Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Вища математика

Вища математика. Границі, неперервність : практикум і збірник задач до розрахункової роботи.

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Укладач: В. Ф. Зражевська

Електронне мережеве навчальне видання

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2024

УДК 517 (076)

З89

Укладач: *Зражевська Віра Федорівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *Александрович І.М.*, канд. фіз.-мат. наук, доц., доцент кафедри обчислювальної математики КНУ ім. Тараса Шевченка

Відповідальний редактор *Дудкін М. Є.,* д-р фіз.-мат. наук, проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 09.05.2024 р.)
за поданням вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 6 від 17.04.2024 р.)

Вища математика. Границі, неперервність : практикум і збірник задач до розрахункової роботи. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра спец. 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В. Ф. Зражевська. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІім. Ігоря Сікорського, 2024. – 61 с.

Навчальний посібник розрахований для студентів закладів вищої освіти, які вивчають дисципліну «Вища математика» і охоплює теми, пов'язані з обчисленням границі числової послідовності, границі функції, дослідження функцій на неперервність. У посібнику стисло наведено основні теоретичні відомості, які містять основні поняття, означення, властивості і формулювання теорем, наведено розв'язання основних типових задач. Також посібник містить приклади для самостійного розв'язання і завдання розрахункової роботи.

Посібник може бути корисним при самостійній роботі студентів під час вивчення розділу курсу вищої математики “ Вступ до математичного аналізу ”, а також може бути використаний викладачами при проведенні практичних занять і контрольних заходів.

УДК 517(076)

Реєстр. № НП 23/24-323. Обсяг 2,7 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

Зміст

Вступ

Мета вивчення дисципліни «Вища математика» – засвоєння студентами базових математичних знань, розвинення у студентів мислення; отримання навичок математичного дослідження для опрацювання математичних моделей, пов'язаних з подальшою практичною діяльністю фахівця.

Теорія границь є теоретичною основою для подальшого вивчення інших розділів вищої математики та таких фундаментальних курсів, які викладаються на спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка як «Теоретичні основи електротехніки», «Технічна механіка», «Загальна фізика», «Інформаційні системи і технології в енергетиці», «Обчислювальна техніка та програмування». «Математичні задачі енергетики» та інші.

У посібнику розглядаються наступні теми: обчислення границь числової послідовності, знаходження границь функції неперервного аргументу, теорія нескінченно малих функцій, неперервність та класифікація точок розриву функції. За вказаними темами викладено основні теоретичні відомості та наведено приклади розв'язань типових задач, що дає можливість студентам розібратися у відповідній темі. Для більш глибокого засвоєння матеріалу в кінці кожної теми пропонуються приклади для самостійної роботи.

Програмою навчальної дисципліни «Вища математика. Частина 1» передбачено індивідуальне завдання у вигляді виконання розрахункової роботи. В посібнику запропоновано 31 варіант індивідуальних завдань, які охоплюють весь матеріал зазначених тем.

Посібник може бути корисним при самостійній роботі студентів під час вивчення вище зазначених розділів курсу вищої математики, а також може бути використаний викладачами при проведенні практичних занять і контрольних заходів для очної, заочної та дистанційної форм навчання.

1. Границя числової послідовності

1.1. Основні означення і теореми. Приклади обчислення границь

Означення. Функцією називається така відповідність між множинами D і E, коли кожному елементу $x \in D$ відповідає тільки один елемент $y \in E$. При цьому $y = f(x)$, x – незалежна змінна (аргумент), y – залежна змінна (значення функції), D – область визначення функції, E – множина значень функції. Функцію $y = f(x)$ називають обмеженою в області D, якщо існує таке число $c > 0$, що для $x \in D$ виконується $|f(x)| \le c$.

Означення Числова функція $y = f(n)$, визначена на множині натуральних чисел, називається **числовою послідовністю**, або просто послідовністю.

Поклавши $y = x_n$, послідовність позначають через $\{x_n\}, n \in N$. Значення $x_1 = f(1), x_2 = f(2), ..., x_n = f(n), ...$ називаються **членами послідовності**. Послідовність вважається заданою, якщо задано n-й член (загальний член) послідовності.

Приклад. Нехай $x_n = \dfrac{1}{3n+1}$, Тоді, поклавши $n = 1,2,3,4$ у формулі загального члена послідовності, маємо:

$x_1 = \dfrac{1}{3 \cdot 1 + 1} = \dfrac{1}{4}; x_2 = \dfrac{1}{3 \cdot 2 + 1} = \dfrac{1}{7}; x_3 = \dfrac{1}{3 \cdot 3 + 1} = \dfrac{1}{10}; x_4 = \dfrac{1}{3 \cdot 4 + 1} = \dfrac{1}{13} \dots$. Отже, числа $\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{7}; \dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{13} \dots$ ... утворюють послідовність, $x_n = \dfrac{1}{3n+1}$ – загальний член, закон, згідно з яким її побудовано.

Приклад . Записати формулу загального члена послідовностей:

$-\frac{1}{3};\frac{3}{5};-\frac{5}{7};\frac{7}{9};-\frac{9}{11};...$

Розв'язання. Оскільки $x_1=-\frac{1}{3};x_2=\frac{3}{5};x_3=-\frac{5}{7};x_4=\frac{7}{9}$**,** то помічаємо, що чисельники і знаменники є непарними числами, крім того, знаки дробів чергуються. Тоді загальний член послідовності має вигляд $x_n=(-1)^n\frac{2n-1}{2n+1}$.

Послідовність називається **обмеженою**, якщо існує таке число $M>0$, що для будь-якого $n\in N$ виконується нерівність $|x_n|\le M$. В іншому випадку послідовність називається необмеженою.

Означення 1. Число a називається **границею послідовності** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке натуральне число $N(\varepsilon)$ (залежне від ε) , що для всіх номерів $n>N$ виконується нерівність:

$$|x_n-a|<\varepsilon. \tag{1}$$

Позначають границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, або $x_n\to a$ при $n\to\infty$.

Послідовність, яка має скінченну границю, називають **збіжною**, в іншому випадку – **розбіжною.** Кожна збіжна послідовність має єдину границю.

Послідовність $\{x_n\}$ називається **нескінченно малою**, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

Приклад. Користуючись означенням границі, довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$**.**

Розв'язання. Розглядаємо послідовність із загальним членом $x_n=\frac{1}{n+1}$.

Треба показати, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке натуральне число N, що для всіх номерів $n>N$ виконується нерівність $\left|\frac{1}{n+1}-0\right|<\varepsilon$: $\left|\frac{1}{n+1}\right|<\varepsilon\Rightarrow$

(враховуємо, що $n \in N$, тобто $n+1>0$) $n+1>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1$. Візьмемо за N цілу частину числа $\frac{1}{\varepsilon}-1$: $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$. Тоді для всіх номерів $n>N$ виконується нерівність (1), і за означенням маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

Із значення границі можна зробити висновок, що послідовність $x_n=\frac{1}{n+1}$ є нескінченно малою.

Основні властивості нескінченно малих послідовностей.

1. Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

2. Добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

3. Добуток обмеженої величини на нескінченно малу послідовність є нескінченно малою послідовністю.

Приклад. Обчислити границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n+1}$.

Розв'язання. Оскільки $|\sin n|\le 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, то маємо добуток нескінченно малої послідовності на обмежену. Тоді послідовність $\sin n\cdot\frac{1}{n+1}$ є нескінченно малою, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n+1}=0.$

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ має **нескінченну границю** якщо для будь-якого $A>0$ існує таке натуральне число N, що для всіх номерів $n>N$ виконується нерівність:

$$|x_n| > A. \tag{2}$$

Це записують як $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ У цьому випадку послідовність $\{x_n\}$ називається **нескінченно великою**.

Приклад. Користуючись означенням границі, довести, що $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Розв'язання. Зафіксуємо довільне $A > 0$. Нерівність $n^2 > A$ виконується як тільки $n > \sqrt{A}$. Тому, якщо покласти $N = \left[\sqrt{A}\right]$, то для всіх номерів $n > N$ виконається нерівність $n^2 > A$ що за означенням (2) і означає, що $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Теорема 1. Арифметичні дії над збіжними послідовностями. Якщо існують границі $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b$, то:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty}(Cx_n) = C \lim_{n\to\infty} x_{nn} = C \cdot a,\ \ C = const$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b},\ b \neq 0$$

Приклад. Обчислити границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + \frac{1}{n}}{5 - \frac{1}{n^2}}$.

Розв’язання. Оскільки послідовності у чисельнику і знаменнику є збіжними, то можемо скористатися Теоремою 1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{5-\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(5-\frac{1}{n^2})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0}{5-0}=\frac{2}{5}.$$

Якщо умови теореми 1 не виконуються, виникають так звані невизначеності. Щоб позбутися невизначеності у функції потрібно провести перетворення. Операцію знаходження границі у цих випадках називають **розкриттям невизначеності**.

Приклад. Обчислити границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{n^2+3n+3}$.

Розв’язання. Послідовності у чисельнику і знаменнику є нескінченно великими, тобто маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для розкриття невизначеностей цього типу потрібно чисельник і знаменник поділити на старший степінь змінної; В даному прикладі ділимо чисельник і знаменник на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{n^2+3n+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}=$$

(враховуємо, що $\frac{2}{n}\to 0, \frac{3}{n}\to 0, \frac{1}{n^2}\to 0, \frac{3}{n^2}\to 0$ при $n\to\infty$) $=\frac{3-0+0}{1+0+0}=3$.

Приклад. Обчислити границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)(5n+2)}{\sqrt{n^8+3n^2+3}}$.

Розв’язання.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)(5n+2)}{\sqrt{n^4+3n^2+3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3-\frac{1}{n})(5+\frac{2}{n})}{n^2\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3-\frac{1}{n})(5+\frac{2}{n})}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^4}}}=\frac{15}{1}=15.$$

Приклад. Обчислити границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n+1}$.

Розв’язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$ (поділимо чисельник і знаменник на степінь з найбільшою основою 3^n) $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{3^n}+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}}=$ ($\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0, \frac{1}{3^n}\to 0$ при $n\to\infty$) $=\frac{0}{1}=0$

Приклад. Обчислити границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

Розв’язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$(розпишемо факторіали, користуючись реккурентними формулами: $(2n+2)!=(2n+1)!(2n+2)$; $(2n+3)!=(2n+1)!(2n+2)(2n+3)$) $=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+1)!(2n+2)}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!(1+2n+2)}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(2n+2)(2n+3)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+2}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Приклад. Обчислити границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^{n-1}}}$.

Розв’язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^{n-1}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$ (в чисельник і знаменнику маємо суму перших n членів геометричної прогресії, яку обчислюємо за формулою: $S=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$. Для чисельника

$b_1 = 1; q = \dfrac{1}{3} \Rightarrow S = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right).$ Аналогічно для знаменника

$b_1 = 1; q = \dfrac{1}{5} \Rightarrow S = \dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1}{\frac{1}{5} - 1} = \dfrac{5}{4}\left(1 - \dfrac{1}{5^n}\right)$) $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{\frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)} =$ ($\dfrac{1}{3^n} \to 0; \dfrac{1}{5^n} \to 0$ при $n \to \infty$) $= \dfrac{6}{5}$.

Приклад. Обчислити границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1})$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $[\infty - \infty]$. Щоб розкрити таку невизначеність під знаком границі помножимо і поділимо вираз на спряжений до нього і скористаємось формулою різниці квадратів $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}) = [\infty - \infty] = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1})(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1})}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3-(2n+1)}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0.$$

У випадку, коли при обчисленні границь виникає невизначеність 1^∞ , корисним може бути наступна границя числової послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

де ірраціональне число $e \approx 2{,}7183...$.

Приклад. Обчислити границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+1}+\frac{2}{2n+1}\right)^{n+2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{n+2}=[1^\infty]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)^{n+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)^{n+\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}=e\cdot 1=e.$$

1.2. Завдання для самостійної роботи

Приклад 1.1. Записати перші чотири члени послідовності, заданої формулою загального члена a) $x_n=\dfrac{2^n}{3n+1}$ b) $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{3n+1}$ c) $x_n=\dfrac{(-1)^n}{(3n+1)!}$

Приклад 1.2. Записати формулу загального члена послідовностей:

a) $1;\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{7};\frac{1}{9};...$ b) $-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};\frac{1}{16};-\frac{1}{32};...$ c) $1;0;1;0;1;...$

Приклад 1.3. Користуючись означенням границі, довести, що при $n\to\infty$ послідовність $\frac{2}{3};\frac{4}{5};\frac{6}{7};\frac{8}{9};...$ має границю, рівну 1.

Приклад 1.4. Користуючись означенням границі, довести, що

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+2)=\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n=\infty$

Приклад 1.5 . Користуючись означенням границі, довести, що

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{n+1}=3$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{4n+1}=\dfrac{1}{2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}=0$

Приклад 1.6. Обчислити границі:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-2n+1}{(n^2+3n+3)(2n+1)}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+n+1}}{2n+1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+n+1}}{2n+\sqrt{n^2+4}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n+1}{2^n+2}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n+3^n}{4^{n+1}+3^{n+1}}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n+1)!}$ g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+n}{(3n-1)(2n+2)}$

Приклад 1.7. Обчислити границі:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3}-n)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2+1}}{n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n(n-1)})$

Приклад 1.8. Обчислити границі:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{2n+2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n}\right)^{7n}$

2. Границя функції неперервного аргументу

2.1 Основні означення і теореми. Приклади обчислення границь

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення. Число A називають **границею функції** $y=f(x)$ **у точці** x_0 (при $x\to x_0$) якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta>0$, що при всіх x, які задовольняють нерівність $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Позначають границю функції $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ коли $x \to x_0$. Отже, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ означає, що для всіх точок $x \neq x_0$, достатньо близьких до значення x_0, відповідне значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A.

Приклад. Використовуючи означення границі функції, довести, що $\lim\limits_{x \to 2}(2x+5) = 9$.

Розв'язання. Доведемо, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що як тільки $0 < |x-2| < \delta$, виконується нерівність $|(2x+5)-9| < \varepsilon$, тобто $|2x-4| = |2(x-2)| < \varepsilon$, $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отже, якщо взяти $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, то для всіх x, які задовольняють умову $|x-2| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, виконується нерівність $|(2x+5)-9| < \varepsilon$. Тоді за означенням границі маємо $\lim\limits_{x \to 2}(2x+5) = 9$.

В цьому означенні границі x прямує до x_0 довільним чином, залишаючись меншим за x_0 (зліва) чи більшим (справа). Якщо спосіб прямування x до x_0 впливає на значення границі функції, розглядають односторонні границі.

Означення. Число A_1 називають **лівосторонньою** границею функції $f(x)$ у точці x_0 (границею $f(x)$ зліва), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Позначають лівосторонню границю $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$.

Означення. Число A_2 називають **правосторонньою** границею функції $f(x)$ у точці x_0 (границею $f(x)$ справа), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

Позначають правосторонню границю $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$.

Лівостороння і правостороння границі функції називаються **односторонніми** границями.

Твердження 1. Для того, щоб існувала границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, необхідно й достатньо, щоб існували обидві односторонні границі функції в цій точці і виконувалась умова $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.

Приклад. Обчислити односторонні границі $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{|x|}{x}$, $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{|x|}{x}$. Чи існує $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$?

Розв'язання. Користуємось означенням модуля: $|x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0 \\ -x. \ x < 0 \end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{|x|}{x} =$ (при прямуванні до 0 справа x залишається додатнім, тому $|x| = x$) $= \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to+-0}\dfrac{|x|}{x} =$ (при прямуванні до 0 зліва x залишається від'ємним, тому $|x| = -x$) $= \lim\limits_{x\to-0}\dfrac{-x}{x} = -1$. Оскільки односторонні границі різні, то границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ не існує.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty,+\infty)$.

Означення. Число A називають **границею функції** $f(x)$ при $x\to\infty$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число

$M > 0$ (яке залежить від ε), що для всіх x, які задовольняють умову $|x| > M$, буде виконуватись нерівність: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Це записують так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Якщо $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$, то відповідно записують $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Означення. Функцію $f(x)$ називають **нескінченно великою** (прямує до ∞) при $x \to x_0$, якщо для довільного як завгодно великого числа $A > 0$ можна вказати таке число $\delta = \delta(A) > 0$, що для всіх x таких, що $0 < |x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x)| > A$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Якщо функція $f(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно великою і набуває тільки додатних значень, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$; а якщо тільки від'ємних, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Наприклад, $y = \dfrac{1}{(4-x)^2}$ є нескінченно великою при $x \to 4$: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{(4-x)^2} = +\infty$.

Означення. Функцію $y = \alpha(x)$ називають **нескінченно малою (величиною)** при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Наприклад, $y = (4-x)^2$ є нескінченно малою при $x \to 4$: $\lim\limits_{x\to 4}(4-x)^2 = 0$.

Аналогічно визначають нескінченно великі і нескінченно малі функції (величини) на нескінченності.

Наприклад, $y=\frac{1}{(4-x)^2}$ є нескінченно малою величиною при $x\to\infty$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(4-x)^2}=0$, а $y=(4-x)^2$ є нескінченно великою при $x\to\infty$: $\lim\limits_{x\to\infty}(4-x)^2=\infty$

Властивості нескінченно малих функцій:

1. Для того щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x\to x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x)-A$ була нескінченно малою величиною, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\ \lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

2. Якщо функція $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x\to x_0$ ($\alpha(x)\neq 0$), то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою при $x\to x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ – нескінченно велика при $x\to x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x\to x_0$.

3. Алгебраїчна сума двох нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

4. Добуток нескінченно малої та обмеженої функцій є нескінченно малою функцією.

5. Добуток двох нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

5. Частка від ділення обмеженої функції на нескінченно малу функцію буде нескінченно великою.

5. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є нескінченно малою функцією.

При обчисленні границь корисними є наступні теореми;

Теорема 1 (про єдиність границі). Якщо функція $y = f(x)$ має границю при $x \to x_0$, то ця границя – єдина.

Теорема 2 (арифметичні дії над границями). Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то існують границі суми, різниці, добутку і частки функцій $f(x)$ і $g(x)$, які обчислюють за формулами:

1) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x);$

2) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x);$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, $(\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0)$.

Наслідок 1. Враховуючи, що $\lim\limits_{x \to x_0} c = c,\ c = const$ має місце формула: $\lim\limits_{x \to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, тобто сталий множник можна виносити за знак границі:

Наслідок 2. Границю степеня з натуральним показником обчислюють за формулою: $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^n$.

Теорема 3. Кожна елементарна функція $f(x)$ із областю визначення D має скінченну границю у будь-якій точці $x_0 \in D$, причому $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема 4. Якщо для функцій $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$ та $\lim\limits_{u \to u_0} f(u)$, то існує границя складної функції $y = f(\varphi(x))$, причому $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

Приклад. Обчислити границю : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3 - 4x + 2}{x + 1}$.

Розв'язання. За теоремою 2 маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-4x+2}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(3x^3-4x+2)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}3x^3-\lim\limits_{x\to 0}4x+\lim\limits_{x\to 0}2}{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}1}=\frac{2}{1}=2\,.$$

Якщо при виконанні граничного переходу порушуються умови теорем, то при обчислення границі функції виникають невизначені вирази. До таких виразів відносять: $[\infty-\infty], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [0\cdot\infty], [1^\infty], [0^0], [\infty^0]$. Розглянемо на прикладах методи розкриття невизначеностей,.

Приклад. Обчислити границю : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x+2}{(x+1)(3x^2+2)}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x+2}{(x+1)(3x^2+2)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$ (для розкриття невизначеності поділимо чисельник і знаменник на x у найвищому степені, тобто на x^3)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{(1+\frac{1}{x})(3+\frac{2}{x^2})}=\frac{3}{1\cdot 3}=1\,.$$

Приклад. Обчислити границю : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}$.

Розв'язання $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ (розкладемо многочлени у чисельнику і знаменнику на множники, скоротимо дріб на спільний множник $(x-1)$) =

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x+1}=-\frac{2}{2}=-1.$$

Приклад. Обчислити границю : $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2+2x+4}{x^3+8}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2+2x+4}{x^3+8}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ (розкладемо многочлени у чисельнику і знаменнику на множники, скоротимо дріб на спільний множник $(x+2)$):

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2(x+2)+2(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2}{x^2-2x+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Приклад. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+2x-3}\right)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+2x-3}\right)=[\infty-\infty]=$ (зведемо вираз до найменшого спільного знаменника) =

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{(x-1)(x+3)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\left[\frac{2}{0}\right]=\infty.$$

Приклад. Обчислити границю : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{10-x}}{x-1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{10-x}}{x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ (для розкриття невизначеності звільняємось від ірраціональності, домноживши чисельник і знаменник на спряжений до чисельника вираз)

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-\sqrt{10-x})(\sqrt{x+8}+\sqrt{10-x})}{(x-1)(\sqrt{x+8}+\sqrt{10-x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x+8-(10-x)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+\sqrt{10-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+\sqrt{10-x})}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+\sqrt{10-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{x+8}+\sqrt{10-x}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Приклад. Обчислити границю : $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2-x-1})$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2-x-1})=\left[\infty-\infty\right]=$ (для розкриття невизначеності домножимо і поділимо на спряжений вираз)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2-x-1})(\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x^2-x-1})}{(\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x^2-x-1})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+8-(x^2-x-1))}{(\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x^2-x-1})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+9}{(\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x^2-x-1})}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

(для розкриття невизначеності поділимо чисельник і знаменник на x у найвищому степені, тобто на x) $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{9}{x}}{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}$.

При обчисленні границь функцій з невизначеностями $\left[\frac{0}{0}\right]$, що містять тригонометричні функції, використовують **першу важливу границю**:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

та її наслідки: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{kx}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx}{\sin kx}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg\,x}{x}=1$.

Приклад. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ (в чисельнику скористуємось відомою тригонометричною формулою $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$) $=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 3x}=\frac{2}{9}\lim_{x\to0}\frac{3x\cdot3x\cdot\sin x\cdot\sin x}{x\cdot x\cdot\sin 3x\cdot\sin 3x}=\frac{2}{9}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=$$
$$=\frac{2}{9}\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=\frac{2}{9}.$$

При обчисленні границь функцій для розкриття невизначеності $\left[1^\infty\right]$ застосовують **другу важливу границю**:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ або } \lim_{x\to0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e\ .$$

При обчисленні границь функцій, що містять показникові та логарифмічні функції, корисними є наслідки другої важливої границі:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1;\ \lim_{x\to0}\frac{\log_a\left(1+x\right)}{x}=\frac{1}{\ln a};\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1;\ \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

Приклад. Обчислити границю : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2x}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{2x-1}{2x+3}=\frac{(2x+3)-4}{2x+3}=1+\frac{-4}{2x+3}\to1$ при $x\to\infty$, то маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+3}\cdot2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot}\right]^{\cdot\frac{-4}{2x+3}2x}=\text{ (оскільки } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot}=e\text{)}$$

$$=e^{\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x}{2x+3}}=e^{\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8}{2+\frac{3}{x}}}=e^{-4}\ .$$

Приклад. Обчислити границю : $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x-1\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$. Перейдемо до нової змінної $t=x-1$. Тоді $x=t+1$ і якщо $x\to 1$, то $t\to 0$:

$$\lim_{x\to 1}\left(2x-1\right)^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to 0}\left(2(t+1)-1\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left(2t+2-1\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left[\left(1+2t\right)^{\frac{1}{2t}}\right]^{2}=e^{2}.$$

Приклад. Обчислити границю : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\ln(1+4x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\ln(1+4x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\left(\frac{e^{3x}}{e^{2x}}-1\right)}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\left(e^{x}-1\right)}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\left(e^{x}-1\right)4x}{4x\ln(1+4x)}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}e^{2x}\cdot\frac{e^{x}-1}{x}\cdot\frac{4x}{\ln(1+4x)}=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

2.2. Порівняння нескінченно малих функцій

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малі функції при $x\to x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0;\ \lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0.$

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі величини одного порядку.

Серед нескінченно малих одного порядку важливу роль грають еквівалентні нескінченно малі величини:

якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються **еквівалентними**, і позначаються $\alpha(x)\sim\beta(x)$ $x\to x_0$.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то величина $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то величина $\alpha(x)$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\beta(x)$.

4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ не можна порівняти.

Приклад. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$:

a) $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1$, $\beta(x)=x^3$, b) $\alpha(x)=tg^3x$, $\beta(x)=x$,

c) $\alpha(x)=e^{4x^2}-e^{x^2}$, $\beta(x)=x^2$ d) $\alpha(x)=1-\cos x$ $\beta(x)=\dfrac{x^2}{2}$.

Розв'язання. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x^3(\sqrt{1+x}+1)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x^3(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2(\sqrt{1+x}+1)}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty,$$

тобто $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\beta(x)=x^3$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}\lim\limits_{x\to 0}tg^2x=1\cdot 0=0$,

тобто $\alpha(x)=tg^3x$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)=x$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x^2}-e^{x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}(e^{3x^2}-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}e^{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x^2}-1)\cdot 3}{3x^2}=$

$$=1\cdot 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-1}{3x^2}=3,$$

тобто $\alpha(x)=e^{4x^2}-e^{x^2}$ і $\beta(x)=x^2$ – нескінченно малі величини одного порядку.

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1,$

тобто $\alpha(x)=1-\cos x$ і $\beta(x)=\frac{x^2}{2}$ – еквівалентні: $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ при $x\to0$.

З першої важливої границі, її наслідків, та наслідків другої важливої границі можна сформулювати таблицю еквівалентності нескінченно малих величин при $x\to0$.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих величин

$$\sin x\sim x;\ \ tgx\sim x;\ \ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};\ \arcsin x\sim x;\quad arctgx\sim x;\ \ e^x-1\sim x;$$

$$a^x-1\sim x\ln a;\quad (1+x)^k-1\sim kx\ \ (k>0)\ ,\ \ \ln(1+x)\sim x;\quad \log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}.$$

Теорема. Границя відношення двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожну або одну з них замінити еквівалентною їй нескінченно малою.: якщо $\alpha(x)\sim\alpha_1(x);\ \beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Використання таблиці еквівалентних нескінченно малих величин і теореми суттєво спрощують процедуру обчислення границь: при знаходженні границь нескінченно малі співмножники у виразі, від якого треба знайти границю, можна замінювати на еквівалентні нескінченно малі.

Приклад. Обчислити границю : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x-\cos3x}{tgx+\sin x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{tgx+\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ (в чисельнику скористуємось відомою тригонометричною формулою $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, в знаменнику скористуємось означенням $tgx=\dfrac{\sin x}{\cos x}$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{5x}{2}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}}{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)}=$$ (користуємось таблицею еквівалентних величин: при $x\to 0$: $\sin x\sim x$; $\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$; $\sin\frac{5x}{2}\sim\frac{5x}{2}$) $=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{5x}{2}}{x\cdot\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2\cdot\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)}=\frac{0}{4}=0\ .$$

Приклад. Обчислити границю**:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\ln(1+tg2x)}$**.**

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\ln(1+tg2x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{\ln(1+tg2x)(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-(1-\sin x)}{\ln(1+tg2x)(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\ln(1+tg2x)(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}=$$

$$=\begin{vmatrix} x\to 0 & \sin x\sim x \\ tg2x\to 0 & \ln(1+tg2x)\sim tg2x \end{vmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{tg2x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}=$$

$$=\left|x\to 0\quad tg2x\sim 2x\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}=\frac{1}{2}.$$

Приклад. Обчислити границю**:** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\cos\frac{x}{2}}$**.**

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$**.** Зробимо заміну: $t = x - \pi$. Тоді $x = t + \pi$. Якщо $x \to \pi$, то $t \to 0$. Дістанемо:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\cos\frac{x}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 3(t+\pi)}{\cos\frac{t+\pi}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(3t+3\pi)}{\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin 3t}{-\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \left|\begin{matrix} t\to 0 & \sin 3t \sim 3t \\ & \sin\frac{t}{2} \sim \frac{t}{2}\end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{3t}{\frac{t}{2}} = 6.$$

Приклад. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)(\ln(x+1)-\ln x)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)(\ln(x+1)-\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\ln\dfrac{x+1}{x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}(x+2)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) == \left|\begin{matrix} x\to+\infty, \frac{1}{x}\to 0 \\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to+\infty}(x+2)\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{x}) = 1.$$

Приклад. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x}(\cos x-1)\frac{1}{\cos x-1}} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{1}{x}(\cos x-1)} = \left|x\to 0, \cos x-1\to 0\right| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}} =$$

$$\left|x\to 0, \cos x-1 \sim -\frac{x^2}{2}\right| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{2}} = e^0 = 1$$

Означення. Нескінченна мала при $x \to x_0$ $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою *k*-го порядку малості** відносно нескінченно малої при $x \to x_0$ $\beta(x)$, якщо $\alpha(x)$ і $[\beta(x)]^k$ одного порядку малості, тобто $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = A\ (\neq 0, \neq \infty)$.

Приклад. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = tgx - \sin x$ відносно $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

Розв'язання. Потрібно знайти *k*, при якому $\alpha(x) = tgx - \sin x$ і $[\beta(x)]^k = x^k$ будуть одного порядку малості. Розглядаємо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = \lim_{x\to 0}\frac{tgx - \sin x}{x^k} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x\cos x}{x^k \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^k \cos x} = \left|\begin{array}{ll} x \to 0 & \sin x \sim x \\ & 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x \cdot x^2}{2x^k \cos x} = \left|\text{при } k = 3\right|$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Отже, нескінченно мала $\alpha(x) = tgx - \sin x$ має порядок малості *k*=3 відносно нескінченно малої $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

2.3. Завдання для самостійної роботи

Приклад 2.1. Використовуючи означення границі функції, довести, що $\lim\limits_{x\to -1}(3x+4) = 1$

Приклад 2.2. Обчислити границі :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2 - 4x + 2}{3x^2 + x - 4}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2 - 4x + 2)(2x+3)}{\sqrt{3x^6 + x^2 - 4}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + x}{5x - 2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-4x+2}+\sqrt{x^4-x}}{(5x-2)(x+4)}$

Приклад 2.3. Обчислити границі :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+4x-6}{x^3-1}$ c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-5x-5}{x^3+x^2+x+1}$

Приклад 2.4. Обчислити границі :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

Приклад 2.5. Обчислити границю :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^3-8}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-1})$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x}-x)$

Приклад 2.6. Обчислити границю :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{arctg 3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\arcsin 5x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\, tg 3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{x\arcsin 2x}$ e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$

Приклад 2.7. Обчислити границі :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+3}\right)^{2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{\frac{x^2}{4}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{3}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\left(3x-8\right)^{\frac{x}{3-x}}$

Приклад 2.8. Обчислити границі :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+4\sin x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-e^{x}}{\ln(1+2x)}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+x)-\ln 2}{x^2+3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$

Приклад 2.9. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$:

a) $\alpha(x)=e^{\sqrt{x}}-1$, $\beta(x)=\sin 2x$ b) $\alpha(x)=1-\sqrt{\cos x}$, $\beta(x)=\sqrt{1+x}-1$

c) $\alpha(x)=e^{\sin x}-1$, $\beta(x)=tgx$.

Приклад 2.10. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$:

a) $\alpha(x)=\sin 2x-\sin x$ b) $\alpha(x)=\ln(1+\sqrt{x\sin x})$ c) $\alpha(x)=\sin(\sqrt{1+x}-1)$

d) $\alpha(x)=\cos 4x-\cos 3x$

3. Неперервність функції. Класифікація точок розриву

3.1. Основні означення. Приклади розв'язання задач

Розглянемо функцію $f(x)$, яка визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

Означення. Функція є **неперервною** в точці x_0, якщо виконуються такі умови:

1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0, тобто існує $f(x_0)$;

2) існує границя функції $f(x)$ в точці x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Оскільки для існування границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, необхідно й достатньо, щоб існували обидві односторонні границі функції в цій точці рівні між собою (Твердження 1,), то означення неперервності функції в точці можна сформулювати наступним чином:

функція $f(x)$ є **неперервною** в точці x_0, якщо існують обидві односторонні границі функції в цій точці, які рівні між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо $f(x)$ неперервна в точці x_0 , то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x) = f(x_0)$, тобто, при знаходженні границі неперервної функції $f(x)$ можна перейти до границі під знаком функції: замість аргументу x підставити його граничне значення x_0 .

Функція **неперервна на інтервалі** (a,b) якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Означення. Точка x_0 називається **точкою розриву** функції $f(x)$, якщо функція не є неперервною в цій точці.

Всі точки розриву поділяються на точки розриву першого і другого роду.

Означення. Точка x_0 називається точкою **розриву першого роду**, якщо в цій точці існують скінченні односторонні границі (лівостороння і правостороння). Причому

1. якщо односторонні границі рівні між собою $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$, тобто існує границя $f(x)$ в точці x_0 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, але граничне значення не дорівнює значенню функції в цій точці $A \neq f(x_0)$, або $f(x)$ не визначена у точці x_0, то x_0 називають **точкою усувного розриву**. Цей розрив можна усунути, поклавши $f(x_0) = A$. Така операція над функцією називається довизначенням функції до неперервної;

2. якщо існують скінченні односторонні границі, які не рівні між собою, $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1 \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$, то маємо **точку стрибкового розриву**.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або не є скінченною величиною, то таку точку називають **точкою розриву другого роду**.

При дослідженні функції на неперервність слід враховувати наступні теореми.

Теорема 1. Усі елементарні функції є неперервними в своїй області визначення.

Теорема 2. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці будуть неперервними їх сума $f(x)+g(x)$, різниця $f(x)-g(x)$, добуток $f(x)\cdot g(x)$, частка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при умові, що $g(x_0)\neq 0$.

Теорема 3. Якщо функція $u = g(x)$ неперервна в точці x_0 , а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = g(x_0)$, то складна функція $y = f(g(x))$ неперервна в точці x_0 .

Приклад. Дослідити на неперервність та з’ясувати характер точок розриву функцій: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Розв’язання. Задана функція є неперервною в усіх точках області визначення. Область визначення функції $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Оскільки не існує $f(0)$, то точка $x = 0$ є точкою розриву функції. Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Односторонні границі скінченні. Отже, $x = 0$ – точка розриву першого роду, причому, оскільки лівостороння і правостороння границі рівні, то це точка усувного розриву. Розрив можна усунути, довизначивши функцію в точці $x = 0$ значенням $f(0) = 1$. Тоді функція

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$$

є визначеною і неперервною для всіх $x \in R$.

Приклад. Довизначити функцію $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$ в точці $x_0 = 0$, так, щоб вона стала неперервною в цій точці.

Розв’язання. Задана функція є неперервною в усіх точках області визначення $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, в точці $x = 0$ функція не визначена, отже це точка розриву. Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to -0}\frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to -0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=0\ .$$

Аналогічно $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=0$. Тобто існує границя при $x\to 0$ і, відповідно, маємо в точці $x=0$ усувний розрив. .Якщо довизначити функцію в точці 0, поклавши її значення рівним граничному значенні $f(0)=0$, то умова $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=\lim\limits_{x\to +0}f(x)=f(0)$ буде виконана і функція в точці $x=0$ буде неперервною.

Приклад. Дослідити на неперервність та з’ясувати характер точок розриву функцій: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

Розв’язання. Область визначення функції $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$. Оскільки $f(-1)$, $f(1)$ не існують, то точки $x=-1$ і $x=1$ є точками розриву функції.

Досліджуємо точку $x=-1$. Знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to -1-0}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1-0}\frac{x-2}{x+1}=\left[\frac{-3}{-0}\right]=+\infty.$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}==\lim_{x\to -1+0}\frac{x-2}{x+1}=\left[\frac{-3}{+0}\right]=-\infty.$$

Оскільки односторонні границі в точці $x=-1$ нескінченні, то це точка розриву II роду.

Досліджуємо точку $x=1$. Знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}==\lim_{x\to 1+0}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=-\frac{1}{2}$, тобто існує границя $f(x)$ в точці $x=1$, але $f(1)$ не існує. Таким чином, точка $x=1$ є точкою розриву I роду (усувного).

Приклад. Дослідити на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функцій: $f(x)=\begin{cases} 2, & x\le 1 \\ x^2+1, & 1<x<3 \\ 5x, & x\ge 3 \end{cases}$.

Розв'язання. Функція визначена для всіх $x\in R$ і неперервна на кожному з інтервалів $(-\infty;-1]\cup(1;3)\cup[3;+\infty)$. Очевидно, що вона може бути розривною лише в точках $x=1;\ x=3,$ в яких змінюється аналітичний вираз, що задає функцію. Перевіримо умови неперервності в цих точках.

Досліджуємо точку $x=1$. Функція визначена в цій точці: $f(1)=2$. Знаходимо односторонні границі :

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} 2=2;\ \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x^2+1)=2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)=2$, тобто в точці $x=1$ функція неперервна.

Досліджуємо точку $x=3$. Функція визначена в цій точці: $f(3)=5x\big|_{x=3}=5\cdot 3=15$. Знаходимо односторонні границі :

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}(x^2+1)=10;\ \lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0} 5x=15.$$

Отже, існують скінченні односторонні границі $\lim_{x\to 3-0} f(x) = 10,\ \lim_{x\to 3+0} f(x) = 15$, тому в точці $x = 3$ розрив I роду, і оскільки односторонні границі не рівні між собою, то в цій точці стрибковий розрив.

Приклад. Знайти числа *A* і *B* такі, щоб функція:

$$f(x) = \begin{cases} A + 3x,\ x < 0 \\ x^2,\ 0 \le x \le 1 \\ 3 + Bx,\ x > 1 \end{cases}$$

була неперервною.

Розв'язання. Функція визначена для всіх $x \in R$ і при сталих *A*, *B* неперервна на кожному з інтервалів $(-\infty;0) \cup [0;1] \cup (1;+\infty)$. В точках $x = 0;\ x = 1$ функція змінює аналітичний вираз, що задає функцію. Підберемо *A*, *B* так, щоб в цих точках виконувались умови неперервності.

Розглянемо точку $x = 0$. $f(0) = x^2\Big|_{x=0} = 0$.

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}(A + 3x) = A; \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} x^2 = 0 \Rightarrow A = 0$$

Аналогічно для точки $x = 1$ маємо: $f(1) = x^2\Big|_{x=1} = 1$,

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1; \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(3 + Bx) = 3 + B \Rightarrow 1 = 3 + B \Rightarrow B = 2$$

Отже, при $A = 0,\ B = 2$ функція буде неперервною.

Приклад. Дослідити на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функцій: $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. Оскільки, $f(1)$ не існує, то точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x-1} \to -\infty \\ 2^{-\infty} \to 0 \end{array} \right| = 0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x-1} \to +\infty \\ 2^{+\infty} \to +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

Оскільки правостороння границя функції нескінченна, то $x=1$ є точкою розриву другого роду.

Приклад Дослідити на неперервність та з’ясувати характер точок розриву функції:: $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x+1}}}$.

Розв’язання. Область визначення функції $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. Оскільки, $f(-1)$ не існує, то точка $x=-1$ є точкою розриву функції. Знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x+1}}} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x+1} \to -\infty \\ e^{-\infty} \to 0 \end{array} \right| = 1;$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x+1}}} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x+1} \to +\infty \\ e^{+\infty} \to +\infty \\ \dfrac{1}{+\infty} \to 0 \end{array} \right| = 0.$$

Отже, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = 10,\ \lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = 0$, тому в точці $x=-1$ розрив I роду, і оскільки односторонні границі не рівні між собою, то в цій точці стрибковий розрив.

Приклад. Дослідити на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функцій: $f(x)=x\frac{|2-x|}{2-x}+2$.

Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. Оскільки, в точці $x=2$ функція не визначена, то точка $x=2$ є точкою розриву функції. Обчислимо односторонні границі, користуємось означенням модуля: $|2-x|=\begin{cases}2-x, & 2-x\geq 0\\ -(2-x.) & 2-x<0\end{cases}$:

$$\lim_{x\to 2-0}\left(x\frac{|2-x|}{2-x}+2\right)=\left|x\to 2-0, 2-x>0\Rightarrow|2-x|=2-x\right|=\lim_{x\to 2-0}\left(x\frac{2-x}{2-x}+2\right)=$$
$$=\lim_{x\to 2-0}\left(x+2\right)=4;$$

$$\lim_{x\to 2+0}\left(x\frac{|2-x|}{2-x}+2\right)=\left|x\to 2+0, 2-x<0\Rightarrow|2-x|=-(2-x)\right|=\lim_{x\to 2-0}\left(x\frac{-(2-x)}{2-x}+2\right)=$$
$$=\lim_{x\to 2-0}\left(-x+2\right)=0.$$

Оскільки скінченні односторонні границі не рівні між собою, то в точці $x=2$ маємо розрив I роду (стрибковий розрив).

Приклад. Дослідити на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функцій: $f(x)=arctg\frac{1}{x}$.

Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. В точці $x=0$ функція не визначена, тому ця точка є точкою розриву функції. Щоб з'ясувати характер точки розриву, обчислимо односторонні границі функції в цій точці:

$$\lim_{x\to -0}arctg\frac{1}{x}=\left|\frac{1}{-0}\to-\infty\right|=-\frac{\pi}{2};\quad \lim_{x\to +0}arctg\frac{1}{x}=\left|\frac{1}{+0}\to+\infty\right|=\frac{\pi}{2};$$

Оскільки скінченні односторонні границі не рівні між собою, то в точці $x = 0$ маємо розрив I роду (стрибковий розрив).

3.2. Завдання для самостійної роботи

Приклад 3.1. Дослідити на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функцій:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x - 16}{x(x-2)}$ b) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x(x+1)}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(x+3) - \ln 3}{x^2 - 2x}$

Приклад 3.2. Дослідити на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функцій:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x < 3 \\ 5x - 6, & x \ge 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \\ 3, & x \ge 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+x}{x^2}, & x \le -1 \\ x^2, & -1 < x \le 4 \\ x + 2, & x > 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ \cos^2 x, & 0 \le x < \pi \\ 1, & x \ge \pi \end{cases}$

Приклад 3.3. Дослідити на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функцій:

a) $f(x) = 4^{\frac{1}{x^2(x-1)}}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x+3}}}$ c) $f(x) = \dfrac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x^2}}}$

Приклад 3.4. Дослідити на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функцій:

a) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x-1}$ b) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x^2(x+\pi)}$ c) $f(x)=1+\dfrac{|x+2|}{x+2}$

d) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$, d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1}, x\neq 1\\ 1, \quad x=1\end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1}, x\neq 1\\ -1, \quad x=1\end{cases}$

Приклад 3.5. Знайти числа A і B такі, щоб функція $f\left(x\right)$ була неперервною. a) $f\left(x\right)=\begin{cases}A+2x,\ x<1\\ x^2,\ 1\le x\le 5\\ 3+Bx,\ x>5\end{cases}$ b) $f\left(x\right)=\begin{cases}Ax,\ x\le 1\\ x^2,\ 1<x<5\\ \dfrac{B}{x},\ x\ge 5\end{cases}$

Приклад 3.6. Довизначити функцію $f\left(x\right)$ в точці x_0, так, щоб вона стала неперервною в цій точці

a) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+4x-2}{x-1};\ x_0=1$ b) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{4x};\ x_0=0$

c) $f(x)=\dfrac{tg4x-tg2x}{x};\ x_0=0$

Розділ 4. Варіанти завдань розрахункової роботи

Варіант 1.

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4-2n+1}}{n^2+3n+3}$

2. Обчислити границі:

$$\text{а)}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2+6x},\ \text{б)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x-14}{x^3-x^2+2x-8}\ .$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $y=\dfrac{2}{4+3^{\frac{1}{x}}}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=tg(e^x-1)$ і $\beta(x)=\cos 2x-\cos x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=1-\cos 2x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 2

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{5^n+2}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-3}\right)^{2x},\ \text{б)}\ \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{1+x}-3}{\sqrt{x-4}-2}\ .$$

3. Знайти числа A і B такі, щоб функція:

$$f(x)=\begin{cases}-x+A,\ x<0\\ x^2,\ 0\le x\le 2\\ Bx+2,\ x>2\end{cases}$$

була неперервною.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=e^{3x}-e^{x}$ і $\beta(x)=1-\cos 2\pi x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt{1+arcsin\,x}-\sqrt{1-arcsin\,x}$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 3

1. Обчислити границю числової послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$ **.**

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6-2x+1}}{(3x-1)(2x+3)}\ ,\ \text{б)}\ \lim_{x\to-2}\frac{x^3+6x^2-7x-30}{x^3+2x+12}\ .$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з’ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\dfrac{|3-x|}{3-x}(x+2)$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=e^{tgx}-e^{\sin x}$ і $\beta(x)=\ln(1+\sin^2 x)$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln\cos 3x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 4

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+4}}{(n^2+3)(n+2)}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+3x}\right)^{2x-1}\ ,\ \text{б)}\ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{10-3x}-2}{\sqrt{x+2}-2}\ .$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з’ясувати характер точок розриву функції: $f\left(x\right)=8^{\frac{1}{5-x}}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\sin 2x-2\sin x$ і $\beta(x)=x\ln\cos 5x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{x^2}-e^{x}$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$

Варіант 5

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{4n+1}\right)^{2n+3}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2-5}{x^3-3x^2+3x-1}\ \text{, б)} \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-5})\ .$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\dfrac{1-x^3}{1-x^2}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\arcsin(x^2-2x)$ і $\beta(x)=1-\cos^3 x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt{x}\ln\cos 5x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 6

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+3^{n-1}}{5^n+5^{n-1}}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)} \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4-3x+2}}\ \text{, б) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-3}\right)^{\frac{4x-1}{2}}.$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з’ясувати характер точок розриву функції: $y = arctg\dfrac{1}{(x-1)^2(x+1)}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x) = \cos 3x - \cos x$ і $\beta(x) = e^x - e^{4x}$ при $x \to 0$**.**

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x) = 1 - \cos^3 2x$ відносно $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

Варіант 7

1. Обчислити границю числової послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n! + (n+2)!}{(n+1)!}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)} \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-9}\right), \quad \text{б)} \lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2-2}{x^3+5x^2-4x-8}.$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з’ясувати характер точок розриву функції: $f\left(x\right) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ і $\beta(x) = \sin 2x - \sin x$ при $x \to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x) = tg2x - \sin 2x$ відносно $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

Варіант 8

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)(2n+2)}{\sqrt{n^4+4n}}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x^2-6}\right)^{3x+2}, \quad \text{б)} \lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+5x^2-12}.$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=tg(\sqrt{1+x}-1)$ і $\beta(x)=\sin 4x-\sin 2x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\cos x-\sqrt{\cos x}$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 9

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{7^n+1}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+2x}-x^2)\ ,\ \text{б)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x-2}{x^2+5x}\right)^{\frac{x+1}{2}}\ .$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\frac{\ln(2+x)-\ln 2}{x^2+x}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=1-\cos^3 x$ і $\beta(x)=x\ arctg 2x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{\sqrt{x^2+x}}-1$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 10

1. Обчислити границю числової послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$ **.**

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x^2+2x-1}}{(x+4)(3x-1)}\ ,\ \text{б)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3+5x^2-3x-3}{x^3-2x^2+1}\ .$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\begin{cases} -4+x, x<3 \\ (x^2-10), 3\le x\le 5 \\ 7, x>5 \end{cases}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=e^{\sin 2x}-1$ і $\beta(x)=(1-\cos x)\sin x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln(x^2+3x+1)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 11

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}-n}{n+1}$

2. Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+6x-1}{x^2+7x}\right)^{x^2+1}$, б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-4x-3}{x^3-4x^2+5}$.

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $y=\dfrac{4}{2+e^{\frac{1}{1-x}}}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\ln(x^3+5x^2+1)$ і $\beta(x)=e^{2x}-e^{5x}$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=1-\sqrt{\cos x}$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 12

1. Обчислити границю числової послідовності**:** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+6}{\sqrt{n^4+4}}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+2)(x+1)}-\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)\ ,\ \text{б)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x}{x^2-3x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{2}}\ .$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з’ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\dfrac{e^{x^3}-e^x}{x^2-x}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=1-\sqrt{\cos x}$ і $\beta(x)=1-\cos^3 x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt{x}\ln(2-\cos 4x)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 13

1. Обчислити границю числової послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{n!+(n+3)!}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4-2x+1}(3x-2)}{\sqrt{x^6-2x}+4x+3}\ ,\ \text{б)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^3+5x-18}\ .$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з’ясувати характер точок розриву функції: $y=\dfrac{e^{\sqrt{x+1}}-e}{x(x+1)}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\ln(3+x)-\ln 3$ і $\beta(x)=tg^2 3x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{\sin 2x}-e^{\sin x}$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 14

1. Обчислити границю числової послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2-3}\right)^{\frac{x+1}{3}}, \text{ б) } \lim_{x\to -1}\frac{x^3-4x-3}{x^3+4x^2-3}.$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\begin{cases}-2x, \ x\le 0\\ x^2+1, 0<x\le 1\\ 2, \ x>1\end{cases}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$ і $\beta(x)=tg(x^2+x)$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt{x}\ln\cos 4x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 15

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{3n+2}\right)^{2n-4}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x), \text{ б) } \lim_{x\to 2}\frac{x^3+4x^2-5x-14}{x^3-8}.$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\frac{x}{(x-1)(e^x-1)}$;

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\cos 4x-\cos 6x$ і $\beta(x)=tgx+\sin x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln(x^3+2x^2+1)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 16

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n+6)(2n+3)}{n\sqrt{n^4+4}}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-x}\right)^{3x+2}.$$

3 Знайти числа А і В такі, щоб функція:

$$f(x)=\begin{cases} A-2x,\ x<0 \\ \sqrt{x},\ 0\le x\le 4 \\ Bx+3,\ x>4 \end{cases}$$

була неперервною.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=2(e^{\sqrt{x^2+1}}-e)$ і $\beta(x)=tg(x^2+2x)$ при $x\to0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sin(\sqrt{x^2+x+1}-1)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to0$.

Варіант 17

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-5}{n+7}\right)^{2n-1}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+\sqrt{x^4+5x}}{x\sqrt{x^2+x+1}} \qquad \text{б) } \lim_{x\to-1}\frac{x^3+5x^2+4x}{x^3+4x^2-3}.$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-1,\ x\le0 \\ \dfrac{x}{3(x-4)},\ x>0 \end{cases}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=arctg(x^2-2x)$ і $\beta(x)=\sin(7x)-\sin(5x)$ при $x\to0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt[3]{x}\ln\cos 4x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 18

1. Обчислити границю числової послідовності:

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-x+2}\right)^{3x}, \text{ б) } \lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3+5x^2-28}.$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з’ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\begin{cases} 3x^2-5, x\le 2 \\ (x+5), 2<x\le 5. \\ \dfrac{x^3}{3}, x>5 \end{cases}$

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\sin(\sqrt{2x^2+1}-1)$ і $\beta(x)=\ln(x+2)-\ln 2$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt[5]{x}(\cos 4x-1)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 19

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n-5}{7n+2}\right)^{n-4}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+12}{x^3+4x-16}, \text{ б) } \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2}).$$

3. Знайти числа *A* і *B* такі, щоб функція:

$$f(x)=\begin{cases} A-x, \ x<0 \\ x^2, \ 0\le x\le 2 \\ 8-Bx, \ x>2 \end{cases}$$

була неперервною.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\ln(x^3-2x^2+1)$ і $\beta(x)=tg(x+2)-tg2$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt[3]{x}(2\sin x-\sin 2x)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 20

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3\sqrt{n}+6}{\sqrt[3]{n^4}+4n+2}$

2. Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+5x}\right)^{2x}$, б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2-3x-6}{x^3-x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=arctg\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\ln(1+tg^2x)$ і $\beta(x)=\cos 6x-\cos 4x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt[3]{x}(e^{3x}-e^{-2x})$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 21

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-1}{5n+2}\right)^{3n-4}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)} \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^3+7}+\sqrt{x^2+5})}{\sqrt[3]{x^6-4x+4}+5x}\text{ , б) }\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{x^3-8}\ .$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=tg(e^{x+1}-e)$ і $\beta(x)=\ln(x+3)-\ln 3$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt[4]{x}(\cos 2x-1)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 22

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+2}\right)^{3n-4}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2x+2})\text{ , б) }\lim_{x\to -2}\frac{x^3+4x^2-5x-18}{x^3+8}.$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\dfrac{(e^{2x}-1)}{x(x+4)}$;

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\cos 4x-\cos x$ і $\beta(x)=\ln\cos 2x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln(x^3-3x+1)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 23

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3\sqrt{n}+6}{\sqrt[3]{n^{11}}+4}$

2. Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+3}\right)^{\frac{5x+1}{2}}$, б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3-4x+15}{x^3+4x^2-9}$.

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\begin{cases}2x,\ x\le 0\\ x^2+3x, 0<x\le 1\\ \dfrac{2}{x},\ x>1\end{cases}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\sqrt{1+arctgx}-\sqrt{1-arctgx}$ і $\beta(x)=\sin(x^2-4x)$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt{x^5}\ln\cos 2x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 24

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+n}{4n^2+1}\right)^{2n+3}$

2. Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3-4x^2+4x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+4}-\sqrt{2x^2-7})$.

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x-x^2}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\sqrt{x}\arcsin(x^3+x)$ і $\beta(x)=e^{4x}-e^x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=tg5x-tg3x$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 25

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n+7^{n-1}}{9^n+1}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x^2+4}}{\sqrt[4]{x^4+3x-2}}\text{ , б) }\lim_{x\to 0}\left(1+7x\right)^{\frac{1}{2x}}.$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=arctg\frac{1}{x^2-1}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\sqrt{1+\sin^2 x}-1$ і $\beta(x)=tg^2x$ при $x\to 0$ **.**

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt[3]{x}(e^{2x^3}-e^x)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 26

1. Обчислити границю числової послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{n!+(n+2)!}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+1}-\sqrt{x^2-9x-2}}{x},\quad\text{б) }\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x+14}{x^3+5x^2-4x-20}.$$

3 Довизначити функцію $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{2+\sin x}-\sqrt{2-\sin x}}{x}$ в точці $x_0=0$, так, щоб вона стала неперервною в цій точці.:

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\cos 2x-\cos x$ і $\beta(x)=\sin 2x-\sin x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\sqrt{x}\ln(1+\cos 2x-\cos 4x)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 27

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)(2n+2)(3n-1)}{\sqrt{n^6+4n^2+1}}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\left(1+4x\right)^{\frac{1}{3x}}, \text{ б) } \lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2-3x-4}{x^3+5x^2-4}.$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x-4}}}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=arctg(\sqrt{4+x}-2)$ і $\beta(x)=tg4x-tg2x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{x^2}-e^{2x}$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 28

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-4^n}{3^n+5^n}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-3}{2x-3}-2x\right), \text{ б) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2+x+1}\right)^{\frac{x}{2}} .$$

3. Довизначити функцію $f(x)=\dfrac{\ln(3+x)-\ln 3}{x}$ в точці $x_0=0$, так, щоб вона стала неперервною в цій точці.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\sqrt{1-x\sin x}-1$ і $\beta(x)=arctg^2 2x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=e^{tgx}-e^{\sin x}$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 29

1. Обчислити границю числової послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+3n+2}{4n^2+n+1}\right)^{2n+3}$ **.**

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x^2+4}}{(2x+1)(3x-1)}\ ,\ \text{б)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^3+2x^2-16}\ .$$

3. Знайти числа A і B такі, щоб функція:

$$f(x)=\begin{cases} A+2x, x<1 \\ x^2-10, 1\le x\le 3 \\ Bx, x>3 \end{cases}$$

була неперервною.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=tg(2+x)-tg(2-x)$ і $\beta(x)=\sin^3 2x$ при $x\to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x)=\ln(2-\cos 3x)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Варіант 30

1. Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+2}-n}{3n+2}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 2}\left(2x-3\right)^{\frac{1}{2-x}}\ ,\ \text{б)}\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2+5}{x^3-4x^2+5x+10}\ .$$

3. Дослідити функцію на неперервність та з'ясувати характер точок розриву функції: $f(x)=\frac{1+e^{\frac{1}{1-x}}}{2+e^{\frac{1}{1-x}}}$.

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x) = \ln(x^3 - 5x^2 + 3x + 1)$ і $\beta(x) = e^{2x^4} - e^{5x^2}$ при $x \to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x) = \sin x - \sqrt{\sin x}$ відносно $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

Варіант 31

1. Обчислити границю числової послідовності**:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+3)(n+6)}{\sqrt{n^4+4n+3}}$

2. Обчислити границі функцій:

$$\text{а)} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+5} - \sqrt{x^2-9x+1}}{x}, \text{ б) } \lim_{x\to5} \left(2x-9\right)^{\frac{2}{5-x}}.$$

3. Довизначити функцію $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x^3}} - 1}{x}$ в точці $x_0 = 0$, так, щоб вона стала неперервною в цій точці. .

4. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x) = 1 - \sqrt[3]{\cos x}$ і $\beta(x) = \ln(1 + tg^2 x)$ при $x \to 0$.

5. Знайти порядок нескінченно малої функції $\alpha(x) = e^{\sin 2x} - e^{2\sin x}$ відносно $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

Відповіді

1.1. a) $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{4}{7}; x_3 = \frac{4}{5}; x_4 = \frac{16}{13}$ b) $x_1 = 0; x_2 = \frac{2}{7}; x_3 = 0; x_4 = \frac{2}{13}$

c) $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{6}; x_3 = -\frac{1}{24}; x_4 = \frac{1}{120}$

1.2. a) $x_n = \frac{1}{2n-1}$ b) $x_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ c) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}+1}{2}$

1.6. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) ∞ e) $\frac{1}{4}$ f) ∞ g) $\frac{4}{5}$ k) $\frac{1}{12}$

1.7. a) 0 b) 0 c) $\frac{1}{2}$

1.8. a) e^4 b) $\frac{2}{e}$ c) e^{21}

2.2. a) 1 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{2}{15}$

2.3. a) $\frac{5}{4}$ b) 3 c) -2

2.4. a) ∞ b) -1 c) ∞

2.5. a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{24}$ c) 3 d) 0 e) 4

2.6. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{4}$ e) $\frac{1}{2}$ f) 0

2.7. a) $\frac{1}{e^{16}}$ b) e^{10} c) $\sqrt{e}$ d) e^6 e) $\frac{1}{e^9}$

2.8. a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ d) 2

2.9. a) $\alpha(x)$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\beta(x)$ b) $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$ c) $\alpha(x) \sim \beta(x)$ d) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку малості

2.10. a) $k = \frac{3}{2}$ b) $k = 5$ c) $k = 2$ d) $k = 2$

3.1. a) $x = 0$ є точкою розриву II роду ; $x = 2$ є точкою розриву I роду (усувного) b) $x = 1$ є точкою розриву II роду ; $x = 0$ є точкою розриву I роду (усувного) c) $x = -1$ є точкою розриву II роду ; $x = 0$ є точкою розриву I роду (усувного) d) $x = 2$ є точкою розриву II роду ; $x = 0$ є точкою розриву I роду (усувного)

3.2. a) функція неперервна b) $x = 1$ є точкою розриву I роду c) $x = 4$ є точкою розриву I роду d) $x = 0$ є точкою розриву I роду

3.3. a) $x = 1$ є точкою розриву II роду; $x = 0$ є точкою розриву I роду (усувного) b) $x = -3$ є точкою розриву I роду c) $x = 0$ є точкою розриву I роду; d) $x = 0$ є точкою розриву I роду (усувного)

3.4. a) $x = 1$ є точкою розриву I роду; b) $x = -\pi$ є точкою розриву I роду; $x = 0$ є точкою розриву I роду (усувного) c) $x = -2$ є точкою розриву I роду; d) $x = 0$ є точкою розриву I роду e) $x = 1$ є точкою розриву I роду; f) функція неперервна

3.5. a) $A = -1; B = 4$; b) $A = 1; B = 125$

3.6. a) $f(1) = 1$; b) $f(0) = \frac{1}{2}$ c) $f(0) = 2$

Список рекомендованої літератури

1. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі : навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – Київ : Книги України ЛТД, 2014. – 578 с. – 3000 пр. – ISBN 978-966-2331-03-5.

2. Дудкін, М. Є. Вища математика [Електронний ресурс] : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями / М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова, І. В. Степахно ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 10,96 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 449 с. – Назва з екрана

https://ela.kpi.ua/handle/123456789/51064

3. Вища математика. Вступ до математичного аналізу. Методичні вказівки [Електронний ресурс] : методичні вказівки для студентів спеціальностей 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології», 143 «Атомна енергетика» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. В. Веригіна, Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова. – Електронні текстові дані (1 файл: 861 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 29 с. – Назва з екрана.

https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41281/1/Vyshcha-matematyka_Vstup-do-mat-an_MV.pdf

4. Коваль, О. О. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення. Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями 161 «Хімічні технології та інженерія», 162 «Біотехнології та біоінженерія» / О. О. Коваль, О. Б. Поліщук, В. І. Стогній ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. - Електронні текстові данні (1 файл: 6.36 Мбайт). - Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. - 196 с. - Назва з екрана. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/58438/1/Liniina_alhebra_Analitychna_heometriia_Dyf_chys_KL.pdf

5. Журавська Г.В. Теорія границь. Диференціальне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл. Збірник задач / укладачі Журавська Г.В., Карпалюк Т.О., Копась І.М., Кулик Г.М., Рева Н.В., Степаненко Н.В. – Київ, «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2023 – 97 с.