ПРО ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ЗВУЖЕННЯ БРОУНІВСЬКОГО ЛИСТА НА ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ КРИВУ

Н.В. КРУГЛОВА, О.О. ДИХОВИЧНИЙ

Означення 1 ([1])**.** Дійсне сепарабельне гауссівське поле $X(t_1, t_2)$ називається броунівським листом, якщо воно задовольняє такі умови:

(1) $X(0, t_2) = X(t_1, 0) = 0$ для довільних $t_1, t_2 \in [0, 1]$;
(2) $E[X(t_1, t_2)] = 0$ для довільних $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$;
(3) $E[X(t_1, t_2)X(s_1, s_2)] = \min\{t_1, s_1\} \min\{t_2, s_2\}$ для довільних (t_1, t_2), $(s_1, s_2) \in [0, 1]^2$.

Розглянемо звуження $Y(t)$ броунівського листа $X(t, y)$ на криву $y = e^{-\alpha t}$, де $a > 0$. Тоді $Y(t) = X(t, e^{-\alpha t})$. Дослідження розподілів функціоналів від процесу $Y(t)$ має практичне значення в багатьох прикладних науках. Наприклад, у фізиці процес $Y(t)$ описує коливання температури вздовж охолоджувальної поверхні, коли температура спадає експоненціально з часом. В матеріалознавстві цей процес може визначати розподіл мікродефектів вздовж поверхні, в якої з часом зменшується товщина (наприклад, внаслідок тертя). У фармокінетиці процес $Y(t)$ моделює флуктуації концентрації деякої речовини у тканинах з часом.

З [2] отримуємо, що процеси $Y(t)$ і $e^{-\alpha t}w(te^{\alpha t})$, де $w(t)$ — вінерівський процес, — стохастично еквівалентні. Розіб'ємо інтервал $[0; 1]$ на M рівних частин. Нехай $t_j = \frac{j}{M}$, $j = \overline{1, M-1}$, і

$$S_M(t_j) = e^{-\alpha t_j} \sum_{i=1}^{j} \eta_i \sqrt{t_i e^{\alpha t_i} - t_{i-1} e^{\alpha t_{i-1}}}, \tag{1}$$

де η_j, $j = \overline{1, M-1}$, — незалежні однаково розподілені стандартні гауссівські величини. Позначимо

$$S_M(t) = \sum_{j=1}^{M-1} I_{[t_j;t_{j+1})}(t) S_M(t_j), \tag{2}$$

де $I_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$

Теорема 1. *Процес $S_M(t)$ збігається за розподілом до процесу $Y(t)$.*

Використаємо алгоритм, представлений в [3], та формули (1)–(2) і згенеруємо 2000 реалізацій процесу. На рисунку 1 зображено графіки емпіричних та теоретичних характеристик процесу.

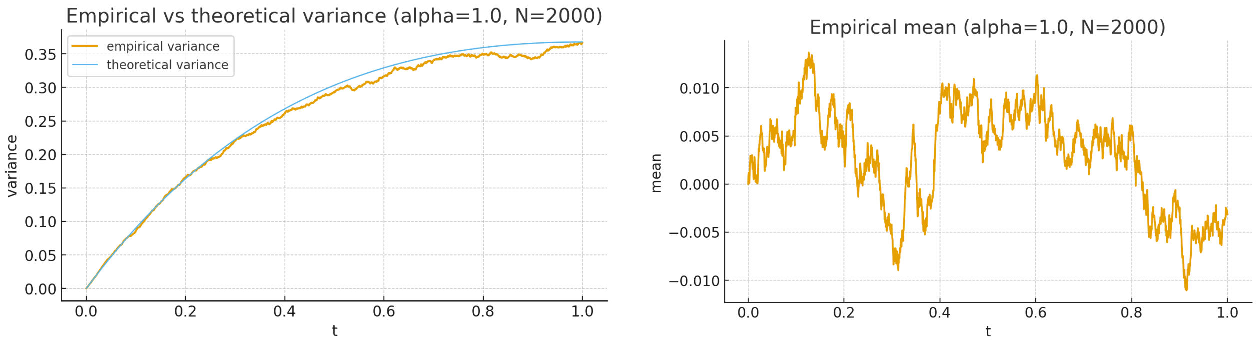

Рис. 1. Теоретичні та емпіричні дисперсія і мат. сподівання

Для випадкового процесу $Y(t)$, $t \in [0,T]$, будемо позначати $\|Y(t)\|_{SP}$ норму в Гільбертовому просторі таку, що $\|Y(t)\|_{SP} = \sqrt{\int_0^T E[Y^2(t)]dt}$.

Теорема 2. *Нехай* $Y(t) = X(t, e^{-\alpha t})$, *де* $X(t,y)$ *— броунівський лист, а* $S_M(t)$ *задається формулами* (1), (2), *тоді*

$$\|Y(t) - S_M(t)\|_{SP} \sim \sqrt{\frac{e^a(1+a)}{2}}\frac{1}{\sqrt{M}} \quad \text{при } n \to \infty.$$

Література

[1] Yeh, J. *Wiener measure in a Space of Functions of Two Variables*//Transactions of the American Mathematical Society— 1960.— № 95.— P. 433-–450.

[2] Doob, L. *Heuristic approach to Kolmogorov-Smirnov theorems*// Ann. Math. Statist.— 1949.— № 20.— P. 393-403.

[3] Dykhovychnyi, O., Kruglova, N. *Simulation of a gaussian process with correlation function of a special form*//International conference"Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes dedicated to the 100th anniversary of II Gikhman— 2018.— P. 17-22.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: natahak@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.dyx@ukr.net