

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

І. В. Кравченко, М. С. Мамута

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ

**Рекомендації до виконання
розрахунково-графічної роботи**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра
за освітньою програмою «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в
приладобудуванні»
спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

УДК 621.3 (004.9)
К77

Автори: *Кравченко Ігор Володимирович*
Мамута Марина Сергіївна, канд. техн. наук

Рецензент *Войцехович В.С.*, канд. фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник відділу когерентної і квантової оптики Інституту фізики НАН України.

Відповідальний редактор *Колобродов В.Г.*, доктор техн. наук, професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 07.12.2023 р.)
за поданням Вченої ради приладобудівного факультету
(протокол № 9/23 від 30.10.2023 р.)*

Кравченко І. В.
К77 Цифрова обробка сигналів та зображень. Розрахунково-графічна робота [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня магістра за освіт. програмою «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в приладобудуванні» спец. 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка / І. В. Кравченко, М. С. Мамута ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 90 с.

Містить завдання до виконання та правила оформлення розрахунково-графічної роботи з синтезу цифрових фільтрів з дисципліни «Цифрова обробка сигналів та зображень». Викладено необхідний теоретичний матеріал щодо параметрів та характеристик дискретних фільтрів в просторово-часовій, частотній області, «s» та «z» просторах. Приділено увагу методам розрахунку рекурсивних та нерекурсивних фільтрів за прототипом. Наведено приклади синтезу ФВЧ, ФНЧ, СФ, ЗФ методом зваження та білінійного перетворення.

Призначений для здобувачів ступеня магістра освітньої програми «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в приладобудуванні» спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка». Буде також корисним для студентів, науковців, інженерних працівників, які цікавляться розробкою цифрових фільтрів.

УДК 621.3 (004.9)

Реєстр. № 23/24-157. Обсяг 5 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© І. В. Кравченко, М. С. Мамута, 2023
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
1 ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ РОБОТИ.....	6
2 ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ	8
2.1 Абсолютні та нормовані аргументи, основна смуга частот	9
2.2 Параметри та характеристики цифрових фільтрів	11
2.2.1 Опис фільтрів в часово-просторовій області	12
2.2.2 Опис в частотній області.....	14
2.2.3 Структура цифрового фільтру	18
2.2.4 Специфікація цифрових фільтрів.....	20
3 РОЗРАХУНОК ФЧС	24
3.1 Розрахунок СІВ фільтрів	24
3.1.1 Метод зважування, метод вагового вікна.....	24
3.1.2 Переведення ФНЧ в ФВЧ, СФ, ЗВ	27
3.1.3 Етапи розрахунку фільтрів СІВ методом зважування	29
3.2 Розрахунок НІВ фільтрів.....	30
3.2.1 Підготовка вхідних даних	31
3.2.2 Розрахунок передавальної функції Лапласа аналогового фільтра-прототипу.....	33
3.2.3 Отримання передавальної функції дискретного фільтра.....	46
4 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ	48
4.1 Приклад розрахунку СІВ фільтра.....	48
4.2 Приклад розрахунку НІВ фільтра	66
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	90

ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

СІВ	- фільтр з скінченим імпульсним відгуком
НІВ	- фільтр з нескінченим імпульсним відгуком
ФВЧ	- фільтр низьких частот
ФВЧ	- фільтр високих частот
СФ	- смуговий фільтр
РФ	- режекторний фільтр
ФЧС	- фільтр частотної селекції
ЦФ	- цифровий фільтр
ЦФЧС	- цифровий фільтр частотної селекції
ПФ	- передавальна функція
ПС	- перехідна смуга
СЗ	- смуга запирання
СП	- смуга пропускання

ПЕРЕДМОВА

Посібник містить завдання до виконання та правила оформлення розрахунково-графічної роботи з синтезу цифрових фільтрів з дисципліни «Цифрова обробка сигналів та зображень». Описані параметри та характеристики дискретних фільтрів в просторово-часовій, частотній області, «s» та «z» просторах. Приділено увагу методам розрахунку рекурсивних та нерекурсивних фільтрів високої частоти, низької частоти, смугових та режекторних фільтрів. Наведено приклади синтезу фільтрів.

Зважаючи на обсяг і місце дисципліни в освітній програмі, розглянуті тільки методи синтезу фільтрів частотної селекції за прототипом.

Перший розділ посібника містить вимоги до оформлення та змісту розрахункової роботи, індивідуальні варіанти завдань та рекомендації щодо використання комп'ютерних засобів для виконання роботи.

Розділ 2 присвячено теоретичному матеріалу щодо абсолютних та нормованих координат, впливу дискретизації. Розглянуто визначення різницевого рівняння, імпульсного відгуку в просторово-часовій та спектральній областях, передавальної характеристики Лапласа та z характеристики. Приділено увагу способам побудови структури фільтрів.

В розділі 3 розглядаються основні етапи та методологія розрахунку фільтрів зі скінченим імпульсним відгуком (СІВ) методом вагового вікна та фільтрів з нескінченим імпульсним відгуком (НІВ) методом білінійного перетворення.

В розділі 4 детально розглянуті приклади синтезу всіх типів цифрових фільтрів частотної селекції.

Посібник призначений для здобувачів ступеня магістра освітньої програми «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в приладобудуванні» спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка». Буде також корисним для студентів, науковців, інженерних працівників, які цікавляться розробкою та використанням цифрових фільтрів.

1 ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ РОБОТИ

Розрахунково-графічна робота оформлюється згідно вимог ДСТУ 3008:2015 на аркушах формату A4 (210x297 мм) через 1,5 інтервали з шрифтом Times New Roman 14 пунктів.

Робота надається у вигляді «твердої» копії пояснювальної записки, її копії у вигляді текстового файлу формату «doc», «docx», «pdf» та програмних файлів, використаних при виконанні роботи.

Склад записки: титульний аркуш, завдання на роботу з вихідними даними варіанта (табл. 1.1), розрахункова частина, додатки.

Титульний аркуш оформлюється за стандартами університету та містить назви університету, факультету, кафедри; вид роботи – розрахунково-графічна; дисципліну – цифрова обробка сигналів та зображень; інформацію про виконавця – ПІБ, група; варіант завдання тощо.

В додатках розміщуються допоміжні розрахунки, тексти програм за умови їхнього використання.

Розрахункова частина має містити опис розв'язання завдань, відповіді та висновки щодо отриманих результатів. Опис кожного завдання супроводжується використаними залежностями, всіма проведеними проміжними перетвореннями. Відповіді наводяться в числовому вигляді з вказанням розмірностей. Поля графіків повинні мати оцифровану сітку, достатню для кількісного аналізу результатів. Осі графіків повинні бути оцифровані та мати відповідні підписи. Верхня межа частотних графіків – частота дискретизації. Графіки частотних відгуків наводяться в логарифмічному масштабі по осі аргументів та мають містити позначку основної смуги частот.

Завдання до виконання:

1. Визначити частотний відгук фільтра.
2. Визначити передавальну функцію (z-функцію) фільтра.
3. Визначити передавальну функцію Лапласа аналогового прототипу НІВ фільтра.
4. Визначити імпульсний відгук (для СІВ фільтра) та різницеве рівняння фільтра.
5. Визначити та зобразити структуру фільтра.
6. Скласти специфікацію фільтра.

Розрахунки проводити для СІВ фільтрів – методом зважування, для НІВ фільтрів – методом білінійного z-перетворення.

Для розрахунків рекомендується використовувати системи комп'ютерної математики або мови програмування, які мають засоби обробки комплексних даних та гіперболічних функцій. Наприклад, MathCad, MATLAB, Python+SciPy, Octave, SciLAB тощо.

Таблиця 1.1

Варіанти завдань

№	Тип	fp1 [Гц]	fp2 [Гц]	fs1 [Гц]	fs2 [Гц]	f _T [кГц]	Фільтр СІВ		Фільтр НІВ		
							Вікно	Розмір	Прототип	ар	as ¹
1	ФВЧ	300		150		15	Барлетта	9	Баттерфорта	2	30 ^x
2	ФВЧ	300		150		15	Ханна	11	Чебишева 1	1	45 ^x
3	ФВЧ	300		150		15	Хеммінга	7	Чебишева 2	1	44 ^x
4	ФВЧ	300		150		15	Блекмана	9	Баттерфорта	2	35 ^x
5	СФ	200	450	100	650	10	Барлетта	7	Чебишева 1	1	32
6	СФ	200	450	100	650	10	Ханна	13	Чебишева 2	1	33
7	СФ	200	450	100	650	10	Хеммінга	11	Баттерфорта	2.7	29
8	СФ	200	450	100	650	10	Блекмана	15	Чебишева 1	1.1	34
9	РФ	50	325	100	225	5	Барлетта	9	Чебишева 2	1.1	33
10	РФ	50	325	100	225	5	Ханна	7	Баттерфорта	2	30
11	РФ	50	325	100	225	5	Хеммінга	11	Чебишева 1	1.5	38
12	РФ	50	325	100	225	5	Блекмана	15	Чебишева 2	1.5	37
13	ФВЧ	400		200		20	Барлетта	7	Баттерфорта	2.5	40 ^x
14	ФВЧ	400		200		20	Ханна	9	Чебишева 1	1	45 ^x
15	ФВЧ	400		200		20	Хеммінга	13	Чебишева 2	1	47 ^x
16	ФВЧ	400		200		20	Блекмана	13	Баттерфорта	2.5	41 ^x
17	СФ	100	225	50	325	5	Барлетта	7	Чебишева 1	1.3	37
18	СФ	100	225	50	325	5	Ханна	9	Чебишева 2	1.3	36
19	СФ	100	225	50	325	5	Хеммінга	11	Баттерфорта	2	29
20	СФ	100	225	50	325	5	Блекмана	13	Чебишева 1	1.2	34
21	РФ	100	650	200	450	10	Барлетта	7	Чебишева 2	1.2	35
22	РФ	100	650	200	450	10	Ханна	9	Баттерфорта	2.5	28
23	РФ	100	650	200	450	10	Хеммінга	11	Чебишева 1	1.5	38
24	РФ	100	650	200	450	10	Блекмана	13	Чебишева 2	1.5	39
25	ФВЧ	200		100		10	Барлетта	7	Баттерфорта	2.4	33 ^x
26	ФВЧ	200		100		10	Ханна	9	Чебишева 1	1.4	50 ^x
27	ФВЧ	200		100		10	Хеммінга	11	Чебишева 2	1.4	51 ^x
28	ФВЧ	200		100		10	Блекмана	13	Баттерфорта	2.4	36 ^x

¹ Ослаблення ар, as задано в дБ, позначка «х» визначає ослаблення в кратах (в скільки разів)

2 ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Фільтри є системами, які змінюють форму сигналів з певною метою. Відповідно, фільтрацією називають цілеспрямоване перетворення сигналів, при якому у вхідному сигналі цілеспрямовано змінюються певні параметри в різних компонентах сигналу.

Зазвичай метою фільтрації є виділення інформаційних параметрів в сигналі; покращення якості сигналу шляхом максимального придушення шумів, завад з мінімальним впливом на корисний сигнал. Фільтрація комплексного сигналу в складі інформаційної та шумової компоненти полягає в зменшенні спектральних складових, які належать до шуму, з мінімальним впливом на спектральні складові, які відносяться до корисного сигналу.

Цифрова фільтрація може бути реалізована на апаратному рівні у вигляді схем цифрової електроніки або програмну рівні у вигляді математичного алгоритму мікропроцесорної системи.

В роботі розглядаються фільтри частотної селекції (ФЧС, вибіркові, трансверсальні, transversal), які можна вважати найпоширенішими типами фільтрів. ФЧС виконують частотно-залежну обробку сигналів, шляхом зміни співвідношення між амплітудами спектральних складових сигналу. При цьому форма сигналу теж змінюється.

Дискретним вважають фільтр, для яких аргумент визначається дискретними цілими або натуральними значеннями, з сталим кроком T , який називають періодом дискретизації. Тобто характеристики дискретного фільтру описуються дискретними (сітчастими) функціями значення яких визначені аналітично без помилок заокруглення.

Цифровим фільтром (ЦФ) вважають дискретний фільтр, коефіцієнти характеристик якого мають квантовані цифровані значення, тобто, розраховані не точно, а мають похибку заокруглення, яка викликана скінченою розрядністю подання чисел в комп'ютерних засобах, особливо в сигнальних цілочисельних процесорах. Використання процесорів з 64-бітними і більше числами з плаваючою точкою мінімізує похибки заокруглення, тому можна припустити, що реалізовані на таких системах фільтри є «майже дискретними».

2.1 Абсолютні та нормовані аргументи, основна смуга частот

Для опису цифрових систем застосовують нормовані аргументи – нормований час, нормовану довжину, нормовану частоту.

Нормування в часово-просторовій області проводиться на крок між двома сусідніми відліками сітчастої функції – період дискретизації T :

$$t^* = \frac{t}{T}, \quad x^* = \frac{x}{T}.$$

Нормований аргумент $t^*(x^*)$ точках вибірки $t=nT$ ($x=nT$) має ціле значення n та означає номер відліку, тобто в нормованих координатах період дискретизації дорівнює одиниці $T^*=1$:

$$t^* = \frac{nT}{T} = n, \quad x^* = \frac{nT}{T} = n.$$

Нормовані часово-просторові аргументи дозволяють перейти в описах до функцій цілочисельних аргументів, для яких

$$f(t) = f(nT) = f(t^*) = f(n).$$

В часово-просторовій області дискретні системи описуються для абсолютних значень простору-часу сітчастими функціями $f(nT)$, для нормованих значень простору-часу – сітчастими функціями $f(n)$.

Для практичної реалізації мовами програмування або засобами систем комп'ютерної математики виконання умови нескінчених меж неможливо. Тому максимальна кількість відліків N , відповідно, область визначення сітчастих функції для опису дискретних систем завжди обмежена інтервалом спостереження $T_N=NT$ (рис. 2.1 б, рис. 2.2 в).

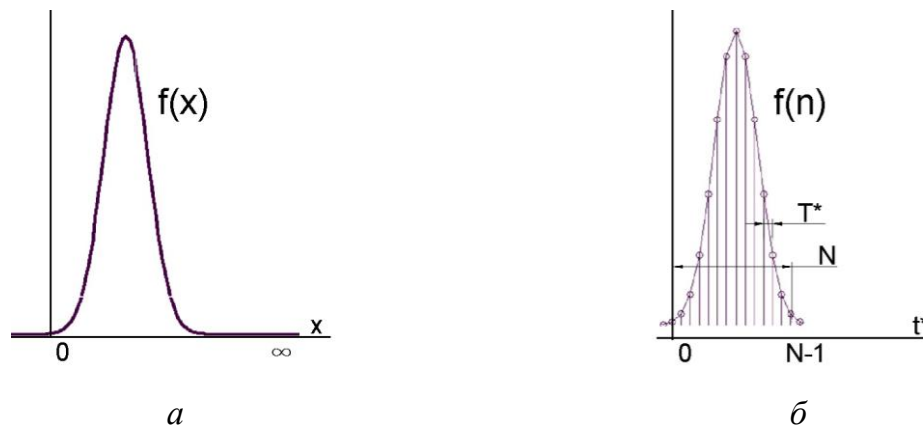


Рис. 2.1 – Дискредитація в часовому просторі: *a* – безперервна функція;
б – сітчаста функція з додатним аргументом

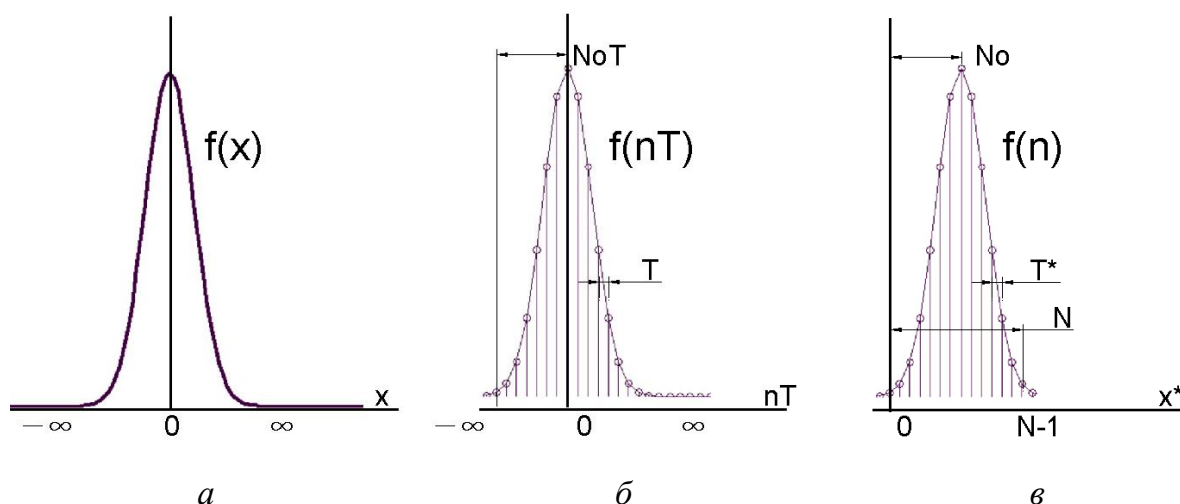


Рис. 2.2 – Дискредитація в просторі: *a* – безперервна функція; *б* – сітчаста функція; *в* – сітчаста функція з додатним аргументом

Для часових систем загальноновживаним є використання тільки додатних значень аргументу t . Відповідно, змінна n є додатним числом.

Для просторових систем цілком прийнятні від’ємні значення просторових аргументів як для безперервних координат (рис. 2.2 *a*), так і для сітчастих (рис. 2.2 *б*). Відповідно, для просторових систем змінна n є цілим числом. Прийняте в обробці сигналів індексування сітчастих функцій $f(n)$ додатними числами потребує зміни виразів опису функцій для врахування додаткового зсуву функції на NoT для абсолютних координат та на No для нормованих. NoT (No) – відстань від початку інтервалу спостереження до нуля, тобто за такою індексацією описується не функція $f(t)$, а зсунута функція $f(t-NoT)$. Це слід обов’язково враховувати при фазових аналізах систем.

В частотній області дискретні системи описуються сітчастими функціями $F(nf_1)$, $F(n)$, де f_1 – крок між аргументами двох сусідніх виборок функції.

Для практичної реалізації процесорними засобами, як і для часово-просторової області максимальна кількість відліків, відповідно, область визначення сітчастих функцій в спектральній області завжди обмежена інтервалом спостереження f_N .

Для забезпечення симетричності спектральних перетворень максимальні кількості точок виборки в просторово-часовій та спектральній області беруться однаковими N :

$$N = \frac{T_N}{T} = \frac{f_N}{f_1}.$$

Нормування в спектральній області проводиться на частоту дискретизації f_T :

$$f^* = \frac{f}{f_T}.$$

Для дискретних систем частоту дискретизації обирають рівною частоті Найквіста-Котельнікова:

$$f_T = f_{NK} = \frac{1}{T}.$$

Частота Найквіста визначає ширину спектра сигналу та період його повторення. За теоремою Котельнікова-Найквіста максимальна частота в спектрі сигналу не має перевищувати половину частоти Найквіста.

Нормована частота для частоти Найквіста має значення 1.

Смуга частот від 0 до половини частоти Найквіста називається *основною смугою частот* або основним діапазоном частот. Для абсолютних значень основна смуга:

$$\Delta f = \left[0 \frac{f_{NK}}{2}\right], \quad \Delta \omega = [0 \pi f_{NK}],$$

для нормованих:

$$\Delta f^* = [0 0.5], \quad \Delta \omega^* = [0 \pi].$$

В галузі обробки сигналів всі описи проводяться з сітчастими функціями у вигляді масивів, векторів з додатним цілочисельним аргументом. Значення аргументу означає номер відліку. Нумерація в виразах опису починається з 0. Тобто нульовий (перший по порядку) відлік відповідає нульовому значенню аргументу в абсолютних та нормованих координатах. Кількість елементів в масивах, векторах відповідає кількості відліків сітчастої відповідної функції.

2.2 Параметри та характеристики цифрових фільтрів

Примітка.

На відміну від теорії систем, де терміни є сталими, однозначними та загальнозживаними, в царині цифрової обробки в україномовній літературі автори доволіно називають параметри та характеристики. Крім терміну «імпульсний відгук» вживають «імпульсна характеристика». Крім терміну «передаточна/передавальна характеристика» вживають «передатна функція», «характеристична функція», «комплексна частотна характеристика», «частотна характеристика», «коефіцієнт передачі». В

подальшому ми будемо орієнтуватися на англomовні джерела та використовувати терміни для просторово-часової області – «імпульсний відгук» (*impulse response*), для частотної області – «частотний відгук» (*frequency response*), для z -області – «передавальна функція» (*transfer function*).

2.2.1 Опис фільтрів в часово-просторовій області

ЦФЧС визначаються для абсолютних значень простору-часу сітчастою функцією $h(nT)$, для нормованих значень простору-часу – сітчастою функцією $h(n)$, або вектором \vec{h} імпульсного відгуку (*impulse response*):

$$h(n), \quad n = 0 \dots N - 1,$$

або векторами \vec{a}, \vec{b} внутрішніх параметрів фільтра:

$$b(n), \quad n = 0 \dots N - 1, \quad a(k), \quad k = 1 \dots M - 1.$$

Імпульсний відгук визначає реакцію фільтра на цифровий одиничний імпульс $x_0(n)$ за нульових початкових умов:

$$x_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

Нульові початкові умови означають відсутність реакції при відсутності впливу, тобто $y(n) = 0$, коли $x(n) = 0$.

Процес фільтрації, перетворення вхідного сигналу $x(n)$ у вихідну реакцію $y(n)$ може описуватися залежностями двох видів:

- формулою цифрової згортки (*convolution*);
- різницеvim рівнянням (*Difference Equations*).

Вираз цифрової згортки в цифровій обробці є дискретним наближенням інтегрального перетворення Дюамеля, та має наступний загальний вигляд:

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k),$$

$$-\infty < n < \infty$$

де $h(n)$ – вектор імпульсного відгуку; $x(n)$ – вектор довільного вхідного сигналу; $y(n)$ – вектор реакції фільтра на вхідний сигнал.

Слід відзначити, що наведений вираз відтворює аналітичний розрахунок тільки якісно. Результати розрахунку за ним відрізняються кількісно та за фізичними розмірностями.

За реалізації мовами програмування або засобами систем комп'ютерної математики виконання умови нескінчених меж неможливо. Кількість елементів у векторах $h(n)$, $x(n)$, $y(n)$ завжди обмежена. З урахуванням цього формула цифрової згортки набуває наступного вигляду:

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = \sum_{k=0}^{M-1} x(k) \cdot h(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \cdot x(n-k),$$

$$0 < n < L = N + M - 1$$

Примітка.

Наведена формула використовується в просторі часу з врахуванням умови фізичної реалізації за нульових початкових умов:

$$x(n) = 0, \quad h(n) = 0, \quad y(n) \quad \text{для } n < 0.$$

В мовах програмування індексація масивів проводиться не з 0, а з 1. Тому вирази меж/індексів мають інший вигляд.

Наведена формула в теорії систем та моделюванні має назву згортка скінчених масивів та не дозволяє застосовування разом із спектральними Фур'є-перетвореннями, які вимагають використання виразу циклічної згортки.

Лінійне різницеве рівняння у загальному випадку записують як:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) \cdot x(n-k) - \sum_{l=1}^{M-1} a(l) \cdot y(n-l),$$

$$n = 0 \dots N + M - 1,$$

де $b_k = b(k)$, $a_l = a(l)$ – коефіцієнти (дійсні константи), які називають внутрішніми параметрами фільтру; $x(n)$, $y(n)$ – вектори вхідного сигналу та реакції фільтру (дійсні або комплексні числа); k , l – індекси (додатні цілі числа), які мають значення затримки для сигналу та реакції, відповідно; N , M – довжини векторів послідовностей (натуральні константи);

Порядок різницевого рівняння – $\max(M-1, N-1)$ визначає порядок фільтра.

Якщо хоча б один з коефіцієнтів a_l різницевого рівняння не дорівнює нулю, то такий фільтр називається *рекурсивним* (recursive).

Якщо всі коефіцієнти a_l різницевого рівняння дорівнюють нулю, то такий фільтр називається *нерекурсивним* (nonrecursive).

Для нерекурсивних фільтрів різницеве рівняння спрощується:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) \cdot x(n-k), \quad n = 0 \dots M-1.$$

Імпульсний відлік нерекурсивного фільтру $h(n)$ має скінчену тривалість та співпадає з вектором b параметрів фільтра:

$$h(n) = b_n, \quad n = 1 \dots N-1.$$

Нерекурсивні фільтри називають *фільтрами зі скінченим імпульсним відгуком* (СІВ, Finite Impulse Response, FIR).

Якщо імпульсний відгук фільтрів має нескінчену тривалість, то такі фільтри називають *фільтрами з нескінченим імпульсним відгуком* (НІВ, Infinite Impulse Response, IIR). Зазвичай рекурсивні фільтри є НІВ фільтрами.

Поняття НІВ та рекурсивний НЕ Є ТОТОЖНИМИ. Наприклад фільтр із передавальною функцією:

$$H(z) = \frac{1 - \alpha^p z^{-p}}{1 - \alpha z^{-1}}.$$

є СІВ фільтром, але може бути реалізований як рекурсивний:

$$y(n) = \alpha y(n-1) + x(n) - \alpha^p x(n-p),$$

або нерекурсивний фільтр:

$$y(n) = x(n) + \alpha x(n-1) + \dots + \alpha^{p-1} x(n-p+1).$$

Примітка.

В багатьох джерелах з цифрової обробки імпульсний відгук називають імпульсною характеристикою, тому фільтри мають назву фільтрів зі скінченою/нескінченою імпульсною характеристикою (СІХ/НІХ).

2.2.2 Опис в частотній області

В частотній області властивості фільтрів визначаються *частотним відгуком*, який є інтегральним Фур'є-перетворенням імпульсного відгуку фільтра:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt.$$

Частотний відгук є комплексною функцією. Модуль частотного відгуку називають *амплітудно-частотною характеристикою* $K(f)$ (АЧХ), а аргумент – *фазо-частотною характеристикою* $F(f)$ (ФЧХ).

Для ЦФ інтегральне перетворення замінюється дискретним перетворенням Фур'є (ДПФ):

$$H(f_d = nf_1) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) \exp(-j2\pi n f_1 kT),$$

$$n = -\infty \dots \infty.$$

де T – період дискредитації імпульсного відгуку; f_d – дискретна частота; f_1 – період дискредитації за частотою.

З урахуванням симетрії прямого та оберненого перетворення Фур'є ($T = \frac{1}{f_1 N}$), скінченності та способу індексації масивів вирази в абсолютних координатах набувають наступного вигляду:

$$Y(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} y(k) \exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N}\right), \quad y(n) = f_1 \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \exp\left(j2\pi \frac{nk}{N}\right)$$

$$n = 0 \dots N - 1.$$

Примітка.

Існує відмінність у визначення Фур'є перетворення в академічних та комп'ютерних джерелах. Різниця полягає в знаку обертаючого експоненційного множника. Наведена вище формули відповідає природничим та технічним джерелам. В літературі з комп'ютерної тематики знаки часто обернені та застосовується інший множник перед сумою.

Результат ДФП є періодичним з періодом $1/T$, розміщення елементів в векторі результату відрізняється від аналітичного результату (рис. 2.3). Відмінність полягає в тому, що Фур'є спектр визначений в діапазоні $-\infty < f < \infty$ ($-f_{\max} < f < f_{\max}$), а спектр ДФП визначений в діапазоні $0 < f_d < Nf_1$. Тому перша половина результату містить елементи, які відповідають додатним значенням частоти, а друга половина результату містить зсунуті на період значення для від'ємних частот.

В багатьох джерелах з цифрової обробки сигналів говорять про знаходження імпульсного відгуку цифрових фільтрів застосуванням оберненого перетворення Фур'є. Це не є вірним. Імпульсний відгук ЦФ знаходиться розкладанням в ряд Фур'є періодичної з періодом f_T функції

спектрального відгуку ЦФ по коефіцієнтах розкладання h_n які відстоять один від одного на крок дискретизації T :

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \exp(-j2\pi n f T), \quad h_n = \frac{1}{f_T} \int_{-\frac{f_T}{2}}^{\frac{f_T}{2}} H(f) \exp(j2\pi n f T) df$$

$$n = -\infty \dots \infty$$

Або з врахуванням скінченності масивів та способу індексації масивів:

$$H(n f_1) = H(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(-j2\pi k n f_1 T), \quad h_k \approx \frac{1}{N_T} \sum_{k=0}^{N-1} H(k f_1) \exp(j2\pi \frac{nk}{N})$$

$$n = 0 \dots N-1$$

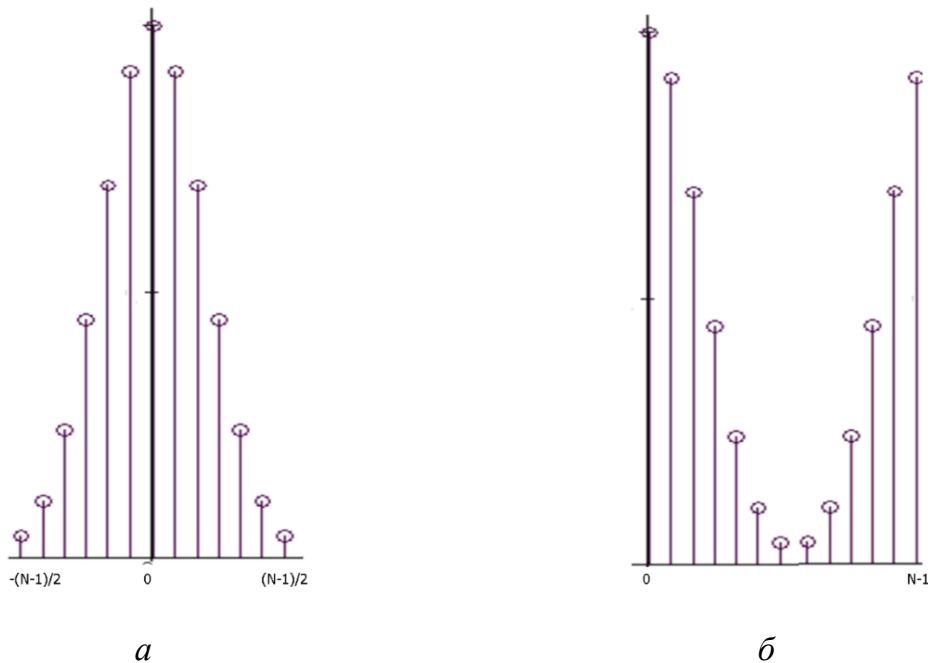


Рис.2.3 – Фур’є-спектр: *a* – з цілочисленими індексами; *б* – з додатними цілими індексами

Передавальна функція

Для спрощення аналізу та проектування ЦФ застосовують опис фільтрів в комплексній z -площині. Використання перетворення дозволяє перевести різницеві рівняння в алгебраїчні, забезпечити спрощення аналізу стійкості та розрахунок частотного відгуку фільтра.

Передавальна функція (ПФ, передаточна функція, transfer function) – це відношення z -зображення реакції до z -зображення впливу при нульових початкових умовах.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Z(h(n))}{Z(x_0(n))} = Z(h(n)).$$

Передавальна функція фільтра $H(z)$ та імпульсний відлік $h(n)$ пов'язані між собою одностороннім прямим та оберненим z -перетворенням:

$$H(z) = Z(h(n)) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}, \quad h(n) = Z^{-1}(H(z)) = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z)z^{n-1}dz.$$

З іншого боку

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{l=1}^{M-1} a_l z^{-l}}.$$

Наведений вираз показує зв'язок між передавальною функцією та різницевою рівнянням. Багаточлен чисельника ПФ співпадає з СІВ частиною різницевого рівняння. Знаменник ПФ є сумою 1 та рекурсивної частини різницевого рівняння. При цьому величина затримки відліку $x(n-k)$ позначається відповідним степенем z^{-k} .

Передавальна функція записується в декількох виглядах (рис. 2.4), де α – полюси; β – нулі передавальної функції.

Порядок передавальної функції співпадає з порядком різницевого рівняння $\max(M-1, N-1)$ та визначає порядок фільтра.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{l=1}^{M-1} a_l z^{-l}} & H(z) &= \frac{\beta_0 \prod_{i=1}^{N-1} (1 - \beta_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M-1} (1 - \alpha_k z^{-1})} \\ & \text{a} & & \text{б} \\ H(z) &= \frac{\prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_{0i} + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} (1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2})} & H(z) &= \sum_{k=1}^{M-1} H_k(z) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{A_k}{(1 - \alpha_k z^{-1})} \\ & \text{в} & & \text{г} \\ H(z) &= \sum_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} & & \text{д} \end{aligned}$$

Рис. 2.4 – Форми запису передавальної функції: *a* – у вигляді правильної дробово-раціональної функції; *б* – у вигляді відношення добутоків з розкладанням чисельника й знаменника на найпростіші множники першого степеня; *в* – у вигляді відношення добутоків з розкладанням чисельника й знаменника на найпростіші множники другого степеня; *г* – у вигляді суми простих дробів першого степеня; *д* – у вигляді суми простих дробів другого степеня

Між перетворенням Фур'є та z-перетворенням існує однозначний зв'язок. Переведення передатної функції в частотний відгук проводиться підстановкою $z = \exp(j2\pi fT)$:

$$H(z = e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-j\omega T k}}{1 + \sum_{l=1}^{M-1} a_l e^{-j\omega T l}} = H(\omega)$$

Серед ФЧС залежно вигляду частотного відгуку розрізняють наступні типи фільтрів:

- фільтр нижніх частот (ФНЧ, lowpass filter). ФНЧ пропускає низькочастотні сигнали з частотою нижче верхньої граничної частоти зрізу, яку називають частотою зрізу f_c (cutting frequency), та придушує сигнал на частотах вище граничної (рис. 2.5 а);
- фільтр верхніх частот (ФВЧ, highpass filters). Має дію, зворотну до дії ФНЧ. ФВЧ пропускає високочастотні сигнали з нижньої граничної частоти f_c та придушує сигнал на частотах нижче граничної (рис. 2.5 б);
- смуговий фільтр (СФ, bandpass filters). СФ пропускає сигнали в визначеній смузі частот вище нижньої граничної частоти до верхньої граничної частоти. За межами смуги сигнали придушуються (рис. 2.5 в);
- режекторний або загороджувальний фільтр (ЗФ, РФ, bandreject, bandstop filters). Має дію, зворотну до дії СФ. ЗФ пропускає сигнали за межами визначеній смузі частот нижче нижньої граничної частоти та вище верхньої граничної частоти. Всередині смуги сигнали придушуються (рис. 2.5 г).

Інтервал частот, на яких фільтр пропускає сигнал з мінімальним ослабленням, називається смугою пропускання (СП, passband).

Проміжок частот, на яких фільтр суттєво ослаблює сигнал, називається смугою затримки або запирання (СЗ, stopband).

2.2.3 Структура цифрового фільтру

Структура фільтру є графічним зображенням, яке відбиває алгоритм роботи фільтра за його різницеvim рівнянням. Малюється структура з позначками та правилами, схожими на структурні електричні схеми. Умовними елементами є ланка затримки (рис. 2.6 а), ланка підсилення-множення (рис. 2.6 б), суматор (рис. 2.6 в).

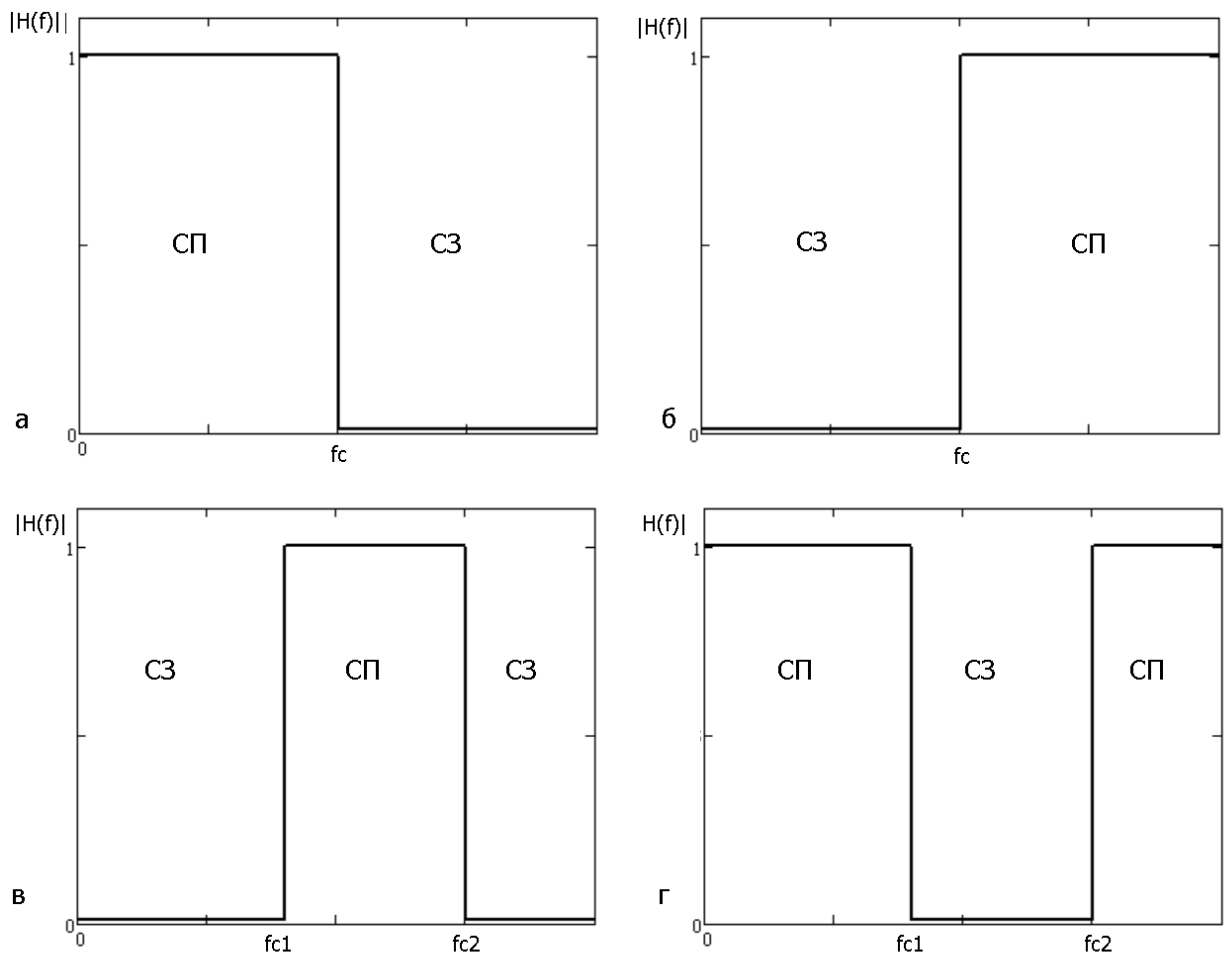


Рис. 2.5 – Частотний відгук типових ідеальних ФЧС: *a* – ФНЧ; *б* – ФВЧ; *в* – СФ; *г* – ЗФ

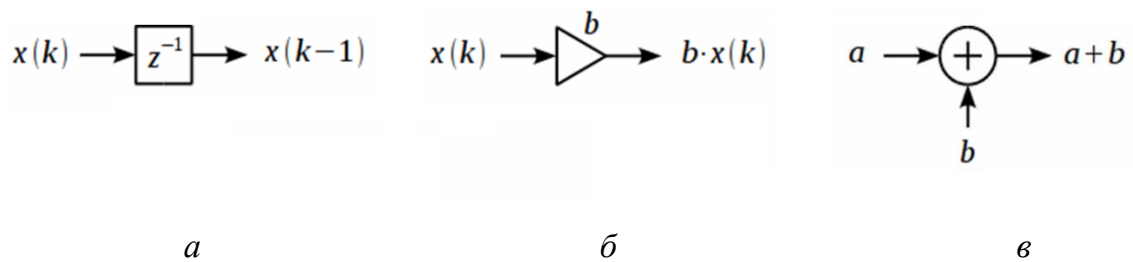


Рис. 2.6 – Умовні позначки структури фільтру: *a* – ланка затримки; *б* – ланка підсилення-множення; *в* – суматор

Для нерекурсивних фільтрів різницеве рівняння містить тільки коефіцієнти b_i та має спрощений вид:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) \cdot x(n-k) - \sum_{l=1}^{M-1} a(l) \cdot y(n-l),$$

Відповідно схема структури таких фільтрів є лінійною (рис.2.7).

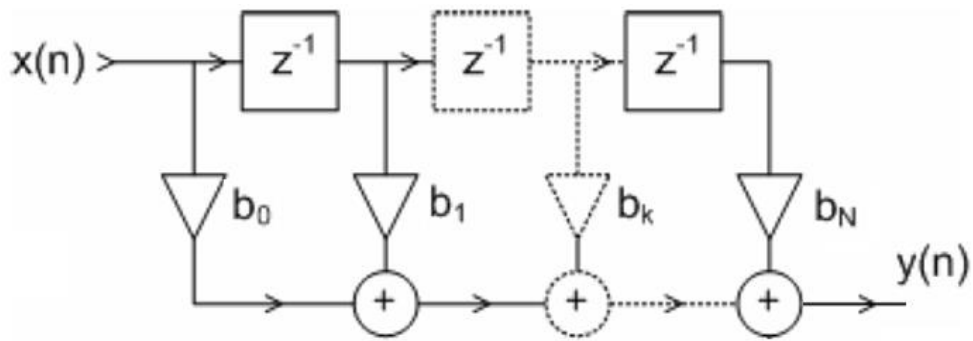


Рис. 2.7 – Структура нерекурсивного фільтра

Різницеве рівняння рекурсивних фільтрів містить обидві групи коефіцієнтів a_i та b_i :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) \cdot x(n-k) - \sum_{l=1}^{M-1} a(l) \cdot y(n-l),$$

тому структура відображає від'ємний зворотній зв'язок. Топологія структури залежить від форми запису передавальної функції фільтра (рис. 2.4). Вона може бути зображена у вигляді однієї з трьох канонічних форм, в каскадному вигляді тощо. На рисунку 2.8 наведено приклад структури рекурсивного фільтра в першій канонічній формі, коли передавальна функція записується як правильний дріб (рис. 2.4 а).

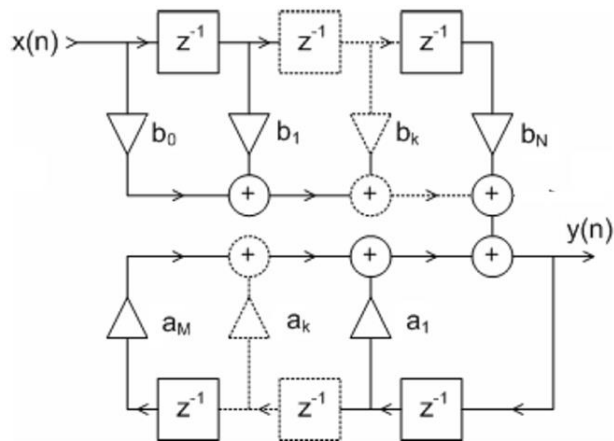


Рис. 2.8 – Структура рекурсивного фільтра

2.2.4 Специфікація цифрових фільтрів

В реальних ЦФЧС в зонах СП та СЗ коефіцієнт перетворення не є сталим, миттєвий перехід між СП та СЗ неможливий. Перехідні процеси призводять до появи між цими смугами частотного проміжку – *перехідної смуги* (ПС, transition band) шириною Δf . В ПС коефіцієнт передачі ЦФПС

стрімко змінюється (рис. 2.9). Межі СП, СЗ, ПС визначаються верхню частотою смуги пропускання – f_p , нижню частотою смуги затримки – f_s .

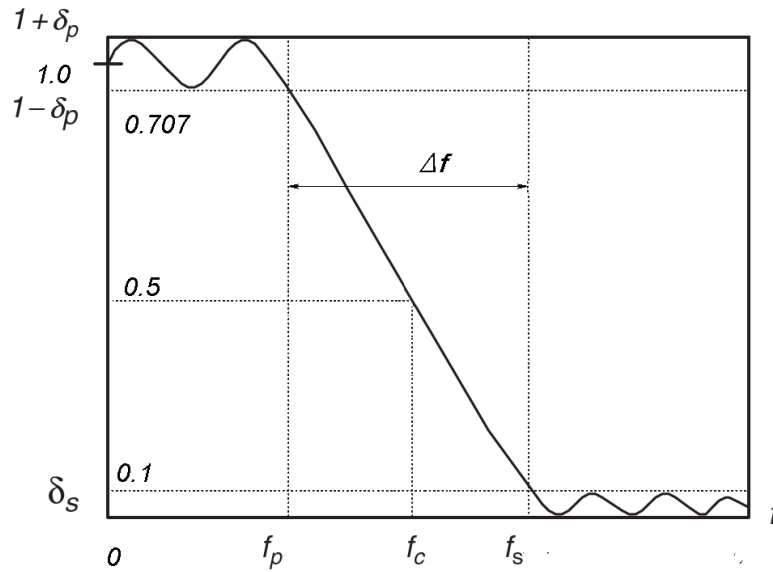


Рис. 2.9 – Модуль частотного відгуку реального ЦФЧС

Реальні фільтри мають нерівномірне значення та викиди (ripples) коефіцієнта пропускання на межах смуг.

Графік частотного відгуку може зображуватися в абсолютних одиницях або в логарифмічному масштабі по осі частот та в децибелах по осі ординат.

Частотний відгук в децибелах $20\lg(K(f))$ в англійських джерелах називається підсиленням (*gain*) та позначають як G – $G(f)=K(f)$. Значення ЧВ 0 дБ, показує, що фільтр не змінює амплітуду сигналу. Додатні значення ЧВ говорять про підсилення сигналу, від’ємні – про послаблення. Коли ЧВ описує амплітудний сигнал (струм, напруга тощо), то зміна сигналу в 2 рази відповідає ± 6 дБ. Коли ЧВ описує сигнал потужності (променевий потік, потужність, вольт-ампери тощо), то зміна сигналу в 2 рази відповідає 3 дБ.

Зміна потужності в 2 рази відповідає зміні амплітуди в 1.4142 (0.7071):

$$10 \lg \left(\frac{2P}{P} \right) = 3.0103 \text{ дБ} \quad 20 \lg \left(\frac{2U}{U} \right) = 6.0206 \text{ дБ} \quad 20 \lg \left(\frac{\sqrt{2}U}{U} \right) = 3.0103 \text{ дБ}$$

Зміну амплітуди частотного відгуку на частоті f_δ в абсолютних значеннях задають відхиленням δ від сталого рівня як абсолютну похибку та/або параметром – ε_δ :

$$K(f_\delta) = G(f_\delta) = 1 - \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_\delta^2}}.$$

Для СП та СЗ зміну задають *відхиленням* δ_p, δ_s , параметрами $-\varepsilon_p, \varepsilon_s$, та коефіцієнтом їхнього відношення k_ε :

$$K(f_p) = 1 - \delta_p = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2}}, \quad K(f_s) = \delta_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_s^2}}, \quad k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s}.$$

Відхилення для СП $\delta_p = |K(0) - K(f_p)| = |1 - K(f_p)|$, для СЗ $\delta_s = K(f_s)$.

В логарифмічних одиницях (дБ) рівень зміни амплітуди визначається ослабленням/затуханням (attenuation) – a (інколи R):

$$a = R = 10 \lg\left(\frac{1}{G^2}\right) = 20 \lg\left(\frac{1}{G}\right) = 20 \lg(\sqrt{1 + \varepsilon^2}) = 20 \lg\left(\frac{1}{K}\right) = -20 G_{\text{дБ}}$$

Ослаблення є додатним значенням, яке показує на скільки спадає сигнал в СП та на скільки подавляється сигнал в СЗ.

Для СП: $a_p = -20 \lg(1 - \delta_p) = -20 \lg(K(f_p)) = 20 \lg(\sqrt{1 + \varepsilon_p^2})$,
для СЗ: $a_s = -20 \lg(\delta_s) = -20 \lg(K(f_s)) = 20 \lg(\sqrt{1 + \varepsilon_s^2})$.

$$k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = \frac{10^{0.1a_p} - 1}{10^{0.1a_s} - 1}.$$

Частота зрізу для реальних ЦФЧС f_c визначається як частота на якій коефіцієнт передачі за потужністю змінюється в 2 рази (+6 дБ), або через частоти СП, СЗ:

$$f_c = \frac{f_p + f_s}{2}.$$

Ширина ПС визначається абсолютною величиною $\Delta f = |f_s - f_p|$ та відносним коефіцієнтом $k_f = k_\omega = \frac{f_p}{f_s} = \frac{\omega_p}{\omega_s}$.

Усталені правила визначення граничних частот відсутні. Застосовують кілька підходів.

За першим варіантом гранична частота СП визначається за рівнем 0.707 (-3 дБ) коефіцієнта передачі СП, а частота СЗ за рівнем, коли сигнал ослаблюється в 10 разів (до рівня 0.1 або на -20 дБ).

Другий підхід, пов'язує визначення граничних частот не з фіксованим рівнем, а з обраною величиною пульсацій амплітуди спектрального відгуку відносно усталених рівнів δ_p, δ_s ($-\varepsilon_p, \varepsilon_s$).

Для визначення ЦФСЦ задаються:

- тип фільтру: ФНЧ, ФВЧ, тощо;
- частота дискретизації f_T (Гц);
- частота зрізу f_c (Гц);
- припустимі викиди відхилення в СП δ_p ;
- послаблення в СП a_p ;
- припустимі викиди відхилення в СЗ δ_s ;
- послаблення в СЗ a_s ;
- частоти СП f_p та СЗ f_s та ширину ПС Δf ;

Примітка.

Слід зауважити, що для СП фільтрів припустиме відхилення враховується симетрично в два боки так, що $K_0 - \delta_p \leq |K(f)| \leq K_0 + \delta_p$. Для СЗ фільтрів припустиме відхилення відбувається в один бік.

3 РОЗРАХУНОК ФЧС

Методи розрахунку ЦФЧС розділяють:

- за типом фільтра на методи синтезу СІВ фільтрів та методи синтезу НІВ фільтрів.
- за наявністю аналога: з використанням аналогового прототипу та прямі методи синтезу.

В роботі розглядаються методи розрахунку за аналогом як такі, що показують всі типові процедури синтезу на є найменш витратними з точки зору використання математичних та комп'ютерних засобів.

3.1 Розрахунок СІВ фільтрів

Найбільш розповсюдженими для розрахунку СІВ фільтрів є три методи:

- метод зважування або метод вікна;
- метод мінімізації похибки припустимого відхилення за критерієм Чебишева. Оптимізація в методі проводиться за алгоритмом Ремеза;
- метод частотної вибірки спектрального відгуку.

3.1.1 Метод зважування, метод вагового вікна

Метод є методом розрахунку за аналогом. Аналогом виступає ідеальний ФНЧ з частотою зрізу f_c .

В багатьох джерелах розглядають аналоговий фільтр. Для такого фільтра аналоговий імпульсний відгук аналітично заходиться оберненим перетворенням Фур'є з наступною дискретизацією з періодом T :

$$h(t) = \int_{-f_c}^{f_c} H(f) \exp(j2\pi ft) df$$
$$h(t) = 2 \int_0^{f_c} \cos(2\pi ft) df = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} = 2f_c \text{sinc}(2\pi f_c t)$$
$$h(nT) = h(n) = 2f_c \text{sinc}(2\pi f_c nT) = 2f_c \text{sinc}(2\pi f_c^* n)$$
$$n = -\infty \dots \infty$$

Вказаний підхід не можна вважати вірним.

Результат отримується методично вірно з урахуванням того, що спектральний відгук дискретного фільтра є періодичним з періодом частоти дискретизації $f_T = 1/T$ (рис. 3.1 а). Таку функцію можна розкласти в ряд Фур'є з коефіцієнтами

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{1}{f_T} \int_{-\frac{f_T}{2}}^{\frac{f_T}{2}} H(f) \exp\left(-i2\pi \frac{f}{f_T} n\right) df = \frac{1}{-j2\pi n} \int_{-f_c}^{f_c} \exp(-i2\pi f n T) d(-i2\pi f n T) \\ &= \frac{\exp(-i2\pi f n T) - \exp(i2\pi f n T)}{-j2\pi n} = \frac{\sin(2\pi f_c n T)}{\pi n} \\ &= 2f_c^* \text{sinc}(2\pi n f_c^*), \quad -\infty < n < \infty \end{aligned}$$

Такий фільтр не є СІВ фільтром, бо кількість відліків нескінченна (рис. 3.1 б). Для обмеження інтервалу спостереження імпульсний відгук ідеального фільтра множиться на вагову функцію вікна $w(n)$ (табл. 3.1), яке має скінченний розмір N . В частотній області це еквівалентно згортці частотних відгуків ідеального фільтра та вагового вікна.

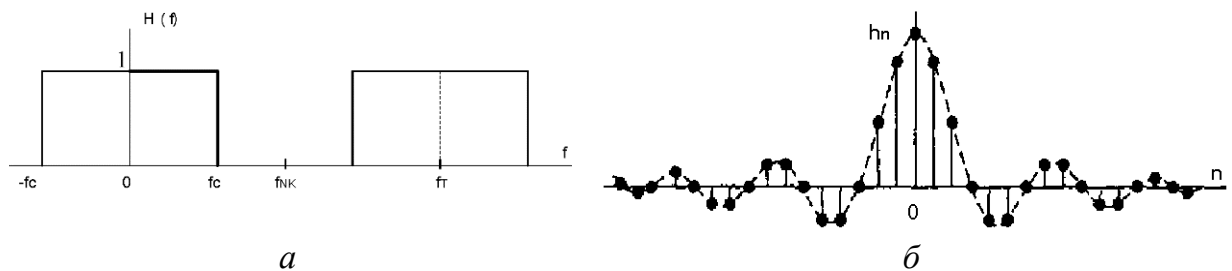


Рис. 3.1 – Відгук ідеального ФНЧ: а – частотний; б – імпульсний

Імпульсний відлік реального фільтра:

$$h_R(n) = h\left(n - \frac{N-1}{2}\right) w(n), \quad n = 0 \dots N-1,$$

де $w(n)$ вагова функція вікна (табл. 3.1).

Метод не дозволяє синтезувати фільтр з наперед визначеними значеннями ширини ПС та значень послаблення, пульсацій. Процес проводиться ітераційно збільшенням розміру фільтра.

Для вибору початкового значення розміру фільтра можна застосовувати емпіричну залежність:

$$N = \frac{C\pi}{\Delta f^*}.$$

Таблиця 3.1. Вагові вікна

Назва	Імпульсний відгук $w(n)$	C
Прямокутне вікно (вікно Діріхле)	$\begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & 0 > n > N-1 \end{cases}$	$\frac{0.9}{\Delta f^*}$
Трикутне вікно (вікно Барлетта, Barlett)	$\begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0, & 0 > n > N-1 \end{cases}$	
Косинусне вікно	$\begin{cases} a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & 0 > n > N-1 \end{cases}$ $a_0 + a_1 + a_2 = 1$	
Ханна (Hann)	$a_0 = 0.5 \quad a_1 = -0.5 \quad a_2 = 0$	$\frac{3.1}{\Delta f^*}$
Хеммінга (Hamming)	$a_0 = 0.54 \quad a_1 = -0.46 \quad a_2 = 0$	$\frac{3.3}{\Delta f^*}$
Блекмана-Херріса	$a_0 = 0.43 \quad a_1 = -0.5 \quad a_2 = 0.08$	$\frac{5.5}{\Delta f^*}$
Ланчос (Lanczos)	$\begin{cases} \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi(n - \frac{N-1}{2})}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & 0 > n > N-1 \end{cases}$	

Частотний відгук реального фільтра відповідно:

$$Hr(f) = \sum_{k=0}^{N-1} h_r(n) \exp(-j2\pi f k T).$$

Розрахована характеристика $Hr(f)$ не тотожна вихідній $H(f)$. Амплітудно-частотні характеристики співпадають, фазово-частотні різняться. Вихідний спектральний відгук має нульову фазово-частотну характеристику, розрахований – ненульову. Причина полягає в тому, що первинний ідеальний фільтр некаузальний (функція імпульсного відгуку визначена для від’ємних та додатних симетричних відносно нуля індексів), а для каузального фільтра проведений фазовий зсув на половину його ширини для забезпечення

індексування з 0. Наведена особливість призводить до того, що вихідні відгуки описуються дійсними функціями, а розраховані потребують комплексної математики.

Вихідний спектральний відгук $H(f)$ та розрахований $Hr(f)$ співвідносяться як

$$H(f) = \exp\left(\frac{j2\pi(N-1)f}{2}\right) Hr(f) = e^{j\pi(N-1)f} Hr(f).$$

Слід взяти до віdomу, що значення функцій спектрального відгуку розташовані не для послідовності теоретичного діапазону $f = -\frac{f_T}{2} \dots \frac{f_T}{2}$, а для діапазону $f = 0 \dots f_T$. При цьому перша половина значень відповідає додатному діапазону частот $f = 0 \dots \frac{f_T}{2}$. Друга половина значень $f = -\frac{f_T}{2} + f_T \dots 0 + f_T$ є значеннями для від'ємних частот $f = \frac{-f_T}{2} \dots 0$, які зсунуті на період.

3.1.2 Переведення ФНЧ в ФВЧ, СФ, ЗВ

Характеристики ФВЧ, СФ та ЗФ розраховуються по наявним характеристикам базового ФНЧ.

Для перетворень використовується ідеальний всечастотний фільтр та лінійні властивості фільтрів в часово-просторовій та частотній областях.

Всечастотний фільтр пропускає без змін всі частоти. Графік частотного відгуку являє собою нескінченну горизонтальну пряму.

Відповідно, його імпульсний відгук описується дельта функцією $h(t)=\delta(t)$. В дискретному варіанті – дискретною дельта функцією:

$$h_i(n) = \delta_d(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0. \end{cases}$$

Його різницеве рівняння має тільки один ненульовий коефіцієнт $a_0=1$, $a_i=0, i=1 \dots N-1$.

Частотний відгук ФВЧ отримується відніманням від частотного відгуку всечастотного фільтра частотного відгуку ФНЧ (рис. 3.2 а):

$$H_{ВЧ}(f) = H_{\delta}(f) - H_{НЧ}(F).$$

В просторово-часовій області внутрішні параметри ФВЧ, які дорівнюють відповідним коефіцієнтам імпульсного відгуку аналогічно

отримуються відніманням від параметрів різницевого рівняння всечастотного фільтра відповідних параметрів ФНЧ:

$$h_{\text{ВЧ}}(n) = h_{\delta}(n) - h_{\text{НЧ}}(n) = \begin{cases} 1 - h_{\text{НЧ}}(n), & n = 0 \\ -h_{\text{НЧ}}(n), & n \neq 1 \end{cases}.$$

Частотний відгук СФ отримується відніманням від частотного відгуку ФНЧ1 з частотою зрізу fc_1 частотного відгуку ФНЧ2 з частотою зрізу $fc_2 < fc_1$ (рис. 3.2 б):

$$H_{\text{СФ}}(f) = H_{\text{ФНЧ1}}(f) - H_{\text{ФНЧ2}}(f).$$

В просторово-часовій області внутрішні параметри СФ, які дорівнюють відповідним коефіцієнтам імпульсного відгуку аналогічно отримуються відніманням від параметрів різницевого рівняння ФНЧ1 відповідних параметрів ФНЧ2:

$$h_{\text{СФ}}(n) = h_{\text{ФНЧ1}}(n) - h_{\text{ФНЧ2}}(n), \quad n = 0 \dots N - 1.$$

Частотний відгук ЗФ отримується відніманням від частотного відгуку всечастотного фільтра частотного відгуку СФ (рис. 3.2 в):

$$H_{\text{ЗФ}}(f) = H_{\delta}(f) - H_{\text{СФ}}(f).$$

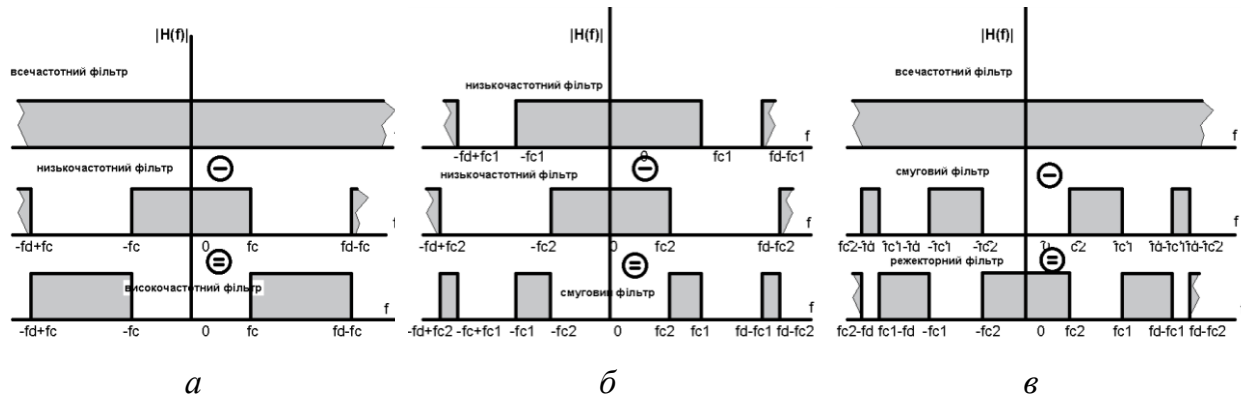


Рис. 3.2 – Схема перетворення ФЧС: а – частотний відгук ФВЧ; б – частотний відгук СФ; в – частотний відгук ЗФ

В просторово-часовій області внутрішні параметри ЗФ, які дорівнюють відповідним коефіцієнтам імпульсного відгуку аналогічно отримуються відніманням від параметрів різницевого рівняння всечастотного фільтра відповідних параметрів СФ:

$$h_{\text{ЗФ}}(n) = h_{\delta}(n) - h_{\text{СФ}}(n) = \begin{cases} 1 - h_{\text{СФ}}(n), & n = 0 \\ -h_{\text{СФ}}(n), & n \neq 1 \end{cases}.$$

Операцію переведення можна проводити в двох порядках. Обидва порядки за результатом тотожні, їх обрання обумовлюється зручністю програмної реалізації обраними комп'ютерними засобами.

Перший порядок полягає в тому, що переведення проводиться для некаузального ідеального фільтра h_n , для якого можна застосувати аналітичні вирази, які наведені в табл. 3.2. Другим кроком проводиться приведення запису виразу імпульсного відгуку для реального каузального фільтра так само, як і для ФНЧ.

Другий порядок відтворює наведені вище формули переведення вже для реального каузального фільтра. Тобто, спочатку розраховується імпульсний відгук реального ФНЧ, створюється вектор імпульсного відгуку всесигнального фільтра $h_\delta(0) = 1, h_\delta(n) = 0, n = 1 \dots N - 1$. Потім проводиться саме переведення за наведеними вище в цьому параграфі формулами.

Таблиця 3.2. Переведення ідеального ФНЧ ($f_{c2}^* > f_{c1}^*$)

Тип результуючого фільтра	Імпульсний відгук $h_n, n \neq 0$	Імпульсний відгук $h_n, n=0$
ФВЧ	$-\frac{\sin(2\pi f_c nT)}{\pi n}$	$1 - 2f_c^*$
СФ	$\frac{\sin(2\pi f_{c2} nT) - \sin(2\pi f_{c1} nT)}{\pi n}$	$2(f_{c2}^* - f_{c1}^*)$
ЗФ	$\frac{\sin(2\pi f_{c1} nT) - \sin(2\pi f_{c2} nT)}{\pi n}$	$1 - 2(f_{c1}^* - f_{c2}^*)$

3.1.3 Етапи розрахунку фільтрів СІВ методом зважування

1. Задати параметри специфікації фільтра.
2. Визначити початковий розмір фільтра довільно або за емпіричним співвідношенням з урахуванням типу обраного вікна.
3. Розрахувати імпульсний відгук некаузального ідеального фільтра.
4. Розрахувати за наявними імпульсним відгуком ідеального некаузального фільтра та функції вікна імпульсний відгук реального каузального фільтра.
5. За виразом ряду Фур'є розрахувати частотний імпульсний відгук реального фільтра.
6. Розрахувати контрольні параметри специфікації фільтра.
7. Якщо розраховані контрольні параметри вдовольняють умовам, то по імпульсному відгуку розрахувати різницеве рівняння. По різницевому рівнянню розрахувати передавальну функцію.

Побудувати структуру фільтра. Якщо розраховані контрольні параметри не вдовольняють умовам, то збільшити порядок фільтра та повторити дії п. 3 – 7.

В разі, якщо для порядку фільтра більше кількох тисяч розраховані контрольні параметри на задовольняються, варто метод розрахунку, бо реалізація таких фільтрів стає проблематичною.

3.2 Розрахунок НІВ фільтрів

НІВ фільтри можуть бути створені тільки як рекурсивні.

З методів, які використовують аналогові прототипи для розрахунку НІВ фільтрів використовують метод інваріантного перетворення імпульсного відгуку та метод білінійного z-перетворення.

Метод інваріантного перетворення не гарантує прийнятні результати синтезу ФВЧ та ЗФ.

Метод білінійного z-перетворення (метод дробово-лінійного перетворення)

Є універсальним методом розрахунку НІВ фільтрів частотної селекції всіх типів.

Метод полягає в переведенні передавальної функції Лапласа аналогового фільтра-прототипу відповідного типу в передавальну функцію дискретного фільтра $H(z)$ заміною змінних s на z білінійним перетворенням:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Дії методу z-білінійного перетворення складаються з наступних етапів:

- підготовка вхідних даних для розрахунку аналогового фільтра-прототипу;
- розрахунок передавальної функції Лапласа аналогового фільтра-прототипу;
- отримання передавальної функції дискретного фільтра z-білінійним перетворенням;
- розрахунок параметрів специфікації дискретного фільтра.

3.2.1 Підготовка вхідних даних

Білінійне перетворення переводить комплексну змінну s аналогової площини в комплексну змінну z дискретної з періодом дискретизації T площину $z = e^{sT} \rightarrow s = \frac{\ln(z)}{T}$.

Розклавши в $\ln(z)$ ряд Тейлора та залишивши перший член ряду отримаємо

$$\ln(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{2n+1} \approx 2 \frac{z-1}{z+1}.$$

Відповідно

$$s = \frac{\ln(z)}{T} \approx \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \quad z = \frac{\gamma+s}{\gamma-s}, \quad \gamma = \frac{2}{T}.$$

Наведений вираз називають білінійним –перетворенням, яке забезпечує однозначний зв'язок між передавальною функцією Лапласа аналогових систем та передавальною функцією дискретних систем

$$H(z) = H\left(s = \gamma \frac{z-1}{z+1}\right), \quad H(s) = H\left(z = \frac{\gamma+s}{\gamma-s}\right).$$

Перетворення переводить точки нескінченної s -площини в коло одиничного радіуса z -площини (рис. 3.3).

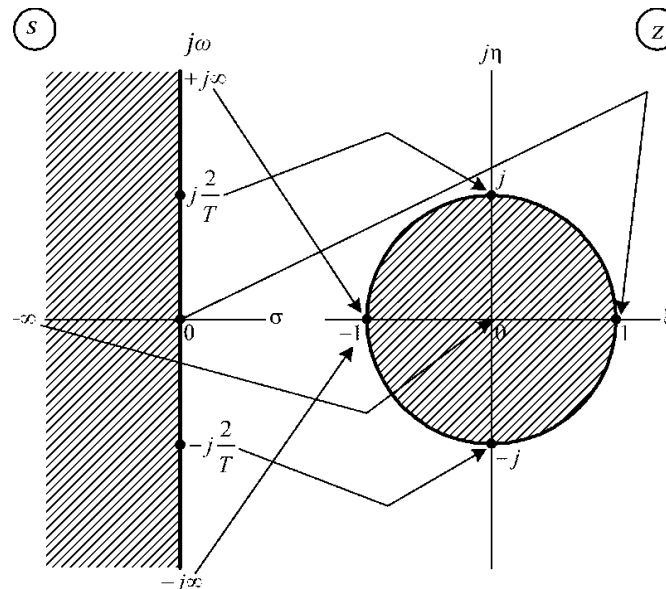


Рис. 3.3 – Білінійне перетворення

Уявна вісь s -площини ($s = j\omega$) відображається на одиничне коло z -площини. Фазовий кут точки на осі монотонно змінюється від $-\pi$ до π за умови монотонної зміни аналогової частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$.

Частотний відгук аналогового фільтра обчислюється по уявній осі $s = j\omega$, частотний відгук дискретного фільтра обчислюється по одиничному колу $z = e^{j\omega_d T}$. При цьому всі екстремуми та нерівномірності АЧХ аналогового фільтра зберігаються в АЧХ дискретного фільтра. Але шкала частот деформується з причини нелінійного співвідношення перетворення між аналоговими та дискретними частотами.

$$s = j\omega_a = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \Big|_{z = e^{j\omega_d T}}, \quad j\omega_a = j \frac{2}{T} \frac{(e^{\frac{j\omega_d T}{2}} - e^{-\frac{j\omega_d T}{2}})}{(e^{\frac{j\omega_d T}{2}} + e^{-\frac{j\omega_d T}{2}})} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_d T}{2}\right).$$

$$\omega_a = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_d T}{2}\right), \quad \omega_d = \frac{2}{T} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_a T}{2}\right).$$

Співвідношення між частотами показано на рис. 3.4.

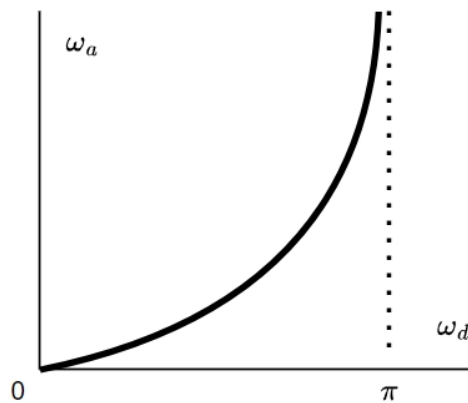


Рис. 3.4 – Співвідношення між аналоговими та дискретними частотами

Співвідношення між аналоговими та дискретними частотами суттєво нелінійно, чим не можна нехтувати, тому перед розрахунком аналогового фільтра за даними специфікації дискретного фільтра слід перерахувати частотні параметри з дискретних частот ω_d в аналогові ω_a за наведеним в параграфі вище виразом.

Аналогові прототиби ФЧС всіх типів розраховуються по нормованим аналоговим ФНЧ.

Нормований аналоговий фільтр-прототип, є ФНЧ з циклічною частотою зрізу (верхньою частотою СП по рівню -3 дБ (0.707) $\omega_c = \omega_p = 1 \text{ рад/с}$. Тобто нормування проводиться таким чином, що нормована частота зрізу задається рівною 1 для значення АЧХ для рівня 0.707 (-3 дБ), що рівнозначно значенню квадрата частотного відгуку для рівня 0.5 (-6 дБ): $\omega_0 = \frac{f}{f_p} = \frac{\omega}{\omega_p}$.

Для того, щоб застосувати методики розрахунку нормованого аналогового ФНЧ для ненормованих аналогових фільтрів різних типів необхідно привести частотні параметри, а саме частоти зрізу ω_p, ω_s до нормованих ω_{p0}, ω_{s0} величин за допомогою формул нормування, які наведені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3. Нормування аналогових ФЧС

Тип	Нормовані частоти зрізу
НЧ	$\omega_{p0} = 1 \quad \omega_{s0} = \frac{\omega_s}{\omega_p}$
ВЧ	$\omega_{p0} = 1 \quad \omega_{s0} = \frac{\omega_p}{\omega_s}$
СФ	$\omega_{p0} = 1$ За умови $\frac{\omega_{p1}}{\omega_{s1}} = \frac{\omega_{s2}}{\omega_{p2}} \quad \omega_{s0} = \frac{\omega_{s2} - \omega_{s1}}{\omega_{p2} - \omega_{p1}}$ інакше $\omega_{s1} = \frac{\omega_{p2} \omega_{p1}}{\omega_{s2}}$ або $\omega_{s2} = \frac{\omega_{p2} \omega_{p1}}{\omega_{s1}}$
РФ	$\omega_{p0} = 1$ За умови $\frac{\omega_{p1}}{\omega_{s1}} = \frac{\omega_{s2}}{\omega_{p2}} \quad \omega_{s0} = \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{\omega_{s2} - \omega_{s1}}$ інакше $\omega_{s1} = \frac{\omega_{p2} \omega_{p1}}{\omega_{s2}}$ або $\omega_{s2} = \frac{\omega_{p2} \omega_{p1}}{\omega_{s1}}$

3.2.2 Розрахунок передавальної функції Лапласа аналогового фільтра-прототипу

Аналогові нормовані прототипи ФНЧ обрані такими, що їхній частотний відгук описується дробово-раціональною функцією

$$|H(\omega_0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_N^2(\omega_0)},$$

де ε – коефіцієнт, який є менше 1; F_N – апроксимуюча додатна функція порядку N зі значеннями, по модулю меншими за 1.

В якості аналогів НІВ ФЧС використовують нормалізовані ФНЧ за назвами апроксимуючих функцій: Баттерворта (Butterworth), Чебишева

(Chebyshev) першого та другого роду, еліптичних або Кауера (Cauer), Бесселя (Bessel) (рис. 3.5).

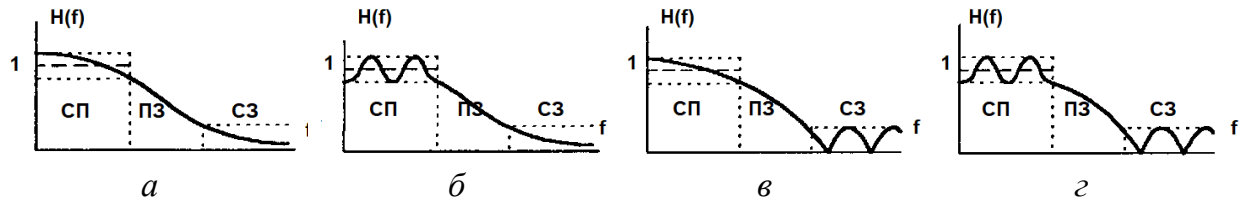


Рис. 3.5 – Типові НЧ фільтри: а – Баттерворта; б – Чебишева тип 1; в – Чебишева тип 2; г – Кауера

Розрахунок проводиться в два кроки: спочатку розраховується передавальна функція Лапласа аналогового нормованого фільтра НЧ, яка на другому кроці адаптується для визначеного ненормованого аналогового фільтра обраного типу. Передавальна функція Лапласа нормованого аналогового фільтра НЧ визначається через нулі та полюси.

Розрахунок передавальної функції аналогового нормованого ФНЧ

Фільтр Баттерворта є степеневим ФНЧ, оптимізованим за критерієм зменшення викидів в ЗП. Має монотонний частотний відгук. Не рекомендується для імпульсних сигналів.

Квадрат частотного відгуку та амплітудно-частотна характеристика для нормованого аналогового фільтра Баттерворта записуються як:

$$|H(\omega_0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \omega_0^{2N}}, \quad |H(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2 \omega_0^{2N}}}$$

Коефіцієнт ε_p визначає значення частотного відгуку $H(\omega_0 = \omega_p = 1)$ на нормованій частоті зрізу: $H^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2}$, $|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2}}$.

$$a_p = -20 \lg(1 - \delta_p) = -20 \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2}}\right), \quad \varepsilon_p = 10^{0.1 a_p} - 1$$

$$a_s = -20 \lg(\delta_s) = -20 \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_s^2 \omega_{0s}^{2N}}}\right), \quad \omega_{0s} = \frac{f_s}{f_p} = \frac{1}{k_f}.$$

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= H(s_0)H(-s_0) = |H(s_0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \omega_0^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \left(\frac{s_0}{j}\right)^{2N}} \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 (-1)^N s_0^{2N}}. \end{aligned}$$

Передавальна функція нормованого аналогового фільтра виражається через нулі та полюси у вигляді (рис. 2.4 б):

$$H(z) = \frac{\beta_0 \prod_{i=1}^{M-1} (1 - \beta_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N-1} (1 - \alpha_k z^{-1})}, \quad H(s_0) = \frac{\beta_0 \prod_{i=1}^{M-1} (s_0 - s_{\beta i})}{\prod_{k=1}^{N-1} (s_0 - s_{\alpha k})}.$$

Передавальна функція Лапласа нормованого фільтра Баттерворта має $2N$ нулів, які знаходяться на нескінченності, що еквівалентно відсутності кінцевих нулів $\beta_i = 0$:

$$H(s_0) = \frac{\beta_0}{\prod_{k=1}^{N-1} (s_0 - s_{\alpha k})}.$$

Полюси визначаються як корені знаменника передавальної функції:

$$|H(s_0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 (-1)^N s_0^{2N}}, \quad 1 + \varepsilon_p^2 (-1)^N s_0^{2N} = 0.$$

Для парних N : $s\alpha = \sqrt[2N]{\frac{-1}{\varepsilon_p^2}}$. Для непарних N : $s\alpha = \sqrt[2N]{\frac{1}{\varepsilon_p^2}}$.

З урахуванням того, що

$$-1 = e^{j\pi} = e^{j(2k+1)\pi}, \quad 1 = e^{j2k\pi}, \quad k = 0 \dots N-1 :$$

$$s\alpha_k = R \left(-\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N}\right) + j\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N}\right) \right), \quad k = 0 \dots N-1.$$

$2N$ полюсів рівномірно розподілені на радіусі $R = \varepsilon_p^{-\frac{1}{N}} = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon_p}}$ кола z -площини на кутовій відстані $\frac{\pi}{N}$ один від одного (рис. 3.6).

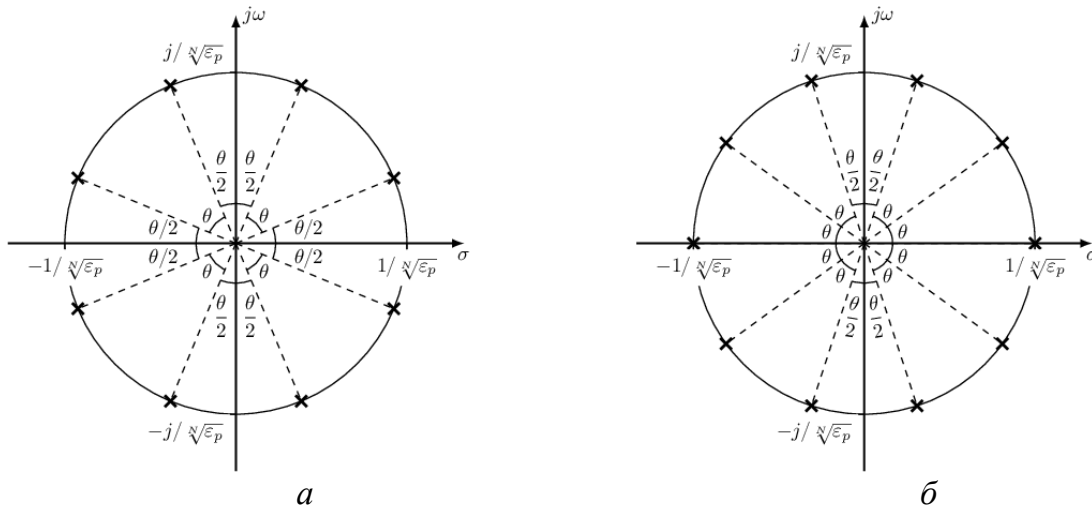


Рис. 3.6 – Полюси нормованого фільтра Баттерворта: *a* – для парного $N=4$; *б* – непарного $N=5$

Полюси є комплексно-спряженими та розташовуються симетрично відносно уявної осі.

Для задоволення умови стійкості фільтра беруться до уваги тільки N полюсів, які розташовуються в лівій напівплощині $s=\sigma+j\omega$ (з від'ємною дійсною частиною σ) як такі, що будуть відображатися всередині одиничного кола на z -площині). Для непарних перший полюс може розташовуватися на дійсній осі $s\alpha_l=\sigma_l=-R$.

Для парного N всі полюси є комплексно спряженими, передавальна функція може бути виражена через добуток біквадратних форм ланок другого порядку:

$$\begin{aligned}
 H(s_0) &= \prod_{k=1}^{N/2} \frac{\beta_0}{(s_0 - (\sigma_k + j\omega_k))(s_0 - (\sigma_k - j\omega_k))} \\
 &= \prod_{k=1}^{N/2} \frac{\beta_0}{(s_0^2 - 2\sigma_k s_0 + \sigma_k^2 + \omega_k^2)} = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{\beta_0}{(s_0^2 + 2\alpha \sin(\theta_k) s_0 + \alpha^2)} \\
 \sigma_k &= \frac{-1}{\sqrt[N]{\varepsilon_p}} \sin(\theta_k), \quad \omega_k = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon_p}} \cos(\theta_k), \quad \theta_k = \frac{2k-1}{2N} \pi, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon_p}}, \\
 &k = 1 \dots N/2.
 \end{aligned}$$

Нормуючий коефіцієнт β_0 визначається з умови $H(s_0=0)=1$: $\beta_0=1/\varepsilon_p$.

Для непарного N $M=(N-1)/2$ полюсів є комплексно-спряженими та один дійсний полюс, передавальна функція може бути виражена через добуток M ланок другого порядку та одну ланку першого порядку:

$$\begin{aligned}
 H(s_0) &= \frac{\beta_0}{(s_0 + \alpha)} \prod_{k=1}^M \frac{1}{(s_0^2 - 2\sigma_k s_0 + \sigma_k^2 + \omega_k^2)} \\
 &= \frac{\beta_0}{(s_0 + \alpha)} \prod_{k=1}^M \frac{1}{(s_0^2 + 2\alpha \sin(\theta_k) s_0 + \alpha^2)}.
 \end{aligned}$$

Фільтр Чебишева типу 1 є ФНЧ зі зменшеною шириною ПЗ Δf . Не рекомендується для імпульсних сигналів. Фільтр типу 1 має рівнохвильовий (з викидами) частотний відгук в СП та монотонний – в СЗ.

Квадрат частотного відгуку та амплітудно-частотна характеристика для нормованого фільтра Чебишева 1 типу записуються як

$$|H(\omega_0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 C_N^2(\omega_0)}, \quad |H(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2 C_N^2(\omega_0)}},$$

де $C_N(x)$ – функція Чебишева порядку N :

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(Narccos(x)), & x \leq 1 \\ \cosh(Narcosh(x)), & x > 1, \end{cases} \quad \text{acosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

Корені поліномів Чебишева

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right), \quad k = 1 \dots N.$$

Пропускання/послаблення:

$$a_p = -20 \lg(1 - \delta_p) = -20 \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2}}\right), \quad \varepsilon_p = 10^{0.1a_p} - 1,$$

$$a_s = -20 \lg(\delta_s) = -20 \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_s^2 C_N^2(\omega_{0s})}}\right), \quad \omega_{0s} = \frac{f_s}{f_p} = \frac{1}{k_f}.$$

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= H(s_0)H(-s_0) = |H(s_0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_s^2 C_N^2\left(\frac{s_0}{j}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \cos^2\left(Narccos\left(\frac{s_0}{j}\right)\right)} \end{aligned}$$

Передавальна функція Лапласа нормованого фільтра Чебишева типу 1 (рис. 3.7) має $2N$ нулів, які знаходяться на нескінченості, що еквівалентно відсутності кінцевих нулів $\beta_i = 0$:

$$H(s_0) = \frac{\beta_0}{\prod_{k=1}^{N-1} (s_0 - s_{\alpha k})}.$$

Полюси s_α визначаються як корені знаменника передавальної функції:

$$1 + \varepsilon_p^2 \cos^2\left(Narccos\left(\frac{s_0}{j}\right)\right) = 0, \quad \cos\left(Narccos\left(\frac{s_0}{j}\right)\right) = \mp \frac{1}{j\varepsilon_p}.$$

$$s\alpha_k = -\sin(\alpha_k)sh(\beta) + j\cos(\alpha_k)ch(\beta) = \sigma_k + j\omega_k, \quad k = 1 \dots 2N.$$

$$\begin{aligned} \sigma_k &= -\sin(\alpha_k) sh\left(\frac{arsh\left(\frac{1}{\varepsilon_p}\right)}{N}\right), \quad \omega_k = \cos(\alpha_k) ch\left(\frac{arsh\left(\frac{1}{\varepsilon_p}\right)}{N}\right), \\ \alpha_k &= \frac{(2k-1)\pi}{2N}. \end{aligned}$$

2N полюсів розподілені на еліпсі з осями

$$a = 2sh\left(\frac{\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\varepsilon_p}\right)}{N}\right), \quad b = 2ch\left(\frac{\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\varepsilon_p}\right)}{N}\right).$$

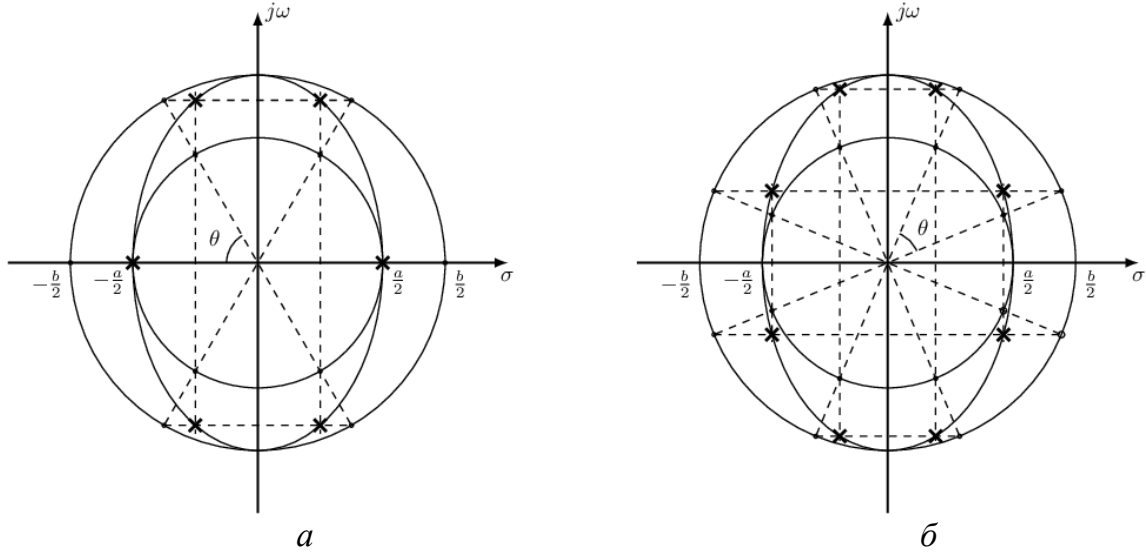


Рис. 3.7 – Полюси нормованого фільтра Чебишева типу 1: *a* – для непарного N=3; *b* – парного N=4

Полюси є комплексно-спряженими та розташовуються симетрично відносно уявної осі.

Для задоволення умови стійкості фільтра беруться до уваги тільки *N* полюсів, які розташовуються в лівій напівплощині $s=\sigma+j\omega$ (з від'ємною дійсною частиною σ) як такі, що будуть відображатися всередині одиничного кола на *z*-площині). Для непарних *N* перший полюс може розташовуватися на дійсній осі $s\alpha_1=\sigma_0=-a/2$.

Для парного *N* всі полюси є комплексно спряженими, передавальна функція може бути виражена через добуток біквадратних форм ланок другого порядку:

$$\begin{aligned} H(s_0) &= \prod_{k=1}^{N/2} \frac{\beta_0}{(s_0 - (\sigma_k + j\omega_k))(s_0 - (\sigma_k - j\omega_k))} \\ &= \prod_{k=1}^{N/2} \frac{\beta_0}{(s_0^2 - 2\sigma_k s_0 + \sigma_k^2 + \omega_k^2)}, \\ \sigma_k &= -\sin(\alpha_k) sh\left(\frac{\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\varepsilon_p}\right)}{N}\right), \quad \omega_k = \cos(\alpha_k) ch\left(\frac{\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\varepsilon_p}\right)}{N}\right), \end{aligned}$$

$$\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2N}, \quad k = 1 \dots N/2.$$

Для непарного N $M=(N-1)/2$ полюсів є комплексно-спряженими та один дійсний полюс, передавальна функція може бути виражена через добуток M ланок другого порядку та одну ланку першого порядку:

$$H(s_0) = \frac{\beta_0}{(s_0 - \sigma_0)} \prod_{k=1}^M \frac{1}{(s_0^2 - 2\sigma_k s_0 + \sigma_k^2 + \omega_k^2)}$$

$$\text{Нормуючий коефіцієнт } \beta_0 \text{ для парних } N: \quad \beta_0 = \frac{\prod_{i=1}^M (\sigma_i^2 + \omega_i^2)}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2}},$$

для непарних N : $\beta_0 = -\sigma_0 \prod_{i=1}^M (\sigma_i^2 + \omega_i^2)$.

Для парних N значення передавальної функції Лапласа фільтра Чебишева типу 1 в нулі $H(s=0) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_p^2}} = 1 - \delta_p$. Для непарних N значення передавальної функції Лапласа фільтра Чебишева типу 1 в нулі $H(s=0) = 1$.

Фільтр Чебишева типу 2 є ФНЧ зі зменшеною шириною ПЗ Δf . Не рекомендується для імпульсних сигналів. Фільтр типу 2 має монотонний частотний відгук в СП та рівнохвильовий (з викидами) – в СЗ.

Квадрат частотного відгуку та амплітудно-частотна характеристика для нормованого фільтра Чебишева 2 типу (інверсний фільтр Чебишева) записуються як:

$$|H(\omega_0)|^2 = \frac{C_N^2(\frac{1}{\omega_0})}{\varepsilon_s^2 + C_N^2(\frac{1}{\omega_0})} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_s^2}{C_N^2(\frac{1}{\omega_0})}}, \quad |H(f_0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_s^2}{C_N^2(\frac{1}{\omega_0})}}},$$

де $C_N(x)$ – функція Чебишева порядку N :

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \arccos(x)), & x \leq 1 \\ \cosh(N \operatorname{arccosh}(x)), & x > 1 \end{cases}, \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$a_p = -20 \lg(1 - \delta_p) = -20 \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2}}\right), \quad \varepsilon_p = 10^{0.1 a_p} - 1.$$

$$a_s = -20 \lg(\delta_s) = -20 \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_s^2 / C_N^2(\frac{1}{\omega_{0s}})}}\right), \quad \omega_{0s} = \frac{f_s}{f_p} = \frac{1}{k_f}.$$

Передавальна функція Лапласа нормованого фільтра Чебишева типу 2 має $2N$ нулів, які знаходяться з рівняння:

$$C_N\left(\frac{1}{\omega_{0s}}\right) = 0 \quad \cos\left(N \arccos\left(\frac{1}{\omega_{0s}}\right)\right) = \cos\left(N \arccos\left(\frac{j}{s_0}\right)\right) 0.$$

Звідки

$$s\beta_k = \frac{j}{\cos(\varphi_k)} \quad \varphi_k = \frac{2k-1}{N}\pi, \quad k = 1 \dots 2N.$$

Нулі нормованого ФНЧ Чебишева типу 2 завжди уявні та по модулю більші за 1. Серед $2N$ нулів кожен повторюється двічі, тобто нулі парні.

Полюси $s\alpha$ визначаються як корені знаменника передавальної функції:

$$\varepsilon_s^2 + \cos^2\left(N \arccos\left(\frac{j}{s_0}\right)\right) = 0, \quad \cos\left(N \arccos\left(\frac{j}{s_0}\right)\right) = \mp j\varepsilon_s.$$

$$s\alpha_k = \sigma_k + j\omega_k, \quad k = 1 \dots 2N.$$

$$\sigma_k = \frac{-\sin(\varphi_k)sh(\beta)}{\cos^2(\varphi_k)ch^2(\beta) + \sin^2(\varphi_k)sh^2(\beta)},$$

$$\omega_k = \frac{\cos(\varphi_k)ch(\beta)}{\cos^2(\varphi_k)ch^2(\beta) + \sin^2(\varphi_k)sh^2(\beta)},$$

$$\varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{2N} \quad \beta = \frac{arsh(\varepsilon_s)}{N}.$$

Нулі розташовані по уявній осі, а полюси – по замкненій параметричній кривій $\sigma(t) + j\omega(t)$ (рис. 3.8).

Для задоволення умови стійкості фільтра беруться до уваги тільки N полюсів, які розташовуються в лівій напівплощині $s=\sigma+j\omega$ (з від'ємною дійсною частиною σ) як такі, що будуть відображатися всередині одиничного кола на z -площині). Для непарних N перший полюс може розташовуватися на дійсній осі $s\alpha_1 = \sigma_0 = -1/sh(\beta)$.

Передавальна функція Лапласа нормованого фільтра Чебишева типу 2 записується через нулі та полюси як:

$$H(s_0) = \frac{\prod_{k=1}^N (s_0 - s_{\beta k})}{\prod_{k=1}^N (s_0 - s_{\alpha k})}.$$

Всі нулі є парними та виражаються через добуток $M=N/2$ комплексно-спряжених множників.

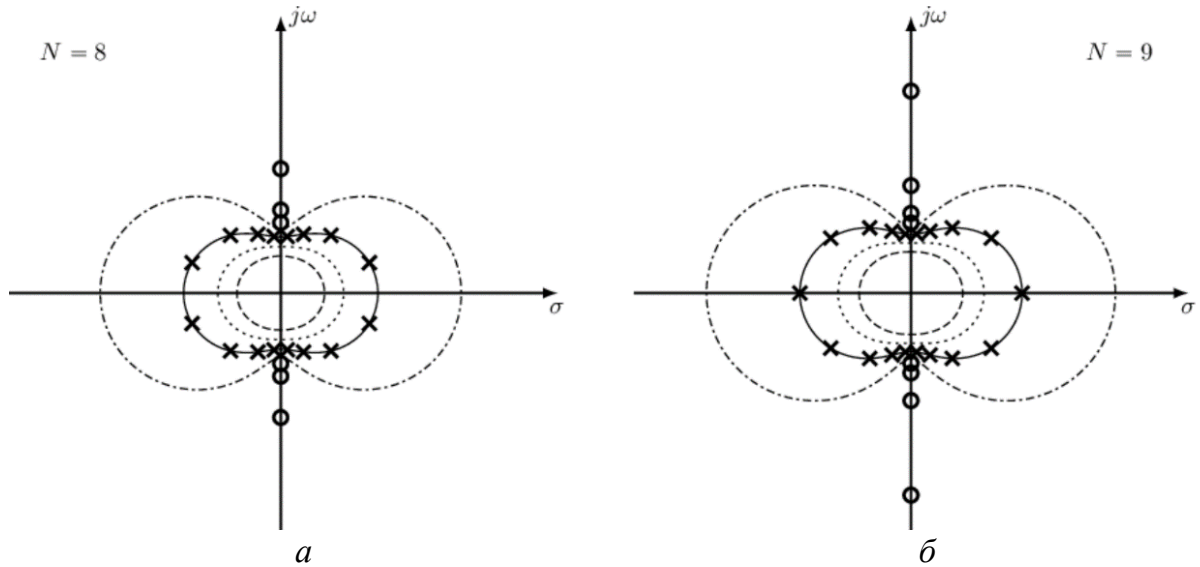


Рис. 3.8 – Нулі та полюси нормованого фільтра Чебишева типу 2: *a* – для парного $N=8$; *б* – непарного $N=9$

Для парного N всі полюси є комплексно спряженими, передавальна функція може бути виражена через добуток біквadratних форм ланок другого порядку:

$$H(s_0) = \frac{\prod_{k=1}^M (s_0 - \frac{j}{\cos(\varphi_k)})(s_0 + \frac{j}{\cos(\varphi_k)})}{H_0 \prod_{k=1}^M (s_0 - (\sigma_k + j\omega_k))(s_0 - (\sigma_k - j\omega_k))}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^M (s_0^2 + \frac{1}{\cos^2(\varphi_k)})}{H_0 \prod_{k=1}^M (s_0^2 - 2\sigma_k s_0 + \sigma_k^2 + \omega_k^2)},$$

$$\sigma_k = \frac{-\sin(\varphi_k) \operatorname{sh}(\beta)}{\cos^2(\varphi_k) \operatorname{ch}^2(\beta) + \sin^2(\varphi_k) \operatorname{sh}^2(\beta)},$$

$$\omega_k = \frac{\cos(\varphi_k) \operatorname{ch}(\beta)}{\cos^2(\varphi_k) \operatorname{ch}^2(\beta) + \sin^2(\varphi_k) \operatorname{sh}^2(\beta)},$$

$$\varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{2N} \quad \beta = \frac{\operatorname{arsh}(\varepsilon_s)}{N},$$

$$\sigma_0 = -\frac{1}{\operatorname{sh}(\beta)} \quad k = 1 \dots N/2.$$

Для непарного N $M=(N-1)/2$ полюсів є комплексно-спряженими та один дійсний полюс, передавальна функція може бути виражена через добуток M ланок другого порядку та одну ланку першого порядку:

$$H(s_0) = \frac{(-\sigma_0) \prod_{k=1}^M (s_0^2 + \frac{1}{\cos^2(\varphi_k)})}{H_0 (s_0 - \sigma_0) \prod_{k=1}^M (s_0^2 - 2\sigma_k s_0 + \sigma_k^2 + \omega_k^2)}.$$

$$\text{Нормуючий коефіцієнт } H_0 = \frac{\prod_{i=1}^M \frac{1}{\cos^2(\varphi_k)}}{\prod_{k=1}^M \sigma_k^2 + \omega_k^2}.$$

Еліптичний фільтр Кауера є ФНЧ, який зі схожими параметрами має найнижчий порядок. Не рекомендується для імпульсних сигналів. Фільтр має рівнохвильовий (з викидами) в усіх смугах частотний відгук.

Апроксимаційні залежності використовують еліптичні функції на основі еліптичного інтегралу першого роду з аргументами кута Θ – модуль (modulus) та k – амплітуда (amplitude):

$$u(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{dx}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2(x))}}.$$

Для модуля (кута) $\pi/2$ еліптичний інтеграл називається повним еліптичним інтегралом:

$$K(y) = CEI(y) = u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - y^2 \sin^2(x))}}.$$

Для визначеного еліптичного інтеграла використовуються еліптичні функції Якобі:

$$\begin{aligned} sn(u, k) &= \sin(\theta) & cn(u, k) &= \cos(\theta) & dn(u, k) &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)} \\ cd(u, k) &= \frac{sn(u, k)}{dn(u, k)} & sc(u, k) &= \frac{cn(u, k)}{sn(u, k)}. \end{aligned}$$

Квадрат модуля частотного відгуку нормованого еліптичного фільтра може бути записаний як:

$$|H(\omega_0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 R_N^2(\omega_0, k_f)}, \quad |H(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2 R_N^2(\omega_0, k_f)}},$$

де $R_N()$ – еліптична дрібно-раціональна функція Якобі-Чебишева порядку N :

$$\begin{aligned} R_N(\omega_0, k_f) &= \omega_0^{\text{mod}(\frac{N}{2})} \prod_{n=1}^M \left(\frac{\omega_0^2 - \mu_n^2}{1 - \omega_0^2 k_f^2 \mu_n^2} \right) \left(\frac{1 - k_f^2 \mu_n^2}{1 - \mu_n^2} \right), \\ \mu_n &= cd(c_n K(k_f), k_f), \quad c_n = \frac{2n-1}{N}, \quad n = 1 \dots M. \end{aligned}$$

$$a_p = -20 \lg(1 - \delta_p) = -20 \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2}}\right), \quad \varepsilon_p = 10^{0.1a_p} - 1.$$

$$a_s = -20 \lg(\delta_s) = -20 \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2 R_N^2(\omega_{0s}, k_\varepsilon)}}\right), \quad \omega_{0s} = \frac{f_s}{f_p} = \frac{1}{k_f}.$$

Передавальна функція Лапласа нормованого еліптичного фільтра має $2N$ нулів, які знаходяться з рівняння:

$$(1 + s_0^2 k_f^2 \mu_k^2)^2, \quad k = 1 \dots M.$$

Звідки

$$s\beta_k = \frac{\mp j}{k_f \mu_k} = \frac{j}{k_f c d \left(\frac{2k-1}{N} K(k_f), k_f \right)}, \quad k = 1 \dots 2N.$$

Нулі нормованого ФНЧ Кауера завжди уявні та парні (рис. 3.9).

Полюси $s\alpha$ визначаються як корені рівняння:

$$1 + \varepsilon_p^2 R_N^2(-js_0, k_f) = 0, \quad R_N(-j\omega_0, k_f) = \mp \frac{j}{\varepsilon_p}.$$

$$s\alpha_k = j c d \left(\left(\frac{2k-1}{N} - jv \right) K(k_f), k_f \right), \quad v = \frac{-j}{N} sn^{-1} \left(\frac{j K(k_\varepsilon)}{\varepsilon_p}, k_\varepsilon \right), \\ k = 1 \dots 2N,$$

де $sn^{-1}()$ – обернена до $sn()$ еліптична функція *еліптичний арксинус*.

Для задоволення умови стійкості фільтра беруться до уваги тільки N полюсів, які розташовуються в лівій напівплощині $s = \sigma + j\omega$ (з від'ємною дійсною частиною σ) як такі, що будуть відображатися всередині одиничного кола на z -площині). Для непарних N перший полюс може розташовуватися на дійсній осі:

$$s\alpha_0 = \sigma_0 = j sn(jvK(k_f), k_f).$$

Передавальна функція Лапласа нормованого еліптичного фільтра Кауера записується через нулі та полюси як:

$$H(s_0) = \frac{\prod_{k=1}^N (s_0 - s\beta_k)}{\prod_{k=0}^N (s_0 - s\alpha_k)}.$$

Всі нулі є парними та виражаються через добуток $M=N/2$ комплексно-спряжених множників.

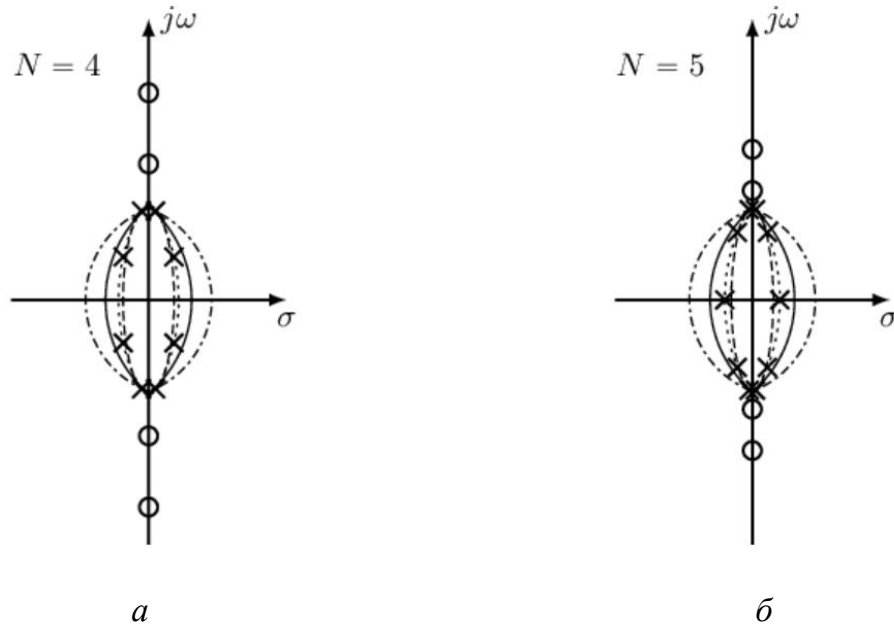


Рис. 3.9 – Нулі та полюси нормованого еліптичного фільтра Кауера: *a* – для парного $N=4$; *б* – непарного $N=5$

Для парного N всі полюси є комплексно спряженими, передавальна функція може бути виражена через добуток біквадратних форм ланок другого порядку:

$$H(s_0) = \frac{\prod_{k=1}^M (s_0^2 - s_{\beta k}^2)}{H_0 \prod_{k=1}^M (s_0^2 - 2\sigma_k s_0 + \sigma_k^2 + \omega_k^2)},$$

$$s_{\beta k} = \frac{1}{k_f \operatorname{cd}(c_k K(k_f), k_f)}, \quad \sigma_k = \operatorname{Re}(s\alpha_k), \quad \omega_k = \operatorname{Im}(s\alpha_k),$$

$$s\alpha_k = j \operatorname{cd}((c_k - jv)K(k_f), k_f), \quad v = \frac{-j}{N} \operatorname{ns}\left(\frac{j K(k_\varepsilon)}{\varepsilon_p}, k_\varepsilon\right), \quad k = 1 \dots M.$$

Для непарного N $M=(N-1)/2$ полюсів є комплексно-спряженими та один дійсний полюс, передавальна функція може бути виражена через добуток M ланок другого порядку та одну ланку першого порядку:

$$H(s_0) = \frac{\prod_{k=1}^M (s_0^2 - s_{\beta k}^2)}{H_0 (s - s\alpha_0) \prod_{k=1}^M (s_0^2 - 2\sigma_k s_0 + \sigma_k^2 + \omega_k^2)},$$

$$s\alpha_0 = \sigma_0 = j \operatorname{sn}(jvK(k_f), k_f).$$

Нормуючий коефіцієнт для парних N :

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2}} \frac{\prod_{i=1}^M (-s_{\beta k})^2}{\prod_{k=1}^M (\sigma_k^2 + \omega_k^2)},$$

для непарних N :

$$H_0 = \frac{1}{-s\alpha_0} \frac{\prod_{k=1}^M (-s\beta_k)^2}{\prod_{k=1}^M \sigma_k^2 + \omega_k^2}$$

Фільтр Бесселя є ФНЧ, який має зсув фази пропорційно частоті. Має найкращі характеристики для імпульсних сигналів.

$$H(s) = \frac{Bo}{\sum_{i=0}^N Bi s^i} = \frac{Bo}{s^N B(\frac{1}{s})},$$

$$\text{де } Bi = \frac{(2N-i)!}{2^{N-i} i!(N-i)!}.$$

Визначення порядку НІВ фільтра

Для того, щоб АЧХ фільтра задовольняла умовам специфікації потрібно виконання двох умов:

$$\begin{cases} (1 - \delta_p)^2 \leq H(\omega)^2 \leq 1, & \omega \leq \omega_p \\ 0 \leq H(\omega)^2 \leq (1 - \delta_s)^2, & \omega \geq \omega_s \end{cases}.$$

Перша умова виконується властивостями функцій апроксимації:

$$0 \leq F_N^2(\omega) \leq 1, \quad \omega \leq \omega_p.$$

Друга умова забезпечує визначені ширину перехідної смуги та придушення в СЗ:

$$H\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 F_N^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = \frac{1}{1 + \varepsilon_s^2}, \quad F_N\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right) = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}.$$

Заокруглене до найбільшого ближнього цілого розв'язання рівняння відносно порядку надає початкове значення розміру фільтра, яке забезпечить умови специфікації.

Фільтр Баттерворта

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^N = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}, \quad N \lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right) = \lg\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}\right).$$

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}\right)}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = \frac{\lg\left(\frac{1}{k_\varepsilon}\right)}{\lg(\omega_{0s})} = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1a_s} - 1}{10^{0.1a_p} - 1}\right)}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1a_s} - 1}{10^{0.1a_p} - 1}\right)}{\lg\left(\frac{1}{k_\omega}\right)}.$$

Примітка.

Замість десяткового логарифму можна використовувати логарифм довільного степеня.

Фільтр Чебишева

$$\cos\left(N \arccos\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)\right) = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}, \quad N \arccos\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right) = \arccos\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}\right).$$

$$N \geq \frac{\arccos\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}\right)}{\arccos\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}\right)^2 - 1}\right)}{\ln\left(\frac{\omega_s}{\omega_p} + \sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^2 - 1}\right)} = \frac{\operatorname{arch}\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}\right)}{\operatorname{arch}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = \frac{\operatorname{arch}\left(\frac{1}{k_\varepsilon}\right)}{\operatorname{arch}\left(\frac{1}{k_\omega}\right)}.$$

Фільтр Кауера

$$N\left(\frac{T(k_f)}{K(k_f)}\right) = \frac{T(k_\varepsilon)}{K(k_\varepsilon)}, \quad N \geq \frac{T(k_\varepsilon)K(k_f)}{K(k_\varepsilon)T(k_f)},$$

де $K(x)$ – повний еліптичний інтеграл, $T(x) = K(\sqrt{1-x^2})$ – компліментарний еліптичний інтеграл.

Для еліптичних фільтрів використання цілих значень N потребує корекції вихідних даних:

$$k_\varepsilon = \sqrt{1 - k_\varepsilon'^2}, \quad k_\varepsilon' = kf^N \prod_{k=1}^{N/2} sn^4\left(\frac{2k-1}{N}K(kf), kf\right),$$

$$kf = \sqrt{1 - kf'^2}, \quad kf' = m^N \prod_{k=1}^{N/2} sn^4\left(\frac{2k-1}{N}K(m), m\right), \quad m = \sqrt{1 - k_\varepsilon'^2}.$$

Денормування аналогового фільтра

Денормування проводиться масштабними перетвореннями аргументу змінної s передавальної функції Лапласа нормованого ФНЧ в змінну s , яка описує передавальну функцію Лапласа реального фільтра визначеного типу фільтра з частотами f_p та f_s (табл. 3.4).

3.2.3 Отримання передавальної функції дискретного фільтра

Створення передавальної функції дискретного фільтра проводиться заміною змінних за правилом z -білінійного перетворення:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Розрахунок параметрів специфікації дискретного фільтра.

Різницеве рівняння отримується з передавальної функції фільтра заміною 1 на $x(n)$, z^{-1} на $x(n-1)$... z^{-n} на 1 .

Для СІВ фільтрів коефіцієнти імпульсного відгуку є тотожними коефіцієнтам різницевого рівняння.

Таблиця 3.4.

Денормування ФНЧ

Тип	Переведення $s\Omega \rightarrow s$
НЧ→НЧ	$s = \frac{s_0}{\omega_p}$
НЧ→ВЧ	$s = \frac{\omega_p}{s_0}, s = \frac{\omega_s}{s_0}$ для ФВЧ Чебишева 2
НЧ→СФ	$s = \frac{s_0^2 + \omega_{cen}^2}{s_0 W}, W = \omega_{p2} - \omega_{p1},$ $W = \omega_{s2} - \omega_{s1}$ для ФВЧ Чебишева 2
НЧ→РФ	$s = \frac{s_0 W}{s_0^2 + \omega_{cen}^2}, W = \omega_{s2} - \omega_{s1}$

$$\omega_{cen} = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}} = \sqrt{\omega_{s1}\omega_{s2}}.$$

Частотний відгук отримується з передавальної функції $H(z)$ підстановкою $z=e^{j\omega}$, або з передавальної функції Лапласа $H(s)$ підстановкою $s=j\omega$.

Параметри перетворення фільтра: ширина ПС, граничні частоти СП та СЗ, частота зрізу, частотний коефіцієнт, ослаблення СП та СЗ, амплітудний коефіцієнт, параметри викидів СП та СЗ - розраховуються по даним з графіка частотного відгука та аналітичним залежностям (п. 2.2.5).

4 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ

4.1 Приклад розрахунку СІВ фільтра

Розробити методом зважування вікном Ланкоса семиточковий ФНЧ, ФВЧ, СВ, РВ з частотою дискретизації 10 кГц. Частота зрізу 525 Гц (725 Гц). Розрахувати імпульсний відгук, різницеве рівняння, передавальну характеристику, частотний відгук, специфікацію фільтра.

Розв'язання

Період дискретизації для частоти дискретизації $f_T=10$ кГц становить $T = \frac{1}{f_T} = 10^{-4} \text{с} = 0.1 \text{мс}$. Визначений розмір фільтра $N=7$ зазначає 7 точок дискретизації з кроком 0.1мс на інтервалі від 0.0мс до 0.6мс .

Частота Найквіста дорівнює частоті дискретизації та становить 10 кГц. Основна смуга частот – від 0 Гц до 5 кГц.

Відносні частоти: $f_c^* = \frac{525}{10000} = 0.0525$ Гц, $f_{c1}^* = \frac{725}{10000} = 0.0725$ Гц

Фільтр низьких частот

Імпульсний відгук ідеального некаузального фільтра ФНЧ для нормованого часу

$$h_n = 2 \cdot 0.0525 \cdot \text{sinc}(2\pi n \cdot 0.0525).$$

Віконна функція Ланкоса для нормованого часу має наступний вигляд:

$$w_n = \text{sinc}\left(\frac{\pi(n-2)}{2}\right).$$

Запишемо компоненти каузального ідеального ФНЧ, вікна Ланкоса та результуючого вікна реального ФНЧ:

n	ІФНЧ	Вікно Ланкоса	Реальний ФНЧ
0	0.089	0.0	0.0
1	0.098	0.413	0.040
2	0.103	0.827	0.085
3	0.105	1.000	0.105
4	0.103	0.827	0.085
5	0.098	0.413	0.040
6	0.089	0.0	0.0

Імпульсний відгук ФНЧ (рис. 4.1) в нормованому часі

$$h(t^*) = 0.0\delta(0) + 0.04\delta(-1) + 0.085\delta(-2) + 0.105\delta(-3) + 0.085\delta(-4) + 0.04\delta(-5) + 0.0\delta(-6),$$

В абсолютному часі в мілісекундах:

$$h(t) = 0.0\delta(t) + 0.04\delta(t - 0.1) + 0.085\delta(t - 0.2) + 0.105\delta(t - 0.3) + 0.085\delta(t - 0.4) + 0.04\delta(t - 0.5) + 0.0\delta(t - 0.6),$$

або у вигляді вектора-стовбця

$$h(n) = [0.0 \ 0.04 \ 0.085 \ 0.105 \ 0.085 \ 0.04 \ 0.0].$$

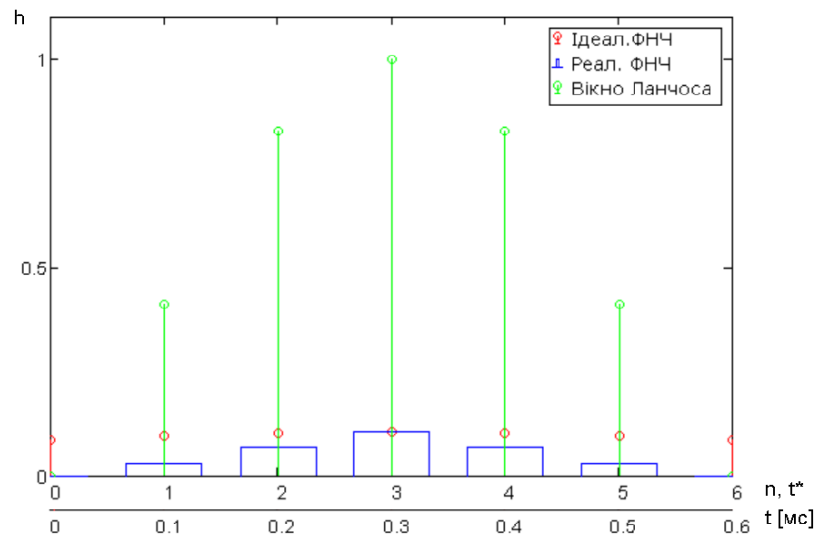


Рис. 4.1 – Імпульсний відгук дискретного СІВ ФНЧ

Для СІВ фільтрів коефіцієнти вектора імпульсного відгуку тотожні коефіцієнтам чисельника різницевого рівняння $h_k = b_k$.

Різницеве рівняння реального СІВ ФНЧ

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^6 b(k) \cdot x(n - k) \\ &= 0.04x(n - 1) + 0.085x(n - 2) + 0.105x(n - 3) \\ &\quad + 0.085x(n - 4) + 0.04x(n - 5). \end{aligned}$$

Передавальна функція фільтра записується з різницевого рівняння як:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^6 b_k z^{-k} = 0.04 z^{-1} + 0.085 z^{-2} + 0.105 z^{-3} + 0.085 z^{-4} \\ &\quad + 0.04 z^{-5}. \end{aligned}$$

Розроблений ФНЧ має лінійну структуру (рис. 4.2).

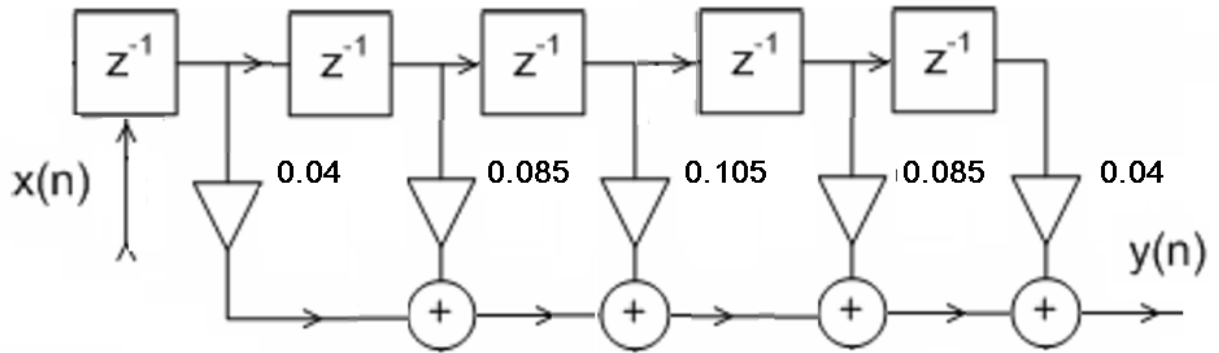


Рис. 4.2 – Структура СІВ ФНЧ

Частотний відгук можна отримати з ряду Фур'є імпульсного відгуку (п. 2.5) або заміною змінних з передавальної функції $H(z)$:

$$H(f) = \sum_{k=0}^6 h(n) \exp(-j2\pi f k T), \quad H(f^*) = \sum_{k=0}^6 h(n) \exp(-j2\pi k f^*) .$$

Обидва способи дають однакові результати.

Графіки частотного відгуку ідеального та реального СІВ ФНЧ наведено на рис. 4.3 в абсолютних координатах. На рис. 4.4 наведений графік залежності ослаблення фільтра в децибелах. На рис. 4.5 – графік відносного спектрального відгуку. Чисельні значення надані в табл. 4.1.

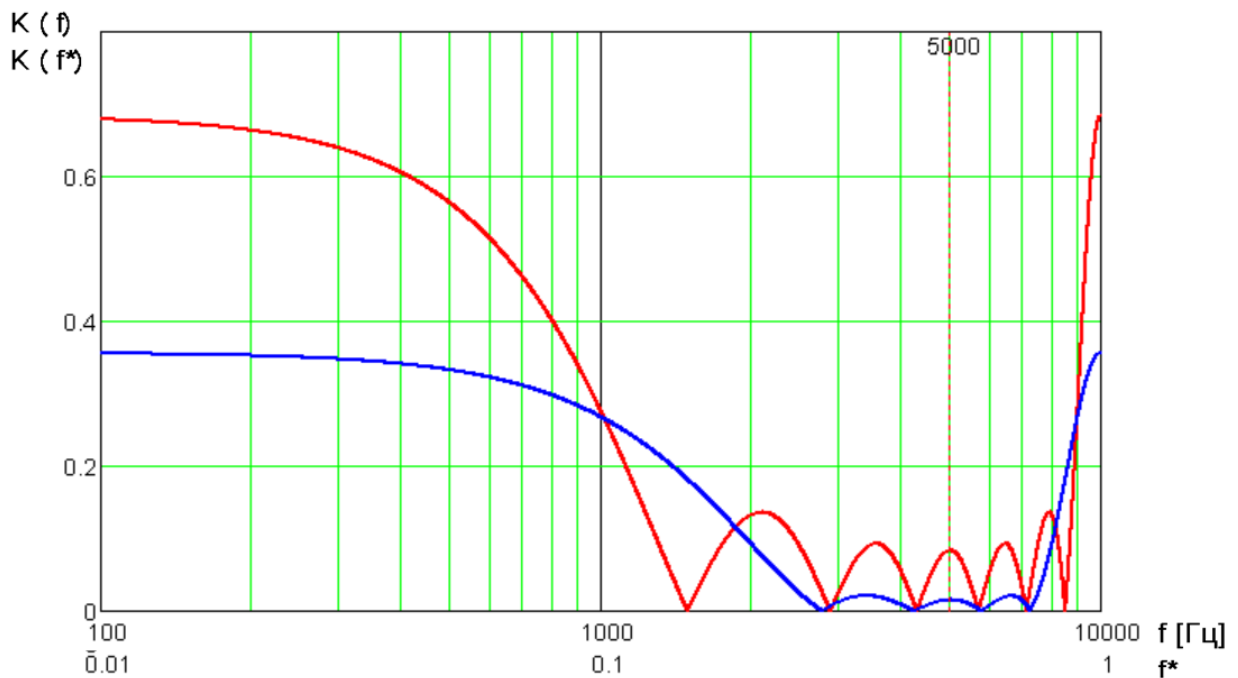


Рис. 4.3 – Частотний відгук СІВ ФНЧ

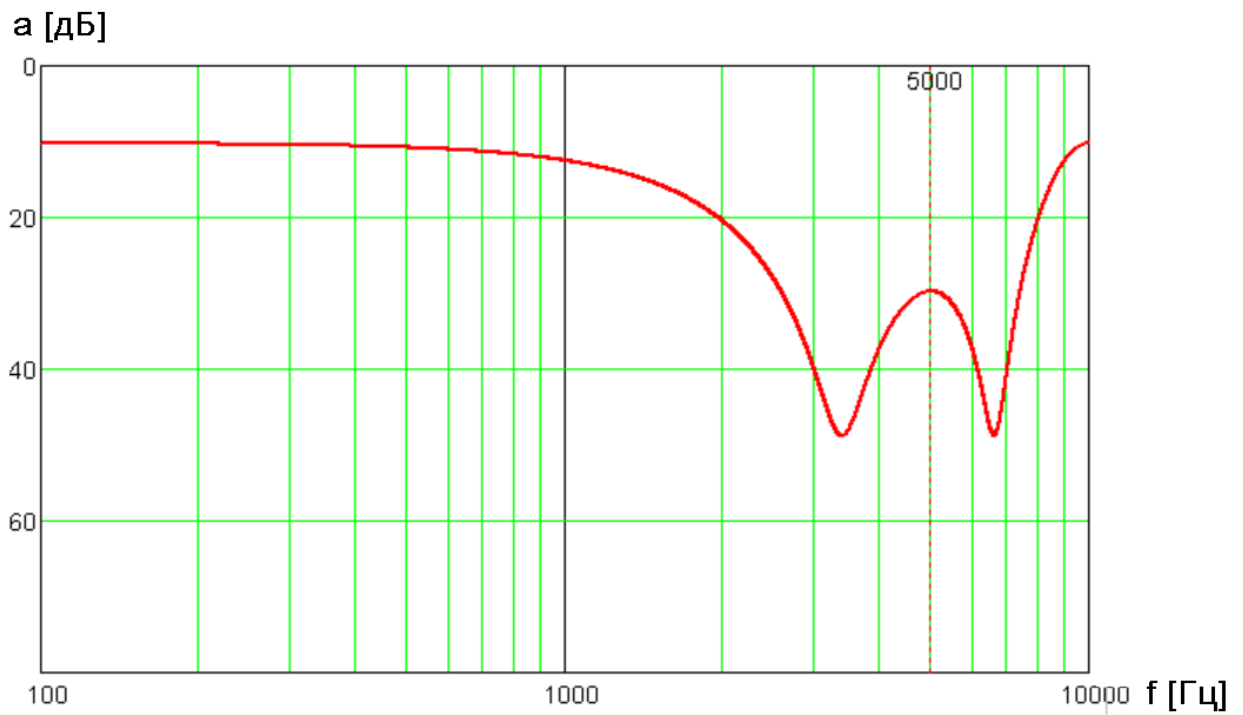


Рис. 4.4 – Частотний відгук реального ФНЧ

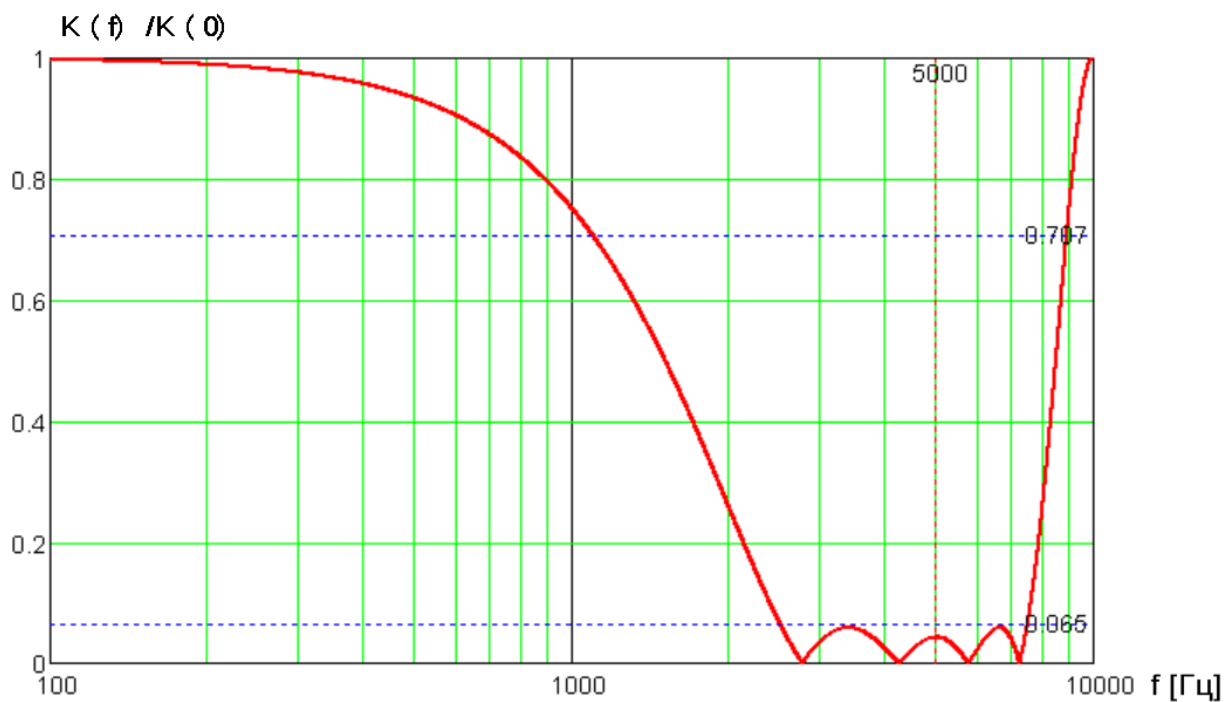


Рис. 4.5 – Нормований частотний відгук реального ФНЧ

Специфікація фільтра

Нерекурсивний фільтр нижніх частот з частотою дискретизації 10 кГц.

Розмір фільтра – 7. Порядок фільтра – 5.

Період дискретизації – 0.1 мс. Інтервал обробки – 0.6 мс.

Частотний відгук СІВ ФНЧ

f [Гц]	f^*	$ H_{i\partial}(f f^*) $	$ H_p(f f^*) $	$ H_{0p}(f f^*) $	$a(f)$ [дБ]
0	0.00	0.684	0.356	1	8.966
100	0.01	0.679	0.355	0.997	9.138
500	0.05	0.563	0.332	0.933	12.590
800	0.08	0.401	0.298	0.836	16.801
1000	0.10	0.277	0.268	0.752	19.974
2000	0.20	0.133	0.092	0.259	30.072
3000	0.30	0.027	0.013	0.036	43.604
4000	0.40	0.053	0.008	0.023	44.982
5000	0.50	0.083	0.015	0.042	45.498
10000	1.00	0.684	0.356	1	8.966

Статичний коефіцієнт передачі – 0.356, статичне ослаблення – 8.966 дБ.
В СП фільтр є монотонним, в СЗ має викиди.

Параметри СП: відхилення δ_p (по рівню 0.707, -3 дБ) = 0.104, ослаблення $a_p = 11.98$ дБ, $\varepsilon_p = 3.845$, $f_p = 1099$ Гц.

Параметри СЗ: відхилення $\delta_s = 0.0588$, ослаблення $a_s = 33.66$ дБ, максимальне придушення СЗ = 133.77 дБ, $\varepsilon_s = 67.88$, $f_s = 2532$ Гц.

Ширина ПС 1453 Гц, частота зрізу 1869 Гц, $k_f = \frac{f_p}{f_s} = 0.44$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 0.057$.

Висновки. Реальний фільтр має кращі параметри за ідеальний фільтр. Реальний фільтр має більшу рівномірність в СП та в рази менші викиди та більше придушення в СЗ.

Проте він має низьку ефективність: низька передача в СП – 0.356 (8.97 дБ) та невисоке придушення в СЗ – 33.7 дБ, широка перехідна смуга 1450 Гц, частота зрізу значно вище, ніж за умовами. В СП має викиди.

Фільтр високих частот

Імпульсний відгук ФВЧ отримується з імпульсного відгуку ФНЧ (п.3.1.2):

$$h_{\text{ВЧ}}(n) = h_{\delta}(n) - h_{\text{НЧ}}(n) = \begin{cases} 1 - h_{\text{НЧ}}(n), & n = 0 \\ -h_{\text{НЧ}}(n), & n \neq 1 \end{cases}.$$

Операція може проводитися в двох послідовностях. Можна спочатку отримати імпульсний відгук ідеального ВФ за виразом таблиці 3.2, а потім провести зважування вікном. Можна спочатку отримати імпульсний відгук реального ФНЧ, а потім його перетворити на відгук ФВЧ відніманням. Результати є тотожними.

Імпульсний відгук ідеального некаузального фільтра ФВЧ для нормованого часу (табл. 3.2)

$$h_n = -2 \cdot 0.0525 \cdot \text{sinc}(2\pi n \cdot 0.0525).$$

Віконна функція Ланкоса для нормованого часу має наступний вигляд:

$$w_n = \text{sinc}\left(\frac{\pi(n-2)}{2}\right).$$

Реальний ФНЧ має імпульсний відгук

$$h(n) = [0.0 \ 0.04 \ 0.085 \ 0.105 \ 0.085 \ 0.04 \ 0.0].$$

Запишемо компоненти каузального ідеального ФВЧ, вікна Ланкоса та результуючого вікна реального ФВЧ:

n	ІФВЧ	Вікно Ланкоса	Реальний ФВЧ1	ІВФ	Реальний ФНЧ	Реальний ФВЧ2
0	-0.089	0.0	0	1	0.0	0
1	-0.098	0.413	-0.04	0	0.040	-0.04
2	-0.103	0.827	-0.085	0	0.085	-0.085
3	0.895	1.000	0.895	0	0.105	-0.895
4	-0.103	0.827	-0.085	0	0.085	-0.085
5	-0.098	0.413	-0.04	0	0.040	-0.04
6	-0.089	0.0	0	0	0.0	0.0

Імпульсний відгук ФВЧ (рис. 4.6) в нормованому часі

$$h(t^*) = 0.0\delta(0) - 0.04\delta(-1) + 0.085\delta(-2) + 0.105\delta(-3) - 0.085\delta(-4) + 0.04\delta(-5) + 0.0\delta(-6),$$

В абсолютному часі в мілісекундах:

$$h(t) = 0.0\delta(t) - 0.04\delta(t - 0.1) - 0.085\delta(t - 0.2) + 0.105\delta(t - 0.3) - 0.085\delta(t - 0.4) - 0.04\delta(t - 0.5) + 0.0\delta(t - 0.6),$$

або у вигляді вектора-стовбця

$$h(n)=[0.0 \ -0.04 \ -0.085 \ 0.105 \ -0.085 \ -0.04 \ 0.0].$$

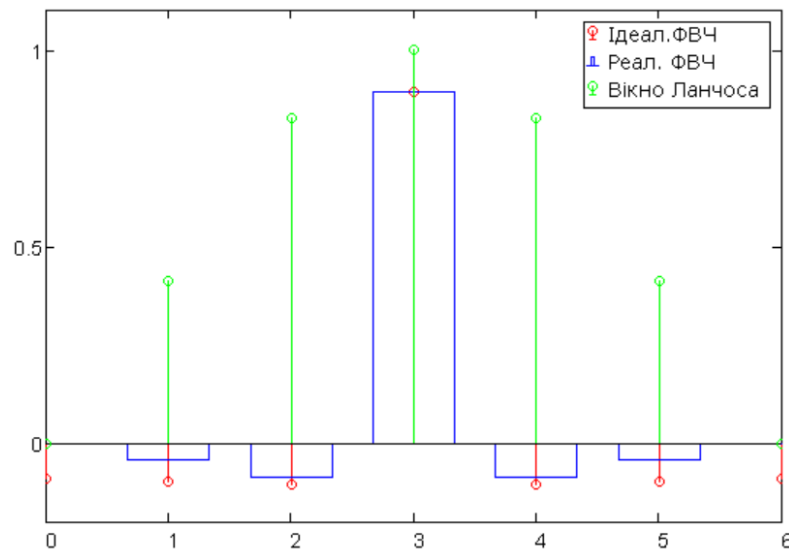


Рис. 4.6 – Імпульсний відгук дискретного СІВ ФВЧ у нормованому часі

Для СІВ фільтрів коефіцієнти вектора імпульсного відгуку тотожні коефіцієнтам чисельника різницевого рівняння $h_k=b_k$.

Різницеве рівняння реального СІВ ФВЧ

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^6 b(k) \cdot x(n-k) \\ &= -0.04x(n-1) - 0.085x(n-2) + 0.895x(n-3) \\ &\quad - 0.085x(n-4) + 0.04x(n-5). \end{aligned}$$

Передавальна функція фільтра записується з різницевого рівняння як:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^6 b_k z^{-k} = -0.04 z^{-1} - 0.085 z^{-2} + 0.105 z^{-3} - 0.085 z^{-4} \\ &\quad - 0.04 z^{-5}. \end{aligned}$$

Розроблений ФВЧ має лінійну структуру (рис. 4.7).

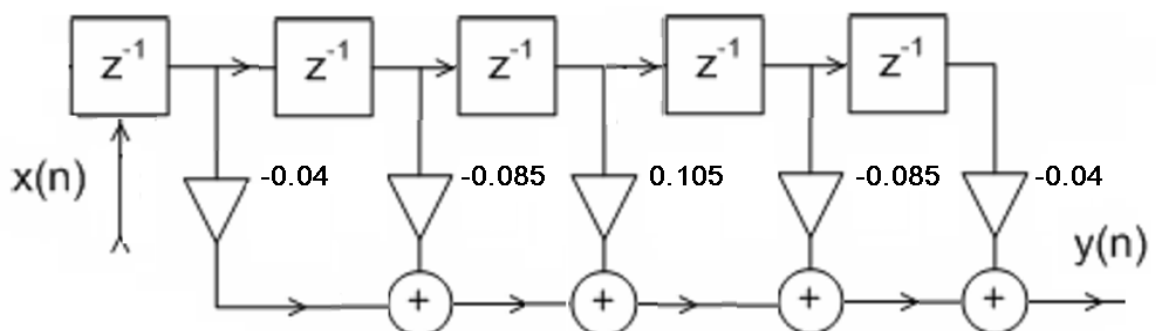


Рис. 4.7 – Структура СІВ ФВЧ

Частотний відгук можна отримати з ряду Фур'є імпульсного відгуку (п. 2.5) або заміною змінних з передавальної функції $H(z)$:

$$H(f) = \sum_{k=0}^6 h(n) \exp(-j2\pi f k T), \quad H(f^*) = \sum_{k=0}^6 h(n) \exp(-j2\pi k f^*) .$$

Обидва способи дають однакові результати.

Графіки частотного відгуку ідеального та реального СІВ ФВЧ наведено на рис. 4.8 в абсолютних координатах. На рис. 4.9 наведений графік залежності ослаблення фільтра в децибелах. На рис. 4.10 – графік відносного спектрального відгуку. Чисельні значення надані в таблиці 4.2.

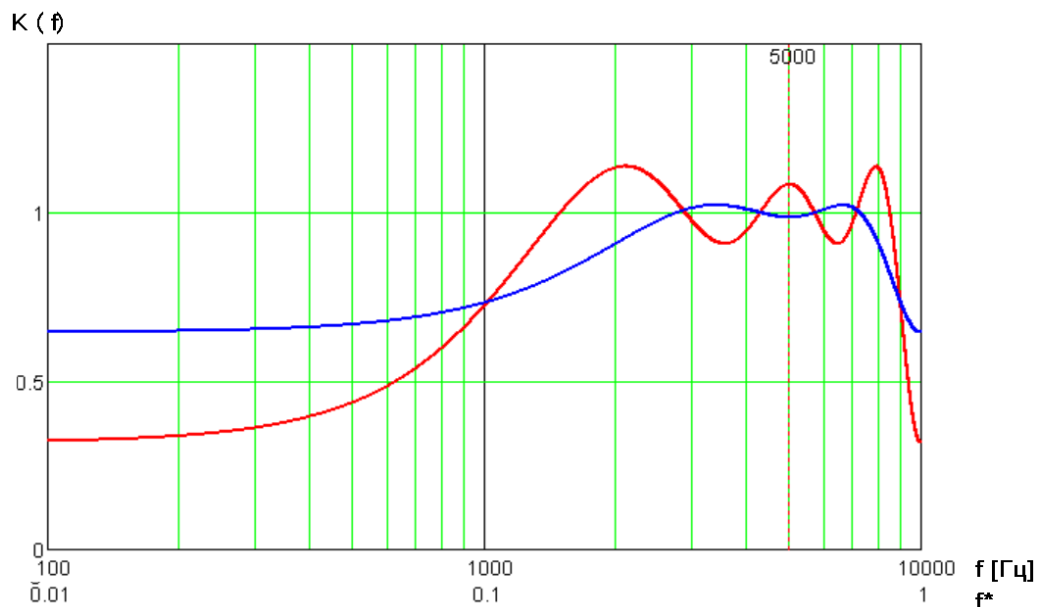


Рис. 4.8 – Частотний відгук СІВ ФВЧ

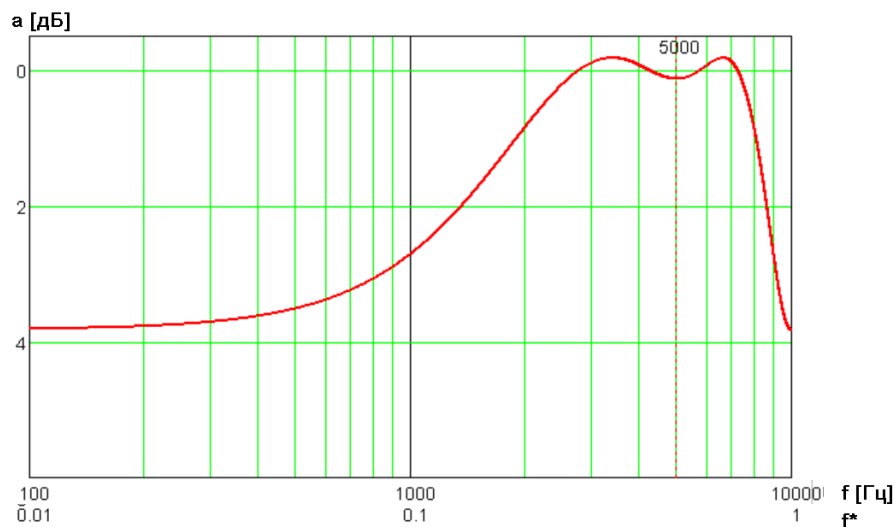


Рис. 4.9 – Частотний відгук реального ФВЧ

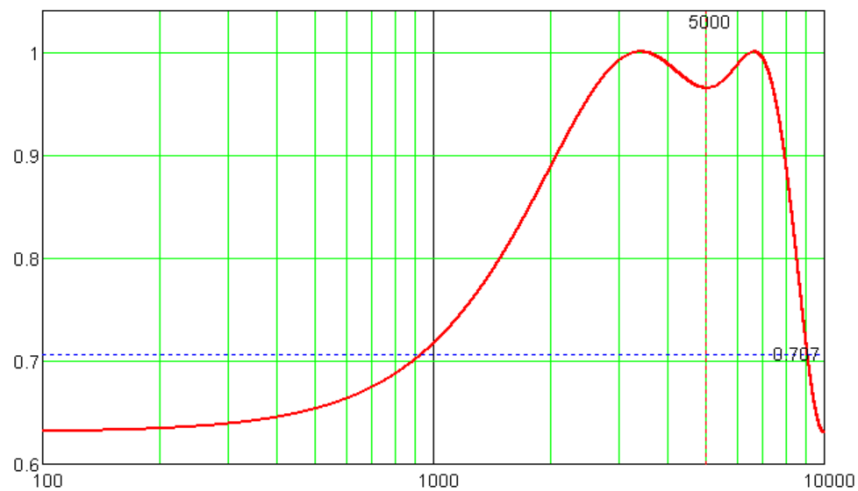


Рис. 4.10 – Нормований частотний відгук реального ФВЧ

Специфікація фільтра

Нерекурсивний фільтр верхніх частот з частотою дискретизації 10 кГц.

Розмір фільтра – 7. Порядок фільтра – 5.

Період дискретизації – 0.1 мс. Інтервал обробки – 0.6 мс.

Статичний коефіцієнт передачі – 0.644, статичне ослаблення – 3.82 дБ.
В СЗ фільтр є монотонним, в СП має викиди.

Параметри СП: викиди $\delta_p = \mp 0.02$, ослаблення $a_p = 0.131$ дБ, $\varepsilon_p = 0.175$, $f_p = 2593$ Гц.

Параметри СЗ: відхилення $\delta_s = 0.068$ (по рівню 10% від сталого), ослаблення $a_s = 3.012$ дБ, $\varepsilon_s = 1.01$, $f_s = 833$ Гц.

Ширина ПС 1760 Гц, частота зрізу 1713 Гц, $k_f = \frac{f_p}{f_s} = 3.13$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 0.175$.

Висновки. Реальний фільтр має менші викиди в СП за ідеальний фільтр, але суттєво менше придушення в СЗ.

Фільтр має низьку ефективність: суттєві викиди в СП $= \mp 0.02$ та низьке придушення в СЗ – від 3.82 дБ до 3.01 дБ, широка перехідна смуга 1760 Гц, частота зрізу значно вище, ніж за умовами.

Частотний відгук СІВ ФВЧ

f [Гц]	f^*	$ H_{id}(f f^*) $	$ H_p(f f^*) $	$ H_{op}(f f^*) $	$a(f)$ [дБ]
0	0.00	0.316	0.644	0.631	3.825
100	0.01	0.321	0.645	0.632	3.812
500	0.05	0.437	0.668	0.653	3.510
800	0.08	0.599	0.705	0.688	3.069
1000	0.10	0.723	0.732	0.717	2,709
2000	0.20	1.133	0.908	0.889	0.842
3000	0.30	0.973	1.013	0.992	-0.112
4000	0.40	0.947	1.008	0.988	-0.070
5000	0.50	1.083	0.985	0.965	0.132
10000	1.00	0.316	0.644	0.631	3.825

Смуговий фільтр

Імпульсний відгук СФ отримується з імпульсного відгуку двох ФНЧ (п.3.1.2):

$$h_{CF}(n) = h_{ФНЧ1}(n) - h_{ФНЧ2}(n), \quad n = 0 \dots N - 1.$$

Імпульсний відгук ідеальних некаузальних фільтрів ФНЧ1 та ФНЧ2 для нормованого часу (табл. 3.2):

$$h1_n = 2 \cdot 0.0525 \cdot \text{sinc}(2\pi n \cdot 0.0525),$$

$$h2_n = 2 \cdot 0.0725 \cdot \text{sinc}(2\pi n \cdot 0.0725).$$

Віконна функція Ланкоса для нормованого часу має наступний вигляд:

$$w_n = \text{sinc}\left(\frac{\pi(n-2)}{2}\right).$$

Запишемо компоненти каузальних ідеальних ФНЧ, вікна Ланкоса та результуючого вікна реального СФ:

n	ІФНЧ1	ІФНЧ2	Вікно Ланкоса	СФ
0	0.089	0.104	0.0	0.0
1	0.098	0.126	0.413	0.012
2	0.103	0.140	0.827	0.031
3	0.105	0.145	1.000	0.04
4	0.103	0.140	0.827	0.031
5	0.098	0.126	0.413	0.012
6	0.089	0.104	0.0	0

Імпульсний відгук СФ (рис. 4.11) в нормованому часі

$$h(t^*) = 0.0\delta(0) + 0.012\delta(-1) + 0.031\delta(-2) + 0.04\delta(-3) - 0.031\delta(-4) + 0.012\delta(-5) + 0.0\delta(-6),$$

В абсолютному часі в мілісекундах:

$$h(t) = 0.0\delta(t) + 0.012\delta(t - 0.1) + 0.031\delta(t - 0.2) + 0.04\delta(t - 0.3) - 0.031\delta(t - 0.4) + 0.012\delta(t - 0.5) + 0.0\delta(t - 0.6),$$

або у вигляді вектора-стовбця

$$h(n)=[0.0 \ 0.012 \ 0.031 \ 0.04 \ 0.031 \ 0.012 \ 0.0].$$

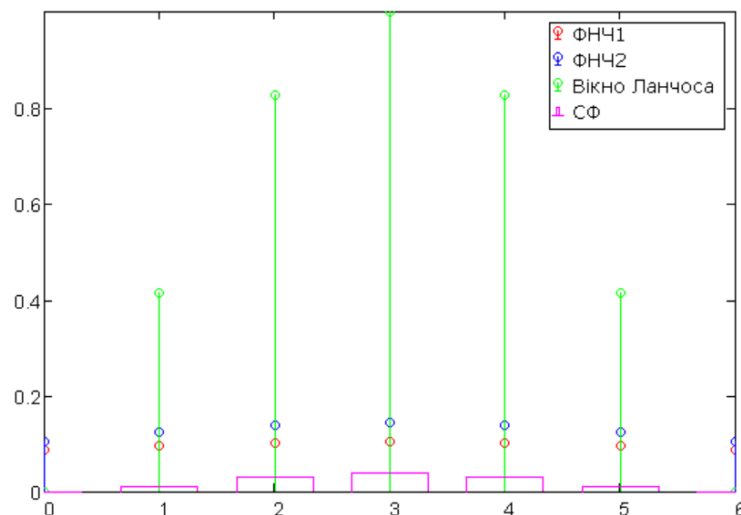


Рис. 4.11 – Імпульсний відгук дискретного СІВ СФ у нормованому часі

Для СІВ фільтрів коефіцієнти вектора імпульсного відгуку тотожні коефіцієнтам чисельника різницевого рівняння $h_k=b_k$.

Різницеве рівняння реального СІВ СФ

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=0}^6 b(k) \cdot x(n-k) \\
 &= 0.012x(n-1) + 0.031x(n-2) + 0.04x(n-3) \\
 &\quad + 0.031x(n-4) + 0.012x(n-5).
 \end{aligned}$$

Передавальна функція фільтра записується з різницевого рівняння як:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{k=0}^6 b_k z^{-k} = 0.012 z^{-1} + 0.031 z^{-2} + 0.04 z^{-3} + 0.031 z^{-4} \\
 &\quad + 0.012 z^{-5}.
 \end{aligned}$$

Розроблений СФ має лінійну структуру (рис. 4.12).

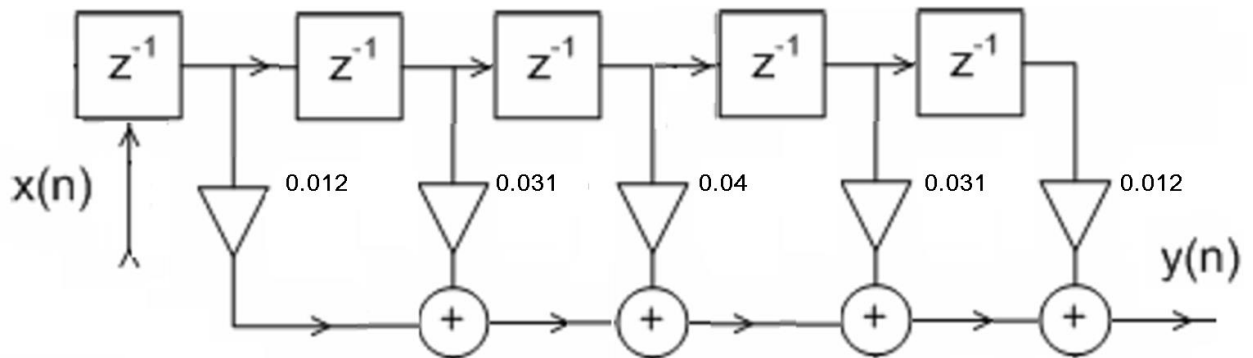


Рис. 4.12 – Структура СІВ СФ

Частотний відгук можна отримати з ряду Фур'є імпульсного відгуку (п. 2.5) або заміною змінних з передавальної функції $H(z)$:

$$H(f) = \sum_{k=0}^6 h(k) \exp(-j2\pi f k T), \quad H(f^*) = \sum_{k=0}^6 h(k) \exp(-j2\pi k f^*).$$

Обидва способи дають однакові результати.

Графіки частотного відгуку ідеального та реального СІВ СФ наведено на рис. 4.13 в абсолютних координатах. На рис. 4.14 наведений графік залежності ослаблення фільтра в децибелах. На рис. 4.15 – графік відносного спектрального відгуку. Чисельні значення надані в табл. 4.3.

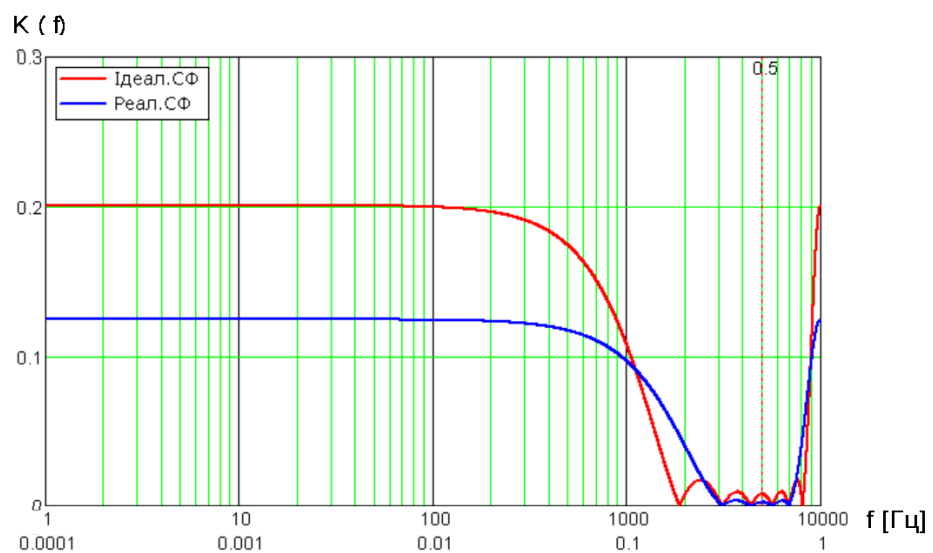


Рис. 4.13 – Частотний відгук СІВ СФ

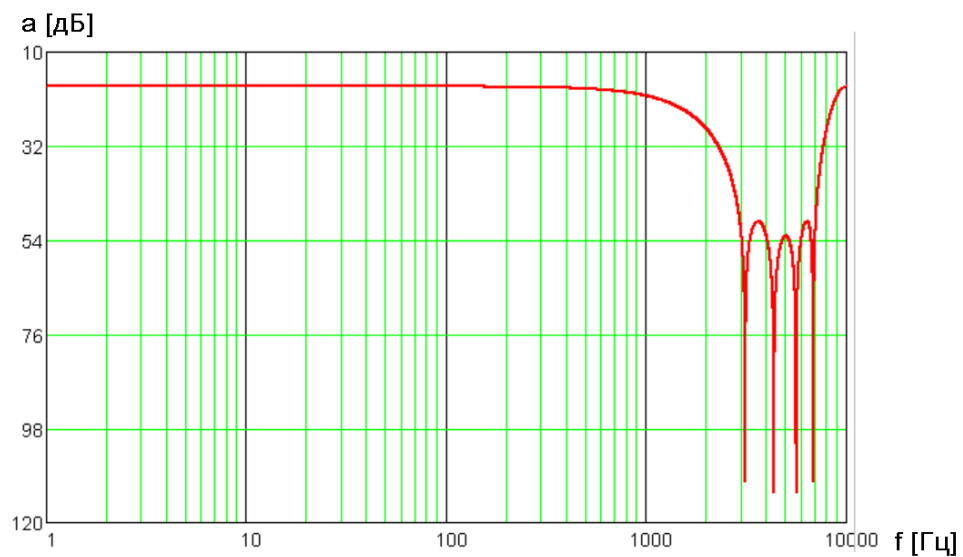


Рис. 4.14 – Частотний відгук реального СФ

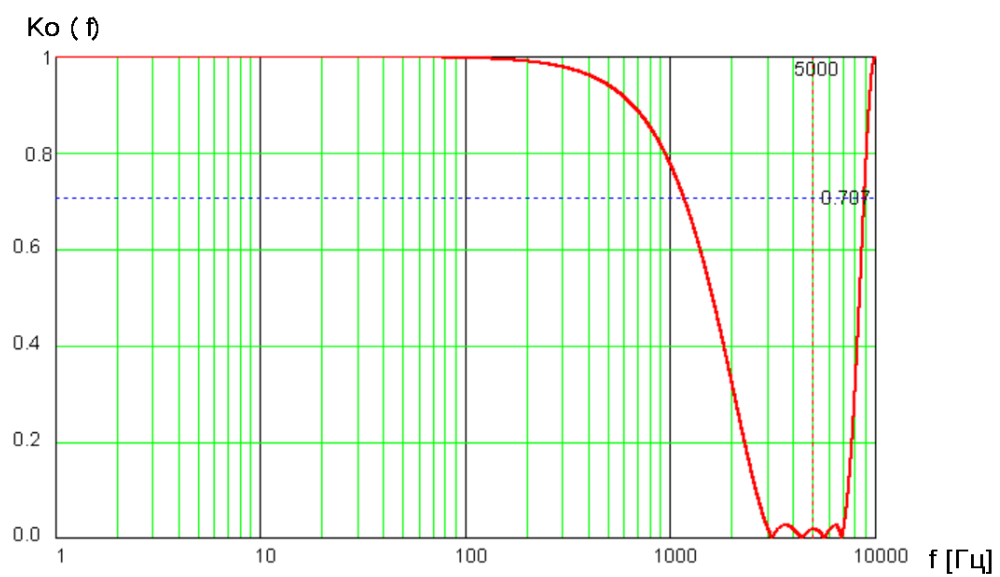


Рис. 4.15 – Нормований частотний відгук реального СФ

Частотний відгук СІВ СФ

f [Гц]	f^*	$ Hp(f f^*) $	$ H0p(f f^*) $	$a(f)$ [дБ]
0	0.00	0.124	1.0	18.103
100	0.01	0.124	0.998	18.124
500	0.05	0.117	0.940	18.639
800	0.08	0.106	0.852	19.492
1000	0.10	0.097	0.777	20.298
2000	0.20	0.040	0.322	27.958
3000	0.30	0.0023	0.018	52.955
4000	0.40	0.0022	0.018	53.119
5000	0.50	0.0023	0.018	52.971
10000	1.00	0.124	1.0	18.103

Специфікація фільтра

Нерекурсивний смуговий фільтр з частотою дискретизації 10 кГц.

Розмір фільтра – 7. Порядок фільтра – 5.

Період дискретизації – 0.1 мс. Інтервал обробки – 0.6 мс.

Фільтр не є смуговим. СЗ на нижніх частотах відсутня. Практично фільтр є ФНЧ.

Статичний коефіцієнт передачі – 0.124, статичне ослаблення – 18.1 дБ. В СП фільтр є монотонним.

Параметри СП: ослаблення $a_p = 21.15$ дБ, $\varepsilon_p = 11.37$, $f_p = 1171$ Гц.

Нижня СЗ відсутня. Параметри верхньої СЗ: відхилення $\delta_s = 0.003$, ослаблення $a_s = 50.3$ дБ, $\varepsilon_s = 327.75$, $f_s = 2960$ Гц.

Ширина ПС 1760 Гц, частота зрізу 2070 Гц, $k_f = \frac{f_p}{f_s} = 0.396$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 0.035$.

Висновки. Розміру фільтра не вистачає для реалізації смугового виділення. Нижні частоти не ослаблюються. Нижня СЗ відсутня. Фільтр має низьку ефективність. Пропускання в СП всього 0.124 (18 дБ). Верхня частота

зрізу 1171 Гц , викиди в верхній СЗ= ∓ 0.02 , придушення в верхній СЗ – від 50 дБ до 115 дБ, широка перехідна смуга 1790 Гц, верхня частота зрізу 2070 Гц значно вище, ніж за умовами.

Режекторний фільтр

Імпульсний відгук ЗФ отримується з імпульсних відгуків всечастотного фільтра та двох ФНЧ (п.3.1.2):

$$h_{зф}(n) = h_{\delta}(n) - h_{сф}(n) = h_{\delta}(n) - h_{фнч1}(n) - h_{фнч2}(n) \\ = \begin{cases} 1 - h_{фнч1}(n) - h_{фнч2}(n), & n = 0 \\ -h_{фнч1}(n) - h_{фнч2}(n), & n \neq 1 \end{cases}$$

Імпульсний відгук ідеальних некаузальних фільтрів ФНЧ1 та ФНЧ2 для нормованого часу (табл. 3.2)

$$h1_n = 2 \cdot 0.0525 \cdot \text{sinc}(2\pi n \cdot 0.0525),$$

$$h2_n = 2 \cdot 0.0725 \cdot \text{sinc}(2\pi n \cdot 0.0725).$$

Віконна функція Ланкоса для нормованого часу має наступний вигляд:

$$w_n = \text{sinc}\left(\frac{\pi(n-2)}{2}\right).$$

Реальний ФНЧ має імпульсний відгук

$$h(n)=[0.0 \ 0.04 \ 0.085 \ 0.105 \ 0.085 \ 0.04 \ 0.0].$$

Запишемо компоненти каузальних ідеальних ФНЧ, вікна Ланкоса та результуючого вікна реального РФ:

n	ФНЧ1	ФНЧ2	Вікно Ланкоса	ІФ	РФ
0	0.089	0.104	0.0	1	0.0
1	0.098	0.126	0.413	0	-0.012
2	0.103	0.140	0.827	0	-0.031
3	0.105	0.145	1.000	0	0.96
4	0.103	0.140	0.827	0	-0.031
5	0.098	0.126	0.413	0	-0.012
6	0.089	0.104	0.0	0	0.0

Імпульсний відгук РФ (рис. 4.16) в нормованому часі

$$h(t^*) = 0.0\delta(0) - 0.012\delta(-1) - 0.031\delta(-2) + 0.96\delta(-3) - \\ 0.031\delta(-4) - 0.012\delta(-5) + 0.0(-6),$$

В абсолютному часі в мілісекундах:

$$h(t) = 0.0\delta(t) - 0.012\delta(t - 0.1) - 0.031\delta(t - 0.2) + 0.96\delta(t - 0.3) - 0.031\delta(t - 0.4) - 0.012\delta(t - 0.5) + 0.0\delta(t - 0.6),$$

або у вигляді вектора-стовбця

$$h(n)=[0.0 \ -0.012 \ -0.031 \ 0.86 \ -0.031 \ -0.012 \ 0.0].$$

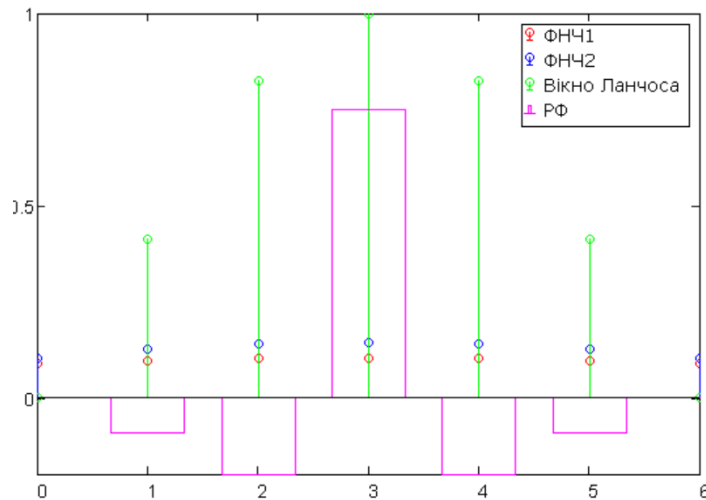


Рис. 4.16 – Імпульсний відгук дискретного СІВ РФ у нормованому часі

Для СІВ фільтрів коефіцієнти вектора імпульсного відгуку тотожні коефіцієнтам чисельника різницевого рівняння $h_k=b_k$.

Різницеве рівняння реального СІВ РФ

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^6 b(k) \cdot x(n-k) \\ &= -0.012x(n-1) - 0.031x(n-2) + 0.96x(n-3) \\ &\quad - 0.031x(n-4) - 0.012x(n-5). \end{aligned}$$

Передавальна характеристика фільтра записується з різницевого рівняння як:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^6 b_k z^{-k} = -0.012 z^{-1} - 0.031 z^{-2} + 0.86 z^{-3} - 0.031 z^{-4} \\ &\quad - 0.012 z^{-5}. \end{aligned}$$

Розроблений РФ має лінійну структуру (рис. 4.17).

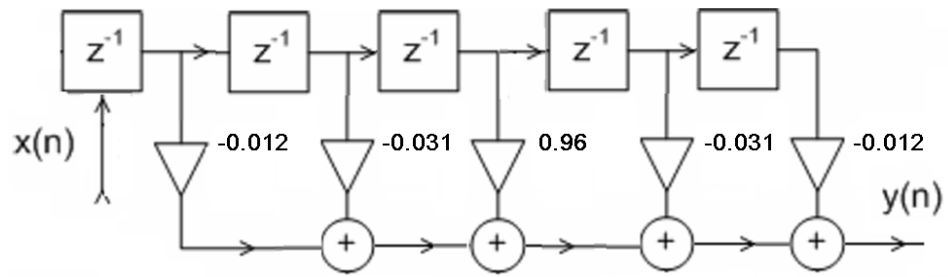


Рис. 4.17 – Структура СІВ ФВЧ

Частотний відгук можна отримати з ряду Фур'є імпульсного відгуку (п. 2.5) або заміною змінних з передавальної функції $H(z)$:

$$H(f) = \sum_{k=0}^6 h(n) \exp(-j2\pi f k T), \quad H(f^*) = \sum_{k=0}^6 h(n) \exp(-j2\pi k f^*) .$$

Графіки частотного відгуку ідеального та реального СІФ РФ наведено на рис. 4.18 в абсолютних координатах. На рис. 4.19 наведений графік залежності ослаблення фільтра в децибелах. На рис. 4.20 – графік відносного спектрального відгуку. Чисельні значення надані в таблиці 4.4.

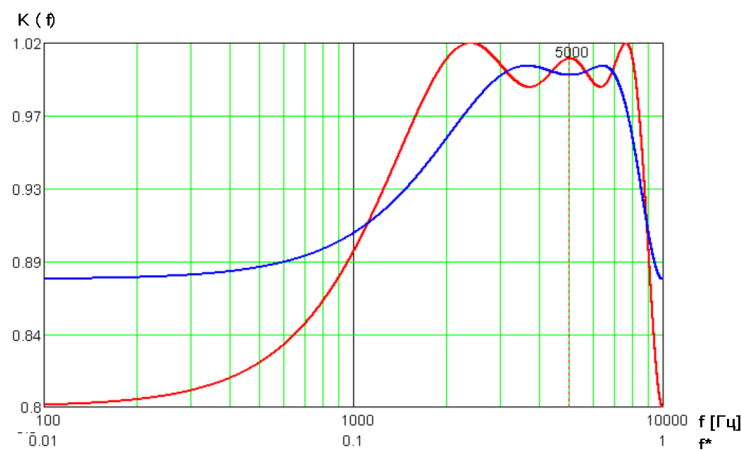


Рис. 4.18 – Частотний відгук СІВ РФ

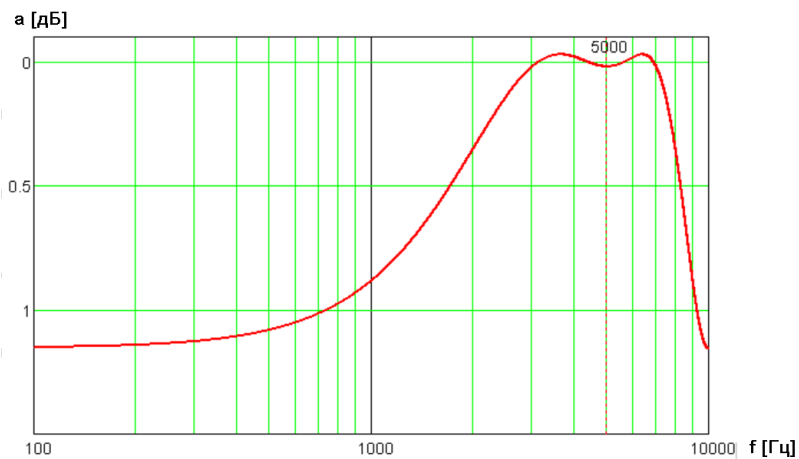


Рис. 4.19 – Частотний відгук реального РФ

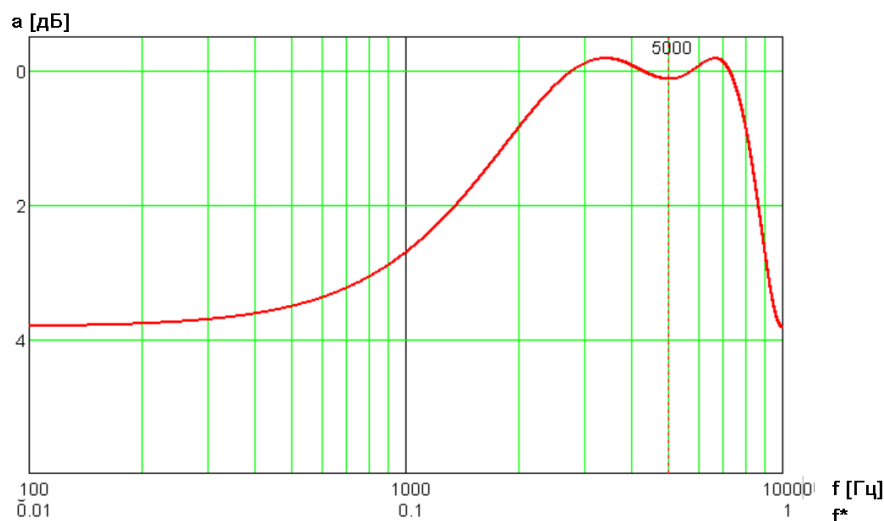


Рис. 4.20 – Нормований частотний відгук реального РФ

Таблиця 4.4.

Частотний відгук СІВ РФ

f [Гц]	f^*	$ H_{id}(f f^*) $	$ H_p(f f^*) $	$ H_{0p}(f f^*) $	$a(f)$ [дБ]
0	0.00	0.799	0.876	0.858	1.154
100	0.01	0.800	0.876	0.859	1.151
500	0.05	0.826	0.883	0.866	1.080
800	0.08	0.863	0.894	0.876	0.974
1000	0.10	0.892	0.903	0.886	0.883
2000	0.20	1.007	0.960	0.941	0.355
3000	0.30	1.004	0.998	0.978	0.02
4000	0.40	0.993	1.02	0.983	-0.02
5000	0.50	1.008	0.998	0.978	0.02
10000	1.00	0.799	0.876	0.858	1.154

Специфікація фільтра

Нерекурсивний режекторний фільтр з частотою дискретизації 10 кГц.

Розмір фільтра – 7. Порядок фільтра – 5.

Період дискретизації – 0.1 мс. Інтервал обробки – 0.6 мс.

Фільтр не є режекторним. СП на нижніх частотах відсутня. Практично фільтр є ФВЧ.

Статичний коефіцієнт передачі – 0.867, статичне ослаблення – 1.15 дБ.
В СП фільтр є монотонним.

Нижня СП відсутня. Параметри верхньої СП: відхилення $\delta_p = \mp 0.022$, ослаблення $\alpha_p = 1.15$ дБ, $\varepsilon_p = 0.45$, $f_p = 2390$ Гц.

Параметри СЗ: відхилення $\delta_s = 0.014$ (по рівню 10%), ослаблення $\alpha_s = 1$ дБ, $\varepsilon_s = 0.508$, $f_s = 741$ Гц.

Ширина ПС 430 Гц, частота зрізу 956 Гц, $k_f = \frac{f_p}{f_s} = 1.58$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 0.89$.

Висновки. Розміру фільтра не вистачає для реалізації смугового виділення. Нижні частоти не пригнічуються. Нижня СП відсутня. Фільтр має низьку ефективність. Пропускання в СЗ аж 0.867 (1.15 дБ). Амплітудний діапазон всього 0.14 (1.15 дБ).

4.2 Приклад розрахунку НІВ фільтра

Розробити методом білінійного перетворення еліптичний ФНЧ, ФВЧ, СВ, РВ з частотою дискретизації 10 кГц, ослабленням СП 1 дБ, ослабленням СЗ 200 крат для ФНЧ та ФВЧ та 40 дБ для СФ та ЗФ.

ФНЧ: верхня частота СП 500 Гц, нижня частота СЗ 550 Гц, частота зрізу 525 Гц, ширина ПС 50 Гц.

ФВЧ: верхня частота СЗ 500 Гц, нижня частота СП 550 Гц, частота зрізу 525 Гц, ширина ПС 50 Гц.

СФ: верхня частота СЗ1 500 Гц, нижня частота СП 550 Гц, частота зрізу 525 Гц, ширина ПС1 50 Гц, верхня частота СП 700 Гц, нижня частота СЗ2 750 Гц, частота зрізу 725 Гц, ширина ПС2 50 Гц.

ЗФ: верхня частота СП1 500 Гц, нижня частота СЗ 550 Гц, частота зрізу 525 Гц, ширина ПС1 50 Гц, верхня частота СЗ 700 Гц, нижня частота СП2 750 Гц, частота зрізу 725 Гц, ширина ПС2 50 Гц.

Розрахувати різницеве рівняння, передавальну характеристику, частотний відгук, специфікацію фільтра.

Розв'язання

Підготовка даних

Переведення дискретних частот в аналогові:

$$\omega_a = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi f_d T}{2} \right), \quad f_d = 10 \text{ кГц}, \quad T = 10^{-4} \text{ с.}$$

$$fp_{a1} = 500 \text{ Гц}, fp_{a2} = 700 \text{ Гц}, fs_{a1} = 550 \text{ Гц}, fs_{a2} = 750 \text{ Гц},$$

$$\omega p_{d1} = 3168 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \omega p_{d2} = 4470 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \omega s_{d1} = 3491 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$\omega s_{d2} = 4801 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

Еліптичний НІВ ФНЧ

Аналоговий прототип ФНЧ

Нормування частот: $\omega_0 = \frac{\omega}{\omega_p}$,

$$\omega p_1 = \frac{\omega p_{d1}}{\omega p_{d1}} = 1, \omega s_1 = \frac{\omega s_{d1}}{\omega p_{d1}} = \frac{3491}{3168} = 1.1019,$$

$$k_f = \frac{\omega p_1}{\omega s_1} = \frac{1}{1.1019} = 0.9075.$$

Розрахунок первинних амплітудних коефіцієнтів:

Ослаблення в СП $a_p = 1$ дБ. Втрати в СП $\delta_p = 1 - 10^{-0.05a_p} = 0.108$.

$$\varepsilon_p = \sqrt{10^{0.1a_p} - 1} = 0.50885.$$

Ослаблення в СЗ 200 крат. $a_s = 20 \lg(200) = 46.02$ дБ. Викиди в СЗ $\delta_s = 10^{-0.05a_s} = 0.005$, $\varepsilon_s = \sqrt{10^{0.1a_s} - 1} = 199.9975$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = \frac{0.50885}{199.8875} = 0.002544$.

Перевірка потрібного розміру фільтра:

$$N \geq \frac{T(k_\varepsilon)K(k_f)}{K(k_\varepsilon)T(k_f)} = \frac{T(0.002544)K(0.5088)}{K(0.002544)T(0.5088)} = 6.4805.$$

Визначений розмір фільтра забезпечує дотримання вимог по амплітуді. Можлива для еліптичного фільтра корекція дає

$$k'_\varepsilon = \sqrt{1 - k_\varepsilon^2} = 0.999997, kf' = (k'_\varepsilon)^7 \prod_{k=1}^3 sn^4\left(\frac{2k-1}{N}K(k'_\varepsilon), k'_\varepsilon\right) = 0.3692,$$

$$kf = \sqrt{1 - kf'^2} = 0.92936.$$

Нормований ФНЧ розміром 7 має три пари уявних нулів:

$$s\beta_k = \frac{j}{k_f cd\left(\frac{2k-1}{N}K(k_f), k_f\right)} = \frac{j}{0.9294 cd\left(\frac{2k-1}{7}K(0.9294), 0.9294\right)},$$

$$s\beta = [j1.0852 \ j1.1926 \ j1.7735]$$

Нормований ФНЧ розміром 7 має три пари симетричних полюсів та один дійсний від'ємний полюс.

Допоміжна змінна

$$v = \frac{-j}{N} sn^{-1} \left(\frac{j K(k_\varepsilon)}{\varepsilon_p}, k_\varepsilon \right) = \frac{-j}{7} sn^{-1} \left(\frac{j K(0.002544)}{0.50885}, 0.002544 \right) = 0.12987$$

Дійсний полюс:

$$\begin{aligned} s\alpha_0 = \sigma_0 &= j sn(jvK(k_f), k_f) = j sn(j 0.12987 K(0.9294), 0.9294) \\ &= -0.3091 \end{aligned}$$

Парні полюси:

$$\begin{aligned} s\alpha_k &= j cd \left(\left(\frac{2k-1}{N} - jv \right) K(k_f), k_f \right) \\ &= j cd \left(\left(\frac{2k-1}{7} - j0.12987 \right) K(0.9294), 0.9294 \right), \end{aligned}$$

$$s\alpha_k = [-0.01513 + j0.99948 \quad -0.07133 + j0.92262 \quad -0.20714 + j0.64503]$$

Передавальна функція Лапласа нормованого фільтра:

$$H(s_0) = \frac{\prod_{k=1}^3 (s_0^2 - s\beta_k^2)}{H_0 (s - s\alpha_0) \prod_{k=1}^3 (s_0^2 - 2Re(s\alpha_k)s_0 + Re(s\alpha_k)^2 + Im(s\alpha_k)^2)},$$

$$H_0 = \frac{1}{-s\alpha_0} \frac{\prod_{i=1}^3 (-s\beta_k)^2}{\prod_{k=1}^3 Re(s\alpha_k)^2 + Im(s\alpha_k)^2} = 43.4102$$

$$H(s_0)$$

$$= \frac{(s_0^2 + 1.1778)(s_0^2 + 1.4224)(s_0^2 + 3.1454)}{43.4102(s_0 + 0.3091)(s_0^2 + 2 \cdot 0.0151s_0 + 0.9992)(s_0^2 + 2 \cdot 0.0713s_0 + 0.8563)} \dots$$

$$\dots \frac{1}{(s_0^2 + 2 \cdot 0.2071s_0 + 0.4589)}$$

$$= \frac{9.8538 s_0^2 + 5.7455 s_0^4 + s_0^6 + 5.2693}{22.7883 s_0 + 42.5158 s_0^2 + 90.6813 s_0^3 + 76.1033 s_0^4 + 111.3908 s_0^5 +}$$

$$\dots \frac{1}{+38.8185 s_0^6 + 43.31025 s_0^7 + 5.2571}$$

$$\text{Денормування ФНЧ } s = \frac{s_0}{\omega_p}:$$

$$H(s)$$

$$= \frac{5.2693 + 9.8538 \left(\frac{s}{3168}\right)^2 + 5.7455 \left(\frac{s}{3168}\right)^4 + \left(\frac{s}{3168}\right)^6}{22.7883 \frac{s}{3168} + 42.5158 \left(\frac{s}{3168}\right)^2 + 90.6813 \left(\frac{s}{3168}\right)^3 + 76.1033 \left(\frac{s}{3168}\right)^4 + \dots}$$

$$= \frac{\dots + 111.3908 \left(\frac{s}{3168}\right)^5 + 38.8185 \left(\frac{s}{3168}\right)^6 + 43.3102 \left(\frac{s}{3168}\right)^7 + 5.2571}{188.2793 \cdot 10^{-24} s^6 + 10.8547 \cdot 10^{-15} s^4 + 186.8001 \cdot 10^{-9} s^2 + 1.00234}$$

$$= \frac{1 + 2.5742 \cdot 10^{-24} s^7 + 7.3087 \cdot 10^{-21} s^6 + 66.4346 \cdot 10^{-18} s^5 + 143.7776 \cdot 10^{-15} s^4}{1}$$

$$\dots + 542.6856 \cdot 10^{-12} s^3 + 805.9794 \cdot 10^{-9} s^2 + 1.3684 \cdot 10^{-3} s$$

Передавальна функція рекурсивного НІВ фільтра записується в канонічному вигляді як

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{l=1}^{M-1} a_l z^{-l}}.$$

Отримується передавальна функція дискретного ФНЧ з передавальної функції Лапласа аналогового фільтра-прототипу заміною $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

$$H(z) = \frac{0.003463 - 0.01543z^{-1} + 0.02581z^{-2} - 0.01383z^{-3} - 0.01383z^{-4} + \dots}{1 - 6.5098z^{-1} + 18.3700z^{-2} - 29.1145z^{-3} + 0.02581z^{-5} - 0.01543z^{-6} + 0.00346z^{-7}}$$

$$\dots + 27.9797z^{-4} - 16.3011z^{-5} + 5.3303z^{-6} - 0.7546z^{-7}$$

Різницеве рівняння отримується з передавальної функції фільтра заміною l на $x(n)$, z^{-l} на $x(n-l)$... z^{-n} на l .

$$y(n) = \sum_{k=0}^6 b(k) \cdot x(n-k) - \sum_{l=1}^6 a(l) \cdot y(n-l),$$

b

$$= [0.003463 \ 0.01543 \ 0.02581 \ 0.01383 \ 0.01383 \ 0.02581 \ 0.01543 \ 0.00346]$$

$$a = [-6.5098 \ 18.3700 \ -29.1145 \ 27.9797 \ -16.3011 \ 5.3303 \ -0.7546]$$

Розроблений ФНЧ має нелінійну структуру зі зворотнім зв'язком (рис. 4.21).

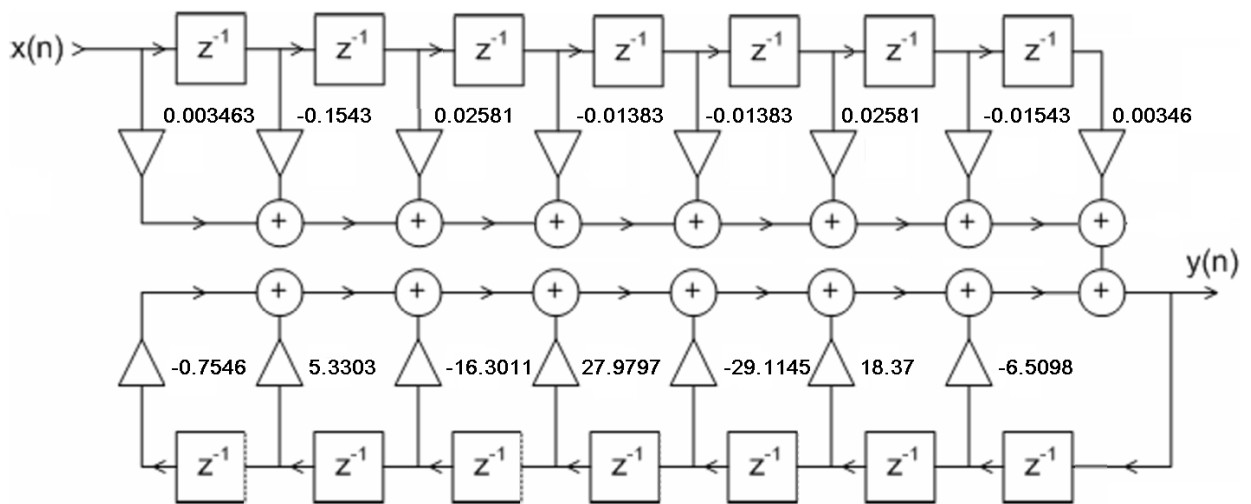


Рис. 4.21 – Структура НІВ ФНЧ

Частотний відгук отримується з передавальної функції $H(z)$ підстановкою $z=e^{j\omega^*}$

$H(\omega^*)$

$$= \frac{0.003463 - 0.01543e^{-j\omega^*} + 0.02581e^{-2j\omega^*} - 0.01383e^{-3j\omega^*} - 0.01383e^{-4j\omega^*} + \dots}{1 - 6.5098e^{-j\omega^*} + 18.3700e^{-2j\omega^*} - 29.1145e^{-3j\omega^*} + 0.02581e^{-j5\omega^*} - 0.01543e^{-j6\omega^*} + 0.00346e^{-j7\omega^*} \dots + 27.9797e^{-4j\omega^*} - 16.3011e^{-j5\omega^*} + 5.3303e^{-j6\omega^*} - 0.7546e^{-j7\omega^*}}$$

Графіки частотного відгуку ПФ ФНЧ наведено на рис. 4.22 в абсолютних координатах. На рис. 4.23 наведений графік залежності ослаблення фільтра в децибелах. Чисельні значення надані в таблиці 4.5.

Примітка.

Результати перетворень є чутливими до кількості цифр мантиси даних. Порівняння показано на рис. 4.22. Перетворення з чотирма цифрами дає недостовірний результат. Рекомендується використовувати не менше 6-8 значущих цифр мантиси.

Специфікація фільтра

Рекурсивний еліптичний ФНЧ з частотою дискретизації 10 кГц.

Розмір фільтра – 7. Порядок фільтра – 7.

Період дискретизації – 0.1 мс. Інтервал обробки – 0.6 мс.

Статичний коефіцієнт передачі – 1.002, статичне ослаблення – 0.019 дБ. Відхилення від 1.0 обумовлено похибками заокруглення при розрахунках. В обох зонах фільтр має викиди.

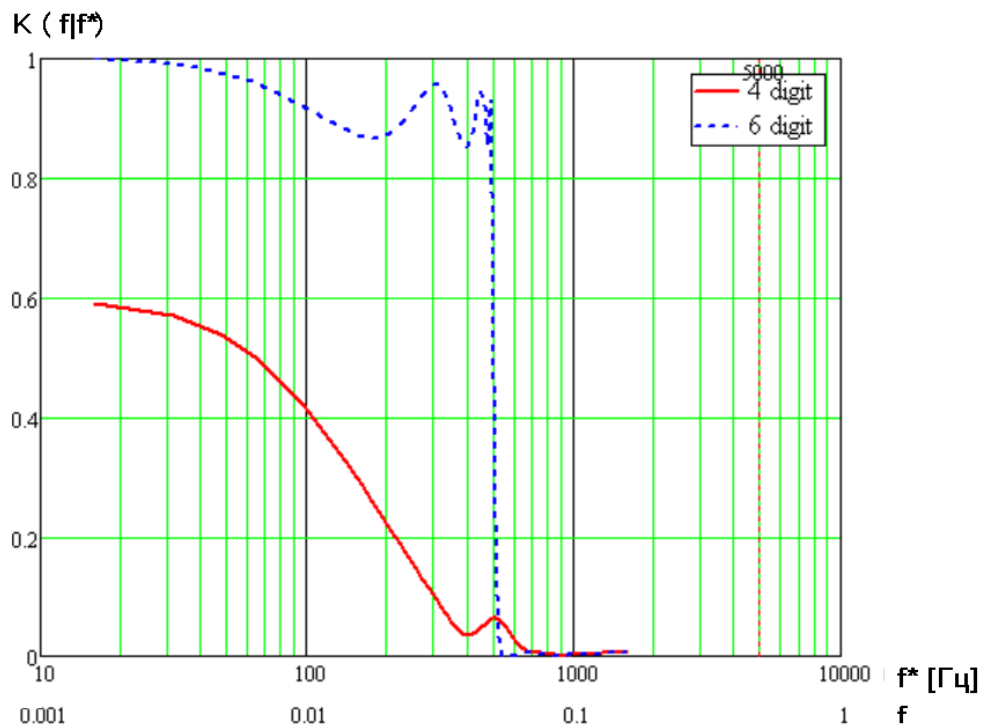


Рис. 4.22 – Частотний відгук НІВ ФНЧ

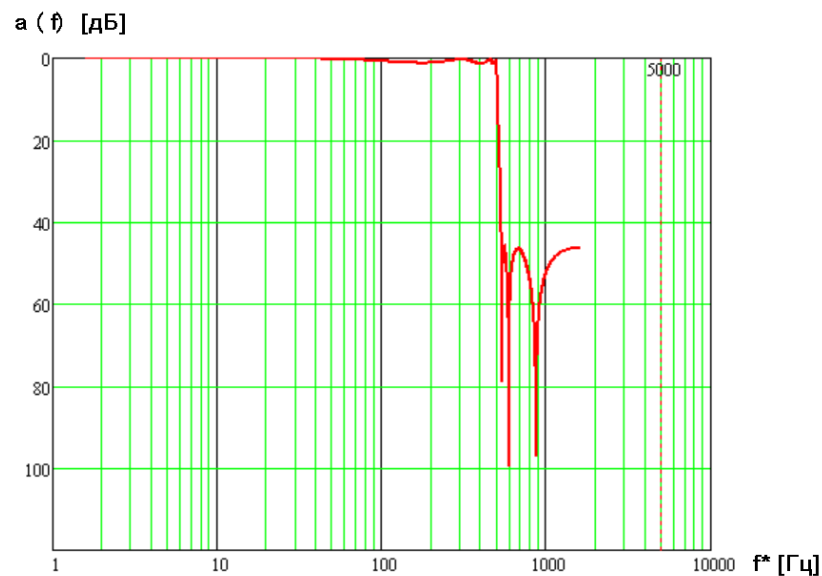


Рис. 4.23 – Частотне ослаблення НІВ ФНЧ

Параметри СП: викиди $\delta_p = 0.15$, ослаблення $a_p = 1.47$ дБ, $\varepsilon_p = 0.635$, $f_p = 500$ Гц.

Параметри СЗ: викиди $\delta_s = 0.005$, ослаблення $a_s = 3.012$ дБ, $\varepsilon_s = 365.51$, $f_s = 538\ 554$ Гц.

Ширина ПС 38 Гц, частота зрізу 519 Гц. $k_f = \frac{f_p}{f_s} = 0.929$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 0.0019$

Частотний відгук НІФ ФНЧ

f [Гц]	f^*	$ Hp(f f^*) $	$ H0p(f f^*) $	$a(f)$ [дБ]
0	0.00	1.00219	1.0	-0.019
100	0.01	0.91615	0.91415	0.76
500	0.05	0.84389	0.84205	1.47
800	0.08	1.91042e-3	1.90625e-3	54.37
1000	0.10	2.40638e-3	2.40112e-3	52.37
2000	0.20	4.18619e-3	4.17704e-3	47.56
3000	0.30	2.53146e-3	2.52593e-3	51.93
4000	0.40	1.17698e-3	1.17441e-3	58.58
5000	0.50	0.0	0.0	364.95
10000	1.00	1.00219	1.0	-0.019

Висновки.

Фільтр має високу ефективність незважаючи на викиди в обох зонах. Придушення в СЗ від 47 дБ до 360 дБ, що відповідає та перевищує завдання. Ослаблення в СП гірше за завдане на 0.5 дБ. Перехідна смуга має ширину всього 38 Гц та частоту зрізу майже за завданням – 519 Гц.

Еліптичний НІВ ФВЧ

Дії розрахунків нормованого аналогового фільтра прототипу НЧ до етапу денормування передавальної функції Лапласа повторюють розрахунок ФНЧ. Для ФНЧ задається верхня частота СП рівною верхній частоті СЗ ФВЧ, нижня частота СЗ рівною нижній частоті СП ФВЧ: $f_{p\text{ ФНЧ}} = f_{s\text{ ФВЧ}} = 500$ Гц, $f_{s\text{ ФНЧ}} = f_{p\text{ ФВЧ}} = 550$ Гц.

Аналоговий прототип ФНЧ

Нижче наведені основні розрахункові дані ФНЧ (повний розрахунок наведено вище в параграфі «Еліптичний НІВ ФНЧ»).

$$\text{Нормовані частоти } \omega p_1 = \frac{\omega p_{d1}}{\omega p_{d1}} = 1, \omega s_1 = \frac{\omega p_{d1}}{\omega s_{d1}} = \frac{3168}{3491} = 0.9075,$$

$$k_f = \frac{\omega p_1}{\omega s_1} = 0.9075.$$

Ослаблення в СП $a_p = 1$ дБ. Втрати в СП $\delta_p = 1 - 10^{-0.05a_p} = 0.108$.

$$\varepsilon_p = \sqrt{10^{0.1a_p} - 1} = 0.50885.$$

Ослаблення в СЗ 200 крат. $a_s = 20 \lg(200) = 46.02$ дБ. Викиди в СЗ $\delta_s = 10^{-0.05a_s} = 0.005$, $\varepsilon_s = \sqrt{10^{0.1a_s} - 1} = 199.9975$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = \frac{0.50885}{199.8875} = 0.002544$.

Можлива для еліптичного фільтра корекція розрахункового розміру фільтра 6.4805 до 7 дає

$$k'_\varepsilon = \sqrt{1 - k_\varepsilon^2} = 0.999997, kf' = (k'_\varepsilon)^7 \prod_{k=1}^3 sn^4 \left(\frac{2k-1}{N} K(k'_\varepsilon), k'_\varepsilon \right) = 0.3692,$$

$$kf = \sqrt{1 - kf'^2} = 0.92936.$$

Нормований ФНЧ розміром 7 має три пари уявних нулів:

$$s\beta = [j1.0852 \ j1.1926 \ j1.7735]$$

Нормований ФНЧ розміром 7 має три пари симетричних полюсів та один дійсний від'ємний полюс.

Дійсний полюс:

$$s\alpha_0 = \sigma_0 = j \operatorname{sn}(jvK(k_f), k_f) = j \operatorname{sn}(j 0.12987 K(0.9294), 0.9294) = -0.3091$$

Парні полюси:

$$s\alpha_k = [-0.01513 + j0.99948 \ -0.07133 + j0.92262 \ -0.20714 + j0.64503]$$

Передавальна функція Лапласа нормованого фільтра:

$$\begin{aligned} H(s_0) &= \frac{(s_0^2 + 1.1778)(s_0^2 + 1.4224)(s_0^2 + 3.1454)}{43.4102(s_0 + 0.3091)(s_0^2 + 2 \ 0.0151s_0 + 0.9992)(s_0^2 + 2 \ 0.0713s_0 + 0.8563)} \cdots \\ &\cdots \frac{1}{(s_0^2 + 2 \ 0.2071s_0 + 0.4589)} \\ &= \frac{9.8538 s_0^2 + 5.7455 s_0^4 + s_0^6 + 5.2693}{22.7883 s_0 + 42.5158 s_0^2 + 90.6813 s_0^3 + 76.1033 s_0^4 + 111.3908 s_0^5 +} \\ &\cdots \frac{1}{+38.8185 s_0^6 + 43.31025 s_0^7 + 5.2571} \end{aligned}$$

Денормування ФНЧ в ФВЧ $s = \frac{\omega_{p1}}{s_0}$:

$H(s)$

$$= \frac{5.2693 + 9.8538 \left(\frac{3168}{s}\right)^2 + 5.7455 \left(\frac{3168}{s}\right)^4 + \left(\frac{3168}{s}\right)^6}{22.7883 \frac{3168}{s} + 42.5158 \left(\frac{3168}{s}\right)^2 + 90.6813 \left(\frac{3168}{s}\right)^3 + 76.1033 \left(\frac{3168}{s}\right)^4 + \dots}$$

$$\frac{1}{\dots + 111.3908 \left(\frac{3168}{s}\right)^5 + 38.8185 \left(\frac{3168}{s}\right)^6 + 43.3102 \left(\frac{3168}{s}\right)^7 + 5.2571}$$

$$= \frac{188.2793 \cdot 10^{-24} s^6 + 10.8547 \cdot 10^{-15} s^4 + 186.8001 \cdot 10^{-9} s^2 + 1.00234}{1 + 2.5742 \cdot 10^{-24} s^7 + 7.3087 \cdot 10^{-21} s^6 + 66.4346 \cdot 10^{-18} s^5 + 143.7776 \cdot 10^{-15} s^4}$$

$$\frac{1}{\dots + 542.6856 \cdot 10^{-12} s^3 + 805.9794 \cdot 10^{-9} s^2 + 1.3684 \cdot 10^{-3} s}$$

Передавальна функція рекурсивного НІВ фільтра записується в канонічному вигляді як

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{l=1}^{M-1} a_l z^{-l}}.$$

Отримується передавальна функція дискретного ФВЧ з передавальної функції Лапласа аналогового фільтра-прототипу заміною $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

$$H(z) = \frac{0.5332 - 3.6418z^{-1} + 10.7113z^{-2} - 17.6937z^{-3} - 17.6937z^{-4} + \dots}{1 - 5.6333z^{-1} + 18.3700z^{-2} - 18.9147z^{-3} + 10.7113z^{-5} - 3.6418z^{-6} + 0.5332z^{-7}}$$

$$\frac{\dots + 15.6272z^{-4} - 7.7186z^{-5} + 2.0840z^{-6} - 0.2310z^{-7}}{\dots}$$

Різницеве рівняння отримується з передавальної функції фільтра заміною l на $x(n)$, z^{-l} на $x(n-l)$... z^{-n} на 1 .

$$y(n) = \sum_{k=0}^6 b(k) \cdot x(n-k) - \sum_{l=1}^6 a(l) \cdot y(n-l),$$

$$b = [0.5332 \quad -3.6418 \quad 10.7113 \quad -17.6937 \quad -17.6937 \quad 10.7113 \quad 3.6418 \quad 0.5332]$$

$$a = [-5.6333 \quad 18.3700 \quad -18.9147 \quad 15.6272 \quad -7.7186 \quad 2.0840 \quad -0.2310].$$

Розроблений ФВЧ має нелінійну структуру зі зворотнім зв'язком (рис. 4.25).

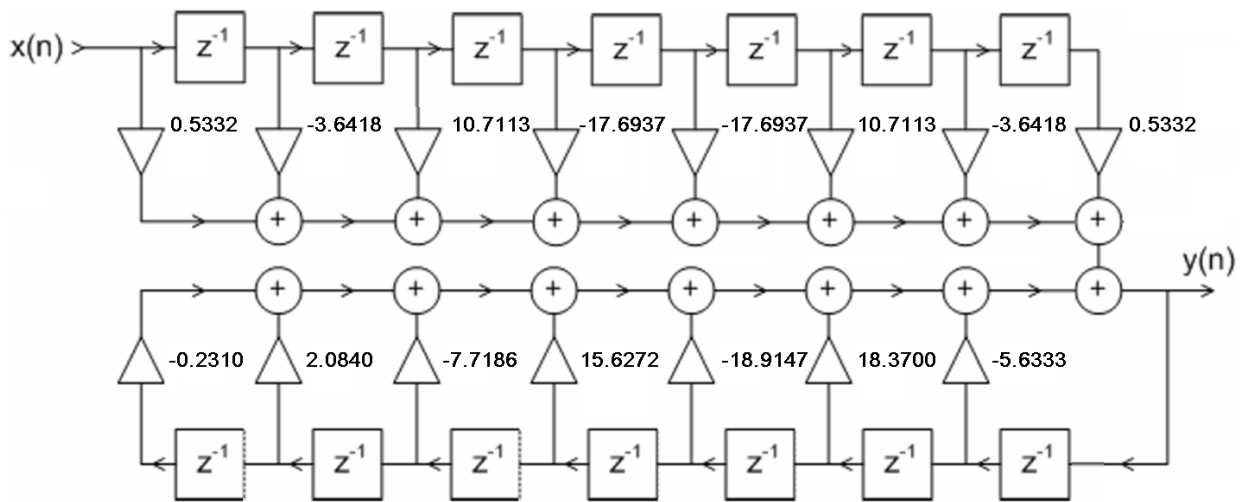


Рис. 4.25 – Структура НІВ ФВЧ

Частотний відгук отримується з передавальної функції $H(z)$ підстановкою $z=e^{j\omega^*}$

$$H(\omega^*) = \frac{0.5332 - 3.6418e^{-j\omega^*} + 10.7113e^{-2j\omega^*} - 17.6937e^{-3j\omega^*} - 17.6937e^{-4j\omega^*} + \dots}{1 - 5.6333e^{-j\omega^*} + 18.3700e^{-2j\omega^*} - 18.9147e^{-3j\omega^*} + 10.7113e^{-4j\omega^*} - 3.6418e^{-5j\omega^*} + 0.5332e^{-6j\omega^*} - 0.2310e^{-7j\omega^*}}$$

Графіки частотного відгуку ПФ ФВЧ наведено на рис. 4.26 в абсолютних координатах. На рис. 4.27 наведений графік залежності ослаблення фільтра в децибелах.

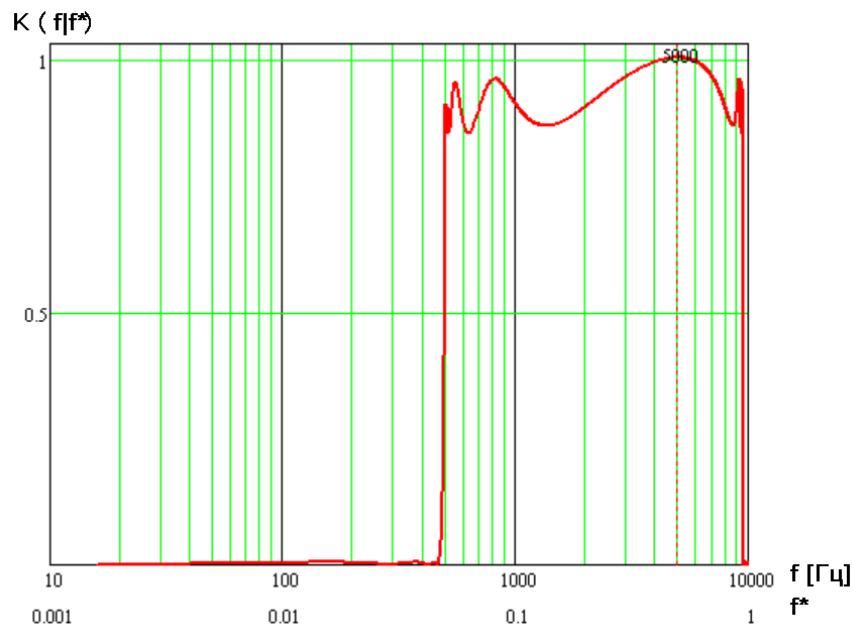


Рис. 4.26 – Частотний відгук НІВ ФВЧ

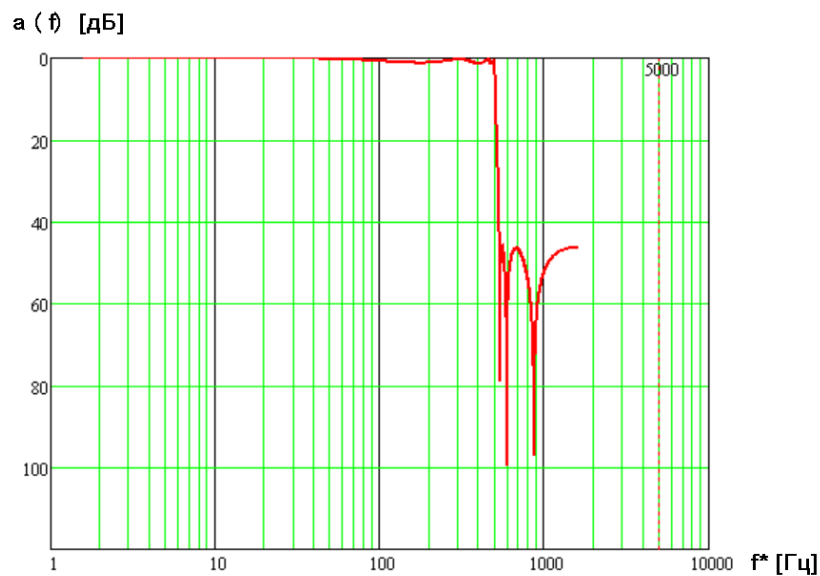


Рис. 4.27 – Частотне ослаблення НІВ ФВЧ

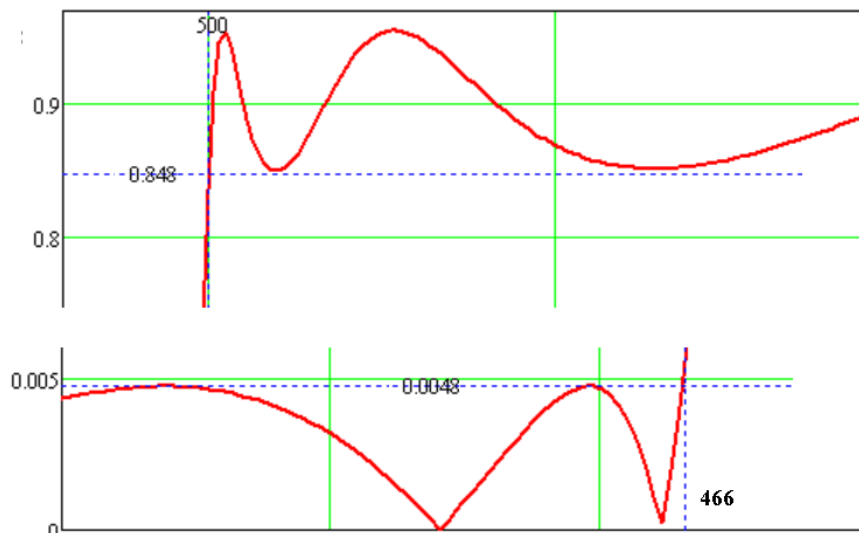


Рис. 4.28 – Нормований частотний відгук НІВ ФВЧ

Чисельні значення надані в табл. 4.6.

Примітка.

Результати перетворень є чутливими до кількості цифр мантиси даних. Перетворення з чотирма цифрами дає недостовірний результат. Рекомендується використовувати не менше 6-8 значущих цифр мантиси.

Специфікація фільтра

Рекурсивний еліптичний ФВЧ з частотою дискретизації 10 кГц.

Розмір фільтра – 7. Порядок фільтра – 7.

Період дискретизації – 0.1 мс. Інтервал обробки – 0.6 мс.

Таблиця 4.6.

Частотний відгук ПФ ФВЧ

f [Гц]	f^*	$ Hp(f f^*) $	$ H0p(f f^*) $	$a(f)$ [дБ]
0	0.00	2.632e-12	2.625e-12	231.59
100	0.01	3.941e-3	3.932e-3	48.09
500	0.05	0.8509	0.8489	1.40
800	0.08	0.9599	0.9578	0.35
1000	0.10	0.9118	0.9097	0.80
2000	0.20	0.9057	0.90356	0.86
3000	0.30	0.9655	0.9632	0.30
4000	0.40	0.9941	0.9918	0.05
5000	0.50	1.00234	1.0	-0.02
10000	1.00	2.637e-12	2.631e-12	231.58

Статичний коефіцієнт передачі – 1.002, статичне ослаблення – 0.019 дБ. Відхилення від 1.0 обумовлено похибками заокруглення при розрахунках. В обох зонах фільтр має викиди.

Параметри СП: викиди $\delta_p = 0.15$, ослаблення $a_p = 1.47$ дБ, $\varepsilon_p = 0.617$, $f_p = 500$ Гц.

Параметри СЗ: викиди $\delta_s = 0.005$, ослаблення $a_s = 164.36$ дБ, $\varepsilon_s = 164.36$, $f_s = 466$ Гц.

Ширина ПС 36 Гц, частота зрізу 482 Гц. $k_f = \frac{f_p}{f_s} = 1.073$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 0.0037$.

Висновки.

Фільтр має високу ефективність незважаючи на викиди в обох зонах. Придушення в СЗ від 48 дБ до 164 дБ, що відповідає та перевищує завдання. Ослаблення в СП гірше за завдане на 0.5 дБ. Перехідна смуга має ширину всього 36 Гц та зсунуто вліво частоту зрізу 582 Гц.

Еліптичний НІВ СФЧ

Перевірка виконання умови симетричності
 $\omega p_{d1} \omega p_{d2} = \omega s_{d1} \omega s_{d1}$ для застосування методу білінійного перетворення для смугових фільтрів.

$$\omega s_{d1} = 3168 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \omega p_{d1} = 3491 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \omega p_{d2} = 4470 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad ,$$
$$\omega s_{d2} = 4801 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$3491 \cdot 4470 = 1.56 \cdot 10^7 \neq 3168 \cdot 4801 = 1.52 \cdot 10^7.$$

Корекція нижньої частоти СЗ1:

$$\omega s_{d1} = \frac{\omega p_{d1} \omega p_{d1}}{\omega s_{d2}} = \frac{3491 \cdot 4470}{4801} = 3250 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Аналоговий прототип ФНЧ

Нормування частот:

$$\omega p_1 = \frac{\omega p_{d1}}{\omega p_{d1}} = 1, \quad \omega s_1 = \frac{\omega s_{d2} - \omega s_{d1}}{\omega p_{d2} - \omega p_{d1}} = 1.5834, \quad k_f = \frac{\omega p_1}{\omega s_1} = 0.63156.$$

Розрахунок первинних амплітудних коефіцієнтів:

Ослаблення в СП $a_p = 1$ дБ. Втрати в СП $\delta_p = 1 - 10^{-0.05 a_p} = 0.108$.

$$\varepsilon_p = \sqrt{10^{0.1 a_p} - 1} = 0.50885.$$

Ослаблення в СЗ $a_s = 40$ дБ. Викиди в СЗ $\delta_s = 10^{-0.05 a_s} = 0.01$, $\varepsilon_s = \sqrt{10^{0.1 a_s} - 1} = 99.995$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = \frac{0.50885}{199.8875} = 0.005089$.

Перевірка потрібного розміру фільтра:

$$N \geq \frac{T(k_\varepsilon)K(k_f)}{K(k_\varepsilon)T(k_f)} = \frac{T(0.002544)K(0.63156)}{K(0.002544)T(0.63156)} = 3.86.$$

Можлива для еліптичного фільтра корекція розрахункового розміру фільтра 3.86 до 4 дає

$$k'_\varepsilon = \sqrt{1 - k_\varepsilon^2} = 0.999987, \quad k f' =$$
$$= (k'_\varepsilon)^7 \prod_{k=1}^3 \text{sn}^4 \left(\frac{2k-1}{N} K(k'_\varepsilon), k'_\varepsilon \right) = 0.75139,$$

$$k f = \sqrt{1 - k f'^2} = 0.65985.$$

Нормований ФНЧ розміром 4 має дві пари уявних нулів:

$$s\beta_k = \frac{j}{k_f cd \left(\frac{2k-1}{N} K(k_f), k_f \right)} = \frac{j}{0.65985 cd \left(\frac{2k-1}{4} K(0.65985), 0.65985 \right)},$$

$$s\beta = [j1.60955 \quad j3.525287]$$

Нормований ФНЧ розміром 3 має три пари симетричних полюсів.

Допоміжна змінна

$$v = \frac{-j}{N} sn^{-1} \left(\frac{j K(k_\varepsilon)}{\varepsilon_p}, k_\varepsilon \right) = \frac{-j}{4} sn^{-1} \left(\frac{j K(0.005089)}{0.50885}, 0.005089 \right) = 0.22726$$

Парні полюси:

$$s\alpha_k = j cd \left(\left(\frac{2k-1}{N} - jv \right) K(k_f), k_f \right)$$

$$= j cd \left(\left(\frac{2k-1}{4} - j0.22726 \right) K(0.65985), 0.65985 \right),$$

$$s\alpha_k = [-0.105281 + j0.993711 \quad -0.364291 + j0.478603]$$

Передавальна функція Лапласа нормованого фільтра:

$$H(s_0) = \frac{\prod_{k=1}^3 (s_0^2 - s\beta_k^2)}{H_0 (s - s\alpha_0) \prod_{k=1}^3 (s_0^2 - 2Re(s\alpha_k)s_0 + Re(s\alpha_k)^2 + Im(s\alpha_k)^2)},$$

$$H_0 = \frac{1}{-s\alpha_0} \frac{\prod_{i=1}^3 (-s\beta_k)^2}{\prod_{k=1}^3 Re(s\alpha_k)^2 + Im(s\alpha_k)^2} = 79.43282$$

$$H(s_0)$$

$$= \frac{(s_0^2 + 2.59065)(s_0^2 + 12.427651)}{79.43282 (s_0^2 + 2 \cdot 0.10528s_0 + 0.99854) (s_0^2 + 2 \cdot 0.36429s_0 + 0.36177)} =$$

$$= \frac{15.018299s_0^2 + s_0^4 + 32.19570}{63.83993s_0 + 120.23953s_0^2 + 74.59885s_0^3 + 79.43282s_0^4 + 28.69452}.$$

Денормування ФНЧ в СФ:

$$\omega_{cen} = \omega p_{d1} \omega p_{d2} = 3950 \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2}, \quad W = \omega p_{d2} - \omega p_{d2} = 979.97 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

$$s = \frac{s_0^2 + \omega_{cen}^2}{s_0 W} = \frac{s_0^2 + 1.56 \cdot 10^7}{s_0 \cdot 979.97}.$$

Примітка.

Слід мати на увазі, що смугове денормування підвищує порядок фільтра вдвічі.

Результати перетворень є чутливими до кількості цифр мантиси даних. Перетворення з чотирма цифрами дає недостовірний результат. Рекомендується використовувати не менше 6-10 значущих цифр мантиси.

$$H(s) = \frac{2.1237 \cdot 10^{-31}s^8 + 1.4208 \cdot 10^{-23}s^6 + 3.4097 \cdot 10^{-16}s^4 + 3.4596 \cdot 10^{-9}s^2 + 1 + 1.68649 \cdot 10^{-29}s^8 + 1.55213 \cdot 10^{-26}s^7 + 1.0772 \cdot 10^{-11}s^6 + 7.3937 \cdot 10^{-19}s^5 \dots + 0.01259}{\dots + 2.54109 \cdot 10^{-14}s^4 + 1.153764 \cdot 10^{-11}s^3 + 2.6230 \cdot 10^{-7}s^2 + 5.8978 \cdot 10^{-5}s}$$

Передавальна функція рекурсивного НІВ фільтра записується в канонічному вигляді як

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{l=1}^{M-1} a_l z^{-l}}.$$

Отримується передавальна функція дискретного СФ з передавальної функції Лапласа аналогового фільтра-прототипу заміною $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

$$H(z) = \frac{0.01242 - 0.00904z^{-1} + 0.2961z^{-2} - 0.5694z^{-3} + 0.7025z^{-4} - 0.5694z^{-5} + \dots}{1 - 7.3087z^{-1} + 23.9424z^{-2} - 45.8412z^{-3} + 0.2961z^{-6} - 0.09039z^{-7} + 0.01242z^{-8} \dots + 56.0641z^{-4} - 44.8378z^{-5} + 22.9057z^{-6} - 6.8392z^{-7} + 0.9152z^{-8}}$$

Різницеве рівняння отримується з передавальної функції фільтра заміною l на $x(n)$, z^{-l} на $x(n-l)$... z^{-n} на l .

$$y(n) = \sum_{k=0}^6 b(k) \cdot x(n-k) - \sum_{l=1}^6 a(l) \cdot y(n-l),$$

$$b = [0.01242 \quad -0.00904 \quad 0.2961 \quad -0.5694 \quad 0.7025 \quad -0.5694 \quad 0.2961 \quad -0.00904 \quad 0.01242]$$

$$a = [-7.3087 \quad 23.9424 \quad -45.8412 \quad 56.0641 \quad -44.8378 \quad 22.9057 \quad -6.8392 \quad 0.9152].$$

Розроблений СФ має нелінійну структуру зі зворотнім зв'язком (рис. 4.29).

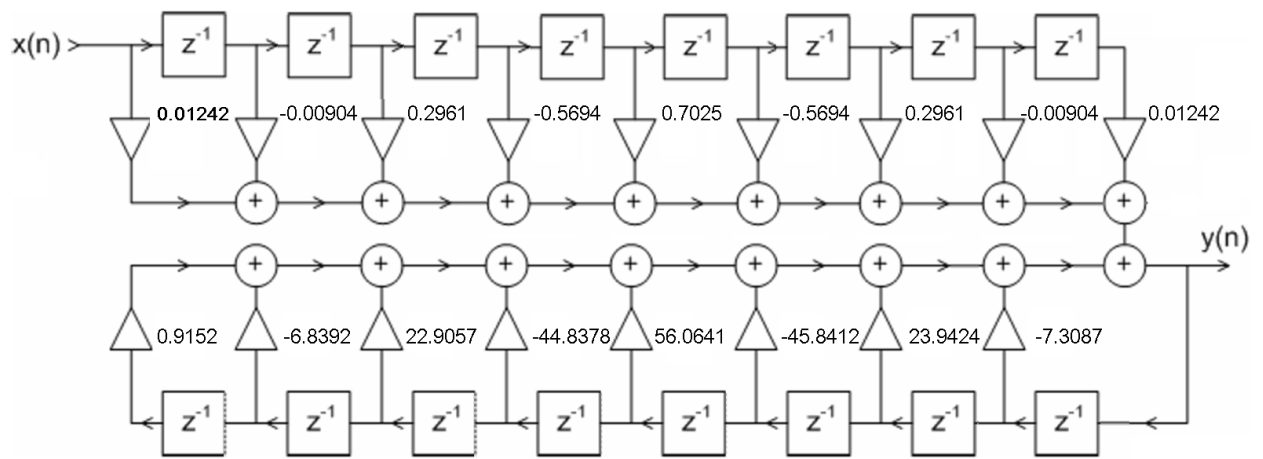


Рис. 4.29 – Структура НІВ СФ

Частотний відгук отримується з передавальної функції $H(z)$ підстановкою $z=e^{j\omega^*}$

$$H(\omega^*) =$$

$$\frac{0.01242 - 0.00904e^{-j\omega^*} + 0.2961e^{-2j\omega^*} - 0.5694e^{-3j\omega^*} + 0.7025e^{-4j\omega^*} - \dots}{1 - 7.3087e^{-j\omega^*} + 23.9424e^{-2j\omega^*} - 45.8412e^{-3j\omega^*} + \dots - 0.5694e^{-5j\omega^*} + 0.2961e^{-6j\omega^*} - 0.09039e^{-7j\omega^*} + 0.01242e^{-8j\omega^*} + 56.0641e^{-4j\omega^*} - 44.8378e^{-5j\omega^*} + 22.9057e^{-6j\omega^*} - 6.8392e^{-7j\omega^*} + 0.9152e^{-8j\omega^*}}$$

Графіки частотного відгуку НІФ РФ наведено на рис. 4.30 в абсолютних координатах. На рис. 4.31 наведений графік залежності ослаблення фільтра в децибелах. На рис. 4.32 – графік рівнів спектрального відгуку.

$$\} K(\omega/\omega^*)$$

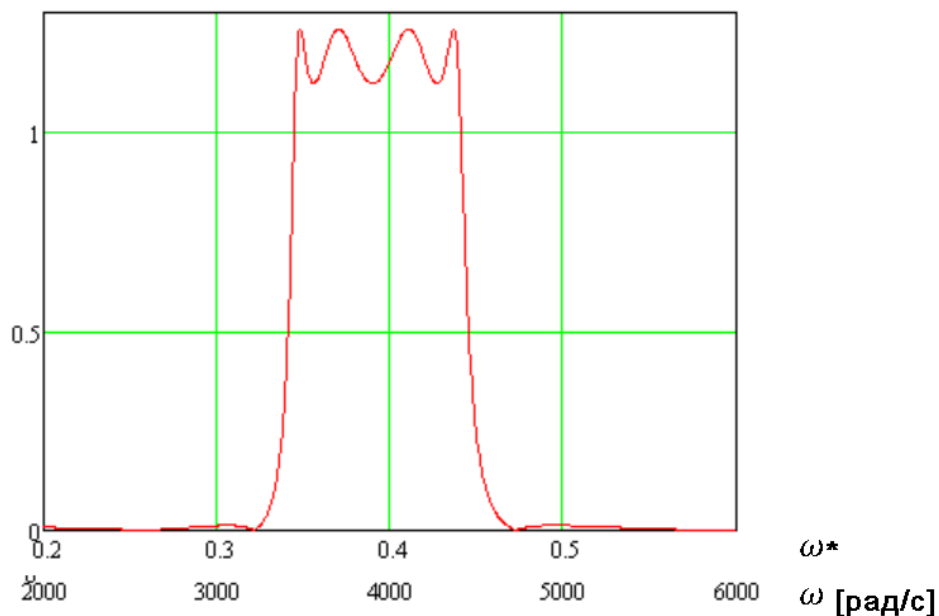


Рис. 4.30 – Частотний відгук НІВ СФ

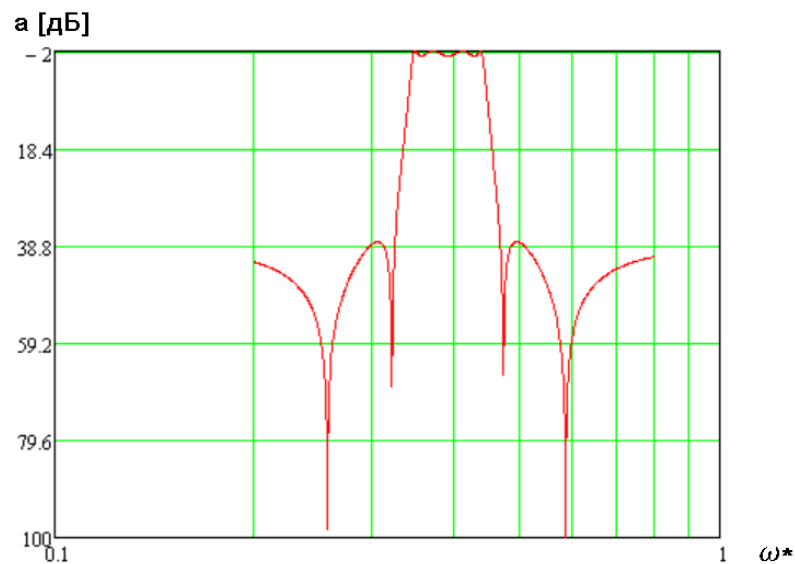


Рис. 4.31 – Частотне ослаблення НІВ СФ

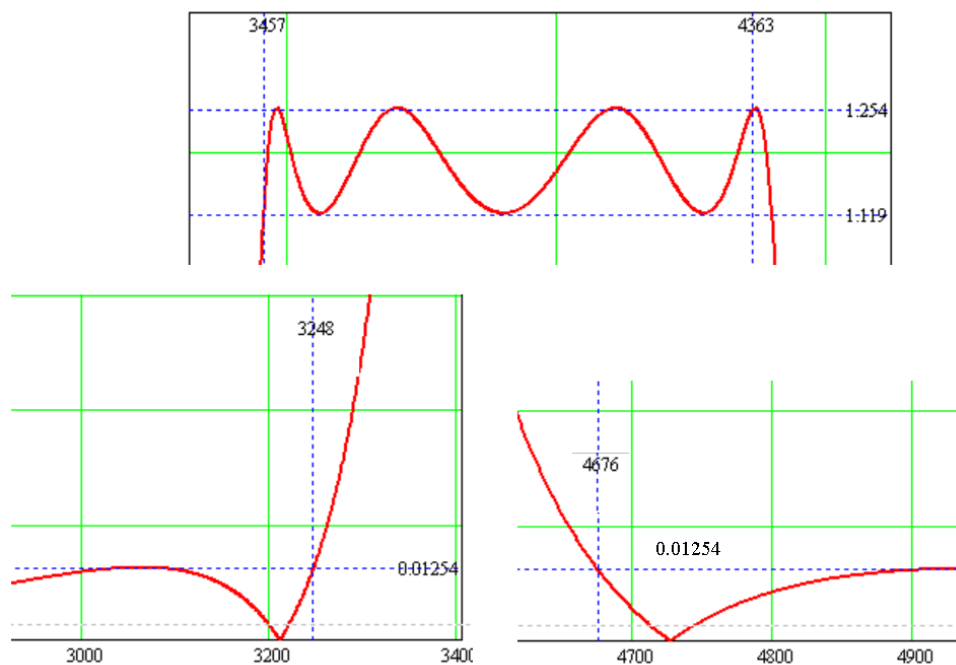


Рис. 4.32 – Рівні частотного відгуку НІВ СФ

Чисельні значення надані в табл. 4.7.

Специфікація фільтра

Рекурсивний еліптичний СФ з частотою дискретизації 10 кГц.

Розмір фільтра – 7. Порядок фільтра – 8.

Період дискретизації – 0.1 мс. Інтервал обробки – 0.6 мс.

В обох зонах фільтр має викиди.

Параметри СЗ1: викиди $\delta_s = 0.0125$, ослаблення $a_s = 62$ дБ, $\varepsilon_s = 79.52$, $f_s = 517$ Гц.

Параметри СП: викиди від 1 $\delta_p = 0.119, 0.125$, від середнього $0.122 - \mp 0.003$ ослаблення $a_p = -1.51$ дБ, $\varepsilon_p = 0.475$, $f_{p1} = 550$ Гц, $f_{p2} = 693$ Гц, ширина смуги 143 Гц, геометричний центр 617 Гц.

Ширина ПС1 33 Гц, частота зрізу 533 Гц. $k_f = \frac{f_p}{f_s} = 1.064$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 0.006$.

Параметри СЗ2: викиди $\delta_s = 0.0125$, ослаблення $a_s = 62$ дБ, $\varepsilon_s = 79.52$, $f_s = 744$ Гц.

Ширина ПС2 51 Гц, частота зрізу 718 Гц. $k_f = \frac{f_p}{f_s} = 0.931$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 0.006$.

Таблиця 4.7.

Частотний відгук НІФ СФ

ω [рад/с]	ω^*	$ Hp(f f^*) $	$ H0p(f f^*) $	$a(f)$ [дБ]
500	0.05	0.01241	0.0099	38.12
800	0.08	0.01210	0.0096	38.34
1000	0.10	0.01180	0.0094	38.56
2000	0.20	0.0077	0.0061	42.23
3000	0.30	0.01180	0.0094	38.56
3500	0.35	1.2199	0.9712	-1.73
4000	0.40	1.1781	0.9380	-1.42
4500	0.45	0.01226	0.0094	38.22
5000	0.50	0.012368	0.0098	38.15
6000	0.60	0.0069	0.0055	43.19

Висновки.

Фільтр має високу ефективність незважаючи на викиди в обох зонах. Придушення в обох СЗ від 38 дБ до 100 дБ, що майже відповідає завданню. Ослаблення в СП гірше за завдане на 0.5 дБ, є підсилення. Перехідні смуги

мають ширину 38 Гц, 51 Гц та частоту зрізу майже за завданням – 533 Гц та 744 Гц.

Еліптичний НІВ режекторний фільтр

Перевірка виконання умови симетричності
 $\omega p_{d1} \omega p_{d2} = \omega s_{d1} \omega s_{d1}$ для застосування методу білінійного перетворення для смугових фільтрів.

$$\omega p_{d1} = 3168 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \omega s_{d1} = 3491 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \omega s_{d2} = 4470 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad ,$$

$$\omega p_{d2} = 4801 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$3491 \cdot 4470 = 1.56 \cdot 10^7 \neq 3168 \cdot 4801 = 1.52 \cdot 10^7.$$

Корекція нижньої частоти СП1:

$$\omega p_{d1} = \frac{\omega s_{d1} \omega s_{d1}}{\omega p_{d2}} = \frac{3491 \cdot 4470}{4801} = 3250 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Аналоговий прототип ФНЧ

Нормування частот:

$$\omega p_1 = \frac{\omega p_{d1}}{\omega p_{d1}} = 1, \quad \omega s_1 = \frac{\omega p_{d2} - \omega p_{d1}}{\omega s_{d2} - \omega s_{d1}} = 1.5834, \quad k_f = \frac{\omega p_1}{\omega s_1} = 0.63156.$$

Розрахунки первинних амплітудних коефіцієнтів, потрібного розміру фільтра, корекції коефіцієнта k_f , нулів, полюсів, передавальної функції Лапласа аналогового прототипу ФНЧ повторюють розрахунки СФ.

$$\varepsilon_p = 0.50885, \quad \varepsilon_s = 99.995, \quad k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 0.005089, \quad N \geq 3.86.$$

$$k_f = 0.65985.$$

$$s\beta = [j1.60955 \quad j3.525287]$$

Парні полюси:

$$s\alpha_k = [-0.105281 + j0.993711 \quad -0.364291 + j0.478603]$$

Передавальна функція Лапласа нормованого фільтра:

$$H(s_0) = \frac{(s_0^2 + 2.59065)(s_0^2 + 12.427651)}{79.43282 (s_0^2 + 2 \cdot 0.10528s_0 + 0.99854) (s_0^2 + 2 \cdot 0.36429s_0 + 0.36177)} =$$

$$= \frac{15.018299s_0^2 + s_0^4 + 32.19570}{63.83993s_0 + 120.23953s_0^2 + 74.59885s_0^3 + 79.43282s_0^4 + 28.69452}.$$

Денормування ФНЧ в РФ:

$$\omega_{cen} = \omega p_{d1} \omega p_{d2} = 3950 \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2}, \quad W = \omega s_{d2} - \omega s_{d2} = 979.97 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

$$s = \frac{s_0 W}{s_0^2 + \omega_{cen}^2} = \frac{s_0 979.97}{s_0^2 + 1.56 \cdot 10^7}.$$

Примітка.

Слід мати на увазі, що смугове денормування підвищує порядок фільтра вдвічі.

Результати перетворень є чутливими до кількості цифр мантиси даних. Перетворення з чотирма цифрами дає недостовірний результат. Рекомендується використовувати не менше 6-10 значущих цифр мантиси.

$$H(s) = \frac{1.8923 \cdot 10^{-29}s^8 + 1.1896 \cdot 10^{-21}s^6 + 2.7912 \cdot 10^{-14}s^4 + 2.8967 \cdot 10^{-7}s^2 + 1 + 1.68649 \cdot 10^{-29}s^8 + 3.6770 \cdot 10^{-26}s^7 + 1.1206 \cdot 10^{-21}s^6 + 1.7626 \cdot 10^{-18}s^5}{\dots + 1.1220} \\ \frac{\dots + 2.6801 \cdot 10^{-14}s^4 + 2.7505 \cdot 10^{-11}s^3 + 2.7286 \cdot 10^{-7}s^2 + 1.3872 \cdot 10^{-4}s}{\dots}$$

Передавальна функція рекурсивного НІВ фільтра записується в канонічному вигляді як

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{l=1}^{M-1} a_l z^{-l}}.$$

Отримується передавальна функція дискретного РФ з передавальної функції Лапласа аналогового фільтра-прототипу заміною $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

$$H(z) = \frac{1.0078 - 7.4526z^{-1} + 24.6993z^{-2} - 47.8321z^{-3} + 59.1562z^{-4} - 47.8321z^{-5} + \dots}{1 - 7.1927z^{-1} + 23.1928z^{-2} - 43.7199z^{-3} + 24.6993z^{-4} - 7.4526z^{-5} + 1.0078z^{-6} + \dots} \\ \frac{\dots + 52.6575z^{-4} - 41.4861z^{-5} + 20.8845z^{-6} - 6.1470z^{-7} + 0.8112z^{-8}}{\dots}$$

Різницеве рівняння отримується з передавальної функції фільтра заміною 1 на $x(n)$, z^{-1} на $x(n-1)$... z^{-n} на 1 .

$$y(n) = \sum_{k=0}^6 b(k) \cdot x(n-k) - \sum_{l=1}^6 a(l) \cdot y(n-l),$$

$$b = [1.0078 \quad -7.4526 \quad 24.6993 \quad -47.8321 \quad 59.1562 \quad -47.8321 \quad 24.6993 \\ -7.4526 \quad 1.0078]$$

$$a = [-7.1927 \quad 23.1928 \quad -43.7199 \quad 52.6575 \quad -41.4861 \quad 20.8845 \\ -6.1470 \quad 0.8112].$$

Розроблений РФ має нелінійну структуру зі зворотнім зв'язком (рис. 4.33).

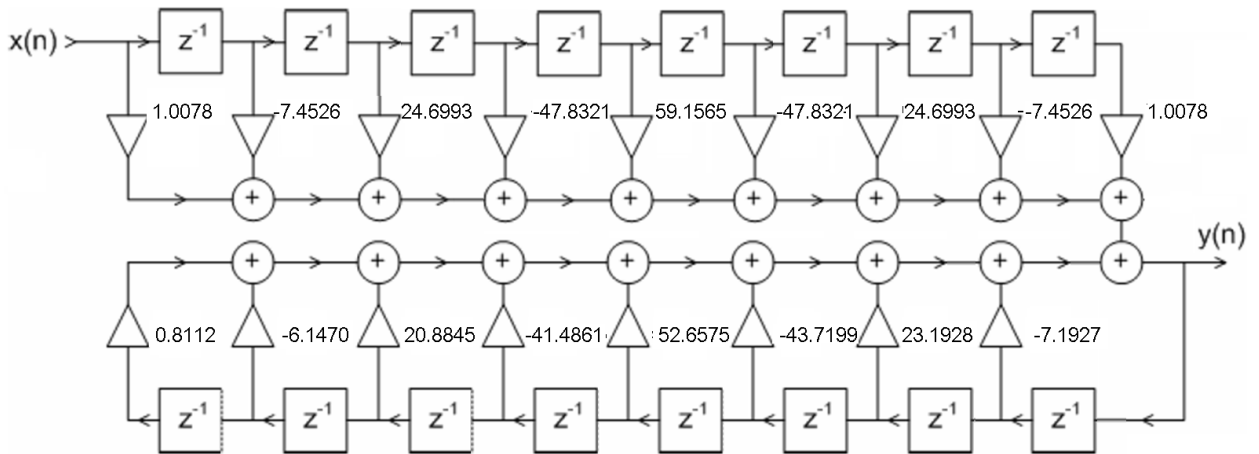


Рис. 4.33 – Структура НІВ РФ

Частотний відгук отримується з передавальної функції $H(z)$ підстановкою $z=e^{j\omega^*}$

$$H(\omega^*) =$$

$$\frac{1.0078 - 7.4526e^{-j\omega^*} + 24.6993e^{-2j\omega^*} - 47.8321e^{-3j\omega^*} + 59.1565e^{-4j\omega^*} - \dots}{1 - 7.1927e^{-j\omega^*} + 23.1928e^{-2j\omega^*} - 43.7199e^{-3j\omega^*} + \dots} \\ \frac{-47.8321e^{-5j\omega^*} + 24.6993e^{-6j\omega^*} - 7.04526e^{-7j\omega^*} + 1.0078e^{-8j\omega^*}}{+52.6575e^{-4j\omega^*} - 41.4861e^{-5j\omega^*} + 20.8845e^{-6j\omega^*} - 6.1470e^{-7j\omega^*} + 0.8112e^{-8j\omega^*}}$$

Графіки частотного відгуку НІФ РФ наведено на рис. 4.34 в абсолютних координатах. На рис. 4.35 наведений графік залежності ослаблення фільтра в децибелах. На рис. 4.36 – графік рівнів спектрального відгуку.

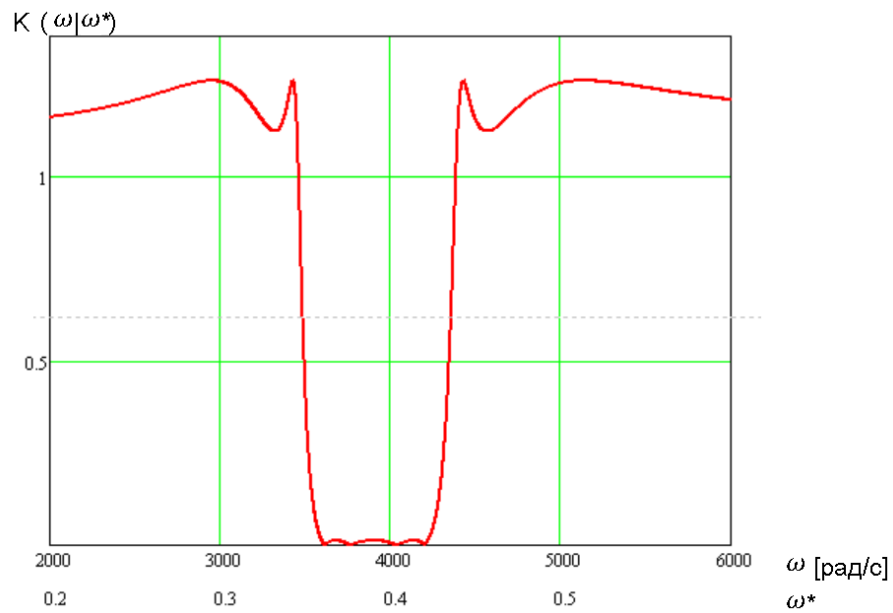


Рис. 4.34 – Частотний відгук НІВ РФ

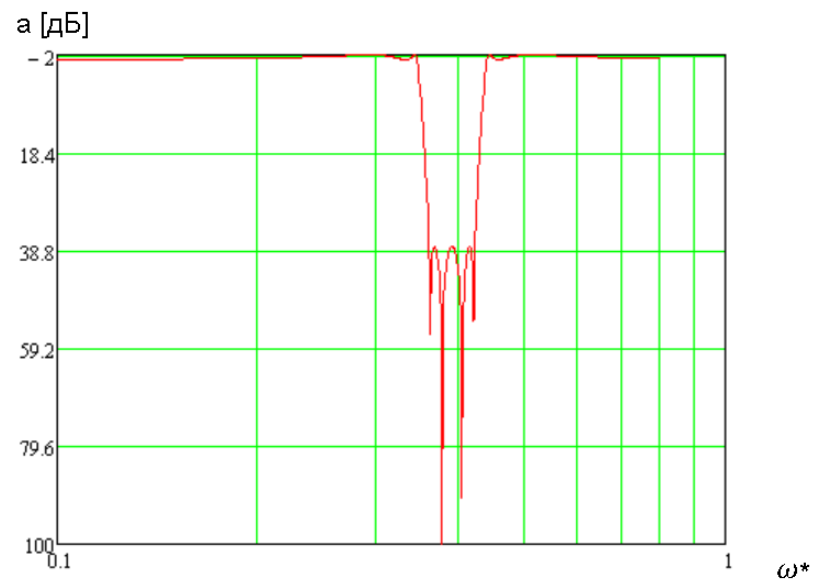


Рис. 4.35 – Частотне ослаблення НІВ РФ

Специфікація фільтра

Рекурсивний еліптичний режекторний фільтр з частотою дискретизації 10 кГц.

Розмір фільтра – 7. Порядок фільтра – 8.

Період дискретизації – 0.1 мс. Інтервал обробки – 0.6 мс.

В обох зонах фільтр має викиди.

Параметри СП1: викиди $\delta_p = 0.122, 0.129$, від середього $1.19 - \pm 0.007$, ослаблення $a_p = -1.72$ дБ, $\varepsilon_p = 0.408$, $f_{p1} = 549$ Гц.

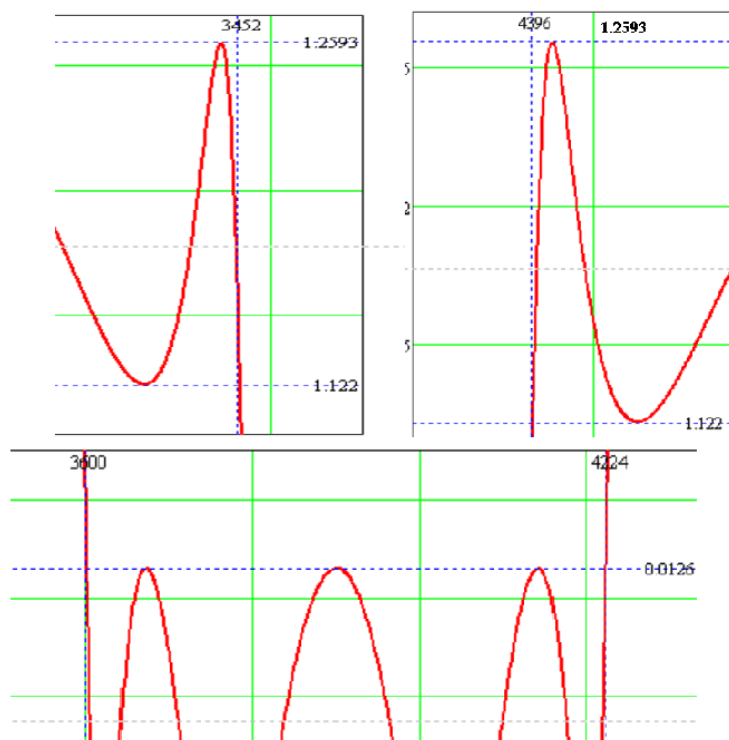


Рис. 4.36 – Рівні частотного відгуку НІВ РФ

Чисельні значення надані в табл. 4.8.

Таблиця 4.8

Частотний відгук НІФ РФ

ω [рад/с]	ω^*	$ Hp(f f^*) $	$ H0p(f f^*) $	$a(f)$ [дБ]
500	0.05	1.123	0.894	-1.01
800	0.08	1.126	0.896	-1.03
1000	0.10	1.128	0.898	-1.05
2000	0.20	1.160	0.924	-1.29
3000	0.30	1.257	1.000	-1.98
3500	0.35	0.455	0.362	6.83
4000	0.40	0.0053	0.0042	45.47
4500	0.45	1.124	0.895	-1.02
5000	0.50	1.253	0.997	-1.96
6000	0.60	1.251	0.996	-1.94

Параметри СЗ: викиди $\delta_s = 0.0126$, ослаблення $a_s = 62$ дБ, $\varepsilon_s = 94.43$, $f_{s1} = 573$ Гц, $f_{s2} = 672$ Гц, $\Delta f = 99$ Гц, геометричний центр 650 Гц.

Ширина ПС1 24 Гц, частота зрізу 561 Гц. $k_f = \frac{f_p}{f_s} = 0.958$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 0.004$.

Параметри СП2: викиди $\delta_p = 0.119, 0.125$, від середнього 0.122 ± 0.007 ослаблення $a_p = -1.72$ дБ, $\varepsilon_p = 0.408$, $f_{p2} = 693$ Гц.

Ширина ПС2 21 Гц, частота зрізу 688 Гц. $k_f = \frac{f_p}{f_s} = 1.03$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 0.004$.

Висновки.

Фільтр має високу ефективність незважаючи на викиди в обох зонах. Придушення в СЗ від 38 дБ до 100 дБ, що майже відповідає завданню, та смугу 99 Гц. Ослаблення в СП гірше за завдане на 0.5 дБ, є підсилення. Перехідні смуги мають ширину 21 Гц, 24 Гц та відмінну від завдання частоту зрізу – 561 Гц та 688 Гц. Стан частот можливо скорегувати розрахунком W при денормуванні через частоти СП.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Обробка сигналів: Підручник / В. П. Бабак, В. С. Хандецький, Е. Шрюфер. - К.: Либідь, 1996. – 392 с.
2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / Ю. О. Ушенко, М. С. Гавриляк, М. В. Талах, В. В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича. – 2021. – 308 с.
3. Наконечний А. Й. Обробка сигналів : навч. посіб. / А. Й. Наконечний, Р. І. Стахів, Р. А. Наконечний. Нац. ун-т «Львівська політехніка». – Львів: Растр-7. – 2017. – 217 с.
4. Introduction to Signal Processing / Sophocles J. Orfanidis. - Pearson Education, Inc. – 2009. – 975 p.
5. Digital Signal Processing. Signals, Systems and Filters / Andreas Antoniou. - McGraw-Hill. – 2005. – 991 p.
6. Practical Analog and Digital Filter DesignArtech / Les Thede. - House, Inc. – 2004. – 277 p.