

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ПІДСТАНОВОК

Д.М. БУШЕВ

Питання про розв'язування функціональних рівнянь — одне з найстаріших у математиці.

Диференціальні та інтегральні рівняння вивчаються у відповідних курсах вищої математики. Функціональним рівнянням, які не є диференціальними та інтегральними, приділяється значно менше уваги, як у курсі математичного аналізу, так і в курсі функціонального аналізу, хоча ці рівняння часто пропонуються для розв'язування на математичних змаганнях: олімпіадах, турнірах, конкурсах.

Метод підстановок — найбільш поширений і найбільш дієвий спосіб розв'язування функціональних рівнянь. Він дає змогу розв'язування функціональних рівнянь звести до розв'язування рівнянь відомих типів, зокрема алгебраїчних рівнянь та їх систем. Однак конкретних рекомендацій, коли і як його можна використати, не існує.

При розв'язуванні багатьох функціональних рівнянь методом підстановок розв'язки спочатку вгадують, а потім підбирають потрібні підстановки для їх одержання. В деяких випадках, навіть вгадавши розв'язки, зовсім непросто підбирати потрібні підстановки щоб їх одержати. Успішне розв'язування одного рівняння, аж ніяк не гарантує успіху при розв'язуванні іншого. Наша робота — спроба змінити ситуацію хоча б для деяких функціональних рівнянь (зрозуміло, що не для всіх).

Суть методу підстановок полягає у виборі потрібних підстановок для розв'язування функціонального рівняння. Оскільки алгоритми вибору потрібних підстановок для розв'язування багатьох функціональних рівнянь невідомі, розглянемо рівняння, за загальним виглядом яких можна записати множину всіх його розв'язків.

Встановлено, що до таких рівнянь відносяться функціональні рівняння виду $a(u, v)f^n(u) + b(u, v)f^n(v) = 0$ і $a(u, v)f^n(u) + b(u, v)f^n(v) = g(u, v)$, де $a(u, v)$, $b(u, v)$, $g(u, v)$ — довільні задані дійсні функції від двох дійсних змінних, $f(t)$ — невідомі функції та розв'язки цих рівнянь в загальному випадку, на нашу думку, пропонуються вперше.

Позначимо через $M_0(f) = \{f : a(u, v)f^n(u) + b(u, v)f^n(v) = 0\}$ множину всіх розв'язків однорідного функціонального рівняння.

В [2] була сформульована теорема 1.

Наслідок 1. Для множини розв'язків функціонального рівняння

$$\phi^m(v)f^n(u) - \phi^n(u)f^m(v) \equiv 0$$

справедливі твердження (a)–(d), тобто $(\phi^m(v)f^n(u) - \phi^n(u)f^m(v) \equiv 0) \wedge (M_0(f) = \{f : \phi^m(v)f^n(u) - \phi^n(u)f^m(v) \equiv 0\}) \Rightarrow (a)–(d)$.

- a. $(n - m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0, f_1(t) = \phi(t)\})$.
- б. $(n = 2s - 1 + m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0, f_1(t) = \phi(t), f_2(t) = -\phi(t)\})$.
- в. $(n = 2s + m = 2l) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0\} \cup M_0^\infty = \{f(t) \equiv 0\} \cup \{f_\xi(t) \equiv 0, t \in E, \equiv \{-\phi(t), t \in D(\phi)\}E : (\forall E \subseteq D(\phi))\})$.
- г. $(n - m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv K\phi(t) : K \in \mathbb{R}\})$.
- д. $(n = m = 2s) \Rightarrow M_0(f) = \{Kf_\xi(t) = \{K\phi(t), t \in E, -K\phi(t), t \in D(\phi) \setminus E\} : (\forall E \subseteq D(\phi))(K \in \mathbb{R})\}$.

Наведемо приклад застосування цього наслідку. Розв'язати функціональні рівняння.

Приклад 1. $v^n f^n(u) - u^n f^n(v) \equiv 0$. Оскільки $\phi(t) \equiv t$, то за наслідком 1 маємо:

- a. $(n - m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0, f_1(t) \equiv t\})$.
- б. $(n = 2s - 1 + m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0, f_1(t) \equiv t, f_2(t) \equiv -t\})$.
- в. $(n = 2s + m = 2l) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0\} \cup M_0^\infty = (M_0^\infty = \{f(t) \equiv 0, f_\xi(t) = t, t \in E, -t, t \in \mathbb{R} \setminus E : (\forall E \subseteq \mathbb{R})\}))$.
- г. $(n - m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv Kt : K \in \mathbb{R}\})$.
- д. $(n = m = 2s) \Rightarrow (M_0(f) = \{Kf_\xi(t) = \{Kt, t \in E, -Kt, t \in \mathbb{R} \setminus E\} : (\forall E \subseteq \mathbb{R})(K \in \mathbb{R})\})$.

Матеріал наших досліджень покликаний допомогти вчителю у проведенні позакласної роботи з учнями, які бажають досконало, поглиблено і всебічно вивчати шкільну математику, допомогти розширити їх математичний кругозір, підготувати до участі в математичних змаганнях. Він буде корисний студентам, учням, які захоплюються математикою, а також учителям закладів загальної середньої освіти, керівникам гуртків і факультативів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Федак І. В. *Функціональні рівняння: Навчальний посібник. (Видання друге).* — Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. — 144 с.
- [2] Бушев Д. М. *Знаходження формул для розв'язків деяких класів функціональних рівнянь.* — Київ: XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Тези доповідей., 2023. — С. 221,222.

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: bushev-d@ukr.net