cdot 2 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{тепер працюємо з другим і третім рядком,} \\ \text{анулюємо виділений елемент у II стовпці:} \\ III_p = III_p - II_p \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отримали трапецеподібну матрицю, в якій два ненульових рядки.

Знаходимо ранг основної і розширеної матриці системи. Вибираємо мінор (найбільшого порядку) так, щоб отримати визначник трикутної матриці, на головній діагоналі якої немає нульових елементів. Оскільки $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$, то $rgA = 2$ і $rg\bar{A} = 2$. Отже, $rgA = rg\bar{A} < 4$ (тут $n =$ 4 це число невідомих у системі), тому система сумісна і має безліч розв'язків.

Знайдемо загальний розв'язок. Оскільки $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -11 \end{vmatrix}$ це базисний мінор, то x_1 та x_2 – це базисні невідомі системи, а вільні невідомі — x_3 та x_4. Нехай $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Повертаємось від еквівалентної матриці до системи

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 + 7\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 6; \\ 0\cdot x_1 - 11\cdot x_2 - 5\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = -10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 6 - 3C_1 - C_2; \\ \quad -11x_2 = -10 + 5C_1 - C_2. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему, починаючи з останнього рівняння:

$$x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5}{11}C_1 + \frac{1}{11}C_2, \quad \Rightarrow 2x_1 = 6 - 3C_1 - C_2 - 7x_2 \Rightarrow$$

$$2x_1 = 6 - 3C_1 - C_2 - 7\left(\frac{10}{11} - \frac{5}{11}C_1 + \frac{1}{11}C_2\right) \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}C_1 - \frac{9}{11}C_2.$$

Отже, загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}C_1 - \frac{9}{11}C_2; \\ x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5}{11}C_1 + \frac{1}{11}C_2; \\ x_3 = C_1; \\ x_4 = C_2, \qquad \text{де } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

б) Розглядаємо розширену матрицю системи і зводимо її до трапецеподібного вигляду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 7 & -23 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{поміняємо місцями елементи} \\ \text{першого і другого рядків:} \\ \mathrm{II}_p \leftrightarrow \mathrm{I}_p \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 7 & -23 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{анулюємо елементи першого стовпця:} \\ II_p = I_p\cdot(-2) + II_p; \\ III_p = I_p + III_p; \\ IV_p = I_p\cdot(-8) + IV_p \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ -2+2 & -4+1 & 8-5 & 2+1 & -2-1 \\ 1-1 & 2+3 & -4+1 & -1+2 & 1+2 \\ -8+8 & -16+7 & 32-23 & 8+1 & -8-1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & 9 & 9 & -9 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{l} II_p \div 3; \\ IV_p \div 9 \end{array}\right]\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)\sim\left[\begin{array}{l} \text{анулюємо елементи} \\ \text{другого стовпця:} \\ III_p = II_p \cdot 5 + III_p; \\ IV_p = IV_p - II_p \end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5+5 & 5-3 & 5+1 & -5+3 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1-1 & -1+1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отримали трапецеподібну матрицю, в якій три ненульових рядки.

Знаходимо ранг основної і розширеної матриці системи. Вибираємо відмінний від нуля мінор найбільшого порядку у еквівалентних матрицях

$$\bar{A}\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{і} \quad A\sim\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

так, щоб отримати визначник трикутної матриці, на головній діагоналі якої немає нульових елементів.

Оскільки $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, то $rgA=3$, $rg\bar{A}=3$. Отже, $rgA = rg\bar{A}$ і менше ніж кількість невідомих (чотири невідомих) у системі, тому система сумісна і має безліч розв’язків.

Знайдемо загальний розв'язок. Оскільки $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ це базисний мінор, то x_1, x_2, x_3 — це базисні невідомі системи, а x_4 — вільна невідома. Нехай $x_4 = C$, де $C \in \mathbb{R}$. Повертаємось від еквівалентної розширеної матриці до системи

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+2\cdot x_2-4\cdot x_3-1\cdot x_4=1; \\ 0\cdot x_1-1\cdot x_2+1\cdot x_3+1\cdot x_4=-1; \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+2\cdot x_3+6\cdot x_4=-2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1-C; \\ \quad -x_2+x_3=-1-C; \\ \qquad 2x_3=-2-6C. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему, починаючи з останнього рівняння:

$$x_3=-1-3C, \quad x_2=x_3+1+C=-1-3C+1+C=-2C;$$

$$x_1=1-C-2x_2+4x_3=1-C+4C+4(-1-3C)=-3-7C.$$

Отже, загальний розв'язок системи: $\begin{cases} x_1=-3-7C; \\ x_2=-2C; \\ x_3=-1-3C; \\ x_4=C, \quad \text{де } C\in\mathbb{R}. \end{cases}$

1.14. Системи лінійних однорідних рівнянь

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Властивості розв'язків системи (1.19):

1) однорідна система завжди сумісна: завжди існує принаймні один розв'язок – нульовий: $x_1=0,\ x_2=0,\ldots,\ x_n=0$;

2) сума розв'язків однорідної системи також є її розв'язком;

3) добуток розв'язку однорідної системи на будь-яке число також є розв'язком системи;

4) будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної СЛАР є розв'язком цієї системи.

Отримані в пункті 1.10 результати дозволяють зробити наступні ***висновки***:

1. Якщо $rgA=n$, то системи (1.19) має один розв'язок – нульовий.

2. Якщо $rgA < n$, то система (1.19) має також ненульові розв'язки.

3. Система n лінійних рівнянь однорідних із n невідомими має розв'язки, не рівні нулю, тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ $(\det A = 0 \Leftrightarrow rgA < n)$.

4. Якщо в системі однорідних рівнянь число рівнянь менше числа невідомих $(m < n)$, то система має розв'язки, відмінні від нульового.

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок однорідної системи:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо однорідну систему, де число рівнянь менше числа невідомих $(m = 3 < n = 4)$, отже, система має розв'язки, відмінні від нульового.

Ранг матриці системи $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ дорівнює $rgA = 3$, оскільки $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$. Оскільки при виборі базисного мінору обрали перший, другий і третій стовпці, то змінні x_1, x_2, x_3 є базисними, змінна x_4 є вільною. Покладемо $x_4 = C, C \in \mathbb{R}$, і перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = C; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -C; \\ 2x_1 + x_2 = C. \end{cases}$$

Оскільки система квадратна з невиродженою матрицею, застосуємо формули Крамера для пошуку її розв'язків:

$$M_3 = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} C & -1 & 0 \\ -C & -1 & 2 \\ C & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2C - 2C = -4C;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & C & 0 \\ 2 & -C & 2 \\ 2 & C & 0 \end{vmatrix} = 4C - 4C = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & C \\ 2 & -1 & -C \\ 2 & 1 & C \end{vmatrix} = -2C + 2C + 2C + 2C + 2C + 2C = 8C.$$

Отже, загальний розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4C}{-8} = \frac{C}{2}; \;\; x_2 = 0; \;\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8C}{-8} = -C; \;\; x_4 = C, \text{ де } C \in \mathbb{R}.$$

__Приклад 16__. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо систему трьох лінійних однорідних рівнянь із трьома невідомими. Така система має розв'язки, не рівні нулю, тоді і лише тоді, коли $\det A = 0$ (ранг матриці менший від кількості невідомих). З'ясовуємо, для яких значень параметра λ визначник матриці системи дорівнює 0:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda + 7 - 3\lambda + 5 = -\lambda + 12 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 12.$$

Вибираємо базисний мінор 2-го порядку $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$. При виборі базисного мінору обрали перший і другий стовпці, тому змінні x_1, x_2 є базисними, змінна x_3 є вільною. Покладемо $x_3 = C, C \in \mathbb{R}$, і запишемо скорочену систему: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -C; \\ x_1 + 12x_2 = 2C. \end{cases}$

Розв'язок скороченої системи: $x_1 = -\frac{2}{5}C, \; x_2 = \frac{1}{5}C.$

Загальний розв'язок системи: $x_1 = -\frac{2}{5}C, \; x_2 = \frac{1}{5}C, \; x_3 = C,$ де $C \in \mathbb{R}$.

Тест для самоконтроля

1. Матриця – це:

А) множина чисел, яка після певних обчислень дорівнює одному числу;

Б) прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків та n стовпців;

В) прямокутна таблиця чисел, яка завжди містить n рядків та n стовпців.

2. Сума матриць $A + B$ визначена, якщо:

А) матриці однакового розміру;

Б) тільки коли обидві матриці є квадратними;

В) якщо розмір A $m \times n$, а розмір В $n \times k$, де $m \neq k$.

3. Добутком матриці A на число k буде матриця, у якої:

А) один довільний рядок матриці A помножений на k;

Б) один довільний стовпець матриці A помножений на k;

В) кожний елемент матриці A помножений на k.

4. При множенні двох матриць дотримуємося умови:

А) кількість рядків першого матриці дорівнює кількості стовпців другої матриці;

Б) кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці;

В) кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості стовпців другої матриці.

5. Одинична матриця – це матриця:

А) довільного розміру з елементами, що дорівнюють одиниці;

Б) квадратна з елементами, що дорівнюють одиниці;

В) квадратна з одиницями на головній діагоналі та нульовими іншими елементами.

6. Визначник – це:

А) прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків та n стовпців;

Б) число, що ставиться у відповідність таблиці чисел, яка містить n рядків та n стовпців;

В) число, що ставиться у відповідність таблиці чисел, яка містить m рядків та n стовпців.

7. Визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ обчислюється за формулою:

А) $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}$;

Б) $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$;

В) $a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}$.

8. Мінором M_{ij} визначника матриці розміром $n \times n$ називається:

А) матриця $(n-1)$ -го порядку, що утворюється з початкової матриці викреслюванням i -го рядка і j -го стовпця;

Б) визначник $(n-1)$ -го порядку, що утворюється з початкової матриці викреслюванням i -го рядка і j -го стовпця;

В) визначник початкової матриці, помножений на елемент a_{ij}.

9. При заміні усіх рядків матриці стовпцями з відповідними номерами визначник матриці:

А) змінює знак свого числового значення;

Б) не змінює свого числового значення;

В) подвоюється.

10. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A , якщо виконується умова:

А) $A^{-1}A = A$;

Б) $A^{-1}A = AA^{-1} = E$;

В) $A^{-1}A = 0$.

11. Розв’язок матричного рівняння $XA = B$ має вигляд:

А) $X = BA^{-1}$;

Б) $X = A^{-1}B$;

В) $X = A^{-1}B^{-1}$.

12. Рангом матриці називається:

А) сума кількості рядків та стовпців;

Б) число, що дорівнює найбільшому порядку мінору;

В) число, що дорівнює найбільшому порядку ненульового мінору.

13. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються еквівалентними,

А) якщо множина їхніх розв'язків збігається;

Б) якщо вони мають однакову кількість рівнянь і невідомих;

В) інша відповідь.

14. Система лінійних алгебраїчних рівнянь є сумісною, якщо вона:

А) має лише один розв’язок;

Б) має хоча б один розв’язок;

В) не має розв’язків.

15. Система лінійних алгебраїчних рівнянь є невизначеною, якщо вона:

А) сумісна і має лише один розв’язок;

Б) сумісна і має більше одного розв’язка;

В) не має розв’язків.

16. Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має більше одного розв’язка, якщо:

А) визначник матриці системи дорівнює нулю;

Б) визначник матриці системи відмінний від нуля;

В) визначник матриці системи дорівнює 1.

2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Основні поняття. Лінійні операції над векторами

Вектор – напрямлений відрізок. Якщо A – початок відрізка, а B – його кінець, то вектор позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ називається **протилежним** вектору $\overrightarrow{AB}$. Довжиною або **модулем** вектора $\vec{a}$ називається довжина відрізка і позначається $|\vec{a}|$. Вектор, довжина якого дорівнює 0, називається **нульовим** вектором и позначається $\vec{0}$. Вектор, довжина якого дорівнює 1, називається **одиничним** вектором. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається **ортом** вектора і позначається $\vec{a}^{\,0}$. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **колінеарними** ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), якщо вони лежать на одній або на паралельних прямих. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **рівними** ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають однакову довжину. Три вектори в просторі називаються **компланарними**, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Під лінійними операціями над векторами розуміють додавання, віднімання векторів і множення вектора на скаляр.

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{a}+\vec{b}$, який починається в початку вектора $\vec{a}$ і закінчується в кінці вектора $\vec{b}$, при умові, що кінець вектора $\vec{a}$ і початок вектора $\vec{b}$ суміщені. Таке правило знаходження суми векторів називається правилом трикутника.

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. Якщо на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, відкладених із спільного початку, побудувати паралелограм, то одна діагональ буде сумою векторів, а інша – їх різницею.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який колінеарний вектору $\vec{a}$, має довжину $|\lambda|\,|\vec{a}|$ і має напрям вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$

і протилежний напрям, якщо $\lambda < 0$.

Проєкція вектора $\overrightarrow{AB}$ **на вісь** l. Позначимо через A_1 і B_1 проєкції точок A і B на вісь l відповідно. Проєкцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l, $np_l\overrightarrow{AB}$, називається число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ взяте зі знаком плюс, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l співнапрямлені, і зі знаком мінус, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l протилежно напрямлені.

Проєкція вектора на вісь має наступні ***властивості***:

1. Проєкція вектора на вісь дорівнює добутку довжини вектора на косинус кута φ між віссю і вектором:
$$np_l\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi. \tag{2.1}$$
2. Проєкція суми векторів на ту ж саму вісь дорівнює сумі їх проєкцій на цю вісь, наприклад, для трьох векторів $np_l\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b} + np_l\vec{c}$.
3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проєкція також множиться на це число: $np_l\lambda\vec{a} = \lambda\, np_l\vec{a}$.

2.2. Координати вектора. Напрямні косинуси

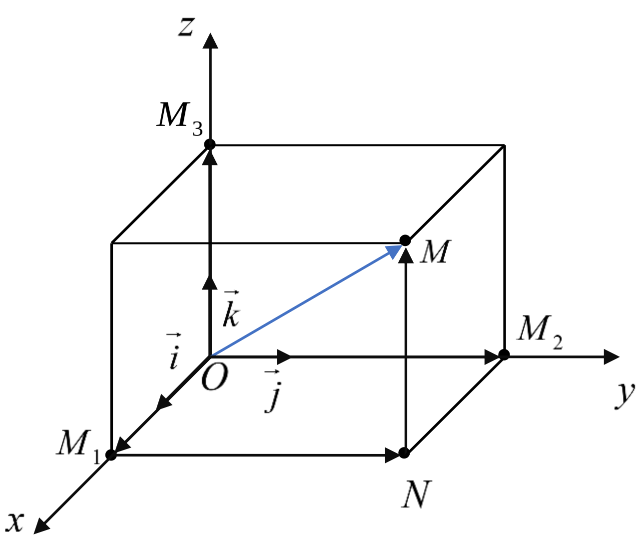


Рис. 2.1

Розглянемо в просторі прямокутну декартову систему координат *Oxyz*, через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ позначимо орти на осях *Ox*, *Oy*, *Oz* відповідно. Візьмемо довільний вектор $\vec{a}$ і сумістимо його початок з початком відліку: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ (Рис. 2.1).

Проведемо через точку M площини, паралельні координатним площинам, і точки перетину цих площин з осями *Ox, Oy, Oz* позначимо через M_1, M_2, M_3 відповідно. Тоді

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|\vec{i} + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|\vec{j} + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|\vec{k},$$

де $\left|\overrightarrow{OM_1}\right|, \left|\overrightarrow{OM_2}\right|, \left|\overrightarrow{OM_3}\right|$ – проєкції вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на осі *Ox, Oy, Oz* відповідно. Позначимо $\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = a_x$, $\left|\overrightarrow{OM_2}\right| = a_y$, $\left|\overrightarrow{OM_3}\right| = a_z$. Таким чином, отримаємо формулу:

$$\boldsymbol{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}. \tag{2.2}$$

Формула (2.2) називається **розкладом вектора по ортах координатних осей**. Числа a_x, a_y, a_z – величини проєкції вектора $\vec{a}$ на координатні осі – називаються **координатами** вектора. Рівність (2.2) часто записують у вигляді: $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Оскільки $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда (Рис. 2.1), то має місце рівність: $\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2$, звідки випливає формула для знаходження модуля вектора за відомими його координатам:

$$\boldsymbol{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \tag{2.3}$$

Позначимо через α, β, γ кути між вектором $\vec{a}$ і осями *Ox, Oy, Oz* відповідно. Тоді за властивістю 1 проєкції маємо: $a_x = \left|\vec{a}\right|\cos\alpha$, $a_y = \left|\vec{a}\right|\cos\beta$, $a_z = \left|\vec{a}\right|\cos\gamma$, звідки, враховуючи (2.3):

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}}. \tag{2.4}$$

З (2.4), очевидно, випливає рівність: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються **напрямними косинусами** вектора $\vec{a}$.

Використовуючи властивості проєкції вектора на вісь, легко довести, що якщо $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то:

1. При додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються): $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$.
2. При множенні вектора на скаляр координати вектора множаться на цей скаляр: $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}$.
3. Два вектори рівні між собою тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z$.
4. Координати колінеарних векторів пропорційні: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

Якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ можна знайти за формулою:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}. \tag{2.5}$$

***<u>Приклад 1</u>*.** Знайти α, β, при яких вектори $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \beta\vec{j} + 3\vec{k}$ колінеарні.

Розв'язання. Оскільки за умовою $\vec{a} \parallel \vec{b}$, їх координати пропорційні: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{\beta} = \dfrac{\alpha}{3}$. Знаходимо β: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{\beta} \Rightarrow \beta = 6$. Аналогічно знаходимо α: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{3}{2}$.

***<u>Приклад 2</u>*.** Знайти одиничний вектор $\vec{x}$, який колінеарний до $\overrightarrow{AB}$, де A(0,-2,-3), B(-3,-2,1), і утворює гострий кут з віссю Ox.

Розв'язання. За формулою (2.5) знаходимо координати $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = \{-3, 0, 4\}$. Оскільки за умовою $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{x}$, то їх координати пропорційні, тому існує така стала $\lambda = const \neq 0$, що $\vec{x} = \{-3\lambda, 0\lambda, 4\lambda\}$. За умовою $|\vec{x}| = 1$: $\sqrt{9\lambda^2 + 16\lambda^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{25\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \dfrac{1}{25} \Rightarrow \lambda = \pm\dfrac{1}{5}$. Таким чином, знайдено два одиничні вектори, колінеарні вектору $\overrightarrow{AB}$: $\vec{x}_1 = \left\{-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right\}$ і $\vec{x}_2 = \left\{\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right\}$.

Оскільки за умовою вектор $\vec{x}$ утворює гострий кут з віссю Ox, то $\cos\alpha > 0$ і, відповідно до формули (2.4), повинна виконуватись нерівність $a_x > 0$. Таким чином, вектором, який задовольняє всім умовам задачі, є вектор $\vec{x} = \left\{\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right\}$.

2.3. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi. \tag{2.6}$$

Враховуючи формулу (2.1), формула (2.6) може бути записана у вигляді:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}, \tag{2.7}$$

Властивості скалярного добутку векторів:

1. Комутативність: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. Однорідність: $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, де λ - скаляр.
3. Дистрибутивність за додаванням: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
4. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.
5. Два ненульових вектори взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Якщо вектори задані своїми проєкціями $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то скалярний добуток можна знайти за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{2.8}$$

тобто, скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.

Приклад 3**.** Знайти кут φ, який утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $3\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{a}-5\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. З умови перпендикулярності векторів маємо: $(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-5\vec{b})=0$. Розпишемо скалярний добуток в лівій частині рівності, користуючись властивостями скалярного добутку і враховуючи, що $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$:

$(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-5\vec{b})=0 \Rightarrow 3\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{a}-15\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{b}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow 3|\vec{a}|^2-16\vec{a}\cdot\vec{b}+5|\vec{b}|^2=0 \Rightarrow$

$16\vec{a}\cdot\vec{b}=8 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$. Застосовуємо формулу (2.6):

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Приклад 4**.** Знайти внутрішній кут при вершині A в трикутнику ABC, де $A(2,-1,-5)$, $B(2,2,-1)$, $C(0,3,-1)$.

Розв'язання. З формул (2.6), (2.8), (2.3) маємо формулу для знаходження кута між векторами $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$:

$$\boldsymbol{\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}. \qquad (2.9)$$

Кут φ в даному прикладі це кут між векторами $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. За формулою (2.5) знаходимо координати векторів: $\overrightarrow{AB}=\{0,3,4\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2,4,4\}$. Користуючись (2.9), знаходимо косинус кута при вершині A: $\cos\varphi=\dfrac{0\cdot(-2)+3\cdot4+4\cdot4}{\sqrt{0^2+3^2+4^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}}=\dfrac{28}{5\cdot6}=\dfrac{14}{15}$. Отже, кут φ при вершині A: $\varphi=\arccos\dfrac{14}{15}$.

Приклад 5**.** Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a}=\{2,-2,-1\}$ і задовольняє умову $\vec{x}\cdot\vec{a}=-18$.

Розв'язання. Оскільки за умовою $\vec{a}\,\|\,\vec{x}$, то їх координати пропорційні: $\vec{x}=\lambda\vec{a} \Rightarrow \vec{x}=\{2\lambda,-2\lambda,-\lambda\}$, $\lambda=const\neq 0$ Щоб знайти λ, розпишемо скалярний добуток в рівності $\vec{x}\cdot\vec{a}=-18$, скориставшись формулою (2.8): $4\lambda+4\lambda+\lambda=-18 \Rightarrow \lambda=\dfrac{-18}{9}=-2$. Отже, $\vec{x}=\{-4,4,2\}$.

Приклад 6**.** Знайти α, при якому вектори $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+\alpha\vec{j}-3\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Оскільки за умовою $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Отже, $\alpha+2\alpha+21=0 \Rightarrow \alpha=-7$.

Приклад 7**.** Знайти проєкцію вектора $\vec{a}+3\vec{b}$ на вектор $2\vec{c}$, де $\vec{a}=\{3,1,-2\}$, $\vec{b}=\{1,2,-1\}$, $\vec{c}=\{1,1,-4\}$.

Розв'язання. Користуючись формулами (2.7), (2.8), (2.3), можна записати формулу для знаходження проєкції вектора $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$:

$$\boldsymbol{np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^{\,2}+b_y^{\,2}+b_z^{\,2}}}}. \tag{2.10}$$

Для даного прикладу формула (2.10) набуває вигляду: $np_{2\vec{c}}(\vec{a}+3\vec{b})=\dfrac{(\vec{a}+3\vec{b})\cdot 2\vec{c}}{|2\vec{c}|}$. Знаходимо координати векторів:

$\vec{a}+3\vec{b}=\{3,\ 1,-2\}+3\{1,\ 2,-1\}=\{6,\ 7,-5\}$, $2\vec{c}=\{2,\ 2,-8\}$.

Тоді $np_{2\vec{c}}(\vec{a}+3\vec{b})=\dfrac{6\cdot 2+7\cdot 2+(-5)\cdot(-8)}{\sqrt{2^2+2^2+(-8)^2}}=\dfrac{66}{\sqrt{72}}=\dfrac{11}{\sqrt{2}}=\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 8. Дано три сили $\vec{M}=\{-1,2,3\}$, $\vec{N}=\{4,0,-3\}$, $\vec{P}=\{2,-2,3\}$, що прикладені до однієї точки. Знайти роботу, яку виконує рівнодійна цих сил при переміщенні точки прикладання з положення $B(1, -3, 5)$ в положення $C(-3, 0, 7)$, рухаючись прямолінійно.

Розв'язання. Знаходимо рівнодійну трьох сил: $\vec{F}=\vec{M}+\vec{N}+\vec{P}=\{-1+4+2,\ 2+0+(-2),\ 3+(-3)+3\}=\{5,\ 0,\ 3\}$. Робота A постійної сили $\vec{F}$ при переміщенні її точки прикладання по прямій дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення $\vec{S}$, тобто $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$. Знаходимо вектор переміщення: $\vec{S}=\overrightarrow{BC}=\{-4,\ 3,\ 2\}$.

Отже, $A=\vec{F}\bullet\vec{S}=5\cdot(-4)+0\cdot 3+3\cdot 2=-14$ (од. роботи).

2.4. Векторний добуток векторів

Розглянемо впорядковану трійку некомпланарних векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Сумістимо початки векторів в одній точці. Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається **правою**, якщо з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки. Якщо найкоротший поворот видно за годинниковою стрілкою, то трійка називається лівою.

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який:

1. перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c}\perp\vec{a}$ і $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3. вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку.

Векторний добуток позначається $[\vec{a},\vec{b}]$ або $\vec{a}\times\vec{b}$.

Властивості векторного добутку векторів:

1. Антикомутативність: $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$.

2. Однорідність: $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\lambda\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$, де λ – скаляр.

3. Дистрибутивність за додаванням: $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]$ або $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$.

4. $[\vec{a},\vec{a}]=0$.

5. Два ненульових вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхній векторний добуток дорівнює нулю: $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow[\vec{a},\vec{b}]=0$.

6. Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на зведених до спільного початку векторах: $\boldsymbol{S=\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|}$.

Якщо вектори задані своїми проєкціями $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, то векторний добуток можна знайти по формулі:

$$[\vec{a},\vec{b}]=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}. \tag{2.11}$$

Векторний добуток зручно шукати, склавши символічний визначник:

$$\boldsymbol{[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}}. \tag{2.12}$$

Розклавши визначник за елементами першого рядка, отримаємо формулу (2.11).

Розглянемо приклади задач, де використовується векторний добуток.

<u>Приклад 9</u>. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $3\overline{p}-\overline{q}$ і $\overline{p}+4\overline{q}$, якщо $|\overline{p}|=1, |\overline{q}|=2$, кут φ між $\overline{p}$ і $\overline{q}$ дорівнює $\pi/6$.

Розв'язання. За властивістю 6 векторного добутку маємо: $S=\left|[3\overline{p}-\overline{q},\ \overline{p}+4\overline{q}]\right|$. Розпишемо векторний добуток, скориставшись властивостями 2, 3:

$$[3\overline{p}-\overline{q},\ \overline{p}+4\overline{q}]=3[\overline{p},\overline{p}]-[\overline{q},\overline{p}]+12[\overline{p},\overline{q}]-4[\overline{q},\overline{q}].$$

Оскільки за властивістю 4: $[\overline{p},\overline{p}]=0, [\overline{q},\overline{q}]=0$, а за властивістю 1: $[\overline{q},\overline{p}]=-[\overline{p},\overline{q}]$, то $[3\overline{p}-\overline{q},\overline{p}+4\overline{q}]=[\overline{p},\overline{q}]+12[\overline{p},\overline{q}]=13[\overline{p},\overline{q}]$. Користуючись означенням векторного добутку, знаходимо площу паралелограма: $S = \left|[3\overline{p} - \overline{q}, \overline{p} + 4\overline{q}]\right| = 13\left|[\overline{p}, \overline{q}]\right| = 13\left|\overline{p}\right|\left|\overline{q}\right|\sin\varphi = 13 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 13$ (кв. од).

<u>Приклад 10</u>**.** Дано вершини трикутника $A(1, -5, 0)$, $B(-1, 2, 3)$, $C(2, -3, 2)$. Знайти: **1)** площу трикутника ABC, **2)** довжину висоти, опущену з вершини A на сторону BC.

Розв'язання. **1)** Оскільки за властивістю 6 модуль векторного добутку $[\vec{a}, \vec{b}]$ визначає площу паралелограма, побудованого на зведених до спільного початку векторах, то площа трикутника знаходиться за формулою:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|. \tag{2.13}$$

Розглянемо два вектори зі спільним початком $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. За формулою (2.5) знаходимо їхні координати: $\overrightarrow{AB} = \{-2, 7, 3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{1, 2, 2\}$. Шукаємо векторний добуток $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$, склавши визначник (2.12):

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (14 - 6)\vec{i} - (-4 - 3)\vec{j} + (-4 - 7)\vec{k} = 8\vec{i} + 7\vec{j} - 11\vec{k}.$$

Отже, за формулою (2.13) маємо площу ΔABC:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 7^2 + (-11)^2} = \frac{\sqrt{234}}{2} = \frac{3\sqrt{26}}{2} \text{ (кв. од.)}$$

2) Скористаємось формулою для площі трикутника: $S_\Delta = \frac{1}{2}|AH||BC|$, де $|AH|$ – довжина висоти, що опущена з вершини A на сторону BC. Знаходимо $|BC|$: $\overrightarrow{BC} = \{3, -5, -1\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}$.

Отже, $|AH| = \frac{2S_\Delta}{|BC|} = \frac{3\sqrt{26}}{\sqrt{35}} = \frac{3\sqrt{910}}{35}$ (од.)

***Приклад 11*.** Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$ і задовольняє умову $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=56$.

Розв'язання. Оскільки вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, і вектор $[\vec{a},\vec{b}]$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ за означенням векторного добутку, то вектори $\vec{x}$ і $[\vec{a},\vec{b}]$ колінеарні: $\vec{x}\,||\,[\vec{a},\vec{b}]\Rightarrow\vec{x}=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$, $\lambda=const\neq 0$.

Знаходимо $[\vec{a},\vec{b}]$:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&3&-2\\2&-2&-3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3&-2\\-2&-3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&-2\\2&-3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&3\\2&-2\end{vmatrix}=-13\vec{i}-\vec{j}-8\vec{k}.$$

Тоді $\vec{x}=\lambda(-13\vec{i}-\vec{j}-8\vec{k})=\{-13\lambda,-\lambda,-8\lambda\}$.

Знайдемо λ з умови $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=56$. Розпишемо скалярний добуток вектора $\vec{x}=\{-13\lambda,-\lambda,-8\lambda\}$ і вектора $\{1,-1,2\}$ в лівій частині умови: $-13\lambda+\lambda-16\lambda=56\Rightarrow-28\lambda=56\Rightarrow\lambda=-2$. Отже, $\vec{x}=\{26,2,16\}$.

***Приклад 12*.** Сила $\vec{F}=\{-1,2,-5\}$ прикладена до точки A(1,3,-4). Знайти величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки B(0, -2, 5).

Розв'язання. Якщо вектор сили $\vec{F}$ прикладений до точки A, а вектор $\vec{a}$ йде з деякої точки B у точку A, то вектор $[\vec{a},\vec{F}]$ представляє момент сили $\vec{F}$ відносно точки B. Знаходимо момент $\vec{M}$ сили $\vec{F}$ відносно точки B: $\vec{a}=\overrightarrow{BA}=\{1,5,-9\}$,

$$\vec{M}=[\vec{a},\vec{F}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&5&-9\\-1&2&-5\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5&-9\\2&-5\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&-9\\-1&-5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&5\\-1&2\end{vmatrix}=-7\vec{i}+14\vec{j}+7\vec{k}=\{-7,14,7\}.$$

Величина моменту: $|\vec{M}|=\sqrt{(-7)^2+(14)^2+(7)^2}=\sqrt{294}$. Напрямні косинуси моменту знаходимо за формулою (2.4): $\cos\alpha=\dfrac{-7}{\sqrt{294}}=\dfrac{-7\sqrt{294}}{294}$,

$\cos\beta=\dfrac{14}{\sqrt{294}}=\dfrac{7\sqrt{294}}{147}$, $\cos\gamma=\dfrac{7}{\sqrt{294}}=\dfrac{7\sqrt{294}}{294}$.

2.5. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, що дорівнює векторному добутку $[\vec{a}, \vec{b}]$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$.

Позначається мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Властивості мішаного добутку векторів:

1. Мішаний добуток не залежить від того, які вектори, що стоять рядом, перемножуються векторно: $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}]$.
2. Кругова перестановка множників мішаного добутку не змінює його величини, а перестановки двох сусідніх множників міняє знак добутку на протилежний: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$.
3. Мішаний добуток трьох некомпланарних векторів $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ як на ребрах, взятому зі знаком "плюс", якщо ці вектори утворюють праву трійку, і зі знаком "мінус", якщо вектори утворюють ліву трійку.
4. Мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні.

Якщо вектори задані своїми проєкціями $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$, то мішаний добуток можна знайти, обчисливши визначник, складений з координат векторів:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.14}$$

Приклад 13. Довести, що вектори $\vec{p} = \vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r} = -\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Розв'язання. Щоб довести, що вектори $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ не компланарні, обчислимо їх мішаний добуток за формулою (2.14) і покажемо, що він не дорівнює нулю:

$$\vec{p}\vec{q}\vec{r}=\begin{vmatrix}1 & 8 & 4\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & -6 & -3\end{vmatrix}=-9+(-24)+(-8)-(-12+(-6)+(-24))=1\neq 0.$$

Оскільки будь-який вектор $\vec{a}$ можна розкласти за трьома даними не компланарними векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ і коефіцієнти розкладання визначаються єдиним чином, то треба знайти такі α,β,γ, що виконується рівність: $\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$. Виконаємо дії над векторами в правій частині цієї рівності:

$$\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=\alpha(\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k})+\beta(\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k})+\gamma(-\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k})=$$

$$=\alpha\vec{i}+8\alpha\vec{j}+4\alpha\vec{k}+\beta\vec{i}+3\beta\vec{j}+\beta\vec{k}-\gamma\vec{i}-6\gamma\vec{j}-3\gamma\vec{k}=$$

$$=(\alpha+\beta-\gamma)\vec{i}+(8\alpha+3\beta-6\gamma)\vec{j}+(4\alpha+\beta-3\gamma)\vec{k}.$$

З іншого боку відомо, що $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

Скориставшись тим, що два вектори рівні між собою тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні, отримуємо систему для знаходження коефіцієнтів розкладання: $\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=1\\ 8\alpha+3\beta-6\gamma=2\\ 4\alpha+\beta-3\gamma=3\end{cases}$. Розв’язок системи можна знайти, наприклад, застосувавши формули Крамера: $\alpha=-8,\ \beta=-4,\ \gamma=-13$. Таким чином, розклад вектора $\vec{a}$ за векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ має вигляд: $\vec{a}=-8\vec{p}-4\vec{q}-13\vec{r}$.

<u>Приклад 14</u>. Довести, що чотири точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Щоб довести, що чотири точки лежать в одній площині, треба довести, що три вектори, побудовані зі спільного початку, є компланарними. Розглядаємо вектори $\overrightarrow{AB}=\{-1,-1,6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2,0,2\}$, $\overrightarrow{AD}=\{1,-1,4\}$. За формулою (2.14) знаходимо їх мішаний добуток:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=0+12-2-(0+2+8)=0 .$$

Таким чином, вектори $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$, зведені до спільного початку, лежать в одній площині, а значить і точки *A, B, C, D* лежать в одній площині.

<u>Приклад 15</u>. Дано вершини тетраедра $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 2, 4)$, $C(3, 3, -1)$, $D(2, -5, 0)$. Знайти: **1)** об'єм тетраедра *ABCD*; **2)** довжину висоти, що опущена з вершини *D*.

Розв'язання. **1)** Розглянемо 3 вектори зі спільним початком $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$. Якщо ці вектори не компланарні, то модуль їх мішаного добутку $\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right|$ визначає об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на ребрах. Тоді об'єм тетраедра *ABCD* буде дорівнювати: $\boldsymbol{V_{тетр}=\frac{1}{6}V_{парал}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right|}$.
Знаходимо координати векторів: $\overrightarrow{AB}=\{-2,0,4\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,1,-1\}$, $\overrightarrow{AD}=\{1,-7,0\}$.
За формулою (2.14) знаходимо їх мішаний добуток:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 4\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -7 & 0\end{vmatrix}=0-56+0-(4-14+0)=-46 .$$

Тоді $V_{тетр}=\frac{1}{6}\left|-46\right|=\frac{23}{3}$ (куб. од).

2) Позначимо через *DH* висоту, що проведена з вершини *D*. Тоді об'єм тетраедра *ABCD* можна знайти за формулою: $V_{тетр}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot\left|DH\right|$. Для знаходження площі трикутника *ABC* скористаємось формулою (2.13). Отже, $V_{тетр}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot\left|DH\right|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|\cdot\left|DH\right|\Rightarrow\left|DH\right|=\frac{6V_{тетр}}{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|}$. Знайдемо за формулою (2.12) векторний добуток $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$:

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 4\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-4\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}.$$ Тоді

$$\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|=\sqrt{(-4)^2+(6)^2+(-2)^2}=\sqrt{56}$$ і $$|DH|=\frac{6V_{тетр}}{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|}=\frac{46}{\sqrt{56}}=\frac{23\sqrt{56}}{28}$$ (од).

Тест для самоконтроля

1. Якщо вектори колінеарні, то їх відповідні координати:

А) рівні; Б) пропорційні; В) мають протилежні знаки.

2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються рівними, якщо

А) вони колінеарні і мають однакову довжину;

Б) мають однакову довжину;

В) вони колінеарні, однаково напрямлені і мають однакову довжину.

3. Якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ можна знайти за формулою:

А) $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$;

Б) $\overrightarrow{AB}=\{x_2+x_1,\ y_2+y_1,\ z_2+z_1\}$;

В) $\overrightarrow{AB}=\{x_2x_1,\ y_2y_1,\ z_2z_1\}$.

4. Якщо вектор $\vec{a}$ утворює гострий кут з віссю *Oy,* то

А) друга координата вектора дорівнює 0;

Б) друга координата вектора від'ємна;

В) друга координата вектора додатна.

5. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається (φ - кут між векторами):

А) число, яке дорівнює $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$;

Б) вектор, перпендикулярний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ з довжиною $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$;

В) число, яке дорівнює $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

6. Якщо задані вектори $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, то їхній скалярний добуток можна знайти за формулою:

А) $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$;

Б) $(x_1x_2;\ y_1y_2;\ z_1z_2)$;

В) $(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)$.

7. Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вектори

А) колінеарні; Б) компланарні; В) перпендикулярні.

8. Кут φ між векторами $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ визначається з формули:

А) $\cos\varphi=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$;

Б) $\sin\varphi=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$;

В) $\cos\varphi=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

9. Векторний добуток $[\vec{a},\vec{b}]$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (φ - кут між векторами) це

А) число, що дорівнює $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$;

Б) вектор з довжиною $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$;

В) вектор з довжиною $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

10. Векторний добуток має властивості:

А) $[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{b},\vec{a}]$, $[\vec{a},\vec{a}]=0$;

Б) $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$, $[\vec{a},\vec{a}]=0$;

В) $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$, $[\vec{a},\vec{a}]=|\vec{a}|^2$.

11. Площа паралелограма, побудованого на зведених до спільного початку векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює:

А) $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$;   Б) $|\vec{a}||\vec{b}|$;   В) $|\vec{a}\vec{b}|$.

12. Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається

А) вектор, що дорівнює векторному добутку $[\vec{a},\vec{b}]$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$;

Б) число, що дорівнює векторному добутку $[\vec{a},\vec{b}]$, помноженому векторно на вектор $\vec{c}$;

В) число, що дорівнює векторному добутку $[\vec{a},\vec{b}]$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$.

13. Проєкція вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$ це

А) вектор, який знаходимо за формулою $np_{\vec{c}}\vec{d} = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|}$;

Б) число, яке обчислюється за формулою $np_{\vec{d}}\vec{c} = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|}$;

В) число, яке обчислюється за формулою $np_{\vec{d}}\vec{c} = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}|}$.

14. Якщо три вектори в просторі компланарні, то

А) вони лежать на паралельних прямих;

Б) вони колінеарні і лежать в одній площині;

В) вони лежать в одній або паралельних площинах.

15. Вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ утворюють

А) праву трійку;   Б) ліву трійку;   В) і праву, і ліву трійку одночасно.

16. Якщо три вектори $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то

А) їхній мішаний добуток додатний;

Б) їхній векторний добуток дорівнює нулю;

В) їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

3. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

3.1. Основні рівняння прямої на площині

У прямокутній декартовій системі координат Oxy будь-яка пряма є рівнянням першого степеня відносно змінних x, y і, навпаки, кожне лінійне рівняння першого степеня відносно змінних x, y визначає пряму на площині.

Пряма l на площині Oxy може бути задана одним із нижче наведених видів рівнянь.

1. ***Рівняння прямої, яка проходить через задану точку*** $M_0(x_0;\ y_0)$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{n}=\{A;B\}$, який називається ***нормальним*** вектором прямої:

$$\boldsymbol{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}.$$

2. ***Канонічне рівняння прямої***, що проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ ***паралельно*** вектору $\vec{s}=\{p;\ q\}$, який називають ***напрямним*** вектором прямої:

$$\boldsymbol{\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}}.$$

3. ***Загальне рівняння прямої на площині***:

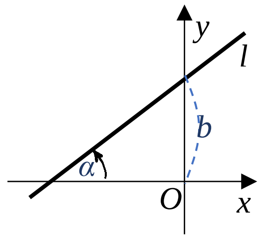
$$\boldsymbol{Ax+By+C=0}, \tag{3.1}$$

де C – вільний член рівняння, $\vec{n}=\{A;B\}$ — нормальний вектор прямої.

4. ***Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:***

$$\boldsymbol{y=kx+b}, \tag{3.2}$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої, b – величина відрізка, який відтинає пряма на осі Oy, рахуючи від початку координат.



Зауваження. Якщо $\alpha=\angle(l,Ox)$ – кут нахилу прямої l

до додатного напряму осі *Ox*, то кутовий коефіцієнт цієї прямої $k = \mathrm{tg}\alpha$.

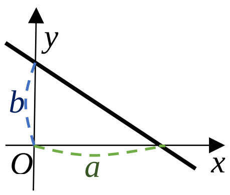
5. ***Рівняння прямої, яка проходить через задану точку*** $M_0(x_0;\, y_0)$ ***і має кутовий коефіцієнт*** k:

$$\boldsymbol{y - y_0 = k(x - x_0)}. \tag{3.3}$$

6. ***Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки*** $M_1(x_1;\, y_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2)$:

$$\frac{\boldsymbol{x - x_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}} = \frac{\boldsymbol{y - y_1}}{\boldsymbol{y_2 - y_1}}. \tag{3.4}$$

7. ***Рівняння прямої у відрізках на осях***:

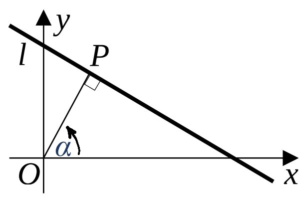


$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{1}, \tag{3.5}$$

де числа a і b – величини відрізків, які відтинає пряма на осях *Ox* і *Oy* відповідно.

8. ***Нормальне рівняння прямої***:

$$\boldsymbol{x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0}, \tag{3.6}$$



де $p = |OP|$ – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму; α – кут, що утворює цей перпендикуляр з додатним напрямом осі *Ox* і $\vec{n}^0 = \{\cos\alpha\,;\sin\alpha\}$ – орт нормального вектора, що напрямлений з початку координат в сторону прямої. Для рівняння (3.6) сума квадратів коефіцієнтів при *x*, *y* дорівнює 1, оскільки виконується рівність $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Для того, щоб загальне рівняння прямої звести до нормального рівняння виду (3.6) необхідно помножити всі доданки цього рівняння на нормуючий множник $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, де знак обираємо протилежним знаку вільного члена C.

Приклад 1. Задано точку $M_0(1,-7)$. Знайти: рівняння прямої, яка проходить через точку M і: **1)** перпендикулярна до вектора $\vec{m}=\{2;-3\}$; **2)** паралельна до вектора $\vec{d}=\{2;-3\}$; **3)** має кутовий коефіцієнт $k=-5$.

Розв'язання. **1)** За умовою точка $M_0(1,-7)\in l_1$, тобто $x_0=1, y_0=-7$, і шукана пряма $l_1\perp\vec{m}$, тому вектор $\vec{m}$ це нормальний вектор цієї прямої, тобто $\vec{n}=\{A;B\}=\{2;-3\}$, (тут $A=2, B=-3$). За формулою рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;\, y_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}=\{A;B\}$ маємо $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \;\Longrightarrow\; 2(x-1)+(-3)(y-(-7))=0 \;\Longrightarrow$ $l_1:\; 2x-3y-23=0$.

2) За умовою шукана пряма $l_2\parallel\vec{d}=\{2;-3\}$, тому вектор $\vec{d}$ це напрямний вектор прямої l_2: $\vec{s}=\{p;\, q\}=\vec{d}=\{2;-3\}$ (тут $p=2, q=-3$), та точка $M_0(1,-7)\in l_2$. З канонічного рівняння прямої $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}$ маємо $l_2:\;\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+7}{-3} \;\Longrightarrow$ $l_2:\; 3x+2y+11=0$.

3) За умовою шукана пряма l_3 має кутовий коефіцієнт $k=-5$ і $M_0(1,-7)\in l_3$. Тоді з формули (3.3): $y-y_0=k(x-x_0) \;\Longrightarrow\; y+7=-5(x-1) \;\Longrightarrow\; l_3:\; y=-5x-2$ $\Leftrightarrow\; 5x+y+2=0$.

Приклад 2. Для наступних прямих знайти їх кутові коефіцієнти, записати рівняння прямої у відрізках на осях і побудувати їх: **1)** $x-3y-3=0$; **2)** $2x+5y-4=0$.

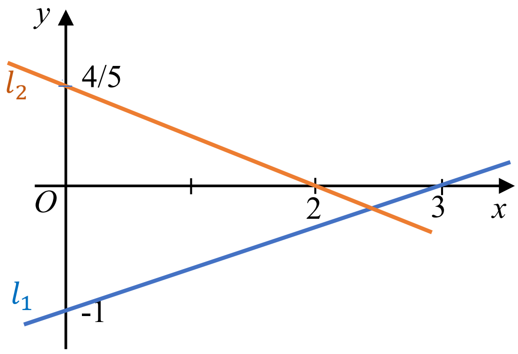
Розв'язання. **1)** $l_1:\; x-3y-3=0 \Rightarrow\; 3y=x-3 \Rightarrow\; y=\frac{1}{3}x-1 \;\Longrightarrow$ кутовий коефіцієнт прямої l_1 дорівнює $k_1=\frac{1}{3}$. Далі зведемо рівняння прямої до виду (3.5).

$l_1:\; x-3y-3=0 \;\Longrightarrow\; x-3y=3 \;\Rightarrow\; \dfrac{x}{3}-\dfrac{3y}{3}=\dfrac{3}{3} \;\Rightarrow\; \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-1}=1$ це рівняння прямої у відрізках на осях, де числа $a=3,\; b=-1$ – величини відрізків, які відтинає пряма на осях Ox і Oy.

2) $l_2: 2x+5y-4=0 \Rightarrow 5y=-2x+4 \Rightarrow \quad y=-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5} \Rightarrow$ кутовий коефіцієнт

$k_2=-\frac{2}{5}$. $\quad l_2:\ 2x+5y=4 \Rightarrow \frac{2x}{4}+\frac{5y}{4}=\frac{4}{4} \Rightarrow$

$\frac{x}{2}+\frac{y}{\frac{4}{5}}=1$ — рівняння прямої у відрізках



на осях, де $a=2,\ b=\frac{4}{5}$ – величини відрізків, які відтинає пряма на осях *Ox* і *Oy*.

3.2. Відстань від точки до прямої

Відстань від точки $M_0(x_0;\,y_0)$ до прямої $l:\ x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, яка задана нормальним рівнянням, обчислюється за формулою

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\right|. \qquad (3.7)$$

Число $\delta=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p$ називається ***відхиленням точки*** M_0 ***від прямої*** l. При цьому, якщо $\delta>0$, то точка M_0 і початок координат лежать по різні сторони від прямої l; а якщо $\delta<0$, то точка M_0 і початок координат лежать по одну сторону від заданої прямої l.

Зауваження. Якщо задано загальне рівняння прямої $l:\ Ax+By+C=0$ і точка $M_0(x_0;\,y_0)$, яка не лежить на цій прямій, то ***відстань від точки*** M_0 ***до прямої*** l можна обчислювати за формулою

$$\boldsymbol{d(M_0,l)=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}}. \qquad (3.8)$$

<u>Приклад 3</u>**.** Встановити, чи лежить точка $M(5;-2)$ і початок координат по одну чи по різні сторони від заданої прямої в кожному з наступних випадків: 1) $2x-3y+7=0$; 2) $7x+5y-1=0$.

Розв'язання. 1) Помножимо всі доданки заданого загального рівняння прямої на нормуючий множник $\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$ і одержимо нормальне рівняння прямої $l_1:\ -\frac{2x}{\sqrt{13}}+\frac{3y}{\sqrt{13}}-\frac{7}{\sqrt{13}}=0$. Підставляючи координати точки M у праву частину нормального рівняння, знаходимо відхилення точки M від прямої l_1:

$$\delta(M,l_1) = -\frac{2\cdot 5}{\sqrt{13}}+\frac{3\cdot(-2)}{\sqrt{13}}-\frac{7}{\sqrt{13}} = -\frac{23}{\sqrt{13}} = -\frac{23\sqrt{13}}{13} < 0.$$

Оскільки $\delta(M,l_1)<0$, то точка M і початок координат лежать по одну сторону від заданої прямої l_1.

Зауважимо, що відстань від точки M до прямої l_1 дорівнює $d(M,l_1) = |\delta(M,l_1)| = \frac{23\sqrt{13}}{13}$.

2) Зведемо задане загальне рівняння прямої до нормального рівняння:

помножимо його доданки на нормуючий множник $\mu = +\frac{1}{\sqrt{7^2+5^2}} = \frac{1}{\sqrt{74}} \Rightarrow$

$l_2:\ \frac{7}{\sqrt{74}}x+\frac{5}{\sqrt{74}}y-\frac{1}{\sqrt{74}}=0$ — нормальне рівняння прямої.

Відхилення точки M від прямої l_1:

$\delta(M,l_2) = \frac{7}{\sqrt{74}}\cdot 5+\frac{5}{\sqrt{74}}\cdot(-2)-\frac{1}{\sqrt{74}} = \frac{12\sqrt{74}}{37} > 0$. Оскільки $\delta(M,l_2)>0$, то точка M і початок координат лежать по різні сторони від заданої прямої l_2. Відстань від точки M до прямої l_2 дорівнює $d(M,l_2) = |\delta(M,l_2)| = \frac{12\sqrt{74}}{37}$.

<u>Приклад 4</u>. Встановити, чи перетинає пряма $7x+5y-1=0$ відрізок, який обмежений точками $A(1;-2)$ і $B(3;4)$.

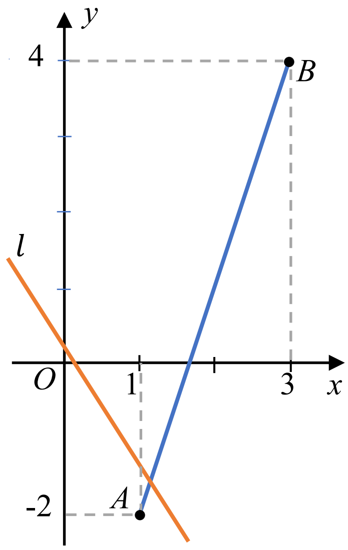
Розв'язання. З'ясуємо, чи лежать задані точки по одну чи по різні сторони від заданої прямої. Нормальне рівняння цієї прямої має вигляд (див. попередній приклад): $\frac{7}{\sqrt{74}}x+\frac{5}{\sqrt{74}}y-\frac{1}{\sqrt{74}}=0$. Знаходимо відхилення точок A і B від прямої:

$$\delta_A=\frac{7}{\sqrt{74}}\cdot 1+\frac{5}{\sqrt{74}}\cdot(-2)-\frac{1}{\sqrt{74}}=-\frac{4}{\sqrt{74}}<0 \quad \Rightarrow$$

точка A і початок координат лежать по одну сторону від заданої прямої;

$$\delta_B=\frac{7}{\sqrt{74}}\cdot 3+\frac{5}{\sqrt{74}}\cdot 4-\frac{1}{\sqrt{74}}=\frac{40}{\sqrt{74}}>0 \Rightarrow$$ точка B

і початок координат лежать по різні сторони від заданої прямої.



Отже, це доводить, що задана пряма перетинає відрізок AB.

3.3. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

Нехай відомі кутові коефіцієнти k_1 і k_2 двох прямих

$l_1: y=k_1x+b_1$ і $l_2: y=k_2x+b_2$.

- Один із двох суміжних кутів φ між цими прямими визначається за формулою

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

Для знаходження гострого кута між прямими потрібно взяти праву частину формули по модулю.

- (***умова паралельності двох прямих***) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$.
- (***умова перпендикулярності двох прямих***) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$.

Приклад 5. Задано вершини трикутника ABC: $A(9, -7)$, $B(11, -3)$, $C(-8, 3)$. Знайти:

а) рівняння висоти і медіани з вершини C в трикутнику ABC;

б) рівняння прямої, яка проходить через точку *C* паралельно прямій *AB*;

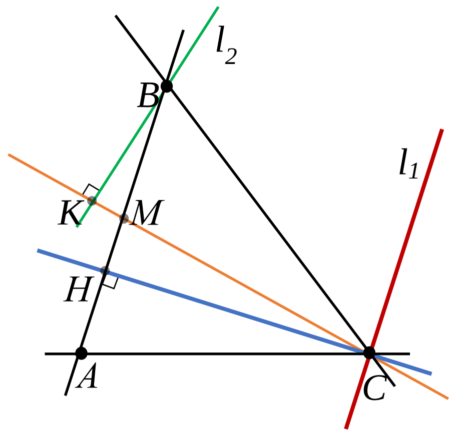
в) рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини *B* на медіану, яка проведена з вершини *C* на сторону *AB*;

г) відстань від точки *A* до медіани *CM*.

д) кут між висотою і медіаною, яка проведена з вершини *C* в трикутнику *ABC*.

Розв'язання.

а) Відомо, що медіана *CM* ділить навпіл сторону *AB* заданого трикутника, тому знайдемо координати точки *M* із формул ділення відрізка *AB* навпіл:



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{9+11}{2} = 10,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-7-3}{2} = -5 \;\Rightarrow\; M(10,\ -5).$$

За формулою (3.4) знаходимо рівняння медіани *CM*, яка проходить через відомі точки *C* і *M*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{x+8}{10+8} = \frac{y-3}{-5-3} \;\Rightarrow\; \frac{x+8}{9} = \frac{y-3}{-4} \;\Rightarrow\; -4(x+8) = 9(y-3)$$

і, спростивши, отримаємо рівняння медіани

$$CM:\ 4x + 9y + 5 = 0.$$

Для знаходження висоти трикутника, яка опущена з вершини С, спочатку знайдемо за формулою (3.4) рівняння прямої *AB*, яка проходить через задані точки *A* і *B*:

$$\frac{x-9}{11-9} = \frac{y+7}{-3+7}$$

або, спростивши, отримаємо рівняння

$$AB:\ 2x - y - 25 = 0.$$

Визначимо кутовий коефіцієнт k_{AB} цієї прямої $AB:\ y = 2x - 25 \quad \Rightarrow \quad k_{AB} = 2$.

Оскільки висота CH перпендикулярна до сторони AB, то з умови перпендикулярності двох прямих

$$CH \perp AB \;\Rightarrow\; k_{CH} \cdot k_{AB} = -1,$$

знаходимо, що кутовий коефіцієнт прямої CH дорівнює $k_{CH} = -\dfrac{1}{k_{AB}} = -\dfrac{1}{2}$. Отже, згідно з формулою (3.3) знаходимо рівняння висоти CH, яка проходить через задану точку C і має кутовий коефіцієнт k_{CH}:

$$y - y_C = k_{CH}(x - x_C) \;\Rightarrow\; y - 3 = -\frac{1}{2}(x+8), \text{ тобто } CH:\; x + 2y + 2 = 0.$$

б) Для знаходження рівняння прямої l_1, яка проходить через точку C паралельно прямій AB, визначимо її кутовий коефіцієнт з умови паралельності двох прямих: $l_1 \parallel AB \;\Rightarrow\; k_1 = k_{AB} = 2$. Тоді за формулою (3.3) знаходимо рівняння прямої l_1, яка проходить через задану точку C і має кутовий коефіцієнт k_1:

$$y - 3 = 2(x+8) \;\Rightarrow\; y - 3 = 2x + 16 \;\Rightarrow\; l_1:\; 2x - y + 19 = 0.$$

в) Для знаходження рівняння перпендикуляра l_2, опущеного з вершини B на медіану CM, визначимо його кутовий коефіцієнт k_2 з умови

$$l_2 \perp CM \;\Rightarrow\; k_2 \cdot k_{CM} = -1.$$

Оскільки $CM:\; y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{5}{9}$, то $k_{CM} = -\dfrac{4}{9} \Rightarrow k_2 = -\dfrac{1}{k_{CM}} = \dfrac{9}{4}$.

Далі за формулою (3.3) знаходимо рівняння прямої l_2, яка проходить через задану точку B і має кутовий коефіцієнт k_2:

$$y + 3 = \frac{9}{4}(x - 11) \;\Rightarrow\; 4(y+3) = 9(x-11) \;\Rightarrow\; l_2:\; 9x - 4y - 111 = 0$$

– рівняння шуканого перпендикуляра l_2.

г) Для знаходження відстані від точки A до медіани CM спочатку потрібно звести загальне рівняння прямої $CM:\; 4x + 9y + 5 = 0$ до нормального рівняння. Для цього помножимо всі доданки цього рівняння на нормуючий множник (в μ

вибираємо знак мінус, бо $C=5>0$) $\mu=-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{1}{\sqrt{4^2+9^2}}=-\frac{1}{\sqrt{97}}$ і одержимо нормальне рівняння прямої

$$CM: \quad -\frac{4}{\sqrt{97}}x-\frac{9}{\sqrt{97}}y-\frac{5}{\sqrt{97}}=0.$$

Використовуючи формулу (3.7), обчислюємо шукану відстань

$$d(A;l_{CM})=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|=\left|-\frac{4}{\sqrt{97}}\cdot 9-\frac{9}{\sqrt{97}}\cdot(-7)-\frac{5}{\sqrt{97}}\right|=\frac{22}{\sqrt{97}}=\frac{22\sqrt{97}}{97}.$$

Зауваження. Відстань від точки $A(9,\ -7)$ до шуканої прямої $CM:\ 4x+9y+5=0$ також можна знайти за формулою (3.8):

$$d(A;l_{CM})=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot 9+9\cdot(-7)+5|}{\sqrt{4^2+9^2}}=\frac{22}{\sqrt{97}}=\frac{22\sqrt{97}}{97}.$$

д) **1 спосіб.** Кут між висотою $CH:\ x+2y+2=0$ і медіаною $CM:\ 4x+9y+5=0$ знаходимо за формулою $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$, де в даному випадку кутові коефіцієнти цих прямих $k_1=k_{CH}=-\frac{1}{2}$, $k_2=k_{CM}=-\frac{4}{9}$. Тоді

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{-\frac{4}{9}+\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{11}{9}}=\frac{1}{22}\ \Rightarrow\ \varphi=\mathrm{arctg}\frac{1}{22}$$ — шуканий гострий кут.

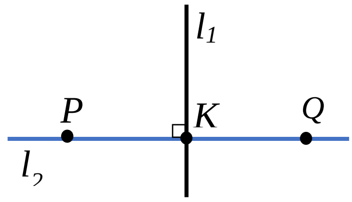
2 спосіб. Кут φ між висотою $CH:\ x+2y+2=0$ і медіаною $CM:\ 4x+9y+5=0$ рівний куту між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_{CH}=\{1;2\}$, $\vec{n}_{CM}=\{4;9\}$, тобто $\varphi=\angle(l_{CH},l_{CM})=\angle(\vec{n}_{CH},\vec{n}_{CM})$. Обчислюємо кут між двома векторами за формулою: $\cos\varphi=\frac{\vec{n}_{CH}\bullet\vec{n}_{CM}}{|\vec{n}_{CH}|\cdot|\vec{n}_{CM}|}=\frac{1\cdot 4+2\cdot 9}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+9^2}}=\frac{22}{\sqrt{485}}=\frac{22\sqrt{485}}{485}\ \Rightarrow$

$\varphi=\arccos\frac{22\sqrt{485}}{485}$ — шуканий гострий кут між заданими прямими.

Приклад 6. Знайти точку Q, що симетрична точці $P(4,-9)$ відносно прямої $l_1: 5x+y+15=0$.

Розв'язання. Симетричні точки P і Q розташовані на одному перпендикулярі до заданої прямої l_1 і на однаковій відстані від неї. Розв'яжемо задачу в декілька кроків.

1. Знайдемо рівняння прямої l_2, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої l_1. Визначимо кутовий коефіцієнт k_1 заданої прямої



$l_1: y=-5x+15 \quad \Rightarrow \quad k_1=-5$.

Оскільки $l_1 \perp l_2$, то $k_1 \cdot k_2=-1 \Rightarrow$ кутовий коефіцієнт прямої l_2 дорівнює $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{1}{5}$. Отже, за формулою (3.3): $y-y_P=k_2(x-x_P)$ запишемо рівняння прямої $l_2: y+9=\dfrac{1}{5}(x-4)$, тобто $l_2: x-5y-49=0$.

2. Знайдемо точку K перетину даної прямої l_1 з перпендикулярною до неї прямою l_2. Для цього розв'яжемо систему їх рівнянь:

$$\begin{cases} 5x+y+15=0, \\ x-5y-49=0, \end{cases}$$

звідки отримаємо координати точки K: $x=-1,\ y=-10$. Отже, точка $K(-1,-10)$ є проєкцією точки P на пряму l_1, тобто основою перпендикуляра проведеного з точки P на задану пряму.

3. Знайдемо тепер точку Q симетричну точці P відносно заданої прямої. Оскільки $PK=KQ$, то із формул ділення відрізка PQ навпіл маємо

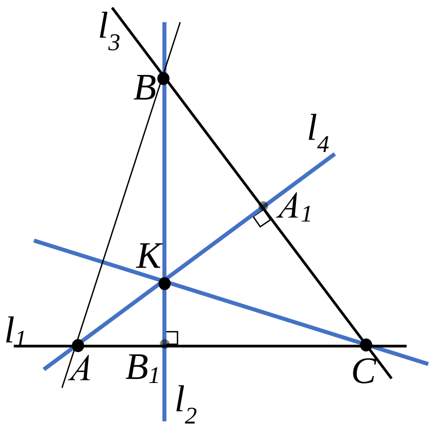
$$x_K=\frac{x_P+x_Q}{2},\ y_K=\frac{y_P+y_Q}{2} \quad \Rightarrow$$

$$-1=\frac{4+x_Q}{2},\ -10=\frac{-9+y_Q}{2} \quad \Rightarrow \quad x_Q=-6,\ y_Q=11.$$

Отже, точка $Q(-6, 11)$ симетрична точці P відносно заданої прямої.

Приклад 7. Знайти точку перетину висот у трикутнику ABC, де $A(5, -8)$, $B(-6, 0)$, $C(7, -3)$.

Розв'язання. Оскільки всі висоти трикутника перетинаються в одній точці K, то достатньо знайти рівняння двох висот трикутника, щоб визначити точку їх перетину. Розв'яжемо задачу в декілька дій.



1. Знайдемо спочатку рівняння прямої l_1, яка проходить через точки A і C за формулою (3.4)

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A} \Rightarrow \frac{x-5}{7-5}=\frac{y+8}{-3+8}$$

і, спростивши, отримаємо рівняння

$$l_1:\ 5x-2y-41=0.$$

Визначимо кутовий коефіцієнт k_1 цієї прямої

$$l_1:\ y=\frac{5}{2}x-\frac{41}{2} \quad \Rightarrow \quad k_1=\frac{5}{2}.$$

Позначимо через l_2 рівняння висоти BB_1, тоді $l_1 \perp l_2 \Rightarrow k_1 \cdot k_2=-1$, звідки знаходимо, що кутовий коефіцієнт прямої l_2 дорівнює $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-\dfrac{2}{5}$. Отже, за формулою (3.3) знаходимо рівняння висоти l_2, яка проходить через задану точку B і має кутовий коефіцієнт k_2:

$$y-y_0=k(x-x_0) \Rightarrow \quad l_2:\ y-0=-\frac{2}{5}(x+5),\ \text{тобто}\ \ l_2:\ 2x+5y+10=0.$$

Знайдемо за формулою (3.4) рівняння прямої l_3, яка проходить через точки B і C: $\dfrac{x+5}{7+5}=\dfrac{y-0}{-3-0}$, і, спростивши, отримаємо рівняння $l_3:\ y=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$, кутовий коефіцієнт якої дорівнює $k_3=-1/4$.

Позначимо через l_4 рівняння висоти AA_1, тоді $l_3 \perp l_4 \Rightarrow k_3 \cdot k_4 = -1$, звідки знаходимо, що кутовий коефіцієнт висоти l_4 дорівнює $k_4 = -\dfrac{1}{k_3} = 4$. Отже, за формулою (3.3) знаходимо рівняння висоти l_4, яка проходить через задану точку A і має кутовий коефіцієнт k_4: $y + 8 = 4(x - 5)$, тобто $l_4:\ 4x - y - 28 = 0$.

2. Знайдемо точку K перетину двох знайдених рівнянь висот l_2 і l_4. Для цього розв'яжемо систему їх рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 10 = 0, \\ 4x - y - 28 = 0, \end{cases}$$

звідки отримаємо $x = \dfrac{65}{11}$, $y = -\dfrac{48}{11}$.

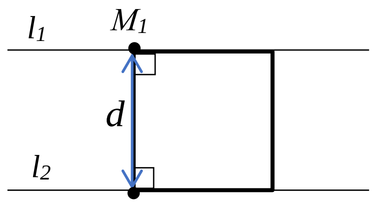
Отже, точка $K\left(\dfrac{65}{11}; -\dfrac{48}{11}\right)$ є точкою перетину висот трикутника ABC.

Приклад 8. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $l_1:\ x + 4y - 8 = 0$, $l_2:\ 2x + 8y + 7 = 0$.

Розв'язання. Площа квадрата дорівнює $S = a^2$, де a – довжина сторони квадрата.

Оскільки коефіцієнти при невідомих *x, y* в рівняннях прямих пропорційні $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{8} \neq \dfrac{-8}{7}$, то задані прямі l_1 і l_2 паралельні. Тому довжина сторони квадрата дорівнює відстані між даними паралельними прямими, яка, в свою чергу, дорівнює відстані від будь-якої точки на одній з прямих до іншої прямої:

$$a = d(l_1, l_2) = d(M_1, l_2).$$



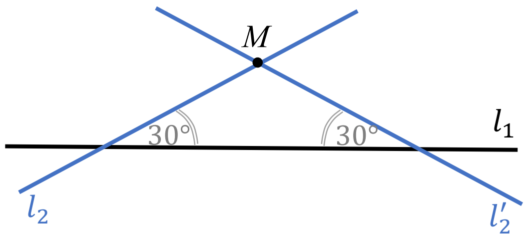
Знайдемо точку $M_1 \in l_1$, поклавши, наприклад, в першому рівнянні $x = 0$, тоді з рівності $0 + 4y - 8 = 0$ одержимо $y = 2$ і, таким чином, знайдено точку $M_1(0;\ 2)$, яка належить прямій l_1 .

Відстань від цієї точки M_1 до іншої прямої l_2 за формулою (3.8) дорівнює

$$d(M_1, l_2) = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 0 + 8 \cdot 2 + 7|}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = \frac{23}{\sqrt{68}} = \frac{23}{2\sqrt{17}}.$$

Отже, $a = \dfrac{23}{2\sqrt{17}}$ і площа квадрата дорівнює $S = \left(\dfrac{23}{2\sqrt{17}}\right)^2 = \dfrac{529}{68}$ (од^2).

***Приклад 9*.** Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M(1, 3)$ під кутом 30° до прямої $2x - y + 5 = 0$.



Розв'язання. Гострий кут $\varphi = 30°$ між заданою прямою l_1 і шуканою прямою l_2 визначається за формулою $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

Кутовий коефіцієнт прямої l_1: $y = 2x + 5 = 0$ дорівнює $k_1 = 2$. Визначаємо кутовий коефіцієнт шуканої прямої з рівності:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \left|\frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2}\right| \Rightarrow \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_2 - 2 = \sqrt{3}(1 + 2k_2) \\ k_2 - 2 = -\sqrt{3}(1 + 2k_2) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} k_2 - 2\sqrt{3}k_2 = \sqrt{3} + 2 \\ k_2 + 2\sqrt{3}k_2 = 2 - \sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_2 = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{1 - 2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{11}(8 + 5\sqrt{3}), \\ k_2 = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{11}(5\sqrt{3} - 8). \end{array}\right.$$

Отже, використовуючи формулою (3.3), отримаємо дві прямі, які проходять під заданим кутом через точку M:

$$l_2:\ y - 3 = -\frac{1}{11}(8 + 5\sqrt{3}) \cdot (x - 1) \quad \text{та} \quad l_2':\ y - 3 = \frac{1}{11}(5\sqrt{3} - 8) \cdot (x - 1).$$

Спрощуючи ці рівняння, маємо $l_2:\ y = -\dfrac{1}{11}(8 + 5\sqrt{3})x + \dfrac{41}{11} + \dfrac{5\sqrt{3}}{11}$ та $l_2':\ y = \dfrac{1}{11}(5\sqrt{3} - 8)x + \dfrac{41}{11} - \dfrac{5\sqrt{3}}{11}$.

4. ПЛОЩИНА І ПРЯМА В ПРОСТОРІ

4.1. Основні рівняння площини

У прямокутній декартовій системі координат *Oxyz* площина *П* може бути задана одним із нижче наведених видів рівнянь.

1. ***Рівняння площини, яка проходить через задану точку*** $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{n} = \{A; B; C\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (4.1)$$

Такий вектор $\vec{n}$ називається ***нормальним*** вектором площини.

2. ***Загальне рівняння площини***:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (4.2)$$

де числа A, B, C – координати нормального вектора $\vec{n}$, а число D – вільний член рівняння.

3. ***Рівняння площини, яка проходить через три задані точки*** $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, $M_3(x_3;\, y_3;\, z_3)$ (які не лежать на одній прямій):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.3)$$

4. ***Рівняння площини у відрізках на осях***:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (4.4)$$

де числа a, b, c – величини відрізків, які відтинає площина на осях *Ox*, *Oy*, *Oz* відповідно.

5. ***Нормальне рівняння площини***:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0, \qquad (4.5)$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормального вектора $\vec{n}$, який напрямлений з початку координат в сторону площини; $p > 0$ – відстань від початку координат до площини. Зауважимо, що оскільки для напрямних косинусів виконується рівність $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, то для рівняння (4.5) сума квадратів коефіцієнтів при x, y, z дорівнює 1.

Для того, щоб загальне рівняння площини звести до нормального рівняння необхідно помножити обидві частини цього рівняння на нормуючий множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, де знак обираємо протилежним знаку вільного члена D.

Можна довести, що в декартовій системі координат будь-яка площина в просторі є рівнянням першого степеня відносно змінних x, y, z; і, навпаки, кожне лінійне рівняння першого степеня відносно змінних x, y, z вигляду (4.2) визначає площину в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$.

Розглянемо частинні випадки загального рівняння (4.2) площини (неповні рівняння площини):

1) Якщо в рівнянні (4.2) $D = 0$, то воно набуває вигляду $Ax + By + Cz = 0$ — рівняння площини, що проходить через точку $O(0, 0, 0)$.

2) Якщо $A = 0$, то рівняння (4.2) набуває вигляду $By + Cz + D = 0$ — рівняння площини, яка паралельна до осі Ox.
Аналогічно рівняння $Ax + Cz + D = 0$ визначає рівняння площини, паралельної осі Oy; а рівняння $Ax + By + D = 0$ — площини, паралельної осі Oz.

3) Якщо $A = 0, B = 0, (C \neq 0, D \neq 0)$, то рівняння (4.2) набирає вигляду $Cz + D = 0$ — рівняння площини, яка паралельна площині Oxy. Аналогічно площина $By + D = 0$ паралельна площині Oxz, а площина $Cz + D = 0$ паралельна площині Oyz.

4) Якщо в рівнянні (4.2) $A = D = 0$, то площина $By + Cz = 0$ проходить через вісь Ox. Аналогічно площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь Oy; а площина $Ax + By = 0$ — через вісь Oz.

5) Якщо $A = B = D = 0, (C \neq 0)$, то рівняння (4.2) набирає вигляду $z = 0$ збігається з координатною площиною Oxy. Аналогічно: $y = 0$ та $x = 0$ — координатні площини Oxz та Oyz відповідно.

Приклад 1. Задано дві точки: $M_1(2,3,4), M_2(-1,-2,5)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Розв'язання. За умовою задачі шукана площина *П* перпендикулярна до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,-5,1\}$, тому цей вектор є нормальним вектором шуканої площини *П*, тобто $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{n}=\{A;B;C\}$. Звідки маємо: $A=-3,\ B=-5,\ C=1$. За формулою (4.1): $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$, знаходимо рівняння площини, яка проходить через точку M_1 з координатами $x_1=2,\ y_1=3,\ z_1=4$ перпендикулярно до заданого вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$-3\cdot(x-2)+(-5)\cdot(y-3)+1\cdot(z-4)=0 \Rightarrow -3x+6-5y+15+z-4=0 \Rightarrow$$

$$П:\ 3x+5y-z-17=0.$$

Приклад 2. Скласти рівняння площини, яка що проходить через точку $M_0(-1,2,-5)$ перпендикулярно до осі *Oz*.

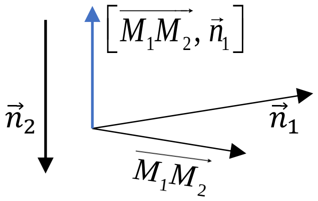
Розв'язання. Оскільки шукана площина *П* перпендикулярна до осі *Oz*, то площина буде перпендикулярна до орта $\vec{k}=\{0,0,1\}$, який лежить на цій осі. Тоді цей вектор можна розглядати як нормальний вектор площини: $\vec{n}=\vec{k}=\{0,0,1\}$. Отже, за формулою (4.1) отримаємо шукане рівняння площини

$$0\cdot(x-(-1))+0\cdot(y-2)+1\cdot(z-(-5))=0 \Rightarrow \quad П:\ z=-5.$$

Приклад 3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3,5,-2)$ і $M_2(5,8,3)$ перпендикулярно до площини $П_1: 7x-y+5z-10=0$.

Розв'язання. Оскільки шукана площина $П_2$ проходить через точку M_1, то її координати $x_1=3,\ y_1=5,\ z_1=-2$. Знайдемо нормальний вектор $\vec{n}_2=\{A;B;C\}$ площини $П_2$. З умови відомо, що:

- площина $П_2$ проходить через точки M_1 і M_2, тому вектор $\vec{n}_2$ перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2;3;5\}$;
- площина $П_2$ перпендикулярна до площини $П_1$, тому їхні нормальні вектори також перпендикулярні, тобто $\vec{n}_2\perp\vec{n}_1$, де $\vec{n}_1=\{7;-1;5\}$.



Звідси отримаємо

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \perp \overrightarrow{M_1M_2}, \\ \vec{n}_2 \perp \vec{n}_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2 \parallel \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n}_1\right] \Rightarrow \vec{n}_2 = \lambda\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n}_1\right],$$

де $\lambda = const \neq 0$ (можна покласти $\lambda = 1$).

Обчислимо векторний добуток

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n}_1\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(15-(-5)) - \vec{j}(10-35) + \vec{k}(-2-21) = 20\vec{i} + 25\vec{j} - 23\vec{k} = \{20;\ 25;\ -23\}.$$

Отже, $\vec{n}_2 = \lambda\{20;\ 25;\ -23\} = \{20\lambda;\ 25\lambda;\ -23\lambda\}$, тому $A = 20\lambda$, $B = 25\lambda$, $C = -23\lambda$.

Таким чином, внаслідок формули (4.1) знаходимо рівняння площини, яка проходить через задану точку M_1 перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}_2$:

$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$, звідки шукане рівняння площини має вигляд $20\lambda(x-3) + 25\lambda(y-5) - 23\lambda(z+2) = 0 \;\Rightarrow\; \Pi_2 : 20x + 25y - 23z - 231 = 0$.

Приклад 4. Скласти рівняння площини Π, що проходить через точку $M(3,\,-1,\,2)$ перпендикулярно до площин $\Pi_1 : 2x - 2y + z - 3 = 0$ і $\Pi_2 : y + 10 = 0$.

Розв'язання. Оскільки шукана площина Π проходить через точку M, то координати точки $x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ z_1 = -2.$ Знайдемо нормальний вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ площини Π. З рівнянь площин Π_1 і Π_2 записуємо координати векторів їх нормалей: $\vec{n}_1 = \{2;\,-2;\,1\}$, $\vec{n}_2 = \{0;\,1;\,0\}$. Оскільки $\Pi \perp \Pi_1$, то $\vec{n} \perp \vec{n}_1$. Аналогічно, $\Pi \perp \Pi_2 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{n}_2$. Отже, $\vec{n} \parallel \left[\vec{n}_1, \vec{n}_2\right] \Rightarrow \vec{n} = \lambda\left[\,\vec{n}_1, \vec{n}_2\right]$. Знаходимо векторний добуток і покладаємо $\lambda = 1$:

$$\left[\,\vec{n}_1, \vec{n}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{k}.$$

Таким чином, $\vec{n} = \{-1, 0, 2\}$ і за формулою (4.1) знаходимо рівняння площини, яка проходить через задану точку M_1 перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}$:

$$-(x-3)+0(y+1)+2(z-2)=0\text{, тобто } \Pi: x-2z+1=0.$$

<u>Приклад 5</u>. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1,\ 2,\ 2)$ і $M_2(1,\ 0,\ \text{-}2)$ та відсікає від осі абсцис відрізок $a=3$.

Розв'язання. Записуємо рівняння площини у відрізках відповідно до рівняння (4.4): $\frac{x}{3}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Щоб знайти невідомі $b,\ c$, скористаємось тим, що площина проходить через точки $M_1(-1,\ 2,\ 2)$ і $M_2(1,\ 0,\ \text{-}2)$, тобто при підстановці координат точок в рівняння площини воно перетворюється на тотожність. Таким чином, маємо систему відносно невідомих $b,\ c$:

$$\begin{cases} \frac{-1}{3}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1, \\ \frac{1}{3}+\frac{0}{b}+\frac{-2}{c}=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1, \\ c=-3. \end{cases}$$

Отже, рівняння шуканої площини у відрізках має вигляд: $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-3}=1$, або рівняння площини в загальному вигляді: $x+3y-z-3=0$.

4.2. Відстань від точки до площини

Відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до площини $\Pi:\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, яка задана нормальним рівнянням (4.5), обчислюється за формулою:

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\right|. \tag{4.6}$$

Число $\delta=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p$ називається ***відхиленням точки*** M_0 ***від заданої площини*** Π. При цьому, якщо $\delta>0$, то точка M_0 і початок координат лежать по різні сторони від площини Π; а якщо $\delta<0$, то точка M_0 і початок координат лежать по одну сторону від заданої площини Π.

Зауваження. Якщо задано загальне рівняння площини $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ і точка $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$, яка не лежить на цій площині, то ***відстань від точки*** M_0 ***до площини*** Π можна обчислити за формулою

$$\boldsymbol{d(M_0,\,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}. \tag{4.7}$$

Приклад 6. Довести, що площина $2x-2y-z-1=0$ не перетинає відрізок AB, обмежений точками $A(2;3;\,4)$ і $B(-5;\,0;\,3)$.

Розв'язання. Зводимо рівняння площини до нормального виду. Множимо ліву і праву частини рівняння $2x-2y-z-1=0$ на нормуючий множник $\mu=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{3}$ (тут знак μ додатний, бо $D=-1<0$): $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}=0$. Знаходимо відхилення точок A і B від заданої площини:

$$\delta_A=\frac{2}{3}\cdot 2-\frac{2}{3}\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 4-\frac{1}{3}=-\frac{7}{3}<0,\ \delta_B=\frac{2}{3}\cdot(-5)-\frac{2}{3}\cdot 0-\frac{1}{3}\cdot 3-\frac{1}{3}=-\frac{14}{3}<0.$$

Оскільки відхилення однакового знаку мінус, то обидві точки A, B і початок відліку точка O лежать по одну сторону від площини. Отже, відрізок AB не має спільних точок з площиною.

Приклад 7. Скласти рівняння площини Π_2, яка проходить через точку $A(-5,\,0,\,4)$ паралельно до площини $\Pi_1:\ 2x+5y-8z-13=0$. Знайти відстань від точки $M_0(2,\,-1,\,6)$ до шуканої площини.

Розв'язання. Для знаходження рівняння площини Π_2 необхідно знати точку, яка належить даній площині, і її нормальний вектор. Площина Π_2 проходить через точку A, тому координати точки $x_A=-5,\ y_A=0,\ z_A=4$. Знайдемо нормальний вектор $\vec{n}_2=\{A;B;C\}$ площини Π_2. З умови відомо, що площина Π_2 паралельна до площини Π_1, тому їхні нормальні вектори будуть колінеарними, тобто $\vec{n}_1\,||\,\vec{n}_2$, звідки маємо $\vec{n}_2=\lambda\vec{n}_1$, де $\lambda=const\neq 0$ (можна покласти $\lambda=1$),

$\vec{n}_1 = \{2;\, 5;\, -8\}$. Отже, $\vec{n}_2 = \lambda\{2;\, 5;\, -8\} = \{2\lambda;\, 5\lambda;\, -8\lambda\}$, тому $A = 2\lambda$, $B = 5\lambda$, $C = -8\lambda$. Таким чином, за формулою (4.1): $A(x - x_A) + B(y - y_A) + C(z - z_A) = 0$ шукане рівняння площини має вигляд $2\lambda(x+5) + 5\lambda(y-0) - 8\lambda(z-4) = 0$, або, спрощуючи вираз, отримаємо: $\Pi_2 : 2x + 5y - 8z + 42 = 0$.

Для знаходження відстані від точки M_0 до шуканої площини Π_2 спочатку потрібно звести загальне рівняння площини $\Pi_2 : 2x + 5y - 8z + 42 = 0$ до нормального рівняння. Для цього помножимо всі доданки цього рівняння на нормуючий множник (в μ вибираємо знак мінус, бо $D = 42 > 0$)

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-8)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{93}}$$

і одержимо нормальне рівняння площини $\Pi_2 : -\frac{2}{\sqrt{93}}x - \frac{5}{\sqrt{93}}y + \frac{8}{\sqrt{93}}z - \frac{42}{\sqrt{93}} = 0.$

Використовуючи формулу (4.6), обчислюємо шукану відстань

$$d(M_0,\, \Pi_2) = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \right| =$$

$$= \left| -\frac{2}{\sqrt{93}} \cdot 2 - \frac{5}{\sqrt{93}} \cdot (-1) + \frac{8}{\sqrt{93}} \cdot 6 - \frac{42}{\sqrt{93}} \right| = \left| -\frac{7}{\sqrt{93}} \right| = \frac{7\sqrt{93}}{93}.$$

Зауваження. Відстань від точки $M_0(2,\, -1,\, 6)$ до шуканої площини $\Pi_2 : 2x + 5y - 8z + 42 = 0$ також можна знайти за формулою (4.7):

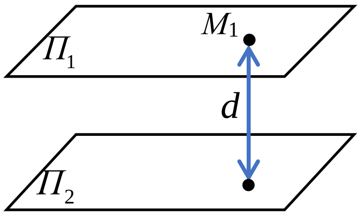
$$d(M_0,\, \Pi_2) = \frac{\left| A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left| 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) - 8 \cdot 6 + 42 \right|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-8)^2}} =$$

$$= \frac{|-7|}{\sqrt{93}} = \frac{7\sqrt{93}}{93}.$$

***Приклад 8*.** Знайти відстань між паралельними площинами $\Pi_1 : 24x - 15y + 21z + 5 = 0$, $\Pi_2 : 8x - 5y + 7z - 1 = 0$.

Розв'язання. Переконаємось спочатку, що площини Π_1 і Π_2 паралельні. Дійсно, оскільки координати нормальних векторів $\vec{n}_1 = \{24;\, -15;\, 21\}$ і $\vec{n}_2 = \{8;\, -5;\, 7\}$ є пропорційними $\frac{24}{8} = \frac{-15}{-5} = \frac{21}{7}$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, тому $\Pi_1 \parallel \Pi_2$.

Відстань між паралельними площинами дорівнює відстані від будь-якої точки на одній площині до іншої площини. Поклавши, наприклад, в першому рівнянні $x=0$ і $y=0$, одержимо $z=-\dfrac{5}{21}$ і, таким чином, знаходимо точку $M_1\left(0;\, 0;\, -\dfrac{5}{21}\right)$, яка належить площині Π_1. Відстань від цієї точки M_1 до іншої площини Π_2 дорівнює



$$d(M_1,\, \Pi_2)=\frac{|A\cdot x_1+B\cdot y_1+C\cdot z_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{\left|8\cdot 0-5\cdot 0+7\cdot\left(-\dfrac{5}{21}\right)-1\right|}{\sqrt{8^2+(-5)^2+7^2}}=\frac{\left|-\dfrac{8}{3}\right|}{\sqrt{138}}=\frac{8\sqrt{138}}{414}.$$

Отже, відстань між даними паралельними площинами дорівнює $d=\dfrac{8\sqrt{138}}{414}$.

4.3. Кут між площинами. Взаємне розташування двох площин

Нехай задано дві площини

$$\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

- ***Під кутом*** φ ***між площинами*** Π_1 та Π_2 розуміємо один з двогранних кутів, утворених цими площинами, і знаходимо як кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$ та $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\cdot\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}. \qquad (4.8)$$

Для знаходження гострого кута між площинами потрібно взяти чисельник правої частини по модулю.

- (***умова паралельності двох площин***) $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.
- (***умова перпендикулярності двох площин***) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow$ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Приклад 9. Визначити, при яких значеннях α, β наступні пари рівнянь $\Pi_1: \alpha x + 4y + 2z - 10 = 0$, $\Pi_2: x + \beta y - 3z - 1 = 0$ будуть визначати паралельні площини.

Розв'язання. Оскільки $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, то їхні нормальні вектори $\vec{n}_1 = \{\alpha; 4; 2\}$, $\vec{n}_2 = \{1; \beta; -3\}$ колінеарні: $\frac{\alpha}{1} = \frac{4}{\beta} = \frac{2}{-3}$. Із складеної пропорції знаходимо: $2\beta = -12 \Rightarrow \beta = -6$, $\alpha = -\frac{2}{3}$.

Приклад 10. Визначити, при якому значенні α наступні пари рівнянь $\Pi_1: 3x + 4y + \alpha z - 10 = 0$, $\Pi_2: x - y - 3z - 1 = 0$ будуть визначати перпендикулярні площини.

Розв'язання. Площини Π_1, Π_2 перпендикулярні, тому їхні нормальні вектори $\vec{n}_1 = \{3; 4; \alpha\}$, $\vec{n}_2 = \{1; -1; -3\}$ також перпендикулярні:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow 3 - 4 - 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}.$$

Приклад 11. Знайти кут між площинами $\Pi_1: 12x - 5y + z - 25 = 0$, $\Pi_2: x - 7z - 13 = 0$.

Розв'язання. Кут φ між нормальними векторами $\vec{n}_1 = \{12; -5; 1\}$ та $\vec{n}_2 = \{1; 0; -7\}$ заданих площин Π_1 та Π_2 дорівнює одному з двогранних кутів, утворених цими площинами. За формулою (4.8) маємо $\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

Знаходимо

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 12 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 + 1 \cdot (-7) = 5,\ |\vec{n}_1| = \sqrt{12^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{170};$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-7)^2} = \sqrt{50}.$$

Отже, $\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{170} \cdot \sqrt{50}} = \frac{1}{2\sqrt{85}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{\sqrt{85}}{170} \approx 87^\circ$.

4.4. Рівняння прямої в просторі

Пряма L в просторі $Oxyz$ може бути задана рівнянням одного з наступних видів:

1. ***Канонічними рівняннями прямої*** в просторі

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}, \tag{4.9}$$

де $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – задана точка прямої L; $\vec{s}=\{p;\ q;\ r\}$ – вектор паралельний до прямої L, який називається ***напрямним вектором*** прямої.

2. ***Параметричними рівняннями прямої*** в просторі

$$\begin{cases} x=pt+x_0, \\ y=qt+y_0, \\ z=rt+z_0, \end{cases} \tag{4.10}$$

де параметр $t\in R$, точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)\in L$, вектор $\vec{s}=\{p;\ q;\ r\}$ – напрямний вектор прямої.

3. ***Рівняннями прямої, яка проходить через дві задані точки*** $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4.11}$$

4. ***Загальними рівняннями прямої*** (пряма в просторі задається як лінія перетину двох непаралельних площин):

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{4.12}$$

де нормальні вектори $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$ і $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$ – не колінеарні.

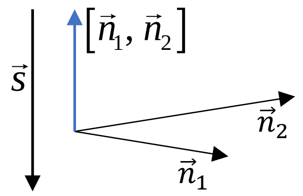
Приклад 12. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(1;-2;-3)$ і $M_2(0;-4;3)$.

Розв'язання. Використовуємо формулу (4.11) і складаємо канонічні рівняння прямої: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+3}{6}$. Параметричні рівняння складаємо, користуючись формулою (4.10): $\begin{cases} \dfrac{x-1}{-1} = t, \\ \dfrac{y+2}{-2} = t, \\ \dfrac{z+3}{6} = t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t+1, \\ y = -2t-2, \\ z = 6t-3, \end{cases} \quad t \in R.$

***Приклад 13*.** Написати канонічні рівняння прямої $L: \begin{cases} 5x - y + z + 4 = 0, \\ x - 2y - 6z - 1 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Пряма задана загальними рівняннями вигляду (4.12). Для знаходження канонічних рівнянь прямої використаємо формулу (4.9). Знайдемо яку-небудь точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ на заданій прямій. Для цього в обох рівняннях покладемо, наприклад, $z_0 = 0$ і розв'яжемо систему: $\begin{cases} 5x_0 - y_0 + 4 = 0, \\ x_0 - 2y_0 - 1 = 0, \end{cases}$ звідки $x_0 = -1,\ y_0 = -1$. Отже, точка $M_0(-1;\, -1;\, 0)$ належить заданій прямій L.

Оскільки пряма L є лінією перетину двох площин, то нормальні вектори $\vec{n}_1 = \{5;\, -1;\, 1\}$ і $\vec{n}_2 = \{1;\, -2;\, -6\}$ цих площин перпендикулярні до прямої L, а тому вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ перпендикулярні до напрямного вектора $\vec{s}$ прямої L.



Звідси отримаємо $\begin{cases} \vec{s} \perp \vec{n}_1, \\ \vec{s} \perp \vec{n}_2, \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{s} \parallel [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \Rightarrow$ $\vec{s} = \lambda[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, де $\lambda = const \neq 0$ (можна покласти $\lambda = 1$).

Обчисливши векторний добуток

$$[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 31\vec{j} - 9\vec{k},$$

знаходимо напрямний вектор: $\vec{s} = 8\lambda\vec{i} + 31\lambda\vec{j} - 9\lambda\vec{k} = \{8\lambda;\, 31\lambda;\, -9\lambda\}$. Отже, канонічні рівняння прямої мають вигляд: $\dfrac{x+1}{8} = \dfrac{y+1}{31} = \dfrac{z}{-9}$.

Зауваження. Канонічні рівняння прямої також можна отримати, взявши дві будь-які точки на ній і підставивши їхні координати в рівняння прямої, що проходить через дві точки.

4.5. Кут між двома прямими. Взаємне розташування двох прямих

Нехай задано дві прямі в просторі

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1},\qquad L_2:\ \frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}.$$

- ***Під кутом*** φ ***між прямими*** L_1 та L_2 розуміють кут між напрямними векторами $\vec{s}_1=\{p_1;\ q_1;\ r_1\}$ та $\vec{s}_2=\{p_2;\ q_2;\ r_2\}$ цих прямих:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^{\,2}+q_1^{\,2}+r_1^{\,2}}\cdot\sqrt{p_2^{\,2}+q_2^{\,2}+r_2^{\,2}}}.$$

Для знаходження гострого кута потрібно взяти модуль правої частини.

- ***Умова паралельності прямих***: $L_1 \parallel L_2 \ \Leftrightarrow\ \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \ \Leftrightarrow\ \frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$.
- ***Умова перпендикулярності прямих***: $L_1 \perp L_2 \ \Leftrightarrow\ \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \ \Leftrightarrow\ \vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0$, тобто $p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0$.

<u>Приклад 14</u>. Перевірити, чи перпендикулярні прямі

$$L_1:\frac{x-15}{16}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-7}{5}\ \text{ та }\ L_2:\begin{cases}8x-3y+6z-13=0,\\ 4y-7z-9=0.\end{cases}$$

Розв'язання. Якщо дві прямі L_1 та L_2 перпендикулярні, то їхні напрямні вектори $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$ теж будуть перпендикулярними. Очевидно, що $\vec{s}_1=\{16;\,-2;\,5\}$, а оскільки $\vec{s}_2\perp\vec{n}_1$ та $\vec{s}_2\perp\vec{n}_2 \Rightarrow\ \vec{s}_2 \parallel [\vec{n}_1,\,\vec{n}_2] \Rightarrow\ \vec{s}_2=\lambda[\vec{n}_1,\,\vec{n}_2]$ (покладемо $\lambda=1$, тоді $\vec{s}_2=[\vec{n}_1,\,\vec{n}_2]$), де $\vec{n}_1=\{8;\,-3;\ 6\}$ і $\vec{n}_2=\{0;\,4;\,-7\}$ – нормальні вектори площин, лінією перетину яких є пряма L_2. Знаходимо

$$[\vec{n}_1,\,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8 & -3 & 6\\ 0 & 4 & -7\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-3 & 6\\ 4 & -7\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}8 & 6\\ 0 & -7\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}8 & -3\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-3\vec{i}+56\vec{j}+32\vec{k},$$

тому $\vec{s}_2 = \{-3;\ 56;\ 32\}$.

Оскільки скалярний добуток $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 16 \cdot (-3) + (-2) \cdot 56 + 5 \cdot 32 = 0$, то $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, тому задані прямі також перпендикулярні, що і треба було перевірити.

Приклад 15. Довести, що дві прямі $L_1: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-5}$ і $L_2: \dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Пряма L_1 проходить через точку $M_1(-1;\ -1;\ 2)$ і її напрямний вектор $\vec{s}_1 = \{3; 2; -5\}$. Пряма L_2 проходить через точку $M_2(5;\ -1;\ 0)$ і її напрямний вектор $\vec{s}_2 = \{0; -1; 2\}$. Прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині, якщо вектори $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = \{6; 0; -2\}$ компланарні. Умовою компланарності векторів є рівність нулю їх мішаного добутку: $\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{s}_1\vec{s}_2 = 0$. Знаходимо мішаний добуток векторів:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 0 + 6 - (0 + 30 + 0) = 0.$$

Таким чином, прямі лежать в одній площині і, оскільки вони не паралельні (вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ не колінеарні), то вони перетинаються.

Результат задачі може бути сформульований в загальному вигляді:

- Дві прямі в просторі $L_1: \dfrac{x-x_1}{p_1} = \dfrac{y-y_1}{q_1} = \dfrac{z-z_1}{r_1}$, $L_2: \dfrac{x-x_2}{p_2} = \dfrac{y-y_2}{q_2} = \dfrac{z-z_2}{r_2}$ лежать в одній площині, якщо їхні напрямні вектори $\vec{s}_1 = \{p_1, q_1, r_1\}$ та $\vec{s}_2 = \{p_2, q_2, r_2\}$ і вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$ компланарні, тобто мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{s}_1\,\vec{s}_2 = 0 \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

При цьому, прямі або перетинаються (якщо $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ не колінеарні), або паралельні (якщо $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$). Якщо $\vec{s}_1\vec{s}_2\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$, то прямі мимобіжні.

4.6. Кут між прямою і площиною. Взаємне розташування прямої і площини в просторі

Нехай задана пряма в просторі $L: \dfrac{x-x_1}{p} = \dfrac{y-y_1}{q} = \dfrac{z-z_1}{r}$ з напрямним вектором $\vec{s} = \{p, q, r\}$ і площина Π: $Ax + By + Cz + D = 0$ з нормальним вектором $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

- ***Під кутом*** φ ***між прямою*** L ***площиною*** Π розуміють довільний з двох суміжних кутів, що утворений прямою і її проєкцією на площину. Синус кута φ, $\varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$, може бути знайдений за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Ap + Bq + Cr|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \tag{4.13}$$

- ***Умова перпендикулярності прямої і площини***: $L \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{s}$, тобто $\dfrac{A}{p} = \dfrac{B}{q} = \dfrac{C}{r}$.

- ***Умова паралельності прямої і площини*** (без спільних точок): $L \parallel \Pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n}$ і $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin \Pi$, тобто $\begin{cases} Ap + Bq + Cr = 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0. \end{cases}$

- Пряма лежить в площині: $\vec{s} \perp \vec{n}$ і $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$, тобто

$$\begin{cases} Ap + Bq + Cr = 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

<u>Приклад 16</u>. Знайти гострий кут φ між прямою $L: \begin{cases} x - 3y + 2z - 1 = 0, \\ x - y + z = 0, \end{cases}$ і площиною Π: $x - 4y - 2 = 0$.

Розв'язання. Нормальний вектор площини Π має вигляд $\vec{n}=\{1;-4;0\}$. Знайдемо напрямний вектор $\vec{s}$ прямої L (див. Приклад 13): $\vec{n}_1=\{1;-3;2\}$, $\vec{n}_2=\{1;-1;1\}$,

$$[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}+11\vec{k}=\{-1;1;2\}\Rightarrow \vec{s}=\{-1;1;2\}.$$

Користуємось формулою (4.13): $\sin\varphi=\dfrac{|-1-4|}{\sqrt{1+16}\cdot\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{5}{\sqrt{102}}=\dfrac{5\sqrt{102}}{102}\Rightarrow \varphi=\arcsin\dfrac{5\sqrt{102}}{102}$.

Приклад 17. Довести, що пряма $L: \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{8}$ лежить в площині Π: $2x+4y+z-6=0$.

Розв'язання. **1.** Перевіряємо, що вектор нормалі площини $\vec{n}=\{2;4;1\}$ і напрямний вектор прямої $\vec{s}=\{-2;-1;8\}$ перпендикулярні: $\vec{n}\cdot\vec{s}=-4-4+8=0$.

2. Покажемо, що точка $M_1(2;1;-2)$, яка належить прямій, належить і площині. Підставимо координати точки в рівняння площини: $4+4-2-6=0$. Рівняння перетворюється на тотожність.

Отже, обидві умови (4.14) виконані, тому пряма лежить в площині.

Приклад 18. Знайти значення α, при якому пряма $L: \dfrac{x+2}{\alpha}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-2}{-3}$ паралельна площині Π: $x+3y-2z-4=0$.

Розв'язання. Умова паралельності прямої і площини – перпендикулярність нормального вектора площини $\vec{n}=\{2;3;-2\}$ і напрямного вектора прямої $\vec{s}=\{\alpha;4;-3\}$. Складаємо скалярний добуток цих векторів і знаходимо значення α, при якому він дорівнює нулю: $2\alpha+12+6=0\Rightarrow\alpha=-9$.

Щоб з'ясувати, чи буде пряма лежати в площині, підставляємо координати точки $M_1(-2;-1;2)$, через яку проходить пряма, в рівняння площини: $-2-3-4-4\neq 0$. Отже, пряма і площина паралельні і спільних точок не мають.

Приклад 19. Скласти рівняння площини Π, що проходить через точку $M_1(2,-1,3)$ перпендикулярно до прямої: $L:\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ 4x-3z-9=0. \end{cases}$

Розв'язання. Знаходимо напрямний вектор $\vec{s}$ прямої: $\vec{s}\,\|\,[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$ $\Rightarrow$ $\vec{s}_2=\lambda[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$ (покладемо $\lambda=1$), де $\vec{n}_1=\{1;-1;2\}$, $\vec{n}_2=\{4;0;-3\}$.

$$[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}=3\vec{i}+11\vec{j}+4\vec{k}=\{3;11;4\} \Rightarrow \vec{s}=\{3;11;4\}.$$

Оскільки пряма і площина перпендикулярні, то нормальний вектор $\vec{n}$ площини Π колінеарний напрямному вектору прямої $\vec{s}$, отже, можемо вибрати вектор $\vec{n}=\vec{s}=\{3;11;4\}$. Користуючись рівнянням (4.1), складаємо рівняння площини:

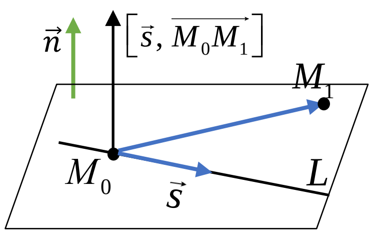
$\Pi: 3(x-2)+11(y+1)+4(z-3)=0$, тобто $\Pi: 3x+11y+4z-7=0$.

4.7. Змішані задачі про площину і пряму в просторі

Розглянемо деякі типові задачі, що відносяться до рівнянь площини і прямої в просторі.

Приклад 20. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $L:\dfrac{x-10}{11}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+6}{-13}$ і точку $M_1(5,-10,-9)$.

Розв'язання. Знайдемо нормальний вектор $\vec{n}$ площини Π. Так як площина Π проходить через пряму L, то її нормальний вектор $\vec{n}$ перпендикулярний до напрямного вектора $\vec{s}$ прямої L, де $\vec{s}=\{11;3;-13\}$.



З іншого боку, точка $M_0(10,-3,-6)$ належить прямій L, тому належить і шуканій площині, таким чином, вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ перпендикулярний до нормального вектора $\vec{n}$, де $\overrightarrow{M_0M_1}=\{-5;-7;-3\}$.

Звідси отримаємо $\vec{n} \perp \vec{s}$, $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M_1} \Rightarrow$ $\vec{n} \parallel \left[\vec{s}, \overrightarrow{M_0M_1}\right] \Rightarrow$ $\vec{n} = \lambda\left[\vec{s}, \overrightarrow{M_0M_1}\right]$, де $\lambda = const \neq 0$ (покладемо $\lambda = 1$). Обчисливши векторний добуток

$$\left[\vec{s}, \overrightarrow{M_0M_1}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 11 & 3 & -13 \\ -5 & -7 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -13 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 11 & -13 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -100\vec{i} + 98\vec{j} - 62\vec{k},$$

знаходимо нормальний вектор площини: $\vec{n} = \{-100; 98; -62\}$.

Оскільки площина Π проходить через точку M_1, то за формулою (4.1) запишемо рівняння шуканої площини

$$-100(x-5) + 98(y+10) - 62(z+9) = 0,$$

тобто $\qquad \Pi: 50x - 49y + 31z - 461 = 0$.

<u>Приклад 21</u>. Скласти рівняння площини Π, яка проходить через пряму $L_1: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$ та паралельна прямій $L_2: \begin{cases} x = 3t - 1, \\ y = 2t + 2, \\ z = 4t - 3. \end{cases}$

Розв'язання. Напрямні вектори прямих $\vec{s}_1 = \{1; -2; -1\}$, $\vec{s}_2 = \{3; 2; 4\}$ паралельні площині Π. Отже, їх векторний добуток є нормальним вектором площини:

$$\left[\vec{s}_1, \vec{s}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k} \Rightarrow \vec{n} = \{-6; -7; 8\}.$$

Точка $M_1(3, 2, 1)$ належить площині, оскільки вона лежить на прямій L_1, яка лежить в площині Π. Користуючись (4.1), складаємо рівняння площини

$\Pi: \quad -6(x-3) - 7(y-2) + 8(z-3) = 0$, тобто $6x + 7y - 8z - 8 = 0$.

<u>Приклад 22</u>. Скласти рівняння площини Π, яка проходить через дві паралельні прямі: $L_1: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$ та $L_2: \dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

Розв'язання. Прямі L_1 і L_2 паралельні, оскільки $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 = \{1;-2;-1\}$. Точка $M_1(3,2,1) \in L_1$, точка $M_2(-5,-2,4) \in L_2$. Оскільки площина Π проходить через прямі L_1 і L_2, то $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-8;-4;3\} \in \Pi$. Отже, знаходимо нормальний вектор площини $\vec{n}$: $\vec{n} \perp \vec{s}_1,\ \vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \Rightarrow \vec{n} \,||\, \left[\vec{s}_1, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \Rightarrow \vec{n} = \lambda\left[\vec{s}, \overrightarrow{M_1M_2}\right]$, де покладемо $\lambda = 1$. Знаходимо векторний добуток:

$$\left[\vec{s}_1, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ -8 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 5\vec{j} - 20\vec{k} = \{-10;5;-20\} \Rightarrow \vec{n} = \{2;-1;4\}.$$

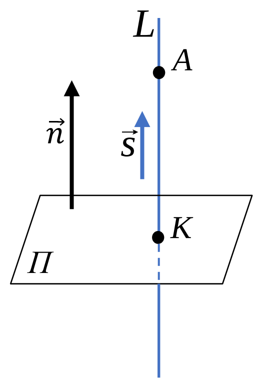
Оскільки шукана площина Π проходить через точку M_1, то, користуючись формулою (4.1), маємо рівняння площини Π:

$2(x-3)-(y-2)+4(z-1)=0$, тобто $2x-y+4z-8=0$.

<u>Приклад 23</u>. Знайти проєкцію точки $A(11, 5, -9)$ на площину $\Pi:\ 7x+10y-5z+2=0$.

Розв'язання. Проєкцією точки A на площину Π є точка K, яка є основою перпендикуляра проведеного з точки A на задану площину. Розв'яжемо задачу в декілька кроків.

1. Знайдемо рівняння прямої L, яка проходить через точку A перпендикулярно до заданої площини Π.



Оскільки $L \perp \Pi$, то напрямний вектор $\vec{s}$ прямої L колінеарний до нормального вектора $\vec{n}$ площини Π, де $\vec{n} = \{7; 10; -5\}$. Тому $\vec{s} \,||\, \vec{n} \Rightarrow \vec{s} = \lambda\vec{n} = \{7\lambda; 10\lambda; -5\lambda\}$, де $\lambda = const \neq 0$ (можна покласти $\lambda = 1$) і згідно з формулою (4.9) канонічні рівняння прямої мають вигляд:

$$L: \frac{x-11}{7} = \frac{y-5}{10} = \frac{z+9}{-5}.$$

Прирівнюючи ці рівняння до параметра t, тобто

$\frac{x-11}{7}=t,\ \frac{y-5}{10}=t,\ \frac{z+9}{-5}=t$, отримаємо параметричні рівняння прямої:

$$L:\begin{cases} x=7t+11, \\ y=10t+5, \\ z=-5t-9, \quad \text{де } t\in R. \end{cases}$$

2. Знайдемо точку *K* як перетин прямої *L* і площини *П*. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x=7t+11, \\ y=10t+5, \\ z=-5t-9, \\ 7x+10y-5z+2=0 \end{cases}$ шляхом підстановки рівнянь прямої (тобто перших трьох рівнянь системи) у рівняння площини (четверте рівняння): $7(7t+11)+10(10t+5)-5(-5t-9)+2=0 \Rightarrow t=-1$.

Підставляючи значення $t=-1$ в параметричні рівняння прямої, отримаємо координати точки *K*: $x=4,\ y=-5,\ z=-4$.

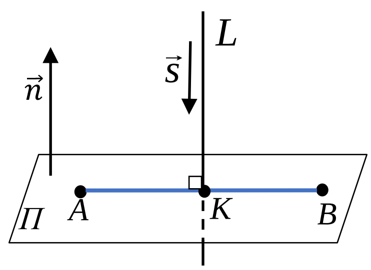
Отже, точка $K(4;-5;-4)$ є проєкцією точки *A* на площину *П*.

Приклад 24. Знайти проєкцію точки $A(9,-1,7)$ на пряму $L:\ \frac{x+8}{7}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-4}{10}$. Знайти точку *B,* симетричну точці *A* відносно заданої прямої.

Розв'язання. Проєкцією точки *A* на пряму *L* є точка *K*, яка є основою перпендикуляра проведеного з точки *A* на задану пряму. Точки *A* і *B* розташовані на одному перпендикулярі до заданої прямої і на однаковій відстані від неї.

Розв'яжемо задачу в декілька кроків.

1. Знайдемо рівняння площини *П*, яка проходить через точку *A* перпендикулярно до заданої прямої *L*. Оскільки $П \perp L$, то нормальний вектор $\vec{n}$ площини *П* колінеарний до напрямного вектора $\vec{s}$ прямої *L*, де $\vec{s}=\{7;0;10\}$. Тому



$\vec{n} \parallel \vec{s} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \lambda\vec{s} = \{7\lambda;\, 0;\, 10\lambda\}$, де $\lambda = const \neq 0$ (можна покласти $\lambda = 1$) і внаслідок формули (4.1) запишемо рівняння площини

$$7\lambda(x-9) + 0(y+1) + 10\lambda(z-7) = 0, \text{ тобто } \Pi : 7x + 10z - 133 = 0.$$

2. Знайдемо точку *K* як перетин прямої *L* і площини *П*. Для цього спочатку запишемо параметричні рівняння прямої *L*:

$$\begin{cases} \dfrac{x+8}{7} = t, \\ \dfrac{y+5}{0} = t, \\ \dfrac{z-4}{10} = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad L: \begin{cases} x = 7t - 8, \\ y = -5, \\ z = 10t + 4. \end{cases}$$

Підставимо ці рівняння прямої у рівняння площини:

$$7(7t-8) + 10(10t+4) - 133 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

Підставляючи значення $t = 1$ в параметричні рівняння прямої, отримаємо координати точки *K*: $x = -1,\ y = -5,\ z = 14$.

Отже, точка $K(-1;\, -5;\, 14)$ є проекцією точки *A* на пряму *L*.

3. Знайдемо точку *B,* симетричну точці *A* відносно заданої прямої. Оскільки $AK = KB$, то із формул ділення відрізка *AB* навпіл маємо:

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_K = \frac{z_A + z_B}{2},$$

$$\Rightarrow \quad -1 = \frac{9 + x_B}{2},\ -5 = \frac{-1 + y_B}{2},\ 14 = \frac{7 + z_B}{2}.$$

Звідки $x_B = -11,\ y_B = -9,\ z_B = 21$.

Отже, точка $B(-11;\, -9;\, 21)$ симетрична точці *A* відносно прямої *L*.

Приклад 25. Знайти відстань від точки $A(9,-1,7)$ до прямої $L:\ \dfrac{x+8}{7} = \dfrac{y+5}{0} = \dfrac{z-4}{10}$.

Розв'язання. Відстань від точки *A* до прямої *L* дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з цієї точки на задану пряму, тобто відстань

$d(A,L)=|AK|$, де точка K це проєкція точки A на пряму L. В прикладі 24 знайдено координати точки $K\left(-1;-5;14\right)$. Отже,

$|AK|=\sqrt{(-1-9)^2+(-5+1)^2+(14-7)^2}=\sqrt{153}\implies d(A,L)=\sqrt{153}$ (од).

Приклад 26. Знайти відстань d між паралельними прямими $L_0:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-3}$ та $L_1:\dfrac{x-7}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Розв'язання. Прямі L_0 і L_1 паралельні, оскільки $\vec{s}_0=\vec{s}_1=\{-1;2;-3\}$. Точка $M_0(0,2,0)\in L_0$, точка $M_1(7,0,1)\in L_1$. Щоб знайти відстань між прямими, треба знайти відстань від будь-якої точки на одній прямій до другої прямої. Розв'яжемо задачу в декілька кроків.

1. Через точку M_0 проведемо площину, перпендикулярну до прямих L_0 і L_1. Оскільки для перпендикулярної площини Π нормальний вектор $\vec{n}=\vec{s}_0=\vec{s}_1=\{-1;2;-3\}$, то за формулою (4.1) маємо:

$$-x+2(y-2)-3z=0\Rightarrow \Pi: x-2y+3z+4=0.$$

2. Знаходимо точку перетину побудованої площини Π і прямої L_1 – точку O. Для цього параметричні рівняння прямої L_1:

$$\begin{cases}\dfrac{x-7}{-1}=t,\\ \dfrac{y}{2}=t,\\ \dfrac{z-1}{-3}=t,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad L_1:\begin{cases}x=-t+7,\\ y=2t,\\ z=-3t+1,\end{cases}$$

підставимо в рівняння площини Π: $-t+7-4t-9t+3+4=0 \Rightarrow -14t=-14$ $\Rightarrow t=1$. Підставляючи значення $t=1$ в параметричні рівняння прямої L_1, отримаємо координати точки O: $x_o=6,\ y_o=2,\ z_o=-2$.

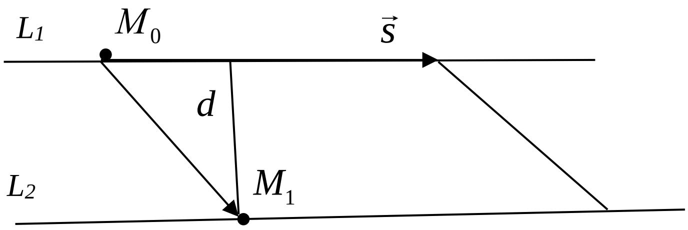
3. Відстань M_0O і буде відстанню між паралельними прямими:

$$d=\sqrt{(0-6)^2+(2-2)^2+(0+2)^2}=\sqrt{40}.$$

Зауваження. *Відстань між паралельними прямими* також можна знайти з інших міркувань. Нехай задано дві паралельні прямі в просторі

$$L_0: \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}, \quad L_1: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$$

з напрямним вектором $\vec{s}=\{p;q;r\}$, точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L_0$, $M_1(x_1,y_1,z_1)\in L_1$. Розглянемо паралелограм, побудований на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{s}$. Тоді для знаходження відстані між паралельними прямими d треба знайти довжину висоти, проведеної з вершини M_1.



Враховуючи, що модуль векторного добутку визначає площу паралелограма, побудованого на зведених до спільного початку векторах, отримуємо рівність:

$$\left|[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}]\right|=|\vec{s}|\cdot d \Rightarrow d=\frac{\left|[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}]\right|}{|\vec{s}|}. \quad (4.15)$$

Застосуємо формулу (4.15) і знайдемо відстань між паралельними прямими для умови Прикладу 26. Знаходимо $\overrightarrow{M_0M_1}=\{7;-2;1\}$,

$$\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}_1\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 7 & -2 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}=4\vec{i}+20\vec{j}+14\vec{k}=\{4;20;14\}.$$

Тоді

$$d=\frac{\left|[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}]\right|}{|\vec{s}|}=\frac{\sqrt{16+400+144}}{\sqrt{1+4+9}}=\sqrt{\frac{560}{14}}=\sqrt{40}.$$

5. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ»

Варіант № 1

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$(A-3B)C^T, \text{ де } A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \; C=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x)=2x^2-x+4$,

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $AXB=C$, де

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; C=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Довести, що система має єдиний розв'язок та знайти його а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1-x_3=3, \\ 3x_1+2x_2-x_3=7, \\ 5x_1-2x_2-3x_3=5. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7, \\ 2x_1+4x_2+7x_3-x_4=2, \\ 5x_1+10x_2+17x_3+2x_4=11. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_4=0, \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4=0, \\ 4x_1+2x_2-x_3-x_4=0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв’язок і знайти цей розв’язок: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 2

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$(2A + C)B^T$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв’язком матричного рівняння $AXB = C$, де $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв’язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв’язки системи: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 19x_2 + 9x_3 = 16. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв’язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв’язок і знайти цей розв’язок: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 3

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$(2A-B)C^T, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 7 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = x^2 + 2x - 5$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв’язком матричного рівняння $AXB = C$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв’язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = -2, \\ 3x_1 - 2x_3 = 1, \\ 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ -x_1 + 8x_2 + x_3 - 5x_4 = -1, \\ 7x_1 - 18x_2 - 7x_3 + 13x_4 = -1. \end{cases}$$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант № 4

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$(A-2B)^T C$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $BXA = 2C$, де

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 3, \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 4, \\ 4x_1 + 11x_2 - 11x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 5

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$(A - 2B)^T C$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = x^2 - 4x - 4$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $AXC = B$, де $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 5x_3 = -1. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 6x_1 - 11x_2 - 7x_3 = -8. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 6

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$(A + 3C)^T B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB = A$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_2 - 7x_3 = -3. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 8x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 8. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 7

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$A^T(C-3B),\ \text{де}\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C)*, якщо $f(x)=x^2+3x-4$,

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix}2 & -3 & 4 & -2\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -4 & 1\end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB=A$, де

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=5,\\ 3x_1-x_3=2,\\ 5x_1-x_2+3x_3=6.\end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases}x_1+3x_2+4x_3+x_4=1,\\ 2x_1+2x_2+3x_3+x_4=-4,\\ 3x_1+3x_2+4x_3+x_4=0.\end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases}x_1+x_3-x_4=0,\\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4=0,\\ x_1+2x_2-x_4=0.\end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases}x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ 2x_1-x_2-2x_3=0,\\ x_1-2x_2+3x_3=0.\end{cases}$

Варіант № 8

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$A^T(3C+B),\ \text{де}\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x)=3x^2-x-1$,

$$C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix}2 & -3 & 4 & -2\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 3 & -3 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1 & 1\end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB=A$, де

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=-1,\\ x_1+2x_2-2x_3=3,\\ 5x_1-2x_3=3.\end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases}5x_1-x_2+2x_3+x_4=7,\\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=1,\\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4=0.\end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3=0,\\ 3x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 4x_2-x_3-2x_4=0.\end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв’язок і знайти цей розв’язок: $\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 9

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$A^T(3C - 2B), \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв’язком матричного рівняння $CXB = A$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв’язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1, \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв’язки системи: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 10

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$A^T(3B - C), \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = x^2 + 3x - 2$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXA = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ 3x_1 - 5x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв’язки системи: $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4=1, \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4=2, \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4=4. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв’язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_4=0, \\ 3x_1+2x_3+x_4=0, \\ x_1-x_3-x_4=0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв’язок і знайти цей розв’язок: $\begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3=0, \\ x_1+3x_2+\lambda x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$

Варіант № 11

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$B^T(C-2A)$, де $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x)=3x^2-x+4$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв’язком матричного рівняння $CXB=A$, де $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв’язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв’язки системи: $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв’язок однорідної системи: $\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв’язок і знайти цей розв’язок: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 12

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$A(C-2B)^T$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = 3x^2 - x + 2$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB = A$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 13

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$C(3B - 2A)^T, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB = A$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 14

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$C^T(A + 2B)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = 4x^2 - x + 3$,

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix}3 & 1 & 4 & -2\\ -2 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 4 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 4 & 1\end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв’язком матричного рівняння $CXA=B$, де

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & -5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв’язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases}2x_2-5x_3=-1,\\ 3x_1+3x_2-8x_3=1,\\ 7x_1-x_2-3x_3=2.\end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв’язки системи: $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3+x_4=1,\\ 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=2,\\ 4x_1+x_2+4x_3+3x_4=4.\end{cases}$

7. Знайти загальний розв’язок однорідної системи: $\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3-3x_4=0,\\ 3x_1+2x_3+5x_4=0,\\ x_2-4x_3-x_4=0.\end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв’язок і знайти цей розв’язок: $\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=0,\\ x_1+3x_2-2x_3=0,\\ x_1-\lambda x_2+x_3=0.\end{cases}$

Варіант № 15

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$A^T(C-2B),\text{ де } A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$,

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXA = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ 5x_1 - 8x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 = -7. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 16

1. Знайти значення вказаного матричного виразу: $(2A + C)B^T$, де

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x)=2x^2-3x+3$,

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix}1 & -1 & 4 & -2\\ -3 & 1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -4 & 1\end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $AXC=B$, де

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=5,\\ 3x_1+2x_2-3x_3=4,\\ 7x_1-2x_2-3x_3=0.\end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases}x_1-3x_2-x_3+4x_4=0,\\ 2x_1+x_2+x_3-6x_4=1,\\ 3x_1-2x_2-2x_4=1,\\ 5x_1-x_2+x_3-8x_4=2.\end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases}2x_1+x_3-2x_4=0,\\ 2x_1+3x_2+2x_3+x_4=0,\\ x_1+2x_2-x_3+3x_4=0.\end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=0,\\ 3x_1+4x_2-2\lambda x_3=0,\\ 5x_1-x_3=0.\end{cases}$.

Варіант № 17

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$(2A-3C)B^T, \text{ де } A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x)=2x^2+3x+2$,

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $AXB=C$, де

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=1, \\ 3x_1-2x_3=1, \\ x_1+x_2-3x_3=0. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3-x_4=2, \\ x_1+2x_2-4x_3+3x_4=-1, \\ 7x_1+14x_2-10x_3+7x_4=1, \\ -3x_1-6x_2+3x_3-2x_4=-1. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3-3x_4=0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-2x_3=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3=0, \\ x_1-3x_2+x_3=0. \end{cases}$

Варіант № 18

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$(2A-C)B^T$, де $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x)=x^2+3x-4$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB=A$, де $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1-4x_2=-2, \\ 5x_1-2x_3=3, \\ 6x_1+x_2-7x_3=1. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-2x_4=0, \\ 2x_1-4x_2-x_3+3x_4=-2, \\ 3x_1-6x_2+x_4=1, \\ x_1-5x_2+2x_3-3x_4=3. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 19

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$(2A + C)^T B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = 3x^2 - x - 2$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $BXA = 2C$, де

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ 2x_1 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ 5x_1 - 5x_2 - 11x_3 = 5, \\ 11x_1 - 11x_2 - 21x_3 = 19. \end{cases}$$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 20

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:
$$(3A+2B)C^T, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = x^2 - 5x + 4$,
$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $AXC = B$, де
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5, \\ 4x_1 - 5x_2 = -6. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 7x_1 + 14x_2 - 8x_3 + 5x_4 = 8. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} -2x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 21

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$(A+3C)^T(B-A), \text{ де } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C)*, якщо $f(x) = 4x^2 - x + 2$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв’язком матричного рівняння $CXB = A$, де $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв’язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4, \\ 2x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв’язки системи: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = -5, \\ 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -10. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв’язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв’язок і знайти цей розв’язок: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 22

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$A^T(C - 3B)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB = 2A$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 = -5, \\ 7x_1 - x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ -4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -5, \\ 7x_1 - 7x_2 + 7x_3 = 11. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 23

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$A^T(3C-B),\text{ де } A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\\ 4 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C)*, якщо $f(x)=3x^2-2x+2$,

$$C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix}1 & -3 & 4 & -2\\ 3 & 2 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 2 & -2\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB=A$, де

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -3 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ -1 & -2\end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=-3,\\ 4x_1+2x_2-2x_3=6,\\ 5x_1+x_3=6.\end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases}x_1+3x_2-x_3+2x_4=3,\\ -3x_1-4x_2+3x_3-x_4=0,\\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=-3.\end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0,\\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4=0,\\ 4x_2-4x_3-3x_4=0.\end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=0,\\ 2x_1+\lambda x_2-2x_3=0,\\ 3x_1-2x_2+x_3=0.\end{cases}$

Варіант № 24

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$A(C-2B)^T, \text{ де } A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\\ -2 & -3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x)=3x^2+4x+1$,

$C = \begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 4 & 2 & -3\\ 1 & -3 & -2 & 0\end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB=A$, де

$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & -7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$.

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases}2x_1-3x_2-3x_3=-7,\\ 3x_1-x_2+4x_3=5,\\ 2x_1-2x_2-3x_3=-5.\end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases}x_1-4x_2+3x_3-2x_4=-1,\\ -3x_1+x_2-2x_3+x_4=0,\\ 4x_1-5x_2+5x_3-3x_4=-1,\\ 7x_1-6x_2+7x_3-4x_4=-1.\end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\ 3x_1+x_2+5x_3+x_4=0,\\ x_2-3x_3-x_4=0.\end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2-x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=0.\end{cases}$

Варіант № 25

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$A^T(B+3C)\text{, де } A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x)=4x^2+x-2$,

$C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 2\\ -1 & -4 & 2 & -3\\ 3 & 3 & -2 & 0\end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXA=B$, де

$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}$.

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases}2x_1-x_2-5x_3=-5,\\ 3x_2-5x_3=1,\\ 3x_1+2x_2-3x_3=4.\end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=8,\\ 3x_1-x_2-2x_3=-6,\\ 5x_1+3x_2-8x_3=10,\\ 11x_1+x_2-12x_3=-2.\end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases}2x_1+x_2-3x_4=0,\\ 3x_1+x_3+2x_4=0,\\ x_1+3x_2-x_3-x_4=0.\end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=0,\\ \lambda x_1-3x_2+2x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=0.\end{cases}$

Варіант № 26

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$(B+A)^T(C-2A),\text{ де } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x)=3x^2-3x+4$,

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $AXB=C$, де

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_2=1, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=4, \\ 6x_1-3x_3=3. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} 4x_1+3x_2-x_3+x_4=5, \\ x_1+x_2-2x_3-3x_4=2, \\ 11x_1+9x_2-8x_3-7x_4=16. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+6x_4=0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-2x_3=0, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0. \end{cases}$

Варіант № 27

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$$A^T(C+2B),\ \text{де}\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x)=x^2-5x+2$,

$$C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\ 2 & -2 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 4 & 0\end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB=A$, де

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -5 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -10 & 3\end{pmatrix}.$$

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=-3,\\ 3x_1-x_2-x_3=0,\\ 2x_2-3x_3=1.\end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases}4x_1-x_2+2x_3+x_4=0,\\ 3x_1-2x_2-3x_3+4x_4=-3,\\ x_1+x_2+5x_3-3x_4=3,\\ 7x_1-3x_2-x_3+5x_4=-3.\end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-3x_4=0,\\ 3x_1+x_2+x_4=0,\\ 4x_1+2x_2-2x_3-x_4=0.\end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 28

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$C^T(3B - 2A)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB = A$, де

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 12, \\ 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв'язки системи: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ 9x_1 + 2x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв’язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ , при якому система має ненульовий розв’язок і знайти цей розв’язок: $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 29

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$C^T(2A+3B)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C)*, якщо $f(x) = x^2 - 3x + 1$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв’язком матричного рівняння $CXA = B$, де

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв’язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 - 7x_3 = -5, \\ x_1 + 3x_2 - 10x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв’язки системи: $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

7. Знайти загальний розв'язок однорідної системи: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок: $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант № 30

1. Знайти значення вказаного матричного виразу:

$A^T(2C+B)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення матричного многочлена *f(C),* якщо $f(x) = x^2 - 3x + 2$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти матрицю *X,* яка є розв'язком матричного рівняння $CXB = A$, де

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв'язок системи а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 8x_2 = -11, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -6. \end{cases}$$

6. Дослідити систему на сумісність і в разі сумісності знайти розв’язки

системи: $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3, \\ 11x_1 + 8x_2 - x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

7. Знайти загальний розв’язок однорідної системи: $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

8. Визначити значення параметра λ, при якому система має ненульовий

розв’язок і знайти цей розв’язок: $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

6. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ»

Варіант № 1

1. Знайти внутрішній і зовнішній кут при вершині C в трикутнику ABC, де $A(1, -2, 3)$, $B(5, 2, -4)$, $C(0, 3, -2)$.

2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $2\overline{p}+\overline{q}$ і $\overline{p}-3\overline{q}$, якщо $|\overline{p}|=1, |\overline{q}|=3$, кут між $\overline{p}$ та $\overline{q}$ дорівнює $\pi/6$.

3. Знайти вектор $\vec{x}$ довжини 2, що колінеарний до $\overrightarrow{AB}$ і має однаковий з ним напрям, якщо A(2, –1, 4), B(1, 3, 1).

Варіант № 2

1. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}=\{1,-2,5\}$, що задовольняє умову $\vec{x}\cdot\vec{a}=2$.

2. Перевірити, чи лежать точки A(1, –2, 3), B(5, 2, –4), C(0, 3, –2), D(10; –7; 3) в одній площині.

3. Знайти площу трикутника ABC, де $A(1, -2, 1)$, $B(5, 2, 0)$, $C(0, 3, -2)$. Знайти довжину висоти, яка опущена з вершини B на сторону AC.

Варіант № 3

1. Знайти α та β, при яких вектори $\alpha\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $3\vec{i}-\vec{j}+\beta\vec{k}$ колінеарні.

2. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ і задовольняє умову $\vec{x}\cdot(4\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})=2$.

3. Знайти об’єм піраміди $ABCD$ і довжину висоти, опущеної з вершини D, якщо $A(-2, 0, 4)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(2, 3, 0)$, $D(1, -4, 1)$.

Варіант № 4

1. Знайти α, при якому вектори $\alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $3\vec{i} - 2\alpha\vec{j} + 3\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.
2. Дано три сили $\overrightarrow{M} = \{1, -2, -4\}$, $\overrightarrow{N} = \{4, 2, -5\}$, $\overrightarrow{P} = \{0, 2, 10\}$, що прикладені до точки A(1, 0, 5). Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки B(3, 2, –5).
3. Переконатися, що вектори $\vec{p} = \{-1,\ \ 2,\ \ 1\}$, $\vec{q} = \{2,\ 0,\ 3\}$, $\vec{r} = \{1,\ 1,\ -1\}$ некомпланарні і знайти розклад вектора $\vec{a} = \{-1, 7, -4\}$ за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Варіант № 5

1. Знайти вектор $\vec{x}$ довжини 2, який колінеарний до вектора $\overrightarrow{AB}$, де A(– 5, 1, 0), B(1, 2, 4) і утворює гострий кут з віссю OX.
2. Знайти об'єм піраміди *ABCD* і довжину висоти, опущеної з вершини *D*, якщо A(1, –2, 3), B(5, 2, –4), C(0, 3, –2), D(4, 5, –2).
3. Знайти α і β, при яких вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + \alpha\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + 4\beta\vec{k}$ колінеарні.

Варіант № 6

1. Дано три вектори $\vec{a} = \{1, 2, 4\}$, $\vec{b} = \{0, 2, -5\}$, $\vec{c} = \{1, 2, -1\}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умовам $\vec{x} \cdot \vec{a} = 5$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -5$, а вектори $\vec{x}$ і $\vec{c}$ перпендикулярні.
2. Дано три сили $\overrightarrow{M} = \{-3, 2, -4\}$, $\overrightarrow{N} = \{1, 0, -3\}$, $\overrightarrow{P} = \{-1, 3, 7\}$, що прикладені до точки *A*(5, 1, -3). Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки *B*(–3, 2, 1).
3. Знайти площу трикутника *ABC*, де $A(1, -2, 1)$, $B(2, -4, -1)$, $C(5, -3, 0)$.

Варіант № 7

1. Знайти кут φ, який утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $\vec{a}+2\vec{b}$ і $3\vec{a}-3\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

2. Знайти площу трикутника і довжину висоти, проведену з вершини А в трикутнику АВС, де $A(1, 2, –3)$, $B(0, –2, 4)$, $C(–5, 3, 0)$.

3. Знайти об’єм піраміди ABCD, де $A(–1, 2, 3)$, $B(5, 1, -2)$, $C(-1, 0, 1)$, $D(1, –1, 2)$.

Варіант № 8

1. Знайти одиничний вектор $\vec{x}$, що колінеарний до $\overrightarrow{AB}$ і має протилежний з ним напрям, якщо А(-1, 1, 2), В(1, 3, 1).

2. Знайти об’єм піраміди *ABCD* і довжину висоти, опущеної з вершини *D*, якщо $A(0, –2, 0)$, $B(–5, 2, 4)$, $C(1, 3, 2)$, $D(5, –1, –2)$.

3. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{p}+\overline{q}$ і $2\overline{p}-2\overline{q}$, якщо $|\overline{p}|=2, |\overline{q}|=1$, а кут між $\overline{p}$ та $\overline{q}$ дорівнює $\pi/6$.

Варіант № 9

1. Довести, що вектори $\vec{p}=\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{q}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{r}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ некомпланарні і знайти розклад вектора $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ за векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

2. Знайти площу трикутника АВС, де $A(1, –2, 3)$, $B(0, 2, –4)$, $C(5, 3, –2)$.

3. Задано вершини трикутника АВС: $A(1, –2, 0)$, $B(5, 4, 1)$, $C(–2, 2, 2)$. Знайти внутрішній і зовнішній кут при вершині *C*.

Варіант № 10

1. Знайти вектор $\vec{x}$ довжини 2, який колінеарний до вектора $\overrightarrow{AB}$, де $A(1, – 2, 1)$, $B(2, 2, 4)$, і який утворює тупий кут з віссю OZ.

2. Знайти проєкцію вектора $\vec{a}-\vec{b}$ на вектор $2\vec{c}$, де $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-7\vec{j}-\overrightarrow{3k}$.

3. Дано три послідовні вершини паралелограма $A(-1, -2, 0)$, $B(3, 2, -3)$, $C(1, 3, 0)$. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

Варіант № 11

1. Знайти зовнішній кут при вершині C в трикутнику ABC, де $A(-4, -1, -3)$, $B(5, 0, -4)$, $C(-1, 0, -2)$.

2. Дано три сили $\overrightarrow{M} = \{-2, -4, 5\}$, $\overrightarrow{N} = \{1, -5, 2\}$, $\overrightarrow{P} = \{-1, 0, 2\}$, що прикладені до точки $A(-3, 1, -2)$. Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки $B(2, -1, -5)$.

3. Перевірити, чи лежать точки $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 2, -7)$, $C(2, -1, 5)$, $D(0, 2, -6)$ в одній площині.

Варіант № 12

1. Дано три вектори $\vec{a} = \{1, -5, 3\}$, $\vec{b} = \{4, -2, -3\}$, $\vec{c} = \{8, -2, 1\}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умовам $\vec{x} \cdot \vec{a} = -10$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 8$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 4$.

2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{p} - 2\overline{q}$ і $\overline{p} - \overline{q}$, якщо $|\overline{p}| = 3, |\overline{q}| = 2$, а кут між $\overline{p}$ та $\overline{q}$ дорівнює $\pi / 4$.

3. Знайти кут при вершині A в трикутнику ABC, де $A(3, -1, -2)$, $B(-1, 0, -4)$, $C(4, 0, -2)$.

Варіант № 13

1. Перевірити, чи лежать точки $A(1, 0, 5)$, $B(0, 2, 13)$, $C(1, -3, -3)$, $D(0, 2, -1)$ в одній площині.

2. Знайти площу трикутника і довжину висоти, проведену з вершини B у трикутнику ABC, де $A(0, 2, 3)$, $B(5, -2, 3)$, $C(5, 1, 1)$.

3. Знайти кут при вершині B у трикутнику ABC, де $A(3, -1, -2)$, $B(-1, 0, -4)$, $C(4, 0, -2)$.

Варіант № 14

1. Знайти проєкцію $\vec{a}+2\vec{b}$ на $\vec{c}$, де $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$. $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$.

2. Довести, що вектори $\vec{p}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{q}=-2\vec{i}+3\vec{k}$, $\vec{r}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ некомпланарні і знайти розклад вектора $\vec{a}=-4\vec{i}-4\vec{j}+14\vec{k}$ за векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

3. Знайти площу трикутника АВС, де A(6, –2, 0), B(2, 2, 4), C(5, 3, –1). Знайти довжину висоти, проведену з вершини *C* у трикутнику АВС.

Варіант № 15

1. Знайти об'єм піраміди *ABCD* і довжину висоти, опущеної з вершини *D*, якщо A(0, 2, 6), B(–5, 1, –4), C(1, 3, 2), D(7, 0, –2).

2. Дано три сили $\overrightarrow{M}=\{1,-2,0\}$, $\overrightarrow{N}=\{7,-1,5\}$, $\overrightarrow{P}=\{3,12,0\}$, що прикладені до точки *A*(–1, 4, 5). Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки *B*(2, 5, –9).

3. Знайти кут при вершині *B* у трикутнику *ABC*, де *A*(3, 1, –2), *B*(-1, 0, –4), *C*(4, 1, –2).

Варіант № 16

1. Знайти кут φ, який утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $3\vec{a}-2\vec{b}$ і $\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

2. Показати, що вектори $\vec{p}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{q}=\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{r}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ некомпланарні і знайти розклад вектора $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$ за векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

3. Задано три послідовні вершини паралелограма *ABCD*: *A*(4; 2; 1), *B*(2; 1; –1) і *C* (– 1; 0; 2). Знайти його площу.

Варіант № 17

1. Дано три сили $\overrightarrow{M} = \{3,-3,3\}$, $\overrightarrow{N} = \{-1,2,0\}$, $\overrightarrow{P} = \{2,2,-7\}$, що прикладені до точки $A(1, 2, –5)$. Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки $B(6, –2, –5)$.

2. Знайти об'єм піраміди *ABCD* і довжину висоти, опущеної з вершини *D*, якщо $A(1, 2, –1)$, $B(–1, 2, 2)$, $C(–1, 2, 7)$, $D(6, –2, 0)$.

3. Знайти α і β, при яких вектори $\vec{a} = 2\alpha\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} - \beta\vec{k}$ колінеарні.

Варіант № 18

1. Знайти проєкцію вектора $3\vec{b}$ на $\vec{a} + \vec{c}$, де $\vec{a} = 4\vec{j} - 2\vec{k}$. $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 5\vec{k}$.

2. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $-3\vec{i} + \vec{j} - \overrightarrow{2k}$ і задовольняє умову $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}) = 9$.

3. Знайти об'єм піраміди *ABCD* і довжину висоти, опущеної з вершини *D*, якщо $A(–3, 1, –2)$, $B(–1, 0, –4)$, $C(4, 1, –2)$, $D(1, 0; –1)$.

Варіант № 19

1. Дано три вектори $\vec{a} = \{1,5,-4\}$, $\vec{b} = \{1,2,-1\}$, $\vec{c} = \{3,4,-3\}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умовам $\vec{x} \cdot \vec{a} = 19$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 7$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 17$.

2. Знайти площу трикутника *ABC* і довжину висоти, проведену з вершини *A* в цьому трикутнику, де $A(1, –2, –4)$, $B(–1, –4, 0)$, $C(1, 3, 2)$.

3. Знайти вектор $\vec{x}$ довжини 2, що колінеарний до $\overrightarrow{AB}$ і має однаковий з ним напрям, якщо А(-1, –1, 2), В(2, 3, 4).

Варіант № 20

1. Знайти внутрішній кут при вершині *A* в трикутнику *ABC,* де $A(2, –2, 6)$, $B(0, 2, 4)$, $C(2, 3, 2)$.

2. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ та $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, утворює тупий кут з віссю Oy і $|\vec{x}|=2$.

3. Знайти α і β, при яких вектори $\vec{a}=3\beta\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\alpha\vec{j}+4\vec{k}$ колінеарні.

Варіант № 21

1. Знайти вектор $\vec{x}$, довжина якого дорівнює 3 і який колінеарний до $\overrightarrow{AB}$, де $A(5, –2, 0)$, $B(7, –2, –4)$ та $\vec{x}$ утворює гострий кут з віссю Oz.

2. Перевірити, чи лежать точки $A(1, 2, 12)$, $B(0, 1, 10)$, $C(2, 3, 14)$, $D(0, 3, –1)$ в одній площині.

3. Дано три послідовні вершини паралелограма A(4, –1, 0), B(3, 2, –2), C(2, – 3, 1). Знайти площу паралелограма ABCD.

Варіант № 22

1. Знайти α,β, при яких вектори $\alpha\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $3\vec{i}-\vec{j}+\beta\vec{k}$ колінеарні.

2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $2\overline{p}+3\overline{q}$ і $\overline{p}-2\overline{q}$, якщо $|\overline{p}|=|\overline{q}|=3$, кут між векторами $\overline{p}$ та $\overline{q}$ дорівнює $2\pi/3$.

3. Знайти $np_{\vec{b}-\vec{c}}\,(\vec{a}+2\vec{c})$, якщо $\vec{a}=4\vec{j}-2\vec{k}$. $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{i}-5\vec{k}$.

Варіант № 23

1. Знайти внутрішній кут при вершині B в трикутнику ABC, де $A(1, 2, –5)$, $B(1, 2, –4)$, $C(–7, –3, 2)$.

2. Перевірити, чи лежать точки $A(–1, 0, 8)$, $B(4, 3, 12)$, $C(0, 0, 7)$, $D(1, –3, –3)$ в одній площині.

3. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний до вектора $\vec{a}=\{2,2,-5\}$ і задовольняє умову $\vec{x}\cdot\vec{a}=10$.

Варіант № 24

1. Довести, що вектори $\vec{p}=\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{q}=2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{r}=\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$ не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a}=2\vec{i}+8\vec{j}-9\vec{k}$ за векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

2. Знайти проєкцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$, де A(1, -2, 3), B(5, 2, -4), C(0, 3, -2), D(4, 5, -2).

3. Знайти площу трикутника *ABC*, де *A*(3, –2, 0), *B*(4, 2, 1), *C*(2, –3, –2).

Варіант № 25

1. Дано три вектори $\vec{a}=\{2,-1,4\}$, $\vec{b}=\{7,-2,0\}$, $\vec{c}=\{1,0,-1\}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умовам $\vec{x}\cdot\vec{a}=19,\ \vec{x}\cdot\vec{b}=1,\ \vec{x}\cdot\vec{c}=-4$.

2. Знайти об'єм піраміди *ABCD* і довжину висоти, опущеної з вершини *D*, якщо *A*(6, 2, –3), *B*(0, 2, 4), *C*(3, 3, –2), *D*(6, –5, 0).

3. Знайти площу паралелограма *ABCD*, якщо задані послідовні його вершини *A*(0, –2, 1), *B*(3, –1, 0), *C*(1, –1, 2).

Варіант № 26

1. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\overrightarrow{AB}$, де A(–3, 1, –1), B(1, 3, –2), що задовольняє умову $\vec{x}\cdot\overrightarrow{AB}=1$.

2. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$ і $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$, а також $|\vec{x}|=3\sqrt{110}$, цей вектор утворює з віссю *Ox* гострий кут.

3. Перевірити, чи лежать точки *A*(5, 0, 2), *B*(3, 3, 13), *C*(-1, –2, 2), D(1, –3, 4) в одній площині.

Варіант № 27

1. Знайти α, при якому вектори $\alpha\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$, $3\vec{i}-2\vec{j}+\alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}=4\bar{p}-\bar{q}$ і

$\overline{b} = \overline{p} - \overline{q}$, якщо $|\overline{p}| = 1, |\overline{q}| = 4$, кут між $\overline{p}$ та $\overline{q}$ дорівнює $\pi / 3$.

3. Знайти об'єм піраміди *ABCD* і довжину висоти, опущеної з вершини *D*, якщо *A*(–1, –2, 0), *B*(5, 0, –8), *C*(2, –3, –2), *D*(3, 5, –1).

Варіант № 28

1. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний до вектора $\overrightarrow{AB}$, де *A*(–4, 2, –1), *B*(1, 3, 4), що задовольняє умову $\vec{x} \cdot \overrightarrow{AB} = 3$.

2. Знайти площу паралелограма з послідовними вершинами *A*(7, –2, 7), *B*(3, – 2, –4), *C*(2, –3, –2).

3. Знайти кут φ, який утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $\vec{a} + 5\vec{b}$ і $4\vec{a} - 2\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

Варіант № 29

1. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\overrightarrow{AB}$, де A(–5, 2, -1), B(-3, 3, -4), що задовольняє умову $\vec{x} \cdot \overrightarrow{AB} = 10$.

2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $5\overline{p} - 3\overline{q}$ і $\overline{p} + 2\overline{q}$, якщо $|\overline{p}| = |\overline{q}| = 3$, кут між $\overline{p}$ та $\overline{q}$ дорівнює $\pi / 4$.

3. Довести, що вектори $\vec{p} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{r} = 4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a} = 8\vec{i} + 5\vec{k}$ за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Варіант № 30

1. Знайти α, β, при яких вектори $\alpha\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $3\vec{i} - 7\vec{j} + \beta\vec{k}$ колінеарні.

2. Дано три сили $\overrightarrow{M} = \{1, 0, -3\}$, $\overrightarrow{N} = \{-4, 2, -5\}$, $\overrightarrow{P} = \{0, -1, 1\}$, що прикладені до однієї точки. Знайти роботу, яку виконує рівнодійна цих сил при переміщенні точки прикладання з положення *B*(1, –2, 0) в положення *C*(1, 4, 7), рухаючись прямолінійно.

3. Знайти об'єм піраміди *ABCD* і довжину висоти, опущеної з вершини *D*, якщо *A*(–4, 1, 2), *B*(2, –8, 5), *C*(3, 1, –4), *D*(0, –3, 1).

Варіант № 31

1. Довести, що вектори $\vec{p}=\vec{i},\ \vec{q}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k},\ \vec{r}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a}=\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$ за векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

2. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ та $3\vec{j}-\vec{k}$, і задовольняє умову $\vec{x}\cdot(4\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})=1$.

3. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}=5\overline{p}-2\overline{q}$ і $\overline{b}=3\overline{p}-4\overline{q}$, якщо $\left|\overline{p}\right|=2,\ \left|\overline{q}\right|=1$, кут між $\overline{p}$ та $\overline{q}$ дорівнює $\pi/6$.

Варіант № 32

1. Дано три сили $\overrightarrow{M}=\{0,2,4\}$, $\overrightarrow{N}=\{-4,-1,5\}$, $\overrightarrow{P}=\{1,-2,3\}$, що прикладені до точки $A(1, 3, -5)$. Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки $B(1, 2, 7)$.

2. Знайти об'єм піраміди $ABCD$ і довжину висоти, що опущена з вершини D, якщо $A(-1, 0, 1)$, $B(-1, 2, 3)$, $C(-2, 3, 0)$, $D(1, -4, -2)$.

3. Знайти внутрішній кут при вершині C у трикутнику ABC, де $A(4, 1, -3)$, $B(-2, 0, -5)$, $C(2, 1, -2)$.

Варіант № 33

1. Перевірити, чи лежать точки $A(1, 0, 5)$, $B(0, 2, 13)$, $C(1, -3, -3)$, D(4, 0, 13) в одній площині.

2. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ та $\vec{b}=\vec{i}-\vec{k}$, і задовольняє умову $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=4$.

3. Знайти внутрішній і зовнішній кут при вершині A у трикутнику ABC, де $A(4, 1, -3)$, $B(-2, 2, -5)$, $C(2, 0, -2)$.

Варіант № 34

1. Знайти внутрішній кут при вершині B у трикутнику ABC, де $A(5, 1, 3)$, $B(9, 2, -4)$, $C(-4, 3, 2)$.

2. Знайти площу трикутника і довжину висоти, проведену з вершини C в трикутнику ABC, де $A(-1, -2, -3)$, $B(5, -2, 4)$, $C(5, -3, 7)$.

3. Довести, що вектори $\vec{p} = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{q} = -\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{r} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ некомпланарні і знайти розклад вектора $\vec{a} = 11\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Варіант № 35

1. Знайти вектор $\vec{x}$ довжини 2, що колінеарний до вектора $\overrightarrow{AB}$, де A(0, –1, 3), B(3, 1, 4) і утворює тупий кут з віссю Oy.

2. Дано три сили $\overrightarrow{M} = \{1, -4, 3\}$, $\overrightarrow{N} = \{-2, 2, -2\}$, $\overrightarrow{P} = \{5, -1, 1\}$, що прикладені до однієї точки. Знайти роботу, яку виконує рівнодійна цих сил при переміщенні точки прикладання з положення $B(1, -2, 6)$ в положення $C(-1, 4, -3)$, рухаючись прямолінійно.

3. Знайти об'єм піраміди $ABCD$ і довжину висоти, що опущена з вершини D, якщо $A(-1, 0, 1)$, $B(-3, 2, 3)$, $C(-2, 2, 0)$, $D(1, -4, -2)$.

Варіант № 36

1. Знайти кут φ, який утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

2. Знайти площу трикутника і довжину висоти, проведену з вершини A в трикутнику ABC, де $A(0, -1, 3)$, $B(2, -2, 4)$, $C(-5, 1, -2)$.

3. Перевірити, чи лежать точки $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 2, 15)$, $C(2, -1, -6)$, D(0, 2, 13) в одній площині.

Варіант № 37

1. Знайти зовнішній кут при вершині C в трикутнику ABC, де $A(0, 1, 3)$, $B(9, 2, -4)$, $C(-4, 3, -2)$.

2. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\overline{p} - 3\overline{q}$ і $2\overline{p} + 2\overline{q}$, якщо $|\overline{p}| = 1, |\overline{q}| = 2$, кут між $\overline{p}$ та $\overline{q}$ дорівнює $\pi / 3$.

3. Знайти об'єм піраміди *ABCD* і довжину висоти, що опущена з вершини *D*, якщо *A*(3, 0, – 1), *B*(7, –3, 1), *C*(–1, 2, 4), *D*(-1, –2, –4).

Варіант № 38

1. Знайти вектор $\vec{x}$ довжини 2, що колінеарний до $\overrightarrow{AB}$, де *A*(5, –1, 3), *B*(0, 2, 4), і який утворює тупий кут з віссю Ox.

2. Знайти проєкцію вектора $3\vec{b}-\vec{a}$ на вектора $4\vec{c}+\vec{b}$, де $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{k}$. $\vec{b}=2\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+\vec{k}$.

3. Дано три послідовні вершини паралелограма *A*(-2, –3, 1), *B*(4, 0, –3), *C*(1, 3, 5). Знайти площу паралелограма *ABCD*.

Варіант № 39

1. Дано три вектори $\vec{a}=\{2,-2,2\}$, $\vec{b}=\{3,2,-3\}$, $\vec{c}=\{6,0,-1\}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умовам $\vec{x}\cdot\vec{a}=-2$, $\vec{x}\cdot\vec{b}=13$, $\vec{x}\cdot\vec{c}=13$.

2. Дано три сили $\overrightarrow{M}=\{3,-1,-1\}$, $\overrightarrow{N}=\{4,-2,-7\}$, $\overrightarrow{P}=\{-3,2,1\}$, що прикладені до точки *A*(1, 2, –5). Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодіючої цих сил відносно точки *B*(–3, 1, –5).

3. Знайти одиничний вектор $\vec{x}$, що колінеарний до $\overrightarrow{AB}$ і має протилежний з ним напрям, якщо *A*(–5, 3, 2), *B*(2, 3, 4).

Варіант № 40

1. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}=\{3,2,-5\}$, що задовольняє умову $\vec{x}\cdot\vec{a}=76$.

2. Знайти площу трикутника *ABC* і довжину висоти, проведену з вершини *B*, якщо *A*(0, 3, –3), *B*(–1, –2, –4), *C*(5, 1, 6).

3. Довести, що вектори $\vec{p}=\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{q}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{r}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ некомпланарні і знайти розклад вектора $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ за векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

8. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

Варіант № 1

1. Скласти рівняння висоти і медіани з вершини C в трикутнику ABC, де A(1, –5), B(3, –3), C(1, –2).

2. Встановити, чи перетинає пряма $2x-3y+8=0$ відрізок, який обмежений точками $A(-1;2)$ і $B(3;-4)$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1,2,4)$ перпендикулярно до площин $x-2y+4z-1=0$, $-2x+3y+z-1=0$.

4. Знайти проекцію точки $A(1,3,-2)$ на площину $3x+y-2z+4=0$. Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої площини.

5. Знайти відстань від точки $A(1,3,-2)$ до прямої $L_1: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Варіант № 2

1. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $3x-2y-6=0$, $9x-6y+1=0$.

2. Задано вершини трикутника ABC: $A(-3,0)$, $B(5,1)$, $C(-2,-1)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на медіану, яка проведена з вершини B на сторону AC.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1,5,2)$ і паралельна до прямих $L_1: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ та $L_2: \dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z}{1}$.

4. Знайти значення α, при якому пряма $L: \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+12}{\alpha}$ паралельна до площини $\Pi: x+5y-3z-1=0$.

5. Перевірити, чи паралельні прямі $L_1: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{1}$ та

$$L_2:\begin{cases}2x+3y-4z-1=0,\\ x+y-z+2=0.\end{cases}$$

Варіант № 3

1. Знайти точку перетину висот у трикутнику ABC, де $A(1,-2)$, $B(2,-4)$, $C(5,-7)$.
2. Встановити, чи лежить точка $M(1;-3)$ і початок координат по одну чи по різні сторони від прямої $2x-4y+5=0$.
3. Знайти відстань між паралельними площинами $x+4y-4z-1=0$, $x+4y-4z+7=0$.
4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{-5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}$ і точку $M_1(-1,-2,2)$.
5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1,-3,5)$ і $M_2(-2,1,-3)$ та відсікає від осі вісь аплікат відрізок $c=5$.

Варіант № 4

1. Задано вершини трикутника ABC: A(1, –2), B(5, 4), C(–2, 2). Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, яка проведена з вершини C на сторону AB.
2. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $7x-y-1=0$, $14x-2y+1=0$.
3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1,2,3)$ і $M_2(3,-1,2)$ перпендикулярно до площини $2x+3y-4z-5=0$.
4. Знайти точку перетину площини $2x-7y+3z-13=0$ і прямої, яка проходить через точки $M_1(5,1,-3)$ та $M_2(-3,-5,1)$.
5. Перевірити, чи перетинає площина $2x+y-2z+10=0$ відрізок AB, обмежений точками $A(2,-1,-4)$ і $B(-4,3;-3)$.

Варіант № 5

1. Знайти точку Q, що симетрична точці $P(2, 3)$ відносно прямої $x+6y+17=0.$

2. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $5x+2y-1=0,\ 10x+4y+5=0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-1, 2, 3)$ паралельно до площини $x-y+3z-1=0$. Знайти відстань від точки $M_0(-1, 1, 7)$ до шуканої площини.

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(7, -1, 3)$ перпендикулярно до прямої $L:\begin{cases} x+y-2z-4=0, \\ 5x+y-4z+2=0. \end{cases}$

5. Знайти об'єм куба, дві грані якого лежать на площинах $6x-18y-9z-28=0$ і $6x-18y-9z-5=0$.

Варіант № 6

1. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $5x+2y-4=0,\ 10x+4y+3=0$.

2. Скласти рівняння прямої, що проведена через точку перетину прямих $3x-y-1=0$, $x+2y-5=0$ і яка: **а**) паралельна прямій $2x+5y+3=0$; **б**) перпендикулярна до прямої $4x-3y-7=0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(-1, 2, 3)$, $B(4, -1, 0)$, $C(2, 1, -4)$.

4. Знайти проекцію точки $A(-2,-1,0)$ на пряму $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-4}{1}$. Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої прямої.

5. Перевірити, чи лежать дві прямі $L_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$ і $L_2:\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$ в одній площині.

Варіант № 7

1. Знайти проєкцію точки $P(0,\ 3)$ на пряму, що проходить через точки $A(-1, -2)$, $B(2, 0)$.

2. Встановити, чи лежить точка $M(-2; 5)$ і початок координат по одну чи по різні сторони від прямої $5x - 3y + 2 = 0$.

3. Написати канонічні рівняння прямої $L: \begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через прямі $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-3}{2}$ та $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-8}{1} = \dfrac{z-5}{0}$.

5. Знайти гострий кут φ між прямою $L: \begin{cases} x - 4y + 2z - 1 = 0, \\ 2x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$ і площиною $\Pi:\ x - 3y + 2z - 2 = 0$.

Варіант № 8

1. Знайти гострий кут між двома прямими $3x + 6y - 1 = 0$, $x + 3y + 2 = 0$.

2. Скласти рівняння прямої, що проведена через точку перетину прямих $2x - y - 5 = 0$, $3x + 2y + 3 = 0$ і яка: **а**) паралельна прямій $7x + 3y - 1 = 0$; **б**) перпендикулярна до прямої $2x - 7y - 3 = 0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1, -2, 0)$ і $M_2(4, -1, 3)$, перпендикулярно до площини $x + 5y - 4z - 12 = 0$.

4. Знайти проекцію точки $A(1,\ 2,\ -3)$ на площину $x - 2y - 4z + 12 = 0$. Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої площини.

5. Знайти відстань d між паралельними прямими $L_1: \dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-4}$ та $L_2: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-4}$.

Варіант № 9

1. Знайти точку Q, що симетрична точці $P(2, 1)$ відносно прямої $x+2y+1=0$.

2. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $2x-6y-1=0,\ 3x-9y-2=0$.

3. Знайти кут між прямими $L_1: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z}{3}$ та $L_2: \begin{cases} 2x+3y-4z-1=0, \\ x+4y-z-5=0. \end{cases}$

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$ і точку $M_1(3,-2,1)$.

5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1;1;-2)$ і $M_2(1;-3;\ 4)$ та відсікає від осі ординат відрізок $b=2$.

Варіант № 10

1. Дано $A(1, –4)$, $B(–2, –1)$, $C(–1, 3)$. Скласти рівняння прямої BC. Скласти рівняння прямої через точку A, яка: **а**) паралельна прямій BC; **б**) перпендикулярна до прямої BC.

2. Знайти точку Q, що симетрична точці $P(3, 2)$ відносно прямої $2x+3y+1=0$.

3. Знайти відстань між паралельними площинами $5x-4y-z-3=0$, $10x-8y-2z+1=0$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-3,1,7)$ і паралельна до прямих $L_1: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ та $L_2: \dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z}{1}$.

5. Знайти відстань від точки $M_0(2,-1,\ 0)$ до прямої $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+11}{-1}$.

Варіант № 11

1. Скласти рівняння висоти і медіани з вершини B у трикутнику ABC, де $A(5, –1)$, $B(2, –4)$, $C(1, 7)$.
2. Знайти гострий кут між двома прямими $2x+3y-1=0$, $5x-4y+2=0$.
3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(-3, 0, 5)$ перпендикулярно до двох площин $x+4y-7z-11=0$, $2x+z+3=0$.
4. Знайти проекцію точки $A(-3, 1, 0)$ на пряму $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{1}$.
5. Знайти значення α, при якому пряма $L: \dfrac{x+1}{-5}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+2}{\alpha}$ паралельна площині $\Pi: 5x-y-z+4=0$.

Варіант № 12

1. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x-y+10=0$, $x+2y-5=0$ і одна з його вершин $A\left(1, -2\right)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника і діагоналі, що проходить через точку A.
2. Знайти кут між висотою і медіаною, що проведені з вершини C в трикутнику ABC, де A(1, –5), B(3, –3), C(1, –2).
3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(7, 1, -4)$ паралельно до площини $x+5y-4z-12=0$. Знайти відстань від точки $M_0(2, 1, -7)$ до шуканої площини.
4. Знайти точку перетину площини $6x-y-8z-2=0$ і прямої, яка проходить через точки $M_1(5, -4, 7)$ та $M_2(3, 0, -1)$.
5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1, 3, -4)$ і $M_2(-1, 1, -5)$ та відсікає від осі абсцис відрізок $a=4$.

Варіант № 13

1. Задано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x-3y+5=0$, $2x+y+3=0$ і одна з його вершин $A(1;\,0)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього паралелограма і рівняння діагоналі, що проходить через точку A.

2. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $2x-4y-3=0,\ 5x-10y+3=0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(-1,0,3)$, $B(5,-1,1)$, $C(2,-1,-5)$.

4. Знайти проекцію точки $A\left(-1,-3,5\right)$ на площину $4x+3y-2z-6=0$. Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої площини.

5. Визначити, при якому значенні α наступні пари рівнянь $\Pi_1:\alpha x-4y+5z-30=0$, $\Pi_2:x-4y+z-1=0$ будуть визначати перпендикулярні площини.

Варіант № 14

1. Задано три послідовні вершини прямокутника $ABCD$: $A(4;\,2)$, $B(2;\,1)$ і $C(-1;\,7)$. Скласти рівняння всіх сторін цього прямокутника і рівняння діагоналі AC.

2. Встановити, чи лежить точка $M(5;-2)$ і початок координат по одну чи по різні сторони від прямої $4x-7y-3=0$.

3. Написати канонічні рівняння прямої $L:\begin{cases} x-y+4z+1=0, \\ 3x-2z+5=0. \end{cases}$

4. Знайти проекцію точки $A(4,2,-1)$ на пряму $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої прямої.

5. Перевірити, чи прямі $L_1:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ і $L_2:\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+3}{7}$ будуть мимобіжними.

Варіант № 15

1. Знайти проєкцію точки $P(8,\ 3)$ на пряму, що проходить через точки $A(1, –2)$, $B(2, 4)$.

2. З'ясувати взаємне розміщення прямих $4x+2y-1=0,\quad 6x+3y-2=0$. Знайти відстань між цими прямими.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через прямі $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{0}$ та $\frac{x}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{-3}$.

4. Перевірити, чи перпендикулярні прямі $L_1:\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$ та

$$L_1:\begin{cases}x-3y-z-6=0,\\4x-y+2z+1=0.\end{cases}$$

5. Знайти відстань d між паралельними прямими $L_1:\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{3}$ та

$L_2:\frac{x-7}{-2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{3}$.

Варіант № 16

1. Знайти точку Q, що симетрична точці $P(–2, 2)$ відносно прямої $x+y-2=0$.

2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $P(–3, 4)$ під кутом $45°$ до прямої $2x+3y-1=0$.

3. Написати канонічні рівняння прямої $L:\begin{cases}x-3y-2z-1=0,\\x+y-4z+2=0.\end{cases}$

4. Знайти точку перетину площини $2x-y+z+12=0$ і прямої, яка проходить через точки $M_1(-6,\,-4,\,-3)$ та $M_2(-8,\,0,\,3)$.

5. Знайти відстань від точки $A\left(-2;-1;\,4\right)$ до прямої $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-4}$.

Варіант № 17

1. Знайти точку перетину висот у трикутнику ABC, де $A(2, -2)$, $B(1, 0)$, $C(3, -3)$.

2. З'ясувати взаємне розміщення прямих $5x+2y-3=0$, $10x+4y+7=0$. Знайти відстань між цими прямими.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1, 5, 3)$ перпендикулярно до двох площин $3x-4y+3z-1=0$, $x+3y-8=0$.

4. Знайти точку перетину площини $x-3y+6z-1=0$ і прямої, яка проходить через точки $M_1(-1, -1, 2)$ та $M_2(-3, 0, 5)$.

5. Знайти кут між прямими $L_1: \dfrac{x+1}{-5}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ та $L_2: \begin{cases} x-3y-2z-1=0, \\ x+y-4z+2=0. \end{cases}$

Варіант № 18

1. Задано вершини трикутника ABC: $A(-4, -2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 2)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на медіану, яка проведена з вершини B на сторону AC.

2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $P(-2, 4)$ під кутом $45°$ до прямої $3x-2y-2=0$.

3. Написати канонічні рівняння прямої $L: \begin{cases} x-3y-z-6=0, \\ 4x-y+2z+1=0. \end{cases}$

4. Знайти проекцію точки $A(16, -7, -1)$ на пряму $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+1}{3}$. Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої прямої.

5. Довести, що площина $2x-2y-z+7=0$ не перетинає відрізок AB, обмежений точками $A(-1;3;4)$ і $B(-5;7;3)$.

Варіант № 19

1. Задано вершини трикутника ABC: $A(-3,-2)$, $B(1, 4)$, $C(-3, 2)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на медіану, яка проведена з вершини A на сторону BC.
2. Встановити, чи перетинає пряма $x+5y-2=0$ відрізок, який обмежений точками $A(-1;3)$ і $B(4;-2)$.
3. Знайти відстань між площинами $2x-y+2z-10=0$ і $4x-2y+4z-1=0$.
4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(2, 0, -1)$ перпендикулярно до прямої $L:\begin{cases} x-3y-2z-1=0, \\ x+y-4z+2=0. \end{cases}$
5. Знайти кут між прямими $L_1: \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+6}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$ та $L_2:\begin{cases} x-y-2z-3=0, \\ 5x+y-4z+2=0. \end{cases}$

Варіант № 20

1. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x-y-3=0$, $x+3y-11=0$ і одна з його вершин $A(-1, 2)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника та діагоналі, що проходить через точку A.
2. Знайти гострий кут між двома прямими $5x+3y-1=0$, $x-2y+2=0$.
3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-3, 0, 5)$ паралельно до площини $2x-y+3z-7=0$. Знайти відстань від точки $M_0(-1,-1, 2)$ до шуканої площини.
4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-4, 4, 1)$ і паралельна до прямих $L_1: \dfrac{x+6}{5}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ та $L_2: \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{1}$.
5. Перевірити, чи будуть прямі $L_1: \dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{-4}$ і $L_2: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$ мимобіжними.

Варіант № 21

1. Скласти рівняння прямої, що проведена через точку перетину прямих $2x+y-1=0$, $3x+2y+3=0$ і яка: **а**) паралельна прямій $4x+3y+1=0$; **б**) перпендикулярна до прямої $4x+3y+1=0$.
2. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $x-3y-2=0$, $3x-9y+1=0$.
3. Знайти кут між площинами $2x-5y+z+6=0$, $x-3y-2z+3=0$.
4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z}{-1}$ і точку $M_1\left(4,0,-2\right)$.
5. Перевірити, чи лежать дві прямі $L_1:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$ і $L_2:\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$ в одній площині.

Варіант № 22

1. Дано *A*(–1, 3), *B*(–2, –1), *C*(–2, 1). Скласти рівняння прямої *AB*. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку *C* і : **а**) паралельна прямій *AB*; **б**) перпендикулярна до прямої *AB*.
2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку *P*(1, –2) під кутом $45°$ до прямої $3x-2y-2=0$.
3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1,0,3)$ і $M_2(-4,-1,2)$, перпендикулярно до площини $7x-4y-2z-8=0$.
4. Знайти точку перетину площини $4x+7y-z+9=0$ і прямої, яка проходить через точки $M_1(4,-3,-5)$ та $M_2(-2,-1,3)$.
5. Визначити, при якому значенні α наступні пари рівнянь $П_1: 5x-y+\alpha z-2=0$, $П_2: \alpha x+y+3z-1=0$ будуть визначати перпендикулярні площини.

Варіант № 23

1. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $x+4y-8=0$, $2x+8y-7=0$.

2. Задано вершини трикутника ABC: A(2, –5), B(–4, –3), C(–2, 2). Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, яка проведена з вершини C на сторону AB.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1,-3,3)$ паралельно до площини $3x-4y+3z-1=0$. Знайти відстань від точки $M_0(4,1,5)$ до шуканої площини.

4. Знайти проекцію точки $A\left(-1,-3,4\right)$ на площину $x+5y-2z-6=0$. Знайти точку *B* симетричну точці *A* відносно заданої площини.

5. Знайти значення α, при якому пряма $L:\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+7}{\alpha}=\dfrac{z-2}{-3}$ паралельна до площини $\Pi:\ 7x+3y+5z-4=0$.

Варіант № 24

1. Скласти рівняння висоти і медіани з вершини *A* у трикутнику *ABC*, де *A*(1, –2), *B*(1, 3), *C*(5, –7).

2. Встановити, чи перетинає пряма $3x+2y+4=0$ відрізок, який обмежений точками $A(1;2)$ і $B(3;-1)$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(6,2,-4)$, $B(0,-1,4)$, $C(-2,1,-1)$.

4. Знайти проекцію точки $A(-2,-7,10)$ на пряму $\dfrac{x-5}{-1}=\dfrac{y+10}{4}=\dfrac{z+2}{-6}$. Знайти точку *B* симетричну точці *A* відносно заданої прямої.

5. Визначити, при якому значенні α наступні пари рівнянь $\Pi_1: x+\alpha y-4z-5=0$, $\Pi_2: 3x+5y+\alpha z-1=0$ будуть визначати перпендикулярні площини.

Варіант № 25

1. Знайти гострий кут між двома прямими $x+6y-5=0$, $2x+7y-2=0$.

2. Задано вершини трикутника ABC: A(2, –5), B(–1, –3), C(–4, –1). Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, яка проведена з вершини B на сторону AC.

3. Знайти відстань між паралельними площинами $x+2y-4z+3=0$, $2x+4y-8z-1=0$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+6}{-2}=\frac{z-3}{1}$ і точку $M_1(-3,-1,0)$.

5. Довести, що площина $2x-y-2z-7=0$ не перетинає відрізок AB, обмежений точками $A(1;3;-1)$ і $B(5;-2;3)$.

Варіант № 26

1. Задано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $3x+y+5=0$, $x-4y+6=0$ і одна з його вершин A(1; –3). Скласти рівняння двох інших сторін цього паралелограма і рівняння діагоналі, що проходить через точку A.

2. Встановити, чи лежить точка $M(2;-3)$ і початок координат по одну чи по різні сторони від прямої $3x-7y+1=0$.

3. Написати канонічні рівняння прямої $L:\begin{cases}2x-y+5z+1=0,\\5x+y-4z+2=0.\end{cases}$

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(4,-5,3)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+7}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{4}$.

5. Знайти відстань d між паралельними прямими $L_1:\frac{x\_1}{-3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{3}$ та $L_2:\frac{x-7}{-3}=\frac{y}{5}=\frac{z+4}{3}$.

Варіант № 27

1. Задано вершини трикутника ABC A(1, –2), B(6, 4), C(–2, 2). Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A на сторону BC.

2. З'ясувати взаємне розміщення прямих $4x-8y-1=0$, $3x-6y+1=0$. Знайти відстань між цими прямими.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(6, 2, -4)$ перпендикулярно до площин $5x-4y-z-3=0$, $x-y-4z+3=0$.

4. Знайти точку перетину площини $5x+2y-z-2=0$ і прямої, яка проходить через точки $M_1(2, 3, -3)$ та $M_2(0, -7, 1)$.

5. Знайти гострий кут між прямою $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ і площиною $x+y-3z-7=0$.

Варіант № 28

1. Скласти рівняння висоти і медіани з вершини B у трикутнику ABC, де A(5, –1), B(2, –4), C(1, 7).

2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $P(-5, 1)$ під кутом $45°$ до прямої $3x+4y-2=0$.

3. Перевірити, чи паралельні прямі $L_1: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{2}$ та

$$L_2: \begin{cases} 2x+y-3z+4=0, \\ 2x-3y-3z-1=0. \end{cases}$$

4. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ і площини $x-3y-5z+4=0.$

5. Визначити, при яких значеннях α, β наступні пари рівнянь $\Pi_1: \alpha x+4y-z-1=0$, $\Pi_2: x-3y-\beta z-11=0$ будуть визначати паралельні площини.

Варіант № 29

1. Дано рівняння двох сторін прямокутника $4x+y-11=0$, $x-4y+10=0$ і одна з його вершин $A\left(-1,\,-2\right)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника і рівняння діагоналі, що проходить через точку A.

2. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $3x-2y-1=0,$ $6x-4y-5=0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1,5,3)$ і $M_2(3,0,2)$ перпендикулярно до площини $4x+3y-2z-6=0$.

4. Знайти проекцію точки $A\left(8,\,-6,\;3\right)$ на площину $5x-8y+z-1=0$.

5. Перевірити, чи перетинає площина $x-2y-2z+6=0$ перетинає відрізок AB, обмежений точками $A\left(2;-5;1\right)$ і $B\left(5;-1;-3\right)$.

Варіант № 30

1. Дано A(1, –4), B(–2, –1), C (–1, 3). Скласти рівняння прямої BC. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку A і: **а**) паралельна прямій BC; **б**) перпендикулярна до прямої BC.

2. З’ясувати взаємне розміщення прямих $2x+4y-5=0,$ $3x+6y+2=0$. Знайти відстань між цими прямими.

3. Перевірити, чи перпендикулярні прямі $L_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{3}$ та

$$L_2:\begin{cases} x-y-3z-3=0, \\ 4x-2y+z+1=0. \end{cases}$$

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-6}{0}=\dfrac{z-3}{-5}$ і точку $M_1\left(5,-1,1\right)$.

5. Знайти кут між площинами $x-3y-z-6=0$, $4x-y+9z+1=0$.

Варіант № 31

1. Дано вершини трикутника ABC: $A(1, -2)$, $B(2, 4)$, $C(5, -7)$. Скласти рівняння прямої BC. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку A і: **а**) паралельна прямій ВС; **б**) перпендикулярна до прямої ВС.

2. Знайти гострий кут між двома прямими $5x+4y-1=0$, $3x-2y+5=0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-3, 0, 5)$ і $M_2(1,-1,-2)$, та перпендикулярна до площини $2x-y+3z-7=0$.

4. Знайти точку перетину площини $x-2y-5z-10=0$ і прямої, яка проходить через точки $M_1(2, 2, -7)$ та $M_2(0, -6, 5)$.

5. Перевірити, чи будуть прямі $L_1: \dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{5}$ і $L_2: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{-3}$ мимобіжними.

Варіант № 32

1. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $2x+y-5=0$, $4x+2y-1=0$.

2. Знайти точку Q, що симетрична точці $P(3, 2)$ відносно прямої $x+2y+3=0$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1, -2, 0)$ перпендикулярно до двох площин $6x+y-4z-3=0$, $7x-2y+4z-3=0$.

4. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $A\left(-5, 13, -2\right)$ паралельно до заданої прямої $L_1: \begin{cases} x-3y-z-6=0, \\ 2x-y+3z-1=0. \end{cases}$

5. Перевірити, чи лежить пряма $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+8}{1}=\dfrac{z-1}{4}$ на площині $2x+2y+z+9=0$.

Варіант № 33

1. Знайти гострий кут між двома прямими $x - y - 5 = 0$, $x + 4y - 2 = 0$.

2. Скласти рівняння прямої, що проведена через точку перетину прямих $3x - 2y - 4 = 0$, $x + 3y - 5 = 0$ і яка: **а**) паралельна прямій $7x + 2y - 3 = 0$; **б**) перпендикулярна до прямої $4x - y - 7 = 0$.

3. .Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-2, 2, 4)$ паралельно до площини $2x - 3y + z + 1 = 0$. Знайти відстань від точки $M_0(5, -1, -2)$ до шуканої площини.

4. Знайти проєкцію точки $A(1, 0, -3)$ на пряму $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z-3}{-1}$. Знайти точку *B* симетричну точці *A* відносно заданої прямої.

5. Знайти гострий кут φ між прямою $L: \begin{cases} x - 3y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ і площиною $\Pi:\ 3x - 4y + z - 2 = 0$.

Варіант № 34

1. Скласти рівняння висоти і медіани з вершини *A* в трикутнику *ABC*, де $A(3, -4)$, $B(2, 5)$, $C(0, -1)$.

2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $P(1, -3)$ під кутом $45°$ до прямої $5x - 2y + 1 = 0$.

3. Знайти кут між прямими $L_1: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-6}{-3} = \dfrac{z}{-1}$ та $L_2: \begin{cases} 2x + y - 4z + 1 = 0, \\ 3x - 2z + 1 = 0. \end{cases}$

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-1, -2, 7)$ перпендикулярно до прямої $\dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y+8}{-2} = \dfrac{z-1}{4}$.

5. Знайти значення α, при якому пряма $L: \dfrac{x+2}{\alpha} = \dfrac{y+5}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$ паралельна площині $\Pi:\ x + 3y + \alpha z - 4 = 0$.

Варіант № 35

1. Знайти відстань між паралельними прямими $x+2y-4=0$, $2x+4y-1=0$.

2. Дано $A(1, 4)$, $B(-2, -1)$, $C(-5, 2)$. Скласти рівняння прямої AB. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку C і : **а**) паралельна прямій AB; **б**) перпендикулярна до прямої AB.

3. Перевірити, чи паралельні прямі $L_1: \dfrac{x}{-5} = \dfrac{y-2}{17} = \dfrac{z}{-2}$ та $L_2: \begin{cases} 2x-5z+1=0, \\ 5x+y-4z+2=0. \end{cases}$

4. Знайти проєкцію точки $A\left(4, -5, 0\right)$ на площину $3x-4y-2z-3=0$. Знайти точку B симетричну точці A відносно заданої площини.

5. Довести, що дві прямі $L_1: \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$ і $L_2: \dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+5}{-7}$ лежать в одній площині.

Варіант № 36

1. Задано вершини трикутника ABC $A(-3, -2)$, $B(1, 4)$, $C(-3, 4)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, яка проведена з вершини B на сторону AC.

2. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $2x+6y-5=0$, $3x+9y+2=0$.

3. Написати канонічні рівняння прямої $L: \begin{cases} 2x+y-3z+4=0, \\ 2x-3y-3z-1=0. \end{cases}$

4. Знайти точку перетину площини $x-2y+3z+9=0$ і прямої, яка проходить через точки $M_1(5, 0, 1)$ та $M_2(4, 2, -3)$.

5. Знайти кут між прямими $L_1: \dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{2}$ та $L_2: \begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x-2y-3=0. \end{cases}$

Варіант № 37

1. Знайти проєкцію точки $P(1, 5)$ на пряму, що проходить через точки $A(1, 0)$, $B(-1, -4)$.

2. Встановити, чи лежить точка $M(5; -3)$ і початок координат по одну чи по різні сторони від прямої $7x - 2y + 4 = 0$.

3. Знайти відстань між паралельними площинами $6x + y - 4z - 3 = 0$, $6x + y - 4z + 4 = 0$.

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-2, -1, 3)$ перпендикулярно до прямої $L: \begin{cases} x - y - 2z - 4 = 0, \\ 2x + y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$

5. Скласти канонічні і параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M(8, 1, -2)$ перпендикулярно до площини, яка проходить через точки $A(-1, 2, 0)$, $B(1, -1, 3)$, $C(2, 0, -2)$.

Варіант № 38

1. Скласти рівняння прямої, що проведена через точку перетину прямих $x - 2y + 3 = 0$, $3x - 4y + 5 = 0$ і яка: **а**) паралельна прямій $2x - 5y - 2 = 0$; **б**) перпендикулярна до прямої $2x - 5y - 2 = 0$.

2. З'ясувати взаємне розміщення прямих $4x - 3y - 2 = 0$, $8x - 6y + 1 = 0$. Знайти відстань між цими прямими.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(-1, -2, 0)$, $B(-4, -1, 2)$, $C(2, 1, -4)$.

4. Знайти проєкцію точки $A(3, -8, 1)$ на площину $5x - 8y + z + 10 = 0$. Знайти точку *B* симетричну точці *A* відносно заданої площини.

5. Перевірити, чи будуть прямі $L_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$ і $L_2: \dfrac{x-5}{7} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+2}{2}$ мимобіжними.

Варіант № 39

1. Знайти точку Q, що симетрична точці P(1, 3) відносно прямої $2x+y-10=0$.

2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2, 1)$ під кутом $45°$ до прямої $6x+2y-1=0$.

3. Знайти кут між прямими $L_1: \dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ та $L_2: \begin{cases} x-y+z-6=0, \\ 5x-2y-3z+5=0. \end{cases}$

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{x-3}{-6}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ і точку $M_1(5, -3, 0)$.

5. Скласти рівняння площини Π, що проходить через точку $M_1(2, -2, 4)$ перпендикулярно до прямої: $L: \begin{cases} x-2y+z-1=0, \\ 4x-z-2=0. \end{cases}$

Варіант № 40

1. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $4x+5y+20=0$, $4x+5y-3=0$.

2. Скласти рівняння висоти і медіани з вершини B у трикутнику ABC, де $A(5, -1)$, $B(2, -4)$, $C(3, 3)$.

3. Перевірити, чи перпендикулярні прямі $L_1: \dfrac{x-5}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-4}$ та $L_2: \begin{cases} 4x-3y-z-1=0, \\ x-2y+4z+2=0. \end{cases}$

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через прямі $\dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-4}{-2}$ та $\dfrac{x+1}{-6}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

5. Визначити, при яких значеннях α, β наступні пари рівнянь $\Pi_1: \alpha x-y+z-1=0$, $\Pi_2: 2x+\beta y+5z-12=0$ будуть визначати паралельні площини.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика: Навч. посібн. — К.: А.С.К., 2006. — 648 с.: іл.

2. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. Збірник задач / Київ: А.С.К., 2005. — 480 с.

3. Вища математика: Підручник / *Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.*; за редакцією Шинкарика М.І**.** — Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003. — 480с. — ISBN 966-7946-15-0.

4. *Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Том 1. Навч. посіб. — К.: Книги України ЛТД, 2010. — 470 с. ISBN 978-966-2331-05-9.

5. *Клепко В.Ю., Голець В.Л.* Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. — К.: Центр учбової літератури, 2009. — 594 с. ISBN 978-966-364-928-3.

6. Лінійна алгебра. Збірник. Математика в технічному університеті. Том 1 / *І.В. Алексєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова*. — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — 496 с. — Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/24338/1/MTU1.pdf

7. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри. Конспект лекцій. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / *О.В. Кузьма, О.В. Суліма, Т.О. Рудик, Н.П. Селезньова та інш.*; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 1,50 Мбайт). — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — 127 с. — Режим доступу: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42310