

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ІНЖЕНЕРНИХ ЗАДАЧ ХІМІЧНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за всіма освітніми програмами
спеціальності 161 Хімічні технології та інженерія

Укладачі: О.В. Сангінова, С.Г. Бондаренко, А.М. Шахновський

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент

Джигирей І. М., к.т.н., доц.
доцент кафедри штучного інтелекту
Навчально-наукового інституту прикладного системного
аналізу КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний
редактор

Приміська С.М., к.т.н., ст. викл.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 30.03.2023 р.)
за поданням Вченої ради хіміко-технологічного факультету
(протокол № 3 від 27.03.2023 р.)*

Навчальний посібник призначений для здобувачів вищої освіти ступеня бакалавра денної форми навчання всіх освітніх програм спеціальності 161 «Хімічні технології та інженерія» для допомоги у вивченні освітнього компонента «Методи прикладної математики для рішення інженерних задач хімічної технології» та виконанні розрахункової роботи. Представлені матеріали мають за мету закріплення теоретичних знань та набуття вмінь формулювати та перевіряти статистичні гіпотези; використовувати методи теорії кореляції для обробки статистичного матеріалу; виконувати порівняльний аналіз ефективності різних математичних методів, які застосовуються для розв'язання задачі апроксимації; самостійно складати ефективні алгоритми та програми; використовувати сучасні комп'ютерні середовища для розв'язання поставлених задач; самостійно працювати з науково-технічною літературою; оформляти індивідуальні роботи у відповідності до вимог державних стандартів.

У навчальному посібнику викладено теоретичні відомості за темою виконання розрахункової роботи – «Математична обробка експериментальних даних», з ілюстрацією на конкретних прикладах. Здобувачам запропоновано для самостійного вирішення типові інженерні задачі хімічної технології. Видання також містить рекомендації до оформлення розрахункової роботи, питання для самопідготовки, критерії оцінювання якості роботи, посилання на літературу. Досвід, набутий здобувачами вищої освіти в процесі виконання завдань розрахункової роботи, буде також корисним при вивченні освітніх компонентів циклу професійної підготовки.

Реєстр. № НП 22/23-609. Обсяг 5,3 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

ЗМІСТ

Передмова.....	5
1. Мета і завдання розрахункової роботи	7
2. Структура і зміст РР	11
Програмна реалізація частин РР	14
Літературні джерела для виконання основних розділів РР	15
3. Критерії оцінювання РР	16
4. Статистична перевірка статистичних гіпотез.....	17
4.1. Основні поняття та визначення	17
4.2. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності. Критерій узгодженості Пірсона	20
4.3. Перевірка гіпотези про рівність двох середніх нормальних генеральних сукупностей з невідомими дисперсіями.....	25
4.4. Перевірка гіпотези про рівність двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей	27
5. Кореляційний аналіз.....	30
5.1. Лінійна кореляція	34
5.2. Нелінійна кореляція	46
6. Задача апроксимації за методом найменших квадратів	52
6.1. Наближення функцій	52
6.2. Апроксимація за методом найменших квадратів.....	53
6.3. Вибір виду апроксимуючої функції	54
Емпіричні формули з двома параметрами.....	55
Зведення нелінійних залежностей до задачі лінійної апроксимації	57
6.4. Визначення значень коефіцієнтів обраної апроксимуючої функції	68
6.5. Лінійна апроксимація.....	69

Питання та завдання для самоперевірки	74
Список літератури	76
Додатки	77
Додаток А. Завдання до першої частини РР	77
Додаток Б. Завдання до другої частини РР	90
Додаток В. Завдання до третьої частини РР	100
Додаток Г. Зразок титульного аркуша	102
Додаток Д. Таблиця значень функції Лапласа	103
Додаток Е. Критичні точки розподілу χ^2	106
Додаток Ж. Таблиця значень $t_{\gamma} = t(\gamma, n)$	108
Додаток К. Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$	110
Додаток Л. Критичні точки розподілу Фішера-Снедекора	112
Додаток М. Критичні точки розподілу Стюдента	114

Передмова

Самостійна робота здобувачів вищої освіти над навчальним матеріалом з вибіркової освітнього компонента «Методи прикладної математики для рішення інженерних задач хімічної технології» складається з наступних видів робіт: вивчення теоретичного матеріалу за навчальними посібниками і підручниками; підготовка до комп'ютерних практикумів; складання попередніх варіантів програм для проведення розрахунків на заняттях, оформлення звітів з комп'ютерних практикумів, написання модульної контрольної роботи; виконання та захист розрахункової роботи (РР); індивідуальних консультацій. Загалом на самостійну роботу відводиться до половини часу, запланованого на вивчення освітнього компонента.

Навчальний посібник призначений для надання допомоги здобувачам вищої освіти денної форми навчання всіх освітніх програм спеціальності 161 Хімічні технології та інженерія у вивченні дисципліни освітнього компонента «Методи прикладної математики для рішення інженерних задач хімічної технології» та виконанні розрахункової роботи.

З цією метою у навчальному посібнику наведено теоретичні відомості, необхідні для виконання РР, з ілюстрацією на конкретних прикладах. Також посібник містить завдання для розрахункової роботи, рекомендації щодо її оформлення, питання для самопідготовки, критерії оцінювання якості РР, літературні джерела.

Головна мета виконання розрахункової роботи полягає в тому, щоб сформувати у здобувачів вищої освіти систему здатностей, необхідних для практичного застосування положень і методів фундаментальних та прикладних наук для вирішення професійних задач в хімічній технології, які пов'язані з обробкою експериментальних даних із застосуванням обчислювальної техніки та інформаційних технологій.

Здобувач має навчитися математично формулювати поставлену задачу; формулювати та перевіряти статистичні гіпотези; використовувати методи теорії кореляції для обробки статистичного матеріалу; виконувати

порівняльний аналіз ефективності різних математичних методів, які застосовуються для розв'язання задачі апроксимації; самостійно складати ефективні алгоритми та програми; використовувати сучасні комп'ютерні середовища (наприклад, MS Excel, VBA тощо) для розв'язання поставлених задач; самостійно працювати з науково-технічною літературою; оформляти індивідуальні роботи у відповідності до вимог державних стандартів.

1. Мета і завдання розрахункової роботи

Мета роботи: Вивчити загальні поняття про методи обробки та аналізу результатів експериментальних досліджень. Набути вміння статистичної перевірки статистичних гіпотез; отримання апроксимуючих залежностей і оцінювання точності апроксимації; визначення рівнянь регресії і оцінки тісноти зв'язку між величинами.

Завдання на РР

Завдання на РР «Математична обробка експериментальних даних» складається з трьох частин і передбачає.

Частина 1. Статистична перевірка статистичних гіпотез

Перед виконанням завдання, що поставлене в цій частині, необхідно:

- ознайомитись із загальною схемою перевірки статистичних гіпотез;
- розглянути алгоритм перевірки статистичних гіпотез про: нормальний розподіл генеральної сукупності, однорідність дисперсій нормальних генеральних сукупностей.

1.1. З додатку А, таблиця А.1 згідно зі своїм варіантом вибрати експериментальні дані – результати 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини. Результати спостережень потрібно згрупувати (побудувати інтервальний статистичний ряд), побудувати гістограму частот та перевірити гіпотезу про нормальний розподіл за критерієм χ^2 Пірсона при заданому рівні значущості.

1.2. З додатку А, таблиця А.2 згідно зі своїм варіантом вибрати результати дослідження речовини, які виконані одним і тим же методом двома різними лабораторіями (x_i, y_i – вміст деякої речовини у відсотках в i -й пробі, визначений відповідно першою і другою лабораторією). Потрібно при рівні значущості 0,05, встановити, вагомо чи ні відрізняються середні результати аналізів, вважаючи, що вони розподілені нормально.

1.3. З додатку А, таблиця А.3 згідно зі своїм варіантом вибрати результати дослідження речовини, які виконані двома різними методами (x_i, y_i – результати вимірювання концентрації деякої речовини у відсотках в i -й пробі, визначений відповідно першим і другим методом). Потрібно при рівні значущості 0,05, встановити, вагомо чи ні відрізняються середні результати аналізів, вважаючи, що вони розподілені нормально.

Зробити висновки за результатами перевірки гіпотез та оформити результати розрахунків згідно вимог до РР.

Частина 2. Нелінійна кореляція

Перед виконанням завдання, що поставлене в цій частині, необхідно:

- вивчити поняття кореляційної залежності, умовної середньої, рівнянь регресії Y на X та X на Y та вибіркове кореляційне відношення;
- розглянути: оцінку сили зв'язку між випадковими величинами за допомогою вибіркового кореляційного відношення та представлення даних у вигляді кореляційної таблиці.

З додатку Б згідно зі своїм варіантом вибрати експериментальні дані, які отримані при вивченні залежності між випадковими величинами X і Y , і представлені у вигляді кореляційної таблиці.

На основі експериментальних даних, отриманих для вивчення залежності між випадковими величинами X і Y , і представленими у вигляді кореляційної таблиці виконати наступне:

- розрахувати вибіркове кореляційне відношення та оцінити силу зв'язку між величинами Y і X ;
- знайти рівняння ліній регресії Y на X виду $\bar{y}_x = a_0 + a_1x + a_2x^2$ і X на Y виду $\bar{x}_y = a_0 + a_1y + a_2y^2$;
- побудувати графіки отриманих ліній регресії Y на X та X на Y (побудову графіків виконати в середовищі MS Excel);

- побудувати таблицю порівняння умовних середніх, обчислених за рівняннями регресії та за даними кореляційної таблиці, у середовищі MS Excel;
- зробити висновки та оформити результати розрахунків згідно вимог до РР.

Частина 3. Методи наближення функцій

Перед виконанням завдання, що поставлене в цій частині, необхідно:

- розглянути загальний підхід до наближення функцій і вивчити апроксимацію за методом найменших квадратів (МНК);
- вивчити методи визначення виду апроксимуючої залежності, методику розрахунку коефіцієнтів обраної апроксимуючої залежності;
- розглянути визначення оцінки точності апроксимації.

З додатку В згідно зі своїм варіантом вибрати експериментально отриману табличну функцію. Для заданої табличної функції отримати апроксимуючу залежність. Для цього виконати:

3.1. Визначити загальний вид апроксимуючої залежності, побудувавши точковий графік заданої функції (побудову графіку виконати в середовищі MS Excel).

3.2. За допомогою методики, що викладена у розділі 6 даного навчального посібника, обрати найбільш придатну функцію для апроксимації заданої експериментальної функції. Для обраної емпіричної функції:

- визначити параметри апроксимуючої залежності, скориставшись методами вирівнювання та найменших квадратів;
- розрахувати значення функції у вузлових точках за допомогою отриманої емпіричної залежності;

- за отриманими даними побудувати графік емпіричної функції, сумістивши його на одному рисунку з точковим графіком заданої функції (побудову графіку виконати в середовищі MS Excel);
- обчислити стандартну похибку апроксимації;
- зробити висновки про точність опису експериментальних даних знайденою емпіричною функцією.

3.3. Оформити результати розрахунків згідно вимог до РР. Зробити висновки.

2. Структура і зміст РР

РР «Математична обробка експериментальних даних» складається з пояснювальної записки обсягом в 25-35 сторінок формату А4. Пояснювальна записка повинна включати:

- титульний лист;
- завдання на розрахункову роботу;
- зміст;
- вступ;
- основні розділи;
- висновок;
- список літератури;
- додаток (за необхідності).

Титульний лист повинен бути виконаний за наведеним зразком (додаток Г).

Завдання має містити загальну частину, наведену у Розділі 1 даного посібника, та індивідуальне завдання відповідно до варіанту.

Зміст складається з переліку розділів і підрозділів пояснювальної записки із зазначенням відповідних їх початку номерів сторінок.

У вступі в стислій формі наводяться актуальність і мета роботи, вказуються методи розв'язання і які будуть отримані результати.

В основних розділах роботи розкривається порядок вирішення поставлених завдань, наводяться розв'язки (формули, розрахунки, таблиці, графіки), пояснення, висновки.

У заключній частині робляться висновки про результати виконаної роботи, про можливості її практичного застосування.

Список літератури повинен містити тільки цитовані джерела.

У додатку містяться матеріали, які при включенні їх в основну частину тексту пояснювальної записки ускладнюють її сприйняття.

Посилання на додаток (за його наявності) і на цитовану літературу в основному тексті обов'язкові.

Текст пояснювальної записки слід оформляти з дотриманням таких розмірів полів: ліве – 30 мм, праве – 10 мм, верхнє – 20 мм, нижнє – 20 мм. Сторінки пояснювальної записки нумерують арабськими цифрами. Титульний аркуш включають до загальної нумерації. На титульному аркуші номер не ставлять, на наступних сторінках номер проставляють у правому верхньому куті без виділення рисками і без крапки в кінці.

Ілюстрації (таблиці, креслення, схеми, графіки), роздруківки з ЕОМ, які розташовані на окремих сторінках, включають до загальної нумерації сторінок.

Текст основної частини пояснювальної записки ділять на розділи, підрозділи, пункти.

Заголовки розділів розміщують симетрично тексту. Перенесення слів у заголовках не допускаються. Крапку в кінці заголовка не ставлять. Якщо заголовок складається з двох речень, то їх розділяють крапкою.

Відстань між заголовком і текстом має бути не менше 15 мм. Підкреслювати заголовки не допускається.

Розділи основної частини пояснювальної записки повинні мати порядкову нумерацію в межах всієї записки і позначатися арабськими цифрами з крапкою в кінці. Зміст, вступ, висновки та список використаних літературних джерел не нумеруються. Підрозділи нумерують арабськими цифрами в межах кожного розділу. Номер підрозділу складається з номера розділу і порядкового номера підрозділу, розділених крапкою. В кінці номера підрозділу повинна стояти крапка, наприклад, 2.4. – (четвертий підрозділ другого розділу). Розв'язок задач РР необхідно розташовувати в порядку номерів, зазначених у завданні.

Ілюстрації (крім таблиць) позначають словом «Рис.» і нумерують послідовно арабськими цифрами в межах розділу. Номер ілюстрації повинен складатися з номера розділу і порядкового номера ілюстрації,

відокремлених крапкою, наприклад, Рис.1.5. Ілюстрації мають бути розташовані так, щоб їх було зручно розглядати без повороту пояснювальної записки або з поворотом на 90° за годинниковою стрілкою. Ілюстрації розташовують після першого посилання на них.

Ілюстрації повинні мати найменування. При необхідності ілюстрації забезпечують пояснюючими надписами. Пояснюючі дані розміщують під ілюстрацією, найменування та номер рисунка розміщують під ілюстрацією (під пояснюючими даними).

Таблиці нумерують послідовно арабськими цифрами в межах розділу і дають їм назву. З вирівнюванням по правому краю над відповідним заголовком таблиці розміщують напис «Таблиця» із зазначенням її номера, який повинен складатися з номера розділу і порядкового номера таблиці, розділених крапкою, наприклад, Таблиця 1.3. Таблиці розташовують після першого посилання на них.

Формули в пояснювальній записці нумерують арабськими цифрами в межах розділу. Номер формули повинен складатися з номера розділу і порядкового номера формули в розділі, розділених крапкою. Номер формули вказують з правої сторони аркуша в круглих дужках, наприклад, (2.7). Пояснення значень символів і числових коефіцієнтів слід приводити безпосередньо під формулою в тій же послідовності, в якій вони дані у формулі. Перший рядок пояснення починають із слова «де» без двокрапки.

Приклад:

Розрахунок критерію Рейнольдса здійснюється за формулою:

$$\text{Re} = \frac{\omega d \rho}{\mu}, \quad (2.7)$$

де ω – швидкість потоку; d – лінійний розмір; ρ – щільність; μ – динамічний коефіцієнт в'язкості.

Посилання в тексті на літературні джерела слід виконувати зазначенням порядкового номера джерела за списком джерел, виділеного квадратними дужками, наприклад, [7], [2,5,9],[3-8].

Додатки оформлюють як продовження роботи на наступних її сторінках або у вигляді окремої частини, розміщуючи їх у порядку появи посилань у тексті роботи.

Кожен додаток необхідно починати з нового аркуша. Додаток повинен мати заголовок, надрукований вгорі малими літерами з першої великої симетрично відносно тексту сторінки. В правому верхньому куті рядка над заголовком малими літерами з першої великої літери повинно бути надруковано слово Додаток і через пропуск велика літера, що позначає додаток. Додатки слід позначати послідовно великими літерами української абетки, за винятком літер Г, Є, З, І, Ї, Й, О, Ч, Ї (наприклад, Додаток Б). Якщо додаток один, то він позначається, як Додаток А. Додатки повинні мати спільну з основним текстом наскрізну нумерацію сторінок.

Ілюстрації, таблиці, що є у тексті додатку, слід нумерувати в межах кожного додатку арабськими цифрами, наприклад, Рис.Д.3 – третій рисунок додатку Д, Таблиця А.3 – третя таблиця додатку А. Якщо в додатку одна ілюстрація або одна таблиця, то їх нумерують, наприклад, Рис. А.1, Таблиця А.1.

У посиланнях у тексті додатку на ілюстрації, таблиці рекомендується писати: на рис. А.2, в таблиці Д.3.

Всі додатки включають у зміст, вказуючи номер, заголовок і сторінки з яких вони починаються.

Програмна реалізація частин РР

1. При рішенні поставлених завдань всі розрахунки і побудова графіків виконується в середовищі MS Excel.
2. При цьому, якщо при вирішенні одного із завдань¹ виконується його програмна реалізація, яка передбачає розробку програмного модуля в середовищі VBA MS Excel, здобувач отримує 3 заохочувальні бали за

¹ За вибором здобувача

умови надання правильних відповідей щодо структури та алгоритму роботи програмного модуля під час захисту РР.

Літературні джерела для виконання основних розділів РР

Питання статистичної перевірки статистичних гіпотез розглядається в роботах [1, 4]. Питання теорії лінійної кореляції наведені в джерелах [1,2,3].

Матеріали, необхідні для вивчення питань, що пов'язані з аналітичним способом вибору виду апроксимуючої залежності та з апроксимацією за МНК наведені в літературних джерелах [1, 2].

3. Критерії оцінювання РР

Захист РР відбувається на 14 тижні. Робота подається викладачу до перевірки не пізніше, ніж за тиждень до захисту. На 12 тижні (перед здачею РР на перевірку) результати розрахунків демонструються на комп'ютері викладачу; без демонстрації розрахунків у середовищі MS Excel робота на перевірку не приймається.

Під час захисту студент має вміти чітко формулювати постановку задачі, розкрити суть кожного з використаних методів, аргументовано обирати метод розрахунку для подібної задачі, оцінити якість отриманих результатів.

Оцінка за РР має 3 складові. Перша характеризує якість пояснювальної записки та графічного матеріалу, друга – якість виконання розрахунків, обґрунтування методів розрахунку, наявність порівняльного аналізу ефективності різних математичних методів та оцінювання точності отриманих результатів; третя складова характеризує якість захисту студентом роботи, ступінь володіння матеріалом, аргументованість рішень, уміння захищати свою думку.

За результатами захисту студент отримує оцінку

- «*відмінно*», якщо виконані всі вимоги до роботи, студент відповів на всі теоретичні запитання та зміг розв'язати подібні задачі під час захисту;
- «*добре*», якщо виконано більше 80% вимоги до роботи, або є несуттєві помилки, під час захисту студент відповів на всі теоретичні запитання та зміг розв'язати подібні задачі;
- «*задовільно*», якщо є недоліки щодо виконання вимог до роботи і певні помилки, під час захисту студент відповів не на всі теоретичні запитання, але зміг розв'язати подібні задачі;
- «*незадовільно*», не відповідає вимогам до «задовільно».

За несвоєчасне, пізніше ніж на тиждень, подання РР, студент отримує штрафні бали.

Норми бального оцінювання РР зазначено у РСО.

4. Статистична перевірка статистичних гіпотез

4.1. Основні поняття та визначення

Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу генеральної сукупності або про значення параметрів відомих розподілів, наприклад:

- закон розподілу невідомий; тоді припущення про те, що генеральна сукупність має нормальний розподіл, є статистичною гіпотезою;
- закон розподілу відомий, але його параметри (математичне сподівання та стандартне відхилення) невідомі. Тоді припущення про те, що математичне сподівання $M(X)$ дорівнює певному значенню $M_0(X)$, є також статистичною гіпотезою.

Висунуту гіпотезу називають **нульовою (основною)** і позначають як H_0 . Поряд з основною гіпотезою розглядають гіпотезу, яка протирічить нульовій; її називають **конкуруючою (альтернативною)** і позначають як H_1 .

Якщо основна гіпотеза буде відкинута, то розглядатиметься конкуруюча. Альтернативних гіпотез може бути декілька.

Гіпотезу називають **простою**, якщо вона містить тільки одне припущення, і **складною**, якщо гіпотеза складається двох і більше простих гіпотез. Наприклад, гіпотеза $H_0 : \lambda = 0,002$ (λ - параметр показникового розподілу) є простою, а гіпотеза $H_0 : \lambda > 0,002$ є складною, оскільки складається з множини простих гіпотез $H_i : \lambda = b_i$, де b_i - будь-яке число, більше за 0,002.

Перевірка висунутої гіпотези здійснюється статистичними методами, тому таку перевірку називають **статистичною**. При цьому може бути прийнято неправильне рішення, тобто допущені похибки першого та другого роду.

Похибка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна гіпотеза, а **похибка другого роду** – що буде прийнята неправильна гіпотеза.

Імовірність зробити похибку першого роду прийнято позначати через α - рівень значущості. У практичних завданнях рівень значущості приймають рівним 0,05 або 0,01.

Статистичним критерієм (критерієм) називають спеціально підібрану випадкову величину K , точний чи наближений розподіл якої відомий і яка служить для перевірки нульової гіпотези. Якщо випадкова величина, яка використовується в якості критерія, розподілена за нормальним законом, то її прийнято позначати як U або Z ; якщо за законом Фішера-Снедекора – як F ; якщо за законом Стьюдента – як T тощо.

Після визначення статистичного критерію множину всіх його можливих значень розбивають на дві підмножини, які не перетинаються: одна з них містить значення критерію, при яких гіпотезу відкидають, а інша – при яких вона приймається.

Критичною областю називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають. **Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень)** називають сукупність значень критерію, при яких гіпотезу приймають.

Точки, які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези, називаються **критичними** $k_{кр}$. Критична область може бути одnobічною (правобічною чи лівобічною) або двобічною (Рис. 4.1.).

Правобічною називають критичну область, для якої виконується нерівність $K > k_{кр}$, де $k_{кр} > 0$. **Лівобічною** називають критичну область, для якої виконується нерівність $K < k_{кр}$, де $k_{кр} < 0$. **Двобічною** називають критичну область, визначену нерівностями $K < k_1$, $K > k_2$, де $k_2 > k_1$.

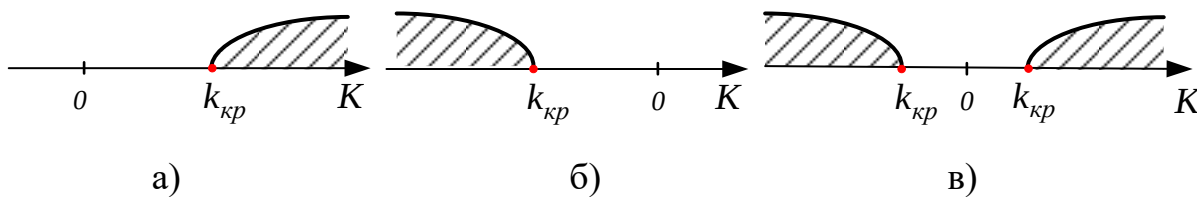


Рисунок 4.1. Приклади області допустимих значень: а – правобічна, б – лівобічна, в - двобічна

Зокрема, якщо критичні точки симетричні відносно нуля, то двобічна критична область визначається нерівностями (припускаючи, що $k_{кр} > 0$):

$$K < -k_{кр}, \quad K > k_{кр},$$

чи рівносильною нерівністю

$$|K| > k_{кр}.$$

Загальна схема перевірки статистичних гіпотез полягає у наступному: якщо обчислене за даними вибірки значення критерію K належить критичній області, то нульову гіпотезу відкидають; якщо K належить області прийняття гіпотези, то її приймають.

Розглянемо процес знаходження критичної області на прикладі відшукування правобічної області, яка визначається нерівністю $K > k_{кр}$. Для відшукування цієї області достатньо знайти критичну точку. Спочатку задаються рівнем значущості α , а потім знаходять критичну точку $k_{кр}$, виходячи з вимоги:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha. \quad (4.1)$$

Тобто за умови справедливості нульової гіпотези ймовірність того, що критерій K прийме значення, більше за $k_{кр}$, має дорівнювати прийнятому рівню значущості.

Зазначимо, що для кожного критерію використовуються відповідні таблиці, за якими знаходять критичну точку, яка задовольняє вимогу (4.1).

Після знаходження критичної точки, за даними вибірки обчислюють спостереження результату $K_{розр}$, і якщо $K_{розр} > k_{кр}$, то нульову гіпотезу

відкидають, а якщо $K_{розр} < k_{кр}$, то немає підстав, щоб відкинути нульову гіпотезу.

Аналогічним чином знаходять правобічну та двобічну критичні області.

4.2. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності. Критерій узгодженості Пірсона

Нехай X - досліджувана випадкова величина, закон розподілу якої невідомий, але є підстави припустити, що X має нормальний розподіл.

Критерій перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу називається **критерієм узгодженості**. Існує декілька критеріїв узгодженості: χ^2 ("хі квадрат") Пірсона, Колмогорова, Смірнова та інші.

Критерій χ^2 Пірсона найчастіше застосовується на практиці. Розглянемо застосування цього критерію для перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності. Отже, потрібно при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 : генеральна сукупність розподілена нормально.

Алгоритм розв'язання цієї задачі наступний:

1. За вибіркою об'ємом n , отриманої з генеральної сукупності, побудувати емпіричний розподіл у вигляді послідовності рівновіддалених варіант і відповідних їм частот або у вигляді послідовності інтервалів $(x_i; x_{i+1})$ і відповідних їм частот n_i (n - сума частот, що потрапили в i інтервал):

Якщо емпіричний розподіл представлений у вигляді статистичного розподілу частот

Варіанти x_i	x_1	x_2	...	x_k
Частоти n_i	n_1	n_2	...	n_k

то потрібно обчислити:

- вибірккову середню $\bar{x}_B$ і вибірккове стандартне відхилення σ_B ;

- теоретичні частоти $n'_i = \frac{nh}{\sigma_B} \phi(u_i)$, де n - об'єм вибірки, h - крок

(різниця між сусідніми варіантами); $u_i = \frac{(x_i - \bar{x}_B)}{\sigma}$;

$$\phi(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{u^2}{2}};$$

- перейти до п.2.

Якщо емпіричний розподіл представлений у вигляді інтервального статистичного розподілу частот

I_i	$(x_1; x_2)$	$(x_2; x_3)$	...	$(x_{k-1}; x_k)$
n_i	n_1	n_2	...	n_k

то необхідно:

- знайти середини часткових інтервалів $(x_i; x_{i+1})$: $x_i^* = \frac{(x_i + x_{i+1})}{2}$ і

записати як статистичний розподіл частот:

x_i^*	x_1^*	x_2^*	...	x_k^*
n_i	n_1	n_2	...	n_k

- обчислити вибіркві середню $\bar{x}^*$ і стандартне відхилення σ^* ;
- пронормувати X , тобто перейти до випадкової величини

$$Z = \frac{(X - \bar{x}^*)}{\sigma^*} \quad \text{і} \quad \text{обчислити кінці інтервалів} \quad z_i = \frac{(x_i - \bar{x}^*)}{\sigma^*};$$

$$z_{i+1} = \frac{(x_{i+1} - \bar{x}^*)}{\sigma^*}, \quad \text{причому найменше значення } z, \text{ тобто } z_1,$$

приймають рівним $-\infty$, а найбільше, тобто z_k - рівним $+\infty$;

- обчислити теоретичні частоти

$$n'_i = n \cdot P_i,$$

де n - об'єм вибірки; $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ - імовірність попадання X в інтервал $(x_i; x_{i+1})$; $\Phi(z)$ - функція Лапласа;

2. Порівняти емпіричні частоти n_i з теоретичними n'_i за допомогою критерію χ^2 Пірсона, для чого необхідно знайти розрахункове значення критерію $\chi^2_{розр}$:

$$\chi^2_{розр} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i},$$

а потім за таблицею критичних точок розподілу χ^2 за заданим рівнем значущості α і числом степенів свободи $k = s - 3$ (s - число різних варіант або число різних інтервалів вибірки) знайти критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$.

Якщо $\chi^2_{розр} < \chi^2_{кр}$, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу; якщо $\chi^2_{розр} > \chi^2_{кр}$, то нульову гіпотезу відкидають.

Приклад 4.1 Використовуючи критерій Пірсона, перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X з емпіричним розподілом вибірки обсягу $n=150$, приведеним у таблиці; рівень значущості прийняти рівним 0,05.

I_i	75,0-77,5	77,5-80,0	80,0-82,5	82,5-85,0	85,0-87,0
n_i	2	10	15	18	20

I_i	87,0-90,0	90,0-92,5	92,5-95,0	95,0-97,5	97,5-100,0
n_i	22	24	20	13	6

Розв'язок

Знайдемо середини x_i^* часткових інтервалів $(x_i; x_{i+1})$ заданого інтервального емпіричного розподілу і запишемо розподіл рівновіддалених варіант:

x_i^*	76,25	78,75	81,25	83,75	86,25	88,75	91,25	93,75	96,25	98,75
n_i	2	10	15	18	20	22	24	20	13	6

Обчислимо вибірккову середню $\bar{x}^*$ і вибірккове стандартне відхилення σ^* :

$$\bar{x}^* = \frac{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i^*}{n} = \frac{13252,5}{150} = 88,35,$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} n_i (x_i^* - \bar{x}^*)^2}{n}} = \sqrt{\frac{4688,5}{150}} = 5,59.$$

Знайдемо інтервали (z_i, z_{i+1}) . Результати обчислення інтервалів представлені у Табл. 4.1 Таблица.

Таблиця 4.1. Обчислення інтервалів $(z_i; z_{i+1})$

i	Границі інтервалу		$x_i - \bar{x}^*$	$x_{i+1} - \bar{x}^*$	Границі інтервалу	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \frac{(x_i - \bar{x}^*)}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \frac{(x_{i+1} - \bar{x}^*)}{\sigma^*}$
1	75	77,5	-	-10,85	$-\infty$	-1,94
2	77,5	80,0	-10,85	-8,35	-1,94	-1,49
3	80,0	82,5	-8,35	-5,85	-1,49	-1,05
4	82,5	85,0	-5,85	-3,35	-1,05	-0,60
5	85,0	87,5	-3,35	-0,85	-0,60	-0,15
6	87,5	90,0	-0,85	1,65	-0,15	0,30
7	90,0	92,5	1,65	4,15	0,30	0,74
8	92,5	95,0	4,15	6,65	0,74	1,19
9	95,0	97,5	6,65	9,15	1,19	1,64
10	97,5	100,0	9,15	-	1,64	$+\infty$

Визначимо теоретичні імовірності P_i і теоретичні частоти $n'_i = n \cdot P_i = 150 \cdot P_i$. Значення функції Лапласа $\Phi(z)$ знаходимо за відповідними таблицями або розраховуємо в Excel. Результати обчислення теоретичних частот наведені у Табл. 4.2.

Таблиця 4.2. Обчислення теоретичних частот

i	Границі інтервалу		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n'_i = n \cdot P_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	$-\infty$	-1,94	-0,5000	-0,4738	0,0262	3,93
2	-1,94	-1,49	0,4738	-0,4319	0,0419	6,28
3	-1,49	-1,05	-0,4319	-0,3531	0,0788	11,82
4	-1,05	-0,60	-0,3531	-0,2257	0,1274	19,11
5	-0,60	-0,15	-0,2257	-0,0596	0,1661	24,92
6	-0,15	0,30	-0,0596	0,1179	0,1775	26,62
7	0,30	0,74	0,1179	0,2703	0,1524	22,86
8	0,74	1,19	0,2703	0,3830	0,1127	16,90
9	1,19	1,64	0,3830	0,4495	0,0665	9,98
10	1,64	$+\infty$	0,4495	0,5000	0,0505	7,58
Суми					1	150

Порівняємо емпіричні і теоретичні частоти з використанням критерію χ^2 Пірсона, для чого складемо Табл 4.3.

Таблиця 4.3. Обчислення $\chi^2_{розр}$

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n'_i}$
1	2	3,93	-1,93	3,7249	0,9478	4	1,0178
2	10	6,28	3,72	13,8384	2,2036	100	15,9236
3	15	11,82	3,18	10,1124	0,8555	225	19,0355
4	18	19,11	-1,11	1,2321	0,0645	324	16,9545
5	20	24,92	-4,92	24,2064	0,9714	400	16,0514
6	22	26,62	-4,62	21,3444	0,8018	484	18,1818
7	24	22,86	1,14	1,2996	0,0568	576	25,1968
8	20	16,90	3,10	9,6100	0,5686	400	23,6686
9	13	9,98	3,02	9,1204	0,9139	169	16,9339
10	6	7,58	-1,58	2,4964	0,3293	36	4,7493
	150	150			$\chi^2_{розр} =$		
Сума					= 7,7132		157,7132

Розрахункове значення критерію Пірсона:

$$\chi^2_{розр} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = 157,7132 - 150 = 7,7132.$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 для рівня значущості $\alpha = 0,05$ і числу ступенів свободи $k = s - 3 = 10 - 3 = 7$ (де $s = 10$ - число інтервалів), знаходимо критичну точку $\chi^2_{кр}(0,05; 7) = 14,1$.

Оскільки $\chi^2_{розр} < \chi^2_{кр}$, немає підстав відкидати нульову гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності. Іншими словами, емпіричні і теоретичні частоти розрізняються незначно.

4.3. Перевірка гіпотези про рівність двох середніх нормальних генеральних сукупностей з невідомими дисперсіями

Нехай генеральні сукупності X і Y розподілені нормально, дисперсії їх невідомі. Потрібно при рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних середніх нормальних сукупностей з невідомими дисперсіями

$$H_0: a_X = a_Y$$

при конкуруючій гіпотезі $H_1: a_X \neq a_Y$,

за двома залежними вибірками однакового об'єму n . Для цього необхідно обчислити розрахункове значення критерію

$$T_{розр} = \frac{\bar{d} \sqrt{n}}{S_d},$$

де $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$; $d_i = x_i - y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$); x_i та y_i - відповідні елементи

залежних вибірок; S_d - вибіркове стандартне відхилення

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n-1}}.$$

За таблицею критичних точок розподілу Стюдента для заданого рівня значущості α і числа ступенів свободи $k = n - 1$ знаходимо критичну точку $t_{кр}(\alpha, k)$.

Якщо $|T_{розр}| < t_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|T_{розр}| > t_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляємо.

Необхідність перевірити гіпотезу H_0 виникає тоді, коли потрібно порівняти два методи дослідження, які реалізовані однією лабораторією, або якщо дослідження виконано одним і тим же методом двома різними лабораторіями.

Приклад 4.2 Хімічна лабораторія виконала в одному й тому ж порядку аналіз 10 проб води двома методами. Отримані результати наведені в таблиці (x_i, y_i – вміст деякої речовини у відсотках в i пробі, визначений відповідно першим і другим методом). Потрібно при рівні значущості 0,05 встановити, суттєво чи ні відрізняються середні результати аналізів, вважаючи, що вони розподілені нормально.

x_i	5	10	14	15	18	22	17	20	19	6
y_i	8	12	17	20	21	19	14	23	16	9

Розв’язок

$$d_1 = x_1 - y_1 = 5 - 8 = -3; \quad d_2 = 10 - 12 = -2; \quad \dots; \quad d_{10} = 6 - 9 = -3,$$

$$\bar{d} = \frac{-3 - 2 + \dots - 3}{10} = -1,3;$$

$$\sum d_i^2 = 9 + 4 + \dots + 9 = 101; \quad (\sum d_i)^2 = (-13)^2.$$

Обчислимо виправлене стандартне відхилення

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{101 - \frac{(-13)^2}{10}}{9}} = 3,06.$$

Знайдемо розрахункове значення критерію

$$T_{розр} = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{S_d} = \frac{-1,3\sqrt{10}}{3,06} = -1,345.$$

За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента, для рівня значущості $\alpha=0,05$, і числа ступенів свободи $k=n-1=10-1=9$ знаходимо критичну точку $t_{кр}(0,05;9)=2,262$. Оскільки $|T_{розр}|=1,345 < t_{кр}=2,262$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу, тобто середні результати аналізів відрізняються несуттєво.

4.4. Перевірка гіпотези про рівність двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей

Нехай генеральні сукупності X і Y розподілені нормально, з них відібрані незалежні вибірки, об'єми яких відповідно n_1 і n_2 , і знайдені виправлені вибіркові дисперсії S_X^2 і S_Y^2 . Потрібно для заданого рівня значущості α перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій між собою:

$$H_0: D(X) = D(Y)$$

при конкуруючій гіпотезі $H_1: D(X) > D(Y)$.

Для цього знаходимо розрахункове значення критерію F за формулою

$$F_{розр} = \frac{S_{\sigma}^2}{S_m^2},$$

де S_{σ}^2 – більша виправлена дисперсія, S_m^2 – менша виправлена дисперсія. По таблиці критичних точок розподілу Фішера-Снедекора, для заданого рівня значущості α і чисел степенів свободи k_1 і k_2 (k_1 – число степенів свободи більшої виправленої дисперсії) необхідно знайти критичну точку $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$.

Якщо $F_{розр} < F_{кр}$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу; якщо $F_{розр} > F_{кр}$, то гіпотезу H_0 відхиляють.

Якщо конкуруюча гіпотеза має вигляд:

$$H_1: D(X) \neq D(Y),$$

то $F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)$, тобто значення рівня значущості зменшують в два рази.

На практиці така задача виникає, якщо потрібно порівняти точність приладів, методів вимірювань та інше. Якщо нульова гіпотеза справедлива, тобто генеральні дисперсії однакові, то відмінність виправлених дисперсій несуттєва і пояснюється випадковими причинами. Наприклад, якщо відмінність виправлених вибірових дисперсій результатів вимірів, виконаних двома приладами, виявилась несуттєвою, то прилади мають однакову точність.

Приклад 4.3 За результатами вимірювань однієї і тієї ж величини двома методами, які наведені в таблиці 4.4 (x_i – результат i -го вимірювання величини X першим методом; y_j – результат j -го вимірювання величини X другим методом), встановити, чи забезпечують обидва методи однакову точність вимірювань, якщо рівень значущості $\alpha = 0,1$.

Таблиця 4.4

x_i	2,5	2,7	2,9	2,8	2,6	3,0	3,1
y_j	2,6	2,8	3,2	3,1	2,7		

Розв'язок

Будемо розглядати результати вимірювань як дві незалежні вибірки (об'єми їх відповідно $n_1=7$ і $n_2=5$) із нормально розподілених генеральних сукупностей X і Y . Для кожної вибірки обчислимо виправлені дисперсії S_X^2 і S_Y^2 за формулами:

$$S_X^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x}_B)^2, \quad S_Y^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^5 (y_j - \bar{y}_B)^2,$$

$$\text{де } \bar{x}_B = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i = \frac{19,6}{7} \approx 2,8; \quad \bar{y}_B = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 y_j = \frac{14,4}{5} \approx 2,88 - \text{вибіркові середні.}$$

$$S_X^2 = \frac{(2,5 - 2,8)^2 \cdot (2,7 - 2,8)^2 \dots (3,1 - 2,8)^2}{6} \approx 0,047,$$

$$S_Y^2 = \frac{(2,6 - 2,88)^2 \cdot (2,8 - 2,88)^2 \dots (2,7 - 2,88)^2}{4} \approx 0,067.$$

Задача полягає в тому, щоб за виправленими дисперсіями для заданого рівня значущості $\alpha = 0,1$, перевірити нульову гіпотезу H_0 відносно рівності дисперсій генеральних сукупностей X і Y , тобто $H_0: D(X) = D(Y)$, конкуруюча гіпотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

Для перевірки гіпотези H_0 приймаємо випадкову величину

$$F_{розр} = \frac{S_{\sigma}^2}{S_m^2} = \frac{S_Y^2}{S_X^2} = \frac{0,067}{0,047} \approx 1,4.$$

($F_{розр}$ - розрахункове значення критерію F).

За таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора за рівнем значущості $\frac{\alpha}{2}$ і числам степенів свободи k_1 і k_2 ($k_1 = n_1 - 1$; $k_2 = n_2 - 1$; n_1 – об'єм вибірки, за якою знайдена більша виправлена дисперсія; n_2 – об'єм вибірки, для якої знайдена менша виправлена дисперсія; $k_1 = 5 - 1 = 4$; $k_2 = 7 - 1 = 6$) знаходимо критичну точку

$$F_{кр} \left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2 \right) = F_{кр} \left(\frac{0,1}{2}, 4, 6 \right) = 4,53.$$

Оскільки $F_{розр} = 1,4 < F_{кр.} = 4,53$, то нульова гіпотеза не відхиляється, тобто обидва методи забезпечують однакову точність. Генеральні дисперсії відрізняються несуттєво.

5. Кореляційний аналіз

Під час дослідження хімічних явищ і процесів часто потрібно аналізувати зв'язок між різними кількісними чи якісними ознаками. Досліджувані випадкові величини можуть бути незалежними, або пов'язані *функціональною* чи *статистичною* залежністю.

Дві випадкові величини називають **незалежними**, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла інша величина. Якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y , то Y називають функцією випадкового аргументу X :

$$Y = \varphi(X), \quad (5.1)$$

а залежність (5.1) – **функціональною**.

Статистичною називають залежність, за якої кожному значенню однієї з величин відповідає ряд розподілу іншої, а зі зміною однієї величини закономірно змінюються статистичні характеристики рядів розподілення іншої величини: положення рядів розподілу, розсіювання, міра асиметрії тощо.

Статистичну залежність називають **кореляційною**, якщо у разі зміни однієї з величин змінюється середнє значення іншої. Кореляційну залежність Y від X можна визначити як функціональну залежність умовної середньої $\bar{y}_x$ від x :

$$\bar{y}_x = f(x), \quad (5.2)$$

де $\bar{y}_x$ – умовне середнє.

Умовною середньою $\bar{y}_x$ називають середнє арифметичне значень Y , які відповідають значенню $X = x$. Наприклад, при $x_1=3$ величина прийняла значення $y_1=10$, $y_2=20$, $y_3=30$. Знайдемо середнє арифметичне цих значень:

$$\bar{y}_3 = \frac{10 + 20 + 30}{3} = 20.$$

Число $\bar{y}_3$ називають умовною середньою, а число 3 вказує, що розглядаються ті значення, які відповідають $x_1=3$.

Рівняння (5.2) називають **рівнянням регресії** Y на X , функцію $f(x)$ – **регресією** Y на X , а її графік – **лінією регресії** Y на X .

Аналогічно визначають умовну середню $\bar{x}_y$, а також кореляційну залежність X від Y : **умовною середньою** $\bar{x}_y$ називають середнє арифметичне значень X , які відповідають $Y=y$. Кореляційною залежністю X від Y називають функціональну залежність умовної середньої $\bar{x}_y$ від y

$$\bar{x}_y = \psi(y). \quad (5.3)$$

Рівняння (5.3) називають **рівнянням регресії** X на Y , функцію $f(x)$ – **регресією** X на Y , а її графік – **лінією регресії** X на Y .

Кореляційна залежність є окремим випадком залежності статистичної. Будь-яка кореляційна залежність є статистичною, але не кожна статистична залежність буде кореляційною.

Наявність (чи відсутність) зв'язку між випадковими величинами X і Y , а також силу (тісноту) зв'язку характеризують **коефіцієнтом кореляції**, що являє собою відношення кореляційного моменту до добутку стандартних відхилень цих величин:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (5.4)$$

де K_{xy} – кореляційний момент.

Кореляційним моментом K_{xy} чи **коваріацією** $\text{cov}\{X, Y\}$, (cov_{xy}) випадкових величин X та Y називають математичне сподівання добутку центрованих величин:

$$K_{xy} = M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{Y} \end{bmatrix} = M \left[(X - m_x)(Y - m_y) \right]. \quad (5.5)$$

Для незалежних випадкових величин кореляційний момент, і, відповідно, коефіцієнт кореляції, дорівнює нулю. Такі випадкові величини

називають **некорельованими**. **Корельованими** називаються випадкові величини, кореляційний момент яких відмінний від нуля.

Чим ближче абсолютна величина коефіцієнта кореляції $|r_{xy}|$ до одиниці, тим зв'язок сильніше; а чим ближче до нуля, тим зв'язок слабкіше. Коефіцієнт кореляції застосовують для оцінки тісноти тільки лінійного зв'язку між величинами X та Y , тобто у випадку, коли величини X і Y зв'язані точною лінійною функціональною залежністю:

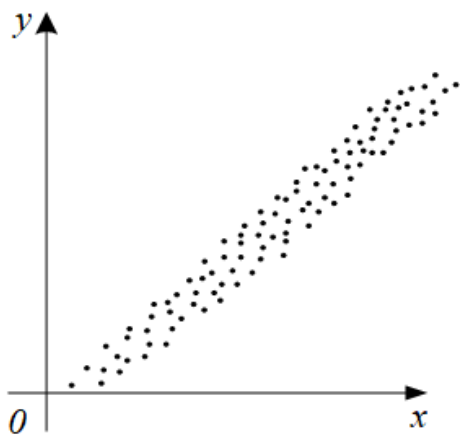
$$Y = a + b \cdot X, \quad (5.6)$$

де $r_{xy} = b$, а знак "+" чи "-" береться в залежності від того, $b > 0$ чи $b < 0$.

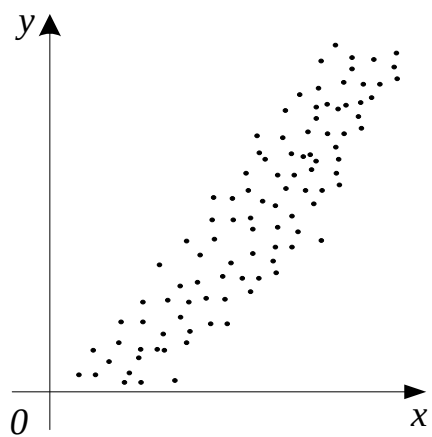
Якщо $r_{xy} > 0$, говорять про *додатню кореляцію* між X та Y , тобто у разі зростання однієї з величин інша має тенденцію у середньому до зростання; якщо $r_{xy} < 0$ - про *від'ємну кореляцію*, тобто за зростання однієї з величин інша має тенденцію у середньому до спадання.

Про наявність або відсутність кореляції між величинами X та Y можна судити в першому наближенні по вигляду *поля кореляції* – зображення у вигляді точок усіх отриманих з дослідів пар значень випадкових величин. Поле кореляції зручно будувати у вигляді так званих **діаграм розсіювання** (точкових діаграм) – це тип графіка або математичної діаграми, що використовує декартові координати для відображення значень зазвичай двох змінних з набору даних.

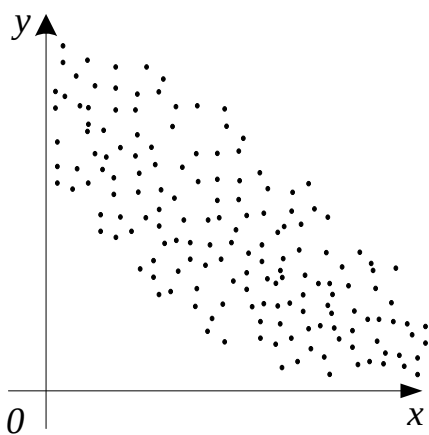
Наприклад, характер розташування точок на Рис. 5.1, *а, б* свідчить про наявність додатньої кореляції між величинами X та Y , причому на Рис. 5.1, *а* – про сильну додатню лінійну кореляцію, близьку до лінійної функціональної залежності. На Рис. 5.1, *в* показаний випадок слабкої від'ємної кореляції; на Рис. 5.1, *г* - практично некорельовані випадкові величини.



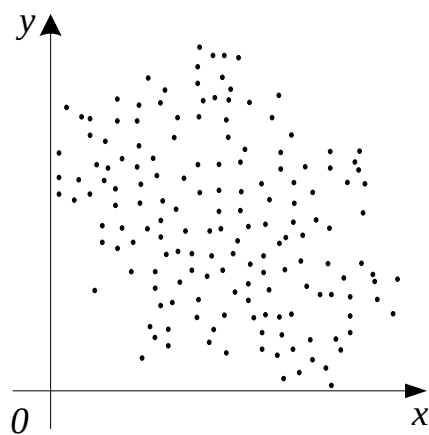
а)



б)



в)



г)

Рисунок 5.1. Приклади полів кореляції

Якщо обидві функції регресії $f(x)$ та $\psi(y)$ лінійні, то кореляцію називають **лінійною**², у інших випадках – **нелінійною**.

² Тобто обидві лінії регресії є прямими лініями.

5.1. Лінійна кореляція

Нехай випадкові величини X та Y зв'язані лінійною кореляційною залежністю, тобто обидві лінії регресії прямі. Потрібно за даними спостережень знайти рівняння прямих ліній регресії Y на X та X на Y й оцінити силу лінійного кореляційного зв'язку.

Розглянемо найпростіший випадок, коли в результаті незалежних дослідів була отримана сукупність n пар чисел: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$, тобто кожна пара чисел спостерігалася лише один раз. Шукане рівняння прямої лінії регресії Y на X матиме вигляд:

$$Y = \rho_{yx} \cdot x + a, \quad (5.7)$$

де ρ_{yx} - вибіркового коефіцієнт регресії Y на X .

Рівняння (5.7) називають **вибірковим рівнянням прямої лінії регресії Y на X** . Скористуємось *методом найменших квадратів (МНК)* для відшукування параметрів ρ_{yx} і a рівняння (5.7).

Відповідно до МНК, за міру відхилення дослідних значень y_i від значень випадкової величини Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) приймають величину S

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2,$$

яка називається **квадратичним відхиленням**.

Параметри ρ_{yx} і a мають бути такими, щоб величина S була найменшою:

$$S \rightarrow \min.$$

Використовуючи необхідні умови екстремуму функції декількох змінних, отримуємо так звану **нормальну систему** для визначення параметрів ρ_{yx} і a :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \rho_{yx}} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \end{cases}.$$

Запишемо:

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (\rho_{yx} \cdot x_i + a - y_i) \cdot x_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (\rho_{yx} \cdot x_i + a - y_i) \cdot 1 = 0 \end{cases},$$

Візьмемо похідні за ρ_{yx} і a та після простих перетворень отримаємо систему нормальних рівнянь наступного виду:

$$\begin{cases} \rho_{yx} \sum_{i=1}^n x_i^2 + a \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ \rho_{yx} \sum_{i=1}^n x_i + a \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}. \quad (5.8)$$

Розв'язавши цю систему в загальному вигляді (наприклад, методом Крамера), знайдемо шукані параметри:

$$\rho_{yx} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (5.9)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (5.10)$$

Аналогічно можна знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y :

$$X = \rho_{yx} \cdot y + c, \quad (5.11)$$

де ρ_{yx} - вибірковий коефіцієнт регресії X на Y .

Для характеристики сили лінійного кореляційного зв'язку між величинами X і Y за дослідними даними знаходимо вибіркового коефіцієнта кореляції:

$$r_g = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x S_y}}, \quad (5.12)$$

де

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n}, \quad (5.13)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}, \quad (5.14)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n}. \quad (5.15)$$

Приклад 5.1 На одному з підприємств хімічної галузі проводили аналіз взаємозв'язку між рентабельністю виробництва (X , %) та преміями на одного працівника (Y , тис. грн.). Результати досліджень наведені у таблиці:

Місяць	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень
X	16	15	10	11	10	15	17	10	10	15.5	17	18
Y	2.5	2.4	1.8	1.9	1.7	2.1	2.7	1.6	1.75	2.2	2.8	2.9

Розрахуйте вибіркового коефіцієнта кореляції та оцініть тісноту зв'язку між X та Y . Побудуйте діаграму розсіювання та розрахуйте коефіцієнти лінії регресії X на Y .

Розв'язок

Розрахуємо середні значення X та Y :

$$\bar{x} = \frac{16 + 15 + \dots + 18}{12} = 13,71, \quad \bar{y} = \frac{2,5 + 2,4 + \dots + 2,9}{12} = 2,20.$$

Далі розрахуємо S_{xx} , S_{yy} та S_{xy} :

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (16 - 13,71)^2 + (15 - 13,71)^2 + \dots + (18 - 13,71)^2 = 9,52,$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = (2,5 - 2,2)^2 + (2,4 - 2,2)^2 + \dots + (2,9 - 2,2)^2 = 0,19,$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = (16 - 13,71) \cdot (2,5 - 2,2) + (15 - 13,71) \cdot (2,4 - 2,2) + \dots + (18 - 13,71) \cdot (2,9 - 2,2) = 1,29;$$

тоді вибіркового коефіцієнта кореляції:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}} = \frac{1,29}{\sqrt{9,52 \cdot 0,19}} = 0,95.$$

Значення $r_{xy} > 0$, тобто зі зростанням премії рентабельність теж зростає; також отримане значення досить близько до одиниці; отже, зв'язок між рентабельністю виробництва та преміями досить тісний.

Побудуємо діаграму розсіювання (Рис. 5.2) та розрахуємо коефіцієнти вибіркового рівняння прямої лінії регресії X на Y :

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{1,29}{9,52} = 0,1356,$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 2,2 - 0,1356 \cdot 13,71 = 0,3375.$$

Тоді рівняння лінії регресії матиме вигляд:

$$\bar{y} = 0,3375 + 0,1356 \cdot x.$$

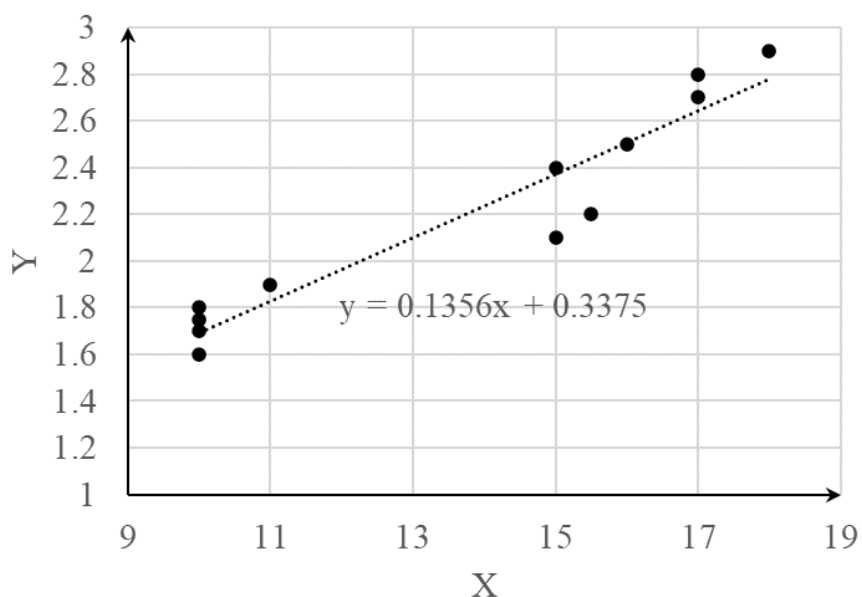


Рисунок 5.2. Діаграма розсіювання

У практичних задачах одне й те ж значення x може зустрітись n_x раз, а значення y – n_y разів; одна й та сама пара чисел (x, y) може спостерігатись n_{xy} разів. Тому дані спостережень групують, тобто підраховують частоти n_x , n_y , n_{xy} . Всі згруповані дані записують у вигляді таблиці, яку називають **кореляційною**. Розглянемо складання такої таблиці на прикладі.

Приклад 5.2 У n ($n = 16$) незалежних дослідах були отримані такі дані, що виражають залежність густини водяних розчинів бромистоводневої кислоти HBr від її концентрації при $25^\circ C$:

Концентрація HBr , % (мас.)	15	15	15	15	16	16	16	16
Густина, г/см ³	1,11	1,12	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	1,12

Концентрація HBr , % (мас.)	17	17	17	17	18	18	18	18
Густина, г/см ³	1,13	1,12	1,13	1,13	1,14	1,13	1,13	1,14

Представити ці дані у вигляді кореляційної таблиці.

Розв'язок

Позначимо концентрацію HBr через x_i , густину – через y_i та згрупуємо дані:

Значення y_i (густина, г/см ³)	Значення x_i (концентрація HBr , мас.%)				n_y
	15	16	17	18	
1,11	3				3
1,12	1	3	1		5
1,13		1	3	2	6
1,14				2	2
n_x	4	4	4	4	$n = 16$

На перетині рядків і стовпців таблиці знаходяться частоти n_{xy} .

Наприклад, частота 3, що знаходиться на перетині першого рядка і першого стовпця, вказує, що пара чисел (15; 1,11) спостерігалася три рази з 16 дослідів. Сума n_x , а також сума n_y збігаються і дорівнюють кількості дослідів.

Розглянемо відшукування параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії та розрахунок вибіркового коефіцієнта кореляції за згрупованими даними.

Вище для визначення параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії була отримана система рівнянь (5.8); при цьому передбачалося, що значення X та відповідні їм значення Y спостерігалися по одному разу. Для згрупованих даних скористаємося виразами

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \quad \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}, \quad x \cdot y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n n_{xy}}$$

з яких отримаємо тотожності

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}, \quad \sum_{i=1}^n y_i = n\bar{y}, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = n\bar{x}^2, \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n n_{xy} x \cdot y.$$

та підставимо праві частини тотожностей у (5.9):

$$\begin{cases} \rho_{yx}n\bar{x}^2 + an\bar{x} = \sum_{i=1}^n n_{xy}x_i \cdot y_i \\ \rho_{yx}n\bar{x} + a \cdot n = n\bar{y} \end{cases}$$

Скоротивши обидві частини другого рівняння на n , отримаємо:

$$\begin{cases} \rho_{yx}n\bar{x}^2 + an\bar{x} = \sum_{i=1}^n n_{xy}x_i \cdot y_i \\ \rho_{yx}\bar{x} + a = \bar{y} \end{cases} \quad (5.16)$$

Знайдемо a з другого рівняння (5.16):

$$a = \bar{y} - \rho_{yx}\bar{x}$$

Підставимо праву частину цього рівняння у перше рівняння системи (5.16) та отримаємо

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}.$$

Тоді

$$a = \frac{n\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\sum n_{xy}xy}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}.$$

Оскільки $\overline{x^2} - \bar{x}^2 = \sigma_x^2$, то

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2}, \quad a = \frac{n\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\sum n_{xy}xy}{n\sigma_x^2}.$$

Помноживши ρ_{yx} на $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$, отримаємо вираз для вибіркового коефіцієнта

кореляції:

$$r_{\epsilon} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}, \quad (5.17)$$

де σ_x та σ_y – стандартне відхилення X та Y відповідно.

Рівняння регресії Y на X будемо шукати у вигляді [1, 4]:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{\epsilon} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) \quad (5.18)$$

А рівняння регресії X на Y :

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{\epsilon} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}) \quad (5.19)$$

Приклад 5.3 За дослідними даними знайти рівняння прямих ліній регресії Y на X та оцінити силу лінійного кореляційного зв'язку.

y_i	x_i			
	15	16	17	18
1,11	3			
1,12	1	3	1	
1,13		1	3	2
1,14				2

Розв'язок

Шукатимемо рівняння регресії у вигляді (5.18). Спочатку обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції r_{ϵ} .

Розрахунки виконані у середовищі MS Excel (Рис. 5.3). Вихідні дані занесені у комірки A1:E5. Результати обчислень зручно записувати в дві допоміжні таблиці, що розташовані справа (F1:K6) і знизу (A6:F11) від заданої кореляційної таблиці.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	X \ Y	15	16	17	18	n_y	v	$ny*v$	$ny*v^2$	q	
2	1.11	3				3	-2	-6.00000	12.000000	-3.00	6.00
3	1.12	1	3	1		5	-1	-5.00000	5.000000	0.00	0.00
4	1.13		1	3	2	6	0	0.00000	0.000000	7.00	0.00
5	1.14				2	2	1	2.00000	2.000000	4.00	4.00
6	n_x	4	4	4	4	16	-2.00	-9.00000	19.000000	8.00	10.00
7	u	-1	0	1	2	2					
8	$nx*u$	-4	0	4	8	8					
9	$nx*u^2$	4	0	4	16	24					
10	t	-7.000	-3.000	-1.000	2.000	-9					
11		7.0	0.0	-1.0	4.0	10.00					

Рисунок 5.3. Проміжні розрахунки до прикладу 5.3 в MS Excel

Щоб спростити обчислення, перейдемо від початкових варіант x_i та y_i до умовних варіант u і v :

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

де h_1, h_2 – інтервали: $h_1=1$ ($h_1 = x_{i+1} - x_i$, наприклад, $h_1=16-15=1$), $h_2 = 0.01$ ($h_2 = y_{i+1} - y_i$, наприклад, $h_2=1.12-1.11=0.01$). У якості C_1 та C_2 беруть варіанти при найбільших частотах. Однак оскільки варіанти x_i мають однакову частоту ($n_x = 4$), то як C_1 візьмемо 16, тобто $C_1=16$); а як C_2 візьмемо варіанту $y = 1.13$, що є значенням y при найбільшій частоті – $n_y = 6$ (тобто $C_2=1.13$). Знайдені у такий спосіб умовні варіанти u_i і v_j запишемо відповідно в рядок u (A7:E7) нижньої таблиці й у стовпець v (G1:G 5) лівої таблиці.

Елементи рядку $n_x u$ дорівнюють добуткам відповідних елементів рядків n_x і u ; елементи стовпця $n_y v$ дорівнюють добуткам відповідних елементів стовпців n_y і v ; аналогічно знаходяться усі елементи $n_x u^2$ $n_y v^2$.

Кожний елемент стовпця q дорівнює сумі добутків частот n_{uv} (n_{xy}), котрі знаходяться у відповідному рядку кореляційної таблиці, на відповідні елементи рядка u . Наприклад, значення комірки J2=B2*B7= - 3.0, тобто

$3 \cdot (-1) = -3.0$; значення комірки $J3 = B3 \cdot B7 + C3 \cdot C7 + D3 \cdot D7 = 0$, а саме $1 \cdot (-1) + 3 \cdot (0) + 1 \cdot 1 = 0$ і т.д.

У рядку t кожний елемент дорівнює сумі добутків частот n_{uv} (n_{xy}), які знаходяться у відповідному стовпці кореляційної таблиці, на відповідні елементи стовпця v . Наприклад, значення комірки $B10 = B2 \cdot G2 + B3 \cdot G3 = -7$, тобто $3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) = -7$; значення комірки $C10 = C3 \cdot G3 + C4 \cdot G4 = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = -3$ і т.д.

В останньому стовпці qv кожний елемент дорівнює добутку відповідних елементів стовбців q і v , а в останньому рядку tu кожний елемент дорівнює добутку відповідних елементів рядків t і u . Рівність сум $\sum qv = \sum tu = 14.5$ використовують для контролю правильності обчислень.

Далі послідовно знаходимо:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_x u}{n} = \frac{8}{16} = 0.5 \qquad \bar{v} = \frac{\sum n_y v}{n} = \frac{-9}{16} = -0.56,$$

де $\bar{u}$, $\bar{v}$ – середні умовних варіант.

Середні квадратичні відхилення умовних варіант:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\sum n_x u^2}{\sum n_x} - (\bar{u})^2} = \sqrt{\frac{24}{16} - (0.5)^2} = 1.11;$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sum n_y v^2}{\sum n_y} - (\bar{v})^2} = \sqrt{\frac{19}{16} - (-0.56)^2} = 0.93.$$

Далі знаходимо вибіркового коефіцієнт кореляції (з урахуванням того, що $\sum qv = \sum tu = \sum n_{uv} uv = 14.5$):

$$r_e = \frac{\sum n_{uv} uv - n \bar{u} \bar{v}}{n \sigma_u \sigma_v} = \frac{10 - 16 \cdot 0.5 \cdot (-0.56)}{16 \cdot 1.11 \cdot 0.93} = 0.87.$$

Значення вибіркового коефіцієнту $r_e = 0.87$ вказує, що зв'язок між випадковими величинами досить сильний.

Далі знаходимо наступні величини:

– середні значення:

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1 = 0.5 \cdot 1 + 16 = 16.5;$$

$$\bar{y} = \bar{v}h_2 + C_2 = -0.56 \cdot 0.01 + 1.13 = 1.12;$$

– стандартні відхилення:

$$\sigma_x = \sigma_u h_1 = 1.11 \cdot 1 = 1.11;$$

$$\sigma_y = \sigma_v h_2 = 0.93 \cdot 0.01 = 0.93 \cdot 10^{-2}.$$

Підставивши знайдені величини в рівняння (5.18)

$$\bar{y}_x - 1.12 = 0.87 \frac{0.93 \cdot 10^{-2}}{1.11} (x - 16.5), \quad (5.20)$$

знайдемо рівняння лінії регресії Y на X :

$$y_x = 0.0072x + 1.0048.$$

Порівняємо умовні середні розраховані за рівнянням регресії з даними кореляційної таблиці (Таблиця 5.1); графічна інтерпретація показана на рис. 5.3.

Аналізуючи дані, що наведені в Таблиці 5.1, можна побачити, що умовні середні відрізняються незначно. Різниця розрахункових і табличних даних вказує на достатню точність розрахунків за знайденим рівнянням регресії Y на X .

Таблиця 5.1. Порівняння експериментальних та розрахункових значень

Значення x_i	Розрахунок за рівнянням (5.20)	Значення з кореляційної таблиці	Різниця розрахункових і табличних даних
15	1.1128	$\bar{y}_{15} = \frac{1.11 \cdot 3 + 1.12 \cdot 1}{3 + 1} = 1,1125$	0.0003
16	1.1200	$\bar{y}_{16} = \frac{1.12 \cdot 3 + 1.13 \cdot 1}{3 + 1} = 1,1225$	-0.0025
17	1.1272	$\bar{y}_{17} = \frac{1.12 \cdot 1 + 1.13 \cdot 3}{3 + 1} = 1,1275$	-0.0003
18	1.1344	$\bar{y}_{18} = \frac{1.13 \cdot 2 + 1.14 \cdot 2}{3 + 1} = 1,135$	-0.0006

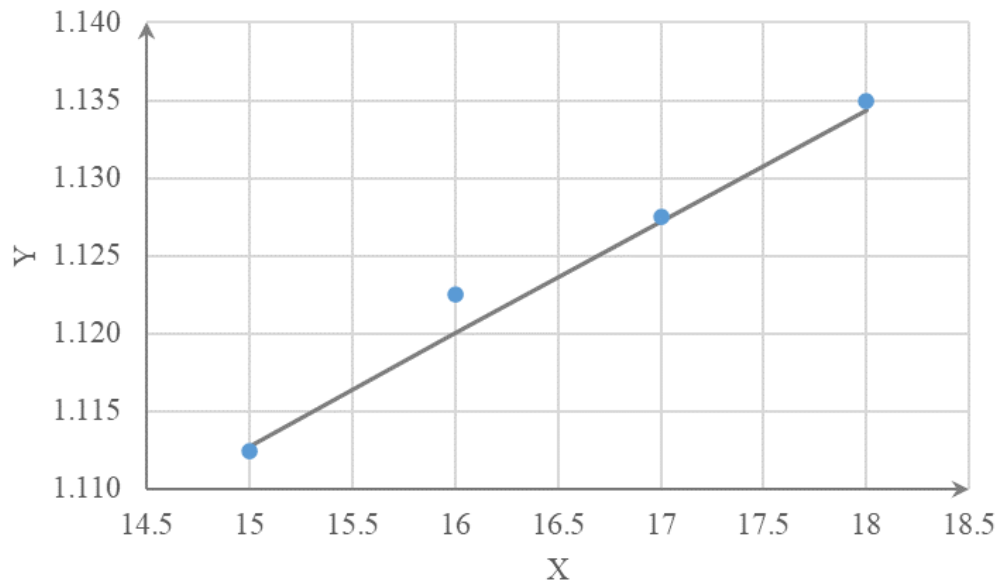


Рис. 5.3. Експериментальні та розрахункові значення

Аналогічно можна знайти рівняння лінії регресії X на Y , якщо скористатись рівнянням (5.19).

5.2. Нелінійна кореляція

Кореляцію називають **нелінійною**, якщо графік регресії $\bar{y}_x = f(x)$ чи $\bar{x}_y = \varphi(y)$ зображується кривою лінією. Наприклад, функції регресії Y на X можуть мати вигляд:

$$\bar{y}_x = a_0 + \frac{a_1}{x}, \quad (5.21)$$

$$\bar{y}_x = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad (5.22)$$

$$\bar{y}_x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \quad (5.23)$$

У випадку (5.21) кажуть про гіперболічну кореляцію, у випадку (5.22) – про параболічну кореляцію другого порядку, а якщо рівняння має вигляд (5.23) – про параболічну кореляцію третього порядку.

Метод, який дає можливість установити форму кореляційного зв'язку, тобто вигляд функції регресії (лінійна, квадратична тощо), приймати рішення щодо існування кореляції між двома змінними шляхом побудови діаграм розсіювання і розрахунку коефіцієнта кореляції, а також аналізувати силу зв'язку між величинами X та Y , має назву **кореляційний аналіз**.

Для знаходження невідомих параметрів рівняння регресії, як і у випадку лінійної кореляції, використовують метод найменших квадратів. Нехай, наприклад, потрібно знайти вибіркоче рівняння регресії Y на X вигляду (5.22):

$$\bar{y}_x = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

де a_0 , a_1 , a_2 – невідомі параметри.

Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення a_0 , a_1 і a_2 , отримана на основі методу найменших квадратів, матиме вигляд:

$$\begin{cases} a_2 \sum n_x x^4 + a_1 \sum n_x x^3 + a_0 \sum n_x x^2 = \sum n_x \bar{y}_x x^2 \\ a_2 \sum n_x x^3 + a_1 \sum n_x x^2 + a_0 \sum n_x x = \sum n_x \bar{y}_x x \\ a_2 \sum n_x x^2 + a_1 \sum n_x x + a_0 n = \sum n_x \bar{y}_x \end{cases} \quad (5.24)$$

Для оцінки тісноти нелінійної кореляції служить **вибіркове кореляційне відношення**. Вибірковим кореляційним відношенням Y до X називають відношення міжгрупового стандартного відхилення до загального стандартного відхилення випадкової величини Y :

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\text{міжгр}}}{\sigma_{\text{заг}}} \text{ або } \eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y}. \quad (5.25)$$

Міжгрупове стандартне відхилення та загальне стандартне відхилення знайдемо за формулами:

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{D_{\text{міжгр}}} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}}, \quad (5.26)$$

$$\sigma_y = \sqrt{D_{\text{заг}}} = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}}. \quad (5.27)$$

де $\bar{y}$ - загальна середня величини Y ; $\bar{y}_x$ - умовна середня величини Y ; n_x - частота значень x величини X ; n_y - частота значень y величини Y ; n - об'єм вибірки.

Аналогічно можна визначити вибіркове кореляційне відношення X до Y :

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_x}. \quad (5.28)$$

Вибіркове кореляційне відношення³ має наступні властивості⁴:

1. Значення η належать відріzkу $[0;1]$: $0 \leq \eta \leq 1$.
2. Якщо $\eta = 0$, то Y та X не зв'язані кореляційною залежністю.
3. Якщо $\eta = 1$, то величини Y та X зв'язані функціональною залежністю.

³ Для простоти запису позначимо його через η .

⁴ Властивості наведені без доведення.

4. Вибіркове кореляційне відношення не менше абсолютної величини вибіркового коефіцієнта кореляції: $\eta > |r_B|$.
5. Якщо $\eta = |r_B|$, то має місце лінійна кореляційна залежність.

Перевага вибіркового кореляційного відношення перед коефіцієнтом кореляції полягає в тому, що η служить мірою тісноти зв'язку будь-якої форми, у тому числі і лінійної, у той час як коефіцієнт кореляції r_B оцінює тісноту тільки лінійної залежності.

Приклад 5.4 Знайти вибірконе рівняння лінії регресії виду (5.22), а також вибірконе кореляційне відношення за даними кореляційної таблиці:

Значення y_i (густина, г/см ³)	Значення x_i (концентрація <i>HBr</i> , мас.%)				
	15	16	17	18	n_y
1,11	3				3
1,12	1	3	1		5
1,13		1	3	2	6
1,14				2	2
n_x	4	4	4	4	$n = 16$

Розв'язок

Для знаходження невідомих параметрів рівняння регресії $\bar{y}_x = a_0 + a_1x + a_2x^2$ скористаємось методом найменших квадратів та складемо рівняння (5.24). Для визначення коефіцієнтів системи складемо таблицю 5.2.

Таблиця 5.2. Проміжні розрахунки

Значення y_i (густина, г/см ³)	Значення x_i (концентрація HBr , мас.%)				Суми
	15	16	17	18	
1,11	3				
1,12	1	3	1		
1,13		1	3	2	
1,14				2	
n_x	4	4	4	4	16
$\bar{y}_x$	1,113	1,123	1,128	1,135	
$x \cdot n_x$	60	64	68	72	264
$x^2 \cdot n_x$	900	1024	1156	1296	4376
$x^3 \cdot n_x$	13500	16384	19652	23328	72864
$x^4 \cdot n_x$	202500	262144	334084	419904	1218632
$n_x \cdot \bar{y}_x$	4,45	4,49	4,51	4,54	17,99
$n_x \cdot \bar{y}_x \cdot x$	66,75	71,84	76,67	81,72	296,98
$n_x \cdot \bar{y}_x \cdot x^2$	1001,25	1149,44	1303,39	1470,96	4925,04

Використовуючи дані цієї таблиці, отримаємо конкретний вигляд системи (5.24):

$$\begin{cases} 1218632a_2 + 72864a_1 + 4376a_0 = 4925,04 \\ 72864a_2 + 4376a_1 + 264a_0 = 296,98 \\ 4376a_2 + 264a_1 + 16a_0 = 17,99 \end{cases}.$$

Тоді шукані коефіцієнти: $a_0 = 0,836$; $a_1 = 2,7 \cdot 10^{-2}$; $a_2 = -0,62 \cdot 10^{-3}$.

Отже, рівняння лінії регресії Y на X :

$$\bar{y}_x = 0,836 + 2,7 \cdot 10^{-2} x - 0,62 \cdot 10^{-3} x^2. \quad (5.29)$$

Результати порівняння умовних середніх, розрахованих за рівнянням регресії, з даними кореляційної таблиці, наведені в таблиці 5.3 та на рис. 5.4:

Таблиця 5.3. Порівняння експериментальних даних та розрахункових значень

x_i	Розрахунок за рівнянням (5.14)	Умовні середні	Різниця
15	1,1128	$y_{15} = \frac{1,11 \cdot 3 + 1,12 \cdot 1}{4} = 1,113$	$-0,2 \cdot 10^{-3}$
16	1,1214	$y_{16} = \frac{1,12 \cdot 3 + 1,13 \cdot 1}{4} = 1,123$	$-0,16 \cdot 10^{-2}$
17	1,1286	$y_{17} = \frac{1,12 \cdot 1 + 1,13 \cdot 3}{4} = 1,128$	$0,6 \cdot 10^{-3}$
18	1,1346	$y_{18} = \frac{1,13 \cdot 2 + 1,14 \cdot 2}{4} = 1,135$	$0,4 \cdot 10^{-3}$

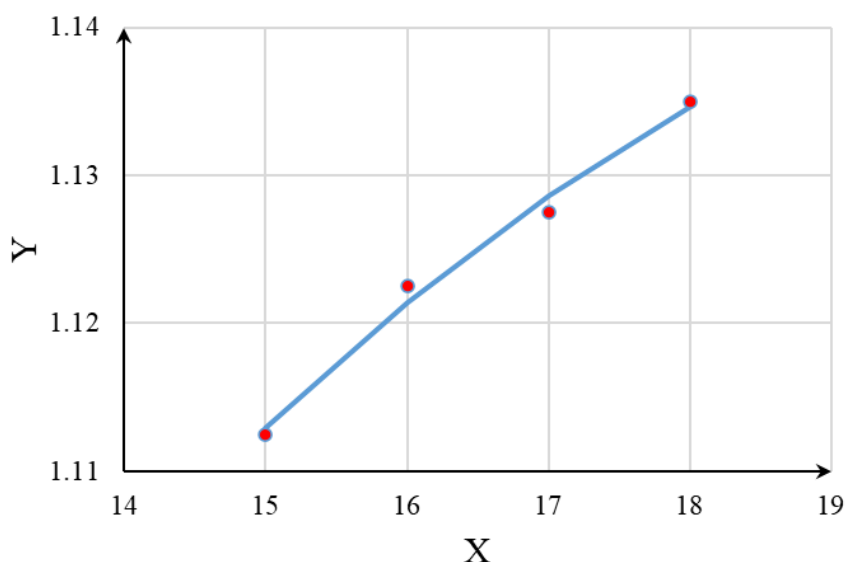


Рисунок 5.4. Експериментальні та розрахункові значення

Аналізуючи дані, що наведені в Табл. 5.3, можна побачити, що умовні середні відрізняються незначно. Різниця розрахункових і табличних даних вказує на достатню точність розрахунків за знайденим рівнянням регресії Y на X .

Далі знайдемо вибіркове кореляційне відношення.

Об'єм вибірки $n=16$, загальна середня величини Y :

$$\bar{y} = \frac{\sum y \cdot n_y}{n} = \frac{1,11 \cdot 3 + 1,12 \cdot 5 + 1,13 \cdot 6 + 1,14 \cdot 2}{16} = 1,124.$$

Визначимо загальне стандартне відхилення:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{3 \cdot (1,11 - 1,124)^2 + \dots + 2 \cdot (1,14 - 1,124)^2}{16}} = 0,0167.$$

Для знаходження міжгрупового стандартного відхилення скористаємося формулою (5.26); умовні середні $\bar{y}_x$ при $x = 15; 16; 17; 18$ знайдені у попередньому прикладі:

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{4 \cdot (1,113 - 1,124)^2 + \dots + 4 \cdot (1,135 - 1,124)^2}{16}} = 0,0163.$$

Шукане вибіркове кореляційне відношення

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{0,163}{0,167} \approx 0,97.$$

Таким чином, зв'язок між величинами Y та X досить тісний.

6. Задача апроксимації за методом найменших квадратів

6.1. Наближення функцій

Задача про наближення ставиться в такий спосіб: дану функцію $f(x)$ потрібно приблизно замінити (апроксимувати) узагальненим багаточленом

$$Q(x) = a_0 \cdot \varphi_0(x) + a_1 \cdot \varphi_1(x) + \dots + a_m \cdot \varphi_m(x), \quad (6.1)$$

де $a_0, \dots, a_m$ – постійні коефіцієнти, $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\}$ – основна система функцій, які є досить гладкими (наприклад, неперервно диференційованими) так, щоб відхилення, у певному розумінні, функції $f(x)$ від $Q(x)$ на заданій множині $X = \{x\}$ було найменшим. Цього можна досягти шляхом належного підбора коефіцієнтів $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$. При цьому багаточлен $Q(x)$ називається апроксимуючим.

Якщо множина X складається з окремих точок $x_1, x_2, \dots, x_n$, то наближення називається точковим; якщо ж X є відрізок $a \leq x \leq b$ – то інтегральним.

Для практики дуже важливий випадок, коли основна система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ являє собою послідовність цілих невід’ємних степенів змінної x , тобто

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \dots, \quad \varphi_m(x) = x^m.$$

У цьому випадку функція $Q(x)$ є звичайними багаточленом степеня m :

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_m \cdot x^m. \quad (6.2)$$

6.2. Апроксимація за методом найменших квадратів

Нехай функція $y = f(x)$ задана у табличному вигляді своїми значеннями x_i, y_i (наприклад, результати експерименту):

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Потрібно знайти функцію $\hat{y} = \varphi(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_m)$, котра би в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ приймала би значення $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \dots, \hat{y}_n$, які би були дуже близькими до значень $y_1, y_2, \dots, y_n$, де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ – коефіцієнти, які потрібно визначити. При цьому, $m \leq n$.

Відповідно до методу найменших квадратів за міру відхилення апроксимуючої функції $\hat{y}$ від даної функції на множині точок $x_1, x_2, \dots, x_n$ приймають величину S , яка повинна прийняти мінімальне значення:

$$S = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \min \quad (\text{або } S = \sum_{i=1}^n [\hat{y}_i - f(x_i)]^2 = \min). \quad (6.3)$$

Функцію $\varphi(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_m)$ називають апроксимуючою або наближеною, а функцію $y = f(x)$ – апроксимуємою.

Якщо апроксимуючою функцією є багаточлен $Q_m(x)$, то формула (6.3) набуває вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^n [Q(x_i) - f(x_i)]^2 = \min. \quad (6.4)$$

З наведеного формулювання виходить, що вирішення задачі апроксимації можна поділити на два етапи:

1 етап – визначення виду апроксимуючої функції.

2 етап – визначення значень коефіцієнтів обраної апроксимуючої функції.

6.3. Вибір виду апроксимуючої функції

Для визначення виду апроксимуючої функції необхідно експериментальні точки нанести на графік і провести наближену криву таким чином, щоб вузлові точки були рівномірно розташовані навколо неї, як показано на рис.6.1. Потім ця крива порівнюється з графіками відомих функцій (показниковою, логарифмічною, степеневою тощо).

В якості апроксимуючої функції обираємо ту, графік якої має вид побудованого.

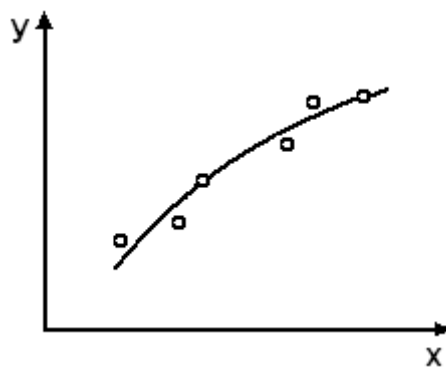


Рис. 6.1 Графічний вибір апроксимуючої функції

Існує також аналітичний метод вибору апроксимуючої функції, що базується на використанні деяких аналітичних критеріїв для вибору загального виду емпіричної формули.

Слід зауважити, що при застосуванні графічного методу вибору виду апроксимуючої функції виникають деякі складнощі. Це пов'язане з тим, що на невеликому відрізку, де отримана функція, яку апроксимують, графіки багатьох функцій схожі між собою. Це ускладнює вибір.

Аналітичний метод, базується на використанні деяких аналітичних критеріїв для вибору загального виду емпіричної формули. Він дозволяє обрати для апроксимації одну з ряду функцій, з якими працює метод. Недоліком методу є те, що перелік функцій досить обмежений.

Розглянемо вибір виду апроксимуючої функції з двома параметрами.

Емпіричні формули з двома параметрами

При аналізі й описуванні закономірностей хімічних і фізико-хімічних процесів і явищ емпіричну формулу найчастіше обирають серед таких функцій:

- I) $y = a \cdot x + b$ - лінійна;
- II) $y = a \cdot b^x$ - показникова;
- III) $y = \frac{1}{a \cdot x + b}$ - дробово-раціональна;
- IV) $y = a \cdot \ln(x) + b$ - логарифмічна;
- V) $y = a \cdot x^b$ - степенева, причому при $b > 0$ – залежність параболічна, а при $b < 0$ - гіперболічна;
- VI) $y = a + \frac{b}{x}$ - гіперболічна;
- VII) $y = \frac{x}{a \cdot x + b}$ - дробово-раціональна.

З метою визначення функції, що найкраще описує дослідні дані, необхідно виконати наступні розрахунки.

1. За даними таблиці 6.1 знайти:

Таблиця 6.1

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

$$\begin{aligned}x_{\text{ар}} &= \frac{x_1 + x_n}{2} \text{ (середнє арифметичне значень } x_1 \text{ та } x_n); & y_{\text{ар}} &= \frac{y_1 + y_n}{2}; \\x_{\text{геом}} &= \sqrt{x_1 \cdot x_n} \text{ (середнє геометричне);} & y_{\text{геом}} &= \sqrt{y_1 \cdot y_n}; \\x_{\text{гарм}} &= \frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n} \text{ (середнє гармонічне);} & y_{\text{гарм}} &= \frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}.\end{aligned}$$

2. За даними табл. 6.1, користуючись, наприклад, інтерполяційними формулами (або за наближено побудованому графіку шуканої функції, навколо якого групуються дослідні точки (x_i, y_i)), знайти значення y_{ap}^* , $y_{геом}^*$, $y_{гарм}^*$, що відповідають знайденим у попередньому пункті значенням x_{ap} , $x_{геом}$, $x_{гарм}$. Причому, якщо, наприклад, x_{ap} (або $x_{геом}$, $x_{гарм}$), співпадає з табличним значенням x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то відповідне значення y_{ap}^* (або $y_{геом}^*$, $y_{гарм}^*$) буде теж дорівнювати табличному значенню y_i ; в іншому випадку y_{ap}^* можна визначити, користуючись формулою лінійної інтерполяції

$$y_{ap}^* = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x_{ap} - x_i), \quad (6.5)$$

де x_i, x_{i+1} – значення з табл. 6.1, між якими знаходиться x_{ap} ($x_i < x_{ap} < x_{i+1}$); $y_i < y_{ap}^* < y_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$).

3. Знайти величини:

$$\varepsilon_1 = |y_{ap}^* - y_{ap}| \quad \varepsilon_4 = |y_{геом}^* - y_{ap}|$$

$$\varepsilon_2 = |y_{ap}^* - y_{геом}| \quad \varepsilon_5 = |y_{геом}^* - y_{геом}|$$

$$\varepsilon_3 = |y_{ap}^* - y_{гарм}| \quad \varepsilon_6 = |y_{гарм}^* - y_{ap}| \quad \varepsilon_7 = |y_{гарм}^* - y_{гарм}|$$

і серед них визначити мінімальне значення

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_7\}.$$

4. Обрати емпіричну формулу серед функцій I–VII. Шукана емпірична формула матиме вигляд:

$$\text{I)} \quad y = a \cdot x + b \quad - \quad \text{якщо } \varepsilon = \varepsilon_1;$$

$$\text{II)} \quad y = a \cdot b^x \quad - \quad \text{якщо } \varepsilon = \varepsilon_2;$$

$$\text{III)} \quad y = \frac{1}{a \cdot x + b} \quad - \quad \text{якщо } \varepsilon = \varepsilon_3;$$

$$\text{IV)} \quad y = a \cdot \ln(x) + b \quad - \quad \text{якщо } \varepsilon = \varepsilon_4;$$

$$\text{V)} \quad y = a \cdot x^b \quad - \quad \text{якщо } \varepsilon = \varepsilon_5;$$

$$\text{VI)} \quad y = a + \frac{b}{x} \quad - \quad \text{якщо } \varepsilon = \varepsilon_6;$$

$$\text{VII)} \quad y = \frac{x}{a \cdot x + b} \quad - \quad \text{якщо } \varepsilon = \varepsilon_7.$$

Слід враховувати, що I÷VII монотонні, і тому відповідні їм дослідні дані (x_i, y_i) при $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) повинні мати постійний знак приросту $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$). В іншому випадку залежності I÷VII не рекомендовані.

Такий спосіб вибору емпіричної формули є грубо орієнтовним, оскільки він не враховує поведінку всіх проміжних даних (x_i, y_i) . Також може статися, що змінні x і y підпорядковуються іншій закономірності, і тоді вид емпіричної формули буде відрізнятись від функцій I÷VII.

Примітка. При використанні цього методу вважатимемо, що початкові дані x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$; $n \geq 3$) додатні і $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Якщо ж всі $x_i < 0$ (або всі $y_i < 0$), то достатньо розглянути таблицю значень $(-x_i, y_i)$ (або відповідно $(x_i, -y_i)$). Аналогічно при $x_i < 0$ та $y_i < 0$ достатньо побудувати емпіричну формулу для таблиці $(-x_i, -y_i)$. У випадку, коли деякі із значень x_i, y_i додатні, а деякі – від'ємні, завжди можливо виконати заміну змінних, підібравши такі числа $M > 0$ і $N > 0$, при яких $\xi_i = M + x_i > 0$, $\eta_i = N + y_i > 0$. Тоді задача зводиться до знаходження емпіричної формули для додатних значень ξ_i і η_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Зведення нелінійних залежностей до задачі лінійної апроксимації

1. Нехай залежність між x та y досить добре описується показниковою функцією:

$$\hat{y} = a \cdot e^{b \cdot x}. \quad (6.6)$$

Необхідно за МНК визначити коефіцієнти цієї функції a та b .

Використовуємо метод вирівнювання, який після переходу до іншої системи координат дозволить працювати із заданою залежністю як з лінійною.

Прологарифмуємо залежність (6.6) і отримаємо:

$$\lg(\hat{y}) = \lg(a) + b \cdot x \cdot \lg(e). \quad (6.7)$$

Позначимо:

$$P = \lg(\hat{y}); \quad C = \lg(a); \quad D = b \cdot \lg(e)$$

і отримаємо рівняння:

$$P = C + D \cdot x. \quad (6.8)$$

Це рівняння є лінійним в новій системі координат P та x .

Для цього рівняння можна застосовувати метод найменших квадратів – *лінійну апроксимацію* і знайти коефіцієнти C і D .

Після того як знайшли C і D , знаходимо a та b з формул

$$C = \lg(a); \quad D = b \cdot \lg(e).$$

Ці коефіцієнти і підставимо в апроксимуючу залежність $\hat{y} = a \cdot e^{b \cdot x}$.

2. Для залежностей виду $\hat{y} = a \cdot b^x$:

$$\lg(\hat{y}) = \lg(a) + x \cdot \lg(b)$$

$$P = C + D \cdot x$$

3. Для дробово-раціональних функцій виду $\hat{y} = \frac{1}{a \cdot x + b}$

знайдемо обернену залежність: $\frac{1}{\hat{y}} = a \cdot x + b$.

Прийнявши $W = \frac{1}{\hat{y}}$, отримаємо $W = a \cdot x + b$.

4. Для логарифмічної залежності виду $\hat{y} = a \cdot \ln(x) + b$:

приймавши $Q = \ln(x)$, отримаємо $\hat{y} = a \cdot Q + b$.

5. Для степеневі залежності $\hat{y} = a \cdot x^b$, де $a, b > 0$:

Прологарифмувавши залежність, отримаємо: $lg(\hat{y}) = lg(a) + b \cdot lg(x)$.

Позначивши: $z = lg(y)$, $A = lg(a)$, $\varphi = lg(x)$,

отримаємо: $z = A + b \cdot \varphi$.

6. Для функції виду $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$:

позначивши $q = \frac{1}{x}$, отримаємо: $\hat{y} = a + b \cdot q$.

7. Для дробово-раціональних функцій виду $\hat{y} = \frac{x}{a \cdot x + b}$

знайдемо обернену залежність: $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$.

Уведемо позначення: $z = \frac{1}{\hat{y}}$, $q = \frac{1}{x}$.

Отримаємо: $z = a + b \cdot q$.

Приклад 6.1. Користуючись аналітичним способом, знайти загальний вигляд емпіричної формули, який відповідає даним у таблиці 6.2.

Таблиця 6.2

x	3,304	1,457	0,903	0,382	0,245	0,167	0,119
y	0,5	1,2	2,0	5,0	8,0	12,0	17,0

Розв'язок. Обиратимемо емпіричну формулу будемо серед залежностей II-VII. За даними табл. 6.2 знайдемо:

$$x_{\text{ар}} = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{3,304 + 0,119}{2} = 1,712;$$

$$x_{\text{геом}} = \sqrt{x_1 \cdot x_n} = \sqrt{3,304 \cdot 0,119} = 0,627;$$

$$x_{\text{гарм}} = \frac{2x_1x_n}{x_1 + x_n} = \frac{2 \cdot 3,304 \cdot 0,119}{3,304 + 0,119} = 0,230;$$

$$y_{\text{ар}} = \frac{y_1 + y_n}{2} = \frac{0,5 + 17,0}{2} = 8,75;$$

$$y_{\text{геом}} = \sqrt{y_1 \cdot y_n} = \sqrt{0,5 \cdot 17,0} = 2,92;$$

$$y_{\text{гарм}} = \frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 17,0}{0,5 + 17,0} = 0,97.$$

Користуючись інтерполяційною формулою (6.5), знайдемо:

$$y_{\text{ар}}^* = 0,5 + \frac{1,2 - 0,5}{1,457 - 3,304} (1,712 - 3,304) = 1,103;$$

$$y_{\text{геом}}^* = 2 + \frac{5 - 2}{0,382 - 0,903} (0,672 - 0,903) = 3,589;$$

$$y_{\text{гарм}}^* = 8 + \frac{12 - 8}{0,167 - 0,245} (0,230 - 0,245) = 8,769.$$

Знайдемо величини:

$$\varepsilon_2 = |y_{\text{ар}}^* - y_{\text{геом}}| = |1,103 - 2,92| = 1,817;$$

$$\varepsilon_3 = |y_{\text{ар}}^* - y_{\text{гарм}}| = |1,103 - 0,97| = 0,133;$$

$$\varepsilon_4 = |y_{\text{геом}}^* - y_{\text{ар}}| = |3,589 - 8,75| = 5,161;$$

$$\varepsilon_5 = |y_{\text{геом}}^* - y_{\text{геом}}| = |3,589 - 2,92| = 0,669;$$

$$\varepsilon_6 = |y_{\text{гарм}}^* - y_{\text{ар}}| = |8,769 - 8,75| = 0,019;$$

$$\varepsilon_7 = |y_{\text{гарм}}^* - y_{\text{гарм}}| = |8,769 - 0,97| = 7,799.$$

Оскільки $\varepsilon = \min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_7\} = \varepsilon_6 = 0,019$, то шукана емпірична формула матиме вигляд $y = a + \frac{b}{x}$.

Уведемо нові змінні $X = \frac{1}{x}$, $Y = y$ і отримаємо лінійну залежність

$$Y = a + b \cdot X.$$

Відповідні дані приведено в таблиці 6.3

Таблиця 6.3

X	0,304	0,686	1,107	2,618	4,082	5,988	8,403
Y	0,5	1,2	2,0	5,0	8,0	12,0	17,0

Побудуємо в площині XOY точки (X_i, Y_i) та переконаємось, що вони лежать майже на прямій (рис. 6.2). Отже, вибір емпіричної формули зроблено вірно.

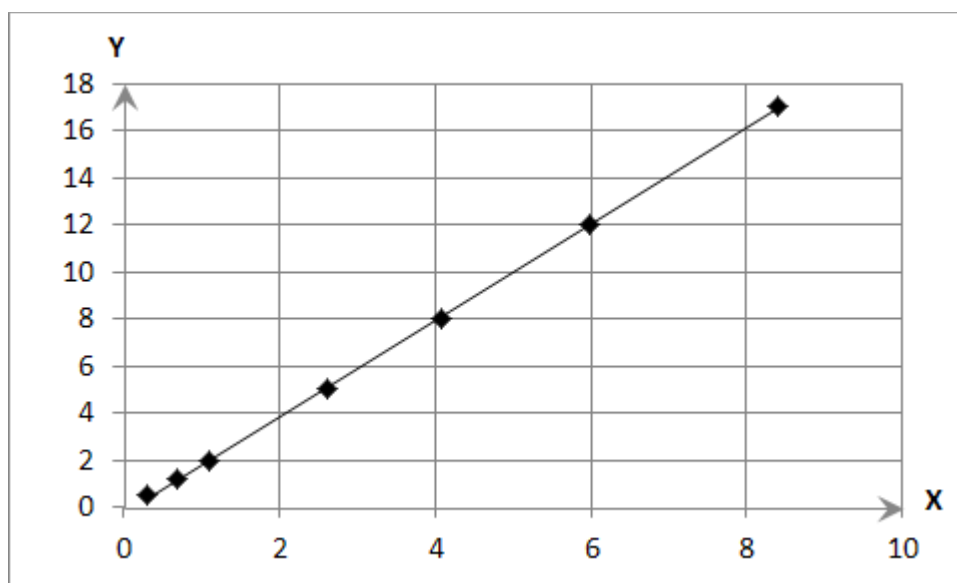


Рис. 6.2

Приклад 6.2. Користуючись аналітичним способом вибору апроксимуючої функції, знайти загальний вигляд емпіричної формули, який відповідає даним у таблиці 6.4.

Таблиця 6.4 - Експериментальні дані

x	1,9	2,74	3,58	4,42	5,26	6,1	6,94	7,78
y	3,35	4,15	4,82	5,45	6,03	6,55	7,07	7,54

Побудуємо графік експериментальної функції (рис. 6.4) .

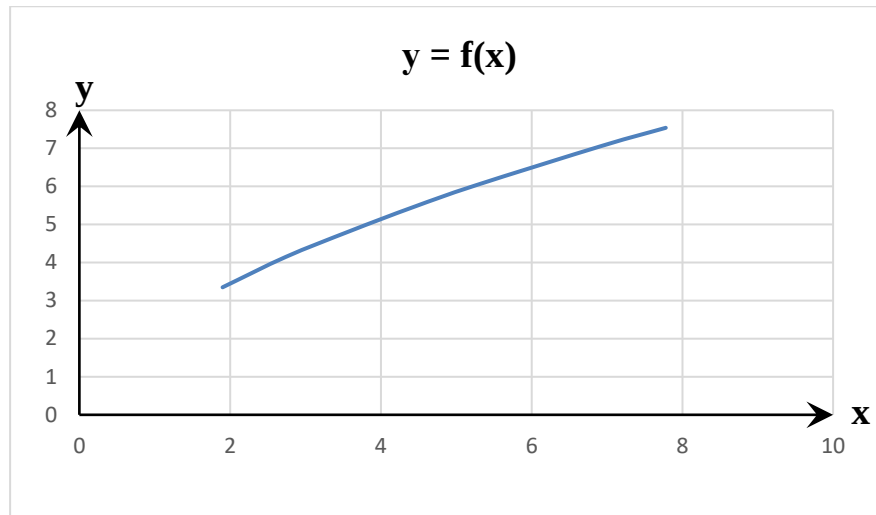


Рис. 6.3 Графік вихідної табличної функції

Згідно з алгоритмом аналітичного способу вибору апроксимуючої функції розрахуємо необхідні параметри за даними таблиці 6.4.

$$x_{\text{ар}} = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{1,9 + 7,78}{2} = 4,84$$

$$y_{\text{ар}} = \frac{y_1 + y_n}{2} = \frac{3,35 + 7,54}{2} = 5,445$$

$$x_{\text{геом}} = \sqrt{x_1 \cdot x_n} = \sqrt{1,9 \cdot 7,78} = 3,845$$

$$y_{\text{геом}} = \sqrt{y_1 \cdot y_n} = \sqrt{3,35 \cdot 7,54} = 5,0258$$

$$x_{\text{гарм}} = \frac{2 \cdot x_1 \cdot x_n}{x_1 + x_n} = \frac{2 \cdot 1,9 \cdot 7,78}{1,9 + 7,78} = 3,054$$

$$y_{\text{гарм}} = \frac{2 \cdot y_1 \cdot y_n}{y_1 + y_n} = \frac{2 \cdot 3,35 \cdot 7,54}{3,35 + 7,54} = 4,6389$$

Далі знаходимо значення $y_{\text{ар}}^*$, $y_{\text{геом}}^*$, $y_{\text{гарм}}^*$, які відповідають знайденим значенням $x_{\text{ар}}$, $x_{\text{геом}}$, $x_{\text{гарм}}$. Для цього використовуємо формулу лінійної інтерполяції, де в якості вузлів інтерполяції x_i, x_{i+1} обираємо значення з табл. 6.4, між якими знаходиться ці точки $x_{\text{ар}} (x_i < x_{\text{ар}} < x_{i+1})$; $x_{\text{геом}} (x_i < x_{\text{геом}} < x_{i+1})$; $x_{\text{гарм}} (x_i < x_{\text{гарм}} < x_{i+1})$.

Знайдемо $y_{\text{ар}}^*$, $y_{\text{геом}}^*$, $y_{\text{гарм}}^*$:

$$y_{\text{ар}}^* = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{\text{ар}} - x_i) = 5,45 + \frac{6,03 - 5,45}{5,26 - 4,42} \cdot (4,84 - 4,42) = 5,74$$

$$y_{\text{геом}}^* = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{\text{геом}} - x_i) = 4,82 + \frac{5,45 - 4,82}{4,42 - 3,58} \cdot (3,8497 - 3,58) \\ = 5,0222$$

$$y_{\text{гарм}}^* = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{\text{гарм}} - x_i) = 4,15 + \frac{4,82 - 4,15}{3,58 - 2,74} \cdot (3,054 - 2,74) \\ = 4,402$$

Знайдемо величини $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_7$:

$$\varepsilon_1 = |y_{\text{ар}}^* - y_{\text{ар}}| = |5,74 - 5,445| = 0,295$$

$$\varepsilon_2 = |y_{\text{ар}}^* - y_{\text{геом}}| = |5,74 - 5,0258| = 0,7142$$

$$\varepsilon_3 = |y_{\text{ар}}^* - y_{\text{гарм}}| = |5,74 - 4,6389| = 1,1011$$

$$\varepsilon_4 = |y_{\text{геом}}^* - y_{\text{ар}}| = |5,0222 - 5,445| = 0,4228$$

$$\varepsilon_5 = |y_{\text{геом}}^* - y_{\text{геом}}| = |5,0222 - 5,0258| = 0,0036$$

$$\varepsilon_6 = |y_{\text{гарм}}^* - y_{\text{ар}}| = |4,402 - 5,445| = 1,043$$

$$\varepsilon_7 = |y_{\text{гарм}}^* - y_{\text{гарм}}| = |4,402 - 4,6389| = 0,23769$$

Оскільки $\varepsilon = \min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_7\} = \varepsilon_5 = 0,0036$, то шукана емпірична формула матиме вигляд:

$$y = a \cdot x^b$$

Степенева залежність, що обрана для апроксимації є нелінійною функцією. Застосуємо до неї метод вирівнювання, що дозволяє представити нелінійну функцію лінійною в іншій системі координат.

Прологарифмуємо дану степеневу залежність і отримаємо:

$$\lg y = \lg(a) + b \cdot \lg(x)$$

Позначимо: $z = \lg(y)$; $a_0 = \lg(a)$; $\varphi = \lg(x)$; $a_1 = b$.

Отримаємо наступне рівняння (лінійна функція):

$$z = a_0 + a_1 \cdot \varphi$$

Для отримання коефіцієнтів отриманої лінійної функції можна використати систему (6. 16), що отримана для визначення коефіцієнтів лінійної апроксимуючої залежності.

Перетворимо табл. 6.4, що містить експериментальні дані з урахуванням прийнятих позначень.

Таблиця 6.5 - Результати вирівнювання

i	x	y	$\varphi = \lg(x)$	$z = \lg(y)$
1	1,9	3,35	0,2788	0,5250
2	2,74	4,15	0,4378	0,6180
3	3,58	4,82	0,5539	0,6830
4	4,42	5,45	0,6454	0,7364
5	5,26	6,03	0,7210	0,7803
6	6,1	6,55	0,7853	0,8162
7	6,94	7,07	0,8414	0,8494
8	7,78	7,54	0,8910	0,8774

Перевіримо лінійність отриманої функції. Для цього побудуємо її графік в середовищі MS Excel.

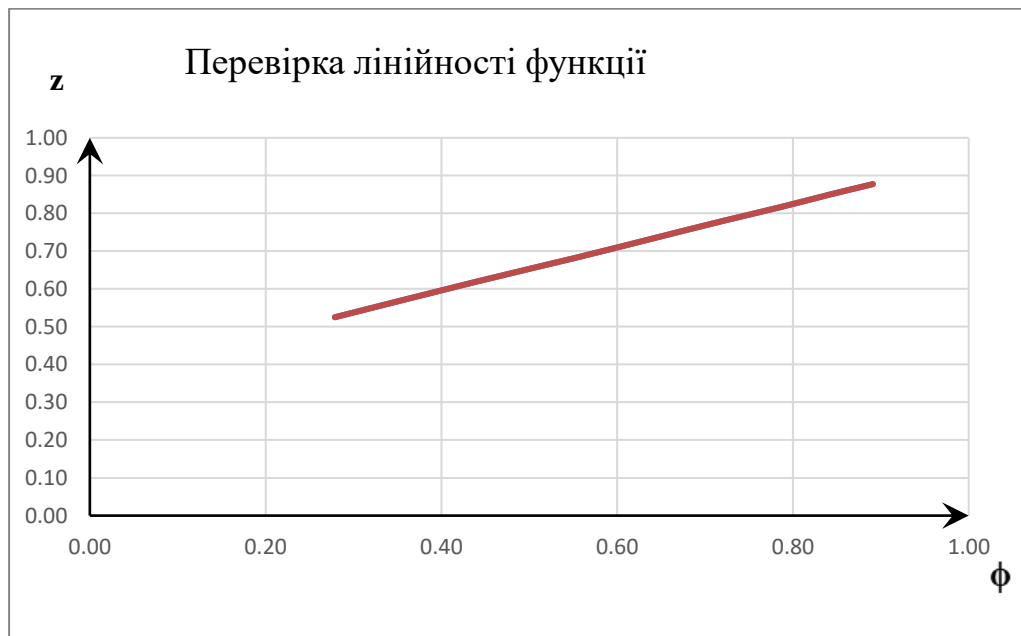


Рис 6.4. Перевірка лінійності функції $z = a_0 + a_1 \cdot \varphi$

Для визначення коефіцієнтів отриманої лінійної функції складемо наступну таблицю.

Таблиця 6.6 - До визначення коефіцієнтів лінійної залежності

i	x	y	ϕ	z	ϕ^2	ϕz
1	1,9	3,35	0,2788	0,5250	0,0777	0,1464
2	2,74	4,15	0,4378	0,6180	0,1916	0,2706
3	3,58	4,82	0,5539	0,6830	0,3068	0,3783
4	4,42	5,45	0,6454	0,7364	0,4166	0,4753
5	5,26	6,03	0,7210	0,7803	0,5198	0,5626
6	6,1	6,55	0,7853	0,8162	0,6167	0,6410
7	6,94	7,07	0,8414	0,8494	0,7079	0,7147
8	7,78	7,54	0,8910	0,8774	0,7938	0,7817
Σ	38,72	44,96	1,5879	1,6528	3,6310	3,9705

Формули, за якими проводили обчислення в середовищі MS Excel зображені на рисунку 6.5.

	A	B	C	D	E	F	G
67	i	x	y	ϕ	z	ϕ^2	$\phi * z$
68	1	1,9	3,35	=LOG10(B68)	=LOG10(C68)	=D68^2	=D68*E68
69	2	2,74	4,15	=LOG10(B69)	=LOG10(C69)	=D69^2	=D69*E69
70	3	3,58	4,82	=LOG10(B70)	=LOG10(C70)	=D70^2	=D70*E70
71	4	4,42	5,45	=LOG10(B71)	=LOG10(C71)	=D71^2	=D71*E71
72	5	5,26	6,03	=LOG10(B72)	=LOG10(C72)	=D72^2	=D72*E72
73	6	6,1	6,55	=LOG10(B73)	=LOG10(C73)	=D73^2	=D73*E73
74	7	6,94	7,07	=LOG10(B74)	=LOG10(C74)	=D74^2	=D74*E74
75	8	7,78	7,54	=LOG10(B75)	=LOG10(C75)	=D75^2	=D75*E75
76	Σ	=СУММ(B68:B75)	=СУММ(C68:C75)	=СУММ(D68:D75)	=СУММ(E68:E75)	=СУММ(F68:F75)	=СУММ(G68:G75)

Рис 6.5. Формули обчислення даних

Запишемо систему рівнянь користуючись даними таблиці 6.6:

$$\begin{cases} 8a_0 + 5,1545a_1 = 5,8859 \\ 5,1546a_0 + 3,6310a_1 = 3,9705 \end{cases}$$

Знаходимо A та b за формулами Крамера:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 5,8859 & 5,1545 \\ 3,9705 & 3,6310 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 5,1545 \\ 5,1545 & 3,6310 \end{vmatrix}} = 0,365354$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 5,8859 \\ 5,1545 & 3,9705 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 5,1545 \\ 5,1545 & 3,6310 \end{vmatrix}} = 0,57485$$

За знайденим коефіцієнтом a_0 визначимо коефіцієнт a з урахуванням, що $a_0 = \lg(a)$:

$$a_0 = \lg(a) = 0,365354, \quad a = 10^{a_0} = 2,31928$$

Другий коефіцієнт: $a_1 = b$. Звідки $b = 0,57485$

Отже, шукана апроксимуюча функція матиме вигляд:

$$\bar{y} = 2,31928 \cdot x^{0,57485}$$

Порівняємо отримані значення $\bar{y} = 2,31928 \cdot x^{0,57485}$ та табличні значення у вузлових точках й визначимо стандартне відхилення:

Таблиця 6.7 - Визначення стандартного відхилення та порівняння функцій

i	x	y	$\bar{y}$	$\bar{y} - y$	$(\bar{y} - y)^2$
1	1,9	3,35	3,354244	0,004244	0,00001801
2	2,74	4,15	4,13994	-0,01006	0,00010119
3	3,58	4,82	4,82784	0,00784	0,00006146
4	4,42	5,45	5,44972	-0,00028	0,00000008
5	5,26	6,03	6,022986	-0,00701	0,00004920
6	6,1	6,55	6,558432	0,008432	0,00007110
7	6,94	7,07	7,063317	-0,00668	0,00004467
8	7,78	7,54	7,542804	0,002804	0,00000786
Σ	38,72	44,96	44,95928	-0,00072	0,00035358

Формули за якими проводили обчислення в середовищі MS Excel зображені на рисунку 6.6.

	A	B	C	D	E	F	H	I
78	i	x	y	$\bar{y}$	$\bar{y} - y$	$(\bar{y} - y)^2$		
79	1	1,9	3,35	=I\$79*B79^(I\$80)	=D79-C79	=E79^2	a	2,31928
80	2	2,74	4,15	=I\$79*B80^(I\$80)	=D80-C80	=E80^2	b	0,57485
81	3	3,58	4,82	=I\$79*B81^(I\$80)	=D81-C81	=E81^2		
82	4	4,42	5,45	=I\$79*B82^(I\$80)	=D82-C82	=E82^2		
83	5	5,26	6,03	=I\$79*B83^(I\$80)	=D83-C83	=E83^2		
84	6	6,1	6,55	=I\$79*B84^(I\$80)	=D84-C84	=E84^2		
85	7	6,94	7,07	=I\$79*B85^(I\$80)	=D85-C85	=E85^2		
86	8	7,78	7,54	=I\$79*B86^(I\$80)	=D86-C86	=E86^2		
87	Σ	=СУММ(B79:B86)	=СУММ(C79:C86)	=СУММ(D79:D86)	=СУММ(E79:E86)	=СУММ(F79:F86)		

Рис 6.6 Формули для обчислення даних для стандартного відхилення та порівняння функцій

Розрахуємо стандартне відхилення за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n - 1}} \quad (6.9)$$

Отримаємо:

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,00035358}{7}} = 0,0071$$

Сумістимо на одному графіку експериментальну функцію (табл. 6.4.) та отриману апроксимуючу $\bar{y} = 2,31928 \cdot x^{0,57485}$ (рис. 6.7).

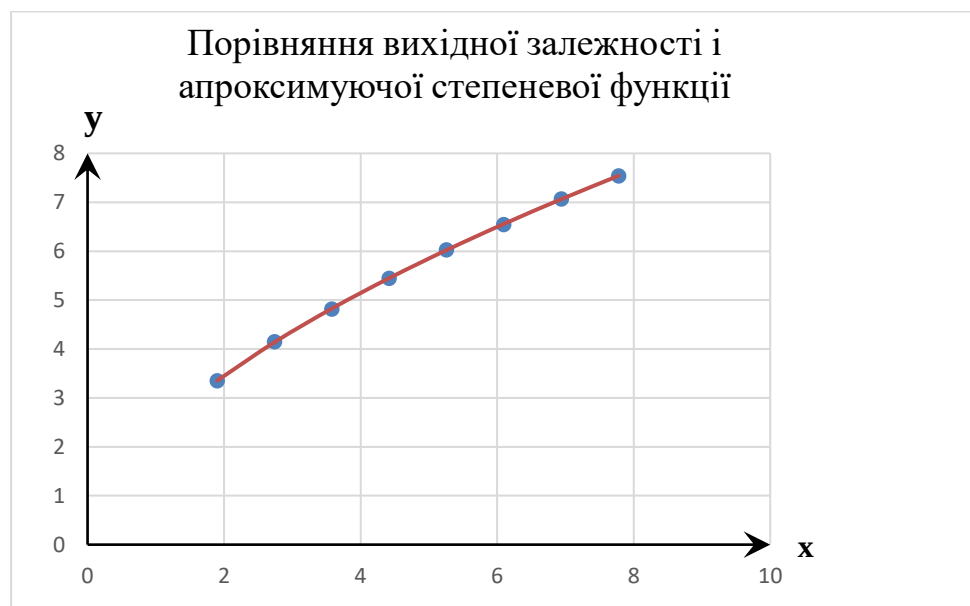


Рис 6.7. Суміщений графік експериментальної та апроксимуючої функцій

Незначні розбіжності між y_i та $\bar{y}_i$ (табл. 6.7), а також значення середньої квадратичної похибки $\sigma = 0,0071$ свідчать, що отримана залежність достатньо точно описує експериментальні дані. Про це також свідчить суміщений графік функцій, на якому вихідна залежність і апроксимуюча залежності практично співпадають.

6.4. Визначення значень коефіцієнтів обраної апроксимуючої функції

Для побудови багаточлена $Q_m(x)$ потрібно підібрати коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_m$ так, щоб величина S була найменшою.

Використовуючи необхідні умови екстремуму функції декількох змінних (необхідною умовою екстремуму функції декількох змінних є рівність нулю всіх часткових похідних в точці екстремуму по всім невідомим), отримуємо так звану нормальну систему для визначення коефіцієнтів $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Розв'язок системи виконується відомими методами. Після підстановки знайдених коефіцієнтів в апроксимуючу функцію отримаємо конкретний вид апроксимуючої залежності.

Після визначення апроксимуючої залежності визначають виправлене стандартне відхилення (похибку апроксимації) за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 1}}, \quad (6.11)$$

де n – кількість експериментальних точок; y_i , $\hat{y}_i$ експериментальне та розрахункове значення відповідно.

Розглянемо застосування методу найменших квадратів для випадків, коли в якості апроксимуючої функції обрані багаточлени першого порядку.

6.5. Лінійна апроксимація

Нехай функція $y = f(x)$ задана своїми значеннями

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \dots, \quad y_n = f(x_n).$$

Для апроксимації заданої функції обрано багаточлен першого степеня

$$Q_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x. \quad (6.12)$$

Потрібно знайти такі значення коефіцієнтів a_0, a_1 обраної апроксимуючої функції, щоб величина S була найменшою:

$$S = \sum_{i=1}^n [Q_1(x_i) - f(x_i)]^2 \quad (6.13)$$

З урахуванням (6.12) запишемо (6.13) у вигляді

$$S = \sum_{i=1}^n [a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i]^2. \quad (6.14)$$

Нормальна система для визначення коефіцієнтів буде наступною:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) \cdot x_i = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Зробивши найпростіші перетворення, одержимо:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i. \end{cases} \quad (6.16)$$

Розв'язавши систему (6.16) відомими методами (формули Крамера, метод Гауса тощо), знайдемо коефіцієнти a_0 та a_1 і таким чином, отримаємо конкретний вигляд апроксимуючого багаточлена першого порядку $Q_1(x)$.

Приклад 6.3. Результати вимірювання розчинності S азотно-натрієвої солі залежно від температури t представлені наступною таблицею:

t, °C	0	4	10	15	21	29	36	51	68
S, г/ 100 г	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Знайти апроксимуючу функцію у вигляді $S = a_0 + a_1 t$.

Розв'язок. На основі табличних даних, прийнявши, що $x = t$ і $y = S$, будемо обчислювати коефіцієнти при невідомих a_0, a_1 й вільні члени в системі (6.16), користуючись таблицею 6.8.

Таблиця 6.8.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	0	66,7	0	0
2	4	71,0	16	284
3	10	76,3	100	763
4	15	80,6	225	1209
5	21	85,7	441	1799,7
6	29	92,9	841	2694,1
7	36	99,4	1296	3578,4
8	51	113,6	2601	5793,6
9	68	125,1	4624	8506,8
Σ	234	811,3	10144	24628,6

За даними таблиці 6.8 запишемо нормальну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 9a_0 + 234a_1 = 811,3 \\ 234a_0 + 10144a_1 = 24628,6. \end{cases} \quad (6.17)$$

Знайдемо a_0 й a_1 за формулами Крамера:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 811,3 & 234 \\ 24628,6 & 10144 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 234 \\ 234 & 10144 \end{vmatrix}} = 67,51; \quad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 811,3 \\ 234 & 24628,6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 234 \\ 234 & 10144 \end{vmatrix}} = 0,87.$$

Отже, шуканий багаточлен має вигляд:

$$S = 67,51 + 0,87 \cdot t. \quad (6.16)$$

Порівняємо вихідні значення для y з відповідними значеннями $\bar{y}$, отриманими з рівняння (6.16). Відповідні результати наведені у таблиці 6.5.

Таблиця 6.9.

i	x_i	y_i	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_i - y_i$
1	0	66,7	67,51	0,81
2	4	71,0	70,99	-0,01
3	10	76,3	76,21	-0,09
4	15	80,6	80,56	-0,04
5	21	85,7	85,78	0,08
6	29	92,9	92,74	-0,16
7	36	99,4	98,83	-0,57
8	51	113,6	111,88	-1,72
9	68	125,1	126,67	1,57

Розрахуємо виправлене стандартне відхилення за формулою (6.11):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-1}} = 0,8976.$$

Незначні розбіжності між y_i та $\bar{y}_i$, а також значення похибки апроксимації $\sigma = 0,8976$ свідчать, що отримана залежність достатньо точно описує експериментальні дані.

Приклад 6.4. Обчислити параметри емпіричної формули, обраної у прикладі 6.1, методом найменших квадратів; оцінити точність отриманої емпіричної формули.

Розв'язок. У прикладі 6.1 визначено емпіричну формулу виду

$$y = a + \frac{b}{x}$$

та приведено її до лінійного виду

$$y = a + bX$$

шляхом уведення нової змінної $X = \frac{1}{x}$.

Параметри a та b визначимо за методом найменших квадратів. Для визначення коефіцієнтів нормальної системи складаємо табл.6.6 та запишемо нормальну систему рівнянь:

Таблиця 6.10

i	X_i	y_i	X_i^2	$X_i \cdot Y_i$
1	0,303	0,5	0,092	0,152
2	0,686	1,2	0,471	0,823
3	1,107	2,0	1,225	2,214
4	2,618	5,0	6,854	13,090
5	4,082	8,0	16,883	32,656
6	5,988	12,0	35,856	71,856
7	8,403	17,0	70,610	142,851
Σ	23,187	45,7	131,771	263,642

$$\begin{cases} 23,187 \cdot b + 7 \cdot a = 45,7 \\ 131,771 \cdot b + 23,187 \cdot a = 263,642. \end{cases}$$

Знайдемо a та b за формулами Крамера:

$$a = 0,001, \quad b = 1,97.$$

Відповідно, шукана емпірична формула матиме вигляд

$$y = 0,001 + \frac{1,97}{x}. \quad (6.17)$$

Порівняння значень $\bar{y}$, отриманих за формулою з вихідними даними y , показано в таблиці 6.11.

Таблиця 6.11

x	y	$\bar{y}$	$\varepsilon = y - \bar{y}$	ε^2
0,304	0,5	0,6	-0,1	0,01
1,457	1,2	1,3	-0,1	0,01
0,903	2,0	2,2	-0,2	0,04
0,382	5,0	5,2	-0,2	0,04
0,245	8,0	8,0	0	0
0,167	12,0	11,8	0,2	0,04
0,119	17,0	16,6	0,4	0,16
Σ				0,3

Похибку апроксимації визначаємо за формулою (6.11):

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,3}{6}} \approx 0,02.$$

Така похибка говорить про те, що знайдена емпірична формула (6.17) достатньо добре апроксимує представлені в табл. 6.2 експериментальні дані.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Які гіпотези називають статистичними?
2. Як сформулювати нульову та конкуруючу гіпотези?
3. Наведіть приклади простих та складних гіпотез.
4. Що таке похибка першого роду?
5. Що таке похибка другого роду?
6. До яких негативних наслідків можуть призвести похибки першого та другого роду?
7. Поняття статистичного критерію.
8. Дайте визначення критичній області та області прийняття гіпотези.
9. Поясніть загальну схему перевірки статистичних гіпотез.
10. Який критерій називають критерієм узгодженості?
11. Сформулюйте алгоритм перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності.
12. Які критерії використовуються для перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності?
13. Сформулюйте алгоритм перевірки гіпотези про рівність двох середніх нормальних генеральних сукупностей з невідомими дисперсіями.
14. Які критерії використовуються для перевірки гіпотези про рівність двох середніх нормальних генеральних сукупностей?
15. Сформулюйте алгоритм перевірки гіпотези про рівність двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей.
16. Які критерії використовуються для перевірки гіпотези про рівність двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей?
17. Яку залежність називають кореляційною?
18. Поняття лінії регресії.
19. Що характеризує коефіцієнт вибіркової кореляції і які значення може приймати?

20. Кореляційна таблиця. Як вона створюється і як використовувати записані там дані?
21. Від'ємна і додатна лінійна кореляція.
22. Граничні значення коефіцієнта кореляції та їх сенс для оцінювання сили зв'язку між величинами.
23. Поняття умовних середніх.
24. У чому полягає завдання апроксимації функції?
25. Якими критеріями керуються при виборі загального вигляду емпіричної функції?
26. Що таке точкова квадратична апроксимація і апроксимуючий багаточлен?
27. Чому метод найменших квадратів отримав таку назву? Як визначити похибку методу?
28. Запишіть нормальну систему рівнянь для випадку лінійної апроксимації.

Список літератури

1. Брановицька С.В. Обчислювальна математика та програмування. Обчислювальна математика в хімії і хімічній технології: Підручник [Текст]/ С.В. Брановицька, Р.Б. Медведєв, Ю.Я. Фіалков. – К.: ІВЦ «Видавництво “Політехніка”», 2004. – 220 с.
2. Обчислювальна математика та програмування: методичні вказівки і завдання до практичних занять та самостійної роботи студентів / С.Г. Бондаренко, С.В. Брановицька, О. В. Сангінова – К.: НТУУ "КПІ", 2014.– 77 с. (Рекомендовано Вченою радою ХТФ, протокол № 5 від 26 травня 2014 р.)
3. Математична обробка експериментальних даних. Посібник для студентів хіміко-технологічного факультету до виконання курсової роботи з дисципліни: «Обчислювальна математика та програмування» [Текст]/ С.В. Брановицька, С.Г. Бондаренко, О.О. Квітка, Р.Б. Медведєв, А.І. Ткачук. – Київ: НТУУ «КПІ», 1997. – 76 с. – Рос. мовою.
4. Брановицька С.В. Теорія ймовірностей та випадкові процеси: метод. вказівки до викон. розрахункової роботи для студ. напряму підготов. 6.050202 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані процеси». Ч 2: Математична статистика [Текст]/ С.В. Брановицька, Т.В. Бойко, О.В.Сангінова. - К.: НТУУ «КПІ», ВПІ ВПК «Політехніка», 2008. – 48 с.

Додаток А. Завдання до першої частини РР

Таблиця А.1. Варіанти завдань для задачі 1 Частини 1

Варіант	Результати спостережень										γ	α
1	19	27	18	17	19	37	26	19	17	8	0,95	0,05
	14	35	29	12	16	25	24	19	30	17		
	10	22	25	16	12	8	35	22	10	11		
	30	24	16	10	21	22	15	28	21	8		
	9	34	15	8	20	14	24	20	33	14		
2	15	34	32	36	29	8	23	21	27	24	0,99	0,01
	9	25	15	24	19	32	28	33	15	30		
	27	14	25	9	17	19	25	10	30	16		
	31	38	4	28	31	22	17	22	17	19		
	20	22	17	19	11	12	14	5	21	23		
3	25	14	31	14	27	20	38	15	27	32	0,95	0,05
	13	23	17	20	15	27	25	19	22	9		
	22	7	23	13	18	26	19	17	8	25		
	6	28	12	23	26	23	21	22	21	4		
	16	35	11	30	18	29	5	11	18	21		
4	20	27	25	22	21	23	27	26	35	18	0,90	0,10
	27	16	29	28	30	10	9	7	32	24		
	18	29	26	25	27	31	30	29	18	22		
	20	33	14	34	32	13	25	13	20	25		
	30	29	16	36	15	33	37	18	17	27		
5	21	22	4	26	9	30	13	14	10	23	0,95	0,05
	25	12	21	21	20	13	12	22	20	19		
	19	21	20	21	22	37	28	17	39	38		
	15	25	17	17	33	24	35	16	26	38		
	26	24	22	29	18	16	22	35	21	13		

Варіант	Результати спостережень										γ	α
6	24	23	24	22	28	27	34	14	16	25	0,99	0,01
	21	20	24	19	23	22	14	16	22	13		
	27	20	26	19	18	20	22	29	7	28		
	26	24	18	20	9	8	24	10	30	23		
	24	22	25	33	31	30	25	18	16	13		
7	23	22	19	27	37	27	11	18	17	39	0,95	0,05
	16	38	37	21	23	22	30	21	29	22		
	14	13	23	29	22	11	33	26	27	21		
	12	10	23	7	23	25	18	6	23	26		
	21	28	23	17	25	24	23	14	19	24		
8	25	24	26	8	9	10	11	22	27	23	0,90	0,10
	12	19	18	23	21	25	26	27	15	18		
	23	25	29	4	20	25	21	11	16	24		
	25	6	23	8	30	27	33	12	17	22		
	17	22	23	24	25	17	25	21	28	12		
9	18	41	25	26	24	27	21	35	13	27	0,99	0,01
	15	25	27	30	23	17	28	21	25	16		
	22	20	23	24	16	17	27	10	11	15		
	15	35	34	24	27	32	20	37	28	20		
	19	15	25	28	31	33	13	27	19	27		
10	12	13	22	32	24	11	12	28	21	9	0,95	0,05
	10	11	20	22	28	22	24	26	19	24		
	17	18	25	13	24	16	27	25	20	24		
	6	34	25	21	15	31	16	23	23	18		
	23	17	19	20	27	25	17	20	31	25		
11	22	30	21	20	22	40	29	22	20	11	0,90	0,10
	17	38	32	15	19	28	27	22	33	20		
	13	25	28	19	15	11	38	25	13	14		
	33	27	19	13	24	25	18	31	24	11		
	12	37	18	11	23	17	27	23	36	17		

Варіант	Результати спостережень										γ	α
12	16	35	33	37	30	9	24	22	28	25	0,95	0,05
	10	26	16	25	20	33	29	34	16	31		
	28	15	26	10	18	30	26	11	31	17		
	32	39	5	29	32	23	18	23	18	20		
	21	23	18	20	12	13	15	6	22	24		
13	34	29	17	40	22	29	16	33	16	27	0,99	0,01
	11	24	21	27	29	17	22	19	25	15		
	27	10	19	21	28	20	15	25	9	24		
	6	23	24	23	25	28	25	14	30	8		
	23	20	13	7	31	20	32	13	37	18		
14	18	25	23	20	19	21	25	24	33	16	0,90	0,10
	25	14	27	26	28	8	7	5	30	22		
	16	27	24	23	25	29	28	27	16	20		
	18	31	12	32	30	11	23	11	18	23		
	28	27	14	34	13	31	35	16	15	25		
15	24	25	7	29	12	33	16	17	13	26	0,95	0,05
	28	15	24	24	23	16	15	25	23	22		
	22	24	23	24	25	40	31	20	42	41		
	18	28	20	20	36	27	38	19	29	41		
	29	27	25	32	21	19	25	38	24	16		
16	21	22	20	22	25	26	12	32	23	14	0,99	0,01
	18	19	17	22	20	21	14	12	11	20		
	18	25	17	24	18	16	27	20	26	5		
	22	24	18	16	6	7	8	22	21	28		
	20	22	31	23	28	29	16	23	11	14		
17	41	19	20	13	29	33	29	21	24	25	0,90	0,10
	24	31	23	32	24	25	23	39	40	18		
	23	29	28	35	13	24	31	25	15	16		
	28	25	8	20	27	25	9	25	12	14		
	26	21	16	25	26	27	19	25	30	23		

Варіант	Результати спостережень										γ	α
18	28	10	27	26	11	12	13	24	29	25	0,95	0,05
	20	25	14	21	23	27	28	29	17	20		
	31	6	25	27	22	27	23	13	18	26		
	25	10	27	8	32	29	35	14	19	24		
	25	26	19	24	27	19	27	23	30	14		
19	19	33	25	11	25	22	24	23	16	39	0,99	0,01
	26	19	14	23	15	21	28	25	13	23		
	25	8	13	9	15	14	22	21	20	18		
	18	35	18	26	30	25	22	32	13	33		
	11	25	25	17	31	29	26	23	17	13		
20	24	12	15	31	27	14	25	35	15	16	0,90	0,10
	22	27	27	29	31	25	23	25	13	14		
	23	27	30	28	27	19	28	16	20	21		
	26	21	19	26	18	34	28	24	9	37		
	34	28	20	23	30	28	22	23	26	20		
21	13	22	24	31	42	24	22	23	32	24	0,95	0,05
	22	35	24	29	30	21	17	34	40	19		
	16	15	27	40	13	17	21	30	27	15		
	13	26	33	20	27	26	15	21	29	35		
	19	38	25	29	19	25	13	20	39	14		
22	18	37	35	39	32	11	26	24	30	27	0,90	0,10
	12	28	18	27	22	35	31	36	18	33		
	30	17	28	12	20	32	28	13	33	19		
	34	41	7	31	34	25	20	25	20	22		
	23	25	20	22	14	15	17	8	24	26		
23	35	30	18	41	23	30	17	34	17	28	0,99	0,01
	12	25	22	28	30	18	23	20	26	16		
	28	11	20	22	29	21	16	26	10	25		
	7	24	25	24	26	29	26	15	31	9		
	24	21	14	8	32	21	33	14	38	19		

Варіант	Результати спостережень										γ	α
24	31	14	23	22	17	19	21	18	16	23	0,95	0,05
	28	20	5	8	26	7	25	24	23	12		
	14	18	26	25	24	28	22	21	14	25		
	16	21	22	10	30	11	10	30	16	29		
	13	23	33	14	12	30	12	32	26	25		
25	9	22	12	13	8	29	6	26	20	21	0,90	0,10
	19	18	11	21	19	12	20	20	24	11		
	38	37	27	16	21	36	22	23	18	20		
	25	37	34	15	32	23	16	16	14	24		
	20	12	21	34	17	15	21	28	25	23		
26	27	26	27	25	31	30	37	17	19	28	0,99	0,01
	24	23	27	22	26	25	17	19	25	16		
	30	23	29	22	21	23	25	32	10	31		
	29	27	21	23	12	11	27	13	33	26		
	27	25	28	36	34	33	28	21	19	16		
27	22	21	18	26	30	26	10	17	16	38	0,95	0,05
	15	37	36	20	22	21	29	20	28	21		
	13	12	22	28	21	10	32	25	26	20		
	11	9	22	6	22	24	17	5	22	25		
	20	27	22	16	24	23	22	13	18	23		
28	26	30	25	14	13	12	11	29	27	28	0,90	0,10
	21	18	30	29	28	24	26	21	22	15		
	27	19	14	24	28	23	7	32	28	26		
	25	20	15	36	30	33	11	26	9	28		
	15	31	24	28	20	28	27	26	25	20		
29	42	19	26	27	25	28	22	36	14	28	0,99	0,01
	26	16	28	31	24	18	29	22	26	17		
	21	23	24	25	17	18	28	11	12	16		
	36	16	35	25	28	33	21	38	28	21		
	16	20	26	29	32	34	14	28	20	28		

Варіант	Результати спостережень										γ	α
30	17	18	27	37	29	16	17	33	26	14	0,95	0,10
	15	16	25	27	33	27	29	31	24	29		
	22	23	30	18	29	21	32	30	25	29		
	11	39	30	26	20	36	21	28	28	23		
	28	22	24	25	32	30	22	25	36	30		
31	19	27	18	17	19	37	26	19	17	8	0,95	0,05
	14	35	29	12	16	25	24	19	30	17		
	10	22	25	16	12	8	35	22	10	11		
	30	24	16	10	21	22	15	28	21	8		
	9	34	15	8	20	14	24	20	33	14		
32	15	34	32	36	29	8	23	21	27	24	0,99	0,01
	9	25	15	24	19	32	28	33	15	30		
	27	14	25	9	17	19	25	10	30	16		
	31	38	4	28	31	22	17	22	17	19		
	20	22	17	19	11	12	14	5	21	23		
33	25	14	31	14	27	20	38	15	27	32	0,95	0,05
	13	23	17	20	15	27	25	19	22	9		
	22	7	23	13	18	26	19	17	8	25		
	6	28	12	23	26	23	21	22	21	4		
	16	35	11	30	18	29	5	11	18	21		
34	20	27	25	22	21	23	27	26	35	18	0,90	0,10
	27	16	29	28	30	10	9	7	32	24		
	18	29	26	25	27	31	30	29	18	22		
	20	33	14	34	32	13	25	13	20	25		
	30	29	16	36	15	33	37	18	17	27		
35	21	22	4	26	9	30	13	14	10	23	0,95	0,05
	25	12	21	21	20	13	12	22	20	19		
	19	21	20	21	22	37	28	17	39	38		
	15	25	17	17	33	24	35	16	26	38		
	26	24	22	29	18	16	22	35	21	13		

Варіант	Результати спостережень										γ	α
36	19	27	18	17	19	37	26	19	17	8	0,9	0,1
	14	35	29	12	16	25	24	19	30	17		
	10	22	25	16	12	8	35	22	10	11		
	30	24	16	10	21	22	15	28	21	8		
	9	34	15	8	20	14	24	20	33	14		
37	15	34	32	36	29	8	23	21	27	24	0,9	0,1
	9	25	15	24	19	32	28	33	15	30		
	27	14	25	9	17	19	25	10	30	16		
	31	38	4	28	31	22	17	22	17	19		
	20	22	17	19	11	12	14	5	21	23		
38	25	14	31	14	27	20	38	15	27	32	0,99	0,01
	13	23	17	20	15	27	25	19	22	9		
	22	7	23	13	18	26	19	17	8	25		
	6	28	12	23	26	23	21	22	21	4		
	16	35	11	30	18	29	5	11	18	21		
39	20	27	25	22	21	23	27	26	35	18	0,99	0,01
	27	16	29	28	30	10	9	7	32	24		
	18	29	26	25	27	31	30	29	18	22		
	20	33	14	34	32	13	25	13	20	25		
	30	29	16	36	15	33	37	18	17	27		
40	21	22	4	26	9	30	13	14	10	23	0,95	0,05
	25	12	21	21	20	13	12	22	20	19		
	19	21	20	21	22	37	28	17	39	38		
	15	25	17	17	33	24	35	16	26	38		
	26	24	22	29	18	16	22	35	21	13		

Таблиця А.2. Варіанти завдань для задачі 2 Частини 1

Варіант	Вихідні дані										
1	x_i	14	20	25	27	30	26	24	19	13	10
	y_i	12	21	24	25	32	27	23	17	11	8
2	x_i	15	20	27	31	38	29	25	18	12	9
	y_i	16	22	26	32	36	33	27	20	10	7
3	x_i	24	29	27	50	19	40	32	36	41	36
	y_i	27	30	25	52	23	36	33	35	44	38
4	x_i	13	18	23	45	50	42	32	21	16	9
	y_i	15	20	21	40	51	41	30	23	14	10
5	x_i	28	32	27	54	38	32	24	18	15	12
	y_i	25	31	29	52	42	30	20	19	13	14
6	x_i	12	18	24	38	50	33	32	26	19	5
	y_i	16	21	23	36	52	40	30	22	16	9
7	x_i	26	31	29	51	21	41	33	37	43	39
	y_i	29	32	27	53	25	37	34	36	43	41
8	x_i	22	27	25	47	27	30	22	19	13	10
	y_i	25	28	23	49	31	26	20	17	12	9
9	x_i	46	48	57	75	82	89	74	62	50	44
	y_i	51	56	61	69	76	91	82	60	45	42
10	x_i	39	43	37	33	40	20	50	29	30	26
	y_i	40	46	36	34	37	25	53	27	32	29
11	x_i	8	9	12	19	32	27	22	34	14	16
	y_i	5	13	10	14	30	31	24	28	11	12
12	x_i	10	12	18	24	38	45	32	25	18	7
	y_i	8	15	20	23	34	42	35	21	14	10
13	x_i	9	13	19	31	42	54	40	33	21	15
	y_i	11	15	22	29	37	49	35	30	23	13

Варіант	Вихідні дані										
14	x_i	18	22	32	40	49	57	43	26	24	19
	y_i	20	25	31	42	48	59	45	29	22	17
15	x_i	10	9	13	16	21	29	38	45	30	23
	y_i	6	8	15	19	26	32	37	42	33	24
16	x_i	8	12	20	27	34	40	56	48	32	18
	y_i	9	14	19	25	36	45	52	43	31	19
17	x_i	14	21	29	31	46	54	40	30	22	15
	y_i	15	24	32	38	45	52	37	28	21	13
18	x_i	12	19	25	32	48	58	54	47	39	24
	y_i	13	24	30	39	49	56	63	51	38	20
19	x_i	6	10	17	25	35	48	41	33	20	14
	y_i	7	12	16	28	40	50	39	28	16	10
20	x_i	13	21	39	46	54	67	49	38	27	19
	y_i	18	24	35	43	51	62	53	44	32	18
21	x_i	21	28	37	45	56	63	52	42	31	23
	y_i	24	30	36	49	54	61	50	41	30	20
22	x_i	17	15	23	37	46	58	51	39	28	14
	y_i	23	22	29	35	44	60	52	41	32	15
23	x_i	19	20	31	43	56	48	39	28	18	12
	y_i	16	18	32	44	52	47	40	33	24	17
24	x_i	4	9	15	24	32	43	51	38	26	14
	y_i	7	11	19	23	30	39	47	31	25	17
25	x_i	3	10	17	25	34	41	50	34	28	19
	y_i	5	13	16	24	36	44	52	33	26	20
26	x_i	13	19	20	27	25	33	18	21	12	22
	y_i	16	21	18	23	29	36	22	14	17	24
27	x_i	11	12	14	19	23	29	28	30	20	18
	y_i	15	9	21	22	27	26	32	25	24	23

Варіант	Вихідні дані										
28	x_i	31	29	33	35	39	38	41	37	44	48
	y_i	33	34	30	37	36	42	43	35	40	46
29	x_i	44	42	49	41	39	43	38	36	45	32
	y_i	48	45	46	47	42	40	43	39	49	37
30	x_i	21	17	22	25	29	26	27	30	33	35
	y_i	25	15	26	23	31	21	34	32	36	39
31	x_i	14	20	25	27	30	26	24	19	13	10
	y_i	12	21	24	25	32	27	23	17	11	8
32	x_i	15	20	27	31	38	29	25	18	12	9
	y_i	16	22	26	32	36	33	27	20	10	7
33	x_i	24	29	27	50	19	40	32	36	41	36
	y_i	27	30	25	52	23	36	33	35	44	38
34	x_i	13	18	23	45	50	42	32	21	16	9
	y_i	15	20	21	40	51	41	30	23	14	10
35	x_i	28	32	27	54	38	32	24	18	15	12
	y_i	25	31	29	52	42	30	20	19	13	14

Таблиця А.3. Варіанти завдань для задачі 2 Частини 1

Варіант	Вихідні дані							
1	x_i	8,5	9,0	8,7	9,1	9,5		
	y_i	9,3	8,6	9,0	9,2			
2	x_i	7,4	7,9	8,1	8,4	8,0	7,6	
	y_i	8,2	7,5	8,0	8,3	7,8		
3	x_i	10,2	9,8	10,0	9,6	10,5	10,3	10,1
	y_i	9,9	10,1	10,4	9,5	10,2	10,5	
4	x_i	4,1	4,6	4,9	5,3	5,7		
	y_i	4,7	4,0	4,4	4,8			
5	x_i	9,6	9,1	9,9	8,9	9,8	9,2	
	y_i	9,0	9,5	9,6	9,4	9,3		
6	x_i	15,1	14,8	15,3	14,7	15,2	14,9	15,4
	y_i	14,6	15,0	14,9	14,5	15,4	15,2	
7	x_i	6,9	7,3	7,1	6,7	7,2		
	y_i	7,2	7,0	6,8	6,9			
8	x_i	21,3	21,0	21,4	21,5	21,2	20,8	
	y_i	21,2	20,9	21,3	21,6	21,1		
9	x_i	3,9	3,7	4,2	3,8	3,6	4,1	4,3
	y_i	4,4	4,0	4,1	3,9	3,7	3,8	
10	x_i	17,5	17,4	17,7	17,2	17,1	17,3	
	y_i	18,0	17,8	17,6	17,3	17,0		
11	x_i	30,2	30,5	29,8	30,6	30,4		
	y_i	29,7	30,3	29,9	30,2			
12	x_i	2,8	3,0	3,2	2,9	2,7	3,3	3,4
	y_i	2,6	2,9	3,1	2,7	2,8	3,0	
13	x_i	13,4	13,6	13,2	13,7	13,1	13,0	
	y_i	13,2	13,5	13,1	13,4	13,3		

Варіант	Вихідні дані							
14	x_i	40,0	40,2	39,8	39,7	40,1		
	y_i	39,9	40,1	39,6	39,8			
15	x_i	5,6	5,4	5,3	5,7	5,8	5,2	5,0
	y_i	5,5	5,2	5,1	5,6	5,9	5,3	
16	x_i	12,8	12,6	13,1	12,5	13,0	12,4	
	y_i	12,3	12,2	12,9	12,7	13,1		
17	x_i	25,4	25,3	25,0	25,1	25,6		
	y_i	25,2	25,0	25,1	24,8			
18	x_i	6,1	6,4	6,2	6,5	5,8	6,0	6,3
	y_i	5,9	6,3	6,0	6,4	5,7	5,8	
19	x_i	11,9	11,7	12,0	12,4	11,5	12,2	
	y_i	11,8	11,5	11,9	12,5	11,3		
20	x_i	28,4	28,0	28,2	28,5	28,1		
	y_i	28,2	27,8	28,0	28,3			
21	x_i	1,83	1,79	1,85	1,76	1,86	1,78	1,84
	y_i	1,80	1,78	1,83	1,79	1,85	1,84	
22	x_i	8,4	8,0	7,8	8,2	8,1	8,3	
	y_i	8,2	7,7	7,9	8,3	8,4		
23	x_i	16,7	16,9	17,0	17,1	16,6		
	y_i	16,5	16,6	16,8	17,2			
24	x_i	9,6	9,2	9,8	9,5	9,7	9,9	9,4
	y_i	9,3	9,1	9,5	9,6	9,8	9,7	
25	x_i	5,2	4,8	4,7	5,3	4,9	5,1	
	y_i	5,3	4,9	4,6	5,0	4,8		
26	x_i	4,9	4,7	5,1	5,2	4,6	5,3	4,8
	y_i	4,7	4,5	5,0	4,9	4,8	5,1	
27	x_i	10,6	10,7	10,4	10,8	10,5	10,3	
	y_i	10,8	10,5	10,2	10,7	10,4		

Варіант	Вихідні дані							
28	x_i	8,1	7,9	8,2	7,8	8,3	8,0	7,7
	y_i	8,0	7,7	8,3	7,9	8,1	7,8	
29	x_i	3,3	3,4	3,1	3,5	3,0	3,2	
	y_i	3,1	3,2	3,0	3,3	2,8		
30	x_i	2,7	2,6	2,5	2,9	3,1	3,0	3,2
	y_i	2,4	2,8	2,7	2,6	2,9	2,5	

Додаток Б. Завдання до другої частини РР

(кореляційні таблиці)

№ 1

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14	14 - 16
8 - 12	2	5				
12 - 16		6	3			
16 - 20			2	10	4	
20 - 24			1	5	3	
24 - 28				2	6	4

№ 2

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	9 - 11	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21
18 - 22	1	3				
22 - 26		5	4			
26 - 30			6	20	3	
30 - 34			2	10	4	
34 - 38				5	7	2

№ 3

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25	25 - 29
22 - 28	1	5				
28 - 34		6	2			
34 - 40			7	15	3	
40 - 46			3	8	6	
46 - 52				4	5	2

№ 4

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18	18 - 20	20 - 22
64 - 70	3	2				
70 - 76	1	2		3		
76 - 82		4	12	5		
82 - 88			7	4	6	
88 - 94			2		4	1

№ 5

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	15 - 19	19 - 23	23 - 27	27 - 31	31 - 35	35 - 39
20 - 30	3	4				
30 - 40		5	6			
40 - 50			7	30	2	
50 - 60			5	10	4	
60 - 70				3	8	2

№ 6

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	7 - 13	13 - 19	19 - 25	25 - 31	31 - 37	37 - 43
12 - 20	4	2				
20 - 28		5	3			
28 - 36			6	20	6	
36 - 44			2	7	5	
44 - 52				3	7	4

№ 7

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	23 - 27	27 - 31	31 - 35	35 - 39	39 - 43	43 - 47
33 - 43	2	3				
43 - 53		4	5			
53 - 63			8	40	6	
63 - 73			2	6	4	
73 - 83				3	7	2

№ 8

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	18 - 22	22 - 26	26 - 30	30 - 34	34 - 38	38 - 42
20 - 30	1	4				
30 - 40		6	3			
40 - 50			6	45	5	
50 - 60			2	10	6	
60 - 70				4	7	3

№ 9

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	8 - 12	12 - 16	16 - 20	20 - 24	24 - 28	28 - 32
10 - 20	5	7				
20 - 30		10	13			
30 - 40			20	30	6	
40 - 50			8	12	10	2
50 - 60				8	4	3

№ 10

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	2 - 8	8 - 14	14 - 20	20 - 26	26 - 32	32 - 38
5 - 15	2	3				
15 - 25		4	1			
25 - 35			6	30	7	
35 - 45			5	12	3	
45 - 55				6	9	2

№ 11

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
12 - 18	4	1				
18 - 24		2	1			
24 - 30		6	20	5		
30 - 36			3	7	2	
36 - 42					1	2

№ 12

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85
30 - 40	3	1				
40 - 50		2	3			
50 - 60			5	20	7	
60 - 70			6	8	4	
70 - 80				2	5	3

№ 13

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	3 - 9	9 - 15	15 - 21	21 - 27	27 - 33	33 - 39
11 - 21	3	6				
21 - 31		9	11			
31 - 41			4	25	6	
41 - 51			4	10	5	
51 - 61				1	3	2

14

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	7 - 11	11 - 15	15 - 19	19 - 23	23 - 27	27 - 31
21 - 29	1	4				
29 - 37	1	2	3			
37 - 45			7	30	3	
45 - 53			4	10	6	
53 - 61				5	4	2

№ 15

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22	22 - 26	26 - 30
16 - 24	3	3				
24 - 32		6	5			
32 - 40			8	35	4	
40 - 48				10	6	1
48 - 56					7	4

№ 16

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	4 - 14	14 - 24	24 - 34	34 - 44	44 - 54	54 - 64
16 - 26	5	4				
26 - 36	1	3	6			
36 - 46			5	45	5	
46 - 56			2	8	7	
56 - 66				4	8	2

№ 17

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
25 - 35	2	1				
35 - 45	1	2	3			
45 - 55			4	20	5	
55 - 65			2	10	8	
65 - 75				3	7	1

№ 18

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	22 - 28	28 - 34	34 - 40	40 - 46	46 - 52	52 - 58
31 - 39	4	2				
39 - 47		2	3	1		
47 - 55			5	50	6	
55 - 63				10	8	1
63 - 71					2	3

№ 19

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25	25 - 29	29 - 33
18 - 28	2	3	1			
28 - 38		2	4			
38 - 48			6	35	8	
48 - 58			2	9	5	
58 - 68					6	4

№ 20

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	19 - 25	25 - 31	31 - 37	37 - 43	43 - 49	49 - 55
24 - 34	2	2				
34 - 44		4	5			
44 - 54			10	45	7	
54 - 64			3	10	6	
64 - 74					2	5

№ 21

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	4 - 10	10 - 16	16 - 22	22 - 28	28 - 34	34 - 40
17 - 27	2	4				
27 - 37		6	2	1		
37 - 47			3	35	2	
47 - 57			1	10	6	
57 - 67				4	2	4

№ 22

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	1 - 9	9 - 17	17 - 25	25 - 33	33 - 41	41 - 49
13 - 23	5	7				
23 - 33		6	8			
33 - 43			4	40	5	
43 - 53			6	12	2	
53 - 63				1	3	2

№ 23

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11	11 - 13	13 - 15
10 - 18	3	6				
18 - 26		1	4			
26 - 34			5	25	8	
34 - 42			2	10	3	
42 - 50				5	2	7

№ 24

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	11 - 17	17 - 23	23 - 29	29 - 35	35 - 41	41 - 47
19 - 29	2	5				
29 - 39		5	15			
39 - 49			6	30	4	
49 - 59			4	12	6	
59 - 69				1	4	3

№25

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	35 – 39	39 – 43	43 – 47	47 – 51	51 – 55	55 – 59
42 – 52	4	2				
52 – 62		6	4			
62 – 72			6	45	5	
72 – 82			5	15	8	
82 – 92					2	4

№26

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	14 – 20	20 – 26	26 – 32	32 – 38	38 – 44	44 – 50
22 – 32	4	4				
32 – 42		6	5			
42 – 52			8	40	2	
52 – 62			4	10	6	
62 – 72				3	7	2

№27

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	2 – 6	6 – 10	10 – 14	14 – 18	18 – 22	22 – 26
11 – 19	2	5				
19 – 27		7	3			
27 – 35			4	40	2	
35 – 43			1	10	6	
43 – 51				5	7	3

№28

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	25 – 29	29 – 33	33 – 37	37 – 41	41 – 45	45 – 49
35 – 45	4	2				
45 – 55		5	2			
55 – 65			6	43	5	
65 – 75			1	7	3	
75 – 85				2	2	4

№29

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	19 – 21	21 – 23	23 – 25	25 – 27	27 – 29	29 – 31
20 – 28	3	5				
28 – 36		6	2			
36 – 44			3	30	4	
44 – 50			5	8	6	
50 – 56				2	5	3

№30

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	5 – 11	11 – 17	17 – 23	23 – 29	29 – 35	35 – 41
21 – 31	3	4				
31 – 41	1	6	2			
41 – 51			3	45	2	
51 – 61			1	8	6	
61 – 71				7	2	3

№ 31

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14	14 - 16
8 - 12	2	5				
12 - 16		6	3			
16 - 20			2	10	4	
20 - 24			1	5	3	
24 - 28				2	6	4

№ 32

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	9 - 11	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21
18 - 22	1	3				
22 - 26		5	4			
26 - 30			6	20	3	
30 - 34			2	10	4	
34 - 38				5	7	2

№ 33

Y X	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25	25 - 29
22 - 28	1	5				
28 - 34		6	2			
34 - 40			7	15	3	
40 - 46			3	8	6	
46 - 52				4	5	2

№ 34

Y X	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18	18 - 20	20 - 22
64 - 70	3	2				
70 - 76	1	2		3		
76 - 82		4	12	5		
82 - 88			7	4	6	
88 - 94			2		4	1

№ 35

Y X	15 - 19	19 - 23	23 - 27	27 - 31	31 - 35	35 - 39
20 - 30	3	4				
30 - 40		5	6			
40 - 50			7	30	2	
50 - 60			5	10	4	
60 - 70				3	8	2

№ 36

Y X	7 - 13	13 - 19	19 - 25	25 - 31	31 - 37	37 - 43
12 - 20	4	2				
20 - 28		5	3			
28 - 36			6	20	6	
36 - 44			2	7	5	
44 - 52				3	7	4

№ 37

Y X	23 - 27	27 - 31	31 - 35	35 - 39	39 - 43	43 - 47
33 - 43	2	3				
43 - 53		4	5			
53 - 63			8	40	6	
63 - 73			2	6	4	
73 - 83				3	7	2

№ 38

Y X	18 - 22	22 - 26	26 - 30	30 - 34	34 - 38	38 - 42
20 - 30	1	4				
30 - 40		6	3			
40 - 50			6	45	5	
50 - 60			2	10	6	
60 - 70				4	7	3

Додаток В. Завдання до третьої частини РР

Таблиця В.1

Варіант	Експериментальні результати									
1	X	400	450	500	550	600	650	700	750	800
	Y	112,6	122,8	132,4	141,3	149,6	157,3	164,5	171,2	177,3
2	X	1,1	1,25	1,4	1,55	1,7	1,85	2	2,15	2,3
	Y	0,3001	0,3021	0,304	0,305	0,3061	0,307	0,308	0,3083	0,3089
3	X	0,7	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
	Y	0,303	0,239	0,195	0,167	0,144	0,129	0,115	0,103	0,096
4	X	0,2	1,1	2	2,9	3,8	4,7	5,6	6,5	7,4
	Y	0,92	4,25	7,28	10,15	13,01	15,6	18,5	21,01	23,7
5	X	0,65	1,05	1,45	1,85	2,25	2,65	3,05	3,45	3,85
	Y	1,68	2,52	3,1	3,51	3,9	4,14	4,4	4,6	4,8
6	X	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20	22,5
	Y	3,81	5,51	6,54	7,28	7,8	8,27	8,64	9	9,25
7	X	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75
	Y	4,2	6	8,2	10,7	13,7	17	20,7	24,7	29,2
8	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Y	0,1	3,01	4,71	5,92	6,86	7,63	8,27	8,83	9,33
9	X	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
	Y	4,83	5,21	5,57	5,91	6,29	6,63	7,03	7,37	7,71
10	X	0,7	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
	Y	0,8	1,9	3,7	6	9,1	13	17,5	23,1	29,4
11	X	1,1	1,5	1,9	2,3	2,7	3,1	3,5	3,9	4,3
	Y	2,3	3,5	4,9	6,5	8	9,8	11,5	13,5	15,4
12	X	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2	2,3	2,6
	Y	0,18	0,16	0,146	0,132	0,122	0,112	0,1	0,098	0,092
13	X	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
	Y	11,02	12,45	13,75	14,8	15,71	16,55	17,35	18,05	18,69
14	X	0,95	1,45	1,95	2,45	2,95	3,45	3,95	4,45	4,95
	Y	1,33	1,67	2,13	2,69	3,41	4,3	5,44	6,9	8,7
15	X	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25
	Y	28,5	37,1	50,4	69,1	92,5	120,9	154,6	193,1	236,5

Варіант	Експериментальні результати									
16	X	0,5	1,1	1,7	2,3	2,9	3,5	4,1	4,7	5,3
	Y	0,175	0,27	0,31	0,347	0,367	0,383	0,394	0,403	0,409
17	X	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25
	Y	35,1	20,9	16,4	14	12,5	11,6	11	10,5	10,1
18	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Y	24,1	55,9	104	168,1	247,8	344,1	455,9	584,1	728
19	X	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	Y	6,3	8,37	9,6	10,44	11,12	11,68	12,14	12,53	12,9
20	X	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4
	Y	1,662	1,315	1,117	0,972	0,875	0,801	0,742	0,699	0,658
21	X	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3	3,3
	Y	2,06	4,63	6,64	8,3	9,69	10,85	11,95	12,9	13,75
22	X	350	400	450	500	550	600	650	700	750
	Y	112,7	125,3	137,2	148,4	158,9	168,7	178	186,4	194,5
23	X	2,5	3,3	4,1	4,9	5,7	6,5	7,3	8,1	8,9
	Y	78,4	124,5	180,5	247	323,4	410,9	507,4	615	732,3
24	X	4	4,25	4,5	4,75	5	5,25	5,5	5,75	6
	Y	53,2	65,4	80,7	99,2	122,4	150,5	185,4	228,5	281,1
25	X	0,95	2,5	4,05	5,6	7,15	8,7	10,25	11,8	13,35
	Y	4,99	10,33	13,86	16,27	18,1	19,51	20,6	21,53	22,28
26	X	1,5	2,1	2,7	3,3	3,9	4,5	5,1	5,7	6,3
	Y	2,92	3,56	4,09	4,6	5,06	5,51	5,91	6,32	6,68
27	X	0,6	1,8	3	4,2	5,4	6,6	7,8	9	10,2
	Y	3,36	8,26	11,6	14,12	16,02	17,52	18,71	19,76	20,57
28	X	0,74	3,26	5,78	8,3	10,82	13,34	15,86	18,38	20,9
	Y	4,03	12,24	16,51	19,19	20,97	22,25	23,24	24,03	24,62
29	X	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
	Y	1,55	2,701	3,998	5,43	7,01	8,73	10,61	12,63	14,78
30	X	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2	2,3	2,6
	Y	0,036	0,081	0,118	0,146	0,17	0,192	0,211	0,226	0,24

Додаток Г. Зразок титульного аркуша

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

*Кафедра технології неорганічних речовин, водоочищення та загальної
хімічної технології*

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

**з дисципліни Методи прикладної математики для рішення
інженерних задач хімічної технології**

тема: *Математична обробка експериментальних даних*

Виконала:

Студентка II курсу ХТФ

гр. ХН-11

Ільїна І.С.

Перевірив:

доц. Сангінова О.В.

Київ 2022

Додаток Д. Таблиця значень функції Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.37	0.1443	0.75	0.2734	1.13	0.3708
0.01	0.0040	0.38	0.1480	0.76	0.2764	1.14	0.3729
0.02	0.0080	0.40	0.1554	0.77	0.2794	1.15	0.3749
0.03	0.0120	0.41	0.1591	0.78	0.2823	1.16	0.3770
0.04	0.0160	0.42	0.1628	0.80	0.2881	1.17	0.3790
0.05	0.0199	0.43	0.1664	0.81	0.2910	1.18	0.3810
0.06	0.0239	0.44	0.1700	0.82	0.2939	1.19	0.3830
0.07	0.0279	0.45	0.1736	0.83	0.2967	1.20	0.3849
0.08	0.0319	0.46	0.1772	0.84	0.2995	1.21	0.3869
0.09	0.0359	0.47	0.1808	0.85	0.3023	1.22	0.3883
0.10	0.0398	0.48	0.1844	0.86	0.3051	1.23	0.3907
0.11	0.0438	0.49	0.1879	0.87	0.3078	1.24	0.3925
0.12	0.0478	0.50	0.1915	0.88	0.3106	1.25	0.3944
0.13	0.0517	0.51	0.1950	0.89	0.3133	1.26	0.3962
0.14	0.0557	0.52	0.1985	0.90	0.3159	1.27	0.3980
0.15	0.0596	0.53	0.2019	0.91	0.3186	1.28	0.3997
0.16	0.0636	0.54	0.2054	0.92	0.3212	1.29	0.4015
0.17	0.0675	0.55	0.2088	0.93	0.3238	1.30	0.4032
0.18	0.0714	0.56	0.2123	0.94	0.3264	1.31	0.4049
0.19	0.0753	0.57	0.2157	0.95	0.3289	1.32	0.4066
0.20	0.0793	0.58	0.2190	0.96	0.3315	1.33	0.4082
0.21	0.0832	0.59	0.2224	0.97	0.3340	1.34	0.4099
0.22	0.0871	0.60	0.2257	0.98	0.3365	1.35	0.4115
0.23	0.0910	0.61	0.2291	0.99	0.3389	1.36	0.4131
0.24	0.0948	0.62	0.2324	1.00	0.3413	1.37	0.4147

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.25	0.0987	0.63	0.2357	1.01	0.3438	1.38	0.4162
0.26	0.1026	0.64	0.2389	1.02	0.3461	1.39	0.4177
0.27	0.1064	0.65	0.2422	1.03	0.3485	1.40	0.4192
0.28	0.1103	0.66	0.2454	1.04	0.3508	1.41	0.4207
0.29	0.1141	0.67	0.2486	1.05	0.3531	1.42	0.4222
0.30	0.1179	0.68	0.2517	1.06	0.3554	1.43	0.4236
0.31	0.1217	0.69	0.2549	1.07	0.3577	1.44	0.4251
0.32	0.1255	0.70	0.2580	1.08	0.3599	1.45	0.4265
0.33	0.1293	0.71	0.2611	1.09	0.3621	1.46	0.4279
0.34	0.1331	0.72	0.2642	1.10	0.3643	1.47	0.4292
0.35	0.1368	0.73	0.2673	1.11	0.3665	1.48	0.4306
0.36	0.1406	0.74	0.2703	1.12	0.3686	1.49	0.4319
1.50	0.4332	1.77	0.4616	2.08	0.4812	2.62	0.4956
1.51	0.4345	1.78	0.4625	2.10	0.4821	2.64	0.4959
1.52	0.4357	1.79	0.4633	2.12	0.4830	2.66	0.4961
1.53	0.4370	1.80	0.4641	2.14	0.4838	2.68	0.4963
1.54	0.4382	1.81	0.4649	2.16	0.4846	2.70	0.4965
1.55	0.4394	1.82	0.4656	2.18	0.4854	2.72	0.4967
1.56	0.4406	1.83	0.4664	2.20	0.4861	2.74	0.4969
1.57	0.4418	1.84	0.4671	2.22	0.4868	2.76	0.4971
1.58	0.4429	1.85	0.4678	2.24	0.4875	2.78	0.4973
1.59	0.4441	1.86	0.4686	2.26	0.4881	2.80	0.4974
1.60	0.4452	1.87	0.4693	2.28	0.4887	2.82	0.4976
1.61	0.4463	1.88	0.4699	2.30	0.4893	2.84	0.4977
1.62	0.4474	1.89	0.4706	2.32	0.4898	2.86	0.4979
1.63	0.4484	1.90	0.4713	2.34	0.4904	2.88	0.4980
1.64	0.4495	1.91	0.4719	2.36	0.4909	2.90	0.4981
1.65	0.4505	1.92	0.4726	2.38	0.4913	2.92	0.4982

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.66	0.4515	1.93	0.4732	2.40	0.4918	2.94	0.4984
1.67	0.4525	1.94	0.4738	2.42	0.4922	2.96	0.4985
1.68	0.4535	1.95	0.4744	2.44	0.4927	2.98	0.4986
1.69	0.4545	1.96	0.4750	2.46	0.4931	3.00	0.49865
1.70	0.4554	1.97	0.4756	2.48	0.4934	3.20	0.49931
1.71	0.4564	1.98	0.4761	2.50	0.4938	3.40	0.49966
1.72	0.4573	1.99	0.4767	2.52	0.4941	3.60	0.499841
1.73	0.4582	2.00	0.4772	2.54	0.4945	3.80	0.499928
1.74	0.4591	2.02	0.4783	2.56	0.4948	4.00	0.499968
1.75	0.4599	2.04	0.4793	2.58	0.4951	4.50	0.499997
1.76	0.4608	2.06	0.4803	2.60	0.4953	5.00	0.499997

Додаток Е. Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів свободи	Рівень значущості					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,9	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5

Число ступенів свободи	Рівень значущості					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Додаток Ж. Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61
6	2,57	4,03	6,86
7	2,45	3,71	5,96
8	2,37	3,50	5,41
9	2,31	3,36	5,04
10	2,26	3,25	4,78
11	2,23	3,17	4,59
12	2,20	3,11	4,44
13	2,18	3,06	4,32
14	2,16	3,01	4,22
15	2,15	2,98	4,14
16	2,13	2,95	4,07
17	2,12	2,92	4,02
18	2,11	2,90	3,97
19	2,10	2,88	3,92
20	2,093	2,861	3,883
25	2,064	2,797	3,745
30	2,045	2,756	3,659
35	2,032	2,720	3,600
40	2,023	2,708	3,558
45	2,016	2,692	3,527
50	2,009	2,679	3,502
60	2,001	2,662	3,464
70	1,996	2,649	3,439
80	1,001	2,640	3,418

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
90	1,987	2,633	3,403
100	1,984	2,627	3,392
120	1,980	2,617	3,374
∞	1,960	2,576	3,291

Додаток К. Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0,22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
100	0,143	0,198	0,27
150	0,115	0,160	0,211
200	0,099	0,136	0,185
250	0,089	0,120	0,162

Додаток Л. Критичні точки розподілу Фішера-Снедекора

(k_1 – число ступенів свободи більшої дисперсії,
– число ступенів свободи меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0,01$												
$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Рівень значущості $\alpha = 0,05$												
$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Додаток М. Критичні точки розподілу Стюдента

Число ступенів свободи	Рівень значущості (двостороння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,087	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,087	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72

Число ступенів свободи	Рівень значущості (двостороння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,38	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005

Рівень значущості (одностороння критична область)