

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

**ТРИФАЗНІ КОЛА.
НЕСИНУСОЇДНІ РЕЖИМИ.
ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ.**

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальностей G3 (141) Електрична інженерія

Укладачі: Ю. В. Перетятко, Є. О. Троценко, М. А. Щерба

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2026

УДК 621.3 (075.8)
ББК 31.211я73
Т33

Укладачі: *Перетятко Юлія Вікторівна*, кандидат технічних наук, доцент
Троценко Євгеній Олександрович, кандидат технічних наук, доцент
Щерба Максим Анатолійович, доктор технічних наук, професор

Рецензент *Яндутьський О. С.*, доктор технічних наук, професор кафедри
автоматизації енергосистем, КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Бойко В. С.*, доктор технічних наук, професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 4 від 05.02.2026 р.)
за поданням вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики
(протокол № 6 від 29.12.2025 р.)*

Т33 Теоретичні основи електротехніки. Трифазні кола. Несинусоїдні режими. Перехідні процеси [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спец. G3 (141) «Електрична інженерія» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Ю. В. Перетятко, Є. О. Троценко, М. А. Щерба – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 272 с.

Навчальний посібник «Теоретичні основи електротехніки» присвячений вивченню теорії трифазних електричних кіл, аналізу несинусоїдних періодичних режимів та дослідженню перехідних процесів у лінійних електричних колах. Подано фундаментальні поняття, математичні моделі та методи аналізу, необхідні для вивчення усталених та перехідних електромагнітних процесів.

У виданні розглянуто принципи формування трифазних систем ЕРС, умови симетрії та природу несиметричних режимів, схеми з'єднання фаз, методи вимірювання потужності та особливості утворення обертового магнітного поля. Наведено теорію гармонійних складових і методи аналізу несинусоїдних процесів, включно з оцінюванням потужностей та показників якості електроенергії. Окремий розділ присвячено класичному методу аналізу перехідних процесів у колах першого та другого порядку.

Посібник розрахований на студентів бакалаврського рівня спеціальностей G3 (141) «Електрична інженерія» та може бути корисним студентам, які навчаються за спеціальністю G4 «Енерговиробництво» за спеціалізацією Відновлювані джерела енергії та гідроенергетика, аспірантам і фахівцям електротехнічного профілю.

УДК 621.3 (075.8)
ББК 31.211я73

Реєстр. № НП 24/25-148. Обсяг 12.3 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026

ЗМІСТ

Вступ	7
Розділ 1. Трифазні електричні кола	9
Тема 1.1. Вступ до теорії багатофазних систем та трифазних кіл	9
1.1.1. Принцип створення трифазної системи електрорушійних сил	9
1.1.2. Поняття про симетрію в трифазній системі	14
1.1.2.1. Симетричні системи ЕРС, напруг, струмів	14
1.1.2.2. Несиметричні системи ЕРС, напруг, струмів	18
1.1.2.3. Симетрія споживача та трифазного кола	20
1.1.3. Поняття про зрівноваженість багатофазної системи	21
Тема 1.2. Схеми з'єднання елементів трифазного кола	22
1.2.1. Трифазне коло при з'єднанні фаз джерела та споживача «зірка в зірку»	22
1.2.1.1. Створення з'єднання «зірка в зірку»	22
1.2.1.2. Основні терміни та позначення у трифазній системі з'єднання типу «зірка в зірку»	23
1.2.1.3. Основні співвідношення між лінійними та фазними величинами для симетричного трифазного кола при з'єднанні фаз «зірка в зірку»	26
1.2.2. Трифазне коло при з'єднанні фаз джерела та споживача «трикутник в трикутник»	30
1.2.2.1. Створення з'єднання «трикутник в трикутник»	30
1.2.2.2. Основні терміни та позначення у трифазній системі з'єднання типу «трикутник в трикутник»	32
1.2.2.3. Основні співвідношення між лінійними та фазними величинами при з'єднанні фаз «трикутник в трикутник»	33
1.2.3. Баланс потужностей в симетричних трифазних колах	36
1.2.4. Переваги застосування трифазних кіл	39
Тема 1.3. Методи аналізу трифазних кіл	39
1.3.1. Класичний підхід до аналізу трифазних кіл	39
1.3.1.1. Аналіз трифазного кола за наявності нейтрального проводу	40
1.3.1.2. Аналіз трифазного кола за наявності ідеального (без втрат) нейтрального проводу	48
1.3.1.3. Аналіз трифазного кола без нейтрального проводу	50

1.3.1.4. Аналіз трипровідного трифазного кола при з'єднанні фаз «зірка в зірку» за заданими лінійними напругами	56
1.3.1.5. Аналіз трифазного трипровідного кола при з'єднанні фаз «трикутник в трикутник»	57
1.3.1.6. Аналіз трифазних кіл з двома паралельно підключеними навантаженнями з різними способами з'єднання фаз	59
1.3.2. Особливості аналізу симетричних трифазних кіл	67
1.3.2.1. Аналіз симетричного трифазного чотирипровідного кола при з'єднанні фаз «зірка в зірку»	67
1.3.2.2. Аналіз симетричного трифазного трипровідного кола при з'єднанні фаз «зірка в зірку»	75
1.3.2.3. Аналіз симетричного трифазного трипровідного кола при з'єднанні фаз «трикутник в трикутник»	78
1.3.2.4. Аналіз симетричного трифазного кола з двома паралельно підключеними навантаженнями з різними способами з'єднання фаз	80
1.3.2.5 Характерні особливості симетричних трифазних кіл при з'єднанні фаз «зірка в зірку» без нейтрально проводу при аварійних режимах	87
1.3.3. Метод симетричних складових	91
1.3.3.1. Основні положення методу симетричних складових (Fortescue method)	91
1.3.3.2. Застосування методу до аналізу кіл з несиметричними навантаженнями	96
Тема 1.4. Потужність трифазного кола та її вимірювання	111
1.4.1. Аналітичне визначення потужності в трифазних колах	112
1.4.2. Вимірювання потужності в трифазних колах	115
1.4.2.1. Загальні принципи вимірювання потужності в трифазних колах	115
1.4.2.2. Вимірювання активної потужності в несиметричних трифазних колах	118
1.4.2.3. Особливості вимірювання активної потужності в симетричних трифазних колах	121
Тема 1.5. Обертове магнітне поле	132

Розділ 2. Несинусоїдні періодичні процеси в лінійних електричних колах	142
Тема 2.1. Вступ до теорії гармонійних спотворень	142
Тема 2.2. Подання несинусоїдних електричних величин	147
Тема 2.3. Залежність форми кривої струму від характеру навантаження при живленні від джерела несинусоїдної напруги	155
Тема 2.4. Аналіз лінійних електричних кіл з періодичними несинусоїдними джерелами енергії	159
2.4.1. Класичний метод аналізу кіл при дії джерел несинусоїдних сигналів	160
2.4.2. Діючі і середні значення періодичних несинусоїдних струмів і напруг	168
2.4.3. Проблеми оцінки величин потужності в електричних колах з періодичними несинусоїдними напругами та струмами	170
2.4.4. Резонанс в електричному колі з несинусоїдними струмами та напругами	174
2.4.5. Особливості поведінки гармонічних складових в трифазних колах	180
2.4.6. Показники якості електроенергії за гармонійних спотворень	199
Розділ 3. Перехідні процеси в лінійних електричних колах	204
Тема 3.1. Вступ до теорії аналізу перехідних процесів	204
3.1.1. Основні поняття та визначення	204
3.1.2. Закони комутації	205
3.1.3. Основи класичного методу аналізу перехідних процесів	208
Тема 3.2. Класичний метод аналізу перехідних процесів в колах першого порядку	215
3.2.1. Послідовність аналізу перехідних процесів в колах першого порядку класичним методом	215
3.2.2. Коротке замикання у контурі з котушкою індуктивності	218
3.2.3. Вмикання активно-індуктивного навантаження до джерела напруги постійного струму	224
3.2.4. Вмикання активно-індуктивного навантаження до джерела напруги синусоїдного струму	228
3.2.5. Коротке замикання у контурі з конденсатором	232
3.2.6. Вмикання конденсатора до джерела напруги постійного струму (заряд конденсатора)	236

3.2.7. Вмикання конденсатора до джерела напруги синусоїдного струму	240
Тема 3.3. Класичний метод аналізу перехідних процесів в колах другого порядку	245
3.3.1. Властивості коренів характеристичного рівняння в колах другого порядку	245
3.3.2. Розряд конденсатора на активно-індуктивне навантаження	249
3.3.2.1. Аперіодичний розряд конденсатора на активно-індуктивне навантаження	249
3.3.2.2. Граничний аперіодичний розряд конденсатора на активно-індуктивне навантаження	252
3.3.2.3. Коливальний розряд конденсатора на активно-індуктивне навантаження	253
3.3.3. Заряд конденсатора через активно-індуктивне навантаження від джерела постійної напруги	257
3.3.3.1. Аперіодичний заряд конденсатора через активно-індуктивне навантаження	259
3.3.3.2. Коливальний заряд конденсатора через активно-індуктивне навантаження	261
3.3.4. Послідовність аналізу перехідних процесів в колах другого порядку класичним методом	264

ВСТУП

Теоретичні основи електротехніки належать до базових дисциплін підготовки фахівців для вирішення задач електроенергетики, електротехніки та електромеханіки. Вони формують понятійний апарат, математичний інструментарій та фізичні уявлення, необхідні для аналізу електромагнітних процесів у електричних колах різного призначення. Запропонована друга частина курсу присвячена вивченню трифазних кіл, несинусоїдних режимів та перехідних процесів режимів, на яких ґрунтується робота сучасних електроенергетичних систем, електротехнічного обладнання та електромеханічних комплексів.

Матеріал курсу сформовано на унормованих визначеннях та законах електромагнітних явищ і охоплює питання побудови схем заміщення, аналізу топології електричних кіл, використання аналітичних, комплексних та векторних методів подання електричних величин. Значну увагу приділено дослідженню характерних електромагнітних режимів як у нормальних умовах роботи, так і за відхиленнях або аварійних станів.

Навчальний матеріал структуровано відповідно до силабусу навчальної компоненти «Теоретичні основи електротехніки. Частина 2» та орієнтовано на студентів першого (бакалаврського) рівня освіти спеціальностей G3 (141) – «Електрична інженерія» та G4 – «Енерговиробництво зі спеціалізацією Відновлювані джерела енергії та гідроенергетика». Представлений курс забезпечує системне формування компетентностей, необхідних для засвоєння фахових дисциплін та виконання інженерних задач у сфері генерації, передачі, розподілу та споживання електричної енергії.

Перший розділ присвячено трифазним електричним колам, які є основою побудови електроенергетичних систем. У ньому розглянуто принципи створення симетричних трифазних систем електрорушійних сил, поняття прямої, зворотної та нульової послідовностей, критерії симетрії та чинники виникнення несиметричних режимів. Детально аналізуються схеми з'єднання фаз, співвідношення між фазними та лінійними величинами, особливості вимірювання потужності в трифазних системах та формування обертового магнітного поля як фундаменту роботи більшості електричних машин.

Другий розділ присвячено теорії несинусоїдних періодичних процесів, що особливо актуально для сучасних електромереж, насичених перетворювальною та нелінійною технікою. Розглянуто гармонійний склад електричних величин, вплив характеру навантаження на форму струмів, методи визначення діючих

значень у несинусоїдних умовах, особливості оцінювання потужності та енергетичних показників, резонансні явища та параметри якості електричної енергії.

Третій розділ присвячено перехідним процесам у лінійних колах першого та другого порядку. Подано базові поняття, закони комутації, алгоритми класичного методу аналізу, а також розглянуто аперіодичні та коливальні режими, часові константи та динамічні характеристики електричних кіл.

Структура курсу спрямована на формування у здобувачів освіти здатності:

- коректно будувати схеми заміщення та топологічні моделі електричних кіл;
- застосовувати метод комплексних величин для аналізу ustalених синусоїдних режимів;
- виконувати розрахунки симетричних і несиметричних трифазних кіл;
- аналізувати гармонійний склад сигналів та оцінювати вплив спотворень на роботу електротехнічного обладнання;
- визначати параметри перехідних процесів та аналізувати режими комутації у колах різних типів.

Запропонований курс лекцій комплексно надає ґрунтовні теоретичні знання та дозволяє розвивати інженерну здатність пов'язувати математичні моделі з фізичною природою процесів, що відбуваються у реальних електроенергетичних і електротехнічних системах. Опанування матеріалу забезпечить студентам ґрунтовну підготовку для подальшого вивчення фахових дисциплін та виконання професійних функцій у електричній інженерії.

Розділ 1. Трифазні електричні кола

Тема 1.1. Вступ до теорії багатофазних систем та трифазних кіл

Сучасна електроенергетика на всіх основних етапах – генерації, передачі, розподілу та споживання електричної енергії – функціонує на основі трифазних електричних систем. У генераторах, які застосовуються на більшості електричних станцій генерується трифазна система електрорушійних сил (ЕРС). Передача енергії до споживачів здійснюється через високовольтні трифазні лінії електропередач, які забезпечують ефективне транспортування електроенергії. Розподіл енергії в межах промислових підприємств, населених пунктів і житлових масивів також виконується через трифазні мережі. Значну частину електричної енергії споживають трифазні електроприймачі, що додатково підкреслює практичну доцільність побудови трифазних електричних кіл.

Широке впровадження трифазних систем пояснюється їх техніко-економічними перевагами порівняно з однофазними: передача більшої потужності за тих самих струмів, зниження втрат електроенергії, реалізація обертового магнітного поля в електричних машинах, спрощення конструкції апаратури тощо.

Для подальшого вивчення теорії аналізу трифазних кіл рекомендовано використання наступних термінів та їх визначень:

Багатофазна система електричних кіл – сукупність електричних кіл, у яких діють синусоїдні ЕРС однакової частоти, зсунені одна відносно одної за фазою, що генеруються спільним джерелом енергії [1].

Фаза багатофазної системи електричних кіл – частина багатофазної системи електричних кіл, у якій може протікати один зі струмів багатофазної системи струмів [1].

Багатофазне коло – багатофазна система електричних кіл, у якій окремі фази електрично поєднані одна з одною [1] або з'єднання багатофазних пристроїв [2].

Багатофазне симетричне коло – багатофазне коло, у якого комплексні опори, що складають його фази, однакові [1, 2].

1.1.1. Принцип створення трифазної системи електрорушійних сил

Трифазні електричні системи є основою функціонування сучасної електроенергетики на етапах генерації, передачі, розподілу та споживання електричної енергії. Такі системи та/або кола є окремим випадком багатофазних систем/кіл, а саме – такими, у яких кількість фаз (m) дорівнює трьом.

Формування трифазних кіл здійснюється за рахунок живлення трифазного навантаження (споживача) від джерела трифазної системи напруг (ЕРС, струмів).

Багатофазна система напруг (ЕРС, струмів) – це сукупність синусоїдних електричних напруг (ЕРС, струмів) однакової частоти, зсунутих одна відносно одної за фазою, які діють у багатофазній системі електричних кіл [1].

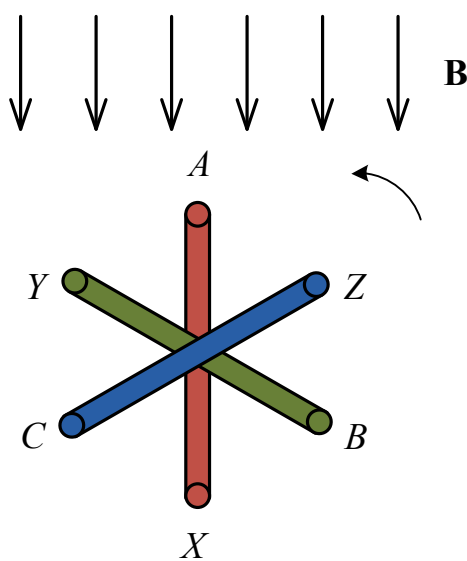
Трифазна система напруг (ЕРС, струмів) – це багатофазна система, у якій кількість фаз дорівнює трьом [1].

Симетрична багатофазна система напруг (ЕРС, струмів) – багатофазна система напруг (ЕРС, струмів), в якій окремі електричні напруги (ЕРС, струми) рівні за амплітудою і зміщені за фазою одна відносно одної на кути, що дорівнюють [1, 2]

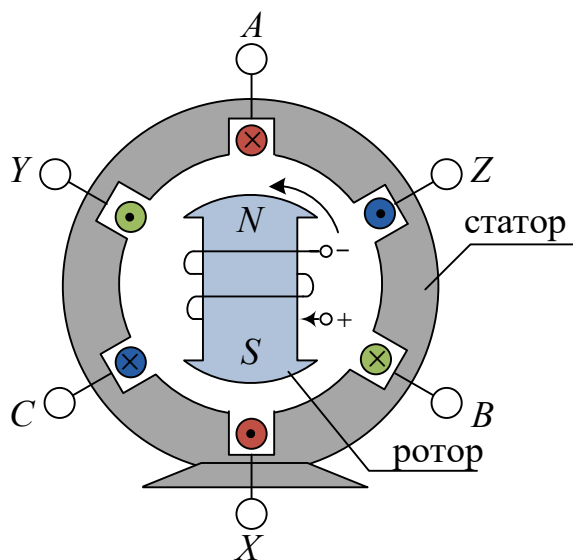
$$\alpha = \frac{2\pi}{m},$$

де m – число фаз.

Таким чином, **симетрична трифазна система напруг (ЕРС, струмів)** складається з трьох синусоїдних величин однакової амплітуди і частоти, зсунутих за фазою на $\frac{2\pi}{m}$ радіан (або 120°).



а)



б)

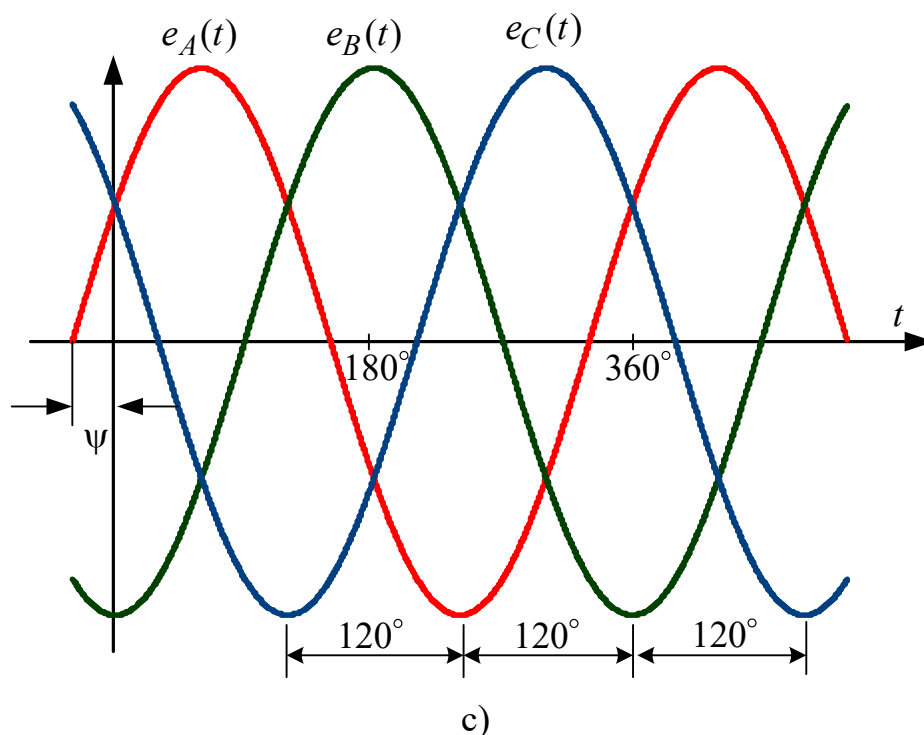


Рисунок 1.1.1 – Принцип створення трифазної системи електрорушійних сил

Принцип формування трифазної системи ґрунтується на законі електромагнітної індукції: якщо в однорідному магнітному полі розмістити три однакові котушки, жорстко закріплені між собою і просторово зсунуті на кут $\frac{2\pi}{3}$ радіан, та обертати цю систему з постійною кутовою швидкістю, то на кінцях кожній котушки індукуються синусоїдні ЕРС однакової частоти та амплітуди (рис. 1.1.1, а). Синусоїди згенерованих ЕРС будуть зсунуті за фазою на третину періоду одна відносно одної, що формує симетричну трифазну систему ЕРС прямої послідовності чергування фаз.

Таку систему реалізовано у конструкції трифазного синхронного генератора, який складається з двох основних частин: статора та ротора (рис. 1.1.1, б).

Статор – нерухома частина генератора, як правило, має циліндричну форму. У пазах внутрішньої поверхні розміщено три однакові обмотки. Обмотки розташовані рівновіддалено по внутрішньому колу статора на кутовій відстані 120° одна від одної. На кінцях кожної з обмоток під дією змінного магнітного поля виникають ЕРС. Умовні позначення фазних обмоток, а також прийняті системи буквено-цифрового і кольорового маркування провідників наведено у примітці нижче.

Ротор – обертова частина генератора, яка може мати явнополюсне або неявнополюсне виконання. Незалежно від конструктивного виконання на обертовій частині накладена обмотка збудження, яка живиться постійним струмом і призначена для створення у генераторі магнітного поля. Обертання ротора досягається шляхом прикладення обертового моменту від первинного двигуна, яким може бути парова або гідравлічна турбіна залежно від типу електростанції. Внаслідок обертання ротора відбувається відносний рух магнітного поля відносно обмоток статора. Це, відповідно до закону електромагнітної індукції, призводить до виникнення (індукції) синусоїдних ЕРС у фазних обмотках.

Оскільки обмотки однакові та зсунуті одна відносно одної на третину окружності, на їх кінцях індукуються ЕРС однакової амплітуди, частоти та з фазовим зсувом у 120° , що повністю відповідає визначенню симетричної трифазної системи ЕРС. Часові діаграми таких ЕРС наведені на рис. 1.1.1, в. Математична модель такої системи миттєвих значень ЕРС окремих фаз подана як система тригонометричних виразів (1.1.1)

$$\begin{aligned} e_A(t) &= E_m \sin(\omega t + \psi_A) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi_A), \\ e_B(t) &= E_m \sin(\omega t + \psi_A - 120^\circ) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi_A - 120^\circ), \\ e_C(t) &= E_m \sin(\omega t + \psi_A + 120^\circ) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi_A + 120^\circ). \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Її подання у комплексній формі для діючих значень (1.1.2)

$$\begin{aligned} \dot{E}_A &= E e^{j\psi_A} \\ \dot{E}_B &= E e^{j(\psi_A - 120^\circ)} = E e^{j\psi_A} e^{-j120^\circ} = \dot{E}_A e^{-j120^\circ} \\ \dot{E}_C &= E e^{j(\psi_A - 240^\circ)} = E e^{j\psi_A} e^{-j240^\circ} = E e^{j\psi_A} e^{j120^\circ} = \dot{E}_A e^{j120^\circ} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Запис системи комплексів фазних ЕРС (1.1.2) може бути спрощено введенням **поворотного множника**:

$$\begin{aligned} \dot{E}_A &= E e^{j\psi_A}, \\ \dot{E}_B &= \dot{E}_A a^2, \\ \dot{E}_C &= \dot{E}_A a \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

де $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ – поворотний множник.

Варто врахувати, що

$$a^2 = \left(e^{j120^\circ}\right)^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1, \quad a^4 = a, \quad a^5 = a^2 \text{ і т.д.}$$

Варто звернути увагу на суму поворотних множників, що входять до системи (1.1.3):

$$1 + a^2 + a = 1 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

Примітка. Позначення фаз і провідників у трифазних системах

1. Позначення фаз трифазної системи

1.1. Згідно з ПУЕ (Україна) [3]:

- Для електроустановок напругою понад 1 кВ:
 - Позначення фаз: А, В, С
 - Кольорове маркування шин:
 - фаза А – жовтий;
 - фаза В – зелений;
 - фаза С – червоний;
 - нейтральна шина N – світло-блакитний
 - Захисне позначення нейтралі (використання як PEN) – той же колір світло-блакитний, з жовто-зеленими повздовжними смугами на кінцях .
- Для електроустановок напругою до 1 кВ:
 - Позначення фаз: L1, L2, L3 (допускається використання А, В, С в діючих установках) .
 - Кольорове маркування:
 - L1 – жовтий;
 - L2 – зелений;
 - L3 – червоний .
- Єдність маркування (буквено-цифрове та/або кольорове) повинна бути однаковою в межах однієї електроустановки (ПУЕ, п. 1.1.29-30).

1.2. Згідно з ІЕС 60445:2021

- Позначення фазних провідників змінного струму:
 - L1 – коричневий;
 - L2 – чорний;
 - L3 – сірий .
- Клемні позначення устаткування: U, V, W.
- Нейтраль: N – світло-блакитний.
- Захисний провідник: PE – зелено-жовті смуги.
- Провідник PEN: допускається як «зелено-жовтий зі світло-блакитним по кінцях», або навпаки.

Увага: позначення U, V, W застосовуються тільки для терміналів та не вказують на порядок чергування фаз .

2. Приклади систем маркування

Регіон / норматив	Фази	Нейтраль	Захисний
Україна (ПУЕ)	A, B, C або L1–L3 (жовтий, зелений, червоний)	N – світло-блакитний	PE – зелено-жовтий
ІЕС	L1–L3 (коричневий, чорний, сірий)	N – світло-блакитний	PE – зелено-жовтий
Британія	аналогічно ІЕС	N, PE – згідно BS/ІЕС	
США	A, B, C або L1–L3 (чорний, червоний, синій)	білий/сірий	зелений або зелений/жовтий
Японія, Корея	R, S, T або U, V, W	N	PE – зелено-жовтий

1.1.2. Поняття про симетрію в трифазній системі

Подальше вивчення багатофазних систем електричних величин – ЕРС, напруг і струмів – вимагає їх класифікації за характером взаємозв’язку між фазами.

Залежно від співвідношень амплітуд і фазових зсувів між фазними величинами, багатофазні системи поділяються на:

- **симетричні системи** – в яких фазні вектори (ЕРС, напруг або струмів) рівні за модулем та зсунуті один відносно одного на однаковий кут, причому зберігається фіксована послідовність чергування фаз;
- **несиметричні системи** – в яких порушено хоча б одну з умов симетрії: рівність амплітуд, рівномірність фазових зсувів або послідовність чергування фаз.

Стан симетрії або несиметрії є визначальним для аналізу електричних режимів. Симетрія характерна для нормальної (номінальної) роботи системи, натомість несиметрія може бути наслідком специфіки навантаження, неідентичності параметрів елементів електромережі, неякісного монтажу або аварій.

Розуміння принципів симетрії, а також методів аналізу несиметричних режимів, зокрема за допомогою **методу симетричних складових**, є необхідною передумовою для проєктування, діагностики та модернізації електротехнічних систем.

1.1.2.1. Симетричні системи ЕРС, напруг, струмів

Симетричними називають такі трифазні системи, в яких фазні електричні величини:

- мають однакову амплітуду та/або середньоквадратичне значення (діюче, ефективне)

$$E_A = E_B = E_C = E_\Phi = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; \quad U_A = U_B = U_C = U_\Phi = \frac{U_m}{\sqrt{2}};$$

$$I_A = I_B = I_C = I_\Phi = \frac{I_m}{\sqrt{2}};$$

- утворюють фіксовану черговість фаз (послідовність);
- синусоїдна ЕРС (струм, напруга) кожної наступної фази відстає від ЕРС (струму, напруги) попередньої на один і той же кут α , кратний $\frac{2\pi}{3}$.

Симетрія є ідеалізованим поняттям, що введення якого дозволяє суттєво спростити математичні моделі та забезпечує передбачуваність поведінки електричних пристроїв у номінальних режимах роботи.

Несиметрична трифазна система електричних напруг (ЕРС, струмів) подається трьома **симетричними складовими**. Кожна симетрична складова являє собою симетричну трифазну систему напруг (ЕРС, струмів), а саме: **система прямої послідовності, система зворотної послідовності, система нульової послідовності**.

Аналітичне пояснення формування симетричних складових базується на введенні множника q у вираз кута зміщення за фазою синусоїд симетричної трифазної системи:

$$\alpha = \psi_A - \psi_B = \psi_B - \psi_C = \psi_C - \psi_A = q \frac{2\pi}{3},$$

де $q = 1, 2, 3, \dots$ – будь-яке ціле число.

1. При $q = 1, 4, 7, 10 \dots$, кут $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. За цих множників кожен наступний вектор ЕРС (напруги, струму) фази відстає від попереднього на кут 120° . Тобто прийнявши початкову фазу ЕРС фази A за нуль ($\psi_A = 0^\circ$), то $\psi_B = -\frac{2\pi}{3} = -120^\circ$, $\psi_C = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$.

Враховуючи, що послідовність фаз визначається черговістю переходу миттєвих значень ЕРС через одні і ті ж значення, наприклад, через максимуми, то при $q = 1$ черговість наступна ($A - B - C - A - \dots$). Симетрична трифазна система ЕРС (напруг, струмів) з такою черговістю фаз називається системою **прямої послідовності**.

Математична модель комплексів симетричних трифазних ЕРС прямої послідовності подається як

$$\begin{aligned}\dot{E}_A &= \dot{E}_1 = E_1 e^{j\psi_A}, \\ \dot{E}_B &= \dot{E}_1 a^2, \\ \dot{E}_C &= \dot{E}_1 a\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

Враховуючи обставину, що $1 + a^2 + a = 0$, то геометрична сума всіх векторів ЕРС (напруг, струмів) прямої послідовності дорівнює нулю:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = \dot{E}_1(1 + a^2 + a) = 0\tag{1.1.5}$$

Часова діаграми миттєвих значень ЕРС для випадку прямої послідовності та її векторне подання на діаграмі зображені на рис. 1.1.2.

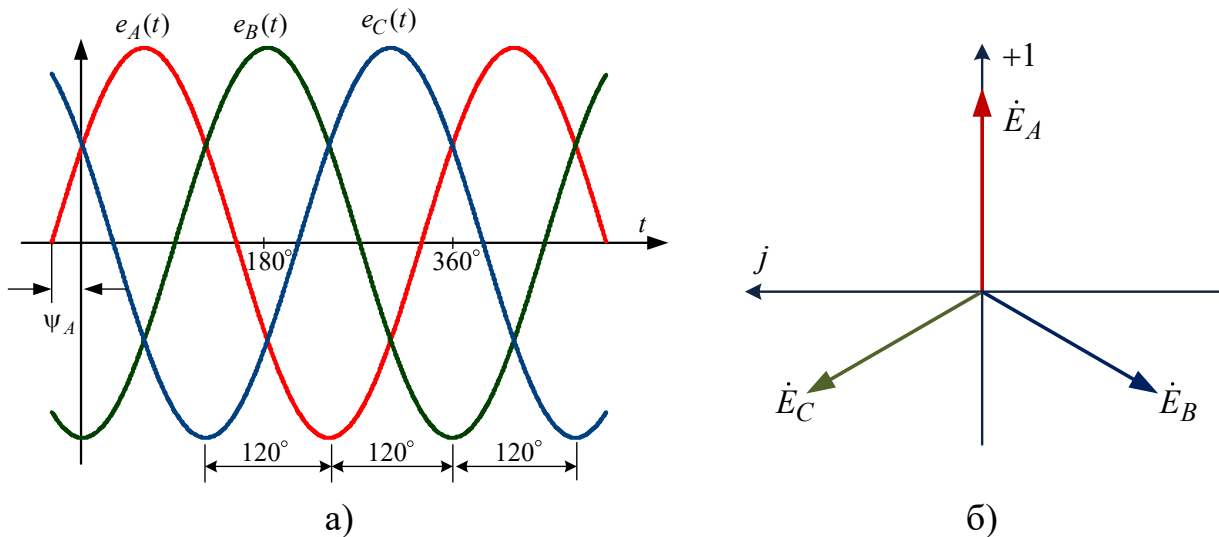


Рисунок 1.1.2 – Часові діаграми миттєвих ЕРС та їх векторне подання для випадку прямої послідовності

2. При $q = 2, 5, 8, 11 \dots$, $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. Отже кожен наступний вектор ЕРС (напруги, струмів) фази відстає від попереднього на кут 240° . Тобто прийнявши початкову фазу ЕРС фази A як $\psi_A = 0^\circ$, то $\psi_B = -\frac{4\pi}{3} = -240^\circ = 120^\circ$, $\psi_C = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ = -120^\circ$.

За таких випадків множника черговістю переходу миттєвих значень ЕРС (напруги, струмів) через максимуми зворотна ($A - C - B - A - \dots$). Симетрична трифазна система ЕРС (напруг, струмів) з такою черговістю фаз називається

системою **зворотної послідовності**. Часова діаграма миттєвих значень ЕРС для випадку зворотної послідовності та її векторна діаграма подані на рис.1.1.3.

Математична модель комплексів симетричних трифазних ЕРС зворотної послідовності:

$$\begin{aligned}\dot{E}_A &= \dot{E}_2 = E_2 e^{j\psi_A}, \\ \dot{E}_B &= \dot{E}_2 a, \\ \dot{E}_C &= \dot{E}_2 a^2\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

Для випадку симетрії зворотної послідовності геометрична сума всіх векторів ЕРС (напруг, струмів) також дорівнює нулю:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = \dot{E}_2 (1 + a + a^2) = 0\tag{1.1.7}$$

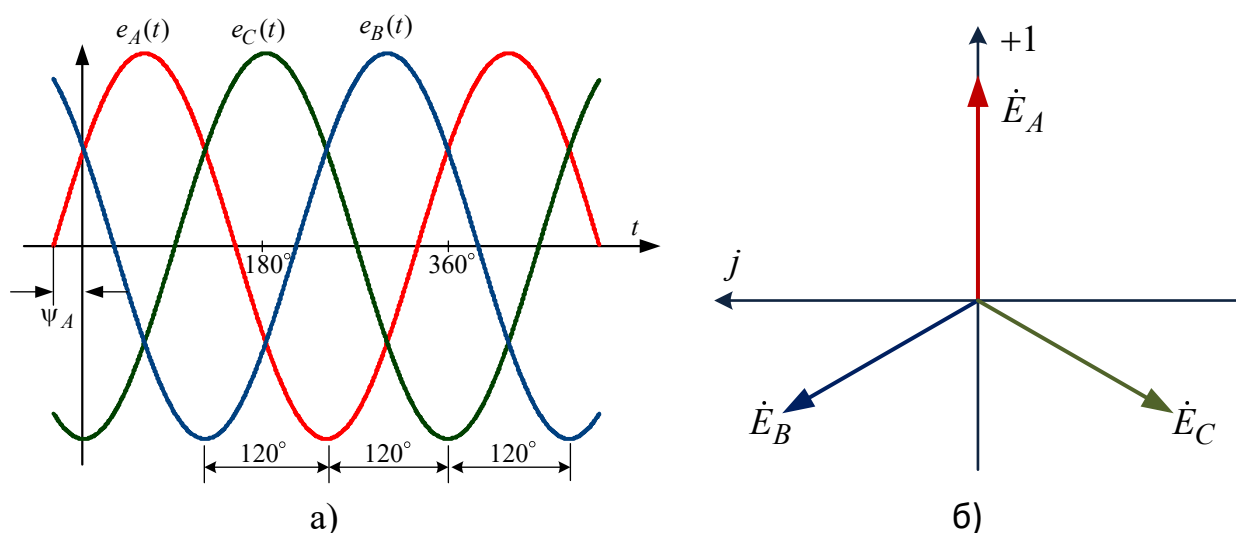


Рисунок 1.1.3 – Часові діаграми миттєвих ЕРС та їх векторне подання для випадку зворотної послідовності

3. При $q = 3, 6, 9, 12 \dots$, $\alpha = 2\pi$. За випадку множника кратного трьом, симетричні три вектори ЕРС (напруги, струмів) проходять через максимум одночасно без зсуву. Прийнявши початкову фазу ЕРС фази A за нуль ($\psi_A = 0^\circ$), то $\psi_B = -2\pi$, $\psi_C = 2\pi$.

Симетрична трифазна система ЕРС (напруг, струмів) з визначеною вище черговістю фаз називається системою **нульової послідовності**, векторну діаграму якої подано на рис. 1.1.4.

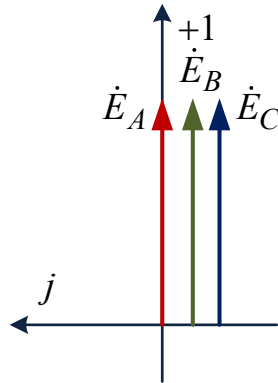


Рисунок 1.1.4 – Часові діаграми миттєвих ЕРС та їх векторне подання для випадку нульової послідовності

Математична модель комплексів симетричних трифазних ЕРС нульової послідовності:

$$\begin{aligned}\dot{E}_A &= \dot{E}_0 = E_0 e^{j\psi_A}, \\ \dot{E}_B &= E_0 e^{j(\psi_A - 2\pi)} = \dot{E}_0, \\ \dot{E}_C &= E_0 e^{j(\psi_A + 2\pi)} = \dot{E}_0.\end{aligned}\tag{1.1.8}$$

Враховуючи, що $\dot{E}_A = \dot{E}_B = \dot{E}_C = \dot{E}_0$, для випадку симетрії нульової послідовності геометрична сума фазних ЕРС (напруг, струмів) рівна потроєному значенню ЕРС (напруги, струму) однієї з фаз:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 3\dot{E}_0.\tag{1.1.9}$$

1.1.2.2. Несиметричні системи ЕРС, напруг, струмів

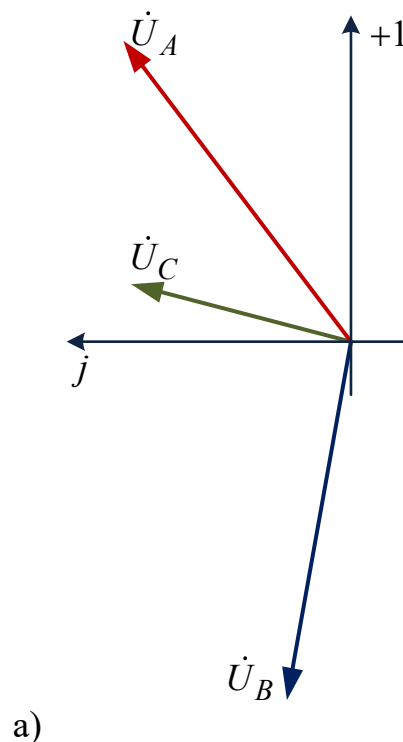
Несиметрія виникає тоді, коли хоча б одна з умов симетрії порушується. Це призводить до появи неузгоджених режимів у електричній мережі та може стати причиною перевантажень, підвищених втрат, теплових і електродинамічних перенавантажень в елементах електричного кола.

Основними причинами виникнення несиметричних режимів є:

- наявність однофазних або несиметричних навантажень;

- асиметрія параметрів елементів мережі (ліній, трансформаторів, апаратури);
- аварійні стани (наприклад, обрив фази або міжфазні замикання);
- нерівномірність генерації в окремих фазах джерел ЕРС.

Для математичного аналізу несиметричних систем застосовують **метод симетричних складових**, який передбачає подання несиметричної системи у вигляді суми трьох умовно симетричних систем – прямої, зворотної та нульової послідовностей (див. рис. 1.1.5) та детально описаний у темі 1.3.3 цього курсу. Цей підхід дозволяє аналітично опрацювати несиметричні режими із комбінованим застосуванням методу накладання та методів аналізу симетричних трифазних систем.



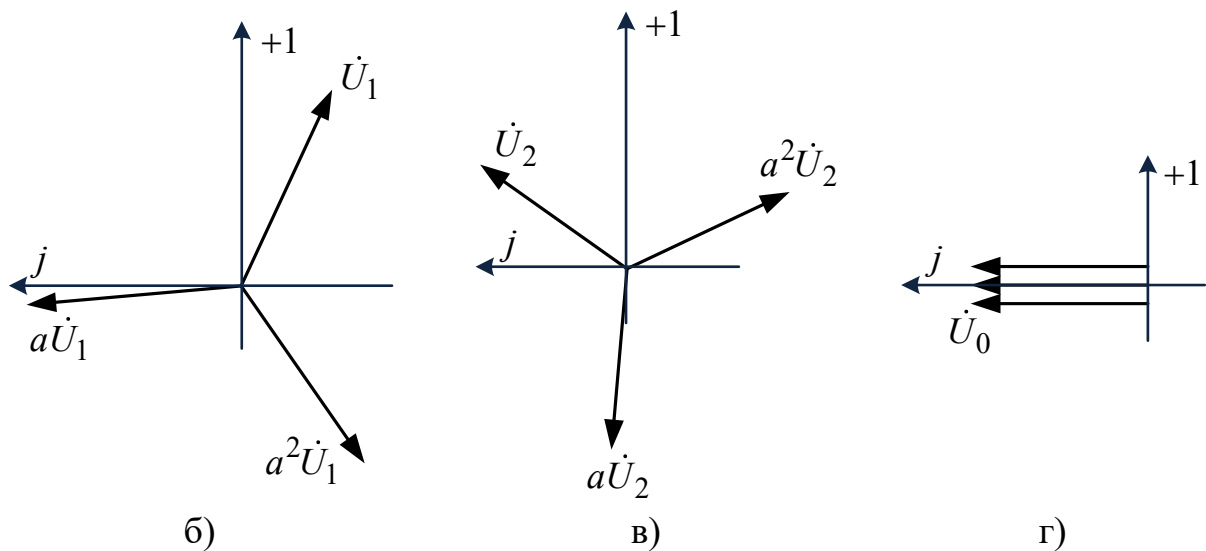


Рисунок 1.1.5 – Подання несиметричної системи трифазних ЕРС симетричними складовими

Математична модель розкладання несиметричної системи трифазних напруг має вигляд:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_A &= \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2, \\
 \dot{U}_B &= \dot{U}_0 + a^2\dot{U}_1 + a\dot{U}_2, \\
 \dot{U}_C &= \dot{U}_0 + a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2.
 \end{aligned}
 \tag{1.1.10}$$

Перші доданки у наведених виразах (1.1.10) створюють симетричну трифазну систему нульової послідовності чергування фаз $(\dot{U}_0, \dot{U}_0, \dot{U}_0)$, усі вектори якої мають однакові значення та напрям.

Другі доданки $(\dot{U}_1, a^2\dot{U}_1, a\dot{U}_1)$ є симетричною системою прямої послідовності, треті доданки $(\dot{U}_2, a\dot{U}_2, a^2\dot{U}_2)$ – симетричною системою зворотної послідовності.

1.1.2.3. Симетрія споживача та трифазного кола

Якщо повний опір кожної фази багатofазного споживача однаковий за характером та модулем (величиною), такий споживач вважається **симетричним**. Математична модель для трифазного симетричного споживача набуває вигляду

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}.$$

Враховуючи, що трифазне коло, як і будь-яке інше складається з джерела, лінії електропередачі (з'єднувальних проводів) та споживачів, можна сформулювати поняття про симетрію багатофазного кола: симетричним вважається багатофазне електричне коло, в якому симетричний споживач живиться від симетричного джерела енергії.

Несиметрія системи ЕРС джерела живлення, як і несиметрія навантаження багатофазного кола, спричиняє його несиметрії багатофазного кола в цілому.

1.1.3. Поняття про зрівноваженість багатофазної системи

Багатофазна система ЕРС та струмів, за якої зумовлена ними миттєва потужність у колі не залежить від часу називають **зрівноваженою**.

Цій умові відповідає симетрична трифазна система прямої або зворотної послідовності, що можна довести як показано нижче.

Задавши симетричною трифазною системою миттєвих ЕРС та струмів

$$\begin{aligned} e_A(t) &= E_m \sin \omega t, & i_A(t) &= I_m \sin(\omega t - \varphi); \\ e_B(t) &= E_m \sin(\omega t - 120^\circ), & i_B(t) &= I_m \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi); \\ e_C(t) &= E_m \sin(\omega t + 120^\circ), & i_C(t) &= I_m \sin(\omega t + 120^\circ - \varphi) \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

та використавши формулу добутку двох синусів

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

система миттєвих потужностей фаз трифазної системи ЕРС набуде вигляду:

$$\begin{aligned} p_A(t) &= e_A(t) \cdot i_A(t) = E_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= E_m I_m \cdot \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \omega t - \varphi)] = E_A I_A [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)], \\ p_B(t) &= e_B(t) \cdot i_B(t) = E_B I_B [\cos \varphi - \cos(2\omega t - 240^\circ - \varphi)], \\ p_C(t) &= e_C(t) \cdot i_C(t) = E_C I_C [\cos \varphi - \cos(2\omega t + 240^\circ - \varphi)]. \end{aligned}$$

Сумарна миттєва потужність симетричної трифазної системи:

$$p(t) = p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) = 3E_\Phi I_\Phi \cos \varphi = \text{const}, \quad (1.1.12)$$

$$\text{де } E_A = E_B = E_C = E_\Phi = \frac{E_m}{\sqrt{2}}, \quad I_A = I_B = I_C = I_\Phi = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Даний результат свідчить, що миттєва сумарна потужність зрівноваженого трифазного кола не залежить від часу.

Тема 1.2. Схеми з'єднання елементів трифазного кола

Багатофазною системою без електричного (кондуктивного) зв'язку між фазами називають таку систему, у якій окремі фази джерела не мають спільного електричного з'єднання одна з одною. У цьому випадку кожна фаза джерела підключається до відповідної фази навантаження за допомогою окремої пари провідників (рис. 1.2.1, а; рис. 1.2.2, б). Для такої реалізації у трифазній системі необхідно шість провідників.

Через підвищену матеріалоемність така схема не має широкого практичного застосування.

Найбільшого поширення набули багатофазні системи зі зв'язаним з'єднанням фаз, у яких реалізуються спільні точки з'єднання. Основними типами такого з'єднання є зірка (Y) і трикутник (Δ). У трифазних системах ці з'єднання реалізуються у вигляді трипроменевої зірки (рис. 1.2.1, б та рис. 1.2.2) або трикутника (рис. 1.2.4, б).

Залежно від кількості провідників, що з'єднують джерело зі споживачем, розрізняють **трипровідні** та **чотирипровідні системи**.

1.2.1. Трифазне коло при з'єднанні фаз джерела та споживача «зірка в зірку»

1.2.1.1. Створення з'єднання фаз «зірка в зірку»

Для реалізації з'єднання трифазного джерела й споживача за схемою «зірка в зірку» виконуються наступні дії:

- кінці фазних обмоток джерела з однаковою полярністю з'єднуються між собою, утворюючи спільну точку, яка називається нейтральною (позначається як точка N);
- аналогічно формується нейтральна точка споживача та позначається як точка N');

- вільні (не з'єднані в спільну точку) затискачі фаз джерела та навантаження з'єднують між собою трьома лінійними провідниками;
- за потреби здійснюється з'єднання нейтральних точок N і N' , що утворює чотирипровідну систему.

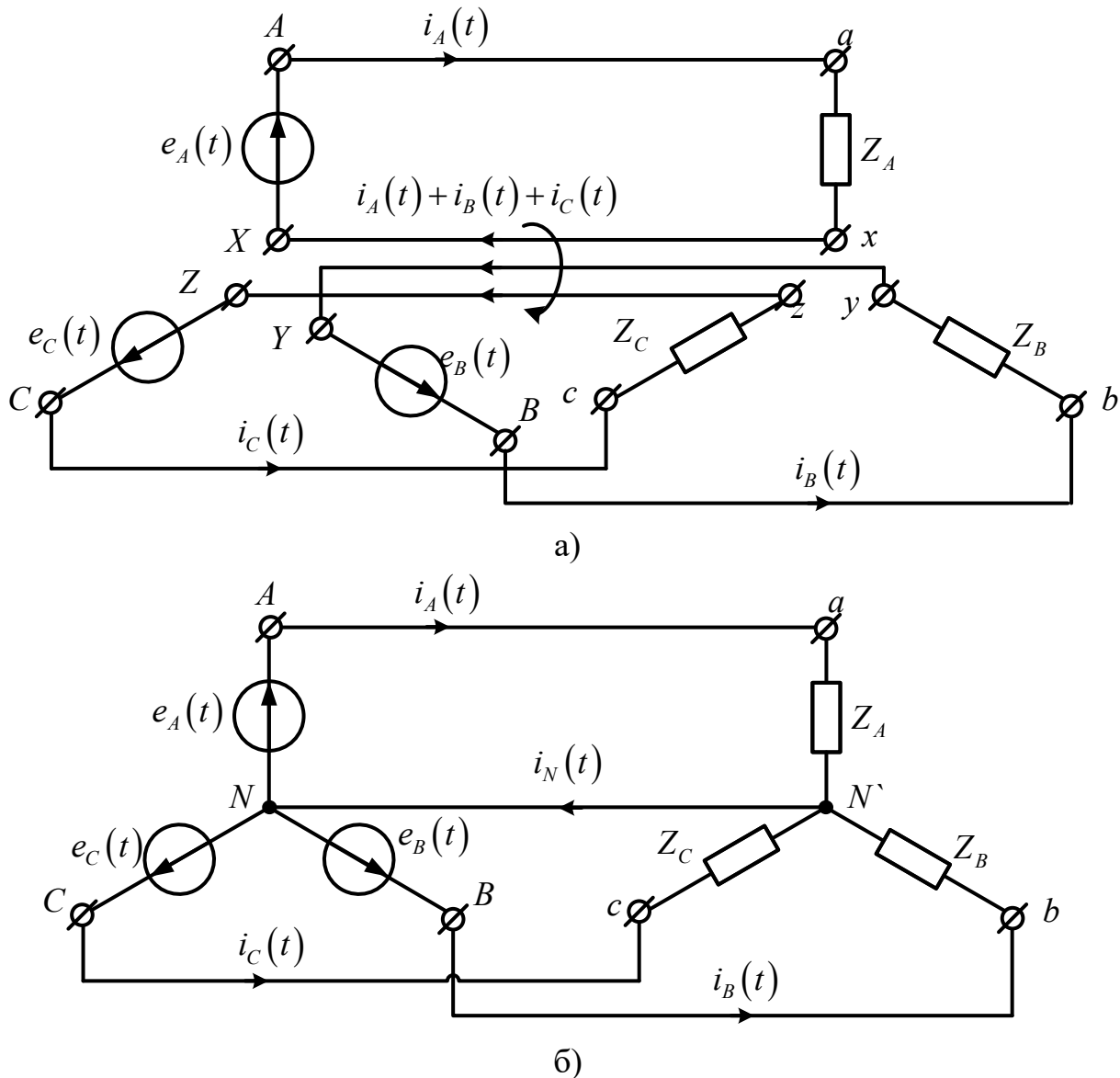


Рисунок 1.2.1 – Схематична демонстрація переходу від трифазного кола без кондуктивного зв'язку (а) до ідеалізованого зв'язаного трифазного чотирипровідного кола із з'єднанням фаз «зірка в зірку» (б)

1.2.1.2. Основні терміни та позначення у трифазній системі з'єднання типу «зірка в зірку»

У трифазних електричних колах зі з'єднанням фаз джерела й навантаження за схемою «зірка» використовуються наступні технічно усталені терміни.

Нейтраль (англ. **Neutral Point**) – загальна точка симетричної системи фазних напруг, яка при нормальному режимі має нульовий потенціал відносно землі. Ця точка утворюється шляхом з'єднання відповідних виводів фазових обмоток або елементів при з'єднанні за схемою зірка.

Позначення:

N – нейтральна точка джерела,

N' – нейтральна точка навантаження.

Нейтральний провід (англ. **Neutral Conductor**) – провідник, що з'єднує нейтральну точку джерела (N) з нейтральною точкою навантаження (N'). Цей провід використовується у чотирипровідних системах для забезпечення проходження струму, який виникає в разі **несиметрії навантаження**.

Напруга між нейтральними точками N та N' називається **напругою зміщення нейтралі** (англ. **Neutral Displacement Voltage**).

Позначення:

$u_{N'N}(t)$ – миттєве значення,

$\dot{U}_{N'N}$ – комплексне значення.

Струм у нейтральному проводі позначається $i_N(t)$ або $\dot{I}_N(t)$ – залежно від форми подання (миттєвої чи комплексної). Додатний напрямок струму в нейтральному проводі встановлюється від нейтральної точки навантаження N' до нейтральної точки джерела N .

Лінійні проводи (англ. **Line Conductors**) – провідники, що з'єднують відповідні фазні виводи джерела й навантаження. У трифазній системі – три лінійні проводи ($A-a, B-b, C-c$).

Лінійні струми (англ. **Line Currents**) – струми, що протікають через лінійні проводи.

Позначення:

$i_A(t), i_B(t), i_C(t)$ – миттєві значення,

$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ – комплексні значення.

За додатний напрям лінійних струмів приймається напрям від генератора до навантаження.

Лінійні напруги (англ. **Line-to-Line Voltages**) – напруги між будь-якими двома лінійними проводами.

Позначення:

$u_{AB}(t), u_{BC}(t), u_{CA}(t)$ – миттєві значення,

$\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ – комплексні значення.

Фазні напруги (англ. **Phase Voltages**) – напруги між лінійним проводом певної фази та нейтральною точкою. Фазна напруга характеризує електрорушійну силу, прикладену до кожної обмотки або навантаження, підключеного між фазою та нейтраллю.

Позначення:

$u_A(t), u_B(t), u_C(t)$ – миттєві значення,

$\dot{U}_A = \dot{U}_{AN} = \dot{E}_A; \quad \dot{U}_B = \dot{U}_{BN} = \dot{E}_B; \quad \dot{U}_C = \dot{U}_{CN} = \dot{E}_C$ – комплексні значення.

Фазні струми (англ. **Phase Currents**) – струми, що протікають через навантаження, підключене до кожної фази.

Позначення:

$i_A(t), i_B(t), i_C(t)$ – миттєві значення,

$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ – комплексні значення.

Примітка. Призначення нейтрального проводу.

При сполученні обмоток генератора і приймача електроенергії за схемою «зірка» фазна напруга залежить від підключеного до кожної фази навантаження. У випадку підключення, наприклад, трифазного двигуна, навантаження буде симетричним, і напруга між нейтральними точками генератора і двигуна буде дорівнювати нулю. Однак, у випадку, якщо до кожної фази підключається різне навантаження, у системі виникає так звана напруга зміщення нейтралі, котра спричиняє асиметрію напруг навантаження. На практиці це може призвести до того, що частина споживачів отримає занижену напругу, а частина підвищену. Понижена напруга приводить до некоректної роботи підключеного електроустаткування, а підвищена може крім цього привести до пошкодження електрообладнання або займання.

Сполучення нейтральних точок генератора і приймача електроенергії нейтральним проводом дозволяє знизити напругу зміщення нейтралі практично до нуля і вирівняти фазні напруги на приймачі електроенергії. Невелика напруга буде обумовлюватись лише опором нульового проводу.

В лініях електропередачі різних класів використовуються різні види нейтралей. Це пов'язане з цільовим призначенням та різною апаратурою захисту лінії від короткого замикання та втрат. Нейтраль буває глухо заземленою (для ЛЕП НП та СН), ізольованою (для ЛЕП СН) і ефективно заземленою (для ЛЕП ВН та НВН).

В Україні використовуються наступні класи змінної напруги при передачі та розподілу електричної енергії:

- Низька напруга – з 1 липня 2025 року стандарт для побутових споживачів змінився з 220/380 В на 230/400 В, що відповідає європейським нормам;
- Середня напруга – 6 кВ, 10 кВ, 20 кВ, 35 кВ,
- Висока напруга – 110 кВ, 150 кВ, 220 кВ,
- Надвисока напруга – 330 кВ, 400 кВ, 500 кВ, 750 кВ.

1.2.1.3. Основні співвідношення між лінійними та фазними величинами для симетричного трифазного кола при з'єднанні фаз «зірка в зірку»

Для виконання монтажних, налагоджувальних або експлуатаційних робіт використовується **електрична принципова схема** трифазного кола, яка є графічним зображенням електричного з'єднання складових елементів кола з точним відображенням їх електричних зв'язків відповідно до функціонального призначення. Така схема слугує основою для побудови, наприклад, реальної електричної установки.

З метою теоретичного аналізу реальне трифазне електричне коло подається **схемою заміщення** – ідеалізованою електричною схемою, складеною виключно з активних та пасивних елементів, з'єднаних у спосіб, що забезпечує коректне відображення електромагнітних процесів, які мають місце у реальному колі, та дозволяє встановити залежності між струмами і напругами на його затискачах.

Під час побудови схеми заміщення трифазного джерела може бути використано:

- повну модель з урахуванням внутрішнього опору джерела, коли необхідно врахувати втрати енергії в джерелі;
- ідеалізовану модель джерела напруги, у якій повний внутрішній опір приймається за нуль;
- узагальнене позначення затискачів джерела (А, В, С) без конкретного зображення внутрішньої структури джерела, якщо вона не впливає на результат аналізу.

При з'єднанні фаз джерела та навантаження за схемою «зірка в зірку» розглядаються два варіанти побудови кола:

- чотирипровідна система – із з'єднанням нейтральних точок джерела й навантаження нейтральним проводом (рис. 1.2.2 а);
- трипровідна система – без такого з'єднання (рис. 1.2.2 б).

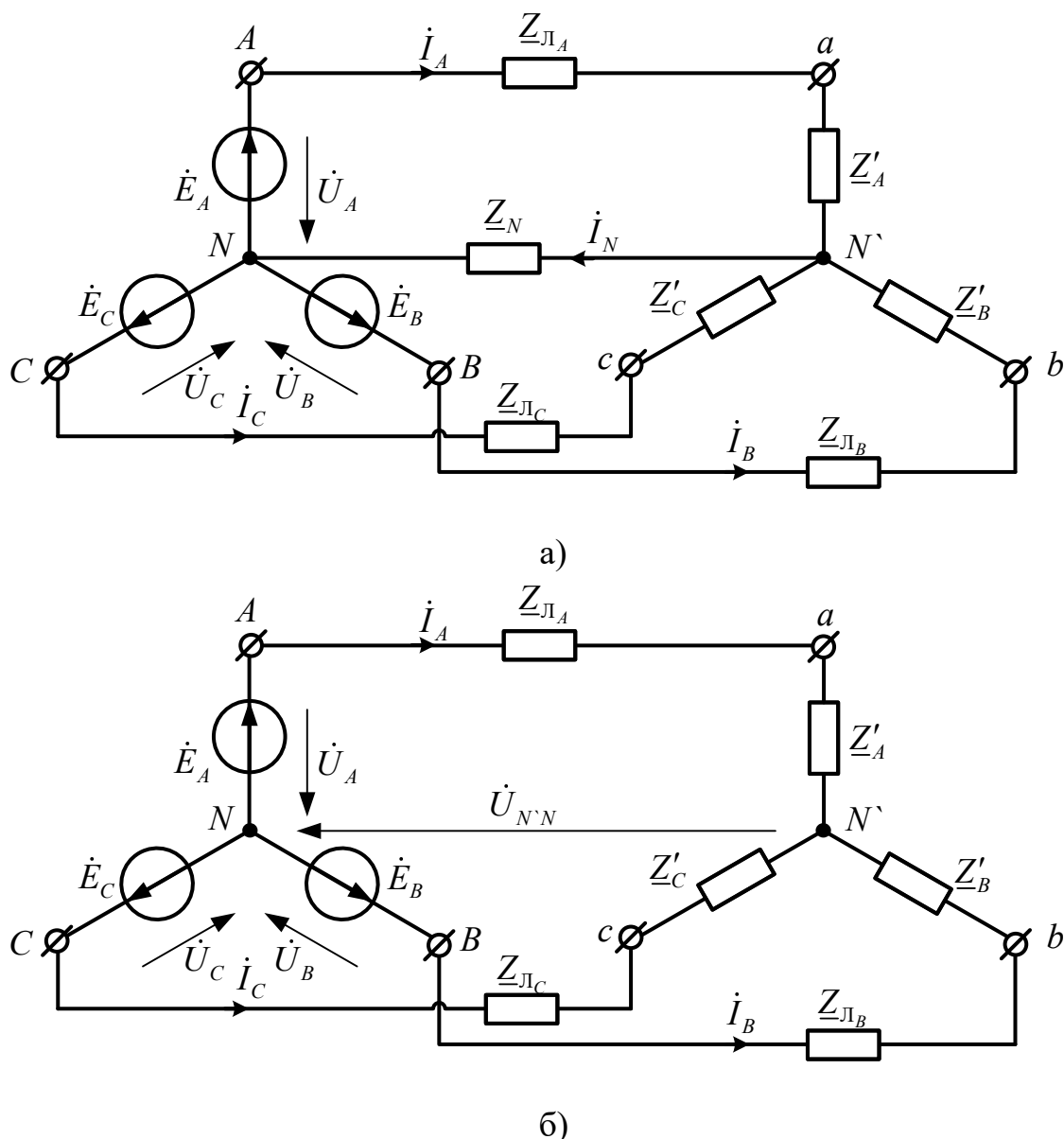


Рисунок 1.2.2 – Схема заміщення трифазного кола з нейтральним провідником (чотирипровідного) (а) та без нейтрального провідника (трипровідного) (б)

На схемах заміщення (рис. 1.2.2) приймаються такі умовні позначення:

- $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ – фазні ЕРС джерела (англ. **Phase Electromotive Forces**);
- $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ – фазні напруги джерела (англ. **Phase Voltages**);
- $\dot{U}_{N'N}$ – напруга зміщення нейтралі (англ. **Neutral Displacement Voltage**);
- Z'_A, Z'_B, Z'_C – фазні опори навантаження (англ. **Phase Impedances**);
- $Z_{\text{Л}A}, Z_{\text{Л}B}, Z_{\text{Л}C}$ – опори лінійних проводів (англ. **Line Conductor Impedances**);
- Z_N – опір нейтрального проводу (англ. **Neutral Conductor Impedance**);
- $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ – лінійні струми (англ. **Line Currents**);
- $\dot{I}_N$ – струм у нейтральному проводі (англ. **Current in the Neutral Conductor**).

Симетричне трифазне електричне коло із з'єднанням фаз джерела та навантаження за схемою «зірка–зірка», незалежно від кількості провідників у лінії (три або чотири), характеризується усталеними співвідношеннями між фазними та лінійними електричними величинами.

Оскільки фаза джерела, лінійний провід і відповідна фаза навантаження утворюють послідовне з'єднання, для якого характерним є проходження одного й того самого струму через усі елементи, то: у трифазному колі зі з'єднанням фаз за схемою «зірка в зірку» фазні та лінійні струми є рівними між собою:

$$I_{\Phi} = I_{\text{Л}} \quad (1.2.1)$$

Системи комплексних величин відносно фазних та лінійних струмів також є рівними:

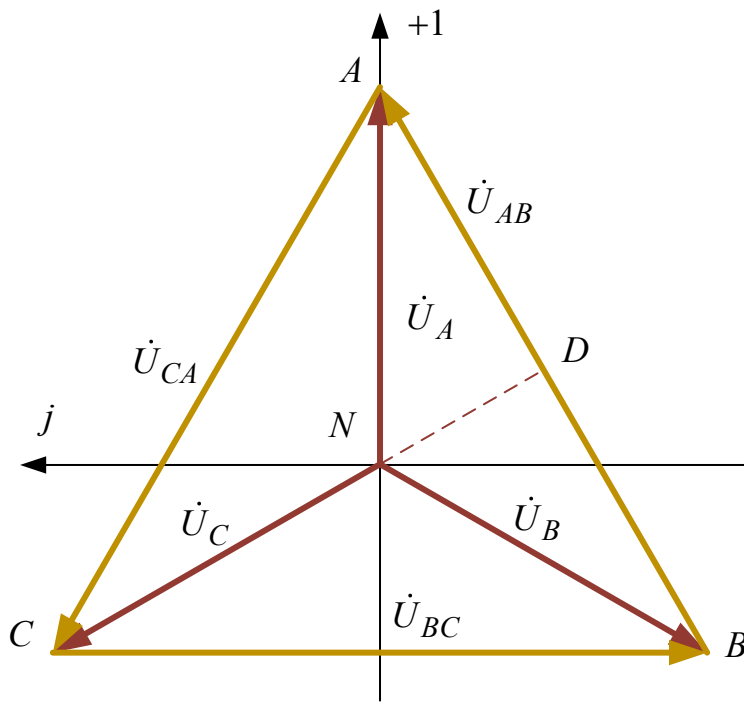
$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= I_A e^{j\psi_A} \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_A a^2 \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_A a \end{aligned}$$

де $I_A = I_B = I_C = I_{\Phi} = I_{\text{Л}}$ – модулі струмів у трифазному колі зі з'єднанням фаз за схемою «зірка в зірку». Тут та надалі у разі симетрії та рівності модулів електричних величин використовується умовне позначення фази як «Ф» та лінії як «Л».

Встановлення співвідношень між лінійною та фазною напругами ґрунтується на визначенні симетрії трифазної системи напруг, за якого:

- модулі фазних напруг однакові $U_A = U_B = U_C = U_{\Phi}$;
- модулі лінійних напруг однакові $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\text{Л}}$;
- кутові зсуви між сусідніми фазними (або лінійними) напругами становлять 120° .

Для встановлення кількісного співвідношення між фазними та лінійними напругами доцільно використати векторну діаграму напруг симетричного джерела (рис. 1.2.3) за умови нульової величини початкової фази фазної напруги A ($\psi_A = 0^\circ$):



$$\dot{U}_A = U_A e^{j\psi_A} = U_A,$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_A e^{-j120^\circ},$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_A e^{j120^\circ}$$

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = U_{AB} e^{j(\psi_A + 30^\circ)},$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ},$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ}$$

Рисунок 1.2.3 – Векторна діаграма розподілу фазних та лінійних напруг симетричного трифазного джерела

Виходячи з геометричних міркувань та аналізу векторної діаграми, отримують:

- вектор лінійної напруги випереджає відповідний фазний на кут 30° ;
- модуль лінійної напруги перевищує модуль фазної напруги у $\sqrt{3}$

Пояснення цих співвідношення лежить в основі аналізу прямокутного трикутника $\triangle AND$, утвореного при опусканні перпендикуляру з початку координат (точки N) на вектор лінійної напруги. В утвореному трикутнику:

- гіпотенуза AN – вектор фазної напруги $\bar{U}_A$;
- катет NA – половина вектору лінійної напруги $\bar{U}_{AB}$;
- катет ND – перпендикуляр, опущений з точки N на вектор $\bar{U}_{AB}$.

Оскільки вектори $\bar{U}_A$ і $\bar{U}_B$ мають однакову довжину та зсунуті на 120° , то трикутник $\triangle ANB$ є рівнобедреним, і проведений перпендикуляр водночас є бісектрисою кута $\angle ANB = 120^\circ$, тобто ділить його навпіл. Таким чином, $\angle NAD = 30^\circ$, а $\angle DNA = 60^\circ$.

Із співвідношення сторін у прямокутному трикутнику:

$$\cos 30^\circ = \frac{DA}{AN} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{U_{\text{Л}}}{U_{\text{Ф}}} \Rightarrow U_{\text{Л}} = \sqrt{3}U_{\text{Ф}}. \quad (1.2.2)$$

У разі стандартного значення фазної напруги $U_{\text{Ф}} = 220 \text{ В}$, лінійна напруга має значення $U_{\text{Л}} = 220 \cdot \sqrt{3} \cong 380$.

У системах електропостачання України напруга живлення однофазних побутових та промислових споживачів зазвичай становить 220 В. Ця величина відповідає фазній напрузі у трифазній системі з лінійною напругою 380 В.

Таким чином, для симетричної трифазної системи при з'єднанні фаз за схемою «зірка» виконується співвідношення:

$$U_{\text{Л}} = \sqrt{3}U_{\text{Ф}} = 220 \cdot \sqrt{3} \cong 380.$$

Номінальні напруги в електричних мережах регламентуються ДСТУ EN 60038:2022 (чинний з 31.12.2023), який є модифікованим перекладом міжнародного стандарту ІЕС 60038:2009. Відповідно до цього стандарту, в Україні поступово впроваджується перехід до європейської системи номіналів: 230/400 В – рекомендоване стандартне значення для низьковольтних мереж із частотою 50 Гц. У той же час, значення 220/380 В залишаються допустимими в існуючих енергосистемах протягом перехідного періоду.

Таким чином, при аналізі трифазних систем варто враховувати обидва номінали, залежно від технічного контексту та року введення обладнання в експлуатацію.

1.2.2. Трифазне коло при з'єднанні фаз джерела та споживача «трикутник в трикутник»

1.2.2.1. Створення з'єднання «трикутник в трикутник»

Для реалізації з'єднання фаз трифазного джерела та споживача за схемою «трикутник в трикутник» (Δ – Δ) виконуються наступні дії:

- виводи фазних обмоток джерела з'єднуються між собою по чергово у відповідності до прямої послідовності фаз: кінець однієї обмотки з'єднується з початком наступної, утворюючи три вузлові точки з'єднання, що позначаються як A , B , C ;

- аналогічно з'єднуються обмотки навантаження, формуючи відповідні вузлові точки;
- лінійні проводи підключаються між відповідними вузловими точками джерела і навантаження, утворюючи трипровідну систему, у якій нейтральна точка відсутня.

З'єднання «трикутник в трикутник» використовується переважно у випадках, коли:

- необхідно уникнути протікання струму через нейтраль;
- передбачено рівномірне навантаження на всі три фази;
- слід забезпечити роботу без зміщення нейтралі або у випадку промислового живлення, де відсутня потреба в однофазному навантаженні.

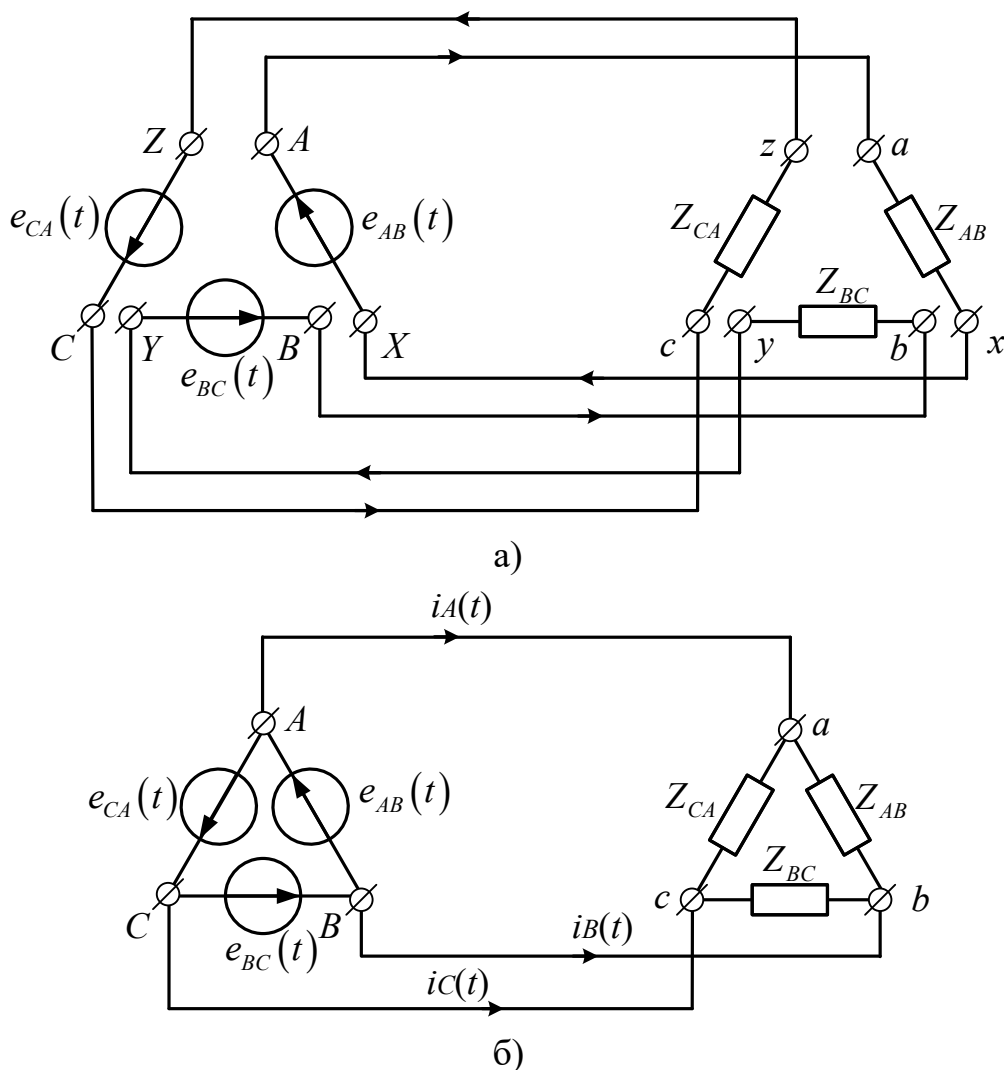


Рисунок 1.2.4 – Схематична демонстрація переходу від трифазного кола без кондуктивного зв'язку (а) до ідеалізованого зв'язаного трифазного кола із з'єднанням фаз за схемою «трикутник в трикутник» (б).

1.2.2.2. Основні терміни та позначення у трифазній системі з'єднання типу «трикутник в трикутник»

У трифазних електричних колах, в яких фази джерела та навантаження з'єднані за схемою «трикутник в трикутник» (Δ – Δ), застосовуються наступні технічно усталені терміни та відповідні умовні позначення.

Лінійні проводи (англ. **Line Conductors**) – провідники, що з'єднують відповідні фазні виводи джерела й навантаження. У трифазній системі – три лінійні проводи ($A - a, B - b, C - c$).

Лінійні струми (англ. **Line Currents**) – струми, що протікають через лінійні проводи.

Позначення:

$i_A(t), i_B(t), i_C(t)$ – миттєві значення,

$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ – комплексні значення.

Додатний напрям лінійних струмів приймається від джерела до навантаження.

Лінійні напруги (англ. **Line-to-Line Voltages**) – напруги між будь-якими двома лінійними проводами.

Позначення:

$u_{AB}(t), u_{BC}(t), u_{CA}(t)$ – миттєві значення,

$\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ – комплексні значення.

Фазні напруги (англ. **Phase Voltages**) – напруги на обмотках джерела або на елементах навантаження, які утворюють трикутник, тобто між відповідними вузловими точками всередині трикутника.

Позначення:

$u_{AB}(t), u_{BC}(t), u_{CA}(t)$ – миттєві значення,

$\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ – комплексні значення.

Фазні струми (англ. **Phase Currents**) – струми, що протікають через гілки навантаження або через фазу джерела.

Позначення:

$i_{AB}(t), i_{BC}(t), i_{CA}(t)$ – миттєві значення,

$\dot{I}_{AB}, \dot{I}_{BC}, \dot{I}_{CA}$ – комплексні значення.

1.2.2.3. Основні співвідношення між лінійними та фазними величинами при з'єднанні фаз «трикутник в трикутник»

Грунтовний теоретичний аналіз трифазних електричних кіл зі з'єднанням фаз джерела та навантаження за схемою «трикутник в трикутник» виконується на основі відповідної схеми заміщення, із використанням методу комплексних величин. Такий підхід дозволяє формалізувати взаємозв'язки між струмами та напругами в кожній фазі та провести подальше аналітичне або числове дослідження режимів роботи кола.

При побудові схеми заміщення джерела можуть застосовуватись моделі подібні до попереднього випадку з'єднання:

- повна модель джерела – з урахуванням внутрішніх опорів фаз, якщо необхідно відобразити втрати потужності або вплив конструктивних особливостей генератора;
- ідеалізована модель джерела напруги – внутрішні опори вважаються нульовими, що спрощує розрахунок у більшості типових задач;
- узагальнене позначення затискачів фаз (A, B, C) – використовується в задачах, де внутрішня структура джерела не має принципового значення для результату аналізу.

На рис. 1.2.5 представлено комплексну схему заміщення трифазного кола зі з'єднанням типу «трикутник в трикутник», побудовану з використанням ідеалізованої моделі джерела.

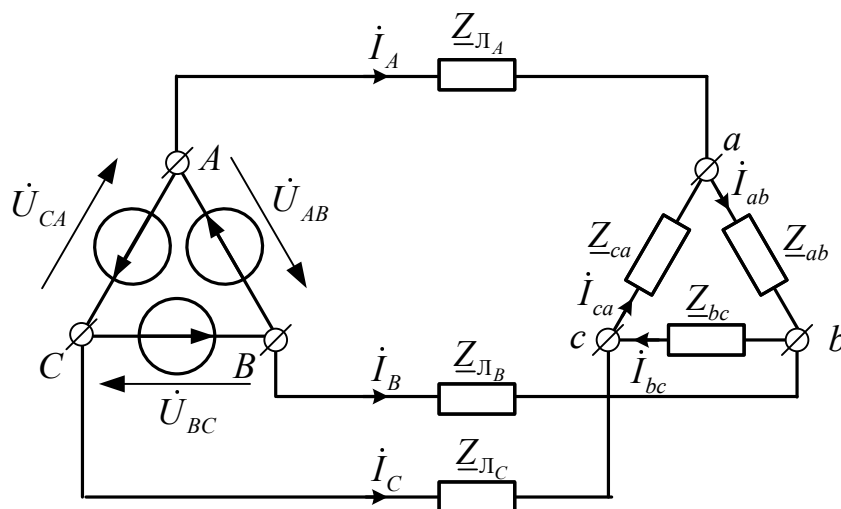


Рисунок 1.2.5 – Схема заміщення трифазного кола при з'єднанні фаз джерела та споживача «трикутник в трикутник»

На схемах заміщення (рис. 1.2.5) приймаються наступні умовні позначення:

$\dot{E}_{AB}, \dot{E}_{BC}, \dot{E}_{CA}$ – фазні ЕРС джерела (англ. **Phase Electromotive Forces**);

$\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ – фазні напруги джерела (англ. **Phase Voltages**) – напруги на фазних елементах джерела та навантаження;

$\underline{Z}'_{ab}, \underline{Z}'_{bc}, \underline{Z}'_{ca}$ – фазні опори навантаження (англ. **Phase Impedances**);

$\underline{Z}_{\text{Л}A}, \underline{Z}_{\text{Л}B}, \underline{Z}_{\text{Л}C}$ – опори лінійних проводів (англ. **Line Conductor Impedances**);

$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ – лінійні струми (англ. **Line Currents**) – протікають між фазними точками;

$\dot{I}_{ab}, \dot{I}_{bc}, \dot{I}_{ca}$ – фазні струми (англ. **Phase currents**) – протікають через окремі фази навантаження (або джерела)

Симетричне трифазне електричне коло із з'єднанням фаз джерела та навантаження за схемою «трикутник в трикутник» також характеризується усталеними співвідношеннями між фазними та лінійними електричними величинами.

Оскільки кожна фаза джерела та навантаження підключена між відповідними лінійними проводами, напруга на кожному з фазних елементів як симетричного джерела, так і симетричного навантаження збігається з відповідною лінійною напругою. Отже, у трифазному колі зі з'єднанням фаз за схемою «трикутник в трикутник» фазні та лінійні напруги є рівними між собою за модулем та початковою фазою:

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\text{Л}} = U_{\Phi} \quad (1.2.3)$$

та формують одну систему напруг

$$\dot{U}_{AB} = U_{AB} e^{j\psi_A},$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ},$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ}.$$

Встановлення співвідношень між лінійними та фазними струмами ґрунтується на припущенні про симетрії трифазної системи, за якого:

- модулі лінійних струмів однакові $I_A = I_B = I_C = I_{\text{Л}}$;
- модулі фазних струмів джерела однакові $I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = I_{\Phi_{\text{дж}}}$;

- модулі фазних струмів споживача однакові $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_{\Phi_{\text{сп}}}$;
- кутові зсуви між сусідніми фазними (або лінійними) струмами становлять 120° .

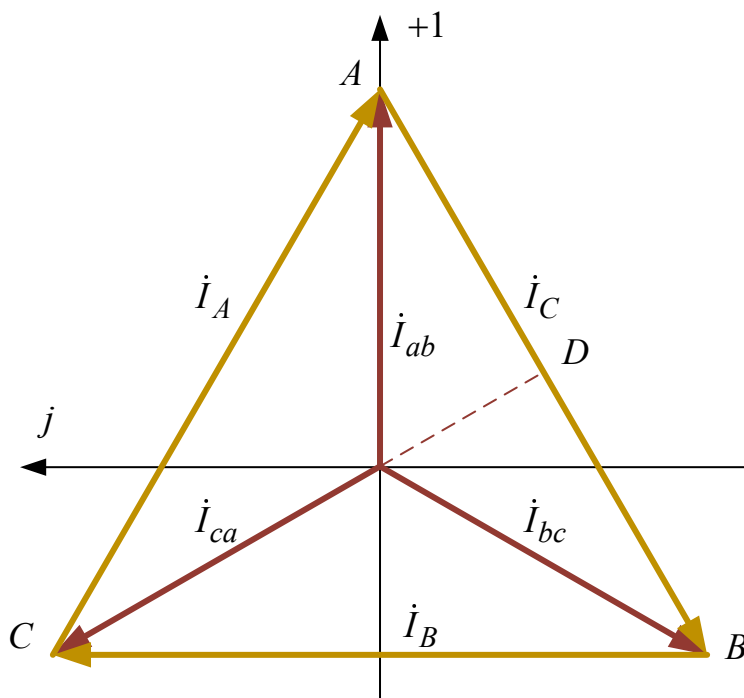
Для встановлення кількісного співвідношення між фазними та лінійними струмами використовується векторна діаграма струмів симетричного джерела та / або навантаження. На рис. 1.2.6 приведено приклад такої векторної діаграми струмів споживача. Початкова фаза фазної напруги фази A приймається за нульову ($\psi_u = \psi_A = 0^\circ$), тобто:

$$\dot{I}_{ab} = I_{ab} e^{-j\varphi},$$

де $\varphi = \psi_u - \psi_i$ – кут зсуву фаз між напругою та струмом по кожній фазі;

$\psi_i = \psi_u - \varphi = \psi_A - \varphi = 0^\circ - \varphi = -\varphi$ – початкова фаза струму.

Враховуючи симетрію трифазного кола, кут зсуву фаз для кожної фази буде однаковим.



$$\dot{I}_{ab} = I_{ab} e^{-j\varphi},$$

$$\dot{I}_{bc} = \dot{I}_{ab} e^{-j120^\circ},$$

$$\dot{I}_{ca} = \dot{I}_{ab} e^{j120^\circ}$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = I_A e^{j(-\varphi-30^\circ)},$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} = \dot{I}_A e^{-j120^\circ},$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} = \dot{I}_A e^{j120^\circ},$$

Рисунок 1.2.6 – Векторна діаграма розподілу фазних та лінійних струмів симетричного трифазного навантаження ($Z'_{ab} = Z'_{bc} = Z'_{ca}$)

Виходячи з геометричних міркувань та аналізу векторної діаграми, отримують:

- вектор лінійного струму відстає від відповідного фазного струму на кут 30° ;
- модуль лінійного струму перевищує модуль фазного струму у $\sqrt{3}$

Пояснення вище наведених співвідношень лежить в основі аналізу прямокутного трикутника $\triangle AND$, утвореного при опусканні перпендикуляру з початку координат на вектор лінійного струму. В утвореному трикутнику:

- гіпотенуза AN – вектор фазного струму $\bar{I}_{ab}$;
- катет NA – половина вектору лінійного струму $\bar{I}_C$;
- катет ND – перпендикуляр, опущений з початку координат на вектор $\bar{I}_C$.

Оскільки вектори $\bar{I}_{ab}$ і $\bar{I}_{bc}$ мають однакову довжину та зсунуті на 120° , то трикутник $\triangle ANB$ є рівнобедреним, і проведений перпендикуляр водночас є бісектрисою кута $\angle ANB = 120^\circ$, тобто ділить його навпіл. Таким чином, $\angle NAD = 30^\circ$, а $\angle DNA = 60^\circ$.

Із співвідношення сторін у прямокутному трикутнику:

$$\cos 30^\circ = \frac{DA}{AN} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{I_L}{I_\Phi} \Rightarrow I_L = \sqrt{3}I_\Phi. \quad (1.2.4)$$

1.2.3. Баланс потужностей в симетричних трифазних колах

У симетричних трифазних електричних колах усі фази мають однакові параметри: рівні за модулем фазні ЕРС (або фазні напруги), однакові фазні опори навантаження, а також однакові за модулем фазні струми, зсунуті між собою на кут 120° . За таких умов потужність, споживана кожною фазою, однакова, що забезпечує передбачуваність та узгодженість роботи кола в усталеному режимі.

У таких колах співвідношення між лінійними та фазними електричними величинами набувають визначених формулювань, що дозволяє застосовувати уніфіковані вирази для обчислення активної, реактивної, повної та комплексної потужностей незалежно від схеми з'єднання фаз: «зірка–зірка» чи «трикутник–трикутник».

У таблиці нижче наведено порівняння основних розрахункових співвідношень для симетричних трифазних кіл із зазначеними схемами з'єднання фаз.

Таблиця 1.2.1 – Порівняння розрахункових виразів для визначення потужностей у симетричних трифазних колах

З'єднанням фаз за схемою «зірка в зірку»	З'єднанням фаз за схемою «трикутник в трикутник»
Умова симетрії для випадку трифазного джерела:	
$U_A = U_B = U_C = U_{\Phi},$ $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\text{Л}},$ $I_A = I_B = I_C = I_{\Phi} = I_{\text{Л}}.$	$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\Phi} = U_{\text{Л}},$ $I_A = I_B = I_C = I_{\text{Л}},$ $I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = I_{\Phi}.$
Співвідношення між фазними та лінійними величинами:	
$I_{\text{Л}} = I_{\Phi},$ $U_{\text{Л}} = \sqrt{3}U_{\Phi}.$	$U_{\text{Л}} = U_{\Phi}$ $I_{\text{Л}} = \sqrt{3}I_{\Phi}.$
Активна та реактивна потужності однієї фази:	
$P_{\Phi} = U_A I_A \cos \varphi = U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi$ $Q_{\Phi} = U_A I_A \sin \varphi = U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \varphi$	$P_{\Phi} = U_{AB} I_{AB} \cos \varphi = U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi$ $Q_{\Phi} = U_{AB} I_{AB} \sin \varphi = U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \varphi$
Активна потужність симетричного трифазного кола:	
$P = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi =$ $= \sqrt{3} \sqrt{3} \frac{U_{\text{Л}}}{\sqrt{3}} I_{\text{Л}} \cos \varphi =$ $= \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi$	$P = 3P_{\Phi} = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi =$ $= \sqrt{3} \sqrt{3} U_{\text{Л}} \frac{I_{\text{Л}}}{\sqrt{3}} \cos \varphi =$ $= \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi,$
Реактивна потужність симетричного трифазного кола:	
$Q = 3Q_{\Phi} = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \varphi =$ $= \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi$	$Q = 3Q_{\Phi} = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \varphi =$ $= \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi_{\Phi},$
Повна потужність симетричного трифазного кола:	
$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \underbrace{\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}_1 = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}} I_{\text{Л}},$ $S = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} = 3U_{\Phi} I_{\Phi} = \sqrt{P^2 + Q^2}.$	
Комплексна потужність трифазного кола:	
$\underline{S} = \dot{U}_A^* \dot{I}_A + \dot{U}_B^* \dot{I}_B + \dot{U}_C^* \dot{I}_C = P + jQ$	$\underline{S} = \dot{U}_{AB}^* \dot{I}_{AB} + \dot{U}_{BC}^* \dot{I}_{BC} + \dot{U}_{CA}^* \dot{I}_{CA} = P + jQ$

Таким чином, у симетричному трифазному колі незалежно від способу з'єднання фаз – «зірка в зірку» або «трикутник в трикутник» – застосовуються уніфіковані вирази для визначення активної, реактивної, повної та комплексної потужностей. Це зумовлено однаковим значенням потужностей у кожній фазі та усталеними співвідношеннями між фазними і лінійними величинами.

$$\begin{aligned} P &= 3U_{\Phi}I_{\Phi} \cos \varphi = \sqrt{3}U_{\text{Л}}I_{\text{Л}} \cos \varphi \text{ Вт}, \\ Q &= 3U_{\Phi}I_{\Phi} \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}}I_{\text{Л}} \sin \varphi \text{ Вар}, \\ S &= \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}}I_{\text{Л}} = 3U_{\Phi}I_{\Phi} = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ ВА}. \end{aligned}$$

Усі види потужності в симетричному трифазному колі взаємопов'язані за аналогією до так званого трикутника потужностей (рис. 1.2.7): активна і реактивна потужності є його катетами, а повна потужність – гіпотенузою. Такий підхід дозволяє наочно відобразити енергетичну рівновагу та оцінити ефективність роботи кола.

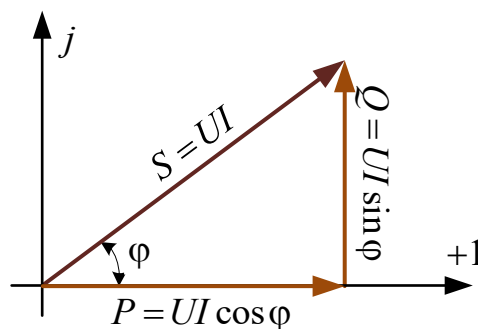


Рисунок 1.2.7 – Трикутник потужностей симетричного трифазного кола

Слід розрізняти поняття коефіцієнта потужності і косинуса кута зсуву фаз між напругою та струмом. У симетричних трифазних колах коефіцієнтом потужності називається відношення активної потужності до повної потужності всієї трифазної системи:

$$PF = \cos \varphi = \frac{P}{S}.$$

Натомість відношення активної та повної потужностей, визначених лише для однієї фази, є виключно косинусом кута зсуву фаз і не відповідає значенню коефіцієнту потужності в енергетичному сенсі.

1.2.4. Переваги застосування трифазних кіл

Застосування трифазних електричних кіл у системах енергопостачання є переважним у сучасній енергетиці, що зумовлено низкою істотних техніко-економічних переваг. Найважливішими серед них є:

1. **Зменшення обсягу провідникового матеріалу.**

Для передачі тієї ж потужності трифазне коло потребує менше провідникових ресурсів порівняно з однофазним.

2. **Стабільність миттєвої потужності.**

Для збалансованого трифазного кола миттєва активна потужність залишається сталою, на відміну від пульсацій в однофазній системі. Це забезпечує:

- рівномірне обертання електродвигунів без пульсацій;
- знижений рівень вібрації й акустичних шумів;
- підвищену надійність електротехнічного обладнання.

3. **Простота і надійність трифазного обладнання.**

Трифазні асинхронні двигуни та трансформатори мають просту конструкцію без складних стартових схем, працюють ефективно, економічно та з високим коефіцієнтом потужності. Вони широко застосовуються в енергетиці та промисловості.

Тема 1.3. Методи аналізу трифазних кіл

1.3.1. Класичний підхід до аналізу трифазних кіл

Аналіз трифазних електричних кіл, незалежно від способу з'єднання фаз і типу симетрії системи, може бути реалізований із використанням загальновідомих методів аналізу складних електричних кіл.

Серед них найбільш доцільним і універсальним підходом до аналізу трифазних систем із будь-яким способом з'єднання фаз джерела та навантаження (включно з випадками паралельного підключення декількох споживачів) вважається метод двох вузлів. Цей метод ґрунтується на тому, що шляхом еквівалентних перетворень будь-яке трифазне коло може бути зведене до конфігурації типу «зірка в зірку», яка містить два основних вузли.

Таке перетворення виконується відповідно до таких положень:

- трифазне джерело із внутрішнім з'єднанням фаз за схемою «трикутник» замінюється еквівалентним джерелом зі з'єднанням фаз за схемою «зірка» із використанням усталених співвідношень між лінійними та фазними напругами;

- трифазне навантаження, з'єднане за схемою «трикутник», перетворюється на еквівалентне навантаження зі з'єднанням «зірка» згідно з нормативними виразами для заміни фазних опорів;
- у разі мішаних схем з'єднання фаз використовуються відповідні формули для еквівалентного заміщення при послідовному або паралельному з'єднанні елементів.

Нижче приведено три характерні випадки аналізу симетричних трифазних кіл із з'єднанням фаз за схемою «зірка в зірку»:

- трифазне коло з наявністю нейтрального проводу;
- трифазне коло з наявністю ідеального (без втрат) нейтрального проводу;
- трифазне коло без нейтрального проводу.

Ці варіанти дозволяють охопити основні конфігурації симетричних кіл, що застосовуються в системах електропостачання та електропривода.

1.3.1.1. Аналіз трифазного кола за наявності нейтрального проводу

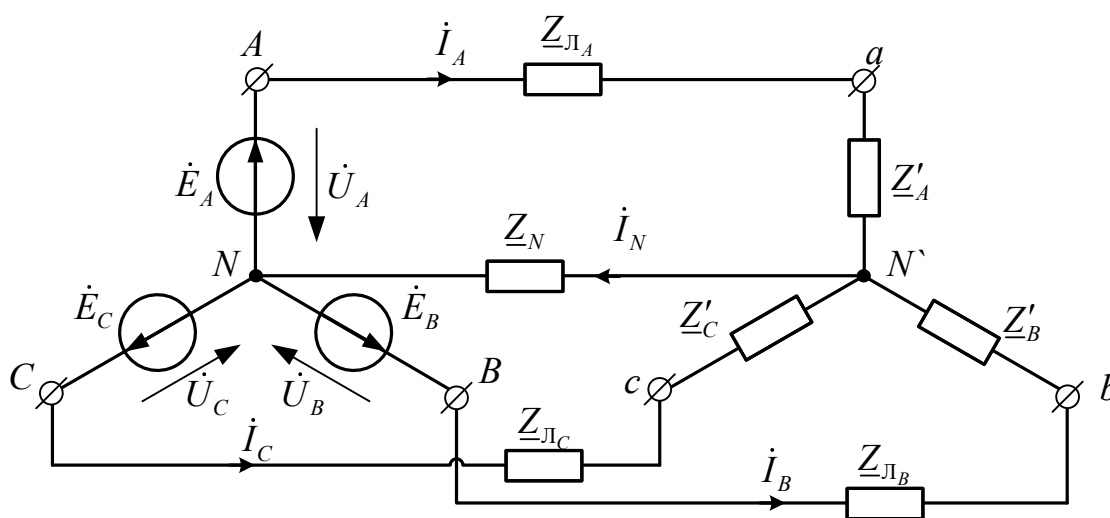


Рисунок 1.3.1 – Приклад схеми трифазного чотирипровідного кола для реалізації аналізу у загальному випадку

Вважаються відомими наступні електричні величини та параметри кола:

- модуль фазної напруги симетричного трифазного джерела U_Φ ;
- опори фаз навантаження $Z'_A \neq Z'_B \neq Z'_C$;
- опори лінійних проводів $Z_{LA} = Z_{LB} = Z_{LC} \neq 0$;

- опір нейтрального проводу $\underline{Z}_N \neq 0$.

Враховуючи вид симетрії трифазної системи ЕРС/напруг записується система комплексних величин фазних ЕРС/напруг з урахуванням, що для будь-якого виду симетрії справедлива рівність модулів діючих значень ($U_A = U_B = U_C = U_\Phi$):

Пряма послідовність	Зворотна послідовність	Нульова послідовність
$\dot{U}_A = U_\Phi e^{j\psi};$	$\dot{U}_A = U_\Phi e^{j\psi};$	$\dot{U}_A = U_\Phi e^{j\psi};$
$\dot{U}_B = U_\Phi e^{j(\psi-120^\circ)} = a^2 \dot{U}_A;$	$\dot{U}_B = U_\Phi e^{j(\psi+120^\circ)} = a \dot{U}_A;$	$\dot{U}_B = \dot{U}_C = \dot{U}_A.$
$\dot{U}_C = U_\Phi e^{j(\psi+120^\circ)} = a \dot{U}_A.$	$\dot{U}_C = U_\Phi e^{j(\psi-120^\circ)} = a^2 \dot{U}_A.$	

Для лінійних напруг джерела справедливими є співвідношення, приведені нижче, за умови:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B;$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C;$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

Пряма послідовність	Зворотна послідовність	Нульова послідовність
$\dot{U}_{AB} = U_\Phi \sqrt{3} e^{j(\psi+30^\circ)},$	$\dot{U}_{AB} = U_\Phi \sqrt{3} e^{j(\psi-30^\circ)},$	$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{CA} = 0.$
$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ},$	$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ},$	
$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ}.$	$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ}.$	

Схема, зображеного рис. 1.3.1, трифазного кола містить чотири проводи та два вузли N і N' . Тому для її розрахунку доцільно обрати метод двох вузлів.

Прийнявши потенціал нейтральної точки джерела за нуль $\varphi_N = 0$, вираз для розрахунку потенціалу в нейтральній точці споживача за методом вузлових потенціалів

$$\dot{\phi}_{N'} \cdot (\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N) = \dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C.$$

Оскільки $\dot{U}_{N'N} = \dot{\phi}_{N'} - \dot{\phi}_N = \dot{\phi}_{N'} - 0 = \dot{\phi}_{N'}$, то вираз відносно невідомого потенціалу нейтральної точки навантаження набуде вигляду:

$$\dot{U}_{N'N} \cdot (\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N) = \dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C.$$

З отриманого рівняння виражається напруга зміщення нейтралі:

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N},$$

де $\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}'_A + \underline{Z}_{\text{Л}_A}}$, $\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}'_B + \underline{Z}_{\text{Л}_B}}$, $\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}'_C + \underline{Z}_{\text{Л}_C}}$, $\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}$ – комплексні провідності фаз та нейтрального проводу з урахуванням, що опори лінії та навантаження з'єднані послідовно.

Розрахунок напруг на фазах навантаження з урахуванням падіння напруги на опорі лінії реалізується за II законом Кірхгофа за умови, що обхід кожної фази замикається через нейтральний провід:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AN'} &= \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N}, \\ \dot{U}_{BN'} &= \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N}, \\ \dot{U}_{CN'} &= \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N}.\end{aligned}$$

Струми у лініях кола та фазах навантаження розраховуються за законом Ома для ділянки із послідовним з'єднанням опору лінії та навантаження, тобто відносно кожної пари фазної точки та нейтральної точки навантаження:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{U}_{AN'} \underline{Y}_A = \frac{\dot{U}_{AN'}}{\underline{Z}'_A + \underline{Z}_{\text{Л}_A}} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{N'N}}{\underline{Z}'_A + \underline{Z}_{\text{Л}_A}}, \\ \dot{I}_B &= \dot{U}_{BN'} \underline{Y}_B = \frac{\dot{U}_{BN'}}{\underline{Z}'_B + \underline{Z}_{\text{Л}_B}}, \\ \dot{I}_C &= \dot{U}_{CN'} \underline{Y}_C = \frac{\dot{U}_{CN'}}{\underline{Z}'_C + \underline{Z}_{\text{Л}_C}}.\end{aligned}$$

Струм у нейтральному проводі може бути розрахованим двома способами: за I законом Кірхгофа або законом Ома:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{U}_{N'N} \underline{Y}_N.$$

Розрахунок падінь напруг на опорах лінії та фазах навантаження реалізується за законом Ома:

Напруги на лініях	Фазні напруги навантаження
$\dot{U}_{Aa} = \dot{I}_A \underline{Z}_{\text{Л}A},$	$\dot{U}_{aN'} = \dot{I}_A \underline{Z}'_A$
$\dot{U}_{Bb} = \dot{I}_B \underline{Z}_{\text{Л}B},$	$\dot{U}_{bN'} = \dot{I}_B \underline{Z}'_B$
$\dot{U}_{Cc} = \dot{I}_C \underline{Z}_{\text{Л}C}.$	$\dot{U}_{cN'} = \dot{I}_C \underline{Z}'_C$

Рекомендований алгоритм аналізу трифазного кола у загальному випадку:

1. Подати задане трифазне коло з'єднанням за схемою «зірка в зірку» застосувавши метод еквівалентних перетворень;
2. Записати систему комплексів фазних та лінійних напруг відносно їх діючих значень;
3. Скласти рівняння за методом двох вузлів відносно нейтральних точок джерела і навантаження та виконати розрахунок напруги зміщення нейтралі;
4. Розрахувати напруги між фазними точками джерела та нейтральною точкою навантаження за II законом Кірхгофа;
5. Виконати розрахунок фазних струмів;
6. Розрахувати струм у нейтральному проводі;
7. Перевірити вірність проведених розрахунків за балансом потужностей.

Приклад 1.3.1. Виконати аналіз несиметричного трифазного кола, поданого на рис. 1.3.2, за відомих параметрів та умови, що живлення несиметричного навантаження здійснюється від симетричного джерела напруг прямої послідовності.

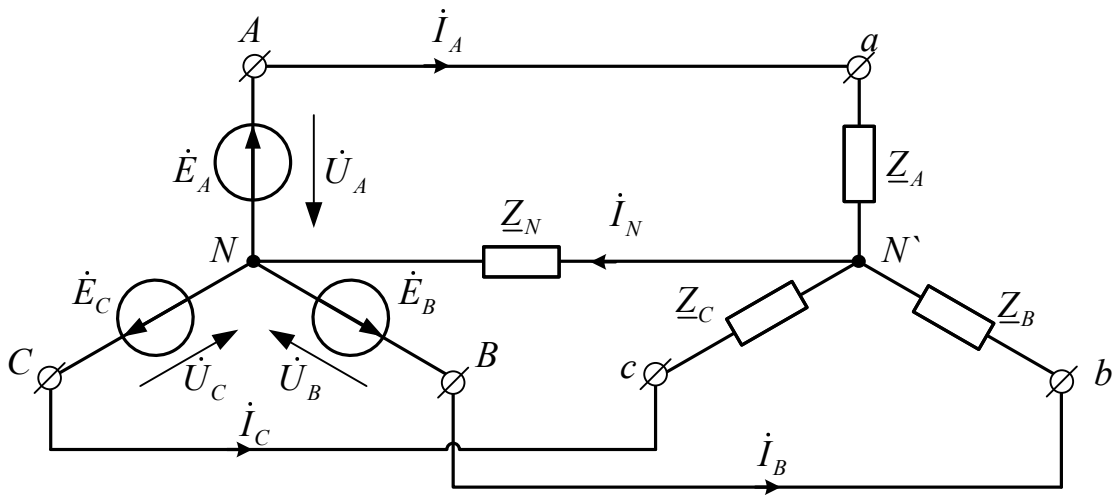


Рисунок 1.3.2 – Схема несиметричного трифазного кола до прикладу 1.3.1

Відомі параметри трифазного кола (рис. 1.3.2):

$E_{\Phi} = 100 \text{ В}$ – діюче значення фазної ЕРС;

$Z_A = (5 - j5) \text{ Ом}$,

$Z_B = (5 - j5) \text{ Ом}$, – опори фаз навантаження;

$Z_C = (5 + j5) \text{ Ом}$,

$Z_N = 2 \text{ Ом}$ – опір нейтрального проводу.

Опорами ліній знехтувано.

Розв'язання.

Приймаючи початкову фазу ЕРС фази A за нуль записуємо системи комплексних величин фазних та лінійних напруг відносно діючих значень:

Система фазних напруг	Система лінійних напруг
$\dot{E}_A = 100 \text{ В}$,	$\dot{E}_{AB} = 100\sqrt{3}e^{j30^\circ} \text{ В}$,
$\dot{E}_B = 100e^{-j120^\circ} \text{ В}$,	$\dot{E}_{BC} = 100\sqrt{3}e^{-j90^\circ} \text{ В}$,
$\dot{E}_C = 100e^{j120^\circ} \text{ В}$,	$\dot{E}_{CA} = 100\sqrt{3}e^{j150^\circ} \text{ В}$,

Для схеми заданого кола (рис. 1.3.2) записуємо розрахункових вираз напруги зміщення нейтралі:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{N'N} &= \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \frac{100 \frac{1}{5-j5} + 100e^{-j120^\circ} \frac{1}{5-j5} + 100e^{j120^\circ} \frac{1}{5+j5}}{\frac{1}{5-j5} + \frac{1}{5-j5} + \frac{1}{5+j5} + \frac{1}{2}} = \\ &= 24.8e^{j22.87^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Виконуємо розрахунок напруг між фазними точками джерела та нейтральною точкою навантаження:

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = 100 - 24.8e^{j22.87^\circ} = 77.74e^{-j7.13^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{BN'} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = 100e^{-j120^\circ} - 24.8e^{j22.87^\circ} = 120.71e^{-j127.13^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = 100e^{j120^\circ} - 24.8e^{j22.87^\circ} = 105.98e^{j133.43^\circ} \text{ В}.$$

Застосувавши закон Ома для ділянок між фазними точками джерела та нейтральною точкою навантаження розраховуємо фазні струми:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN'}}{\underline{Z}_A} = \frac{77.74e^{-j7.13^\circ}}{5 - j5} = 10.99e^{j37.87^\circ} \text{ А},$$

$$7.07e^{-j45^\circ}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN'}}{\underline{Z}_B} = \frac{120.71e^{-j127.13^\circ}}{5 - j5} = 17.07e^{-j82.13^\circ} \text{ А},$$

$$7.07e^{-j45^\circ}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN'}}{\underline{Z}_C} = \frac{105.98e^{j133.43^\circ}}{5 + j5} = 14.99e^{j88.43^\circ} \text{ А}.$$

$$7.07e^{j45^\circ}$$

Струм у нейтральному проводі визначаємо за I законом Кірхгофа:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 10.99e^{j37.87^\circ} + 17.07e^{-j82.13^\circ} + 14.99e^{j88.43^\circ} = 12.4e^{j22.87^\circ} \text{ А},$$

$$\text{або } \dot{I}_N = \dot{U}_{N'N} \underline{Y}_N = 24.8e^{j22.87^\circ} \cdot \frac{1}{2} = 12.4e^{j22.87^\circ} \text{ А}.$$

Суміщені векторна діаграма струмів і топографічна діаграма напруг приведена на рис. 1.3.3.

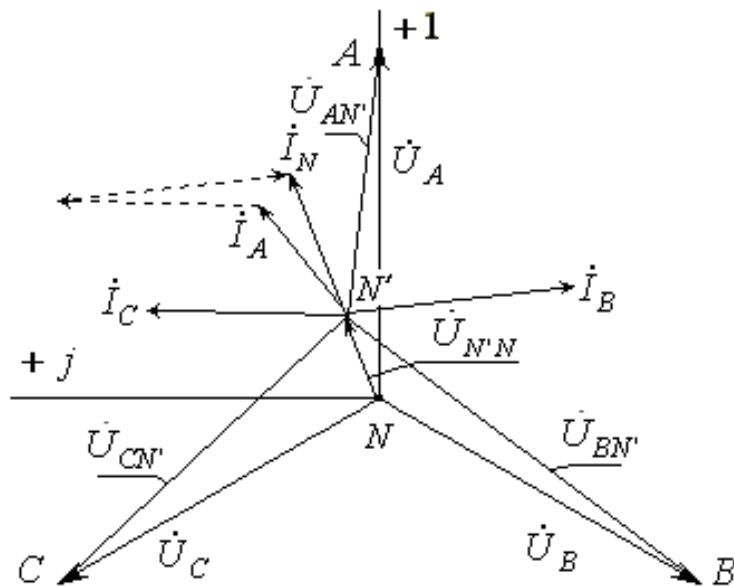


Рисунок 1.3.3 – Векторна діаграма розподілу напруг та струмів для трифазного кола (рис. 1.3.2) за умови живлення від джерела прямої послідовності

Висновок: у всіх випадках живлення несиметричного навантаження від симетричного джерела прямої чи зворотної послідовностей, наявна напруга зміщення нейтралі, що спричиняє несиметрію фазних напруг на фазах навантаження.

Приклад 1.3.2. Виконати аналіз несиметричного трифазного кола (рис. 1.3.2) та відомих параметрів заданих у прикладі 1.3.1 за умови, що живлення несиметричного навантаження здійснюється від симетричного джерела напруг нульової послідовності.

Розв’язання.

Приймаючи початкову фазу ЕРС фази A за нуль записуємо системи комплексних величин фазних та лінійних напруг джерела відносно діючих значень:

Система фазних напруг	Система лінійних напруг
$\dot{E}_A = \dot{E}_B = \dot{E}_C = 100e^{j0^\circ} \text{ В}$	$\dot{E}_{AB} = \dot{E}_{BC} = \dot{E}_{CA} = 0$

Виконуємо розрахунок напруги зміщення нейтралі :

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A(\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C)}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \frac{100e^{j0^\circ} \left(\frac{1}{5-j5} + \frac{1}{5-j5} + \frac{1}{5+j5} \right)}{\frac{1}{5-j5} + \frac{1}{5-j5} + \frac{1}{5+j5} + \frac{1}{2}} = 39.04e^{j11.30^\circ} \text{ В.}$$

Напруги на фазах навантаження:

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_{BN'} = \dot{U}_{CN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = 100 - 39.04e^{j11.30^\circ} = 62.19e^{-j7.07^\circ} \text{ В.}$$

Фазні струми:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{AN'}}{\underline{Z}_A} = \frac{\dot{U}_{BN'}}{\underline{Z}_B} = \frac{62.19e^{-j7.07^\circ}}{5 - j5} = 8.795e^{-j37.93^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN'}}{\underline{Z}_C} = \frac{62.19e^{-j7.07^\circ}}{5 + j5} = 8.795e^{-j52.07^\circ} \text{ А.}$$

Струм у нейтральному проводі:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 8.795e^{j37.93^\circ} + 8.795e^{j37.93^\circ} + 8.795e^{-j52.07^\circ} = 19.6e^{j11.36^\circ} \text{ А,}$$

$$\text{або } \dot{I}_N = \dot{U}_{N'N} \underline{Y}_N = 39.04e^{j11.30^\circ} \cdot \frac{1}{2} = 19.52e^{j11.30^\circ} \text{ А.}$$

Суміщена векторна діаграма струмів і топографічна діаграма напруг показана на рис. 1.3.4.

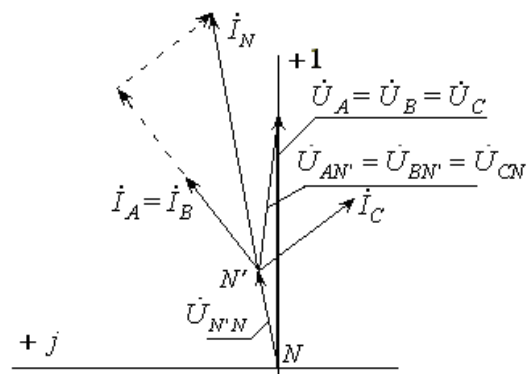


Рисунок 1.3.4 – Векторна діаграма розподілу напруг та струмів для трифазного кола (рис. 1.3.2) за умови живлення від джерела прямої послідовності

Висновок: у разі живлення несиметричного навантаження від симетричного джерела нульової послідовності з'являється напруга зміщення нейтралі $\dot{U}_{N'N}$ при зберігається рівність діючих значень фазних напруг на навантаженнях.

1.3.1.2. Аналіз трифазного кола за наявності ідеального (без втрат) нейтрального проводу

Режим живлення несиметричного навантаження ($\underline{Z}'_A \neq \underline{Z}'_B \neq \underline{Z}'_C$) від симетричної трифазної системи ЕРС через симетричну лінію передачі ($\underline{Z}_{\text{Л}A} = \underline{Z}_{\text{Л}B} = \underline{Z}_{\text{Л}C} \neq 0$) із нейтральним проводом нульового опору (ідеальним) є поширеною аналітичною моделлю в інженерних розрахунках. Такий підхід базується на припущенні про відсутність падіння напруги у нейтральному проводі та повну рівність потенціалів нейтральних точок джерела та навантаження.

Цей випадок моделює умови або короткого замикання між нейтральними точками, або ідеалізованого з'єднання з нульовим опором нейтрального проводу. Така модель дозволяє значно спростити математичний опис та аналіз електромагнітних процесів у трифазному колі з несиметричним навантаженням. На рис. 1.3.5 наведено схему заміщення для аналізу трифазного кола з прямою послідовністю чергування фаз, за наявності симетричного джерела напруги та ідеального нейтрального проводу.

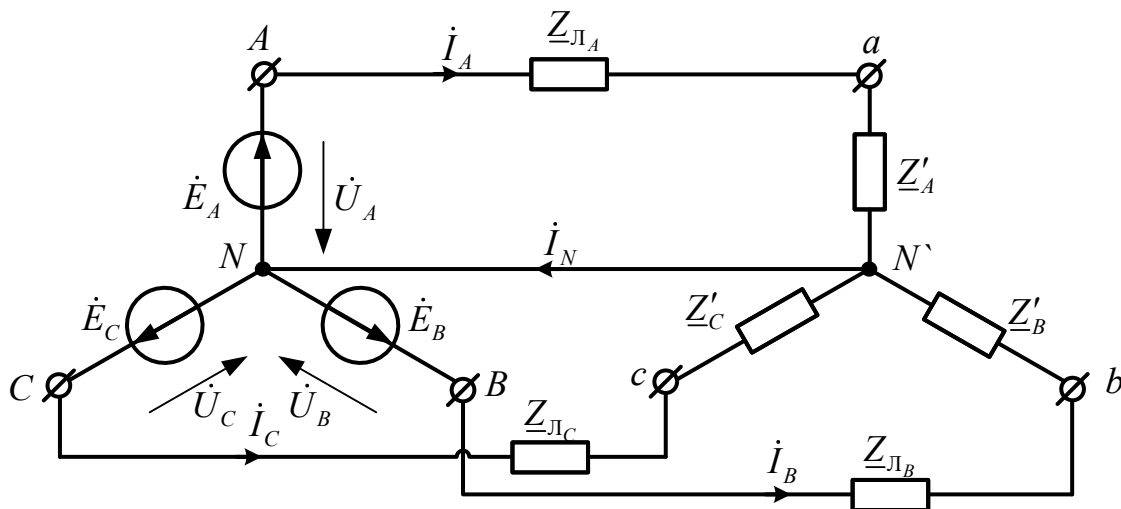


Рисунок 1.3.5 – Приклад схеми трифазного чотирипровідного кола для реалізації аналізу кола з ідеалізованим нейтральним проводом

Припущення того, що опір нейтрального проводу рівний нулю ($\underline{Z}_N = 0$), призводить до

- рівності нулю напруги зміщення нейтралі $\dot{U}_{N'N} = \dot{I}_N \underline{Z}_N = 0$;

- рівності фазних напруг джерела відповідним напругам між фазними точками джерела та нейтральною точкою навантаження:

Пряма послідовність	Зворотна послідовність	Нульова послідовність
$\dot{U}_A = \dot{U}_{AN'} = U_{\Phi} e^{j\Psi};$ $\dot{U}_B = \dot{U}_{BN'} = a^2 \dot{U}_A;$ $\dot{U}_C = \dot{U}_{CN'} = a \dot{U}_A.$	$\dot{U}_A = \dot{U}_{AN'} = U_{\Phi} e^{j\Psi};$ $\dot{U}_B = \dot{U}_{BN'} = a \dot{U}_A;$ $\dot{U}_C = \dot{U}_{CN'} = a^2 \dot{U}_A.$	$\dot{U}_A = \dot{U}_{AN'} = U_{\Phi} e^{j\Psi};$ $\dot{U}_B = \dot{U}_{BN'};$ $\dot{U}_C = \dot{U}_{CN'};$ $\dot{U}_B = \dot{U}_C = \dot{U}_A.$

Таким чином, струм кожної фази трифазного кола не залежить від струмів у інших фазах:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{U}_{AN'} \underline{Y}_A = \frac{\dot{U}_{AN'}}{\underline{Z}'_A + \underline{Z}_{\text{Л}A}} = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}'_A + \underline{Z}_{\text{Л}A}}, \\ \dot{I}_B &= \dot{U}_{BN'} \underline{Y}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}'_B + \underline{Z}_{\text{Л}B}}, \\ \dot{I}_C &= \dot{U}_{CN'} \underline{Y}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}'_C + \underline{Z}_{\text{Л}C}}. \end{aligned}$$

Струм у нейтральному проводі у випадку ідеалізованого нейтрального проводу визначається виключно за I законом Кірхгофа:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C \neq 0.$$

Висновок: для забезпечення незалежної роботи кожної фази трифазного кола, а отже прямої залежності струму кожної фази виключно від опору її навантаження, опір нейтрального проводу повинен бути якомога меншим.

1.3.1.3. Аналіз трифазного кола без нейтрального проводу

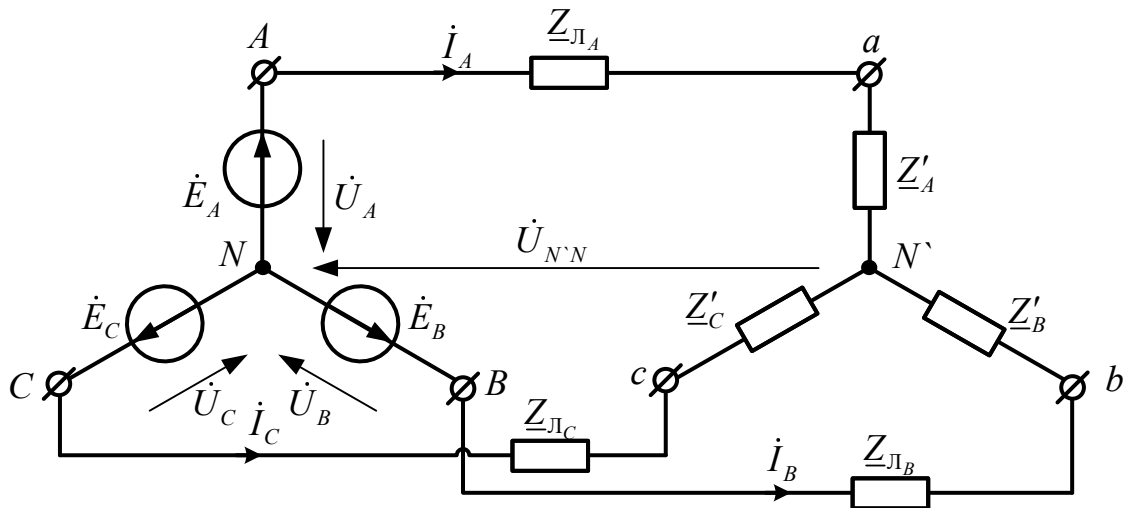


Рисунок 1.3.6 – Приклад схеми трифазного чотирипровідного кола для реалізації аналізу кола без нейтрального проводу

У випадках аналізу трифазних кіл за відсутності нейтрального провідника ($Z_N = \infty$), що або викликано обривом нейтралі, або функціональне призначення кола не передбачає наявності нейтралі, за наявності несиметрії з боку навантаження напруга зміщення нейтралі відмінна від нуля:

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} \neq 0,$$

$$\text{де } \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}'_A + \underline{Z}_{ЛA}}, \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}'_B + \underline{Z}_{ЛB}}, \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}'_C + \underline{Z}_{ЛC}}, \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}.$$

Наявність напруги зміщення нейтралі викликає:

- несиметрію розподілу напруг між фазними точками джерела та нейтральною точкою навантаження:

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N},$$

$$\dot{U}_{BN'} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N},$$

$$\dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N};$$

- несиметрію фазних струмів:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{U}_{AN'} \underline{Y}_A = \frac{\dot{U}_{AN'}}{\underline{Z}'_A + \underline{Z}_{Л_A}} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{N'N}}{\underline{Z}'_A + \underline{Z}_{Л_A}}, \\ \dot{I}_B &= \dot{U}_{BN'} \underline{Y}_B = \frac{\dot{U}_{BN'}}{\underline{Z}'_B + \underline{Z}_{Л_B}}, \\ \dot{I}_C &= \dot{U}_{CN'} \underline{Y}_C = \frac{\dot{U}_{CN'}}{\underline{Z}'_C + \underline{Z}_{Л_C}}. \end{aligned}$$

При цьому сума фазних струмів має бути рівна нулю – $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

Висновок: у трифазному колі з навантаженням, з'єднаним зіркою без нейтрального проводу, несиметрія навантаження приводить до несиметрії фазних напруг трифазного споживача та фазних струмів навіть у разі симетричного генератора.

Приклад 1.3.3. Виконати оцінку розподілу фазних напруг у символічному поданні для живлення несиметричного навантаження від трифазного джерела прямої послідовності (рис. 1.3.7) за умови, що у фазі *A* ввімкнений конденсатор – $\underline{Z}_A = -jX_C$, у фазах *B* і *C* ввімкнені лампи накаливання – активні опори – $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = R$. При цьому виконується рівність опору лампи та модуля опору конденсатора $R = X_C$.

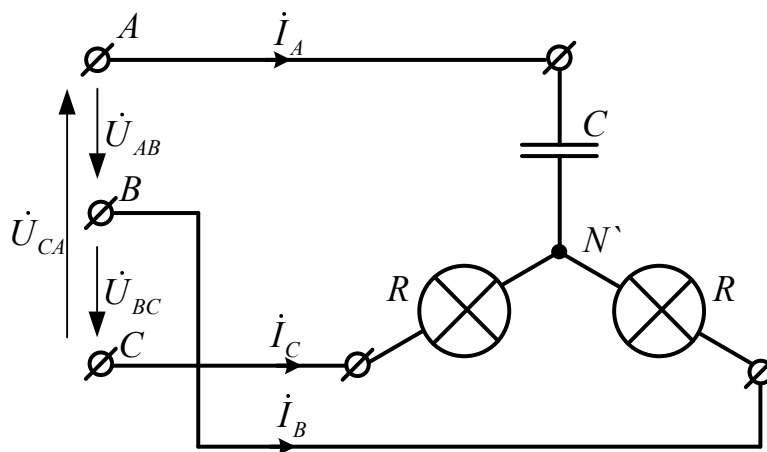


Рисунок 1.3.7 – Схема трифазного кола до прикладу 1.3.3

Розв’язання.

Записуємо розподіл фазних напруг симетричного генератора прямої послідовності:

$$\dot{U}_{AN} = \dot{U}_A,$$

$$\dot{U}_{BN} = \dot{U}_B = a^2 \dot{U}_A,$$

$$\dot{U}_{CN} = \dot{U}_C = a \dot{U}_A.$$

Для визначення фазних напруг навантаження $\dot{U}_{AN'}$, $\dot{U}_{BN'}$, $\dot{U}_{CN'}$ виконуємо розрахунок напруги зміщення нейтралі:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{N'N} &= \frac{\dot{U}_A \frac{1}{\underline{Z}_A} + \dot{U}_B \frac{1}{\underline{Z}_B} + \dot{U}_C \frac{1}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{\dot{U}_A \frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} \left(\overbrace{\dot{U}_B + \dot{U}_C}^{-\dot{U}_A} \right)}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{2}{\underline{Z}_B}} = \frac{\dot{U}_A \left(\frac{1}{\underline{Z}_A} - \frac{1}{\underline{Z}_B} \right)}{\frac{\underline{Z}_B + 2\underline{Z}_A}{\underline{Z}_A \underline{Z}_B}} = \\ &= \dot{U}_A \frac{\underline{Z}_B - \underline{Z}_A}{\underline{Z}_B + 2\underline{Z}_A} = \dot{U}_A \frac{1 - (-j1)}{1 - j2} = \dot{U}_A \frac{1.41e^{j45^\circ}}{2.36e^{-j63.43^\circ}} = 0.6\dot{U}_A e^{j108.43^\circ}. \end{aligned}$$

Тоді фазні напруги навантаження:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AN'} &= \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A - 0.6\dot{U}_A e^{j108.43^\circ} = \dot{U}_A e^{j0^\circ} - 0.6\dot{U}_A e^{j108.43^\circ} = \\ &= \dot{U}_A \left(1e^{j0^\circ} - 0.6e^{j108.43^\circ} \right) = 1.32\dot{U}_A e^{-j25.57^\circ}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{BN'} &= \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_B - 0.6\dot{U}_A e^{j108.43^\circ} = \dot{U}_A e^{-j120^\circ} - 0.6\dot{U}_A e^{j108.43^\circ} = \\ &= \dot{U}_A \left(1e^{-j120^\circ} - 0.6e^{j108.43^\circ} \right) = 1.47\dot{U}_A e^{-j102.2^\circ}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{CN'} &= \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_C - 0.6\dot{U}_A e^{j108.43^\circ} = \dot{U}_A e^{j120^\circ} - 0.6\dot{U}_A e^{j108.43^\circ} = \\ &= \dot{U}_A \left(1e^{j120^\circ} - 0.6e^{j108.43^\circ} \right) = 0.43\dot{U}_A e^{j136.28^\circ}. \end{aligned}$$

Побудова топографічної діаграми зображена на рис. 1.3.8, з якої видно, і це підтверджено розрахунками, що напруга фази B більша від напруги фази C . Відповідно лампа у фазі B буде світитись яскравіше, ніж у фазі C .

Розв'язання.

Зміна порядку чергування фаз напруг і струмів трифазного споживача, наприкладі електричного двигуна, у порівнянні з чергуванням фаз симетричного трифазного джерела можливо за рахунок вибору параметрів і структури окремих фаз навантаження.

Як приклад, пропонується розглянути живлення електродвигуна, поданого ідеалізованою схемою з'єднання його котушок у «зірку», від симетричного трифазного джерела прямої послідовності (рис. 1.3.9).

У разі замкненого ключа S , навантаженням є симетричне трифазне коло з опорам X_L .

Якщо фазні напруги генератора $U_\Phi = U_A = U_B = U_C$ утворюють симетричну систему прямої послідовності, то фазні струми $I_A = I_B = I_C = \frac{U_\Phi}{X_L} = I_\Phi$ також утворюють симетричну систему прямої послідовності і зсунуті за фазою відносно своїх напруг на 90° .

Векторна діаграма струмів і напруг для симетричного кола показана на рис. 1.3.10, а.

Розмикання ключа S призводить до несиметрії навантаження через зміну опору фази A :

$$\underline{Z}_A = -jX_C + jX_L = -j2X_L.$$

Напруга зміщення нейтралі в несиметричному колі

$$\begin{aligned}\dot{U}_{N'N} &= \frac{\dot{U}_A \frac{1}{\underline{Z}_A} + \dot{U}_B \frac{1}{jX_L} + \dot{U}_C \frac{1}{jX_L}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{jX_L}} = \\&= \frac{\dot{U}_A \frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{jX_L} \overbrace{(\dot{U}_B + \dot{U}_C)}^{-\dot{U}_A}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{2}{jX_L}} = \frac{-\dot{U}_A \left(-\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{jX_L} \right)}{\frac{jX_L + 2\underline{Z}_A}{\underline{Z}_A jX_L}} = \frac{-\dot{U}_A \left(\frac{-jX_L + \underline{Z}_A}{\underline{Z}_A jX_L} \right)}{\frac{jX_L + 2\underline{Z}_A}{\underline{Z}_A jX_L}} = \\&= -\dot{U}_A \left(\frac{-jX_L + \underline{Z}_A}{\underline{Z}_A jX_L} \right) \left(\frac{\underline{Z}_A jX_L}{jX_L + 2\underline{Z}_A} \right) = -\dot{U}_A \left(\frac{-jX_L + \underline{Z}_A}{jX_L + 2\underline{Z}_A} \right) = -\dot{U}_A \left(\frac{-jX_L - j2X_L}{jX_L + 4jX_L} \right) = \\&= -\dot{U}_A \left(\frac{-3jX_L}{-3jX_L} \right) = -\dot{U}_A = U_\Phi e^{j180^\circ}.\end{aligned}$$

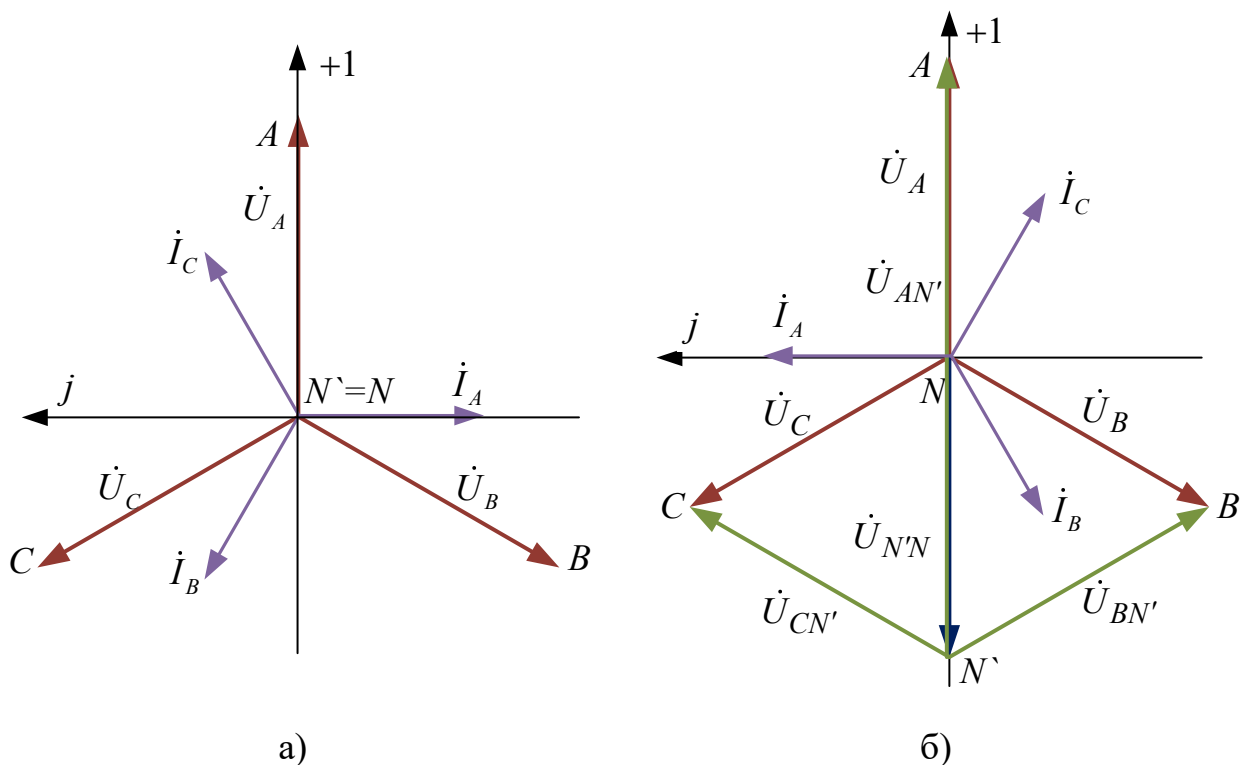


Рисунок 1.3.10 – Векторні діаграми розподілу напруг в колі на рис. 1.3.9 для випадків положення ключа S :

- а) замкненого ключа S ;
б) розімкненого ключа S

Вирази для визначення фазних напруг та струмів:

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A - (-\dot{U}_A) = 2\dot{U}_A = 2U_\Phi e^{j0^\circ}, \quad \dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN'}}{\underline{Z}_A} = I_\Phi e^{j90^\circ},$$

$$\dot{U}_{A'N'} = \dot{I}_A \cdot jX_L = -\dot{U}_A = U_\Phi e^{j180^\circ};$$

$$\dot{U}_{BN'} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = U_\Phi e^{-j60^\circ} = \dot{U}_{A'N'} e^{j120^\circ}, \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN'}}{\underline{Z}_B} = I_\Phi e^{-j150^\circ};$$

$$\dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = U_\Phi e^{j60^\circ} = \dot{U}_{A'N'} e^{-j120^\circ}, \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN'}}{\underline{Z}_C} = I_\Phi e^{-j30^\circ}.$$

Як видно із діаграми (рис. 1.3.10 б) система фазних напруг $\dot{U}_{AN'}$, $\dot{U}_{BN'}$, $\dot{U}_{CN'}$ залишилась симетричною, але має зворотну послідовність. Струми окремих фаз не змінились за модулем і також утворюють симетричну систему зворотної послідовності.

Внаслідок розмикання ключа S відбувається реверс двигуна, тобто він починає обертатись у протилежному напрямі.

1.3.1.4. Аналіз трипровідного трифазного кола при з'єднанні фаз «зірка в зірку» за заданими лінійними напругами

Для аналізу трифазного трипровідного кола, схема заміщення якого показана на рис. 1.3.11, зазвичай задають лінійні напруги: $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$. Якщо використовувати рекомендований алгоритм аналізу трифазних кіл у загальному поданні, то спочатку записується система лінійних напруг джерела та на її основі записується система фазних напруг:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= U_{\text{Л}} e^{j\psi_{AB}}, & \dot{U}_A &= \frac{U_{\text{Л}}}{\sqrt{3}} e^{j(\psi_{AB}-30^\circ)}, \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ}, & \dot{U}_B &= \dot{U}_A e^{-j120^\circ}, \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ}; & \dot{U}_C &= \dot{U}_A e^{j120^\circ}.\end{aligned}$$

За припущення, що опорами ліній нехтується, фазні напруги навантаження ($\dot{U}_{AN'}, \dot{U}_{BN'}, \dot{U}_{CN'}$) відповідають фазним напругам джерела ($\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$).

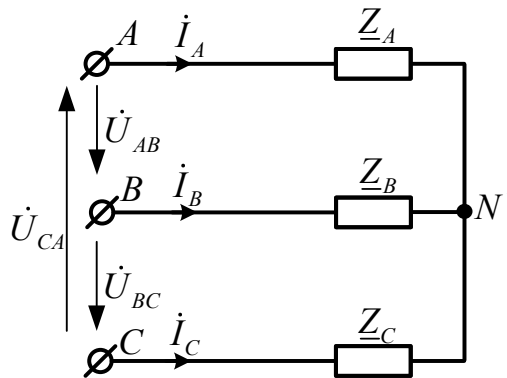


Рисунок 1.3.11 – Схема трифазного трипровідного кола із з'єднанням фаз навантаження в «зірку»

З урахуванням, що вираз для визначення напруги зміщення нейтралі набуває вигляду:

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C},$$

визначаються вирази для розрахунку фазних напруг навантаження:

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A - \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{(\dot{U}_A - \dot{U}_B) \underline{Y}_B + (\dot{U}_A - \dot{U}_C) \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}.$$

Оскільки $\dot{U}_A - \dot{U}_B = \dot{U}_{AB}$, а $\dot{U}_A - \dot{U}_C = \dot{U}_{AC}$, результуючі вирази для розрахунку фазних напруг навантаження через лінійні величини напруг джерела:

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{AB} \underline{Y}_B + \dot{U}_{AC} \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C},$$

$$\dot{U}_{BN'} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{BC} \underline{Y}_C + \dot{U}_{BA} \underline{Y}_A}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C},$$

$$\dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{CA} \underline{Y}_A + \dot{U}_{CB} \underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}.$$

1.3.1.5. Аналіз трифазного трипровідного кола при з'єднанні фаз «трикутник в трикутник»

Порядок розрахунку фазних $\dot{I}_{AB}, \dot{I}_{BC}, \dot{I}_{CA}$ та лінійних струмів $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ за відомих лінійних напруг $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ на вході трифазного кола при з'єднанні фаз навантаження у «трикутник» та відомих величин їх опорів $\underline{Z}_{AB}, \underline{Z}_{BC}, \underline{Z}_{CA}$ (рис. 1.3.12) не вимагає розрахунку напруги зміщення нейтралі у випадку ідеалізації лінійних проводів.

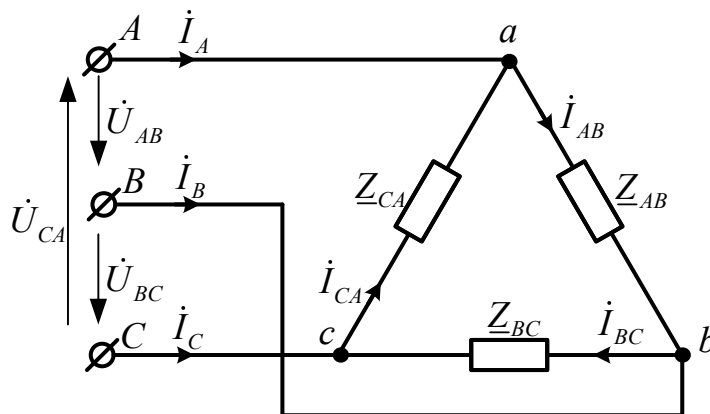


Рисунок 1.3.12 – Схема трифазного трипровідного кола із з'єднанням фаз навантаження в «трикутник»

Системи лінійних напруг джерела для прямої і зворотної послідовностей набувають вигляду:

Пряма послідовність	Зворотна послідовність
$\dot{U}_{AB} = U_{\text{Л}} e^{j\psi_{AB}},$	$\dot{U}_{AB} = U_{\text{Л}} e^{j\psi_{AB}},$
$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{U}_{AB},$	$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ} = a \dot{U}_{AB},$
$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ} = a \dot{U}_{AB}.$	$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{U}_{AB}.$

При чому для обох випадків симетрії виконується рівність

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB}(1 + a^2 + a) = 0.$$

Нульовий вид симетрії для випадку з'єднання фаз в трикутник неможливий.

Якщо опори ліній приймаються за нуль, то потенціали відповідних фазних точок джерела та навантаження рівні, а отже лінійна напруга джерела прикладена до фаз навантаження:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{ab} &= \dot{U}_{AB} = U_{\text{Л}} e^{j\psi_{AB}}, \\ \dot{U}_{bc} &= \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{U}_{AB}, \\ \dot{U}_{ca} &= \dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ} = a \dot{U}_{AB},\end{aligned}$$

що дозволяє вирази фазні струми навантаження за законом Ома:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}, \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}, \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}.$$

Струми у лініях визначаються за I законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}, \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}, \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC},\end{aligned}$$

а їх сума рівна нулю: $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$

1.3.1.6. Аналіз трифазних кіл з двома паралельно підключеними навантаженнями з різними способами з'єднання фаз

Розрахунок трифазних кіл при живленні двох і більше паралельно підключених навантажень із різними способами з'єднання фаз потребує застосування перетворення «зірка-трикутник» у розрахунках, приведення заданого кола до вигляду з'єднання «зірка в зірку» та подальшого використання рекомендованого вище алгоритму у загальному випадку.

Пропонується розглянути можливий порядку дій для аналізу несиметричного кола, зображеного на рис. 1.3.13, у символічному поданні. Несиметрія навантаження трифазного кола утворена внаслідок обриву фази навантаження $\underline{Z}_\Delta$ на ділянці $A'-B'$. Вважаються відомими параметри елементів кола та діюче значення фазної напруги симетричного трифазного генератора U_ϕ

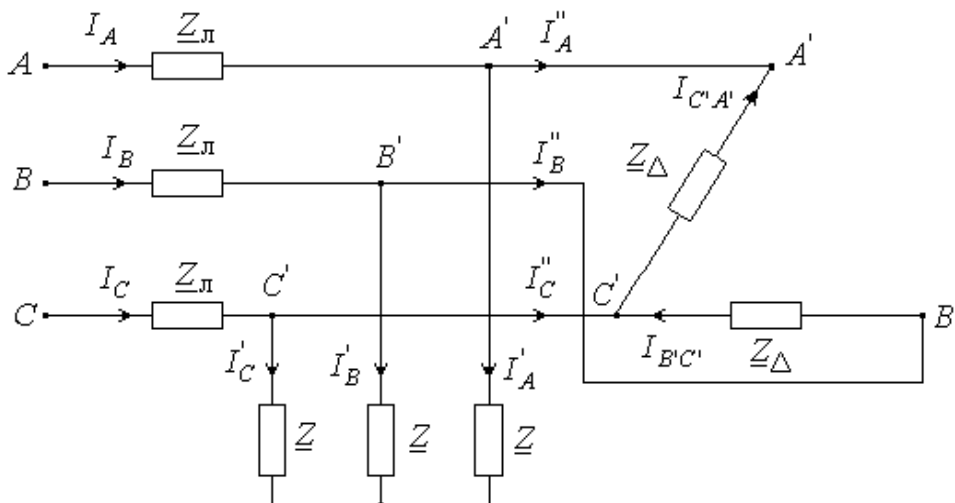


Рисунок 1.3.13 – Несиметричне трифазне коло для аналізу

Рекомендований алгоритм аналізу несиметричного трифазного кола з двома паралельно підключеними навантаженнями на базі загального випадку:

1. Записуємо системи фазних та лінійних напруг у комплексному поданні заданої послідовності.
2. Подальший розрахунок несиметричного кола виконуємо шляхом застосування методу еквівалентних перетворень. Послідовність згортання кола показано на рис. 1.3.14.

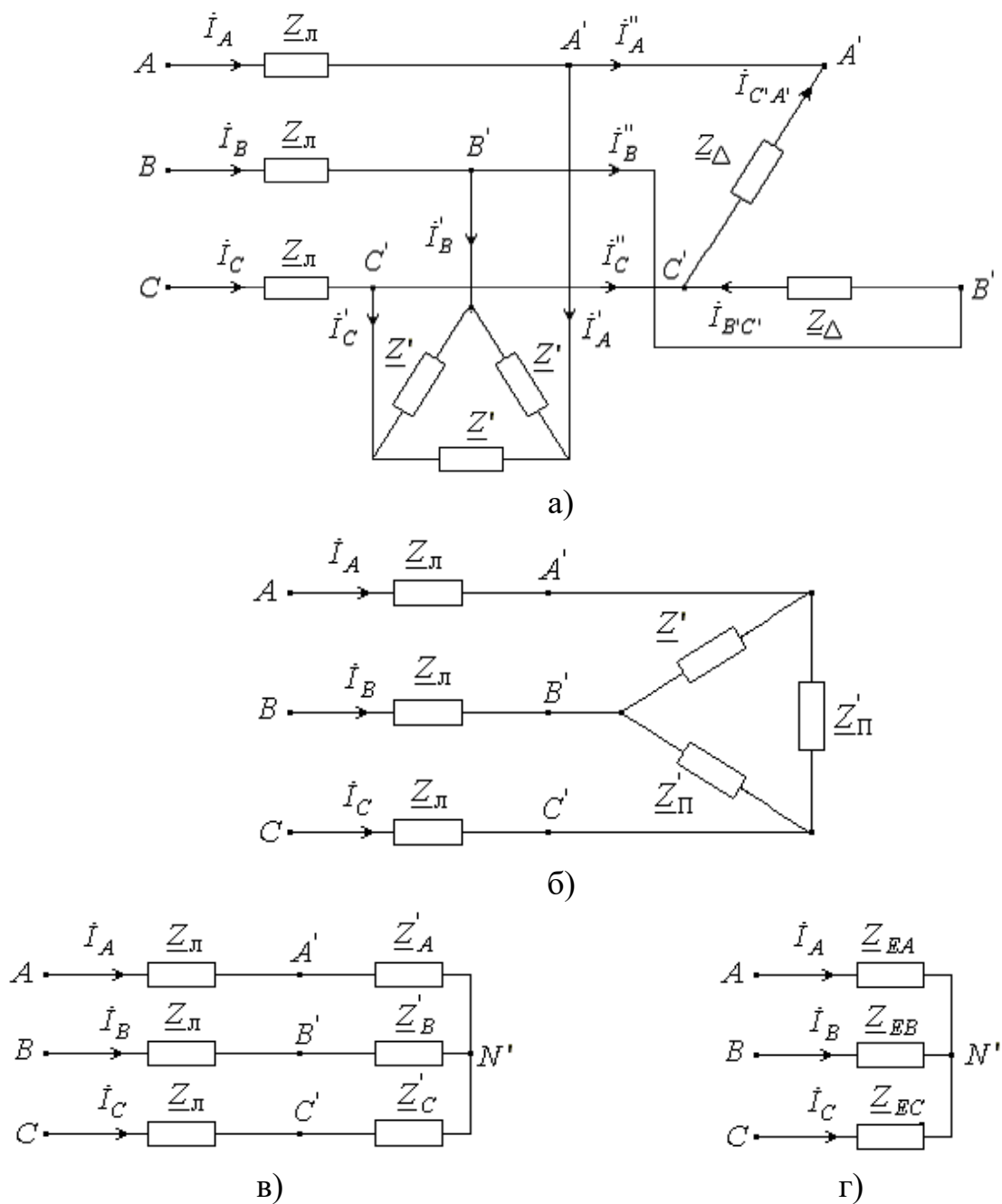


Рисунок 1.3.14 – Порядок перетворень в несиметричному трифазному колі

- а) перетворення симетричної зірки на симетричний «трикутник» з опорами $\underline{Z}'$;
- б) паралельне з'єднання опорів симетричного «трикутника» $\underline{Z}'$ з опорами $\underline{Z}_\Delta$ у фазах AC і BC ($\underline{Z}'_\Pi$);
- в) перетворення несиметричного «трикутника» на несиметричну «зірку» з опорами $\underline{Z}'_A, \underline{Z}'_B, \underline{Z}'_C$.
- г) зведення всього кола до несиметричної еквівалентної «зірки»

3. Розраховуємо напругу зміщення нейтралі $\dot{U}_{N'N}$ і напруги між фазними точками джерела та утвореною нейтральною точкою навантаження $(\dot{U}_{AN'}, \dot{U}_{BN'}, \dot{U}_{CN'})$ на базі кола зображеного на рис. 3.1.14 г .

4. Лінійні струми знаходимо із схеми кола рис. 1.3.14 г :

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN'}}{\underline{Z}_{EA}}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN'}}{\underline{Z}_{EB}}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN'}}{\underline{Z}_{EC}}.$$

5. Із схеми рис. 1.3.14 в знаходимо напруги між фазними точками навантаження:

$$\dot{U}_{C'A'} = \dot{I}_C \underline{Z}'_C - \dot{I}_A \underline{Z}'_A;$$

$$\dot{U}_{B'C'} = \dot{I}_B \underline{Z}'_B - \dot{I}_C \underline{Z}'_C$$

та струми у фазах навантажень:

$$\dot{I}_{C'A'} = -\dot{I}_A'' = \frac{\dot{U}_{C'A'}}{\underline{Z}_\Delta}; \quad \dot{I}_{B'C'} = \dot{I}_B'' = \frac{\dot{U}_{B'C'}}{\underline{Z}_\Delta};$$

$$\dot{I}_C'' = \dot{I}_{C'A'} - \dot{I}_B'' = -\dot{I}_A'' - \dot{I}_B'';$$

$$\dot{I}_A' = \dot{I}_A - (-\dot{I}_A'') = \dot{I}_A + \dot{I}_A'';$$

$$\dot{I}_B' = \dot{I}_B - \dot{I}_B'';$$

$$\dot{I}_C' = \dot{I}_C - \dot{I}_C''.$$

6. Перевірку виконаних розрахунків здійснюємо шляхом складання балансу потужностей у комплексному поданні.

Повна комплексна потужність джерела:

$$\tilde{S}_\Gamma = \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \dot{I}_C^* = P + jQ.$$

Сумарна активна потужність споживачів:

$$P_{\text{сп}} = I_A^2 R_{\text{л}} + I_B^2 R_{\text{л}} + I_C^2 R_{\text{л}} + I_A'^2 R + I_B'^2 R + I_C'^2 R + I_{C'A'}^2 R_{C'A'} + I_{B'C'}^2 R_{B'C'}.$$

Сумарна реактивна потужність споживачів:

$$Q_{\text{сп}} = I_A^2 X_{\text{л}} + I_B^2 X_{\text{л}} + I_C^2 X_{\text{л}} + I_A'^2 X + I_B'^2 X + I_C'^2 X + I_{C'A'}^2 X_{C'A'} + I_{B'C'}^2 X_{B'C'}.$$

Приклад 1.3.5. Виконати розрахунок струмів у гілках заданого кола (рис. 1.3.15), перевірити правильність розрахунків за балансом потужностей, визначити покази ватметрів, побудувати суміщену векторну діаграму струмів і топографічну діаграму напруг за відомих параметрів:

$$\dot{U}_A = 220 \angle 30^\circ \text{ В}, R_{\pi} = 18 \text{ Ом}, R = 72 \text{ Ом}, X_L = 30 \text{ Ом}, X_C = 63 \text{ Ом}.$$

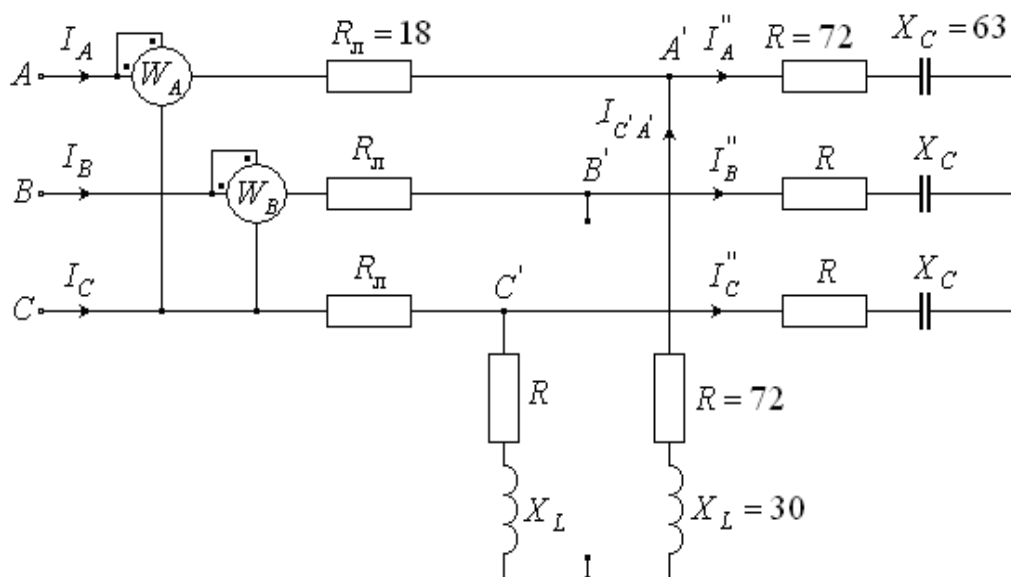


Рисунок 1.3.15 – Трифазне коло з обривом фаз в одному з паралельно підключених навантажень

Розв'язання.

Несиметрія навантаження заданого трифазного кола утворилась через обрив фази B навантаження, фази якого були з'єднані зіркою та мають активно-індуктивний характер.

1. Записуємо системи фазних та лінійних напруг у комплексному поданні заданої послідовності:

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= 220e^{j30^\circ} \text{ В}, & \dot{U}_{AB} &= 220e^{j60^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_B &= 220e^{-j90^\circ} \text{ В}, & \dot{U}_{BC} &= 220e^{-j60^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_C &= 220e^{j150^\circ} \text{ В}; & \dot{U}_{CA} &= 220e^{j180^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

2. Для зручності реалізації еквівалентних перетворень та згортки кола, послідовність якої відображено на рис. 1.3.16, виконуємо розрахунок повних опорів гілок навантаження:

$$\underline{Z}_{RC} = R - jX_C = 72 - j63 = 95.671e^{-j41.19^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{C'A'} = 2(R + jX_L) = 2(72 + j30) = 2 \cdot 78e^{j22.62^\circ} = 156e^{j22.62^\circ} \text{ Ом.}$$

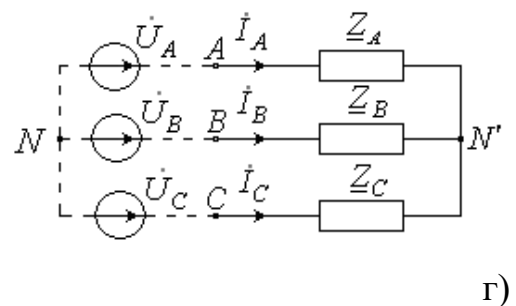
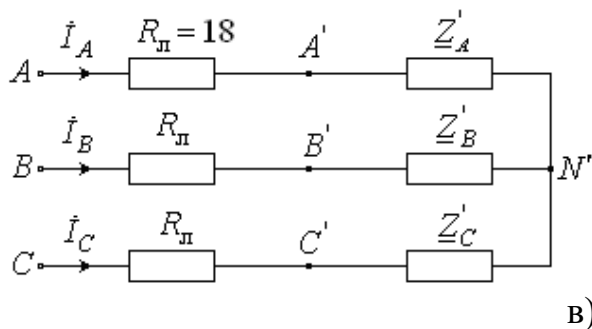
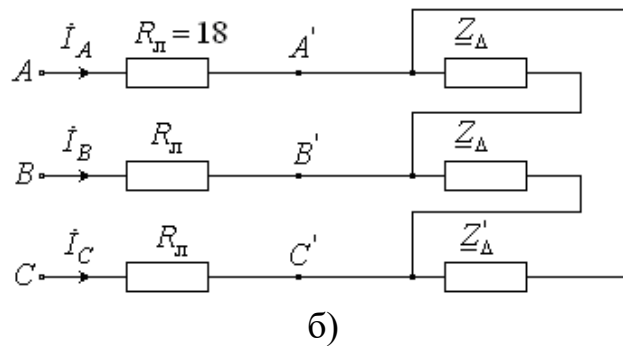
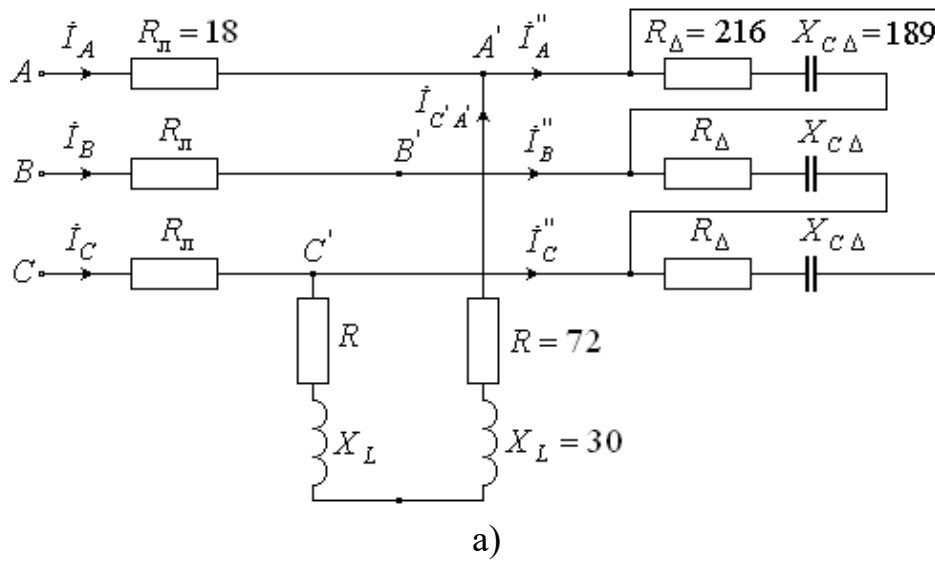


Рисунок 1.3.16 – Почерговість перетворень в трифазному колі

- а) перетворення «зірки» опорів в «трикутник»;
- б) паралельне з'єднання опорів двох навантажень;
- в) перетворення несиметричного «трикутника» в «зірку»;
- г) результуюча еквівалентна схема заміщення заданого трифазного кола

3. Перетворюємо симетричну зірку з опорами R, X_C на симетричний «трикутник» (рис. 1.6.16, а):

$$\underline{Z}_{\Delta} = 3\underline{Z}_{RC} = 287.01e^{-j41.19^{\circ}} \text{ Ом.}$$

4. За рахунок перетворення виконаного у п. 2 між точками C', A' утворюється паралель послідовного з'єднання $\underline{Z}_{C'A'} = 2(R + jX_L)$ та гілки перетвореного «трикутника» $\underline{Z}'_{\Delta}$ (рис. 1.3.16, б).

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_{\Delta} &= \frac{\underline{Z}_{\Delta} \cdot \underline{Z}_{C'A'}}{\underline{Z}_{\Delta} + \underline{Z}_{C'A'}} = \frac{287.01e^{-j41.19^{\circ}} \cdot 156e^{j22.62^{\circ}}}{287.01e^{-j41.19^{\circ}} + 156e^{j22.62^{\circ}}} = \frac{44773.56e^{-j18.57^{\circ}}}{382.4e^{-j19.72^{\circ}}} = \\ &= 117.06 + j2.34 = 117.08e^{j1.15^{\circ}} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

5. Перетворюємо утворений несиметричний «трикутник» (рис. 1.3.16, б) на еквівалентну «зірку» (рис. 1.3.16, в).

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_A = \underline{Z}'_C &= \frac{\underline{Z}_{\Delta} \cdot \underline{Z}'_{\Delta}}{2 \cdot \underline{Z}_{\Delta} + \underline{Z}'_{\Delta}} = \frac{287.01e^{-j41.19^{\circ}} \cdot 117.08e^{j1.15^{\circ}}}{2 \cdot 287.01e^{-j41.19^{\circ}} + 117.08e^{j1.15^{\circ}}} = \\ &= \frac{33603e^{-j40.04^{\circ}}}{665.25e^{-j34.28^{\circ}}} = 50.26 - j4.98 = 50.51e^{-j5.66^{\circ}} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_B &= \frac{\underline{Z}_{\Delta}^2}{2 \cdot \underline{Z}_{\Delta} + \underline{Z}'_{\Delta}} = \frac{(287.01e^{-j41.19^{\circ}})^2}{2 \cdot 287.01e^{-j41.19^{\circ}} + 117.08e^{j1.15^{\circ}}} = \frac{82374.74e^{-j82.38^{\circ}}}{665.25e^{-j34.28^{\circ}}} = \\ &= 82.86 - j92.02 = 123.83e^{-j48^{\circ}} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

6. Знаходимо еквівалентні опори кожної фази зірки представленої на рис. 1.3.16, г:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_A = \underline{Z}_C &= R_{\pi} + \underline{Z}'_A = 18 + 50.26 - j4.98 = 68.26 - j4.98 = 68.44e^{-j4.17^{\circ}} \text{ Ом.} \\ \underline{Z}_B &= R_{\pi} + \underline{Z}'_B = 18 + 82.86 - j92.02 = 100.86 - j92.02 = 136.53e^{-j43.37^{\circ}} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

7. Розраховуємо напругу зміщення нейтралі утвореного кола (рис. 1.3.16, г):

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{220e^{j30^\circ}}{68.44e^{-j4.17^\circ}} + \frac{220e^{-j90^\circ}}{136.53e^{-j42.37^\circ}} + \frac{220e^{j150^\circ}}{68.44e^{-j4.17^\circ}} = \frac{2.19e^{j67.08^\circ}}{0.04e^{j11.55^\circ}} = \\
&= 35.11 + j51.14 = 62.04e^{j55.53^\circ} \text{ В.}
\end{aligned}$$

8. Визначаємо напруги на фазах навантаження та лінійні струми (рис. 1.3.16, г):

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = 220e^{j30^\circ} - 62.04e^{j55.53^\circ} = 166.18e^{j20.74^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN'}}{\underline{Z}_A} = \frac{166.18e^{j20.74^\circ}}{68.44e^{-j4.17^\circ}} = 2.43e^{j24.915^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{U}_{BN'} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = 220e^{-j90^\circ} - 62.04e^{j55.53^\circ} = 273.41e^{-j97.38^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN'}}{\underline{Z}_B} = \frac{273.41e^{-j97.38^\circ}}{136.53e^{-j42.37^\circ}} = 2e^{-j55.01^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = 220e^{j150^\circ} - 62.04e^{j55.53^\circ} = 233.19e^{j165.38^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN'}}{\underline{Z}_C} = \frac{233.19e^{j165.38^\circ}}{68.44e^{-j4.17^\circ}} = 3.41e^{j169.55^\circ} \text{ А.}$$

Сума розрахованих лінійних струмів має дорівнювати нулю:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 2.2 + j1.02 + 1.15 - j1.64 - 3.35 + j0.62 = 0.$$

9. Для подальшої реалізації розрахунку струмів у фаза навантаження визначаємо напруги між фазними точками C' та A' (рис. 1.3.16, в):

$$\begin{aligned}
\dot{U}_{C'A'} &= \dot{I}_C \underline{Z}_C' - \dot{I}_A \underline{Z}_A' = 3.41e^{j169.55^\circ} \cdot 50.51e^{-j5.66^\circ} - 2.43e^{j24.92^\circ} \cdot 50.51e^{-j5.66^\circ} = \\
&= 281.2e^{j178.51^\circ} \text{ В.}
\end{aligned}$$

10. Струми у фазах навантажень (рис. 3.1.15):

$$\dot{I}_{C'A'} = \frac{\dot{U}_{C'A'}}{\underline{Z}_{C'A'}} = \frac{281.2e^{j178.51^\circ}}{156e^{j22.62^\circ}} = 1.8e^{j155.89^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}_A'' = \dot{I}_A + \dot{I}_{C'A'} = 2.43e^{j24.915^\circ} + 1.8e^{j155.89^\circ} = 1.84e^{j72.44^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_B'' = \dot{I}_B = 2e^{-j55.01^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_C'' = \dot{I}_C - \dot{I}_{C'A'} = 3.41e^{j169.55^\circ} - 1.8e^{j155.89^\circ} = 1.71e^{-j176.02^\circ} \text{ А}.$$

11. Перевірку виконаних розрахунків здійснюємо за балансом потужностей джерела та навантаження:

$$\dot{S}_\Gamma = \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \dot{I}_C^* = 220e^{j30^\circ} \cdot 2.43e^{-j24.92^\circ} + 220e^{-j90^\circ} \cdot 2e^{j55.01^\circ} + 220e^{j150^\circ} \cdot 3.41e^{j169.55^\circ} = 1663.02e^{j169.55^\circ} = 1599.24 - j456 = (P_\Gamma + Q_\Gamma) \text{ ВА}.$$

$$P_{\text{сп}} = (I_A^2 + I_B^2 + I_C^2) \cdot R_\Gamma + [(I_A'')^2 + (I_B'')^2 + (I_C'')^2] \cdot R + I_{C'A'}^2 \cdot 2R = \\ = (2.43^2 + 2^2 + 3.41^2) \cdot 18 + (1.84^2 + 2^2 + 1.71^2) \cdot 72 + 1.8^2 \cdot 2 \cdot 72 = 1596.45 \text{ Вт}.$$

$$Q_{\text{сп}} = I_{C'A'}^2 \cdot 2X_L - [(I_A'')^2 + (I_B'')^2 + (I_C'')^2] \cdot X_C = 1.8^2 \cdot 2 \cdot 30 - (1.84^2 + 2^2 + 1.71^2) \cdot 63 = \\ = -455.11 \text{ ВАр}.$$

12. Покази ватметрів:

$$P_{W_A} = \text{Re} \left(\dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* \right) = \text{Re} \left(220 \cdot \sqrt{3}e^{j0^\circ} \cdot 2.43e^{-j24.915^\circ} \right) = \text{Re} \left(925.95e^{-j24.915^\circ} \right) = \\ = \text{Re}(839.78 - j390.07) = 839.78 \text{ Вт}.$$

$$P_{W_B} = \text{Re} \left(\dot{U}_{BC} \dot{I}_B^* \right) = \text{Re} \left(220 \cdot \sqrt{3}e^{-j60^\circ} \cdot 2e^{j55.01^\circ} \right) = \text{Re} \left(762.1e^{-j4.99^\circ} \right) = \\ = \text{Re}(759.21 - j66.29) = 759.21 \text{ Вт}.$$

$$P = P_{W_A} + P_{W_B} = 839.78 + 759.21 = 1598.99 \text{ Вт}.$$

13. Для побудови топографічної діаграми додатково визначаємо падіння напруг тих ділянок, для яких розрахунки не були проведені вище (рис. 3.1.15):

$$\dot{U}_{AA'} = \dot{I}_A R_\Gamma = 2.43e^{j24.92^\circ} \cdot 18 = 43.74e^{j24.92^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{BB'} = \dot{I}_B R_\Gamma = 2e^{-j55.01^\circ} \cdot 18 = 36e^{-j55.01^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{CC'} = \dot{I}_C R_\Gamma = 3.41e^{j169.55^\circ} \cdot 18 = 61.38e^{j169.55^\circ} \text{ В}.$$

14. За результатами розрахунків будемо суміщену векторну діаграму струмів і топографічну діаграму напруг (рис. 3.1.17).

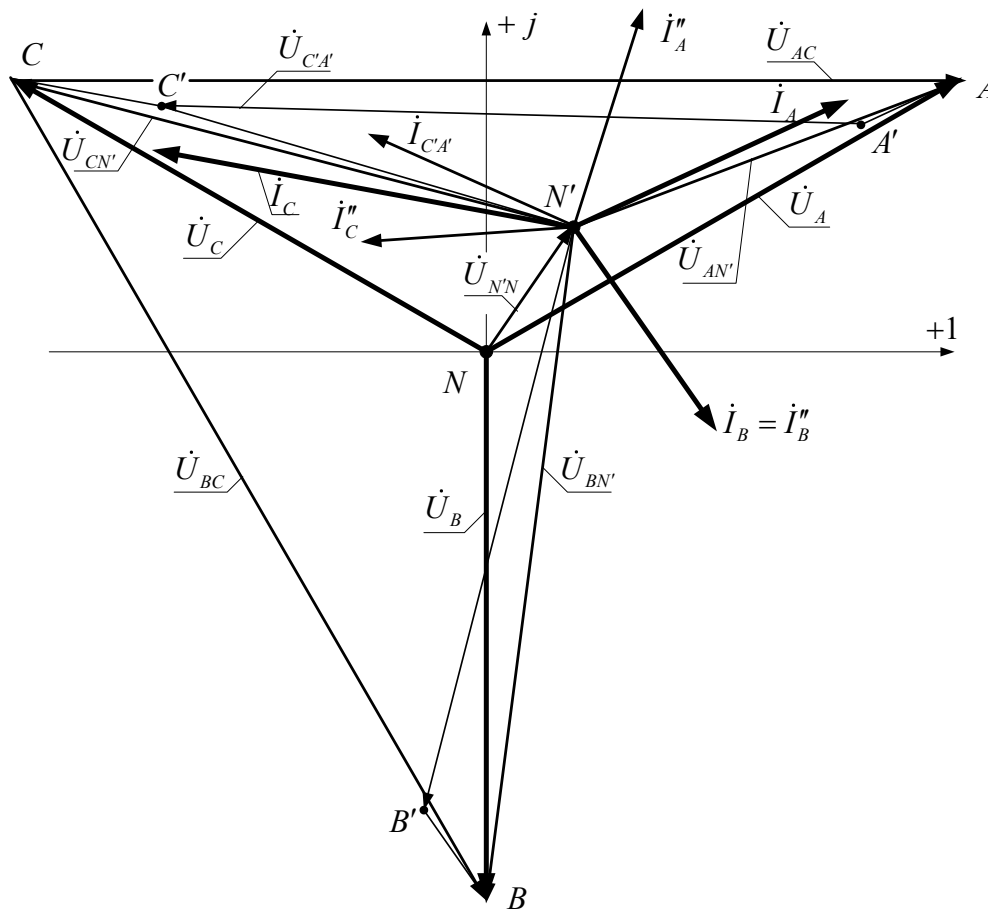


Рисунок 1.3.17 – Суміщена векторна діаграма струмів і топографічна діаграма напруг

1.3.2. Особливості аналізу симетричних трифазних кіл

1.3.2.1. Аналіз симетричного трифазного чотирипровідного кола при з'єднанні фаз «зірка в зірку»

Аналіз трифазних кіл незалежно від виду симетрії та конфігурації кола реалізується за загальною методикою, визначеною вище. Однак, для якісного встановлення особливостей аналізу симетричних трифазних кіл із нейтральним провідником варто розглядати види симетрії системи ЕРС/напруг джерела окремо:

- аналіз симетричного трифазного чотирипровідного кола із генерацією системи ЕРС (напруг) прямої / зворотної послідовності;
- аналіз симетричного трифазного чотирипровідного кола із генерацією системи ЕРС (напруг) нульової послідовності.

Схематичне подання симетричного трифазного кола із нейтральним провідником не залежить від виду симетрії системи ЕРС/напруг джерела (рис. 1.3.18). У загальному випадку для будь-якого виду симетрії джерела живлення вважаються відомими наступні електричні величини та параметри кола:

- модуль фазної напруги симетричного трифазного джерела U_Φ ;
- опори фаз навантаження $\underline{Z}'_A = \underline{Z}'_B = \underline{Z}'_C = \underline{Z}'$;
- опори лінійних проводів $\underline{Z}_{\text{Л}A} = \underline{Z}_{\text{Л}B} = \underline{Z}_{\text{Л}C} = \underline{Z}_{\text{Л}} = R_{\text{Л}} + jx_{\text{Л}}$;
- опір нейтрального проводу $\underline{Z}_N \neq 0$.

Отже, ґрунтуючись на визначенні про симетрію трифазного кола опис завдання можна подати як: живлення симетричного навантаження з'єднаного у «зірку» реалізується через симетричну лінію від симетричної системи напруг джерела фази якого з'єднані у «зірку» з нейтральним проводом.

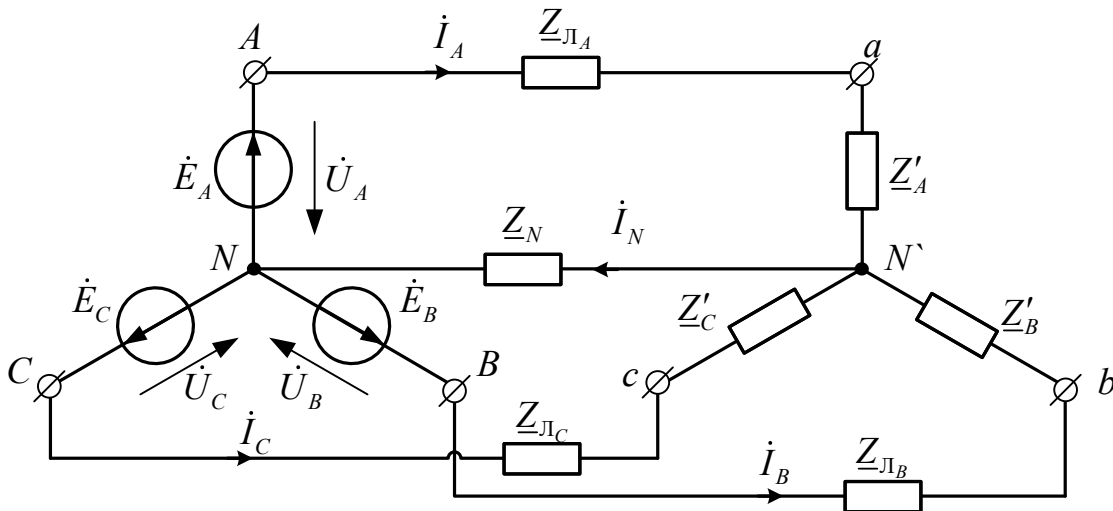


Рисунок 1.3.18 – Схема симетричного трифазного чотирипровідного кола

Випадок симетричного трифазного чотирипровідного кола із генерацією системи ЕРС (напруг) прямої та зворотної послідовності.

Системи симетричних фазних та лінійних напруг джерела у комплексному поданні відносно діючих значень з урахуванням виду симетрії:

	Система фазних напруг	Система лінійних напруг
Пряма послідовність	$\dot{U}_A = U_\Phi e^{j\psi};$ $\dot{U}_B = U_\Phi e^{j(\psi-120^\circ)} = a^2 \dot{U}_A;$ $\dot{U}_C = U_\Phi e^{j(\psi+120^\circ)} = a \dot{U}_A.$	$\dot{U}_{AB} = U_\Phi \sqrt{3} e^{j(\psi+30^\circ)} = U_\Delta e^{j(\psi+30^\circ)},$ $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ},$ $\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ}.$
Зворотна послідовність	$\dot{U}_A = U_\Phi e^{j\psi};$ $\dot{U}_B = U_\Phi e^{j(\psi+120^\circ)} = a \dot{U}_A;$ $\dot{U}_C = U_\Phi e^{j(\psi-120^\circ)} = a^2 \dot{U}_A.$	$\dot{U}_{AB} = U_\Phi \sqrt{3} e^{j(\psi-30^\circ)} = U_\Delta e^{j(\psi-30^\circ)},$ $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ},$ $\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ}.$

Комплекси провідностей фаз записуються з урахуванням конфігурації кола. Для заданого кола (рис. 1.3.18) опори ліній та навантаження з'єднані послідовного, а отже вирази:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}'_A + \underline{Z}_{\Delta A}} = \frac{1}{\underline{Z}' + \underline{Z}_\Delta},$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}'_B + \underline{Z}_{\Delta B}} = \frac{1}{\underline{Z}' + \underline{Z}_\Delta},$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}'_C + \underline{Z}_{\Delta C}} = \frac{1}{\underline{Z}' + \underline{Z}_\Delta}.$$

Зважаючи на симетрію навантаження та лінії варто врахувати, що комплексні провідності фаз рівні між собою:

$$\underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}' + \underline{Z}_\Delta} = \frac{1}{\underline{Z}} = \underline{Y}.$$

Комплексна провідність нейтрального проводу визначається – $\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}.$

Напряга зміщення нейтралі за прямої та зворотної видів симетрії, незалежно від наявності нейтрального проводу з ненульовим опором, рівна нулю:

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y} + \dot{U}_B \underline{Y} + \dot{U}_C \underline{Y}}{\underline{Y} + \underline{Y} + \underline{Y} + \underline{Y}_N} = \frac{\overbrace{(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)}^0 \underline{Y}}{3 \cdot \underline{Y} + \underline{Y}_N} = 0.$$

Оскільки ділянка між нейтральними точками ($N' - N$) містить ненульову величину опору ($\underline{Z}_N \neq 0$), але при цьому величина напруги зміщення нейтралі рівна нулю ($\dot{U}_{N'N} = \dot{I}_N \underline{Z}_N = 0$), то за теорією еквівалентної заміни таку ділянку можна подати провідником на схемі заміщення трифазного кола.

Напруги між фазними точками джерела та споживача визначаються виразами:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AN'} &= \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A, \\ \dot{U}_{BN'} &= \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_B, \\ \dot{U}_{CN'} &= \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_C.\end{aligned}$$

У випадку аналізу симетричних трифазних кіл із безвратними лініями, тобто за умови рівності нулю її опорів ($\underline{Z}_\Pi = 0$), відповідні фазні точки джерела та навантаження ($A-a$, $B-b$, $C-c$) володіють рівними потенціалами, а отже фазна напруга джерела відповідає фазній напругі навантаження:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{aN'} &= \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A, \\ \dot{U}_{bN'} &= \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_B, \\ \dot{U}_{cN'} &= \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_C.\end{aligned}$$

Струми у фазах симетричного трифазного кола рівні за модулем та зсунуті на 120° у відповідності до виду симетрії:

Пряма
послідовність

$$\left| \begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{U}_A \underline{Y} = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}}, \\ \dot{I}_B &= \dot{U}_B \underline{Y} = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}} = a^2 \dot{I}_A, \\ \dot{I}_C &= \dot{U}_C \underline{Y} = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}} = a \dot{I}_A.\end{aligned} \right.$$

Зворотна
послідовність

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{U}_A \underline{Y} = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}}, \\ \dot{I}_B = \dot{U}_B \underline{Y} = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}} = a \dot{I}_A, \\ \dot{I}_C = \dot{U}_C \underline{Y} = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}} = a^2 \dot{I}_A. \end{cases}$$

Виразу струму у фазі A відповідає еквівалентна схема заміщення заданого трифазного кола відносно фази A (рис. 1.3.19):

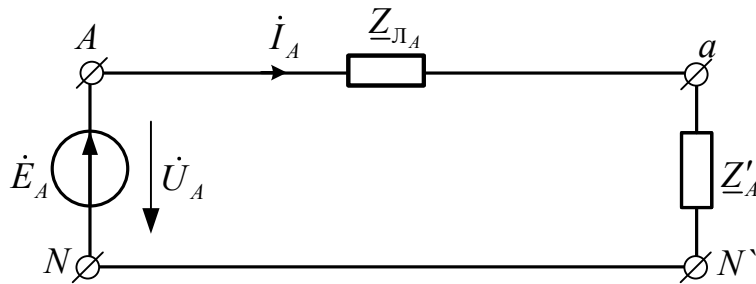


Рисунок 1.3.19 – Однофазна схема заміщення симетричного трифазного кола для випадків прямої та зворотної послідовностей

У випадках прямої та зворотної видів симетрії джерела струм у нейтральному проводі не протікає:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \overbrace{(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)}^0 \underline{Y} = 0.$$

Зберігаються рівність за модулем та зсув на 120° для падінь напруг на опорах лінії та фазах навантаження рівні відповідно:

	Напруги на лініях	Фазні напруги на навантаженні
Пряма послідовність	$\dot{U}_{Aa} = \dot{I}_A \underline{Z}_Л,$ $\dot{U}_{Bb} = a^2 \dot{U}_{Aa},$ $\dot{U}_{Cc} = a \dot{U}_{Aa}.$	$\dot{U}_{aN'} = \dot{I}_A \underline{Z}'$ $\dot{U}_{bN'} = a^2 \dot{U}_{aN'},$ $\dot{U}_{cN'} = a \dot{U}_{aN'}.$

Зворотна
послідовність

$$\left| \begin{array}{l} \dot{U}_{Aa} = \dot{I}_A Z_{\text{Л}}, \\ \dot{U}_{Bb} = a \dot{U}_{Aa}, \\ \dot{U}_{Cc} = a^2 \dot{U}_{Aa}. \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \dot{U}_{aN'} = \dot{I}_A Z', \\ \dot{U}_{bN'} = a \dot{U}_{aN'}, \\ \dot{U}_{cN'} = a^2 \dot{U}_{aN'}. \end{array} \right|$$

Висновок: аналіз симетричного трифазного кола з нейтральним проводом прямої та зворотної послідовностей чергування фаз:

- характеризується нульовою величиною напруги зміщення нейтралі навіть за ненульового значення його опору;
- розрахунок електричних величин зводиться до його аналізу відносно однієї з фаз;
- однофазні еквівалентні схеми заміщення створюються шляхом заміни ділянки між нейтральними точками джерела та споживача з нульовим значенням напруги провідником;
- фазні струми, напруги на опорах лінії та фазах навантаження у інших фазах трифазного кола рівні за модулем відповідним розрахованим відносно однієї фази величинам та зсунуті 120° згідно виду симетрії;
- струм у нейтральному провіднику не протікає.

Суміщена векторна діаграма струмів і топографічна діаграма напруг для симетричного трифазного кола за умови прямої послідовності (для схеми кола на рис. 1.3.18) наведена на рис. 1.3.20. Для її побудови на комплексній площині з початку координат, позначеному як нейтральна точка навантаження (N'), відкладають напруги фаз споживача ($U_{aN'} = U_{bN'} = U_{cN'}$), які створюють симетричну зірку.

З точки N' під кутом $\varphi = \arctg\left(\frac{X_{\text{н}}}{R_{\text{н}}}\right)$ до фазних напруг будується трифазна система струмів.

Довжини векторів падіння напруг на опорах лінії визначаються за законом Ома ($I_{\text{Ф}} R_{\text{Л}}, I_{\text{Ф}} x_{\text{Л}}$). Активні складові векторів напруг лінії ($I_A R_{\text{Л}}, I_B R_{\text{Л}}, I_C R_{\text{Л}}$) будуються з відповідних фазних точок навантаження (a, b, c) враховуючи, що напруга на резистивному елементі збігається за фазою із струмом. Реактивні складові векторів напруг лінії ($I_A x_{\text{Л}}, I_B x_{\text{Л}}, I_C x_{\text{Л}}$) будуються з відповідних кінців векторів активних складових за умови, що напруга на індуктивному елементі випереджає струм на 90° . Геометричні суми відповідних векторів активної та реактивної складової визначають довжини та початкові фази напруг на опорах

лінії кожної з фаз, а їх кінці – положення фазної точки джерела (A, B, C). Оскільки напруга зміщення нейтралі рівна нулю, то положення нейтральних точок джерела та навантаження відповідає початку координат.

Геометричні суми векторів фазних струмів, напруг на опорах лінії, напруг на фазах навантаження та фазних напруг джерела, відповідно, рівні нулю. Вектори, які утворюються шляхом з'єднання точки N та фазних точок джерела, дають симетричну систему фазних напруг джерела.

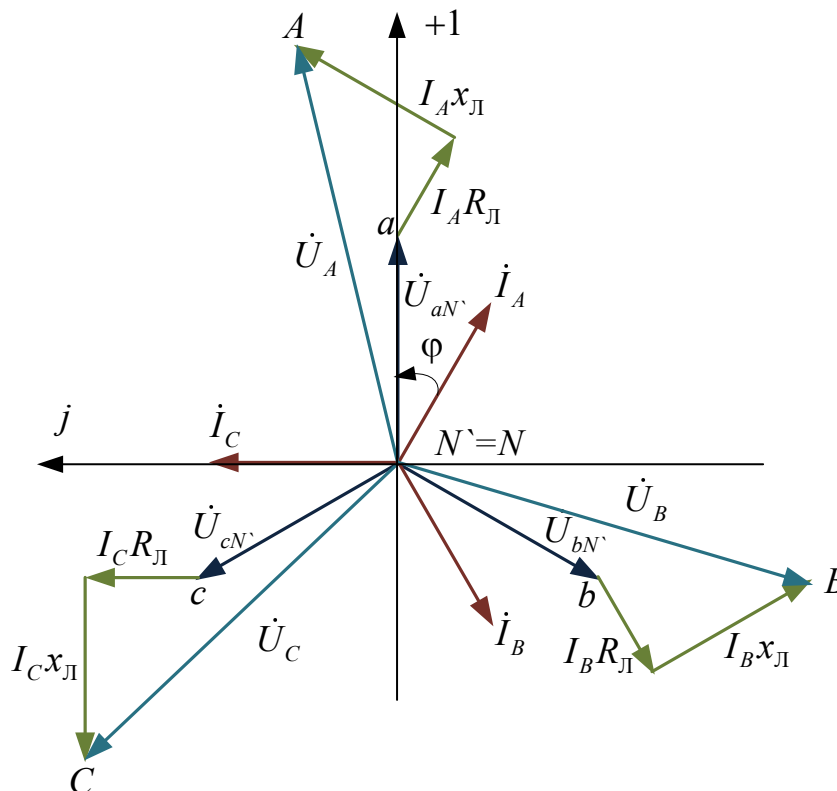


Рисунок 1.3.20 – Суміщена векторна діаграма струмів і топографічна діаграма напруг для симетричного трифазного кола за умови прямої послідовності

Випадок симетричного трифазного чотирипровідного кола із генерацією системи ЕРС (напруг) нульової послідовності.

Система симетричних фазних та лінійних напруг джерела у комплексному поданні відносно діючих значень з урахуванням для випадку симетрії нульової послідовності має вигляд:

Система фазних напруг	Система лінійних напруг
$\dot{U}_A = \dot{U}_B = \dot{U}_C = 0$	$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{CA} = 0$

Розрахунок напруги зміщення нейтралі для симетричного трифазного кола при нульовій послідовності дає ненульове значення:

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \frac{(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) \underline{Y}}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \frac{3\dot{U}_A \underline{Y}}{3\underline{Y} + \underline{Y}_N}.$$

Рівність фазних напруг джерела, призводить до рівності напруг між фазними точками джерела та нейтральною точкою навантаження:

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N};$$

$$\dot{U}_{BN'} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N};$$

$$\dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N},$$

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_{BN'} = \dot{U}_{CN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A - \frac{3\dot{U}_A \underline{Y}}{3\underline{Y} + \underline{Y}_N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_N}{3\underline{Y} + \underline{Y}_N},$$

а отже і струми у фазах симетричного кола теж рівні:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_B = \dot{I}_C = \dot{U}_{AN'} \underline{Y} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_N}{3\underline{Y} + \underline{Y}_N} \underline{Y} = \frac{\dot{U}_A}{\frac{3\underline{Y} + \underline{Y}_N}{\underline{Y}_N \underline{Y}}} = \frac{\dot{U}_A}{\frac{3}{\underline{Y}_N} + \frac{1}{\underline{Y}}} = \frac{\dot{U}_A}{3\underline{Z}_N + \underline{Z}}.$$

Синтез виразу струму дозволяє отримати еквівалентну схему заміщення заданого симетричного трифазного кола відносно фази A (рис. 1.3.21):

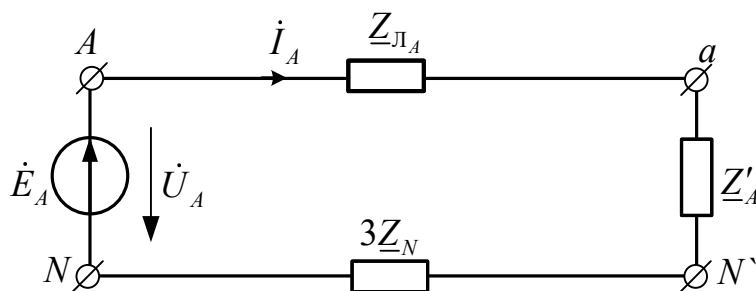


Рисунок 1.3.21 – Однофазна схема заміщення симетричного трифазного кола для випадку нульової послідовності

Струм у нейтральному проводі рівний потроєному значенню фазного струму:

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{U}_{N'N}}{\underline{Z}_N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_N}{3\underline{Y} + \underline{Y}_N} \underline{Y}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 3\dot{I}_A.$$

Висновок: аналіз симетричного трифазного кола з нейтральним проводом нульової послідовності чергування фаз:

- характеризується ненульовою величиною напруги зміщення нейтралі;
- розрахунок електричних величин може бути реалізований відносно однієї з фази;
- однофазна еквівалентна схема заміщення створюються шляхом заміни ділянки між нейтральними точками джерела та споживача на провідник з потроєною величиною опору нейтралі;
- фазні струми, напруги на опорах лінії та фазах навантаження у інших фазах трифазного кола рівні за модулем відповідним розрахованим відносно однієї фази величинам та утворюють нульову симетрію;
- струм у нейтральному провіднику рівний потроєному значенню фазного струму.

1.3.2.2. Аналіз симетричного трифазного трипровідного кола при з'єднанні фаз «зірка в зірку»

При аналізі симетричних трифазних кіл з'єднанні фаз «зірка в зірку» без нейтрального проводу (1.3.21) зберігаються всі особливості аналізу симетричного трифазного чотирипровідного кола, розглянуті в темі 1.3.2.1.

Відсутності нейтрального провідника ($\underline{Z}_N = \infty$) може бути викликаною обривом нейтралі, або конструктивними особливостями кола функціональне призначення якого не передбачає наявності нейтралі.

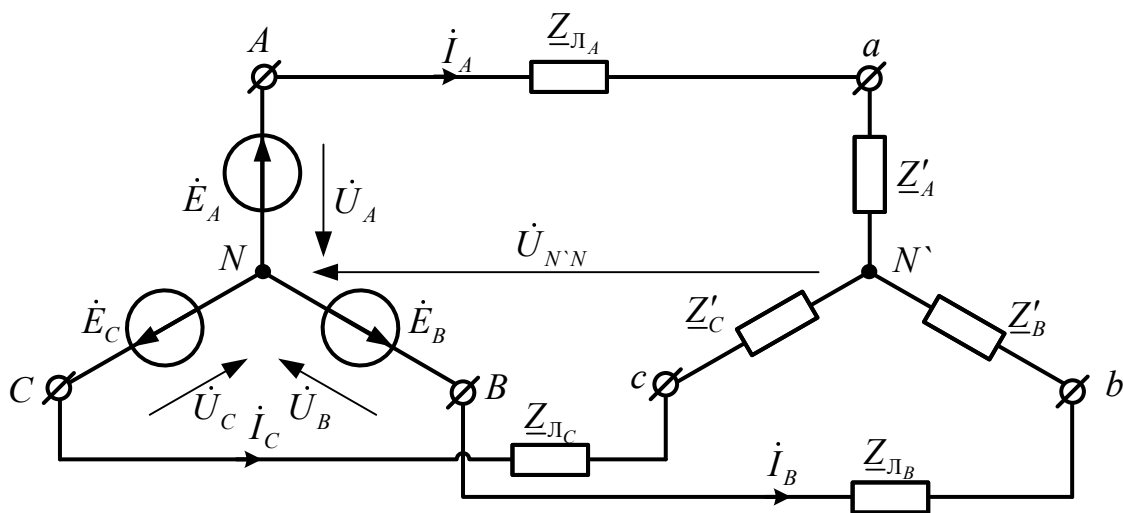


Рисунок 1.3.21 – Приклад схеми трифазного чотирипровідного кола для реалізації аналізу кола без нейтрального проводу

У разі симетрії кола напруга зміщення нейтралі при живленні навантаження від джерела прямої чи зворотної послідовностей рівна нулю:

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\overbrace{(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)}^0 \underline{Y}}{3 \cdot \underline{Y}} = 0,$$

а при живленні від джерела нульової послідовності – рівна фазній напрузі:

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) \underline{Y}}{3 \underline{Y}} = \frac{3 \dot{U}_A \underline{Y}}{3 \underline{Y}} = \dot{U}_A.$$

$$\text{де } \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}'_A + \underline{Z}_{\text{Л}A}}, \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}'_B + \underline{Z}_{\text{Л}B}}, \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}'_C + \underline{Z}_{\text{Л}C}}.$$

Отже, в симетричному трифазному колі без нейтрального проводу протікання симетричної системи струмів буде спостерігатись лише при живленні від джерела прямої та зворотної послідовностей. За нульової послідовності струми у фазах кола не протікають.

	Напруга зміщення нейтралі	Напруги між фазними точками джерела та нейтраллю навантаження	Фазні струми
Пряма послідовність	$\dot{U}_{N'N} = 0$	$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A,$ $\dot{U}_{BN'} = \dot{U}_B = a^2 \dot{U}_A,$ $\dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C = a \dot{U}_A.$	$\dot{I}_A = \dot{U}_A \underline{Y} = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}},$ $\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_A,$ $\dot{I}_C = a \dot{I}_A.$
Зворотна послідовність	$\dot{U}_{N'N} = 0$	$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A,$ $\dot{U}_{BN'} = \dot{U}_B = a^2 \dot{U}_A,$ $\dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C = a \dot{U}_A.$	$\dot{I}_A = \dot{U}_A \underline{Y} = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}},$ $\dot{I}_B = a \dot{I}_A,$ $\dot{I}_C = a^2 \dot{I}_A.$
Нульова послідовність	$\dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A$	$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_{BN'} = \dot{U}_{CN'} =$ $= \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} =$ $= \dot{U}_A - \dot{U}_A = 0,$	$\dot{I}_A = \dot{I}_B = \dot{I}_C =$ $= \dot{U}_{AN'} \underline{Y} = \frac{\dot{U}_{AN'}}{\underline{Z}} = 0$

Для всіх випадків симетрії сума фазних струмів має бути рівна нулю – $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

Висновок:

1. Аналіз симетричного трифазного кола без нейтрального проводу прямої та зворотної послідовностей чергування фаз повністю відповідає випадку аналізу симетричного трифазного кола з нейтраллю:

- розрахунок електричних величин зводиться до його аналізу відносно однієї з фаз;
- однофазні еквівалентні схеми заміщення створюються шляхом заміни ділянки між нейтральними точками джерела та споживача з нульовим значення напруги провідником незважаючи на його відсутність у вихідному колі;
- розрахунки дають симетричні системи напруг на опорах лінії, фазних напруг навантаження та фазних струмів;

2. Аналіз симетричного трифазного кола без нейтрального проводу нульової послідовностей чергування фаз характеризується:

- рівністю напруги зміщення нейтралі фазній напрузі джерела;
- нульовими величинами фазних струмів.

1.3.2.3. Аналіз симетричного трифазного трипровідного кола при з'єднанні фаз «трикутник в трикутник»

Аналіз симетричних трифазних кіл при з'єднанні фаз за схемою «трикутник в трикутник» відносно однієї фаз може бути реалізованим виключно для випадку нульових величин опорів лінії та визначення лише фазних струмів

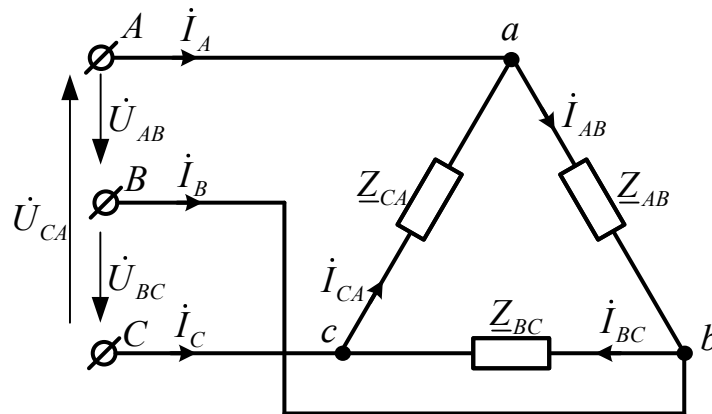


Рисунок 1.3.22 – Схема трифазного трипровідного кола із з'єднанням фаз за схемою «трикутник в трикутник»

Системи лінійних напруг джерела для прямої і зворотної послідовностей набувають вигляду:

Пряма послідовність	Зворотна послідовність
$\dot{U}_{AB} = U_{\text{Л}} e^{j\psi_{AB}},$	$\dot{U}_{AB} = U_{\text{Л}} e^{j\psi_{AB}},$
$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{U}_{AB},$	$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ} = a \dot{U}_{AB},$
$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ} = a \dot{U}_{AB}.$	$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{U}_{AB}.$

При цьому враховується факт, що лінійні та фазні напруги у випадку з'єднання фаз в «трикутник» рівні між собою, а для обох випадків симетрії виконується рівність

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} (1 + a^2 + a) = 0.$$

За нульових величин опорів лінії потенціали відповідних фазних точок джерела та навантаження рівні, а отже лінійна напруга джерела прикладена до фаз навантаження:

Пряма послідовність	Зворотна послідовність
$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB} = U_{\text{Л}} e^{j\psi_{AB}},$	$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB} = U_{\text{Л}} e^{j\psi_{AB}},$
$\dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{U}_{AB},$	$\dot{U}_{bc} = a \dot{U}_{AB},$
$\dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ} = a \dot{U}_{AB},$	$\dot{U}_{ca} = a^2 \dot{U}_{AB},$

що дозволяє вирази фазні струми навантаження за законом Ома:

Пряма послідовність	Зворотна послідовність
$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}},$	$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}},$
$\dot{I}_{BC} = a^2 \dot{I}_{AB},$	$\dot{I}_{BC} = a \dot{I}_{AB},$
$\dot{I}_{CA} = a \dot{I}_{AB}.$	$\dot{I}_{CA} = a^2 \dot{I}_{AB}.$

Струми у лініях визначаються за I законом Кірхгофа:

Пряма послідовність	Зворотна послідовність
$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA},$	$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA},$
$\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_A,$	$\dot{I}_B = a \dot{I}_A,$
$\dot{I}_C = a \dot{I}_A,$	$\dot{I}_C = a^2 \dot{I}_A,$

Сума лінійних струмів для всіх випадків симетрії має залишатись рівною нулю: $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$

Векторна діаграма струмів і топографічна діаграма напруг для симетричного кола показана на рис. 1.3.23.

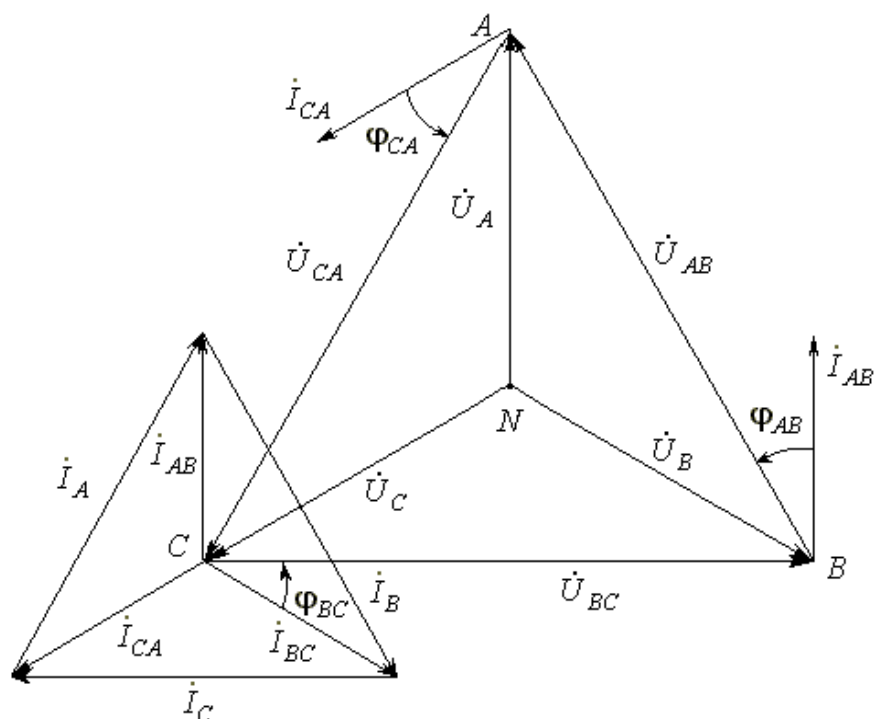


Рисунок 1.3.23 – Векторна діаграма струмів та топографічна діаграма напруг

1.3.2.4. Аналіз симетричного трифазного кола з двома паралельно підключеними навантаженнями з різними способами з'єднання фаз

Аналіз симетричних трифазних кіл з двома паралельно підключеними навантаженнями з різними способами з'єднання фаз потребує застосування еквівалентного перетворення трикутника в зірку та подальшого застосування розрахунку електричних величин відносно однієї фази за алгоритмами приведеними вище.

Для встановлення розуміння методики аналізу таких кіл відносно однієї фази пропонується розглянути симетричне трифазне коло з двома паралельно підключеними навантаженнями за умови, що фази одного з навантажень з'єднані за схемою зірка, а іншого - трикутником (рис. 1.3.24).

Вважаються відомими параметри елементів кола та фазні напруги симетричного трифазного генератора $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$.

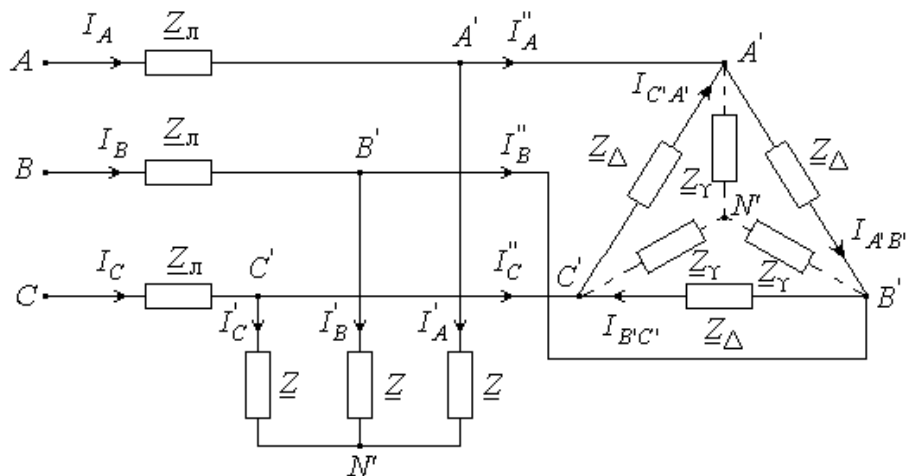


Рисунок 1.3.24 – Симетричне трифазне коло з двома паралельно підключеними навантаженнями

Рекомендований алгоритм аналізу симетричного трифазного кола з двома паралельно підключеними навантаженнями:

1. Записуємо систему комплексів фазних та лінійних напруг відносно їх діючих значень. Враховуючи, що вид послідовності не задано умовою, приймає, що в колі діє джерело прямої послідовності чергування фаз:

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= U_\Phi e^{j\psi_A}, & \dot{U}_{AB} &= U_\Phi \sqrt{3} e^{j(\psi_A + 30^\circ)}, \\ \dot{U}_B &= \dot{U}_A e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{U}_A, & \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{U}_{AB}, \\ \dot{U}_C &= \dot{U}_A e^{j120^\circ} = a \dot{U}_A, & \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ} = a \dot{U}_{AB}. \end{aligned}$$

2. Застосувавши метод еквівалентних перетворень виконуємо перетворення трифазних навантажень з'єднанням за схемою «трикутник» в з'єднання за схемою «трикутник»;

В заданому трифазному колі симетричний трикутник опорів $\underline{Z}_\Delta$ перетворюємо на симетричну зірку опорів $\underline{Z}_Y$.

3. Зводимо аналіз кола до розрахунку однієї фази A (рис. 1.3.25), отриманої з урахуванням того, що потенціали нейтральних точок генератора і споживачів однакові.

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_\Pi + \frac{\underline{Z}\underline{Z}_Y}{\underline{Z} + \underline{Z}_Y}.$$

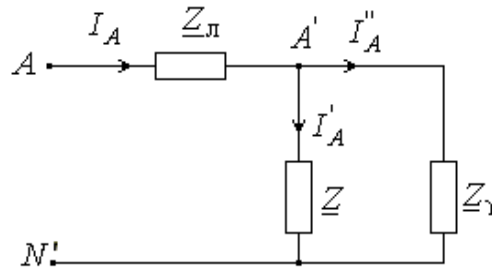


Рисунок 1.3.25 – Однофазна схема заміщення симетричного трифазного кола зображеного на рисю 1.3.24

4. Аналізуючи утворене однофазне коло (рис. 1.3.25) виконуємо розрахунок струмів у лінії та фазах навантаження відносно фази A . Струми в фазах B і C будуть зсунуті на кути відповідно $\mp 120^\circ$ відносно струмів фази A :

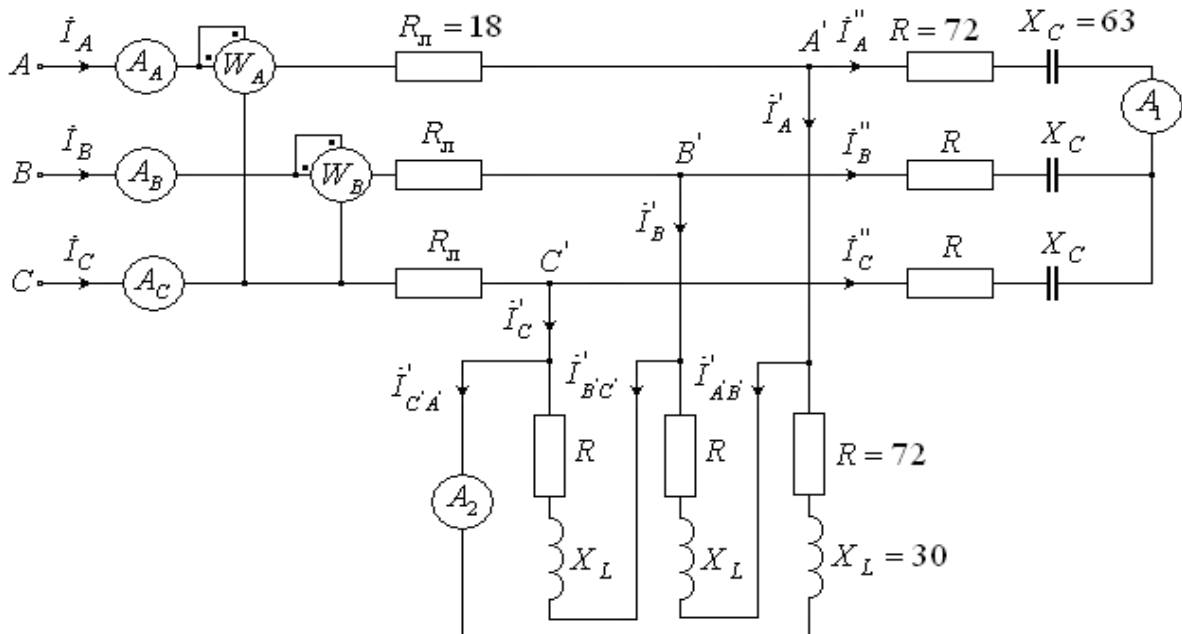
$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_e}, & \dot{I}'_A &= \dot{I}_A \frac{\underline{Z}_Y}{\underline{Z} + \underline{Z}_Y}, & \dot{I}''_A &= \dot{I}_A \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_Y}. \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_A a^2, & \dot{I}'_B &= \dot{I}'_A a^2, & \dot{I}''_B &= \dot{I}''_A a^2. \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_A a, & \dot{I}'_C &= \dot{I}'_A a, & \dot{I}''_C &= \dot{I}''_A a. \end{aligned}$$

5. Виходячи з конфігурації кола визначаємо фазну напругу на фазах навантаження опори якого з'єднані в «трикутник» використовуючи вихідне коло з вже розрахованими струмами:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{A'B'} &= (\dot{I}''_A \underline{Z}_Y - \dot{I}''_B \underline{Z}_Y), \\ \dot{U}_{B'C'} &= \dot{U}_{A'B'} a^2, \\ \dot{U}_{C'A'} &= \dot{U}_{A'B'} a. \end{aligned}$$

6. Виконуємо розрахунок струмів у фазах навантаження опори якого з'єднані в «трикутник» використовуючи закон Ома:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{A'B'} &= \frac{\dot{U}_{A'B'}}{\underline{Z}_\Delta}, \\ \dot{I}_{B'C'} &= a^2 \dot{I}_{A'B'}, \\ \dot{I}_{C'A'} &= a \cdot \dot{I}_{A'B'}. \end{aligned}$$

$$\dot{U}_A = 220 e^{j30^\circ} \text{ B}, R_{\text{II}} = 18 \text{ } \Omega, R = 72 \text{ } \Omega, X_L = 30 \text{ } \Omega, X_C = 63 \text{ } \Omega.$$


Розв'язання.

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= 220e^{j30^\circ} \text{ B}, & \dot{U}_{AB} &= 220e^{j60^\circ} \text{ B}, \\ \dot{U}_B &= 220e^{-j90^\circ} \text{ B}, & \dot{U}_{BC} &= 220e^{-j60^\circ} \text{ B}, \\ \dot{U}_C &= 220e^{j150^\circ} \text{ B}; & \dot{U}_{CA} &= 220e^{j180^\circ} \text{ B}.\end{aligned}$$
$$\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3} = \frac{R + jX_L}{3} = \frac{72 + j30}{3} = R_Y + jX_{LY} = 24 + j10 = 26e^{j22.62^\circ} \text{ Ом.}$$

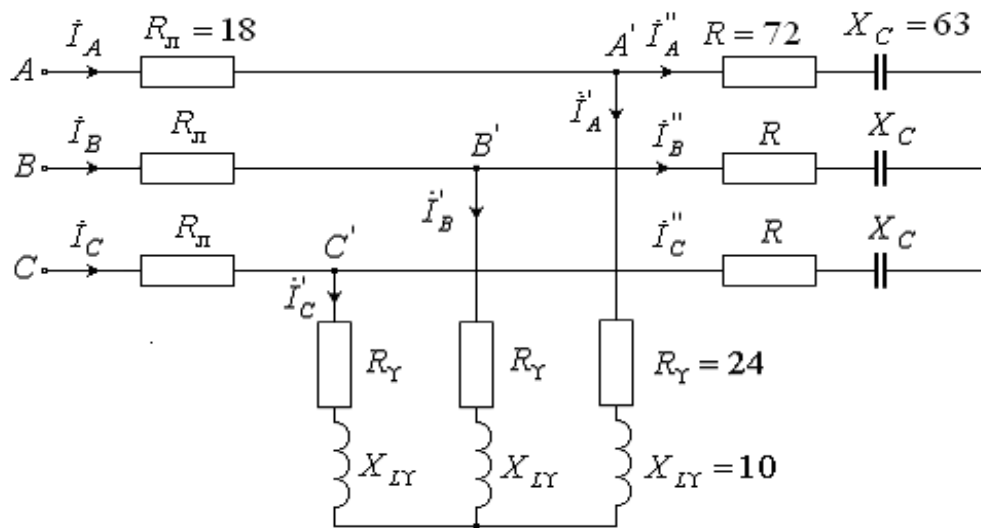


Рисунок 1.3.27 – Еквівалентна схема симетричного трифазного кола після перетворення «трикутника» з опорами R, X_L на симетричну «зірку»

3. Подаємо утворене симетричне трифазне коло (рис. 1.3.27) однофазною схемою заміщення відносно фази A (рис. 1.3.28) та виконуємо розрахунок його еквіваленту повного опору шляхом згортки:

$$\underline{Z}_3 = R - jX_C = 72 - j63 = 95.67e^{-j41.19^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_Y + jX_{LY} = 24 + j10 = 26e^{j22.62^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{26e^{j22.62^\circ} \cdot 95.67e^{-j41.19^\circ}}{24 + j10 + 72 - j63} = \frac{2487.45e^{-j18.57^\circ}}{\underbrace{96 - j53}_{109.66e^{-j28.90^\circ}}} = 22.68e^{j10.34^\circ} =$$

$$= (22.32 + j4.07) \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_e = R_{\text{л}} + \underline{Z}_{23} = 18 + 22.32 + j4.07 = 40.32 + j4.07 = 40.52e^{j5.76^\circ} \text{ Ом}.$$

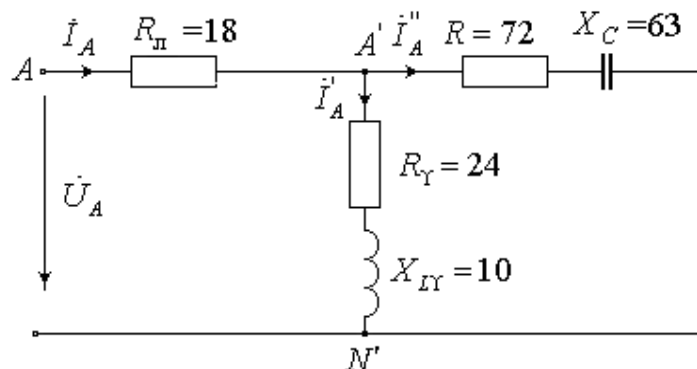


Рисунок 1.3.28 – Однофазна схема заміщення еквівалентної схема симетричного трифазного кола (рис. 1.3.27)

4. Визначаємо струми у лінії та фазах навантаження відносно фази A .
Струми в інших знаходимо з умови симетрії.

Лінійні струми:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_e} = \frac{220e^{j30^\circ}}{40.52e^{j5.76^\circ}} = 5.43e^{j24.24^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A \cdot e^{-j120^\circ} = 5.43e^{j24.24^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 5.43e^{-j95.76^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A \cdot e^{j120^\circ} = 5.43e^{j24.24^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 5.43e^{j144.24^\circ} \text{ A}.$$

Струми у фазах перетвореного навантаження з опорами R_Y, X_{LY} :

$$\dot{I}'_A = \dot{I}_A \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 5.43e^{j24.24^\circ} \cdot \frac{95.67e^{-j41.19^\circ}}{109.66e^{-j28.90^\circ}} = 4.734e^{j11.95^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}'_B = \dot{I}'_A \cdot e^{-j120^\circ} = 4.734e^{j11.95^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 4.734e^{-j108.05^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}'_C = \dot{I}'_A \cdot e^{j120^\circ} = 4.734e^{j11.95^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 4.734e^{j131.95^\circ} \text{ A}.$$

Струми у фазах навантаження з опорами R, X_C :

$$\dot{I}''_A = \dot{I}_A - \dot{I}'_A = 5.43e^{j24.24^\circ} - 4.734e^{j11.95^\circ} = 1.29e^{j75.76^\circ} \text{ A}.$$

$$\dot{I}''_B = \dot{I}''_A \cdot e^{-j120^\circ} = 1.29e^{j75.76^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 1.29e^{-j44.24^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}''_C = \dot{I}''_A \cdot e^{j120^\circ} = 1.29e^{j75.76^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 1.29e^{j195.76^\circ} \text{ A}.$$

5. Для визначення струмів у трикутнику опорів вихідного кола знайдемо напругу $\dot{U}_{A'B'}$ зі схеми зображеної на рис. 1.3.27:

$$\dot{U}_{A'B'} = \dot{I}'_A \cdot \underline{Z}_Y - \dot{I}'_B \cdot \underline{Z}_Y = (4.74e^{j11.95^\circ} - 4.74e^{-j108.05^\circ}) \cdot 26e^{j22.62^\circ} = 213.32e^{j64.57^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{I}'_{A'B'} = \frac{\dot{U}_{A'B'}}{\underline{Z}_\Delta} = \frac{213.32e^{j64.57^\circ}}{78e^{j22.62^\circ}} = 2.73e^{j41.95^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}'_{B'C'} = \dot{I}'_{A'B'} \cdot e^{-j120^\circ} = 2.73e^{j41.95^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 2.73e^{-j78.05^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}'_{C'A'} = \dot{I}'_{A'B'} \cdot e^{j120^\circ} = 2.73e^{j41.95^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 2.73e^{j161.95^\circ} \text{ A}.$$

6. Перевірку розрахунків здійснюємо шляхом порівняння потужностей джерела та навантаження.

Комплексна потужність фази A джерела:

$$\dot{S}_\Gamma = \dot{U}_A \cdot \dot{I}_A^* = 220e^{j30^\circ} \cdot 5.43e^{-j24.24^\circ} = 1194.46e^{j5.77^\circ} = (\underbrace{1188.42}_{P_\Gamma} + j\underbrace{119.98}_{Q_\Gamma}) \text{ ВА.}$$

Активна і реактивна потужності фази A навантаження:

$$P_{\text{сп}} = I_A^2 \cdot R_{\text{л}} + (I_A')^2 \cdot R_Y + (I_A'')^2 \cdot R = 5.43^2 \cdot 18 + 4.74^2 \cdot 24 + 1.29^2 \cdot 72 = 1188.42 \text{ Вт,}$$

$$Q_{\text{сп}} = (I_A')^2 \cdot X_{LY} - (I_A'')^2 \cdot X_C = 4.74^2 \cdot 10 - 1.29^2 \cdot 63 = 119.98 \text{ ВАр.}$$

Активна та реактивна потужності всіх трьох фаз отримується шляхом потроєння розрахованих величин потужностей $P_{\text{сп}}$ і $Q_{\text{сп}}$.

7. Будуємо діаграму для вихідного кола (рис. 1.3.26).

Потовщені лінії векторів відображають розподіл струмів та напруг відносно фази A (рис. 1.3.29); вектори струмів і напруг для фаз B і C зміщуються на кут $\mp 120^\circ$ відносно відповідних векторів фази A .

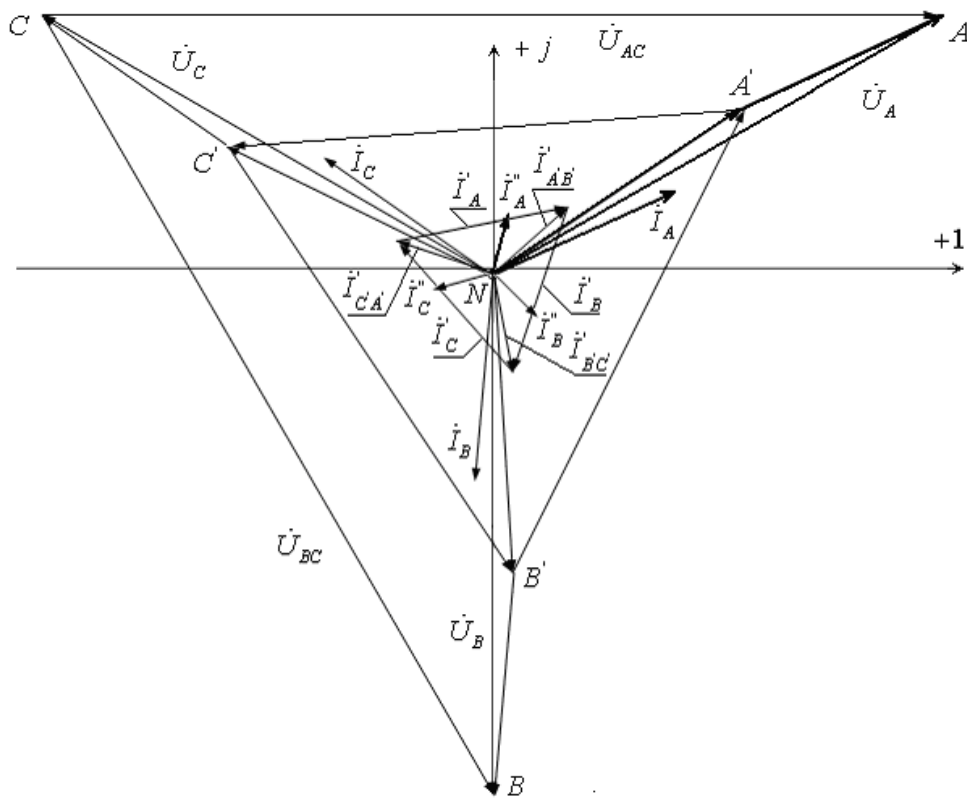


Рисунок 1.3.29 – Векторна діаграма струмів та топологічна діаграма напруг заданого симетричного трифазного кола (рис. 1.3.26)

8. Визначаємо покази амперметрів, які рівні діючим значенням струмів у фазах:

$$I_{A_A} = I_{A_B} = I_{A_C} = I_A = 5.43 \text{ А, } I_{A_1} = I_A'' = 1.29 \text{ А, } I_{A_2} = I_{C'A'} = 2.73 \text{ А;}$$

та покази ватметрів:

$$\begin{aligned} P_{W_A} &= \operatorname{Re} \left(\dot{U}_{AC} \cdot I_A^* \right) = \operatorname{Re} \left(U_A \cdot \sqrt{3} e^{j0^\circ} \cdot I_A^* \right) = \operatorname{Re} \left(220 \cdot \sqrt{3} e^{j0^\circ} \cdot 5.43 e^{-j24.24^\circ} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(2069.11 e^{-j24.24^\circ} \right) = 2069.11 \cos 24.24^\circ = 1886.46 \text{ Вт}, \\ P_{W_B} &= \operatorname{Re} \left(\dot{U}_{BC} \cdot I_B^* \right) = \operatorname{Re} \left(U_B \cdot \sqrt{3} e^{j\psi_{BC}} \cdot I_B^* \right) = \operatorname{Re} \left(220 \cdot \sqrt{3} e^{-j60^\circ} \cdot 5.43 e^{j95.76^\circ} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(2069.11 e^{j35.76^\circ} \right) = 2069.11 \cos 35.76^\circ = 1678.82 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Сума показів двох ватметрів дорівнює активній потужності трифазного кола:

$$P = P_{W_A} + P_{W_B} = 1886.46 + 1678.82 = 3565.28 \text{ Вт}.$$

1.3.2.5. Характерні особливості симетричних трифазних кіл при з'єднанні фаз «зірка в зірку» без нейтрально проводу при аварійних режимах

У процесі експлуатації трифазних електричних систем можуть виникати аварійні режими, що суттєво впливають на режим роботи кола. До найпоширеніших видів аварій належать:

- короткі замикання, які можуть виникати:
 - між фазами (міжфазне коротке замикання);
 - між фазою та землею (однополюсне замикання на землю);
 - безпосередньо у фазі навантаження (внутрішньофазне замикання);
- обриви провідників, зокрема:
 - лінійних провідів;
 - фаз навантаження або фаз джерела живлення.

З метою вивчення базових характерних особливостей функціонування трифазного електричного кола за умов порушення його симетрії доцільно обрати модель симетричного трифазного кола зі з'єднанням фаз за схемою «зірка в зірку» без нейтрального проводу. Така конфігурація є типовою для систем середньої, високої та надвисокої напруги.

Матеріал, поданий нижче, має ідеалізований характер і використовується для демонстрації типових змін у розподілі струмів та напруг при виникненні окремих аварійних станів. Як приклади розглянуто випадки короткого замикання та обриву фази в умовах симетричної генерації та лінії.

Режим короткого замикання фази навантаження в симетричному трифазному колі.

Для дослідження особливостей виникнення короткого замикання обрано симетричне трифазне коло прямої послідовності з опорами навантаження $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z} = Ze^{j\varphi}$.

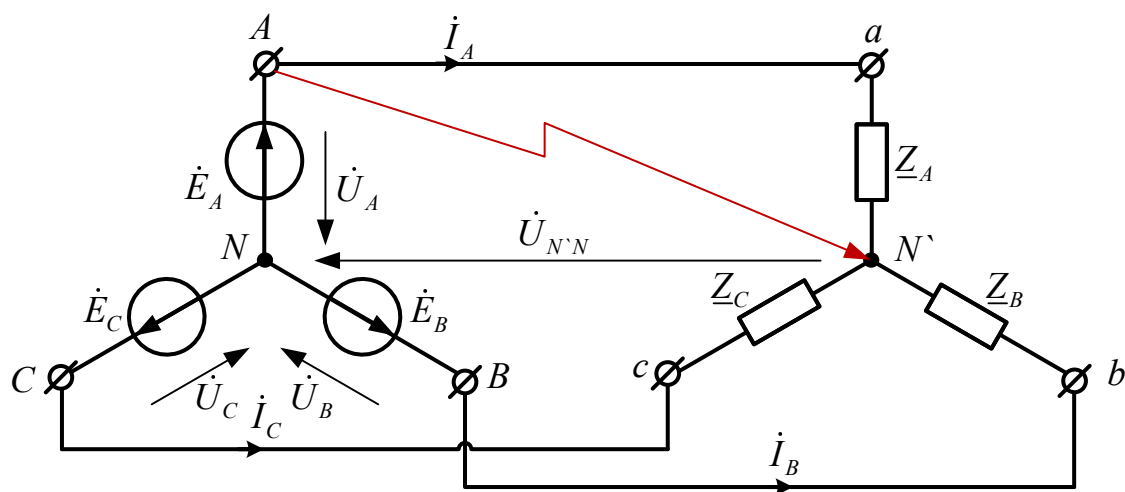


Рисунок 1.3.30 – Режим внутрішньофазного замикання в симетричному трифазному колі

За умови виникнення короткого замикання, наприклад у фазі A , тобто напруга навантаження фази A рівна нулю ($\dot{U}_{AN'} = 0$), то напруга зміщення нейтралі:

$$\dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A.$$

Напруги фаз B і C :

$$\begin{aligned} \dot{U}_{BN'} &= \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_B - \dot{U}_A = \dot{U}_{BA}, & \dot{U}_{BN'} &= \dot{U}_{BA}; \\ \dot{U}_{CN'} &= \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = \dot{U}_{CA}, & \dot{U}_{CN'} &= \dot{U}_{CA}. \end{aligned}$$

Розподіл струмів та напруг у колів (рис. 1.3.30) відображені на векторній діаграмі (рис. 1.3.31).

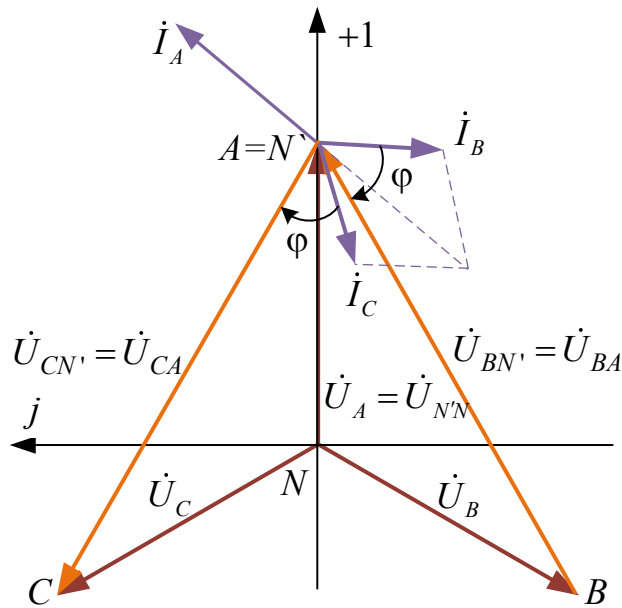


Рисунок 1.3.31 – Векторна діаграма струмів та топологічна діаграма напруг для режиму короткого замикання в симетричному трифазному колі (рис. 1.3.30)

Висновок: коротке замикання в одній із фаз навантаження симетричного трифазного кола призводить до збільшення фазних напруг в інших фазах в $\sqrt{3}$ раз, тобто до величин лінійних напруг.

Режим обриву фази навантаження / лінії в симетричному трифазному колі.

Вивчення особливостей розподілу напруг та струмів у разі обриву фазного провідника проведено на прикладі схеми кола з попереднього дослідження (рис. 1.3.30) за умови, що обрив реалізовано в фазі A навантаження, тобто

$$\underline{Z}_A = \infty, \quad \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = 0,$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z} = \underline{Z}e^{j\varphi}, \quad \underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \underline{Y}.$$

Напруга зміщення нейтралі у випадку обриву рівна половині фазної прикладеної напруги:

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\underline{Y}(\dot{U}_B + \dot{U}_C)}{2\underline{Y}} = \frac{(\dot{U}_B + \dot{U}_C)}{2} = -\frac{\dot{U}_A}{2}.$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AN'} &= \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A - \frac{\overbrace{(\dot{U}_B + \dot{U}_C)}^{-\dot{U}_A}}{2} = \frac{2\dot{U}_A + \dot{U}_A}{2} = \frac{3}{2}\dot{U}_A, \\ \dot{U}_{BN'} &= \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_B - \frac{(\dot{U}_B + \dot{U}_C)}{2} = \frac{2\dot{U}_B - \dot{U}_B - \dot{U}_C}{2} = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_C}{2} = \frac{\dot{U}_{BC}}{2}, \\ \dot{U}_{CN'} &= \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_C - \frac{(\dot{U}_B + \dot{U}_C)}{2} = \frac{2\dot{U}_C - \dot{U}_B - \dot{U}_C}{2} = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_B}{2} = -\frac{\dot{U}_{BC}}{2}.\end{aligned}$$

90

1.3.3. Метод симетричних складових

1.3.3.1. Основні положення методу симетричних складових (Fortescue method)

Метод симетричних складових, запропонований Чарльзом Л. Фортеस्क'ю (*C.L. Fortescue*) у 1918 році, ґрунтується на принципі представлення будь-якої несиметричної трифазної системи напруг або струмів у вигляді суми трьох умовно симетричних систем (складових), кожна з яких має визначену послідовність фаз:

- **пряма послідовність** (англ. **Positive-Sequence**) – система трьох однакових за амплітудою величин, зсунених між собою на 120° у напрямку прямого обертання ($A \rightarrow B \rightarrow C$);
- **зворотна послідовність** (англ. **Negative-Sequence**) – система трьох однакових за амплітудою величин, зсунених між собою на 120° , але у зворотному напрямку ($A \rightarrow C \rightarrow B$);
- **нульова послідовність** (англ. **Zero-Sequence**) – система трьох однакових за амплітудою і фазою величин, що діють одночасно.

Такий підхід дозволяє перетворити аналітично складну несиметричну задачу на три прості симетричні задачі, кожна з яких може бути досліджена окремо із використанням класичних методів аналізу.

Метод широко застосовується для розрахунків у таких випадках:

- несиметричні аварійні режими трифазних систем (однофазні та міжфазні короткі замикання, замикання на землю, обриви фаз);
- робота з несиметричними навантаженнями, наприклад, при живленні однофазних електроприймачів;
- аналіз динамічних процесів, зокрема запуск і зупинка асинхронних двигунів, коли спостерігається тимчасова несиметрія струмів.

У нормальному (симетричному) режимі трифазної системи існує лише складова прямої послідовності, а зворотна та нульова складові відсутні. Несиметрія, зумовлена порушенням рівності фазних напруг або струмів (наприклад, при обриві однієї з ліній або несиметричному навантаженні), призводить до появи додаткових складових, що можуть бути визначені через спеціальні оператори симетрії та розкладання.

Таким чином, метод симетричних складових є ефективним інструментом ідентифікації, класифікації та кількісної оцінки несиметрії у трифазних системах. Він є стандартом у сучасному аналізі аварійних режимів енергосистем та реалізується в усіх професійних програмах електротехнічного моделювання.

Перетворення симетричних складових: матричне, алгебраїчне та геометричне подання.

Метод симетричних складових базується на представленні несиметричної трифазної системи напруг або струмів як суми трьох незалежних симетричних систем:

- складової прямої послідовності (індекс 1),
- складової зворотної послідовності (індекс 2),
- складової нульової послідовності (індекс 0).

Такий підхід дозволяє аналізувати кожен з цих складових окремо, що істотно спрощує вивчення та розрахунків аварійних і несиметричних режимів у трифазних електричних колах.

З математичної точки зору метод реалізується як лінійне перетворення у векторному просторі, що дозволяє перейти від несиметричної фазної системи до базису симетричних складових. Залежність між несиметричними значеннями фазних напруг (або струмів) і відповідними симетричними складовими може бути подано у трьох формах: у вигляді матриці, системи алгебраїчних рівнянь у комплексному поданні та у формі векторних діаграм.

1. Матричне подання перетворення

Пряме перетворення від несиметричних фазних величин до симетричних складових, на прикладі фазних напруг:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_0 \\ \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_A \\ \dot{U}_B \\ \dot{U}_C \end{bmatrix}$$

де:

- $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ – комплексні значення фазних величин несиметричної системи,
- $\dot{U}_0, \dot{U}_1, \dot{U}_2$ – відповідно складові нульової, прямої та зворотної послідовностей,
- $a = e^{j120^\circ}$ – оператор повороту на 120° .

Обернене перетворення (перехід від симетричних складових до фазних величин):

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_A \\ \dot{U}_B \\ \dot{U}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_0 \\ \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}.$$

2. Алгебраїчне подання (система рівнянь у комплексному поданні)

Ілюстрація суті методу відображається при використанні алгебраїчної форми запису прямого та оберненого переходів: кожна симетрична складова утворюється як лінійна комбінація трьох фазних величин з урахуванням зсуву фаз на 120° .

Пряме перетворення:

$$\begin{cases} \dot{U}_0 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) \\ \dot{U}_1 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) \\ \dot{U}_2 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) \end{cases}$$

Обернене перетворення:

$$\begin{cases} \dot{U}_A = \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \\ \dot{U}_B = \dot{U}_0 + a^2\dot{U}_1 + a\dot{U}_2 \\ \dot{U}_C = \dot{U}_0 + a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 \end{cases}$$

3. Геометричне подання (векторні діаграми)

Для наочного подання перетворення використовується графічне зображення у вигляді векторних діаграм (рис. 1.3.33):

- рис. 1.3.33, а – система векторів прямої послідовності,
- рис. 1.3.33, б – система зворотної послідовності,
- рис. 1.3.33, в – нульова послідовність,
- рис. 1.3.33, г – геометрична сума усіх трьох складових, яка відтворює початкову несиметричну систему.

Будь-який несиметричний векторний трикутник (наприклад, напруги) може бути розкладений у вигляді геометричної суми трьох симетричних векторних трикутників, що відповідають складовим нульової, прямої та зворотної послідовностей.

Такий комплексний підхід – матричний, алгебраїчний і графічний – забезпечує всебічне уявлення про фізичну природу симетричних складових і є

фундаментальним для аналізу аварійних режимів у трифазних електричних колах.

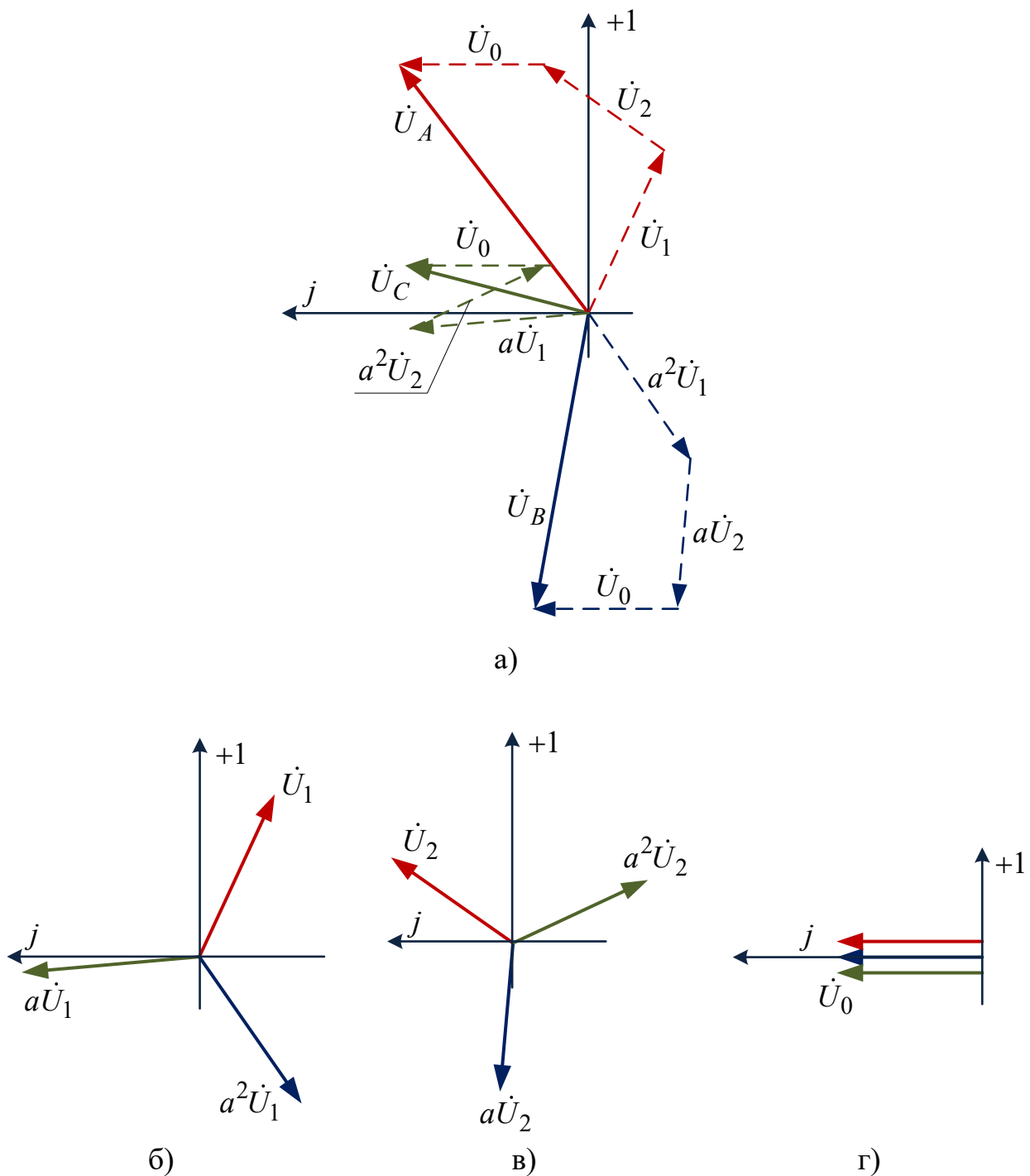


Рисунок 1.3.33 – Векторне подання розкладання несиметричної системи фазних напруг на симетричні складові

Опори прямої, зворотної та нульової послідовностей у симетричному трифазному колі

При застосуванні методу симетричних складових аналіз несиметричних режимів у трифазній системі електроенергетичного об'єкта зводиться до накладання результатів розрахунків електричних величин, виконаних для трьох незалежних симетричних систем. Кожна з цих систем моделюється окремо й характеризується власним еквівалентним опором.

Це означає, що кожному елементу трифазної системи – лінії електропередачі, трансформатору, електричній машині або навантаженню – відповідають три симетричні складові комплексного опору, які входять до складу еквівалентних схем послідовностей:

- $\underline{Z}_1$ – опір прямої (позитивної) послідовності;
- $\underline{Z}_2$ – опір зворотної (негативної) послідовності;
- $\underline{Z}_0$ – опір нульової послідовності.

Відмінності між цими опорами визначають характер протікання струмів і розподілу напруг у трифазній системі в різних режимах: $\underline{Z}_1$ описує роботу системи при нормальному (симетричному) режимі, тоді як $\underline{Z}_2$ і $\underline{Z}_0$ використовуються під час аналізу аварійних (несиметричних) режимів, зокрема при однофазних коротких замиканнях, обривах або міжфазних замиканнях.

Опір прямої послідовності.

У симетричному режимі струми й напруги системи формують систему прямої послідовності, тому опір $\underline{Z}_1$ описує поведінку елемента при нормальній роботі. Для ліній електропередачі $\underline{Z}_1$ дорівнює їх фазному опору. В електричних машинах $\underline{Z}_1$ описується через еквівалентний повний опір, що враховує активну та реактивну складові обмотки статора.

Опір зворотної послідовності.

Опір зворотної послідовності характеризує реакцію елемента системи на умови зворотного обертання векторів фаз – як це відбувається, наприклад, при двофазному короткому замиканні або обриві фази. Для більшості пасивних елементів, зокрема ліній електропередачі, за умови геометричної симетрії конфігурації, опір зворотної послідовності $\underline{Z}_2$ дорівнює $\underline{Z}_1$. Це пояснюється тим, що передавання енергії через такий елемент не залежить від напрямку обертання векторної діаграми. Натомість у синхронних машинах та трансформаторах опір $\underline{Z}_2$ зазвичай відрізняється від $\underline{Z}_1$ через асиметрію магнітного поля та конструктивні особливості активної частини.

Опір нульової послідовності.

Опір нульової послідовності описує умови протікання струмів, що мають однакову фазу та амплітуду в усіх трьох провідниках (тобто не утворюють фазової системи). Його значення залежить переважно від наявності або відсутності шляху повернення струму через нейтральний провід або землю. У симетрично заземлених системах (наприклад, із заземленою нейтраллю трансформатора або генератора) $\underline{Z}_0$ визначається характеристиками нейтрального проводу та земної петлі струму. У випадку ізольованої або незаземленої нейтралі $\underline{Z}_0$ може набувати значних значень, що істотно впливає на характер аварійних режимів. Також у лініях електропередачі $\underline{Z}_0$ суттєво залежить від взаємної індуктивності між проводами і зазвичай перевищує $\underline{Z}_1$ у 2–4 рази.

Опір нейтрального проводу не впливає на симетричні системи струмів прямої та зворотної послідовностей, тому у схемах для цих послідовностей він відсутній.

1.3.3.2. Застосування методу до аналізу кіл з несиметричними навантаженнями

Метод симетричних складових доцільно застосовувати у випадках:

- наявності однофазного або несиметричного навантаження у складі трифазної системи;
- виникнення несиметрії, спричиненої конструктивними або експлуатаційними відхиленнями;
- аналізу аварійних режимів, зокрема однофазних коротких замикань, обривів ліній, міжфазних замикань.

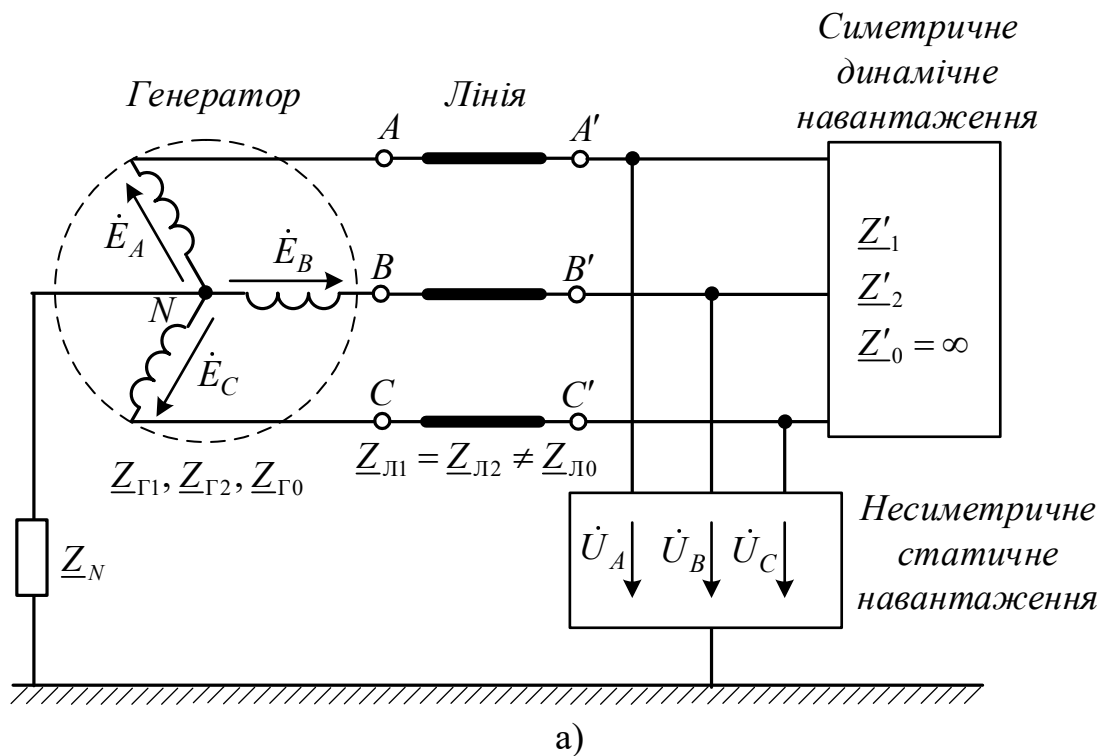
Застосування методу дозволяє замінити задачу аналізу несиметричного трифазного кола на три незалежні задачі аналізу симетричних кіл – для складових прямої (1), зворотної (2) та нульової (0) послідовностей.

У якості прикладу розглянуто коло (рис. 1.3.34, а) із симетричним трифазним джерелом та паралельним підключенням симетричного динамічного і несиметричного статичного навантажень. Несиметричне навантаження підключено через нейтральний провід із ненульовим опором. Відомі ЕРС та внутрішні повні опори генератора, еквівалентні опори лінії та навантаження. Припускається, що генератор і лінія є симетричними. Система ЕРС генератора прямої послідовності. Опори прямої, зворотної та нульової послідовностей

генератора позначено як $\underline{Z}_{Г1}, \underline{Z}_{Г2}, \underline{Z}_{Г0}$, відповідно для лінії – $\underline{Z}_{Л1} = \underline{Z}_{Л2}$, $\underline{Z}_{Л0} = \underline{Z}_{Л\phi} + 3\underline{Z}_{землі}$.

Рекомендована методика застосування методу симетричних складових забезпечує покроковий аналітичний підхід до аналізу несиметричних режимів у трифазних колах із можливістю уніфікації розрахунків і спрощення структури еквівалентних моделей.

Крок 1. На основі принципу компенсації несиметричне навантаження замінюють трьома джерелами напруг із невідомими значеннями $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$, формуючи схему з джерелом живлення симетричної системи ЕРС прямої послідовності та джерелом несиметричної системи напруг $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ (рис. 1.3.34, б).



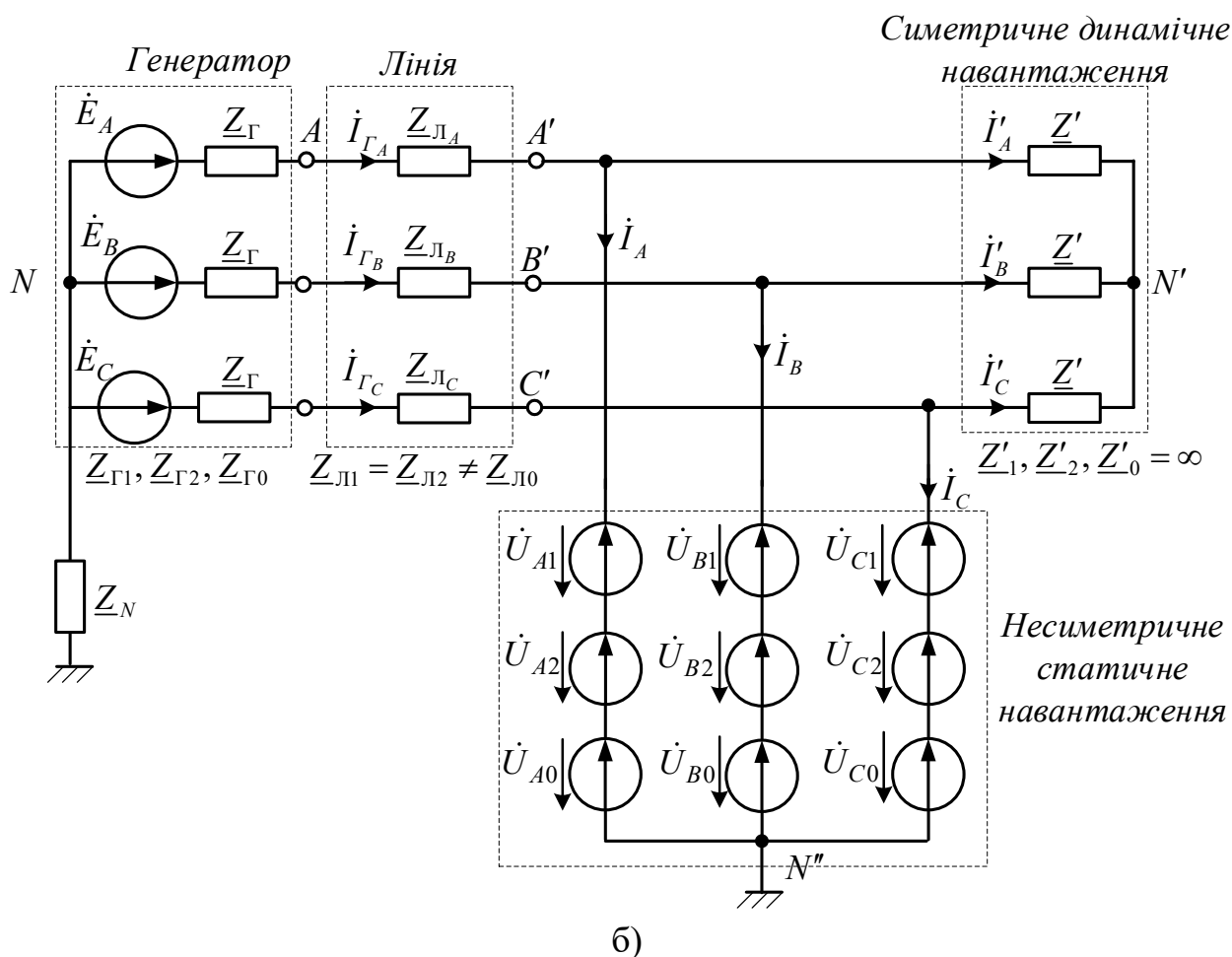


Рисунок 1.3.34 – Схема трифазного кола до опису алгоритму методу симетричних складових:

- а) структурна схема вихідного трифазного кола;
 б) еквівалентна схема заміщення несиметричного навантаження системою несиметричних трифазних напруг

Крок 2. Система несиметричних фазних напруг $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ подається системою симетричних складових $(\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0)$, як

$$\begin{cases} \dot{U}_A = \dot{U}_{A0} + \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} = \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \\ \dot{U}_B = \dot{U}_{B0} + \dot{U}_{B1} + \dot{U}_{B2} = \dot{U}_0 + a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 \\ \dot{U}_C = \dot{U}_{C0} + \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{C2} = \dot{U}_0 + a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 \end{cases}$$

Таким чином, вихідне коло (рис. 1.3.34, а) замінюється еквівалентом, де кожна фаза несиметричного навантаження є послідовним з'єднанням трьох симетричних складових фазної напруги навантаження (рис. 1.3.34, б).

Крок 3. Згідно методу накладання дій джерел еквівалент трифазного кола (рис. 1.3.34, б) може бути подано трьома частковими трифазними колами відносно дії кожної трифазної системи симетричних складових:

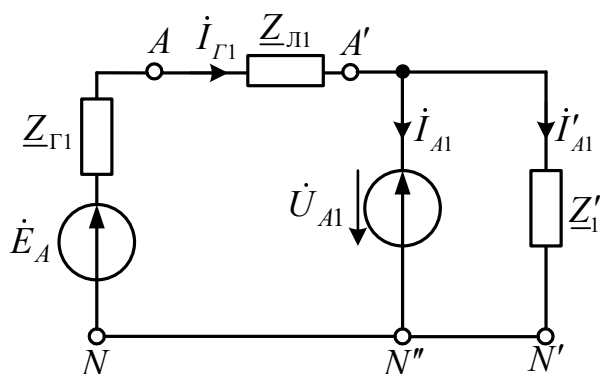
- еквівалент часткового трифазного кола при дії системи напруг прямої послідовності;
- еквівалент часткового трифазного кола при дії системи напруг зворотної послідовності;
- еквівалент часткового трифазного кола при дії системи напруг нульової послідовності.

Примітка: за відсутності нейтрального проводу відсутній шлях замикання струмів нульової послідовності, отже в колах без нейтралі схема заміщення при дії системи напруг нульової послідовності не формується.

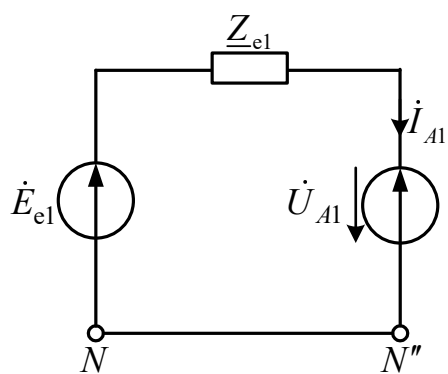
Крок 4. Утворені трифазні часткові кола відносно кожної симетричної складової є симетричними. Враховуючи, що в симетричному колі симетрична система напруг будь-якої послідовності викликає симетричну систему струмів тієї ж послідовності,

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_{A0} + \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} = \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{B0} + \dot{I}_{B1} + \dot{I}_{B2} = \dot{I}_0 + a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2; \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{C0} + \dot{I}_{C1} + \dot{I}_{C2} = \dot{I}_0 + a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2; \\ \dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 3\dot{I}_0. \end{cases}$$

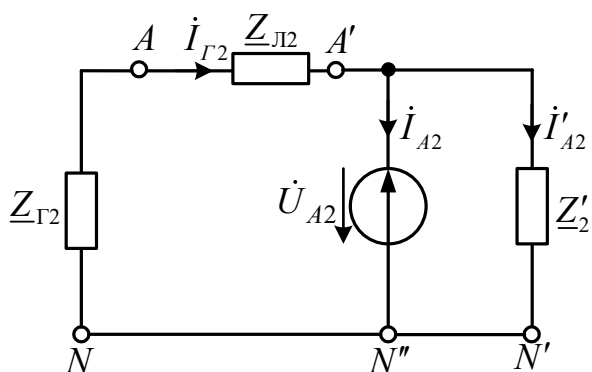
Це дає змогу подальші розрахунки напруг і струмів проводити відносно однієї фази. Відповідні однофазні схеми заміщення зображено на рис. 1.3.35 а, б, в. При формуванні однофазної еквівалентної схеми заміщення відносно нульової послідовності враховується потроєне значення опору нейтрального проводу.



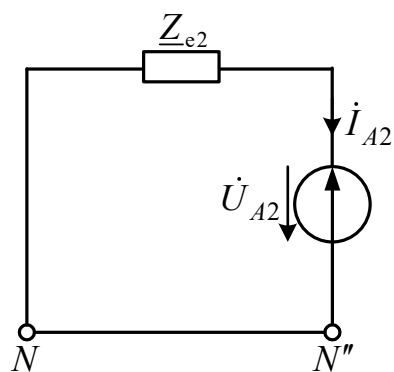
а)



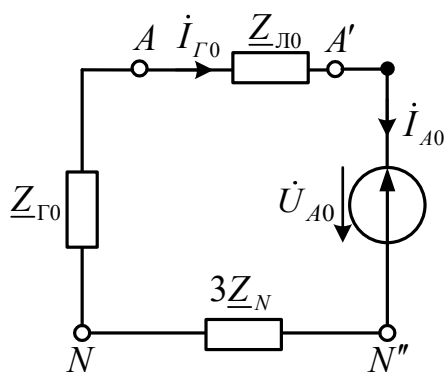
г)



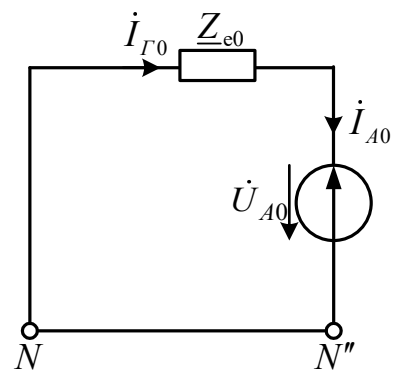
б)



д)



в)



е)

Рисунок 1.3.35 – Однофазні схеми заміщення вихідного трифазного кола відносно симетричних складових прямої (а), зворотної (б) і нульової (в) послідовностей та еквіваленти однофазних схем заміщення відносно прямої (г), зворотної (д) і нульової (е) послідовностей відповідно

Крок 5. Кожна з однофазних схем заміщення (рис. 1.3.35 а, б, в) спрощується до еквівалентного одноконтурного кола відносно невідомої симетричної складової. Відповідні еквіваленти однофазних схем заміщення після перетворень зображено на рис. 1.3.35 г, д, е, де

$$\dot{E}_{e1} = \frac{\dot{E}_1 \left(\frac{1}{\underline{Z}_{\Gamma 1} + \underline{Z}_{\text{Л1}}} \right)}{\frac{1}{\underline{Z}_{\Gamma 1} + \underline{Z}_{\text{Л1}}} + \frac{1}{\underline{Z}'_1}}; \quad \underline{Z}_{e1} = \frac{(\underline{Z}_{\Gamma 1} + \underline{Z}_{\text{Л1}}) \cdot \underline{Z}'_1}{\underline{Z}_{\Gamma 1} + \underline{Z}_{\text{Л1}} + \underline{Z}'_1} \quad - \quad \text{розрахунок параметрів}$$

еквівалентної однофазної схеми заміщення відносно симетричної складової прямої послідовності;

$$\underline{Z}_{e2} = \frac{(\underline{Z}_{\Gamma 2} + \underline{Z}_{\text{Л2}}) \cdot \underline{Z}'_2}{\underline{Z}_{\Gamma 2} + \underline{Z}_{\text{Л2}} + \underline{Z}'_2} \quad - \text{розрахунок параметрів еквівалентної однофазної}$$

схеми заміщення відносно симетричної складової зворотної послідовності;

$\underline{Z}_{e0} = \underline{Z}_{\Gamma 0} + \underline{Z}_{\text{Л0}} + 3\underline{Z}_N$ – розрахунок параметрів еквівалентної однофазної схеми заміщення відносно симетричної складової нульової послідовності.

Крок 6. Для кожної із однофазних еквівалентів (рис. 1.3.35 г, д, е) записуються рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{e1} \cdot \dot{I}_{A1} + \dot{U}_{A1} = \dot{E}_{e1}; \\ \underline{Z}_{e2} \cdot \dot{I}_{A2} + \dot{U}_{A2} = 0; \\ \underline{Z}_{e0} \cdot \dot{I}_{A0} + \dot{U}_{A0} = 0. \end{cases}$$

Утворена система з трьох рівняннях містить шість невідомих – $\dot{I}_{A1}, \dot{I}_{A2}, \dot{I}_{A0}, \dot{U}_{A1}, \dot{U}_{A2}, \dot{U}_{A0}$. Додаткові три рівняння, що зв'язують ці шість невідомих, складаються виходячи з конкретного типу несиметрії і параметрів навантаження.

Крок 7. Виходячи з заданої конфігурації з'єднання елементів несиметричного навантаження складаються додаткові три рівняння з урахуванням, що система несиметричних струмів навантаження також подається через симетричні складові:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_{A0} + \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} = \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{B0} + \dot{I}_{B1} + \dot{I}_{B2} = \dot{I}_0 + a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2; \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{C0} + \dot{I}_{C1} + \dot{I}_{C2} = \dot{I}_0 + a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2; \\ \dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 3\dot{I}_0. \end{cases}$$

Нижче наводяться можливі три варіанти несиметрії із та додаткові рівняння для розглянутих випадків:

а) Обрив проводів у фазах *B* і *C* (рис. 1.3.36).

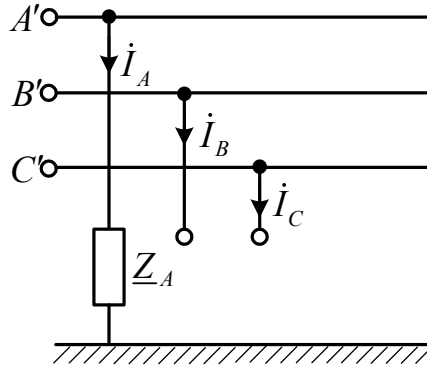


Рисунок 1.3.36 - Обрив проводів у фазах B і C навантаження

$$\begin{cases} \dot{U}_A = \dot{I}_A \cdot \underline{Z}_A; \\ \dot{I}_B = 0; \\ \dot{I}_C = 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} = (\dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0}) \cdot \underline{Z}_A; \\ a^2 \dot{I}_{A1} + a \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} = 0; \\ a \dot{I}_{A1} + a^2 \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} = 0. \end{cases}$$

б) Обрив проводу в фазі A (рис. 1.3.37).

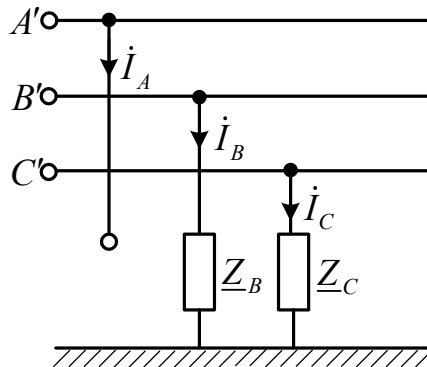


Рисунок 1.3.37 – Обрив проводу в фазі A навантаження

$$\begin{cases} \dot{I}_A = 0; \\ \dot{U}_B = \dot{I}_B \cdot \underline{Z}_B; \\ \dot{U}_C = \dot{I}_C \cdot \underline{Z}_C. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} = 0; \\ a^2 \dot{U}_{A1} + a \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} = (a^2 \dot{I}_{A1} + a \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0}) \cdot \underline{Z}_B; \\ a^2 \dot{U}_{A1} + a^2 \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} = (a \dot{I}_{A1} + a^2 \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0}) \cdot \underline{Z}_C. \end{cases}$$

в) Обрив у фазі A у разі відсутності нейтрального проводу (рис. 1.3.38).

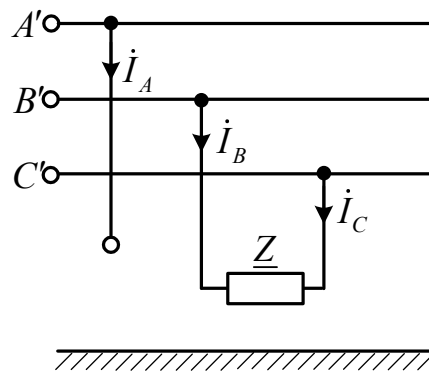


Рисунок 1.3.38 – Обрив у фазі A навантаження за відсутності нейтрального проводу

Струм нульової послідовності відсутній, а отже достатньо скласти два додаткових рівняння:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = 0; \\ \dot{U}_B - \dot{U}_C = \dot{I}_B \cdot \underline{Z}. \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} = 0; \\ (a^2 \dot{U}_{A1} + a \dot{U}_{A2}) - (a \dot{U}_{A1} + a^2 \dot{U}_{A2}) = (a^2 \dot{I}_{A1} + a \dot{I}_{A2}) \cdot \underline{Z}. \end{cases}$$

Аналогічно складаються рівняння для інших випадків статичного несиметричного навантаження.

Крок 8. Розв'язок системи рівнянь, утвореної за рахунок об'єднання системи складеної за законами Кірхгофа та системи складеної для заданої конфігурації несиметрії, дозволяє визначити симетричні складові струму та напруги фази A несиметричного навантаження. Симетричні складові струмів та напруги інших фаз розраховуються із використанням поворотного множника.

Особливості аналізу несиметричного трифазного кола методом симетричних складових:

1. Оскільки струм нейтрального проводу є сумою лінійних струмів, то він дорівнює потроєному значенню струму нульової послідовності системи лінійних струмів.
2. Через те, що сума лінійних напруг дорівнює нулю, система лінійних напруг не містить складових нульової послідовності.

3. Симетричні складові прямої та зворотної послідовностей фазних напруг споживача, з'єднаного зіркою, зв'язані з відповідними симетричними складовими підведених до нього лінійних напруг. Звідси виходить, що фазні напруги різних споживачів, з'єднаних зіркою, для одних і тих же лінійних напруг мають однакові симетричні складові прямої та зворотної послідовностей і можуть відрізнятись одна від одної тільки за рахунок симетричних складових нульової послідовності.

Приклад 1.3.7. Виконати розрахунок струмів у гілках трифазного кола за умови обриву фази B у колі на рис. 1.3.15 методом симетричних складових. Схема і параметри кола такі ж, як і у прикладі 1.3.5.

Розв'язання.

Трифазна система ЕРС генератора симетрична і має пряму послідовність, тому

$$\dot{E}_A = 220e^{j30^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{E}_B = 220e^{-j90^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{E}_C = 220e^{j150^\circ} \text{ В};$$

Оскільки трифазна система не містить нейтрального проводу (рис. 1.3.15), то струм нульової послідовності дорівнює нулю: $\dot{I}_0 = 0$.

Вводимо умовні позначення електричних величин заданого кола та подаємо їх через відповідні симетричні складові:

- система фазних напруг несиметричного трифазного навантаження з опорами R - L :

$$\begin{cases} \dot{U}_{A'} = \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \\ \dot{U}_{B'} = \dot{U}_{B1} + \dot{U}_{B2} = a^2\dot{U}_1 + a\dot{U}_2 \\ \dot{U}_{C'} = \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{C2} = a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 \end{cases}$$

- система струмів через лінію:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} \\ \dot{I}_B = a^2\dot{I}_{A1} + a\dot{I}_{A2} \\ \dot{I}_C = a\dot{I}_{A1} + a^2\dot{I}_{A2} \end{cases}$$

- система фазних струмів несиметричного навантаження з опорами $R-L$:

$$\begin{cases} \dot{I}'_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \\ \dot{I}'_{B'} = a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 \\ \dot{I}'_C = a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

- система фазних струмів симетричного навантаження з опорами $R-C$:

$$\begin{cases} \dot{I}''_A = \dot{I}''_1 + \dot{I}''_2 \\ \dot{I}''_B = a^2 \dot{I}''_1 + a \dot{I}''_2 \\ \dot{I}''_C = a \dot{I}''_1 + a^2 \dot{I}''_2 \end{cases}$$

При цьому, враховуючи наявність обриву у фазі B несиметричного навантаження, то

$$\begin{aligned} \dot{I}''_B &= 0, \\ \dot{I}''_C &= -\dot{I}''_A = \dot{I}_{C'A'}. \end{aligned}$$

Еквівалентні схеми відносно фази A для симетричних складових прямої та зворотної послідовностей подані на рис. 1.3.39, а, б.

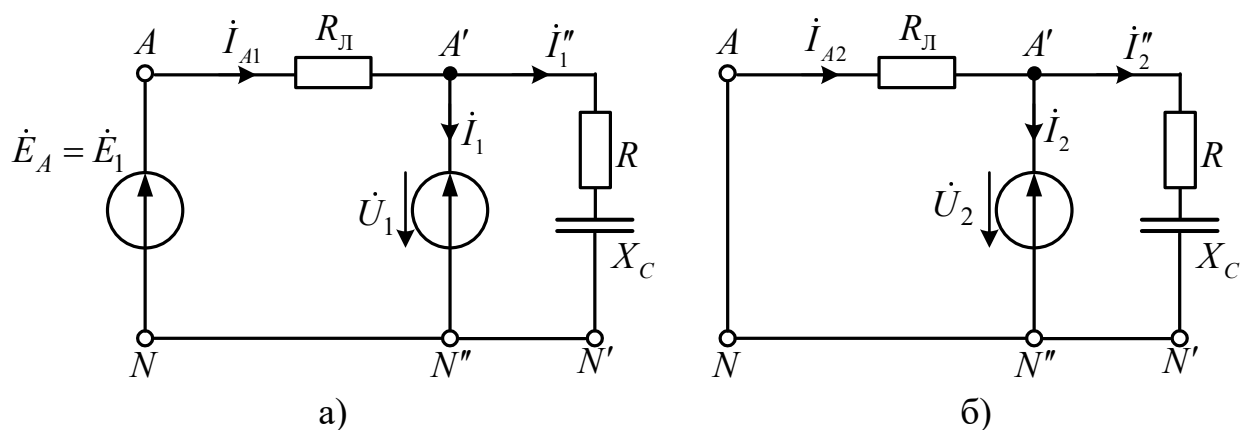


Рисунок 1.3.39 – Еквівалентні схеми трифазного кола (рис. 1.3.15) відносно фази A для симетричних складових прямої (а) та зворотної (б) послідовностей

Застосовуємо еквівалентні перетворення для спрощення утворених однофазних кіл відносно прямої та зворотної послідовностей:

$$\dot{E}_{e1} = \frac{\dot{E}_1 \frac{1}{R_{\text{Л}}}}{\frac{1}{R_{\text{Л}}} + \frac{1}{R - jX_C}} = \frac{220 \frac{1}{18} e^{j30^\circ}}{\frac{1}{18} + \frac{1}{72 - j62}} = \frac{12.22 e^{j30^\circ}}{0.06 e^{j6,19^\circ}} = 191.56 e^{j23,81^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_{e2} = \frac{R_{\text{Л}} \cdot (R - jX_C)}{R_{\text{Л}} + R - jX_C} = \frac{18(72 - j63)}{18 + 72 - j63} = 15.68 e^{-j6,19^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{C'A'} = 2R + j2X_L = 2 \cdot 72 + j2 \cdot 30 = 156 e^{j22,62^\circ} \text{ Ом}.$$

Спрощені еквівалентні схеми для прямої та зворотної послідовностей показані відповідно на рис. 1.3.40, а, б.

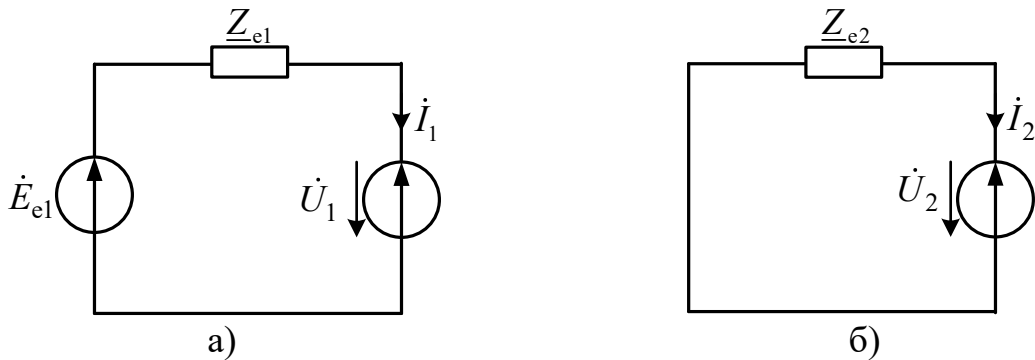


Рисунок 1.3.40 – Еквівалентні схеми для прямої та зворотної послідовностей

Основна система рівнянь для отриманих схем (рис. 1.3.40):

$$\begin{cases} \underline{Z}_{e1} \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = \dot{E}_{e1}; \\ \underline{Z}_{e2} \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0. \end{cases}$$

Додаткова система рівнянь згідно виду несиметрії навантаження (рис. 1.3.15):

$$\begin{cases} \dot{I}'_B = 0 \\ \dot{U}_{C'A'} = \dot{U}_{C'} - \dot{U}_{A'} = \underline{Z}_{C'A'} \dot{I}'_C \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dot{I}_1 a^2 + \dot{I}_2 a = 0; \\ \dot{U}_1 a + \dot{U}_2 a^2 - (\dot{U}_1 + \dot{U}_2) = \underline{Z}_{C'A'} (\dot{I}_1 a + \dot{I}_2 a^2) \end{cases}$$

В одержану систему рівнянь з чотирма невідомими підставляємо дані та розв'язуємо відносно невідомих величин:

$$\begin{cases}
\underline{Z}_{e1}\dot{I}_1 + \dot{U}_1 = \dot{E}_{e1} \\
\underline{Z}_{e2}\dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0 \\
\dot{I}_1 a^2 + \dot{I}_2 a = 0 \\
\dot{U}_1 a + \dot{U}_2 a^2 - (\dot{U}_1 + \dot{U}_2) = \underline{Z}_{C'A'}(\dot{I}_1 a + \dot{I}_2 a^2)
\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}
15.68e^{-j6.19^\circ} \cdot \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = 191.56e^{j23.81^\circ} \\
15.68e^{-j6.19^\circ} \cdot \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0 \\
\dot{I}_1 a^2 + \dot{I}_2 a = 0 \\
\dot{U}_1 a + \dot{U}_2 a^2 - \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 156e^{j22.62^\circ} (\dot{I}_1 a + \dot{I}_2 a^2)
\end{cases} \Rightarrow$$

Розв'язок системи рівнянь дозволяє отримати симетричні складові струмів та напруг несиметричного навантаження відносно фази A :

$$\dot{I}_1 = 1.04e^{j5.89^\circ} \text{ А; } \dot{U}_1 = 176.80e^{j25.97^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{I}_2 = 1.04e^{-j54.11^\circ} \text{ А; } \dot{U}_2 = 16.31e^{j119.70^\circ} \text{ В.}$$

Симетричні складові струмів через активно-ємнісне навантаження згідно схем заміщення (рис. 1.3.39):

$$\dot{I}_1'' = \frac{\dot{U}_1}{R - jX_C} = \frac{176.80e^{j25.97^\circ}}{72 - j63} = 1.85e^{j67.16^\circ};$$

$$\dot{I}_2'' = \frac{\dot{U}_2}{R - jX_C} = \frac{16.31e^{j119.70^\circ}}{72 - j63} = 0.17e^{j160.88^\circ}.$$

Симетричні складові струмів через лінію:

$$\dot{I}_{A1} = \dot{I}_1 + \dot{I}_1'' = 1.04e^{j5.89^\circ} + 1.85e^{j67.16^\circ} = 2.52e^{j45.95^\circ}.$$

$$\dot{I}_{A2} = \dot{I}_2 + \dot{I}_2'' = 1.04e^{-j54.11^\circ} + 0.17e^{j160.88^\circ} = 0.91e^{-j60.3^\circ}.$$

Шляхом накладання відповідних симетричних складових розраховуємо реальні струми

- у лініях:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} = 2.52e^{j45.95^\circ} + 0.91e^{-j60.3^\circ} = 2.43e^{j24.95^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_{A1} + a \dot{I}_{A2} = \dot{I}_B'' = 2e^{-j55^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_C = a \dot{I}_{A1} + a^2 \dot{I}_{A2} = 3.41e^{j169.59^\circ} \text{ А.}$$

- у фазах симетричного навантаження з опорами R - C :

$$\dot{I}_A'' = \dot{I}_1'' + \dot{I}_2'' = 1.85e^{j67.16^\circ} + 0.17e^{j160.88^\circ} = 1.83e^{j72.42^\circ}.$$

$$\dot{I}_B'' = \dot{I}_1'' a^2 + \dot{I}_2'' a = 2e^{-j55^\circ}.$$

$$\dot{I}_C'' = \dot{I}_1'' a + \dot{I}_2'' a^2 = 1.71e^{-j176.0^\circ}.$$

- у фазах несиметричного навантаження з опорами R - L :

$$\dot{I}_A' = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_A - \dot{I}_A'' = 43e^{j24.95^\circ} - 1.83e^{j72.42^\circ} = 1.801e^{-j24.11^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_B' = \dot{I}_1 a^2 + \dot{I}_2 a = 0.$$

$$\dot{I}_C' = a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 = \dot{I}_C - \dot{I}_C'' = 3.41e^{j169.59^\circ} - 1.71e^{-j176.0^\circ} = 1.8e^{j155.95^\circ} \text{ А.}$$

Результати розрахунків повністю збігаються з раніше отриманими у прикладі 1.3.5.

Приклад 1.3.8. На входних затискачах електродвигуна діє несиметрична система лінійних напруг $U_{A_1 B_1} = 311.12 \text{ В}$; $U_{B_1 C_1} = U_{C_1 A_1} = 220 \text{ В}$. Опори обмоток електродвигуна для прямої і зворотної послідовностей відповідно дорівнюють: $\underline{Z}_{\text{д1}} = jX_{\text{д1}} = j5 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{\text{д2}} = jX_{\text{д2}} = j3 \text{ Ом}$; опори лінії: $\underline{Z}_{\text{л1}} = \underline{Z}_{\text{л2}} = R_{\text{л}} = 1 \text{ Ом}$. Обмотки електродвигуна з'єднані зіркою (рис. 1.3.41, а).

Визначити напруги $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ на вході лінії та скласти баланс потужностей кола. Побудувати векторну діаграму напруг і струмів.

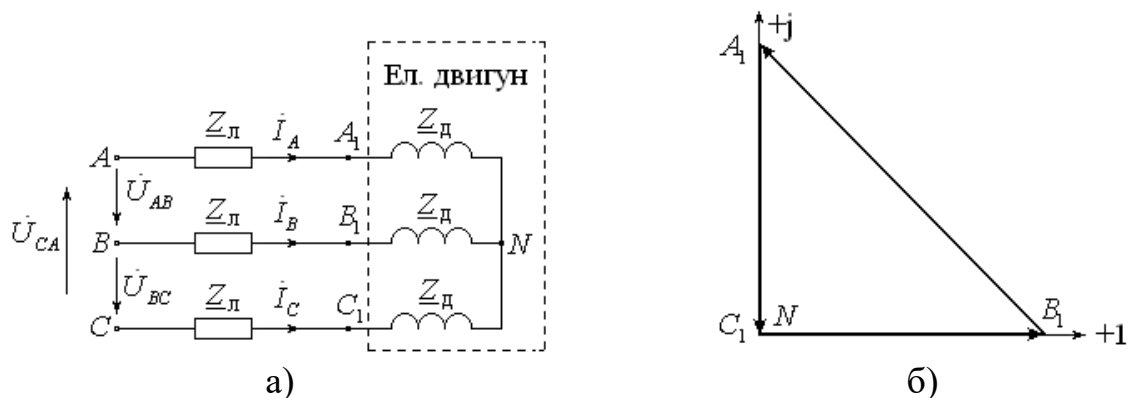


Рисунок 1.3.41 – Схема заміщення живлення трифазного електродвигуна (а) від несиметричної системи напруг (б)

Розв'язання.

Приймаючи до уваги, що в досліджуваній схемі нейтральний провід відсутній і струми нульової послідовності проходити не можуть, достатньо обмежитись аналізом тільки прямої і зворотної послідовностей фазних напруг. Для спрощення розрахунків складових прямої і зворотної послідовностей фазних напруг електродвигуна приймемо потенціал точки N рівним потенціалу точки C_1 тоді для системи фазних напруг двигуна отримаємо (рис. 1.3.41):

$$\dot{U}_{A_1N} = j220 \text{ В}, \quad \dot{U}_{B_1N} = 220 \text{ В}, \quad \dot{U}_{C_1N} = 0 \text{ В}.$$

Це не вплине на значення фазних напруг симетричних складових прямої і зворотної послідовностей електродвигуна, тому що, як вказувалось раніше, ці складові залежать тільки від системи лінійних напруг.

Визначаємо складові прямої і зворотної послідовностей фазної напруги фази A електродвигуна.

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{3}(\dot{U}_{A_1N} + a\dot{U}_{B_1N} + a^2\dot{U}_{C_1N}) = \frac{1}{3}(j220 + 220e^{j120^\circ}) = 141.67e^{j105^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{3}(\dot{U}_{A_1N} + a^2\dot{U}_{B_1N} + a\dot{U}_{C_1N}) = \frac{1}{3}(j220 + 220e^{j240^\circ}) = 37.96e^{j165^\circ} \text{ В}.$$

Знаходимо струми прямої і зворотної послідовностей опорної фази (фази A):

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{д1}} = \frac{141.67e^{j105^\circ}}{5e^{j90^\circ}} = 28.334e^{j15^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_{д2}} = \frac{37.96e^{j165^\circ}}{3e^{j90^\circ}} = 12.653e^{j75^\circ} \text{ А}.$$

Визначаємо струми в лінійних проводах:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 28.334e^{j15^\circ} + 12.653e^{j75^\circ} = 36.351e^{j32.55^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 = 28.334e^{j255^\circ} + 12.653e^{j195^\circ} = 36.351e^{-j122.55^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_C = a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 = 28.334e^{j135^\circ} + 12.653e^{-j45^\circ} = 15.681e^{j135^\circ} \text{ A}.$$

Напруга на вході лінії:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \dot{I}_A \underline{Z}_\text{Л} + \dot{U}_{A_1 B_1} - \dot{I}_B \underline{Z}_\text{Л} = 36.351e^{j32.55^\circ} + 311.12e^{j135^\circ} - 36.351e^{-j122.55^\circ} = \\ &= 319.12e^{j122.15^\circ} \text{ В}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{BC} &= \dot{I}_B \underline{Z}_\text{Л} + \dot{U}_{B_1 C_1} - \dot{I}_C \underline{Z}_\text{Л} = 36.351e^{-j122.55^\circ} + 220 - 15.681e^{j135^\circ} = \\ &= 215.6e^{-j11.16^\circ} \text{ В}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{CA} &= \dot{I}_C \underline{Z}_\text{Л} + \dot{U}_{C_1 A_1} - \dot{I}_A \underline{Z}_\text{Л} = 15.681e^{j135^\circ} + 220 \angle -90^\circ - 36.351e^{j32.55^\circ} = \\ &= 232.26e^{-j100.35^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Комплексна, активна та реактивна потужності на вході трифазного кола:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{3\Phi} &= P_{3\Phi} + jQ_{3\Phi} = \dot{U}_{AC}^* \dot{I}_A + \dot{U}_{BC}^* \dot{I}_B = 232.26e^{j79.65^\circ} \cdot 36.351e^{-j32.55^\circ} + \\ &+ 215.6e^{-j11.16^\circ} \cdot 36.351e^{j122.55^\circ} = (2889 + j13482) \text{ ВА}. \end{aligned}$$

$$P_{3\Phi} = 2889 \text{ Вт}, \quad Q_{3\Phi} = 13482 \text{ ВАр}.$$

Активна потужність елементів кола (активних опорів лінії):

$$P_{3\Phi\text{Л}} = I_A^2 R_\text{Л} + I_B^2 R_\text{Л} + I_C^2 R_\text{Л} = 36.351^2 \cdot 1 + 36.351^2 \cdot 1 + 15.681^2 \cdot 1 = 2888.7 \text{ Вт}.$$

Ця ж активна потужність, визначена за симетричними складовими фазних струмів:

$$P_{3\Phi\text{Л}} = 3R_\text{Л} I_1^2 + 3R_\text{Л} I_2^2 = 2889.8 \text{ Вт}.$$

Комплексна потужність електродвигуна:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{3\Phi\text{Д}} &= P_{3\Phi\text{Д}} + jQ_{3\Phi\text{Д}} = \dot{U}_{A_1 C_1}^* \dot{I}_A + \dot{U}_{B_1 C_1}^* \dot{I}_B = \\ &= j220 \cdot 36.351e^{-j32.55^\circ} + 220 \cdot 36.351e^{j122.55^\circ} = j13482.1 \text{ ВА}. \end{aligned}$$

Отже, як і слід було чекати, активна потужність двигуна дорівнює нулю, а реактивна потужність двигуна: $Q_{3\Phi\text{Д}} = 13482.1 \text{ ВАр}$.

Реактивна потужність двигуна, визначена за симетричними складовими фазних струмів:

$$Q_{3\Phi д} = 3I_1^2 X_{д1} + 3I_2^2 X_{д2} = 3 \cdot 28.334^2 \cdot 5 + 3 \cdot 12.653^2 \cdot 3 = 13483.1 \text{ ВАр.}$$

Значення реактивної потужності електродвигуна, знайдені двома способами, майже однакові і практично дорівнюють значенню реактивної потужності на вході трифазного кола. Таку ж відповідність бачимо між активною потужністю на вході кола і сумою активних потужностей елементів кола.

Таким чином робимо висновок, що баланс потужностей виконується як для активних, так і для реактивних потужностей.

Для побудови векторної діаграми визначаємо спади напруг:

$$\dot{U}_{AA_1} = \dot{I}_A Z_{л} = 36.351 e^{j32.55^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{BB_1} = \dot{I}_B Z_{л} = 36.351 e^{-j122.55^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{CC_1} = \dot{I}_C Z_{л} = 15.681 e^{j135^\circ} \text{ В.}$$

Векторна діаграма напруг і струмів приведена на рис. 1.3.42.

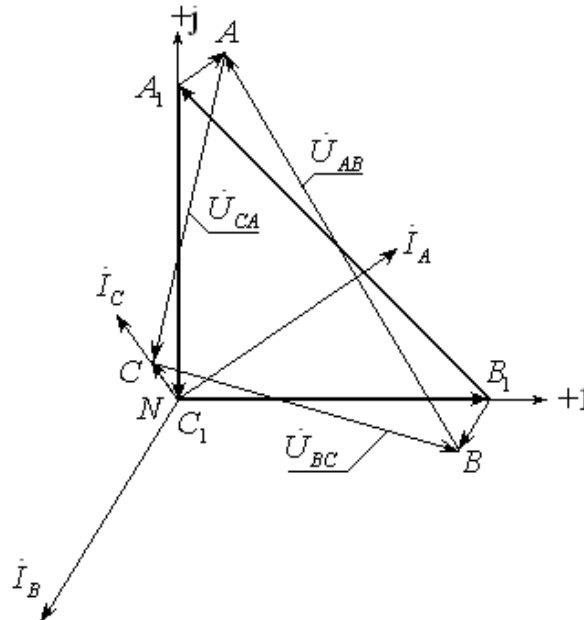


Рисунок 1.3.42 – Векторна діаграма розподілу напруг та струмів

Тема 1.4. Потужність трифазного кола та її вимірювання

Поняття потужності є одним із фундаментальних у теорії електричних кіл, оскільки забезпечує кількісну оцінку енергетичних процесів, що відбуваються в електротехнічних системах. У трифазних колах, на відміну від однофазних,

потужність розподіляється між трьома фазами, що зумовлює необхідність специфічних підходів до її визначення, розрахунку та вимірювання.

У практиці аналізу трифазних кіл розрізняють миттєву, активну, реактивну та повну потужності. Залежно від симетрії системи, наявності нейтрального провідника та характеру навантаження, методики визначення потужності можуть відрізнятися.

Оцінювання потужності в трифазних колах здійснюється двома основними способами:

- аналітичним – із використанням комплексних або діючих значень струмів і напруг. Такий підхід застосовується для теоретичного аналізу режимів роботи електричних кіл, дозволяє здійснювати попередні розрахунки та виявляти втрати, перекося або неузгодженість навантаження;
- експериментальним – шляхом безпосередніх вимірювань за допомогою відповідних приладів, цифрових вимірювачів потужності або електронних аналізаторів якості електроенергії.

Залежно від мети аналізу, баланс потужностей може розглядатись у різних формах:

- за фазами – для аналізу несиметричних навантажень;
- за симетричними складовими – для загальної оцінки енергетичного стану системи в координатах узагальнених векторів;
- експериментально – через методи вимірювання активної, реактивної та повної потужності, зокрема за допомогою класичних (два/три ватметри) або цифрових приладів.

1.4.1. Аналітичне визначення потужності в трифазних колах

Для оцінювання енергетичних процесів у трифазних електричних колах на практиці широко застосовується метод комплексних амплітуд, що дозволяє в компактній формі описувати співвідношення між струмами та напругами з урахуванням як амплітудних, так і фазових параметрів. Цей підхід зручний для аналізу як симетричних, так і несиметричних режимів роботи.

Векторна підхід до аналізу потужностей в трифазному колі.

Симетричні (збалансовані) трифазні кола характеризуються симетричними системами фазних і лінійних струмів і напруг. Оперативну оцінку потужностей в симетричних колах прийнято проводити через діючі значення електричних величин:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} = 3 U_{\Phi} I_{\Phi}$$

$$P = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi = 3 U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi,$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi = 3 U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \varphi,$$

де $U_{\text{Л}}$ та $I_{\text{Л}}$ – середньоквадратичні значення лінійних напруги та струму мережі;
 U_{Φ} та I_{Φ} – середньоквадратичні значення фазних напруги та струму мережі.

Повна потужність для незбалансованих трифазних систем синусоїдного струму розраховується шляхом її розрахунку окремо для кожної фази. Прийнято розрізняти арифметичну та векторну повні потужності [4].

Векторна повна потужність є векторною сумою активної та реактивної потужностей кожної фази:

$$S_V = \sqrt{\left(\sum_m P_m\right)^2 + \left(\sum_m Q_m\right)^2} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

де $P_m = U_m I_m \cos(\varphi_m)$ та $Q_m = U_m I_m \sin(\varphi_m)$ – активна та реактивна потужності кожної з фаз ($m = A, B, C$) відповідно;

$P = P_A + P_B + P_C$, $Q = Q_A + Q_B + Q_C$ – розрахункові вирази для визначення результуючих векторів активної та реактивної потужностей.

Арифметична повна потужність, поняття якої введено [4, 5], розраховується як арифметична сума повних потужностей кожної з фаз:

$$S_{\text{Arith}} = \sum_{m=A,B,C} S_m, \text{ де } S_m = U_{\Phi_m} \cdot I_{\Phi_m}.$$

Варто зауважити, що для випадку оцінки повної через арифметичний підхід має місце нерівність

$$S_{\text{Arith}} \neq \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Геометрична візуалізація векторної та арифметичної повних потужностей наведена на рис. 1.4.1.

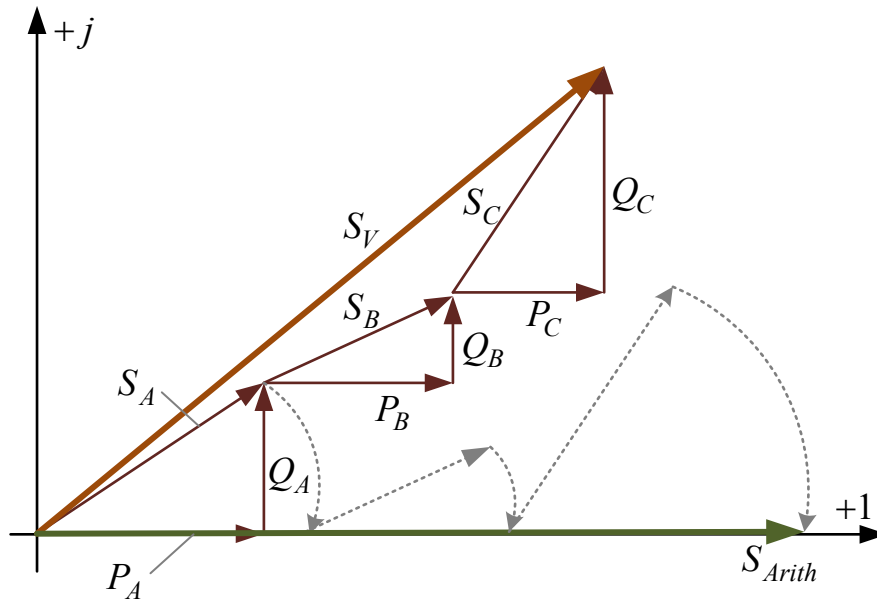


Рисунок 1.4.1 – Геометрична візуалізація арифметичної та векторної повних потужностей в трифазних збалансованих системах

Для випадків збалансованих умов роботи трифазних кіл синусоїдного струму, величина повної потужності дозволяє раціонально та точно оцінити коефіцієнт потужності λ [2, 6] або PF (англ. **Power Factor**, **PF**) [4, 5]. Ця величина була запропонована у 1922 році автором [7], а в 1933 році вона була пояснена в [8] та згідно [4, 5] визначається як відношення активної потужності до повної $\left(PF = \frac{P}{S}\right)$.

У випадку аналізу однофазних кіл або симетричних трифазних кіл коефіцієнт потужності можна оцінити як косинус кута зсуву фаз між напругою та струмом.

$$PF = \cos(\varphi), \quad \varphi = \psi_u - \psi_i.$$

Баланс потужностей трифазного кола у комплексній формі.

У загальному випадку (як для симетричних, так і несиметричних режимів) баланс потужностей у трифазному колі у комплексній формі має вигляд:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \dot{U}_A \cdot \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \cdot \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \cdot \dot{I}_C^* = P + jQ, \\ P &= U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C, \\ Q &= U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C. \end{aligned}$$

У разі несиметрії фазні струми і напруги не утворюють симетричної системи. У такому разі для аналітичного подання зручно скористатися методом симетричних складових, який полягає в поданні векторів напруг і струмів як суми трьох систем:

$$\begin{aligned}\dot{E}_A &= \dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_0; & \dot{I}_A &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \\ \dot{E}_B &= \dot{E}_1 a^2 + \dot{E}_2 a + \dot{E}_0; & \dot{I}_B &= \dot{I}_1 a^2 + \dot{I}_2 a + \dot{I}_0; \\ \dot{E}_C &= \dot{E}_1 a + \dot{E}_2 a^2 + \dot{E}_0, & \dot{I}_C &= \dot{I}_1 a + \dot{I}_2 a^2 + \dot{I}_0,\end{aligned}$$

де індекси (0), (1), (2) – позначають нульову, пряму та зворотну послідовності відповідно;

$\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{E}_0, \dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0$ – симетричні складові відповідно прямої, зворотної та нульової послідовностей фазних ЕРС і струмів;

Повна потужність визначається як сума потужностей, що відповідають кожній складовій:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \dot{E}_A^* \dot{I}_A + \dot{E}_B^* \dot{I}_B + \dot{E}_C^* \dot{I}_C = (\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_0)^* (\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0) + \\ &+ (a^2 \dot{E}_1 + a \dot{E}_2 + \dot{E}_0)^* (a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0) + (a \dot{E}_1 + a^2 \dot{E}_2 + \dot{E}_0)^* (a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0) = \\ &= \dot{E}_A^* \dot{I}_A + \dot{E}_B^* \dot{I}_B + \dot{E}_C^* \dot{I}_C = 3 \dot{E}_1^* \dot{I}_1 + 3 \dot{E}_2^* \dot{I}_2 + 3 \dot{E}_0^* \dot{I}_0\end{aligned}$$

Активна і реактивна потужності трифазного кола дорівнюють суммам активних і реактивних потужностей прямої, зворотної і нульової послідовностей:

$$\begin{aligned}P &= 3E_1 I_1 \cos \varphi_1 + 3E_2 I_2 \cos \varphi_2 + 3E_0 I_0 \cos \varphi_0, \\ Q &= 3E_1 I_1 \sin \varphi_1 + 3E_2 I_2 \sin \varphi_2 + 3E_0 I_0 \sin \varphi_0.\end{aligned}$$

де $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_0$ – кути зсуву фаз між фазними ЕРС і струмами відповідних послідовностей.

1.4.2. Вимірювання потужності в трифазних колах

1.4.2.1. Загальні принципи вимірювання потужності в трифазних колах

Призначення та роль вимірювання потужності.

Вимірювання потужності в трифазних електричних колах є базовою процедурою діагностування режимів роботи системи електропостачання. Його результати використовуються для:

- Кількісної оцінки активного енергоспоживання на рівні навантажень, підстанцій або секцій розподілу;
- Визначення обсягів реактивної потужності, що дає змогу аналізувати ефективність компенсаційних пристроїв та зменшувати втрати електроенергії;
- Виявлення несиметричних режимів роботи, у тому числі перекосів фазних навантажень, що дозволяє проводити превентивні заходи для зниження термічних та динамічних перевантажень елементів мережі.

Види потужності, що підлягають вимірюванню.

У вимірювальній практиці розрізняють наступні види потужностей, що мають технічне значення:

- Активна потужність (P) – вимірюється як середнє значення миттєвої потужності за період, одиниця вимірювання – ват (Вт);
- Реактивна потужність (Q) – оцінюється з урахуванням зсуву фаз між напругою і струмом, одиниця вимірювання – вольт-ампер реактивний (ВАр);
- Повна потужність (S) – модуль комплексної потужності, одиниця вимірювання – вольт-ампер (ВА);
- Миттєва потужність ($p(t)$) – результат добутку миттєвих значень напруги та струму;
- Середня потужність – середнє значення миттєвої потужності на часовому інтервалі, який залежить від мети вимірювання (наприклад, за стандартом IEC 61000-4-30 – 10 періодів струму мережі).

Класифікація приладів для вимірювання потужності.

Прилади, що застосовуються для вимірювання потужності в трифазних колах, класифікуються за принципом дії та способом обробки сигналів:

- електромеханічні ватметри – засновані на дії моменту, що виникає між струмовою і напругою обмотками. Забезпечують наочне представлення фізичної природи активної або реактивної потужності. Їх застосування обмежене точністю та інерційністю;
- цифрові ватметри – здійснюють вимірювання шляхом дискретизації сигналів та обчислення добутку миттєвих значень напруги й струму (векторного добутку) з подальшим усередненням;
- аналізатори потужності / якості електроенергії – багатофункціональні пристрої, які дозволяють вимірювати всі складові потужності,

гармонічний спектр сигналів, а також фіксувати ряд показників якості електроенергії.

Вимоги до підключення вимірювальних пристроїв.

Коректність результатів вимірювання залежить від підключення приладу до об'єкта вимірювання. Основними умовами підключення вимірювального обладнання для достовірного отримання результатів вимірювання є:

- дотримання полярності підключення обмоток струму та напруги, згідно з технічним паспортом приладу та орієнтації напрямів струму та напруги;
- урахування внутрішнього опору ватметра, особливо для аналогових приладів, який може впливати на точність вимірювань і повинен бути врахований у розрахунках.

Реалізація вимірювання потужності ватметром.

Для вимірювання активної потужності в трифазних колах синусоїдного струму застосовуються електродинамічні ватметри, принцип дії яких базується на взаємодії магнітного поля обмотки струму з полем обмотки напруги. Покази ватметра визначаються як середнє значення миттєвої потужності, тобто:

$$P_w = U \cdot I \cdot \cos \left(\vec{U}, \vec{I} \right),$$

де:

U – середньоквадратичне (діюче) значення напруги, прикладеної до обмотки напруги ватметра,

I – середньоквадратичне (діюче) значення струму, що протікає через струмову обмотку,

φ – фазовий кут між векторами напруги та струму.

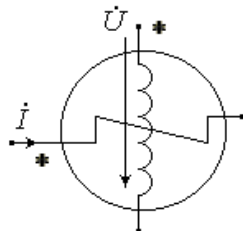


Рисунок 1.4.2 – Схема замощення ватметра

У разі правильної полярності підключення обмоток (відповідно до маркування на корпусі приладу – умовних позначень «*» та «A» або «V»),

напрямки струму і напруги мають бути узгоджені, тобто орієнтовані в один бік (рис. 1.4.2).

1.4.2.2. Вимірювання активної потужності в несиметричних трифазних колах

Чотирипровідне трифазне коло.

У загальному випадку несиметричного режиму роботи трифазної системи з безвтратним нейтральним проводом ($Z_N = 0$) активна потужність споживача визначається як сума активних потужностей, споживаних в кожній фазі:

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C$$

де

U_A, U_B, U_C – середньоквадратичні значення фазних напуг;

I_A, I_B, I_C – середньоквадратичні значення фазних стумів;

$\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ – кути зсуву фаз між відповідними напругами та струмами.

У таких колах (рис. 1.4.3) застосовуються три ватметри, підключені у фазах A, B, C , при цьому обмотки стуму кожного з ватметрів ввімкнені послідовно з навантаженням відповідних фаз, а обмотки напруги – між фазою і нейтраллю. Сума показів трьох ватметрів дорівнює загальній активній потужності навантаження:

$$P = P_{W_1} + P_{W_2} + P_{W_3}.$$

Схема підключення для визначення активної потужності трифазного чотирипровідного кола продемонстрована на рис. 1.4.3, а.

Альтернативно, якщо завдання полягає у вимірюванні активної потужності кожної гілки споживача окремо, відповідно використовується чотири ватметри (рис. 1.4.3, б), включаючи четвертий ватметр для оцінки активної потужності, що протікає через нейтральний провід.

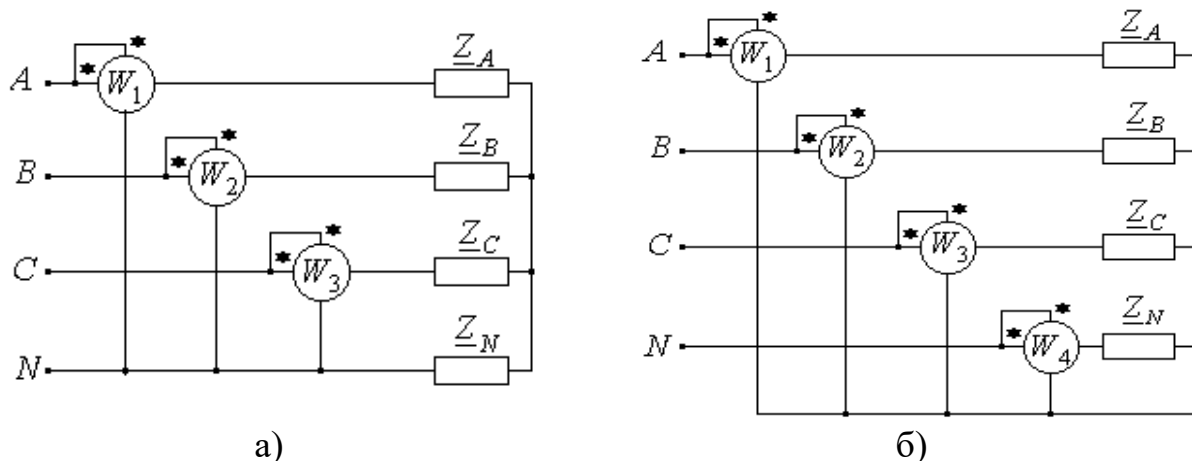


Рисунок 1.4.3 – Вимірювання активної потужності трифазного споживача за допомогою трьох (а) та чотирьох (б) ватметрів у чотирипровідному колі

У цьому разі загальна активна потужність визначається як:

$$P = P_{W_1} + P_{W_2} + P_{W_3} + P_{W_4}.$$

Схема підключення чотирьох ватметрів для детального фазного аналізу активної потужності трифазного чотирипровідного кола показана на рис. 1.4.3, б.

Трипровідне коло.

Метод двох ватметрів застосовується для вимірювання активної потужності в трифазних системах за відсутності нейтрального провідника. Він ґрунтується на використанні двох однофазних ватметрів, обмотки струму яких вмикаються послідовно в окремі лінійні провідники, а обмотки напруги прикладаються між двома фазами, лінійний провід в який одночасно підключені виводи від обмоток напруги обох ватметрів виступає умовною опорною точкою.

Теоретичне обґрунтування методу двох ватметрів. Комплексна потужність трифазної системи визначається як:

$$\underline{S} = \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* I_B + \dot{U}_C^* I_C$$

У трифазних системах за відсутності нейтрального проводу виконується умова: $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$. З огляду на це, вираз комплексної потужності може бути поданий як

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \dot{U}_A I_A^* + \dot{U}_B I_B^* + \dot{U}_C I_C^* = \dot{U}_A I_A^* + \dot{U}_B I_B^* + \dot{U}_C \overbrace{(-I_A^* - I_B^*)}^{I_C^*} = \\ &= (\dot{U}_A - \dot{U}_C) I_A^* + (\dot{U}_B - \dot{U}_C) I_B^* = \dot{U}_{AC} I_A^* + \dot{U}_{BC} I_B^*.\end{aligned}$$

Реальні складові добутків у виразі для повної потужності визначають активну потужність:

$$P = \operatorname{Re} \left(\dot{U}_{AC} I_A^* \right) + \operatorname{Re} \left(\dot{U}_{BC} I_B^* \right) = U_{AC} I_A \cos(\hat{\dot{U}_{AC}}, \hat{\dot{I}_A}) + U_{BC} I_B \cos(\hat{\dot{U}_{BC}}, \hat{\dot{I}_B}).$$

Кожен доданок цього виразу відповідає показу одного з ватметрів у схемі вимірювання. Таким чином, схема підключення ватметрів для реалізації методу показана на рисунку 1.4.4.

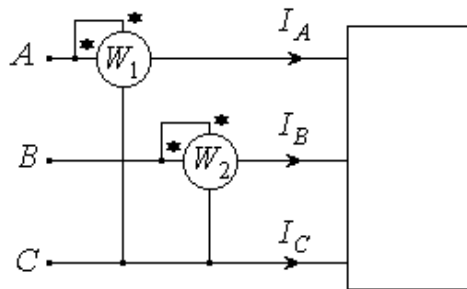


Рисунок 1.4.4 – Одна з можливих схем реалізації методу двох ватметрів для вимірювання активної потужності в трифазних трипровідних системах

На підставі наведеного теоретичного аналізу можна зробити висновок, що для вимірювання активної потужності в трифазних трипровідних колах достатньо використовувати два ватметри. Активна потужність визначається як алгебраїчна сума показів обох ватметрів:

$$P = P_{W_1} + P_{W_2}.$$

Переваги методу:

- не потребує доступу до нейтральної точки;
- придатний для всіх типів з'єднань фаз (зірка–зірка, трикутник–трикутник, зірка–трикутник тощо);
- реалізований у промислових ватметрах, сертифікованих відповідно до стандартів IEC 61557-12, IEC 61010, EN 50470.

Зауваження до практичної реалізації:

- у разі застосування електронних ватметрів вимірювання здійснюється з використанням алгоритмів цифрової обробки сигналів. Проте фізичні принципи залишаються ідентичними класичному методу двох ватметрів.
- у сучасних приладах для обліку електроенергії та контролю її якості цей метод реалізовано програмно, з можливістю корекції впливу вищих гармонік відповідно до вимог стандарту ІЕС 61000-4-7.

1.4.2.3. Особливості вимірювання активної потужності в симетричних трифазних колах

Метод одного ватметра.

У симетричних трифазних колах достатньо застосовувати метод одного ватметра. Суть методу полягає в тому, що до одного фазних провідників підключається обмотка струму ватметра, а обмотка напруги – між фазним проводом та нейтральною точкою або штучно створеною нейтральною точкою (якщо вона відсутня). За таких умов покази ватметра відповідають активній потужності в одній фазі, а активна потужність у симетричному трифазному колі визначається за виразом:

$$P = 3P_W,$$

де P_W – покази одного ватметра.

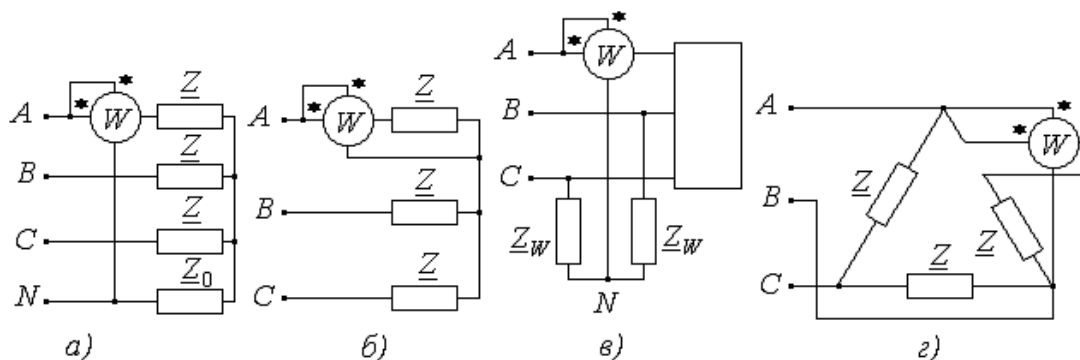


Рисунок 1.4.5 – Можливі типові схеми підключення ватметра до трифазного симетричного кола

На рис. 1.4.5 наведено типові схеми підключення ватметра до трифазного симетричного кола. Незалежно від типу з'єднання навантаження (зірка чи

трикутник), за умови симетрії кола та синусоїдного режиму, активна потужність у трифазній системі визначається потроєним значенням показів одного ватметра. У схемі, зображеній на рис. 1.4.5, в, нейтральна точка N створена штучно, з використанням резистивного дільника, опори якого дорівнюють опорі обмотки напруги ватметра. Це забезпечує симетричність потенціалів і коректність вимірювання.

Метод двох ватметрів.

У симетричних трифазних системах без нейтрального проводу метод двох ватметрів, розглянутий для несиметричних трифазних систем, дозволяє оцінити активну та реактивну потужності трифазного кола.

Більш детальний аналіз методу двох ватметрів проведеного на базі теоретичного обґрунтування для несиметричних трифазних кіл дозволяє деталізувати особливості його застосування для симетричних трифазних кіл.

Для симетричного трифазного трипровідного кола незалежно від типу підключення навантаження аналіз застосування методу двох ватметрів зручно проводити за векторною діаграмою розподілу напруг і струмів (рис. 1.4.6).

У цьому випадку:

- ватметр W_1 , підключений між лініями A і C , показує:

$$P_{W1} = U_{AC} I_A \cos \left(\dot{U}_{AC}^{\wedge}, \dot{I}_A \right) = U_L I_L \cos \left(\varphi - 30^\circ \right);$$

- ватметр W_2 , підключений між лініями B і C , показує:

$$P_{W2} = U_{BC} I_B \cos \left(\dot{U}_{BC}^{\wedge}, \dot{I}_B \right) = U_L I_L \cos \left(\varphi + 30^\circ \right).$$

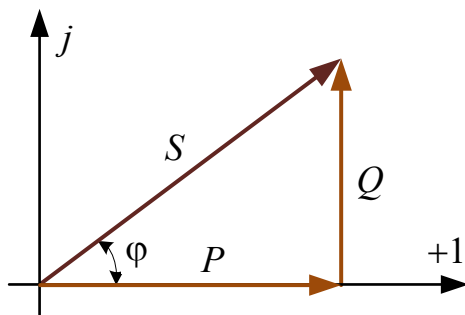
та розрахунок різниці показів ватметрів дозволяє оцінити реактивну потужність симетричного трифазного трипровідного кола:

$$P_{W_1} - P_{W_2} = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} (-2) \sin \varphi \cdot \underbrace{\sin(-30^\circ)}_{-0.5} = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}.$$

Таким чином, метод двох ватметрів дозволяє не лише визначити активну потужність, але й обчислити реактивну потужність за формулою:

$$Q = \sqrt{3} (P_{W_1} - P_{W_2}).$$

За показами двох ватметрів із трикутника потужностей (рис. 1.4.7) визначається кут зсуву фаз φ між фазною напругою і струмом, тобто аргумент еквівалентного комплексного опору кожної з фаз.



$$\frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi = \left[\frac{(P_{W_1} - P_{W_2}) \sqrt{3}}{P_{W_1} + P_{W_2}} \right];$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{(P_{W_1} - P_{W_2}) \sqrt{3}}{P_{W_1} + P_{W_2}} \right].$$

Рисунок 1.4.7 – Трикутник потужностей трифазного кола

На рис. 1.4.8 побудовані графіки залежності показів ватметрів P_{W_1}, P_{W_2} та активної потужності симетричного трифазного кола $P = P_{W_1} + P_{W_2}$, від кута φ .

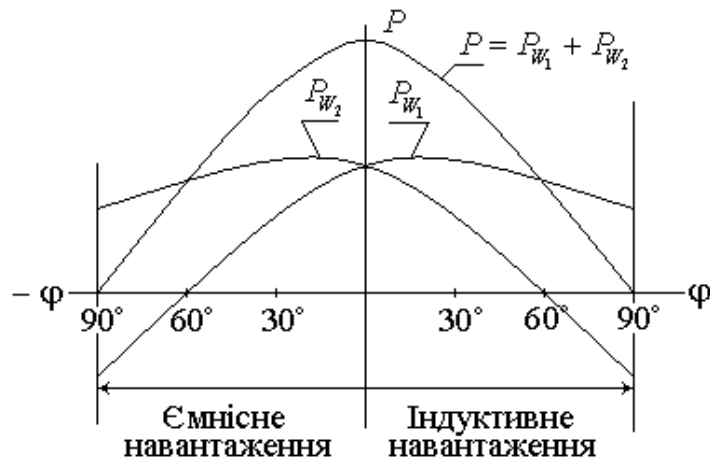


Рисунок 1.4.8 – Залежності показів ватметрів P_{W_1} , P_{W_2} та активної потужності симетричного трифазного кола від кута φ

З аналізу графіків випливає:

- при $\varphi = \pm 60^\circ$ – один із ватметрів показує нуль;
- при $\varphi > 60^\circ$ – один із ватметрів має від'ємне значення (необхідно враховувати знак при підсумовуванні);
- при $\varphi = 0^\circ$ – покази обох ватметрів рівні між собою.

Приклад 1.4.1. Для кола, фази навантаження якого з'єднано за схемою «трикутник» та поданого на рис. 1.4.9, задані:

лінійна напруга симетричного генератора – $U_{\text{л}} = 127 \text{ В}$;

опори фаз несиметричного навантаження –

$\underline{Z}_{AB} = 100 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{BC} = j100 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{CA} = -j100 \text{ Ом}$.

Визначити активну потужність трифазної системи за показами ватметрів у нормальному режимі та у разі обриву в точці B' .

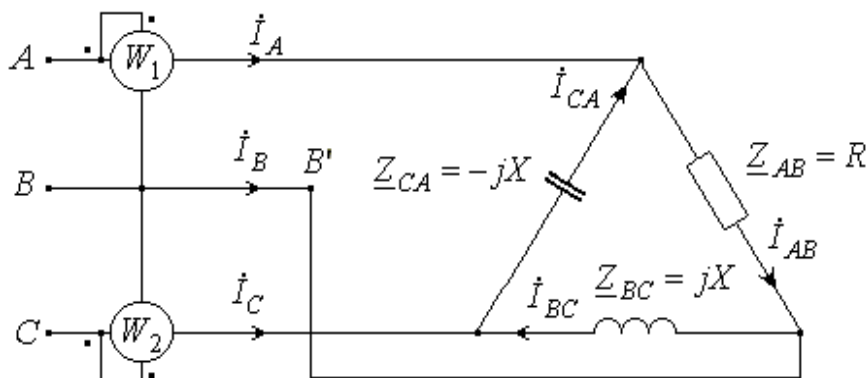


Рисунок 1.4.9 – Схема трифазного кола до прикладу 1.4.1

Розв'язання.

а) Аналіз кола за нормального режиму роботи.

Приймаючи початкову фазу лінійної напруги між фазами A і B за нуль, записуємо систему комплексних лінійних напруг:

$$\dot{U}_{AB} = 127 \text{ В}$$

$$\dot{U}_{BC} = 127e^{-j120^\circ} \text{ В}$$

$$\dot{U}_{CA} = 127e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

Оскільки за схемою заданого кола лінійні проводи не містять опорів, то лінійні напруги джерела прикладено безпосередньо до фаз споживача, а отже фазні струми розраховуються за законом Ома:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{127}{100} = 1.27 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{127e^{-j120^\circ}}{100e^{j90^\circ}} = 1.27e^{-j210^\circ} = 1.27e^{j150^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{127e^{j120^\circ}}{100e^{-j90^\circ}} = 1.27e^{j210^\circ} = 1.27e^{-j150^\circ} \text{ А.}$$

Лінійні струми:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 1.27e^{j0^\circ} - 1.27e^{-j150^\circ} = 1.27 - (-1.1 - j0.635) = 2.454e^{j15^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 1.27e^{j150^\circ} - 1.27e^{j0^\circ} = -1.1 + j0.635 - 1.27 = 2.454e^{j165^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 1.27e^{-j150^\circ} - 1.27e^{j150^\circ} = 1.27e^{-j90^\circ} \text{ А.}$$

Діаграми напруг і струмів показані на рис. 1.4.10.

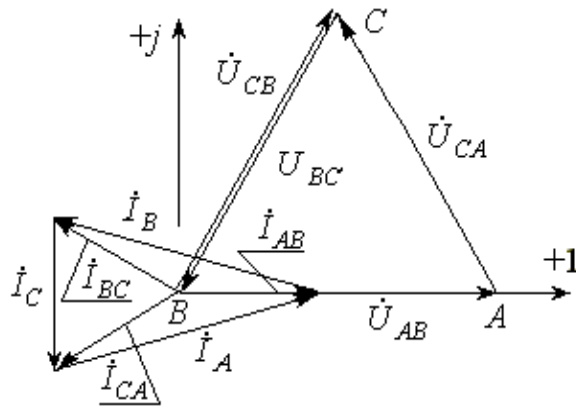


Рисунок 1.4.10 – Векторна діаграма розподілі напруг та струмів у колі на рис. 1.4.9 за нормального режиму роботи

Перевіряємо правильність розрахунку за балансом потужностей.

Потужність генератора:

$$\begin{aligned} S_{\Gamma} &= \dot{U}_{AB} \dot{I}_{AB}^* + \dot{U}_{BC} \dot{I}_{BC}^* + \dot{U}_{CA} \dot{I}_{CA}^* = 127 \cdot 1.27 + 127e^{-j120^\circ} \cdot 1.27e^{-j150^\circ} + \\ &+ 127e^{j120^\circ} \cdot 1.27e^{j150^\circ} = 161.29 + j0 = P + jQ. \end{aligned}$$

Активна та реактивна потужності споживача:

$$P_{\text{сп}} = I_{AB}^2 \cdot R = 1.27^2 \cdot 100 = 161.29 \text{ Вт},$$

$$Q_{\text{сп}} = I_{BC}^2 \cdot X + I_{CA}^2 \cdot (-X) = 1.27^2 \cdot 100 - 1.27^2 \cdot 100 = 0.$$

Покази ватметрів:

$$P_{W1} = \text{Re} \left(\dot{U}_{AB} \dot{I}_A^* \right) = \text{Re} \left(127e^{j0^\circ} \cdot 2.454e^{-j15^\circ} \right) = \text{Re} (301.04 - j80.66) = 301.05 \text{ Вт};$$

$$P_{W2} = \text{Re} \left(\dot{U}_{CB} \dot{I}_C^* \right) = \text{Re} \left(127e^{j60^\circ} \cdot 1.27e^{j90^\circ} \right) = \text{Re} (-139.68 - j80.65) = -139.68 \text{ Вт},$$

$$\text{де } \dot{U}_{CB} = -\dot{U}_{BC} = 127 \angle 60^\circ \text{ В.}$$

Активна потужність трифазного кола за показами двох ватметрів:

$$P_{\text{сп}} = P_{W1} + P_{W2} = 301.55 - 139.68 = 161.37 \text{ Вт}.$$

б) Обрив у точці B'.

У разі обриву в точці трикутник опорів перетворюється на послідовне з'єднання гілки з ємнісним навантаженням ($\underline{Z}_{CA}$) та гілки з послідовним

з'єднанням резистивного та індуктивного елементів ($\underline{Z}_{AB}$, $\underline{Z}_{BC}$). У такому випадку фазні струми розраховуються як:

$$\dot{I}_{AB} = \dot{I}_{BC} = \frac{-\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC}} = \frac{-127e^{j120^\circ}}{100 + j100} = \frac{127e^{-j60^\circ}}{141.42e^{j45^\circ}} = 0.898e^{-j105^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{127e^{j120^\circ}}{100e^{-j90^\circ}} = 1.27e^{j210^\circ} = 1.27e^{-j150^\circ} \text{ А}.$$

Лінійні струми:

$$\dot{I}_A = -\dot{I}_C = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 0.898e^{-j105^\circ} - 1.27e^{-j150^\circ} = 0.898e^{-j15^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_A = 0.898e^{j165^\circ} \text{ А}.$$

Перевіряємо правильність розрахунку за балансом потужностей.

$$\begin{aligned} \underline{S}_\Gamma &= \dot{U}_{CA} \left(-\dot{I}_{AB}^* \right) + \dot{U}_{CA} \dot{I}_{CA}^* = 127e^{j120^\circ} \cdot 0.898e^{-j75^\circ} + 127e^{j120^\circ} \cdot 1.27e^{j150^\circ} = \\ &= 114.05e^{-j45^\circ} = 80.65 - j80.65 = P + jQ. \end{aligned}$$

$$P_{\text{сп}} = I_{AB}^2 \cdot Z_{AB} = 0.898^2 \cdot 100 = 80.64 \text{ Вт},$$

$$Q_{\text{сп}} = -I_{CA}^2 Z_{CA} + I_{BC}^2 Z_{BC} = -1.27^2 \cdot 100 + 0.898^2 \cdot 100 = -80.65 \text{ ВАр}.$$

Діаграми напруг і струмів показані на рис. 1.4.11.

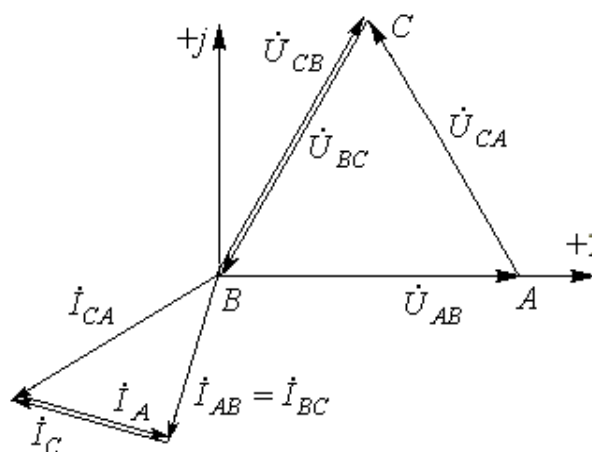


Рисунок 1.4.11 – Векторна діаграма розподілу напруг та струмів у колі на рис. 1.4.9 у разі обриву в точці B'

Покази ватметрів:

$$P_{W1} = \operatorname{Re} \left(\dot{U}_{AB} \dot{I}_A^* \right) = \operatorname{Re} \left(127 e^{j0^\circ} \cdot 0.898 e^{j15^\circ} \right) = \operatorname{Re} (110.16 + j29.52) = 110.16 \text{ Вт.}$$

$$P_{W2} = \operatorname{Re} \left(\dot{U}_{CB} \dot{I}_C^* \right) = \operatorname{Re} \left(127 e^{j60^\circ} \cdot 0.898 e^{-j165^\circ} \right) = \operatorname{Re} (-29.52 - j110.16) = -29.52 \text{ Вт.}$$

Активна потужність трифазного кола за показами двох ватметрів:

$$P_{\text{сп}} = P_{W1} + P_{W2} = 110.16 - 29.52 = 80.64 \text{ Вт.}$$

Приклад 1.4.2. У симетричному трифазному колі (рис. 1.4.12) відомі покази приладів:

$$P_{W_B} = 8383.1 \text{ Вт, } P_{W_C} = 4191.5 \text{ Вт, } U_V = 220 \text{ В.}$$

Визначити струми у фазах, кути зсуву фаз між фазними струмами та напругами, активну та реактивну потужності трифазної системи. Побудувати суміщену векторну діаграму струмів та напруг.

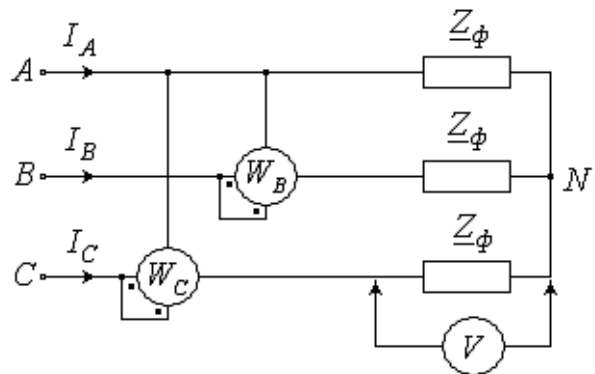


Рисунок 1.4.12 – Схема трифазного кола до прикладу 1.4.2

Розв'язання.

Активна потужність трифазного трипровідного кола незалежно від симетрії навантаження дорівнює алгебраїчній сумі показів двох ватметрів:

$$P = P_{W_B} + P_{W_C} = 8383.1 + 4191.5 = 12574.6 \text{ Вт.}$$

З урахуванням особливостей оцінювання потужності симетричного трифазного трипровідного кола за показами двох ватметрів розраховуємо реактивну потужність кола

$$Q = \sqrt{3} (P_{W_B} - P_{W_C}) = \sqrt{3} (8383.1 - 4191.5) = 7260.06 \text{ ВАр}$$

та кут зсуву фаз між фазними струмами та напругами

$$\varphi = \arctg \frac{Q}{P} = \arctg \frac{7260.06}{12574} = 30^\circ.$$

Подальший аналіз потребує чіткого розуміння щодо числових величин кутів зсуву фаз між напругами та струмами, які зручно визначити з векторної діаграми, зображеної на рис. 1.4.13. При побудові векторної діаграми враховуємо особливості співвідношень між струмами на напругами на пасивних елементах в колі синусоїдного струму та між лінійними і фазними напругами в симетричному трифазному колі:

- оскільки задане коло симетричне, то напруга зміщення нейтралі рівна нулю ($\dot{U}_{NN} = 0$), а отже фазні напруги джерела та навантаження рівні;
- показ вольтметра відповідає величина фазної напруги навантаження. З урахуванням симетрії трифазного кола модулі фазних напруг на навантаженнях рівні:

$$U_{AN'} = U_{BN'} = U_{CN'} = U_V = 220 \text{ В};$$

- приймаючи початкову фазу фазної напруги по фазі A за нуль отримуємо розподіл фазних та напруг з урахуванням, що $U_{\text{Л}} = \sqrt{3}U_{\Phi}$:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AN'} = \dot{U}_A &= U_{\Phi} e^{j0^\circ} & \dot{U}_{AB} &= U_{\text{Л}} e^{j30^\circ} \\ \dot{U}_{BN'} = \dot{U}_B &= U_{\Phi} e^{-j120^\circ} & \dot{U}_{BC} &= U_{\text{Л}} e^{-j90^\circ} \\ \dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C &= U_{\Phi} e^{j120^\circ} & \dot{U}_{CA} &= U_{\text{Л}} e^{j150^\circ} \end{aligned}$$

- кут зсуву фаз лежить в межах $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, що свідчить про активно-індуктивний характер навантаження фаз;
- оскільки $\varphi = \psi_u - \psi_i$ та враховуючи, що початкова фаза фазного струму по фазі A обчислюється як $\psi_{i_A} = \psi_{u_A} - \varphi = -\varphi = -30^\circ$, а отже система фазних струмів набуває вигляду

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= I_{\Phi} e^{-j30^\circ} \\ \dot{I}_B &= I_{\Phi} e^{-j150^\circ} \\ \dot{I}_C &= I_{\Phi} e^{j90^\circ} \end{aligned}$$

- лінійна напруга $\dot{U}_{BA}$ відстає від фазної напруги $\dot{U}_B$ на 30° :

$$\dot{U}_{BA} = -\dot{U}_{AB} = U_{\text{Л}} e^{j30^\circ} e^{j180^\circ} = U_{\text{Л}} e^{j210^\circ} = U_{\text{Л}} e^{-j150^\circ}.$$

Це свідчить про те, що напруга $\dot{U}_{BA}$ та $\dot{I}_B$ збігаються за фазою;

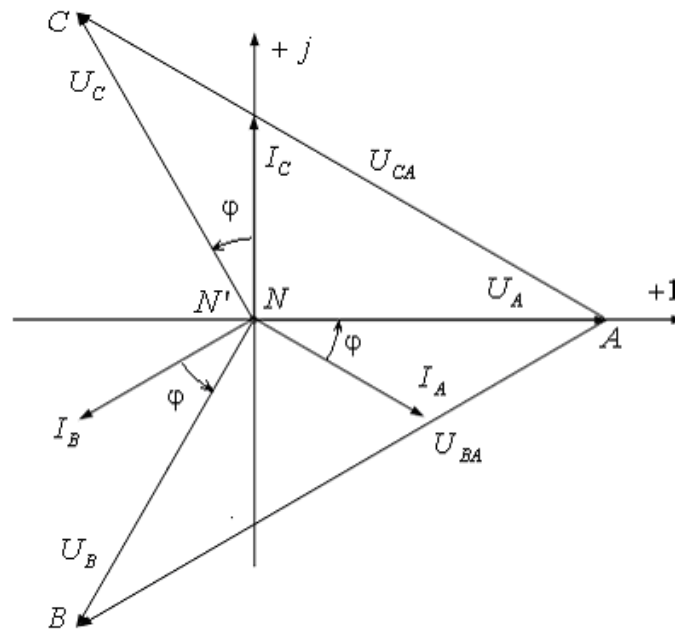


Рисунок 1.4.13 – Векторна діаграма розподілу напруг та струмів у колі на рис. 1.4.12

Величини фазних струмів визначаємо з математичних виразів обчислення показів ватметрів:

$$P_{W_B} = U_{BA} I_B \cos(\hat{U}_{BA}, I_B) = 8383.1 \text{ Вт},$$

$$P_{W_C} = U_{CA} I_C \cos(\hat{U}_{CA}, I_C) = 4191.5 \text{ Вт},$$

отже

$$I_B = \frac{P_{W_B}}{U_{BA} \cos(\hat{U}_{BA}, I_B)} = \frac{8383.1}{220 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 0^\circ} = 22 \text{ А}.$$

Враховуючи симетрію заданого кола модулі фазних струмів рівні між собою:

$$I_A = I_B = I_C = 22 \text{ А}.$$

Повний опір навантаження у комплексному поданні:

$$\underline{Z}_A = \frac{\dot{U}_A}{\dot{I}_A} = \frac{220e^{j0^\circ}}{22e^{-j30^\circ}} = 10e^{j30^\circ} = (8.66 + j5) \text{ Ом} = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C.$$

Перевірку правильності розрахунку оцінюємо за балансом потужностей:

$$\underline{S}_\Gamma = 3\dot{U}_A \dot{I}_A^* = 3 \cdot 220e^{j0^\circ} \cdot 22e^{j30^\circ} = 14520e^{j30^\circ} = 12574.69 + j7260 = (P + jQ) \text{ ВА.}$$

$$P_{\text{сп}} = 3I_A^2 \cdot R = 3 \cdot 22^2 \cdot 8.66 = 12574.32 \text{ Вт,}$$

$$Q_{\text{сп}} = 3I_A^2 \cdot X_L = 3 \cdot 22^2 \cdot 5 = 7260 \text{ ВАр.}$$

Тема 1.5. Обертове магнітне поле

Одна з фундаментальних переваг трифазних систем – можливість створення **обертового магнітного поля**, що лежить в основі роботи трифазних електродвигунів змінного струму.

Магнітне поле електричної котушки, по витках якої проходить змінний у часі струм, характеризується вектором магнітної індукції **B**. Напрямок вектору **B** визначається за правилом правого гвинта (правилом свердлика).

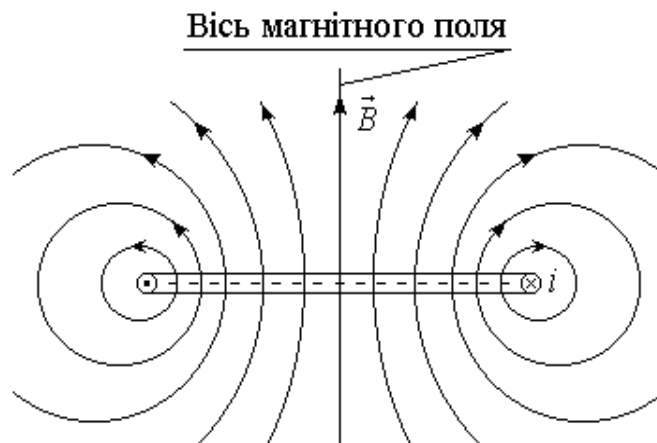


Рисунок 1.5.1 – Ідеалізована картина магнітного поля нерухомого провідника зі струмом

За умови ідеалізації котушки до вигляду провідника розподіл ліній магнітної індукції котушки при протіканні струму набуває вигляду продемонстрованого на рис. 1.5.1. За прийнятого спрощення лінії магнітної індукції зосереджені поблизу геометричної осі провідника, що є віссю симетрії поля. Вісь, уздовж якої вектор **B** досягає найбільшого значення, називається

віссю магнітного поля. Для провідника та відповідно симетричної котушки ця вісь збігається з її геометричною віссю.

Якщо припустити, що електричний струм, який протікає по котушці, змінюється за законом синуса ($i(t) = I_m \sin \omega t$), то індуковане магнітне поле також змінюється за синусоїдним законом магнітна індукція якого по осі котушки описується виразом:

$$B(t) = B_m \sin \omega t ,$$

де B_m – максимальне значення магнітної індукції на осі котушки;

ω – кругова частота змінного струму.

Магнітне поле, створене синусоїдним струмом називають **пульсуючим магнітним полем**. Таке поле зберігає осьову симетрію і змінюється тільки за модулем:

$$B(t) \in [-B_m, +B_m] .$$

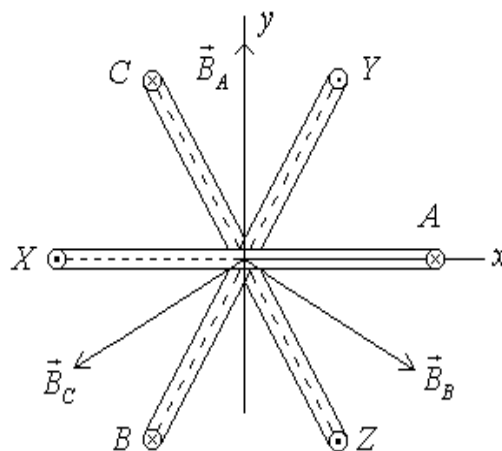


Рисунок 1.5.2 – Обертове магнітне поле жорстко скріплених трьох котушок

На рис. 1.5.2 наведена система трьох ідеалізованих жорстко скріплених котушок, розташованих під кутом 120° . Прийнято, що через ці котушки від їх початків (A, B, C) до кінців (X, Y, Z) протікають синусоїдні струми однакової амплітуди та зсунуті у часі на $\Delta t = \frac{T}{3}$ або $\Delta \omega t = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$:

$$\begin{aligned}i_A(t) &= I_m \sin \omega t, \\i_B(t) &= I_m \sin(\omega t - 120^\circ), \\i_C(t) &= I_m \sin(\omega t + 120^\circ),\end{aligned}\tag{1.5.1}$$

де I_m – амплітуда струму.

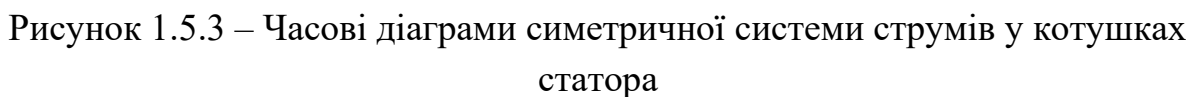
При протіканні симетричної трифазної системи струмів (1.5.1) створюється система пульсуючих магнітних полів трьох нерухомих котушок:

$$\begin{aligned}B_A(t) &= B_m \sin(\omega t), \\B_B(t) &= B_m \sin(\omega t - 120^\circ), \\B_C(t) &= B_m \sin(\omega t + 120^\circ).\end{aligned}$$

Накладання трьох пульсуючих магнітних полів від кожної котушки у повітряному зазорі електричної машини формує результуюче обертове магнітне поле з постійною амплітудою, яке обертається зі сталою кутовою швидкістю.

Математичний опис обертового магнітного поля.

Для пояснення фізичної сутності та математичного опису створення обертового магнітного поля розглянуто ідеалізовану конструкцію електричної машини змінного струму. Вважається, що статор містить трифазну симетричну систему обмоток, кожна фаза якого складається з одного витка. При живленні електричної машини симетричною системою синусоїдних напруг в обмотках статора протікає симетрична система струмів. Часові діаграми фазних струмів наведено на рис. 1.5.3. Прийнято припущення, що струми в точках A, B, C додатні та відображені точками, а в точках X, Y, Z л – від’ємні та подані хрестиками (дивись рисунки таблиці 1.5.1).



135

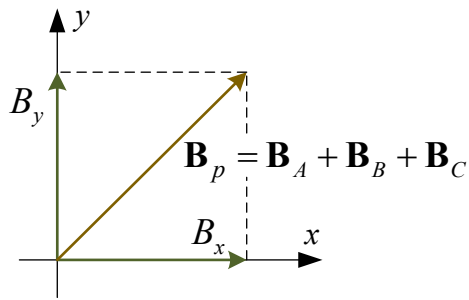
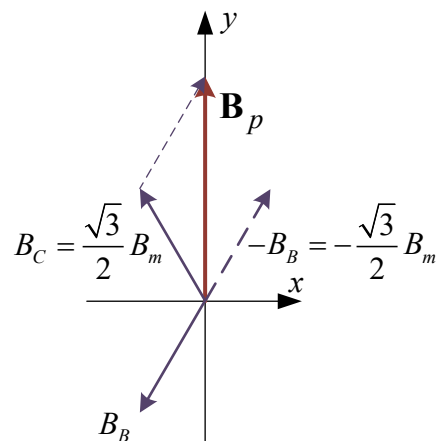
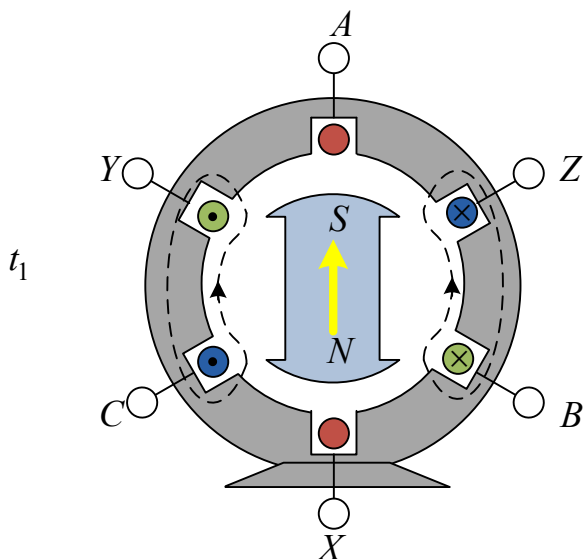
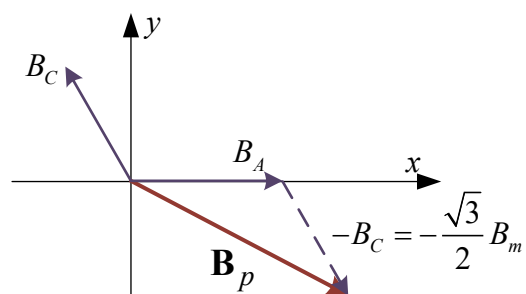
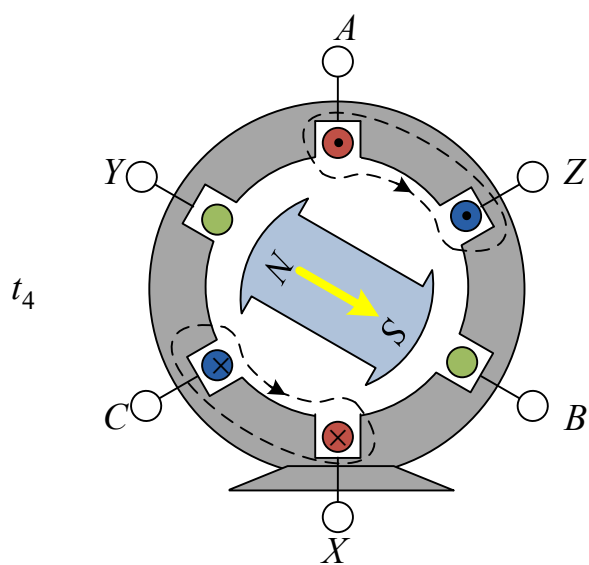
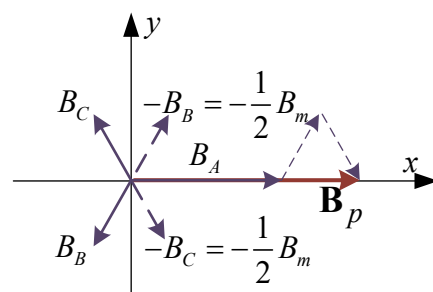
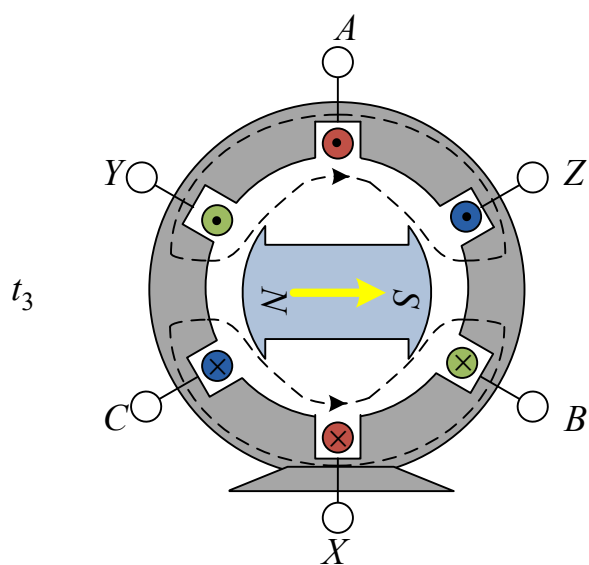
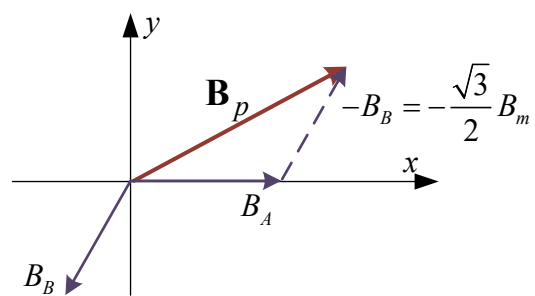
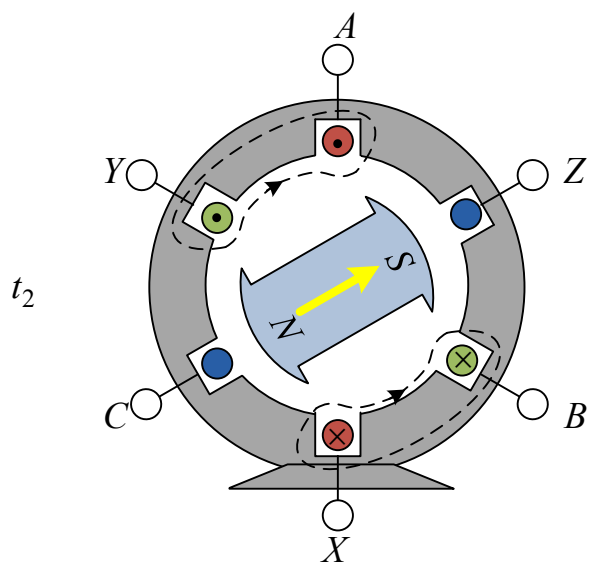


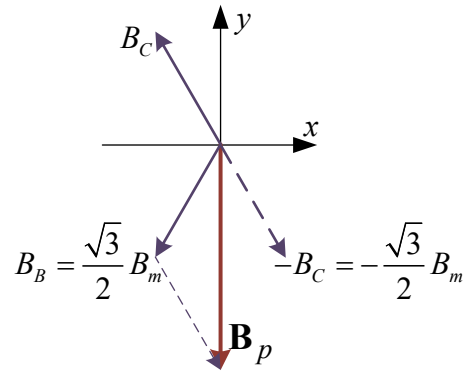
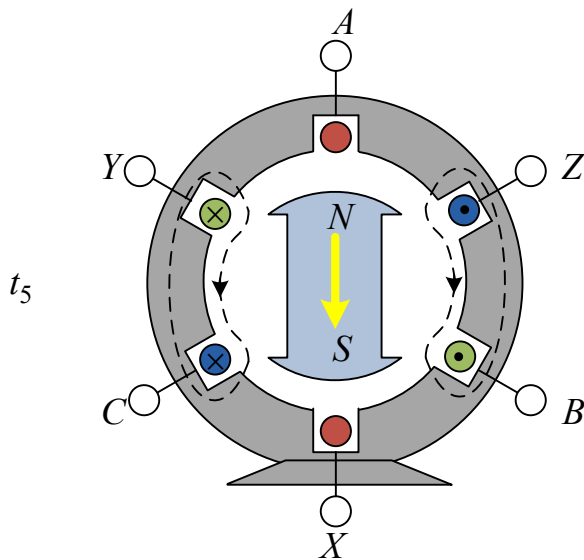
Рисунок 1.5.4 – Алгебраїчна сума проєкцій векторів $\mathbf{B}_A, \mathbf{B}_B, \mathbf{B}_C$
на осі x і y

На основі часових діаграм струмів (рис. 1.5.3) розглянуто схематичне відображення ідеалізованого електродвигуна для п'ять характерних станів згідно обраних моментів часу, що відображено у таблиці 1.5.1.

Таблиця 1.5.1







Алгебраїчна сума проекцій векторів магнітної індукції на осі x і y декартової системи координат дозволяє описати результуюче магнітне поле для кожного з обраних моментів. У межах цієї моделі виконано аналітичний розрахунок результуючого магнітного поля для трьох моментів часу: 0 , 90° та 180° .

В момент t_1 струм фази A приймає нульове значення, струм фази B направлений від нас на початку обмотки, а в його кінці Y – до нас; струм фази C направлений до нас, а в його кінці Z – від нас. Визначення проекцій векторів пульсуючих магнітних полів кожної фази дозволяють оцінити результуюче магнітне поле в момент t_1 :

$$B_x = 0 - B_B \cos 30^\circ + B_C \cos 30^\circ = B_m \cos 30^\circ \left[\sin(\omega t - 120^\circ) - \sin(\omega t + 120^\circ) \right] =$$

$$= B_m \underbrace{\cos 30^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[2 \cos \omega t \cdot \underbrace{\sin(-120^\circ)}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \right] = -\frac{3}{2} B_m \cos \omega t.$$

$$\begin{aligned}
B_y &= -B_A + B_B \cos 60^\circ + B_C \cos 60^\circ = \\
&= -B_m \sin \omega t + B_m \cos 60^\circ \left[\sin(\omega t - 120^\circ) + \sin(\omega t + 120^\circ) \right] = \\
&= -B_m \sin \omega t + B_m \underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} \left[2 \sin \omega t \cdot \underbrace{\cos(-120^\circ)}_{-\frac{1}{2}} \right] = \\
&= -B_m \sin \omega t - B_m \cdot 0.5 \cdot 2 \sin \omega t \cdot 0.5 = -\frac{3}{2} B_m \sin \omega t.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_p = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} B_m\right)^2 \cdot (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)} = \frac{3}{2} B_m.$$

Аналогічно виконуються аналітичні розрахунки для двох інших моментів часу.

В момент $t_3 = 90^\circ$:

$$\begin{aligned}
B_x &= B_A - B_B \cos 60^\circ - B_C \cos 60^\circ = B_m \sin(\omega t) - B_m \cos 60^\circ \left[\sin(\omega t - 120^\circ) + \sin(\omega t + 120^\circ) \right] = \\
&= B_m \sin(\omega t) - B_m \underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} \left[2 \sin \omega t \cdot \underbrace{\cos(-120^\circ)}_{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_y &= B_A - B_B \cos 30^\circ + B_C \cos 30^\circ = \\
&= 0 - B_m \cos 30^\circ \left[\sin(\omega t - 120^\circ) + \sin(\omega t + 120^\circ) \right] = -B_m \underbrace{\cos 30^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[2 \cos \omega t \cdot \underbrace{\sin(-120^\circ)}_{-\frac{1}{2}} \right] = \\
&= -B_m \sin \omega t - B_m \cdot 0.5 \cdot 2 \sin \omega t \cdot 0.5 = -\frac{3}{2} B_m \sin \omega t.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_p = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} B_m\right)^2 \cdot (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)} = \frac{3}{2} B_m.$$

В момент $t_5 = 180^\circ$:

$$\begin{aligned}
B_x &= 0 + B_B \cos 30^\circ - B_C \cos 30^\circ = B_m \cos 30^\circ \left[\sin(\omega t - 120^\circ) - \sin(\omega t + 120^\circ) \right] = \\
&= B_m \underbrace{\cos 30^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[2 \cos \omega t \cdot \underbrace{\sin(-120^\circ)}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \right] = -\frac{3}{2} B_m \cos \omega t. \\
B_y &= B_A - B_B \cos 60^\circ - B_C \cos 60^\circ = \\
&= B_m \sin \omega t - B_m \cos 60^\circ \left[\sin(\omega t - 120^\circ) + \sin(\omega t + 120^\circ) \right] = \\
&= B_m \sin \omega t - B_m \underbrace{\cos 60^\circ}_{0.5} \left[2 \sin \omega t \cdot \underbrace{\cos(-120^\circ)}_{-0.5} \right] = \\
&= B_m \sin \omega t + B_m \cdot 0.5 \cdot 2 \sin \omega t \cdot 0.5 = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t. \\
\mathbf{B}_p &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} B_m\right)^2 \cdot (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)} = \frac{3}{2} B_m.
\end{aligned}$$

За даними проведених аналітичних розрахунками побудовано векторні діаграми (таблиця 1.5.1). Для інших моментів часу результуюче поле визначається аналогічно.

Для розглянутого випадку живлення ідеалізованої електричної машини алгебраїчна сума проекцій векторів магнітної індукції на осі x і y визначає модуль результуючої магнітної індукції, який приймає однакову величину $\left(\mathbf{B}_p = \frac{3}{2} B_m \right)$, не змінюється з часом та має різне просторову орієнтацію описуючи коло.

Кут нахилу вектору результуючого магнітного поля до осі x змінюється зі сталою швидкістю

$$\alpha = \arctg \frac{B_y}{B_x} = -\omega t.$$

Викладена теорія є основою роботи електричних машин, детальне вивчення яких розглядається у відповідному курсі.

Список використаної літератури до розділу 1.

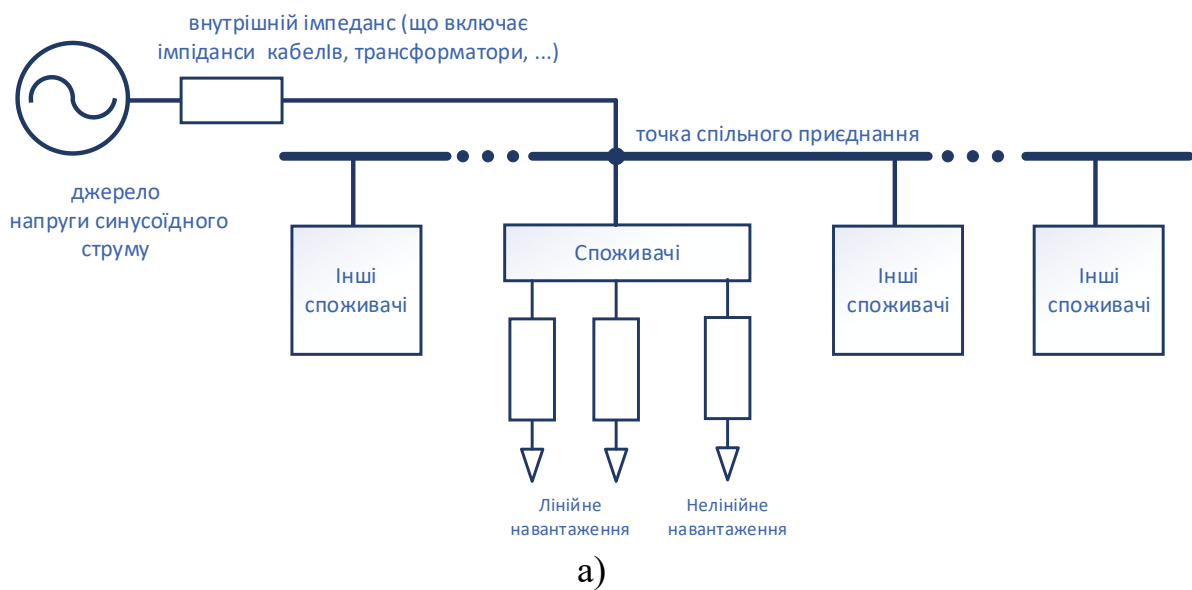
1. ДСТУ 2843-94. Електротехніка. Основні поняття. Терміни та визначення : [чинний від 1996-01-01] / затв. наказом Держстандарту України від 23.11.1994 № 290. – Київ : Держстандарт України, 1995. – 67 с.
2. ДСТУ 2815-94. Електричні й магнітні кола та пристрої. Терміни та визначення (IEC 60050-131:1978, NEQ; IEC 60050-151:1978, NEQ) : [чинний від 1996-01-01, скасовано з 01.01.2026] / затв. наказом Держстандарту України від 31.10.1994 № 258. – Київ : Держстандарт України, 1995. – 51 с.
3. Правила улаштування електроустановок (ПУЕ). Чинне нормативно-правове видання : [затв. наказом Міністерства енергетики та вугільної промисловості України від 21.07.2017 № 476]. – Київ : Міненерговугілля України, 2017. – 608 с.
4. IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions. IEEE Std 1459-2025 (Revision of IEEE Std 1459-2010). New York: IEEE, 2025. 61 p. DOI: 10.1109/IEEESTD.2025.11004570
5. American Standard Definitions of Electrical Terms. – New York : American Institute of Electrical Engineers, 1941. – 147 p.
6. ДСТУ IEC 80000-6:2016 (IEC 80000-6:2008, IDT). Величини та одиниці. Частина 6. Електромагнітні явища : [чинний від 2018-01-01] / затв. наказом УкрНДНЦ від 27.12.2016 № 439. – Київ : УкрНДНЦ, 2016. – 34 с.
7. Buchholz F. Die Drehstrom-Scheinleistung bei ungleichmäßiger Belastung der drei Zweige // Licht und Kraft. – 1922. – № 2. – S. 9–11.
8. Goodhue W. M. Discussion to Reactive power concepts in need of clarification // *AIEE Transactions*. – 1933. – Vol. 52. – P. 787.
9. Теоретичні основи електротехніки: підручник: у 3 т. / В. С. Бойко, В. В. Бойко, Ю. Ф. Видолоб [та ін.] ; за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойка. – К. : ІВЦ «Видавництво «Політехніка»», 2004. – Т. 1 : Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 272 с.
10. Бойко В. С. Теоретичні основи електротехніки. Підручник: У 3 т.; Т. 2: Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола / В.С. Бойко, Ю.Ф. Видолоб, І.А. Курило та ін.– К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", 2008. – 224 с.

Розділ 2. Несинусоїдні періодичні процеси в лінійних електричних колах

Тема 2.1. Вступ до теорії гармонійних спотворень

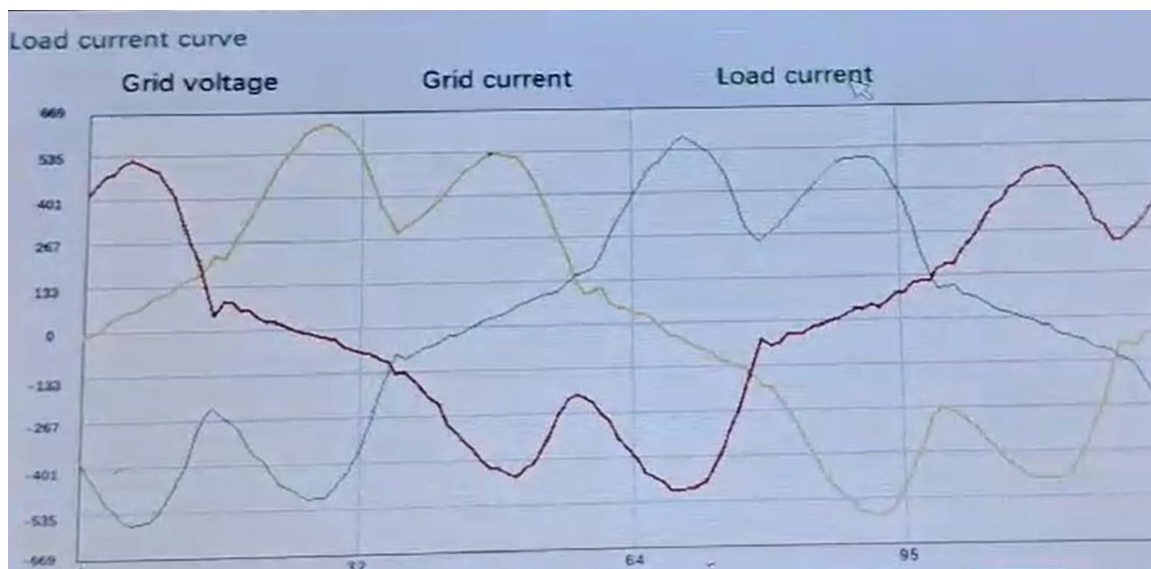
У сучасних енергосистемах спостерігається стійке зростання рівня гармонічних спотворень, що створює серйозні виклики для забезпечення якості електроенергії (англ. **Power Quality, PQ**) у мережах усіх класів напруг – від побутових розподільчих систем до високовольтних магістралей електропередачі. Відхилення напруги і струму від ідеальної синусоїдальної форми є однією з основних причин погіршення електромагнітної сумісності обладнання, збільшення втрат в електромережі та скорочення ресурсу ізоляції кабелів, трансформаторів і електродвигунів.

Дослідження проблеми гармонічних спотворень показує, що вона має системний характер і не обмежується лише окремими вузлами енергосистеми. Взаємодія електрообладнання через точку спільного приєднання представлена у вигляді умовної блок-схеми електромережі на рис. 2.1.1.





б)



в)

Рисунок 2.1.1 – Модель системи живлення споживачів електроенергії (а) із можливими спотвореннями струму мережі живлення (б) та навантаження (в)

Генерація гармонік у мережі є результатом нелінійної взаємодії між електричними елементами системи та споживчим обладнанням (рис. 2.1.1). Джерела гармонічних спотворень умовно поділяють на традиційні та сучасні, при цьому останні виникли у зв'язку з розвитком нових технологій, таких як відновлювані джерела енергії та системи накопичення енергії. До основних джерел гармонічних спотворень у сучасних електроенергетичних системах належать:

- трансформатори через нелінійність магнітного кола, що особливо проявляється в режимі насичення;

- обертові електричні машини внаслідок нерівномірного розподілу магнітного потоку під час обертання;
- конденсаторні батареї, які можуть викликати резонансні явища на певних частотах, створюючи додаткове навантаження на ізоляцію обладнання;
- обладнання з силовою електронікою:
 - вентильні перетворювачі – працюють на базі тиристорів та інших вентильних компонентів з нелінійними ВАХ (рис. 2.1.2);
 - перетворювачі частоти, призначені для зміни частоти змінного струму;
 - інверторні модулі, які є складовими промислових приводів і пристроях для перетворення енергії;
 - промислове обладнання – електрозварювальні апарати, дугові печі, зарядні пристрої тощо;
 - приводи зі змінною швидкістю для двигунів постійного та змінного струму;
 - джерела безперебійного живлення (ДБЖ);
 - офісне обладнання – ПК, сервери, принтери та інша комп'ютерна техніка;
 - побутова техніка – телевізори, мікрохвильові печі, люмінесцентні лампи, зарядні пристрої тощо;
 - вентильні двигуни через використання інверторів.

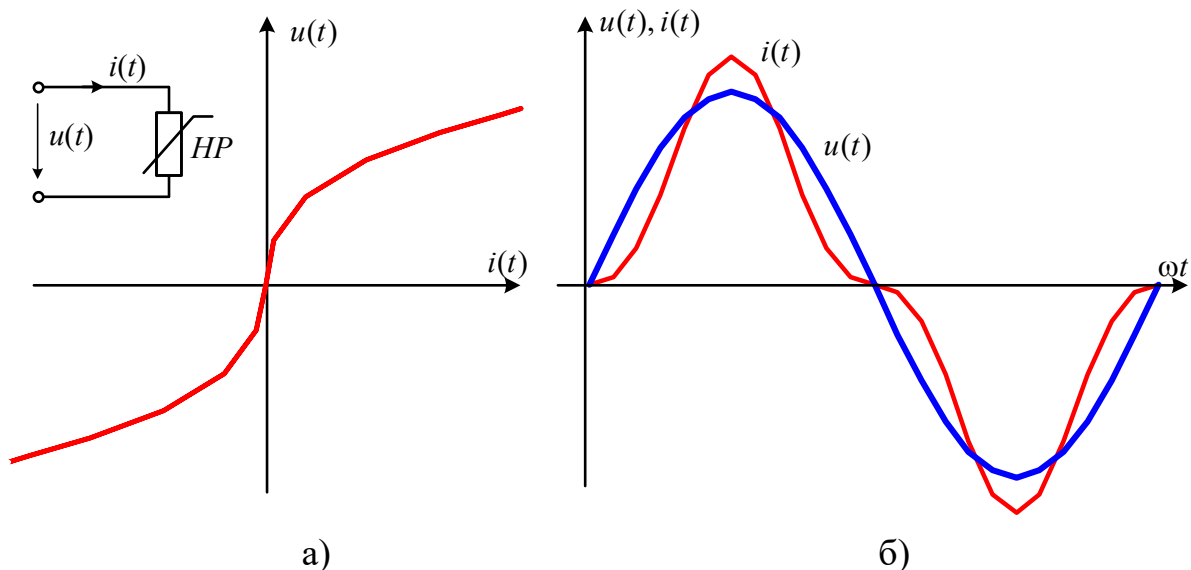


Рисунок 2.1.2 – Приклад впливу навантаження з нелінійною характеристикою (а) на спотворення форми струму мережі (б)

Таким чином, гармонічні спотворення напруги та струму є об'єктивною складовою сучасних енергосистем, що потребує постійного моніторингу та впровадження ефективних методів компенсації. Своєчасне виявлення та обмеження рівня гармонік є необхідною умовою для забезпечення належної якості електроенергії, підвищення енергоефективності та збільшення ресурсу електрообладнання.

Водночас відсутність належних заходів з обмеження гармонійних спотворень неминуче призводить до негативних технічних і економічних наслідків, що охоплюють як окремі елементи енергосистеми, так і її функціонування в цілому. Окрім підвищених втрат електроенергії, гармоніки створюють додаткові теплові навантаження на електрообладнання, прискорюють деградацію ізоляційних матеріалів та знижують надійність електротехнічних комплексів. Серед основних аспектів цього впливу варто виділити:

- Перегрів обладнання: надмірні гармонічні струми спричиняють додаткове нагрівання струмопровідних частин трансформаторів, кабелів, двигунів і генераторів, що скорочує термін експлуатації обладнання та може призвести до аварійних відмов;
- Перенапруги та резонансні явища: гармонічні складові можуть викликати перенапруги, особливо за умов резонансних явищ, що виникають при збігу частоти гармоніки з резонансною частотою елементів системи. У таких випадках повний опір (імпеданс) системи різко змінюється, що спричиняє зміну амплітуди струму та напруги та створює серйозну загрозу для ізоляції кабелів і обмоток трансформаторів;
- Погіршення характеристик ізоляції: гармонічні перенапруги викликають локальні нагрівання та електричні пробої ізоляційних матеріалів, що поступово знижує їхню діелектричну міцність та прискорює старіння ізоляції електрообладнання та складових енергосистеми;
- Збільшення струму в нейтральному провіднику: у трифазних чотирипровідних системах гармоніки третього порядку (і кратні їм) додаються в нейтральному провіднику, що призводить до значного збільшення струму в нейтралі. Це створює загрозу перегріву нейтрального провідника;
- Електромагнітні завади: гармонічні спотворення викликають електромагнітні завади, що негативно впливають на роботу систем зв'язку, сигналізації, автоматизації та захисту. Це особливо актуально для підприємств із високою концентрацією електронних пристроїв, де стійкість до завад є критичною;

- Втрати в конденсаторних батареях: конденсаторні батареї є особливо вразливими до гармонічних струмів, оскільки їх реактивна потужність змінюється пропорційно квадрату напруги. За умов гармонічних спотворень це може спричинити їх перегрів, скорочення терміну служби або навіть пробій діелектричної частини.

Загалом, гармонічні спотворення підвищують аварійність в електричних мережах, збільшують кількість необхідних ремонтних робіт та витрати на експлуатацію. Відхилення напруги та струму від ідеальної синусоїдальної форми є важливим аспектом, що впливає на показники якості електроенергії та на електромагнітну сумісність, яка забезпечує узгоджене функціонування електротехнічних пристроїв у спільному електромагнітному середовищі.

Міжнародне регулювання якості електроенергії здійснюється на основі вимог, розроблених Інститутом інженерів з електротехніки та електроніки (IEEE) у Сполучених Штатах Америки [1] та Міжнародною електротехнічною комісією (IEC) для країн Європейського Союзу [2-4]. Ці нормативні документи визначають гранично допустимі значення параметрів якості електроенергії, яких необхідно дотримуватися в точках загального приєднання споживачів у мережах змінного струму різних рівнів напруги за нормальних умов роботи енергосистеми.

В Україні контроль якості електроенергії здійснюється відповідно до положень стандарту ДСТУ EN 50160:2023 [5], який встановлює нормативні характеристики напруги в точках підключення споживачів. Водночас стандарт IEEE 519-2022 [1] охоплює вимоги не лише до параметрів напруги, а й до максимально допустимих рівнів гармонічних спотворень струму в точках загального приєднання електроспоживачів.

Стандарти серії EN IEC 61000 та IEEE 519-2022 регламентують вимоги до електромагнітної сумісності електрообладнання, зокрема встановлюючи допустимі рівні емісії гармонік у мережах різних класів напруги.

Для низьковольтних розподільних мереж (до 1 кВ) обмеження гармонічних складових струму встановлюються в EN IEC 61000-3-2 [2] (для обладнання з номінальним входним струмом до 16 А на фазу) та EN IEC 61000-3-12 [3] (для пристроїв від 16 А до 75 А на фазу). Ці стандарти визначають граничні значення гармонік, щоб запобігти їх негативному впливу на якість електроенергії та роботу інших споживачів.

Для середньої та високої напруги (від 1 кВ і вище) застосовується IEEE 519-2022 [1], який встановлює обмеження щодо гармонічних спотворень як для струму, так і для напруги. Він визначає допустимі рівні гармонік у точці

спільного приєднання, спрямовані на обмеження негативного впливу нелінійних навантажень на енергосистему.

Окрім цього, вимірювання гармонічних складових та їх вплив на якість електроенергії регламентуються EN IEC 61000-4-7 [4] (методи вимірювання гармонік і міжгармонік) та EN IEC 61000-4-30 (загальні методи оцінки якості електроенергії).

Таким чином, EN IEC 61000-3-2, EN IEC 61000-3-12 забезпечують контроль гармонічних струмів у низьковольтних мережах, тоді як IEEE 519-2022 визначає обмеження для середньої та високої напруги, забезпечуючи комплексний підхід до регулювання якості електроенергії.

Тема 2.2. Подання несинусоїдних електричних величин

Криві напруги та струму в електричних мережах традиційно подаються у вигляді синусоїдних функцій часу. Таке представлення забезпечує зручність аналізу та розрахунків у системах електроживлення та електропостачання [6, 7]:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \text{ та } i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

де U_m , I_m – амплітудні величини напруги та струму мережі;

ψ_u , ψ_i – початкові фази миттєвих напруги та струму мережі;

ω – кутова частота напруги мережі.

Для аналізу електричних кіл в яких струми та/або напруги відхиляються від ідеальної синусоїдальної форми, використовується спектральний підхід, що базується на розкладанні періодичної несинусоїдної функцій у тригонометричний ряд Фур'є. Цей метод дозволяє подавати несинусоїдний періодичний сигнал (наприклад як на рис. 2.2.1) сукупність окремих гармонічних компонентів, кожна з яких має свою амплітуду, частоту та початкову фазу. Такий підхід надає можливість оцінити внесок кожної гармонічної складової у загальну характеристику сигналу.

З точки зору математичного аналізу тригонометричний ряд Фур'є має бути поданим у двох формах запису:

сума еквівалентних синусоїд

$$f(t) = \sum_{h=1}^{\infty} f_{(h)}(t) = \sum_{h=1}^{\infty} F_{m(h)} \sin(h\omega t + \psi_{(h)}), \quad (2.2.1)$$

або як косинус-синусний ряд

$$f(t) = A_{(0)} + \sum_{h=1}^{\infty} B_{(h)} \sin(h\omega t) + \sum_{h=1}^{\infty} C_{(h)} \cos(h\omega t), \quad (2.2.2)$$

де $f(t)$ – миттєве значення несинусоїдних напруги або струму як функції часу;

$f_{(h)}(t)$ – миттєве значення гармонічної складової напруги або струму як еквівалентної синусоїди;

h – порядок гармоніки (1 – основна гармоніка, 2, 3, ... – вищі гармоніки);

$F_{m(h)} = \sqrt{B_{(h)}^2 + C_{(h)}^2}$ – амплітудне значення гармонічної складової з частотою $h\omega$;

ω – кутова частота основної гармоніки;

$$\Psi_{(h)} = \begin{cases} \arctg\left(\frac{C_{(h)}}{B_{(h)}}\right), & \text{якщо } B_{(h)} > 0 \\ \pm\pi + \arctg\left(\frac{C_{(h)}}{B_{(h)}}\right), & \text{якщо } B_{(h)} < 0 \end{cases} \quad \text{– початкова фаза гармонічної складової}$$

з частотою $h\omega$;

$$A_{(0)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

$$B_{(h)} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(h\omega t) dt, \quad \text{– коефіцієнти косинус-синусного ряду Фур'є.}$$

$$C_{(h)} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(h\omega t) dt,$$

Відповідно до стандарту ДСТУ ІЕС 60050-161:2003 [8], електричні сигнали для аналізу задач електротехніки подають сумою еквівалентних синусоїд та класифікуються за частотними характеристиками на:

- **Основна гармонічна складова** – компонент, частота якого відповідає номінальній частоті мережі;
- **Вищі гармонічні складові** – компоненти, частоти яких є кратними основній частоті;
- **Міжгармоніки**, які включають **інтергармоніки** (частоти яких лежать між цілими кратними основної частоти) та **субгармоніки** (частоти яких нижчі за основну частоту).

На рис. 2.2.1 наведено приклад спотворення сигналу напруги, що виникає внаслідок накладання на ідеальну синусоїду основної частоти гармонічних складових. Кожна гармонічна складова представлена у вигляді синусоїдального сигналу з меншою амплітудою. Частоти цих гармонік перевищують основну частоту в дев'ять, сім, п'ять і три рази відповідно. Таке поєднання основного сигналу з гармонічними компонентами ілюструє характерні зміни форми напруги, що спостерігаються у реальних енергосистемах у разі несинусоїдності сигналів. Аналітичний вираз результуючого спотвореного сигналу напруги, поданого часовою діаграмою на рис. 2.2.1, набуває вигляду

$$u(t) = \sum_{h=1}^5 u_{(2 \cdot h - 1)}(t) = u_{(1)}(t) + u_{(3)}(t) + u_{(5)}(t) + u_{(7)}(t) + u_{(9)}(t),$$

де кожна складова ряду являє собою синусоїдну функцію, частота якої збільшується на порядок гармоніки:

$$u_{(1)}(t) = \sqrt{2}U_{(1)} \sin(\omega t + \psi_{(1)});$$

$$u_{(3)}(t) = \sqrt{2}U_{(3)} \sin(3\omega t + \psi_{(3)});$$

$$u_{(5)}(t) = \sqrt{2}U_{(5)} \sin(5\omega t + \psi_{(5)});$$

$$u_{(7)}(t) = \sqrt{2}U_{(7)} \sin(7\omega t + \psi_{(7)});$$

$$u_{(9)}(t) = \sqrt{2}U_{(9)} \sin(9\omega t + \psi_{(9)}).$$

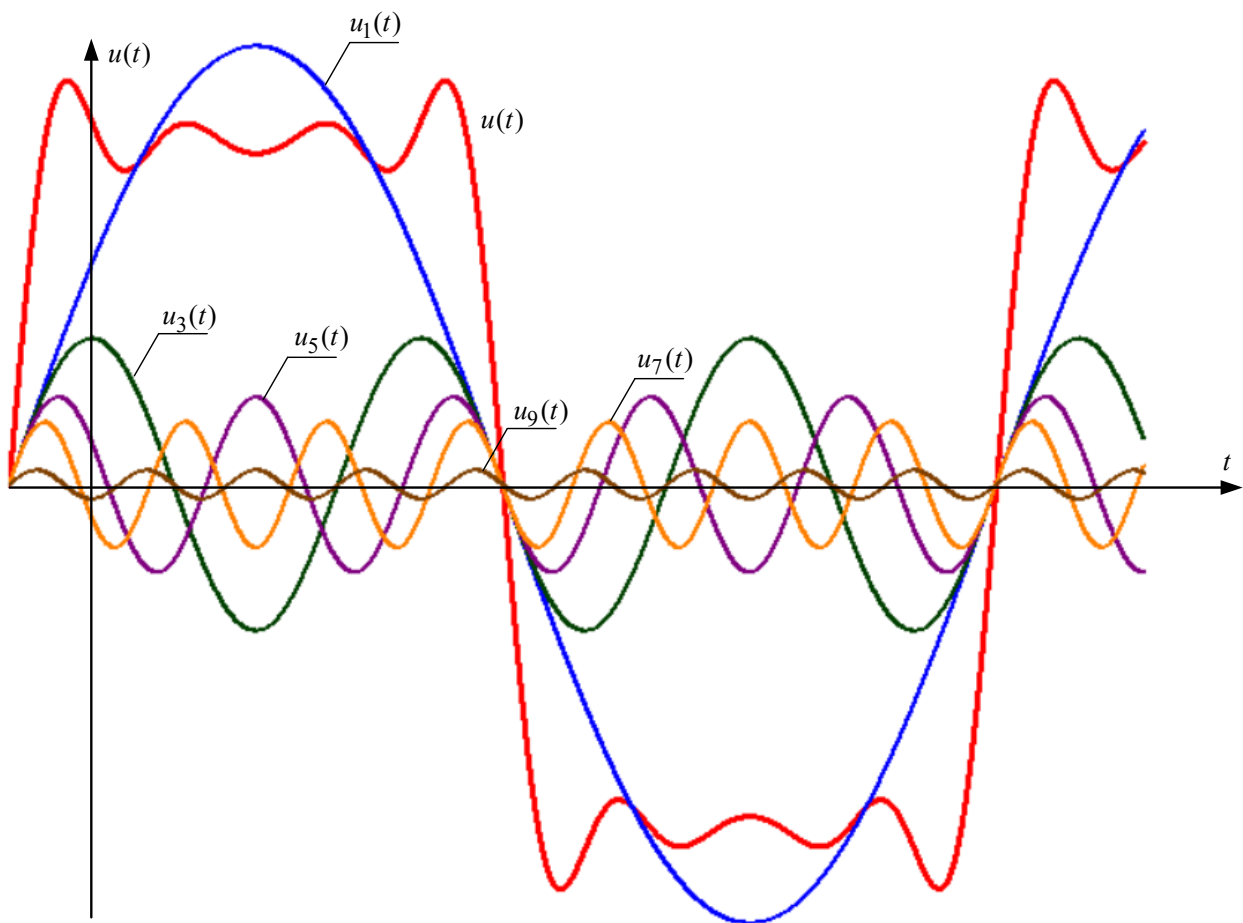


Рисунок 2.2.1 – Приклад синусоїдальної форма сигналу, спотвореної третьою, п'ятою, сьомою та дев'ятою гармонічними складовими

Амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики при аналізі кіл з несинусоїдними періодичними сигналами.

У колах, що працюють під дією несинусоїдних періодичних напруг і струмів, аналіз електричних процесів неможливий без урахування гармонічного складу сигналів. Оскільки несинусоїдний сигнал записаний у вигляді ряду Фур'є характеризується певною амплітудою та початковою фазою, для наочності та зручності його аналізу доцільно подавати ряд у вигляді двох залежностей як амплітудно-частотну та фазочастотну характеристики.

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) відображає розподіл амплітуд гармонічних складових приведених до амплітуди основної гармоніки залежно від частоти гармонік.

Фазочастотна характеристика (ФЧХ) описує розподіл початкових фаз гармонічних складових залежно від частоти. Подібний розподіл можна відобразити і для кутів зсуву фаз між двома сигналами.

Такі залежності дозволяють наочно оцінити гармонічний склад сигналу та є зручними для подальшої оцінки її вплив на поведінку електричного кола,

розрахунку діючих значень сигналів, оцінки енергетичних показників, розробки фільтрів і т. п.

Як приклад, для несинусоїдного сигналу напруги, поданої на рис. 2.2.1, побудовано амплітудно-частотну характеристику (рис. 2.2.2, а) та фазочастотну характеристику (рис. 2.2.2 б).

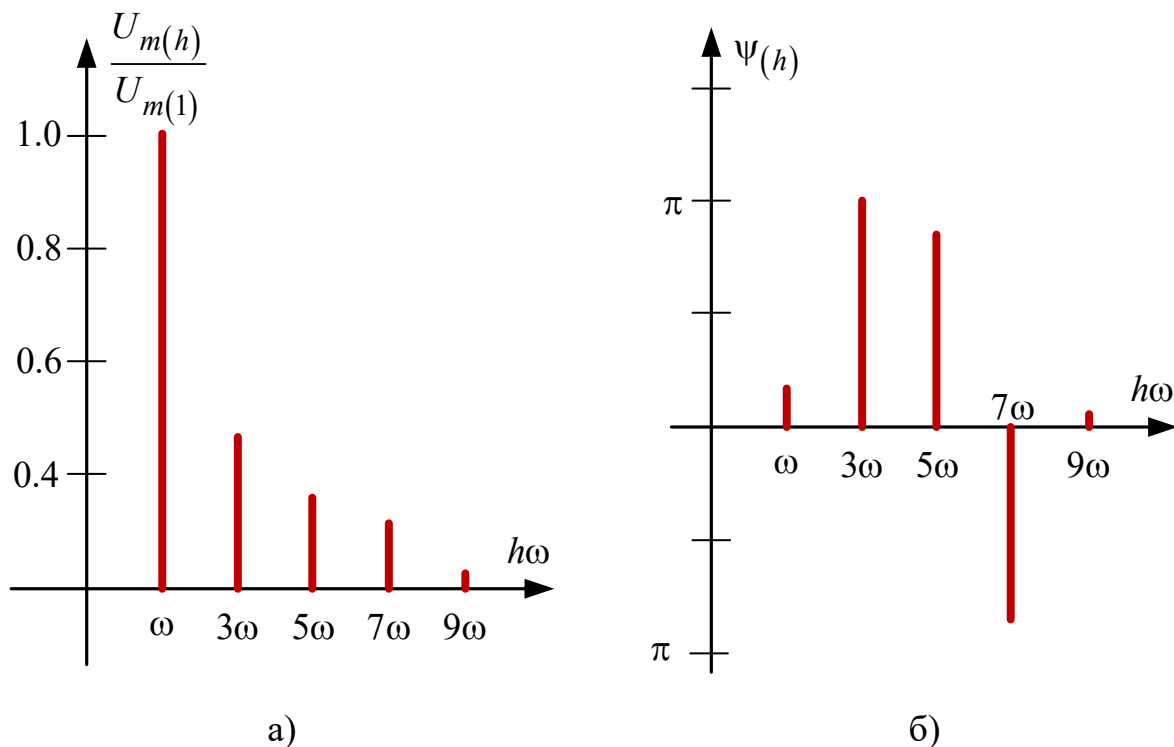
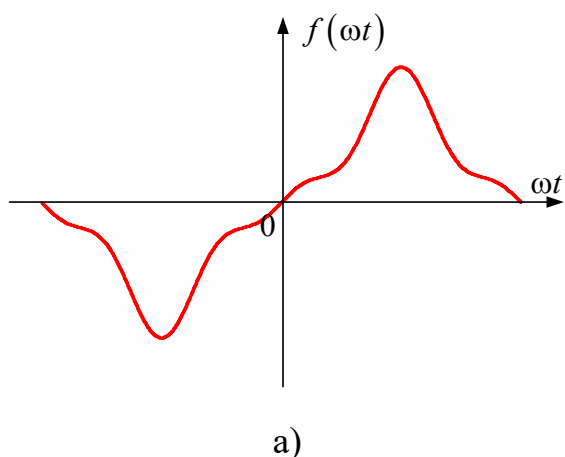


Рисунок 2.2.2 – АЧХ та ФЧХ несинусоїдного сигналу (рис. 2.1.3)

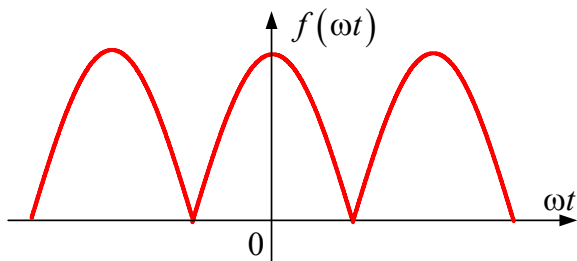
Властивості симетричних періодичних несинусоїдних сигналів.

Для аналітичного подання несинусоїдної кривої рядом Фур'є постає завдання розрахунку коефіцієнтів ряду (2.2.2). У загальному випадку коефіцієнти ряду Фур'є розраховуються за відомими з математики формулами [9]. Однак, у випадку аналізу кривих, які володіють симетрією, задача спрощується, оскільки з їх розкладання випадають цілі спектри гармонік. Знання властивостей симетрії несинусоїдних кривих суттєво економить час та ресурси при обчисленнях.



Якщо функція симетрична відносно початку координат, наприклад крива на рис. 2.2.3 а, то задовольняється умова $f(\omega t) = -f(-\omega t)$. Ряд Фур'є такої функції містить тільки синусні складові, тобто при розкладанні такої кривої відсутні постійна та косинусні складові:

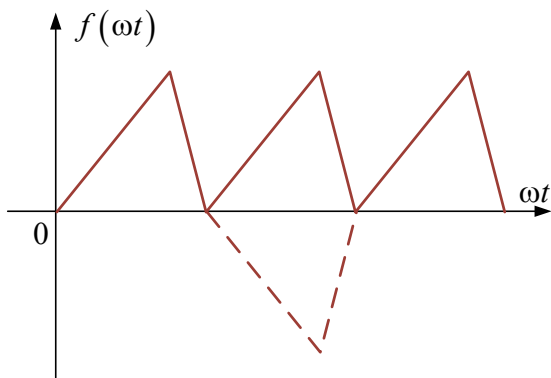
$$f(t) = \sum_{h=1}^{\infty} B_{(h)} \sin(h\omega t).$$



б)

Для кривих симетричних відносно осі ординат (рис. 2.2.3, б) справедлива умова $f(\omega t) = f(-\omega t)$. При їх розкладанні відсутні синусні складові і її ряд набуває вигляду:

$$f(t) = A_{(0)} + \sum_{h=1}^{\infty} C_{(h)} \cos(h\omega t).$$



в)

Для кривих симетричних відносно осі абсцис (рис. 2.2.3, в) має задовольнятися умова

$$f(\omega t) = -f\left(\omega t + \frac{T}{2}\right).$$

При їх розкладанні відсутня постійна складова та гармоніки кратні двом.

Рисунок 2.2.3 – Можливі види симетрії несинусоїдних періодичних сигналів

Несинусоїдні криві можуть містити декілька видів симетрії, основні з яких зведені в таблицю, з метою полегшення щодо вивчення цього питання.

Таблиця 2.2.1

Вид симетрії відносно	Аналітичний вираз	$A_{(0)}$	$B_{(h)}$	$C_{(h)}$
1. Осі абсцис	$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$	-	Тільки парні	
2. Осі ординат	$f(\omega t) = f(-\omega t)$	+	-	+
3. Початку координат	$f(\omega t) = -f(-\omega t)$	-	+	-
4. Осі абсцис та осі ординат	$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi) = f(-\omega t)$	-	-	парні
4. Осі абсцис та початку координат	$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi) = -f(-\omega t)$	-	парні	-

Приклад 2.2.1. Подати рядом Фур'є функцію $e(\omega t)$, зображену на рис. 2.2.4.

Задана функція має два види симетрії: відносно початку координат і відносно осі абсцис. Тому ряд Фур'є такої функції містить тільки непарні синусні складові:

$$e(\omega t) = \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} E_{m(h)} \sin(h\omega t).$$

Розрахунок зводиться до визначення коефіцієнтів ряду $B_{(h)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin(h\omega t) d(\omega t)$, який можна виконати двома способами.

Варіант 1. Коефіцієнти $B_{(h)} = E_{m(h)}$ ряду заданої функції можна отримати, обмежившись інтегруванням за чверть періоду:

$$E_{m(h)} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} e(\omega t) \sin(h\omega t) d(\omega t).$$

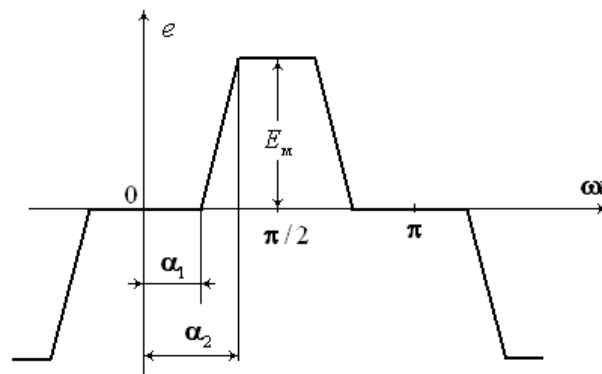


Рисунок 2.2.4 – Несинусоїдний сигнал ЕРС

На інтервалі $0 \leq \omega t \leq \pi/2$ функцію можна описати як:

$$e(\omega t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega t \leq \alpha_1 \\ \frac{E_m}{\alpha_2 - \alpha_1} (\omega t - \alpha_1), & \alpha_1 \leq \omega t \leq \alpha_2 \\ E_m, & \alpha_2 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Тоді вираз для визначення амплітуд ряду $E_{m(h)}$ набуває вигляду:

$$E_{m(h)} = \frac{4}{\pi} \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{E_M}{\alpha_2 - \alpha_1} (\omega t - \alpha_1) \sin(h\omega t) d(\omega t) + \int_{\alpha_2}^{\pi/2} E_M \sin(h\omega t) d(\omega t) \right].$$

Варіант 2. Коефіцієнти $B_{(h)} = E_{m(h)}$ ряду заданої функції можуть бути розраховані у інший спосіб. Для частинно-лінійної функції та умови, якщо вона не містить розривів всередині періоду і на її межах, розрахунок коефіцієнту $B_{(h)}$ за правилом інтегрування по частинах набуває вигляду:

$$\begin{aligned} B_{(h)} &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(h\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin(h\omega t) d(\omega t) = \\ &= -\underbrace{\frac{1}{\pi h} [f(\omega t) \cos(h\omega t)]}_0 \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi h} \int_0^{2\pi} \frac{df(\omega t)}{d(\omega t)} \cos(h\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{1}{\pi h} \int_0^{2\pi} \frac{df(\omega t)}{d(\omega t)} \cos(h\omega t) d(\omega t). \end{aligned}$$

Аналогічний розв'язок виконується для $C_{(h)}$:

$$C_{(h)} = -\frac{1}{\pi h} \int_0^{2\pi} \frac{df(\omega t)}{d(\omega t)} \sin(h\omega t) d(\omega t).$$

Отримані вирази дають можливість спростити розрахунки коефіцієнтів $B_{(h)}$ і $C_{(h)}$ для багатьох електротехнічних задач. Для визначення коефіцієнту $E_{m(h)}$ заданої функції замість виразу отриманого у першому варіанті можна запропонувати:

$$E_{m(h)} = -\frac{4}{\pi h} \left[e(\omega t) \cos(h\omega t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{\pi h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{de(\omega t)}{d(\omega t)} \cos(h\omega t) d(\omega t).$$

Перша складова виразу після підстановки меж дає нуль. Вираз під інтегралом другої складової відмінний від нуля тільки на інтервалі від α_1 до α_2 . Таким чином:

$$E_{m(h)} = \frac{4}{\pi h} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{de(\omega t)}{d(\omega t)} \cos(h\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi h} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{E_M}{\alpha_2 - \alpha_1} \cos(h\omega t) d(\omega t).$$

Після інтегрування і підстановки меж вираз набуває вигляду:

$$E_{m(h)} = \frac{4E_M}{\pi h^2 (\alpha_2 - \alpha_1)} (\sin(h\alpha_2) - \sin(h\alpha_1)), \quad h=1, 3, 5, \dots$$

З отриманого виразу можна отримати вирази амплітуд $E_{m(h)}$ для функцій, зображених на рис. 2.2.5 з урахуванням конкретних значень α_1 і α_2 :

$$E_{m(h)} = \frac{4E_M}{\pi h} \quad \text{— для сигналу, зображеного на рис. 2.2.5 а;}$$

$$E_{m(h)} = \frac{8E_M}{(\pi h)^2} \sin\left(h \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{— для сигналу, зображеного на рис. 2.2.5 б.}$$

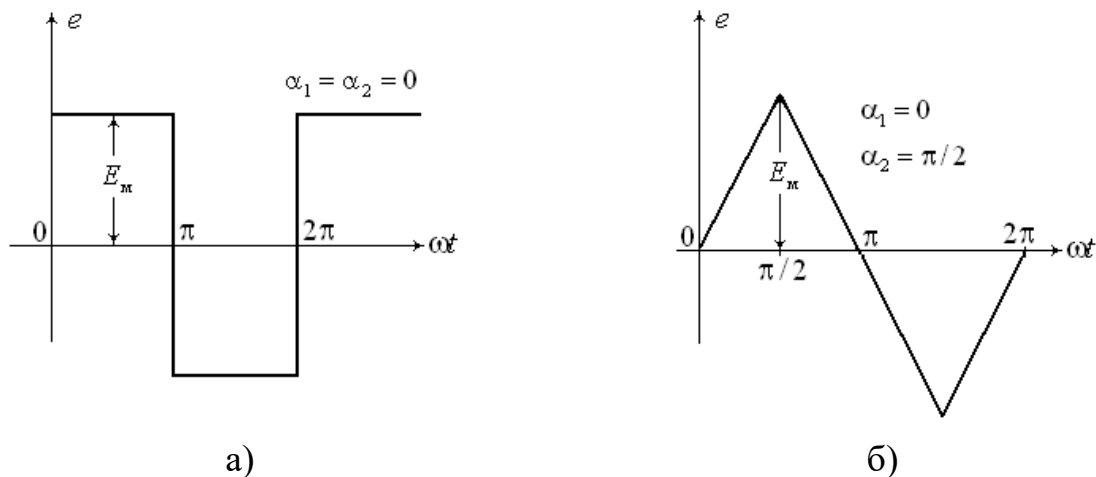


Рисунок 2.2.5 – Можливі варіанти несиметричних сигналів з двома видами симетрії відносно початку координат і відносно осі абсцис

Тема 2.3. Залежність форми кривої струму від характеру навантаження при живленні від джерела несинусоїдної напруги

Опори реактивних елементів кола залежать від частоти, а отже їх величини будуть відмінні для різних гармонік. Нижче наведено залежність форми кривої струму при дії періодичної несинусоїдної напруги на окремі елементи.

Ділянка кола з резистивним елементом.

Якщо знехтувати поверхневим ефектом та прийняти, що активний опір не залежить від частоти, то амплітудні та діючі значення напруги для кожної гармонічної складової окремо визначається за законом Ома:

$$U_{R(h)} = RI_{(h)}$$

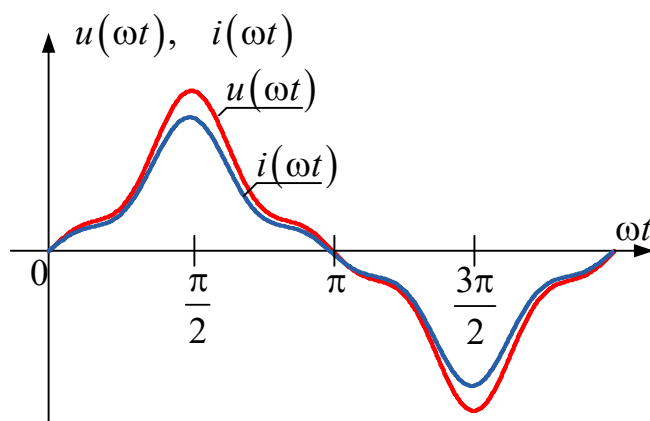
та

$$U_{mR(h)} = RI_{m(h)}.$$

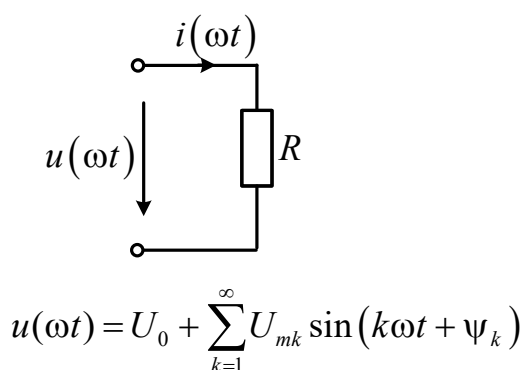
Таким чином, забезпечується пропорційність між амплітудами струму та напруги для всіх гармонік:

$$\frac{I_{m(h)}}{I_{m(1)}} = \frac{U_{mR(h)}}{U_{mR(1)}}.$$

З рис. 2.3.1 видно, що крива несинусоїдного струму повторює криву напруги прикладену до резистивного елементу, тобто гармонічні спектри напруги та струму резистора однакові.



а)



б)

Рисунок 2.3.1 – Часові діаграми періодичних несинусоїдних напруги та струму (а) резистивного елементу (б)

Виконання цієї умови набуває практичної значимості для обмоток електровимірювальних приладів: амперметрів, вольтметрів, ватметрів, призначених при використанні в електричних колах змінного струму. Для зменшення індуктивності та міжвиткових ємностей обмотки вимірювального приладу застосовуються спеціальні схемотехнічні рішення, які дозволяють зменшити індуктивність і ємність обмотки та забезпечують незмінність опору обмотки для широкого діапазону частот.

Ділянка кола з індуктивним елементом.

Реактивний опір індуктивного елементу прямо пропорційний частоті h -ї гармоніки струму:

$$X_{L(h)} = h\omega L.$$

Таким чином, відношення амплітуди h -ої гармоніки в кривій струму до амплітуди її 1-ї гармоніки менше на порядок гармонічної складової, ніж відношення відповідних амплітуд у кривій напруги:

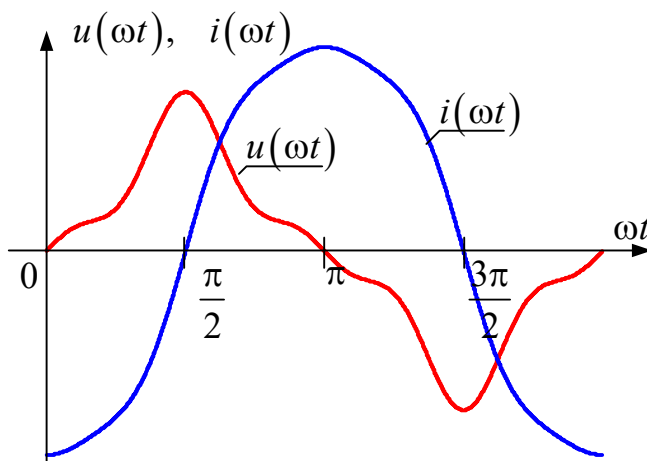
$$\frac{I_{m(h)}}{I_{m(1)}} = \frac{1}{h} \frac{U_{mL(h)}}{U_{mL(1)}},$$

де $U_{mL(1)} = \omega L I_{m(1)}$, $I_{m(1)} = \frac{U_{mL(1)}}{\omega L}$ – взаємозв'язок між амплітудними значеннями перших гармонічних складових напруги та струму ідеалізованої котушки індуктивності;

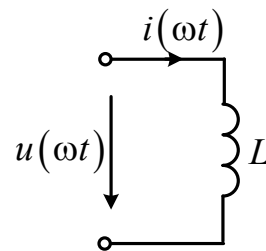
$U_{mL(h)} = h\omega L I_{m(h)}$, $I_{m(h)} = \frac{U_{mL(h)}}{h\omega L}$ – взаємозв'язок між амплітудними значеннями вищих гармонічних складових напруги та струму ідеалізованої котушки індуктивності.

Оскільки $\frac{I_{m(h)}}{I_{m(1)}} < \frac{U_{mL(h)}}{U_{mL(1)}}$, то вищі гармоніки проявляються в кривій

напруги індуктивності (рис. 2.3.2), а отже індуктивність згладжує долю гармонік у кривій струму (згладжує криву струму).



а)



б)

$$u(\omega t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k)$$

Рисунок 2.3.2 – Часові діаграми періодичних несинусоїдних напруги та струму (а) ідеалізованого індуктивного елементу (б)

Ділянка кола з ємнісним елементом.

Реактивний опір ємнісного елементу обернено пропорційний частоті h -ї гармоніки струму:

$$X_{C(h)} = \frac{1}{h\omega C}.$$

Така залежність призводить, що в кривій струму ємнісного елементу відношення амплітуди h -ої гармоніки до амплітуди 1-ї гармоніки більше на порядок гармонічної складової, ніж відношення відповідних амплітуд у кривій напруги:

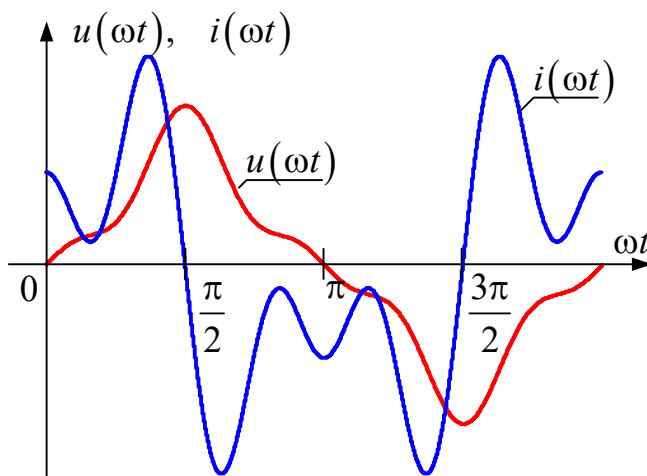
$$\frac{I_{m(h)}}{I_{m(1)}} = h \frac{U_{mC(h)}}{U_{mC(1)}}$$

де $U_{mC(1)} = \frac{I_{m(1)}}{\omega C}$, $I_{m(1)} = \omega C U_{mC(1)}$ – взаємозв’язок між амплітудними значеннями перших гармонічних складових напруги та струму ідеалізованого ємнісного елементу;

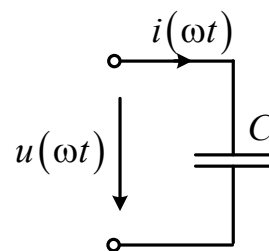
$U_{mC(h)} = \frac{I_{m(h)}}{h\omega C}$, $I_{m(h)} = h\omega C U_{mC(h)}$ – взаємозв’язок між амплітудними значеннями вищих гармонічних складових напруги та струму ідеалізованого ємнісного елементу.

Оскільки $\frac{I_{m(h)}}{I_{m(1)}} > \frac{U_{mC(h)}}{U_{mC(1)}}$, то вищі гармоніки будуть більш помітні в кривій

струму ємності (рис. 2.3.3). Кажуть, що ємність згладжує форму несинусоїдної напруги.



а)



$$u(\omega t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k)$$

б)

Рисунок 2.3.3 – Часові діаграми періодичних несинусоїдних напруги та струму
(а) ідеалізованого ємнісного елементу (б)

У складному колі, що вміщує активні та реактивні елементи, на форму кривої струму буде також впливати схема з'єднань елементів.

Тема 2.4. Аналіз лінійних електричних кіл з періодичними несинусоїдними джерелами енергії

У значній кількості сучасних електротехнічних систем електричні кола живляться сигналами, форма яких істотно відрізняється від ідеальної синусоїди. За наявності періодичних, але несинусоїдних сигналів, класичні методи аналізу, що базуються на припущенні протікання струмів та дії напруг синусоїдальної форми, стають недостатніми.

Ключові елементи аналізу кіл з несинусоїдними сигналами включають:

1. Спектральне представлення сигналів.

Напруга або струм, що мають періодичну, але несинусоїдну форму, подаються у вигляді ряду Фур'є як сума еквівалентних синусоїд. Це дозволяє проводити аналіз кола при дії синусоїдного сигналу кожної частоти окремо комбінуючи метод накладання та класичний підхід аналізу кіл синусоїдного струму.

2. Оцінка гармонічного складу.

Побудова АЧХ і ФЧХ та розрахунок ряду коефіцієнтів дозволяють визначити реакцію елементів кола на кожну гармонічну складову та встановити ступінь відхилення несинусоїдного сигналу від ідеальної синусоїди.

3. Проблема визначення потужностей.

У колах з несинусоїдними сигналами активна і реактивна потужності основної гармоніки більше не є єдиними характеристиками енергетичних процесів. Для повноцінної оцінки вводиться додаткова складова потужності обумовлена деформацією форми сигналу. Поряд з цим все ще існує дискусія щодо визначення повної потужності кола. На сьогодні існує кілька підходів щодо її оцінки.

4. Корекція методів вимірювання електричних величин.

За наявності вищих гармонік застосування класичних методів та пристроїв вимірювання електричних сигналів призводить до значних похибок. Для точного аналізу використовуються спеціалізовані засоби – аналізатори якості електроенергії, які дають змогу виділити кожну складову сигналу та оцінити її внесок у загальний енергетичний баланс.

Вивчення цього матеріалу формує підґрунтя для глибшого розуміння поведінки енергетичних систем за умов несинусоїдності сигналів в ній, оцінки якості електроенергії та розробки ефективних засобів корекції й компенсації.

2.4.1. Класичний метод аналізу кіл при дії джерел несинусоїдних сигналів

Розрахунок миттєвих значень струмів у лінійному електричному колі з періодичними несинусоїдними джерелами енергії базується на використанні принципу накладання і відомих положень теорії аналізу кіл з постійними та синусоїдними джерелами енергії. Нище наведена рекомендована послідовність розрахунку справедлива як для аналізу однофазних кіл, так і для аналізу трифазних кіл за умови, що несинусоїдні періодичні сигнали джерела живлення формують симетричну систему. Особливості аналізу трифазних кіл за наявності вищих гармонічних складових описано окремою темою даного розділу.

Рекомендована послідовність розрахунку:

Крок 1. Подати вихідний сигнал несинусоїдної напруги (ЕРС) чи струму від джерел енергії рядом Фур'є як суму еквівалентних синусоїд. Узагальнено вирази миттєвих напруг та струмів від джерел подаються як

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + U_{m(1)} \sin(\omega t + \psi_{u1}) + U_{m(2)} \sin(2\omega t + \psi_{u2}) + U_{m(3)} \sin(3\omega t + \psi_{u3}) + \\ &+ U_{m(4)} \sin(4\omega t + \psi_{u4}) + U_{m(5)} \sin(5\omega t + \psi_{u5}) + \dots = \\ &= U_{(0)} + u_{(1)}(t) + u_{(2)}(t) + u_{(3)}(t) + u_{(4)}(t) + u_{(5)}(t) + \dots \\ j(t) &= J_0 + J_{m(1)} \sin(\omega t + \psi_{j1}) + J_{m(2)} \sin(2\omega t + \psi_{j2}) + J_{m(3)} \sin(3\omega t + \psi_{j3}) + \\ &+ J_{m(4)} \sin(4\omega t + \psi_{j4}) + J_{m(5)} \sin(5\omega t + \psi_{j5}) + \dots = \\ &= J_{(0)} + j_{(1)}(t) + j_{(2)}(t) + j_{(3)}(t) + j_{(4)}(t) + j_{(5)}(t) + \dots \end{aligned}$$

Крок 2. Побудувати АЧХ сигналу від джерела енергії та визначити рівні гармонічних складових. Граничні значення окремих гармонічних складових нормуються з метою запобігання негативному впливу на мережу та споживачів (дивись примітку нижче). Обмежити нескінченний ряд несинусоїдного сигналу напруги (ЕРС) чи струму джерела енергії сталою складовою (якщо вона є) і гармонічними складовими, амплітуди яких виходять за межі визначені нормами.

Крок 3. Подати джерело несинусоїдного сигналу еквівалентною схемою заміщення.

Гармонічний ряд сигналу від джерела напруги (ЕРС) є сумою синусоїдних напруг різних частот та аналітично подібний до другого закону Кірхгофа. Синтез такої форми запису рівняння дозволяє подати джерело несинусоїдної напруги (рис. 2.4.1 а) як послідовне з'єднання джерел синусоїдних напруг різних частот (рис. 2.4.1 б).

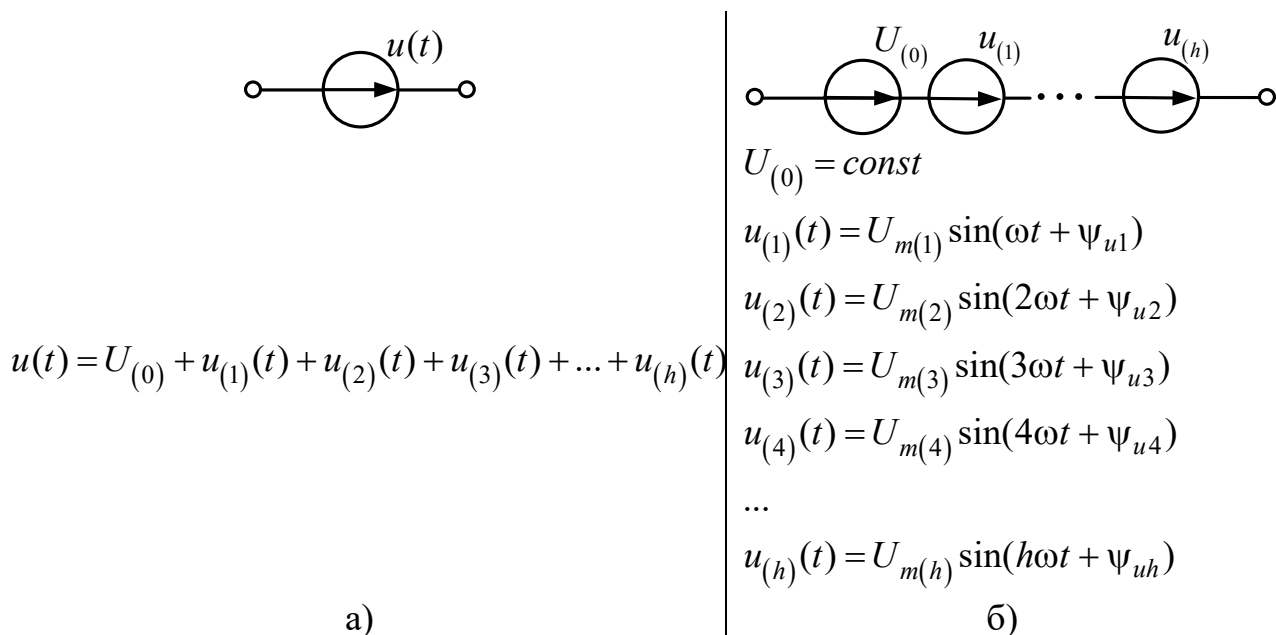
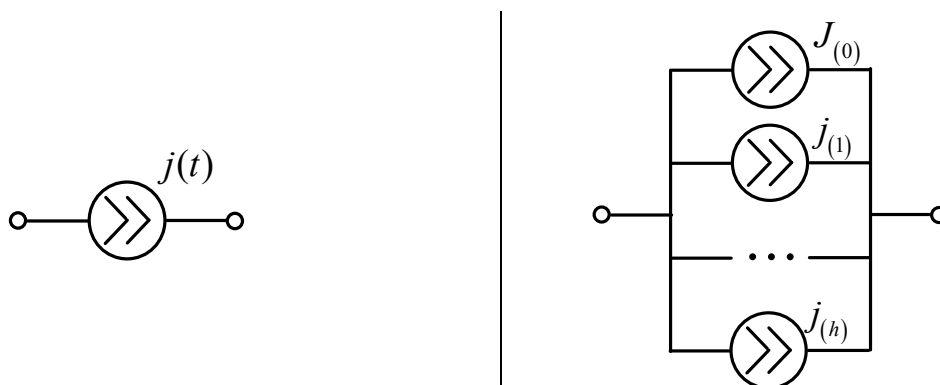


Рисунок 2.4.1 – Заміни джерела несинусоїдної напруги (а) його еквівалентом (б)

Аналогічно гармонічний ряд сигналу від джерела струму є сумою синусоїдних струмів різних частот. Такий аналітичний запис подібний до першого закону Кірхгофу синтез якого дозволяє подати джерело несинусоїдного струму як паралельне з'єднання синусоїдних струмів різних частот (рис. 2.4.2).



$$j(t) = J_{(0)} + j_{(1)}(t) + j_{(2)}(t) + j_{(3)}(t) + \dots + j_{(h)}(t)$$

а)	$J_{(0)} = const$ $j_{(1)}(t) = J_{m(1)} \sin(\omega t + \psi_{j1})$ $j_{(2)}(t) = J_{m(2)} \sin(2\omega t + \psi_{j2})$ $j_{(3)}(t) = J_{m(3)} \sin(3\omega t + \psi_{j3})$ $j_{(4)}(t) = J_{m(4)} \sin(4\omega t + \psi_{j4})$ $\dots$ $j_{(h)}(t) = J_{m(h)} \sin(h\omega t + \psi_{jh})$
б)	

Рисунок 2.4.2 – Заміни джерела несинусоїдного струму (а) його еквівалентом (б)

Крок 4. Враховувати залежність опорів реактивних елементів від частоти, виконати розрахунок їх величин для гармонічних складових визначених у п. 2:

$$X_{L(1)} = \omega L, \quad X_{L(h)} = h\omega L = hX_{L(1)};$$

$$X_{C(1)} = \frac{1}{\omega C}, \quad X_{C(h)} = \frac{1}{h\omega C} = \frac{X_{C(1)}}{h}.$$

Отже, опори індуктивних елементів за частоти вищих гармонічних складових збільшується на порядок гармоніки, при цьому за нульової гармоніки він рівний нулю. Опори ємнісних елементів за частоти вищих гармонічних складових зменшується на порядок гармоніки, а при нульовій – нескінченний.

Крок 5. Виконати розрахунок електричних величин кола з діючими гармонічними складовими джерел енергії із застосуванням методу накладання дії джерел енергії.

Тобто, на базі еквіваленту кола, створеного у п.3, виконати розрахунок гармонічних складових струмів та напруг гілок при дії кожної гармонічної складової джерела окремо враховуючи вплив частоти гармонік на величини опорів реактивних елементів (п. 4).

Крок 6. Результуючі вирази миттєвих струмів гілок і напруг елементів є сумою миттєвих значень окремих гармонічних складових, розрахованих у п. 5:

$$i_n(t) = I_{n(0)} + i_{n(1)} + \dots + i_{n(h)};$$

$$u_n(t) = U_{n(0)} + u_{n(1)} + \dots + u_{n(h)},$$

де n – номер гілки кола.

Примітка. Рівні індивідуальних гармонік – граничні значення окремих гармонічних складових, що нормуються з метою запобігання негативному впливу на мережу та споживачів.

Вимоги до гармонічного складу напруги залежать від класу напруги. Найбільш жорсткі обмеження встановлені для мереж низької (LV, ≤ 1 кВ) та середньої напруги (MV, 10-35 кВ), оскільки саме в цих мережах працює значна кількість електронних пристроїв та нелінійних навантажень, що є джерелами гармонік. У мережах високої напруги (HV, 110-220 кВ) рівень допустимих гармонік є нижчим, що обумовлено їхньою топологією та переважно лінійним характером навантажень. Для мереж надвисоких напруг (EHV, 330-750 кВ) специфічні обмеження гармонічних складових не встановлені через низьку резонансну частоту таких систем та мінімальний вплив гармонік на їхню роботу.

Таблиця 2.4.1.
Допустимі рівні THD_u та індивідуальних гармонік відповідно до ДСТУ EN 50160:2023

Порядок гармоніки	Низька напруга (LV, ≤ 1 кВ)	Середня напруга (MV, 1-35 кВ)	Висока напруга (HV, 110-220 кВ)
THD (до 40го порядку)	$\leq 8\%$	$\leq 8\%$	Визначається узгодженням (менше за MV)
Непарні гармоніки (не кратні 3)			
5	6,0%	6,0%	5,0%
7	5,0%	5,0%	4,0%
11	3,5%	3,5%	3,0%
13	3,0%	3,0%	2,5%
17	2,0%	2,0%	Визначається узгодженням
19	1,5%	1,5%	Визначається узгодженням
23	1,5%	1,5%	Визначається узгодженням
25	1,5%	1,5%	Визначається узгодженням
Непарні гармоніки (кратні 3)			
3	5,0%	5,0%	Визначається узгодженням
9	1,5%	1,5%	Визначається узгодженням
15	1,0%	0,5%	Визначається узгодженням
21	0,75%	0,5%	Визначається узгодженням
Парні гармоніки			
2	2,0%	2,0%	1,9%
4	1,0%	1,0%	1,0%
6-24	0,5%	0,5%	0,5%

Граничні рівні гармонік для HV-мереж встановлюються на рівні, нижчому за MV, і визначаються в рамках договору між оператором мережі та споживачем. У EHV-мережах через специфіку електромагнітних процесів вплив гармонік є незначним, тому їхні рівні не нормуються.

Дотримання встановлених нормативів гармонічних складових є критично важливим для забезпечення стабільної роботи електрообладнання та мінімізації додаткових втрат у мережі.

Приклад 2.4.1. Розрахувати миттєві струми в колі (рис. 2.4.3, а) при дії джерела несинусоїдної форми (рис. 2.4.3, б). ЕРС джерела являє собою періодичний П-подібний сигнал з амплітудою $E_m=120$ В та кутовою частотою першої гармоніки $\omega=1000$ рад/с.

Параметри елементів кола відомі: $R=30$ Ом, $L=10$ мГн, $C=10$ мкФ.

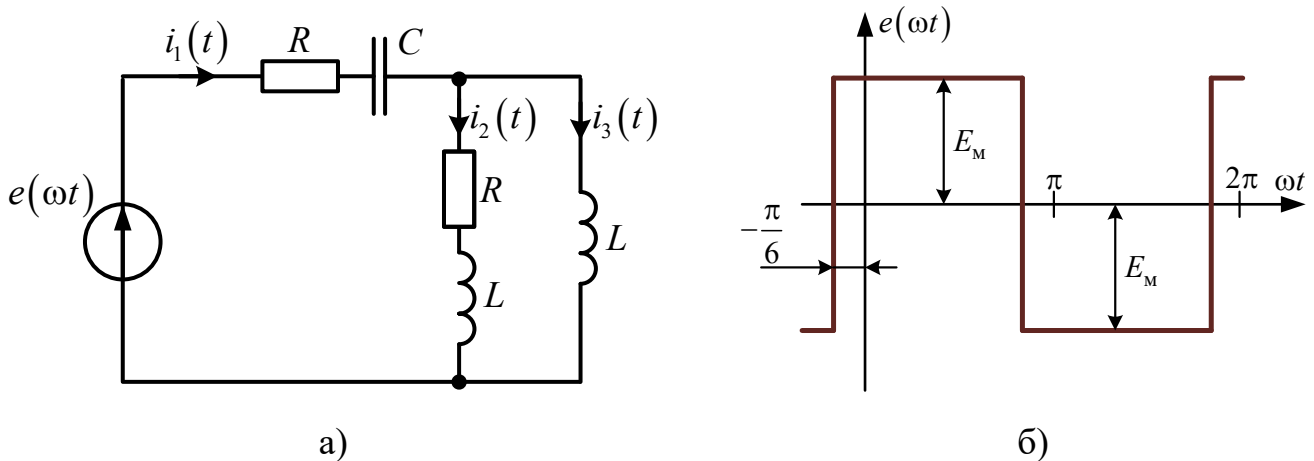


Рисунок 2.4.3 – Схема електричного кола (а) при дії джерела несинусоїдної ЕРС (б)

Розв'язання.

Початок відліку часу на графіку функції $e(\omega t)$, зображеної на рис. 2.4.3, зміщено відносно початку координат праворуч на кут $\beta=\pi/6$ у порівняння з графіком функції $e(\omega t)$, зображеної на рис. 2.2.5. Функція, зображена на рис. 2.2.5, симетрична відносно початку координат і осі абсцис, тому її ряд Фур'є має тільки непарні синусні складові:

$$e(\omega t) = \sum_{h=1,3,5\dots}^{\infty} E_{m(h)} \sin(h\omega t).$$

З урахуванням зміщення початку відліку часу для функції рис. 2.4.3 ряд Фур'є для неї прийме вигляд:

$$e(\omega t) = \sum_{h=1,3,5\dots}^{\infty} E_{m(h)} \sin\left(h\omega t + h\frac{\pi}{6}\right).$$

Амплітуди гармонічних складових ЕРС $E_{m(h)}$ розраховуються за виразом визначеним у прикладі 2.2.1:

$$E_{m(h)} = \frac{4E_M}{\pi h}, \quad h = 1, 3, 5 \dots$$

Отже, з урахуванням вказаного в умові значення $E_M = 120$ В ряд Фур'є для заданої ЕРС набуває вигляду:

$$e(\omega t) \cong 153 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 51 \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 30.6 \sin\left(5\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) + 21.9 \sin\left(7\omega t + \frac{7\pi}{6}\right) + \dots$$

Амплітуди складових ряду зі зростанням номеру гармоніки зменшуються. Для зручності демонстрації виконання аналізу кола пропонується обмежитись першими трьома гармонічними складовими:

$$e(\omega t) \approx e_{(1)} + e_{(3)} + e_{(5)}.$$

Кожна гармонічна складова ЕРС $(e_{(1)}, e_{(3)}, e_{(5)})$, викликає власний розподіл струмів та напруг. Для визначення результируючих законів зміни струмів у гілках кола виконуємо розрахунок їх гармонічних складових методом накладання вважаючи кожен гармоніку ЕРС окремим джерелом енергії, що з'єднані послідовно.

Повний комплексний опір заданого кола для h -ої гармоніки визначаємо за виразом:

$$\underline{Z}(h) = R + \frac{1}{jh\omega C} + \frac{jh\omega L(R + jh\omega L)}{R + j2h\omega L} = Z(h)e^{j\varphi_h}.$$

Розрахунок струмів кола від дії основної гармоніки ЕРС:

$$e_{(1)}(\omega t) \cong 153 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right), \quad E_{(1)} = \frac{153}{\sqrt{2}} \cong 108 \text{ В}, \quad \dot{E}_{(1)} = 108 e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{(1)} &= R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega L(R + j\omega L)}{R + j2\omega L} = \\
&= 30 + \frac{10^6}{j10^3 \cdot 10} + \frac{j10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}(30 + j10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3})}{30 + j \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = \\
&= 30 - j100 + \frac{j10(30 + j10)}{30 + j20} = 30 - j100 + \frac{j10 \cdot 31.6e^{j18.4^\circ}}{36.1e^{j33.7^\circ}} = \\
&= 30 - j100 + 8.75e^{j74.7^\circ} = 32.3 - j91.6 = 97.1e^{-j70.6^\circ} \quad \text{ОМ};
\end{aligned}$$

$$\dot{I}_{1(1)} = \frac{\dot{E}_{(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{108e^{j30^\circ}}{97.1e^{-j70.6^\circ}} = 1.11e^{j100.6^\circ} \quad \text{А},$$

$$\dot{I}_{2(1)} = \dot{I}_{1(1)} \frac{j\omega L}{R + j2\omega L} = 1.11e^{j100.6^\circ} \frac{10e^{j90^\circ}}{36.1e^{j33.7^\circ}} = 0.307e^{j157^\circ} \quad \text{А},$$

$$\dot{I}_{3(1)} = \dot{I}_{1(1)} \frac{R + j\omega L}{R + j2\omega L} = 1.11e^{j100.6^\circ} \frac{31.6e^{j18.4^\circ}}{36.1e^{j33.7^\circ}} = 0.972e^{j85.3^\circ} \quad \text{А}.$$

$$i_{1(1)} = 1.11\sqrt{2} \sin(\omega t + 100.6^\circ),$$

$$i_{2(1)} = 0.307\sqrt{2} \sin(\omega t + 157^\circ),$$

$$i_{3(1)} = 0.972\sqrt{2} \sin(\omega t + 85.3^\circ).$$

Розрахунок струмів кола від дії третьої гармоніки ЕРС:

$$e_{(3)}(\omega t) = 51 \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad E_{(3)} = \frac{51}{\sqrt{2}} = 36.1 \quad \text{В}, \quad \dot{E}_{(3)} = 36.1e^{j90^\circ} \quad \text{В};$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{-(3)} &= R + \frac{1}{j3\omega C} + \frac{j3\omega L(R + j3\omega L)}{R + j2 \cdot 3\omega L} = 30 - j33.3 + \frac{j30(30 + j30)}{30 + j60} = \\
&= 30 - j33.3 + \frac{j30 \cdot 42.4e^{j45^\circ}}{67.1e^{j63.4^\circ}} = 30 - j33.3 + 19e^{j71.6^\circ} = \\
&= 36 - j15.3 = 39.1e^{-j23^\circ} \quad \text{ОМ};
\end{aligned}$$

$$\dot{I}_{1(3)} = \frac{\dot{E}_{(3)}}{Z_{-(3)}} = \frac{36e^{j90^\circ}}{39.1e^{-j23^\circ}} = 0.923e^{j113^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{2(3)} = \dot{I}_{1(3)} \frac{j3\omega L}{R + j2 \cdot 3\omega L} = 0.923e^{j113^\circ} \frac{30e^{j90^\circ}}{67.1e^{j63.4^\circ}} = 0.413e^{j139.6^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{3(3)} = \dot{I}_{1(3)} \frac{R + j3\omega L}{R + j2 \cdot 3\omega L} = 0.923e^{j113^\circ} \frac{42.4e^{j45^\circ}}{67.1e^{j63.4^\circ}} = 0.583e^{j94.6^\circ} \text{ A}.$$

$$i_{1(3)} = 0.923\sqrt{2} \sin(3\omega t + 113^\circ) \text{ A},$$

$$i_{2(3)} = 0.413\sqrt{2} \sin(3\omega t + 139.6^\circ) \text{ A},$$

$$i_{3(3)} = 0.583\sqrt{2} \sin(3\omega t + 94.6^\circ) \text{ A}.$$

Розрахунок струмів кола від дії п'ятої гармоніки ЕРС:

$$e_{(5)}(\omega t) = 30.6 \sin(5\omega t + 150^\circ), \quad E_{(5)} = \frac{30.6}{\sqrt{2}} = 21.6 \text{ В}, \quad \dot{E}_{(5)} = 21.6e^{j150^\circ} \text{ В};$$

$$\begin{aligned} Z_{(5)} &= R + \frac{1}{j5\omega C} + \frac{j5\omega L(R + j5\omega L)}{R + j2 \cdot 5\omega L} = \\ &= 30 - j20 + \frac{j50(30 + j50)}{30 + j100} = 30 - j20 + \frac{j50 \cdot 58.3e^{j59^\circ}}{104.4e^{j73.3^\circ}} = \\ &= 30 - j20 + 27.9e^{j75.7^\circ} = 36.9 + j7 = 37.6e^{j10.7^\circ} \text{ Ом}, \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{1(5)} = \frac{\dot{E}_{(5)}}{Z_{(5)}} = \frac{21.6e^{j150^\circ}}{37.6e^{j10.7^\circ}} = 0.574e^{j139.3^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{2(5)} = \dot{I}_{1(5)} \frac{j5\omega L}{R + j2 \cdot 5\omega L} = 0.574e^{j139.3^\circ} \frac{50e^{j90^\circ}}{104.4e^{j73.3^\circ}} = 0.275e^{j156^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{3(5)} = \dot{I}_{1(5)} \frac{R + j5\omega L}{R + j2 \cdot 5\omega L} = 0.574e^{j139.3^\circ} \frac{58.3e^{j59^\circ}}{104.4e^{j73.3^\circ}} = 0.320e^{j125^\circ} \text{ A}.$$

$$i_{1(5)} = 0.574\sqrt{2} \sin(5\omega t + 139.3^\circ) \text{ А},$$

$$i_{2(5)} = 0.275\sqrt{2} \sin(5\omega t + 156^\circ) \text{ А},$$

$$i_{3(5)} = 0.320\sqrt{2} \sin(5\omega t + 125^\circ) \text{ А}.$$

Вирази миттєвих значень результуючих струмів гілок заданого кола:

$$i_1 = 1.11\sqrt{2} \sin(\omega t + 100.6^\circ) + 0.923\sqrt{2} \sin(3\omega t + 113^\circ) + 0.574\sqrt{2} \sin(5\omega t + 139.3^\circ) \text{ А},$$

$$i_2 = 0.307\sqrt{2} \sin(\omega t + 157^\circ) + 0.413\sqrt{2} \sin(3\omega t + 139.6^\circ) + 0.275\sqrt{2} \sin(5\omega t + 156^\circ) \text{ А},$$

$$i_3 = 0.972\sqrt{2} \sin(\omega t + 85.3^\circ) + 0.583\sqrt{2} \sin(3\omega t + 94.6^\circ) + 0.320\sqrt{2} \sin(5\omega t + 125^\circ) \text{ А}.$$

2.4.2. Діючі і середні значення періодичних несинусоїдних струмів і напруг

Середньоквадратичне (англ. **RMS**) значення несинусоїдної величини з високою точністю оцінюється за виразом:

$$F_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt},$$

де $F_{(h)}$ – середньоквадратичне (діюче) значення окремої гармонічної складової напруги або струму.

Якщо періодична несинусоїдна функція струму (напруги) подана у вигляді тригонометричного ряду

$$f(t) = \sum_{h=1}^{\infty} f_{(h)}(t) = \sum_{h=1}^{\infty} F_{m(h)} \sin(h\omega t + \psi_{(h)}),$$

діюче (середньоквадратичне) значення цієї функції можна наближено обчислити за діючими значеннями її складових:

$$F_{RMS} = \sqrt{F_{(0)}^2 + \left(\frac{F_{m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{F_{m(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{F_{m(h)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} F_{(h)}^2}.$$

Середнє за період значення струму (напруги) можна обчислити, скориставшись відомою математичною формулою:

$$F_{сер} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt.$$

Приймаючи до уваги, що функції симетричні відносно осі абсцис не містять нульової гармонічної складової ($F_{(0)} = 0$), для таких функцій визначається середнє за модулем значення:

$$F_{сер} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt.$$

Приклад 2.4.2. Визначити діючі і середні за модулем значення ЕРС джерела та струмів, розрахованих у прикладі 2.4.1.

Розв’язання.

Середньоквадратичне (діюче) значення ЕРС:

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \left[\int_{-T/12}^{5T/12} E_M^2 dt + \int_{5T/12}^{11T/12} (-E_M)^2 dt \right]} = E_M = 120 \text{ В.}$$

Середньоквадратичне (діюче) значення ЕРС через діючі значення складових тригонометричного ряду:

$$E_{RMS} \cong \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(3)}^2 + E_{(5)}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{153^2 + 51^2 + 30.6^2} = 116 \text{ В.}$$

Останній результат дещо менший, ніж попередній ($116 < 120$) через обмеженість врахування тільки трьох гармонічних складових нескінченного тригонометричного ряду.

Середнє за модулем значення ЕРС дорівнює:

$$E_{сер} = \frac{2}{T} \int_{-T/12}^{5T/12} E_M dt = E_M = 120 \text{ В.}$$

Діючі значення струмів I_1 , I_2 , I_3 у колі (рис. 2.3.3, а) визначаються на базі розрахованих у прикладі 2.3.1 комплексних величин гармонічних складових цих струмів:

$$I_1 = \sqrt{I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2 + I_{1(5)}^2} = \sqrt{1.11^2 + 0.923^2 + 0.574^2} = 1.55 \text{ А},$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(1)}^2 + I_{2(3)}^2 + I_{2(5)}^2} = \sqrt{0.307^2 + 0.413^2 + 0.275^2} = 0.583 \text{ А},$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(1)}^2 + I_{3(3)}^2 + I_{3(5)}^2} = \sqrt{0.972^2 + 0.583^2 + 0.320^2} = 1.18 \text{ А}.$$

2.4.3. Проблеми оцінки величин потужності в електричних колах з періодичними несинусоїдними напругами та струмами

Миттєва потужність у загальному випадку аналізу кіл змінного періодичного струму описується виразом [10] незалежно від форми сигналів миттєвих напруги та струму:

$$p(t) = u(t)i(t).$$

Цей вираз лежить в основі визначення активної потужності:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

В однофазних та трифазних системах синусоїдного струму повна потужність розкладається на векторну суму активної потужності, яка переносить «чисту» енергію від джерела до навантаження, та реактивної потужності, що становить залишок:

- зв'язок потужностей для однофазних кіл синусоїдного струму

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

- зв'язок потужностей для трифазних кіл синусоїдного струму [7]

$$S_V = \sqrt{\left(\sum_m P_m\right)^2 + \left(\sum_m Q_m\right)^2} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

де $P_m = U_m I_m \cos(\varphi_m)$ та $Q_m = U_m I_m \sin(\varphi_m)$ – активна та реактивна потужності кожної з фаз ($m = A, B, C$) відповідно;

U_m та I_m – діючі значення кожної з фаз ($m = A, B, C$) відповідно;

φ_m – кут зсуву фаз між відповідними фазними напругою та струмом.

Оцінка повної, активної та реактивної потужностей в однофазних колах несинусоїдного струму.

Для випадків несинусоїдного режиму роботи однофазних кіл розрахунок активної та реактивної потужностей реалізується за виразами, де струми та напруги являють собою спектри гармонічних складових:

- активна потужність

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = U_{(0)} I_{(0)} + \sum_{h=1}^{\infty} U_{(h)} I_{(h)} \cos \varphi_{(h)} = P_{(0)} + \sum_{h=1}^{\infty} P_{(h)}.$$

- реактивна потужність

$$Q = \sum_{h=1}^{\infty} U_{(h)} I_{(h)} \sin \varphi_{(h)} = \sum_{h=1}^{\infty} Q_{(h)},$$

де $\varphi_h = \psi_{u_h} - \psi_{i_h}$ – кут зсуву фаз між напругою і струмом h -ої гармоніки.

Повна потужність за умови несинусоїдності обчислюється як добуток діючих значень несинусоїдних напруги та струму:

$$S = UI,$$

де $U = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} U_{(h)}^2}$, $I = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} I_{(h)}^2}$ – середньоквадратичні (діючі) значення напруги та струму.

При цьому величина повної потужності не є векторною сумою її активної та реактивної складових:

$$S^2 > P^2 + Q^2$$

На ділянках, де криві струму і напруги відрізняються формою, з'являється так звана **потужність спотворення**:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}.$$

Кількісну оцінку частки активної потужності необхідної для нормальної роботи навантаження від повної потужності джерела живлення дозволяє встановити **коефіцієнт потужності** λ [6, 10] (англ. **Power Factor, PF** [7, 11]). За умови відсутності спотворень у кривих напруги та струму в однофазних лінійних колах коефіцієнт потужності рівний косинусу кута зсуву фаз ($\lambda = \cos \varphi$, де $\varphi = \psi_u - \psi_i$). В однофазних колах з періодичними несинусоїдними сигналами коефіцієнт потужності розраховується за виразом:

$$\lambda = PF = \frac{P}{UI} = \frac{\sum_{h=0}^{\infty} P_{(h)}}{\sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} U_{(h)}^2} \cdot \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} I_{(h)}^2}}.$$

Оцінка повної, активної та реактивної потужностей в збалансованих трифазних колах несинусоїдного струму.

Серед аргументів щодо найбільш прийнятного способу визначення повної потужності за наявності несинусоїдності та гармонійних спотворень в збалансованій трифазній системі, оцінка повна потужність як векторної величини (S_V) є одним із найстаріших і найпоширеніших підходів [7, 11]. Для трифазних систем векторна повна потужність може бути виражена як векторна сума повної активної, повної реактивної та повної потужності спотворень. Кожна із цих компонентів потужності розраховуються як сума відповідних значень для кожної фази ($m=A, B, C$) за умов несинусоїдальної або гармонійно спотвореної системи. Такий підхід дозволяє врахувати вплив гармонічних складових на загальні показники повної потужності у трифазних системах.

$$S_V = \sqrt{\left(\sum_{m=A,B,C} P_m\right)^2 + \left(\sum_{m=A,B,C} Q_m\right)^2 + \left(\sum_{m=A,B,C} D_m\right)^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2},$$

де $P_m = \sum_{h=1}^{\infty} U_{m(h)} I_{m(h)} \cos(\varphi_{m(h)})$ – активна потужність, розраховується для кожної

фази окремо з урахуванням несинусоїдності напруги та струму мережі;

$Q_m = \sum_{h=1}^{\infty} U_{m(h)} I_{m(h)} \sin(\varphi_{m(h)})$ – реактивна потужність, розраховується для кожної

фази окремо з урахуванням несинусоїдності напруги та струму мережі;

$S_m = \sqrt{\sum_h (U_{m(h)})^2} \sqrt{\sum_h (I_{m(h)})^2}$ – повна потужність кожної з фаз визначається

через добуток діючих значень несинусоїдних напруги та струму для кожної фази;

$D_m = \sqrt{S_m^2 - P_m^2 - Q_m^2}$ – потужність спотворення.

Оцінка повної потужності в небалансованій трифазній системі за наявності несинусоїдності описана в роботах [12-14], які є одними із ключових із цього питання та були покладені в основу стандарту [7].

Приклад 2.4.3. Визначити активну, реактивну, повну і потужність спотворення джерела ЕРС у колі (рис. 2.4.3, а; приклад 2.4.1). Скласти баланс активних потужностей.

Миттєві значення ЕРС і струму джерела, згідно прикладу 2.4.1, описуються виразами:

$$e(\omega t) = 108\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) + 36.1\sqrt{2} \sin(3\omega t + 90^\circ) + 21.6\sqrt{2} \sin(5\omega t + 150^\circ) \text{ В},$$

$$i_1(\omega t) = 1.11\sqrt{2} \sin(\omega t + 100.6^\circ) + 0.923\sqrt{2} \sin(3\omega t + 113^\circ) + 0.574\sqrt{2} \sin(5\omega t + 139.3^\circ) \text{ А}.$$

Для розрахунку активної та реактивної потужностей обчислюємо кути зсуву фаз між гармонічними складовими ЕРС джерела і складовими струму через джерело ЕРС, відповідно для 1-ої, 3-ої та 5-ої гармонік:

$$\varphi_{(1)} = \psi_{e(1)} - \psi_{i_1(1)} = 30^\circ - 100.6^\circ = -70.6^\circ,$$

$$\varphi_{(3)} = \psi_{e(3)} - \psi_{i_1(3)} = 90^\circ - 113^\circ = -23^\circ,$$

$$\varphi_{(5)} = \psi_{e(5)} - \psi_{i_1(5)} = 150^\circ - 139.3^\circ = 10.7^\circ.$$

З урахуванням діючих значень гармонічних складових ЕРС і складових струму 1-ої гілки та кутів зсуву фаз між ними визначаємо потужності джерела енергії:

- активну потужність

$$\begin{aligned}P_{\text{дж}} &= E_{(1)}I_{(1)} \cos \varphi_{(1)} + E_{(3)}I_{(3)} \cos \varphi_{(3)} + E_{(5)}I_{(5)} \cos \varphi_{(5)} = \\&= 108 \cdot 1.11 \cos(-70.6^\circ) + 36.1 \cdot 0.923 \cos(-23^\circ) + 21.6 \cdot 0.574 \cos 10.7^\circ = \\&= 39.8 + 30.6 + 12.2 = 82.6 \text{ Вт};\end{aligned}$$

- реактивну потужність

$$\begin{aligned}Q_{\text{дж}} &= E_{(1)}I_{(1)} \sin \varphi_{(1)} + E_{(3)}I_{(3)} \sin \varphi_{(3)} + E_{(5)}I_{(5)} \sin \varphi_{(5)} = \\&= 108 \cdot 1.11 \sin(-70.6^\circ) + 36.1 \cdot 0.923 \sin(-23^\circ) + 21.6 \cdot 0.574 \sin 10.7^\circ = \\&= -113.1 - 13.0 + 2.3 = -123.8 \text{ ВАр};\end{aligned}$$

- повну потужність

$$S_{\text{дж}} = E \cdot I_1 = 116 \cdot 1.55 = 179.8 \text{ ВА};$$

- потужність спотворення

$$D_{\text{дж}} = \sqrt{S_{\text{дж}}^2 - P_{\text{дж}}^2 - Q_{\text{дж}}^2} = \sqrt{(179.8)^2 - (82.6)^2 - (-123.8)^2} \cong 100.9 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Активна потужність, яка надходить у гілки кола рис. 2.4.3:

$$P_{\text{сп}} = RI_1^2 + RI_2^2 = 30 \cdot 1.55^2 + 30 \cdot 0.583^2 \cong 82.3 \text{ Вт}.$$

Баланс активних потужностей кола виконується : $P_{\text{дж}} \cong P_{\text{сп}}$.

2.4.4. Резонанс в електричному колі з несинусоїдними струмами та напругами

Електричне коло синусоїдного струму або його частина перебуває в стані резонансу, якщо на певній його ділянці напруга та струм збігаються за фазою.

В колах несинусоїдного струму виникнення резонансного стану кола можливе на частоті будь-якої із гармонічних складових джерела енергії. Тобто, резонанс у колі несинусоїдного струму досягається на частоті h -ї гармонічної складової джерела живлення при виконанні тих самих умов, які справедливі для кіл синусоїдного струму, якщо реактивний опір ділянки кола, у разі послідовного з'єднання елементів, чи його вхідна реактивна провідність, у випадку паралельного з'єднання, приймаються нульове значення:

умова послідовного резонансу	умова паралельного резонансу
$h\omega L = \frac{1}{h\omega C} \text{ або } X_{L(h)} = X_{C(h)}$	$B_{1(h)} = B_{2(h)}$

Якщо електричне коло несинусоїдного струму містить декілька різнохарактерних реактивних елементів, то в такому колі можуть одночасно існувати резонанс напруг та резонанс струмів на різних частотах гармонічного спектру сигналу від джерела живлення.

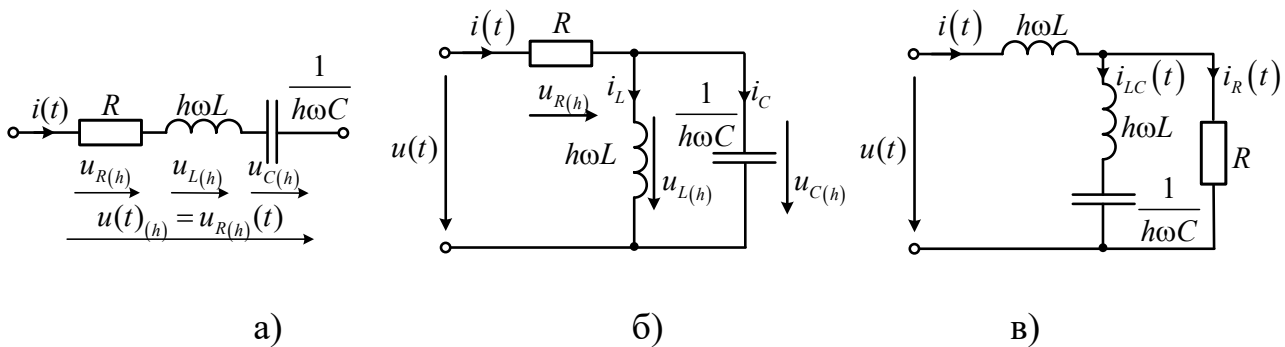


Рисунок 2.4.4 – Схеми електричних кіл в яких можливий резонансний стан

Нехай у колі (рис. 2.4.4, а) параметри реактивних елементів підібрані так, що виконується умова $h\omega L = \frac{1}{h\omega C}$. За цих умов у колі реалізується резонанс напруг на частоті h -ї гармоніки. Якщо активний опір R вважати навантаженням кола, а ділянку з послідовним з'єднанням індуктивного та ємнісного опорів – фільтром, величина напруги h -ї гармоніки буде відповідати величині гармонічної складової джерела напруги. Струмам усіх інших гармонік фільтр чинитиме опір, і цей опір тим більший, чим більше відрізняється частота гармоніки від резонансної. Резонансний фільтр такого типу доцільно використовувати для забезпечення на навантаженні найвищого рівня однієї з гармонік.

Якщо стоїть завдання не пропускати до споживача якусь конкретну гармоніку, використовують запірний фільтр, побудований на явищі резонансу струмів. Ідеалізовану схему такого фільтра наведено на рис. 2.4.4, б. За умови рівності провідностей гілок $\left(h\omega C = \frac{1}{h\omega L} \right)$ ділянка з паралельним з'єднанням індуктивного та ємнісного елементів для струму h -ї гармоніки буде характеризуватись великим опором, що забезпечує відсутність струму через навантаження.

Завдання, не пропускати до споживача конкретну гармоніку, можна вирішити і за допомогою фільтра, побудованого на резонансі напруг. У такому випадку фільтр вмикають до споживача паралельно (рис. 2.4.4, в). Паралельне підмикання до споживача декількох гілок в яких реалізується резонанс напруг на різних гармонічних частотах дозволяє забезпечити неможливість потрапляння конкретних гармонік струму, створених джерелом.

Схемотехнічні рішення щодо пригнічення та/або підсилення конкретних гармонічних складових струму навантаження обираються індивідуально для визначеного навантаження. Як приклад пропонується розглянути випадок живлення кола (рис. 2.4.5) від джерела несинусоїдної напруги, що містить k , p та q гармонічні складові:

$$u(t) = U_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{(k)}) + U_{m(p)} \sin(p\omega t + \psi_{(p)}) + U_{m(q)} \sin(q\omega t + \psi_{(q)}).$$

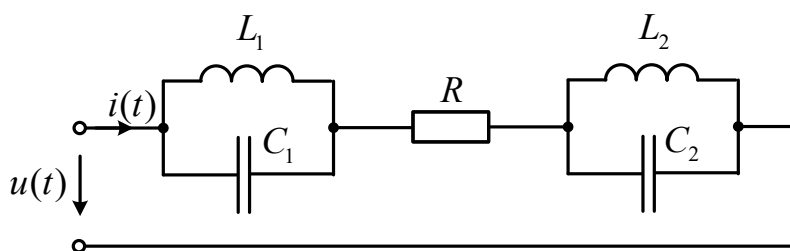


Рисунок 2.4.5 – Схема електричного кола для фільтрації гармонічного спектру струму навантаження R

Враховуючи, що при зміні частоти резонансні явища в колі чергуються припускається, що виконується співвідношення між частотами гармонічних складових $k\omega < p\omega < q\omega$. Якщо параметри елементів кола підібрати так, щоб у контурах $L_1 - C_1$ на частоті k -ї гармоніки та $L_2 - C_2$ на частоті q -ї гармоніки виконувались умови резонансу струмів, а у всьому колі на частоті p -ї гармоніки мав місце резонанс напруг, то у навантаженні з опором R k -та та q -та гармонічні складові струму будуть пригнічуватись, а p -та гармоніка – виділятись.

Приклад 2.4.4. Для заданого на рис. 2.4.6 з відомими параметрами елементів та гармонічного спектру вхідної напруги:

$$u(t) = 50 + 120\sqrt{2} \sin 100t + 20\sqrt{2} \sin 300t \text{ В,}$$

$$R = 10 \text{ Ом, } L_1 = 0.15 \text{ Гн, } L_3 = 0.35 \text{ Гн}$$

визначити показ вольтметра електромагнітної системи та активну потужність кола P , якщо на частоті $\omega = 100$ рад/с у колі має місце резонанс струмів, а на частоті $3\omega = 300$ рад/с у гілці $L_1 - C_1$ – резонанс напруг.

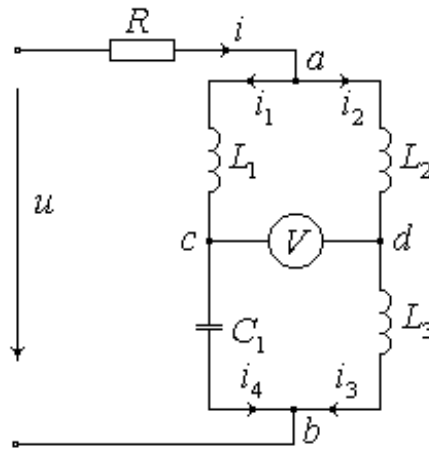


Рисунок 2.4.6 – Схема електричного кола до прикладу 2.4.4

Розв’язання.

1. Конденсатор з невідомою величиною ємності C_1 розміщений у гілці для якої виконується умова резонансу напруг на частоті $3\omega = 300$ рад/с. Розраховуємо величину невідомої ємності з рівності опорів послідовного з’єднання L_1 та C_1 :

$$3\omega L_1 = \frac{1}{3\omega C_1}; \quad C_1 = \frac{1}{9\omega^2 L_1};$$

$$C_1 = \frac{1}{9 \cdot 10^4 \cdot 0.15} = 74.074 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

2. На частоті $\omega = 100$ рад/с коло перебуває у стані резонансу струмів, для якого справедлива рівність провідностей гілок $L_1 - C_1$ та $L_2 - L_3$. З умови резонансу струмів визначаємо невідому величину L_2 :

$$\frac{1}{\omega(L_2 + L_3)} = \frac{1}{\frac{1}{\omega C_1} - \omega L_1};$$

$$\frac{1}{100(L_2 + 0.35)} = \frac{1}{135 - 15};$$

$$100(L_2 + 0.35) = 120; \quad L_2 = 0.85 \text{ Гн.}$$

3. Розрахунок струмів виконуємо окремо для кожної складової вхідної напруги.

3.1. Діє постійна складова $U_{(0)} = 50$ В.

За нульової частоти опори ідеалізованих індуктивних елементів рівні нулю, а ємнісних – нескінченно великі. Згідно заданої схеми з'єднання елементів повний опір ділянки з послідовним з'єднанням L_2-L_3 рівний нулю, який, як наслідок, формує замикання для ділянки між точками a та b .

$$I_{(0)} = I_{2(0)} = I_{3(0)} = \frac{U_{(0)}}{R} = 5 \text{ А};$$

$$I_{1(0)} = I_{4(0)} = 0;$$

$$P_{(0)} = I_{(0)}^2 R = 250 \text{ Вт};$$

Показ вольметра рівний нулю ($U_{cd(0)} = 0$) через нульові величини падінь напруг на реактивних елементах ділянки c і d .

3.2. Діє перша гармонічна складова з частотою $\omega = 100$ рад/с:

$$u_{(1)}(t) = 120\sqrt{2} \sin 100t \text{ В}; \dot{U}_{(1)} = 120 \text{ В}.$$

На частоті основної гармоніки ω має місце резонанс у паралельному з'єднанні гілок L_1-C_1 і L_2-L_3 . Оскільки паралельне з'єднання містить виключно реактивні елементи, то його повний опір рівний нескінченності, тобто $Z_{ab(1)} = \infty$. Отже, перші гармоніки вхідного струму та напруги на резисторі R нульові: $I_{(1)} = 0$; $U_{R(1)} = RI_{(1)} = 0$.

Таким чином, 1-га гармоніка вхідної напруги $u_{(1)}(t)$ буде діяти безпосередньо на затискачах $a-b$:

$$u_{ab(1)} = u_{(1)} = 120\sqrt{2} \sin 100t \text{ В}.$$

Виконуємо розрахунок повних опорів ділянок кола:

$$\underline{Z}_{acb(1)} = j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1} = j15 - j135 = -j120 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{adb(1)} = j\omega L_2 + j\omega L_3 = j85 + j35 = j120 \text{ Ом}.$$

Комплекси діючих величин та миттєві значення 1-х гармонік струмів паралельних гілок:

$$\dot{I}_{1(1)} = \dot{I}_{4(1)} = \frac{\dot{U}_{ab(1)}}{\underline{Z}_{acb(1)}} = \frac{120}{-j120} = j \cdot 1 \text{ А}, \quad i_{1(1)}(t) = 1\sqrt{2} \sin(100t + 90^\circ) \text{ А};$$

$$\dot{I}_{2(1)} = \dot{I}_{3(1)} = \frac{\dot{U}_{ab(1)}}{\underline{Z}_{adb(1)}} = \frac{120}{j120} = -j \cdot 1 \text{ А}, \quad i_{2(1)}(t) = 1\sqrt{2} \sin(100t - 90^\circ) \text{ А}.$$

Комплексна напруга $\dot{U}_{cd(1)}$ на частоті ω дорівнює:

$$\dot{U}_{cd(1)} = \dot{I}_{2(1)} \cdot j\omega L_2 - \dot{I}_{1(1)} \cdot j\omega L_1 = -j \cdot 1 \cdot j \cdot 85 - j \cdot 1 \cdot j \cdot 15 = 85 + 15 = 100 \text{ В}.$$

Активна потужність кола:

$$P_{(1)} = I_{(1)}^2 \cdot R = 0.$$

3.3. Діє третя гармонічна складова з частотою $3\omega = 300$ рад/с:

$$u_{(3)}(t) = 20\sqrt{2} \sin 300t \text{ В}; \quad \dot{U}_{(3)} = 20 \text{ В}.$$

Оскільки на частоті 3ω у гілці L_1-C_1 резонанс напруг, то повний опір гілки з послідовним з'єднанням L_1-C_1 нульовий ($Z_{acb(3)} = 0$). Тоді повний опір паралельного з'єднання також дорівнює нулю:

$$\underline{Z}_{ab(3)} = \frac{\underline{Z}_{acb(3)} \cdot \underline{Z}_{adb(3)}}{\underline{Z}_{acb(3)} + \underline{Z}_{adb(3)}} = 0.$$

Еквівалентний повний опір кола для третьої гармоніки:

$$\underline{Z}_{e(3)} = R + \underline{Z}_{ab(3)} = R = 10 \text{ Ом}.$$

При дії третьої гармонічної складової напруги вхідний струм замикається через активний опір та ділянку L_1-C_1 :

$$\dot{I}_{(3)} = \dot{I}_{1(3)} = \dot{I}_{4(3)} = \frac{\dot{U}_{(3)}}{\underline{Z}_{e(3)}} = \frac{20}{10} = 2 \text{ А}, \quad i_{(3)}(t) = i_{1(3)}(t) = i_{4(3)}(t) = 2\sqrt{2} \sin 300t \text{ А};$$

$$\dot{I}_{2(3)} = \dot{I}_{3(3)} = \frac{\dot{U}_{ab(3)}}{\underline{Z}_{adb(3)}} = \frac{\dot{I}_{(3)} \underline{Z}_{ab(3)}}{\underline{Z}_{adb(3)}} = \frac{0}{3(j85 + j35)} = 0 \text{ А}, \quad i_{2(3)}(t) = i_{3(3)}(t) = 0 \text{ А}.$$

Складова напруги вольтметра для частоти 3ω визначається як:

$$U_{cd(3)} = U_{ca(3)} = I_{l(3)} \cdot 3\omega L_1 = 2 \cdot 300 \cdot 0.15 = 90 \text{ В.}$$

Активна потужність кола на частоті 3ω :

$$P_{(3)} = I_{(3)}^2 R = 2^2 \cdot 10 = 40 \text{ Вт.}$$

4. Активна потужність кола при дії несинусоїдного сигналу вхідної напруги:

$$P = P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(3)} = 0 + 250 + 40 = 290 \text{ Вт.}$$

Показ вольтметра електромагнітної системи знаходимо як діюче значеннями гармонічних складових напруги між точками c і d :

$$U_V = \sqrt{U_{cd(0)}^2 + U_{cd(1)}^2 + U_{cd(3)}^2} = \sqrt{100^2 + 90^2} \cong 134.54 \text{ В.}$$

2.4.5. Особливості поведінки гармонічних складових в трифазних колах

Аналіз трифазних кіл несинусоїдного струму у більшості теоретичних випадків реалізується за припущення, що трифазне джерело живлення генерує симетричну систему несинусоїдних напруг. Таке припущення вказує, що криві фазних напруг симетричного генератора містять однаковий гармонічний спектр: як правило, однакові за формою, не містять постійної складової і зсунуті у часі на третину періоду $\left(\frac{T}{3} = \frac{2\pi}{3}\right)$, де T – період кривої основної гармоніки фазної напруги. Оскільки період h -ї гармоніки в h разів менший за період першої гармоніки, то вищі гармонічні складові фазних напруг зсунуті на кут $h \frac{T}{3} = h \frac{2\pi}{3} = h \cdot 120^\circ$. Загальний вигляд системи симетричних несинусоїдних фазних напруг генератора має вигляд:

$$u_A(t) = \sum_{h=1}^{\infty} U_{m(h)} \sin(h\omega t + \psi_{(h)});$$

$$u_B(t) = \sum_{h=1}^{\infty} U_{m(h)} \sin(h\omega t - h \cdot 120^\circ + \psi_{(h)});$$

$$u_C(t) = \sum_{h=1}^{\infty} U_{m(h)} \sin(h\omega t + h \cdot 120^\circ + \psi_{(h)}).$$

Аналізуючи отриману систему відносно можливих спектрів гармонічних складових в системі фазних напруг та ввівши множник $k = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$, як будь-яке число натурального ряду, приходимо до висновків:

- гармоніки порядків $h = 3k - 2 = 1, 4, 7, 10, 13 \dots$, утворюють симетричні трифазні системи прямої послідовності, оскільки $h \cdot 120^\circ = (3k - 2) \cdot 120^\circ = 120^\circ$:

$$\begin{aligned} u_{A(3k-2)} &= U_{m(3k-2)} \sin((3k-2)\omega t + \psi_{(3k-2)}); \\ u_{B(3k-2)} &= U_{m(3k-2)} \sin((3k-2)\omega t - 120^\circ + \psi_{(3k-2)}); \\ u_{C(3k-2)} &= U_{m(3k-2)} \sin((3k-2)\omega t + 120^\circ + \psi_{(3k-2)}); \\ u_{A(3k-2)} + u_{B(3k-2)} + u_{C(3k-2)} &= 0 \end{aligned}$$

- гармоніки порядків $h = 3k - 1 = 2, 5, 8, 11, 14 \dots$, утворюють симетричні трифазні системи зворотної послідовності, оскільки $h \cdot 120^\circ = (3k - 1) \cdot 120^\circ = 240^\circ = -120^\circ$:

$$\begin{aligned} u_{A(3k-1)} &= U_{m(3k-1)} \sin((3k-1)\omega t + \psi_{(3k-1)}); \\ u_{B(3k-1)} &= U_{m(3k-1)} \sin((3k-1)\omega t + 120^\circ + \psi_{(3k-1)}); \\ u_{C(3k-1)} &= U_{m(3k-1)} \sin((3k-1)\omega t - 120^\circ + \psi_{(3k-1)}); \\ u_{A(3k-1)} + u_{B(3k-1)} + u_{C(3k-1)} &= 0 \end{aligned}$$

- гармоніки порядків $h = 3k = 3, 6, 9, 12 \dots$, утворюють симетричні трифазні системи нульової послідовності, оскільки $h \cdot 120^\circ = (3k) \cdot 120^\circ = 360^\circ$:

$$\begin{aligned} u_{A(3k)} &= U_{m(3k)} \sin(3k\omega t + \psi_{(3k)}); \\ u_{B(3k)} &= U_{m(3k)} \sin(3k\omega t + \psi_{(3k)}); \\ u_{C(3k)} &= U_{m(3k)} \sin(3k\omega t + \psi_{(3k)}). \end{aligned} \quad u_{A(3k)} + u_{B(3k)} + u_{C(3k)} = 3u_{A(3k)}$$

- симетрична система лінійних несинусоїдних напруг не містить гармонічних складових кратних трьом:

$$\begin{aligned}
 u_{AB}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (u_{A(3k-2)} - u_{B(3k-2)}) + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{A(3k-1)} - u_{B(3k-1)}) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (u_{A(3k)} - u_{B(3k)})}_0; \\
 u_{BC}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (u_{B(3k-2)} - u_{C(3k-2)}) + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{B(3k-1)} - u_{C(3k-1)}) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (u_{B(3k)} - u_{C(3k)})}_0; \\
 u_{CA}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (u_{C(3k-2)} - u_{A(3k-2)}) + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{C(3k-1)} - u_{A(3k-1)}) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (u_{C(3k)} - u_{A(3k)})}_0.
 \end{aligned}$$

Алгебраїчна сума миттєвих несинусоїдних фазних напруг, у гармонічний спектр яких входять гармоніки кратні трьом, рівна потроєній третій гармонічній складовій:

$$u_A(t) + u_B(t) + u_C(t) = u_{A(3k)} + u_{B(3k)} + u_{C(3k)} = 3U_{m(3k)} \sin(3k\omega t + \psi_{(3k)}).$$

Якщо припустити, що фазні напруги містять всі гармонічні складові ($h=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots$), то гармонічний ряд лінійних напруг буде включати всі гармоніки окрім гармонік кратних трьом ($h=1, 2, 4, 5, 7 \dots$).

Аналогічно формуються системи симетричних фазних та лінійних несинусоїдних струмів:

- прямої послідовності

$$\begin{aligned}
 i_{A(3k-2)} &= I_{m(3k-2)} \sin((3k-2)\omega t + \psi_{(3k-2)}); \\
 i_{B(3k-2)} &= I_{m(3k-2)} \sin((3k-2)\omega t - 120^\circ + \psi_{(3k-2)}); \\
 i_{C(3k-2)} &= I_{m(3k-2)} \sin((3k-2)\omega t + 120^\circ + \psi_{(3k-2)}); \\
 i_{A(3k-2)} + i_{B(3k-2)} + i_{C(3k-2)} &= 0
 \end{aligned}$$

- зворотної послідовності

$$\begin{aligned}
i_{A(3k-1)} &= I_{m(3k-1)} \sin\left((3k-1)\omega t + \psi_{(3k-1)}\right); \\
i_{B(3k-1)} &= I_{m(3k-1)} \sin\left((3k-1)\omega t + 120^\circ + \psi_{(3k-1)}\right); \\
i_{C(3k-1)} &= I_{m(3k-1)} \sin\left((3k-1)\omega t - 120^\circ + \psi_{(3k-1)}\right); \\
i_{A(3k-1)} + i_{B(3k-1)} + i_{C(3k-1)} &= 0
\end{aligned}$$

- нульової послідовності

$$\begin{aligned}
i_{A(3k)} &= I_{m(3k)} \sin\left(3k\omega t + \psi_{(3k)}\right); \\
i_{B(3k)} &= I_{m(3k)} \sin\left(3k\omega t + \psi_{(3k)}\right); & u_{A(3k)} + u_{B(3k)} + u_{C(3k)} &= 3u_{A(3k)} \\
i_{C(3k)} &= I_{m(3k)} \sin\left(3k\omega t + \psi_{(3k)}\right).
\end{aligned}$$

Алгебраїчна сума миттєвих несинусоїдних фазних струмів, у гармонічний спектр яких входять гармоніки кратні трьом, рівна потроєній третій гармонічній складовій:

$$i_A(t) + i_B(t) + i_C(t) = i_{A(3k)} + i_{B(3k)} + i_{C(3k)} = 3I_{m(3k)} \sin\left(3k\omega t + \psi_{(3k)}\right).$$

З'єднання трифазного генератора трикутником.

За припущення симетрії відносно осі абсцис фазних ЕРС трифазного джерела з'єданого в трикутник, їх гармонічний спектр не містить нульової гармоніки та гармонік кратних двом. Гармонічні складові кратні трьом фазних ЕРС викликають внутрішній струм джерела в режимі неробочого ходу (рис. 2.4.7). Інші гармонічні складові струму рівні нулю, оскільки сумарна фазна ЕРС гармонік, які формують системи прямої та зворотної послідовностей у контурі трикутника, дорівнює нулю.

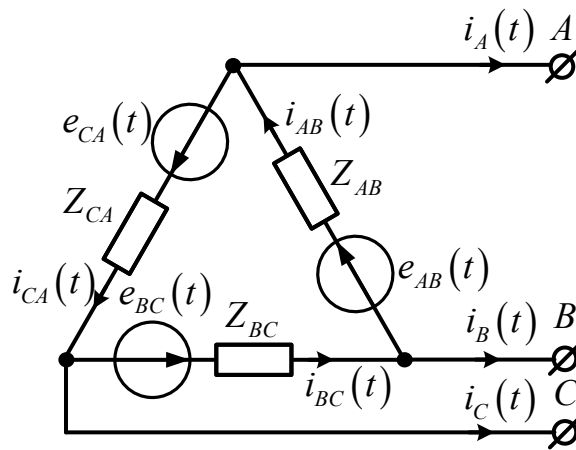


Рисунок 2.4.7 – Схема заміщення трифазного джерела з'єднаного в трикутник в режимі неробочого ходу

Теоретичне обґрунтування наведеного вище твердження подано аналітичними виразами. Враховуючи рівність фазних напруг джерела в режимі без навантаження ($i_{AB}(t) = i_{BC}(t) = i_{CA}(t)$), вирази для визначення миттєвого значення фазного струму джерела та діючих величин його гармонічних складових мають вигляд:

$$i_{AB}(t) = \frac{e_{AB}(t) + e_{BC}(t) + e_{CA}(t)}{3Z(h\omega)} = \frac{\sum_{h=1,3,5,7,9,\dots}^{\infty} (e_{AB(h)} + e_{BC(h)} + e_{CA(h)})}{3Z(h\omega)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (e_{AB(3k)} + e_{BC(3k)} + e_{CA(3k)})}{3Z(h\omega)};$$

$$I_{\Phi(h)} = I_{AB(h)} = I_{BC(h)} = I_{CA(h)} = \frac{3E_{AB(h)}}{3Z_{(h)}} = \frac{E_{\Phi(h)}}{Z_{(h)}}, \text{ де } h = 3, 9, 15 \dots$$

Діюче значення фазного струму джерела без навантаження:

$$I_{\Phi} = \sqrt{I_{(3)}^2 + I_{(9)}^2 + I_{(15)}^2 + \dots}$$

При підключенні навантаження до трифазного джерела (рис. 2.4.7) його фазний струм визначається як

$$\dot{I}_{AB(h)} = \frac{-\dot{U}_{AB(h)} + \dot{E}_{AB(h)}}{\underline{Z}_{(h)}}.$$

При цьому гармонічний спектр лінійних струмів не містить гармонік кратних трьом. Співвідношення між лінійними та фазними струмами у симетричному трифазному колі за умови, що струми несинусоїдні, не виконується. Нижче аналітичне обґрунтування даного твердження на прикладі фазного струму симетричного відносно осі абсцис:

$$I_{\Phi} = \sqrt{I_{\Phi(1)}^2 + I_{\Phi(3)}^2 + I_{\Phi(5)}^2 + I_{\Phi(7)}^2 + I_{\Phi(9)}^2 + I_{\Phi(11)}^2 + \dots}$$

$$I_{\text{Л}} = \sqrt{3} \sqrt{I_{\Phi(1)}^2 + I_{\Phi(5)}^2 + I_{\Phi(7)}^2 + I_{\Phi(11)}^2 + \dots} = \sqrt{I_{\text{Л}(1)}^2 + I_{\text{Л}(5)}^2 + I_{\text{Л}(7)}^2 + I_{\text{Л}(11)}^2 + \dots},$$

$$\frac{I_{\text{Л}}}{I_{\Phi}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{I_{\Phi(1)}^2 + I_{\Phi(5)}^2 + I_{\Phi(7)}^2 + I_{\Phi(11)}^2 + \dots}}{\sqrt{I_{\Phi(1)}^2 + I_{\Phi(3)}^2 + I_{\Phi(5)}^2 + I_{\Phi(7)}^2 + I_{\Phi(9)}^2 + I_{\Phi(11)}^2 + \dots}} < \sqrt{3}.$$

Лінійна (фазна) напруга трифазного джерела при з'єднанні фаз трикутником не містить гармонік кратних двом та трьом:

$$u_{AB}(t) = -i_{AB}(t)Z(h\omega) + e_{AB}(t) = - \sum_{h=3,9,15\dots}^{\infty} \underbrace{i_{AB(h)}Z(h\omega)}_{e_{A(h)}} + \sum_{h=1,3,5,7,9\dots}^{\infty} e_{AB(h)} = \sum_{h=1,5,7,11\dots}^{\infty} u_{AB(h)};$$

$$U_{\text{Л}} = \sqrt{U_{AB(1)}^2 + U_{AB(5)}^2 + U_{AB(7)}^2 + \dots}; \quad U_{\Phi} = U_{\text{Л}}.$$

З'єднання трифазного генератора зіркою.

Припустимо, що фазна напруга джерела, фази якого з'єднано у зірку (рис. 2.4.8), містить всі гармонічні складові окрім гармонік кратних двом за рахунок симетрії. Тоді в лінійній напрузі джерела відсутні гармоніки, які утворюють нульову послідовність, тобто кратні трьом.

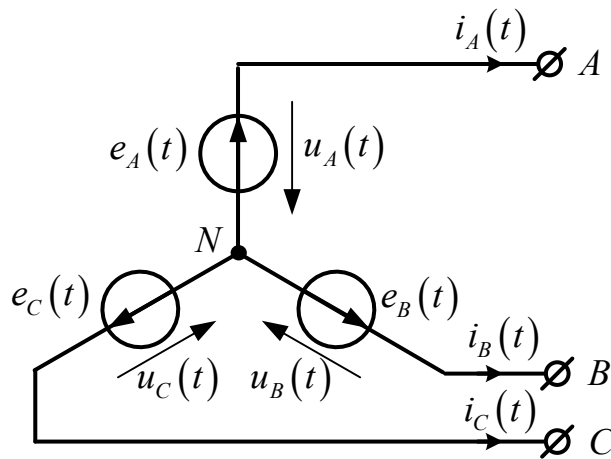


Рисунок 2.4.8 – Схема заміщення трифазного джерела з'єднаного в зірку в режимі неробочого ходу

Відсутність гармонік кратних трьом в лінійних напругах призводить до того, що при несинусоїдних напругах відношення лінійної напруги до фазної менше $\sqrt{3}$. Аналітичне обґрунтування наведеного твердження подано для випадку фазної напруги симетричної відносно осі абсцис:

$$U_{\Phi} = \sqrt{U_{\Phi(1)}^2 + U_{\Phi(3)}^2 + U_{\Phi(5)}^2 + U_{\Phi(7)}^2 + U_{\Phi(9)}^2 + U_{\Phi(11)}^2 + \dots}$$

$$U_{\text{Л}} = \sqrt{3} \sqrt{U_{\Phi(1)}^2 + U_{\Phi(5)}^2 + U_{\Phi(7)}^2 + U_{\Phi(11)}^2 + \dots} = \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(5)}^2 + U_{(7)}^2 + U_{(11)}^2 + \dots},$$

$$\frac{U_{\text{Л}}}{U_{\Phi}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{U_{\Phi(1)}^2 + U_{\Phi(5)}^2 + U_{\Phi(7)}^2 + U_{\Phi(11)}^2 + \dots}}{\sqrt{U_{\Phi(1)}^2 + U_{\Phi(3)}^2 + U_{\Phi(5)}^2 + U_{\Phi(7)}^2 + U_{\Phi(9)}^2 + U_{\Phi(11)}^2 + \dots}} < \sqrt{3}.$$

Симетричне трифазне коло при з'єднанні фаз «зірка в зірку» без нейтрального проводу.

Аналіз даного випадку, поданого на рис. 2.4.9, виконано за припущення, що фазні напруги джерела містять всі гармонічні складові ($h = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$).

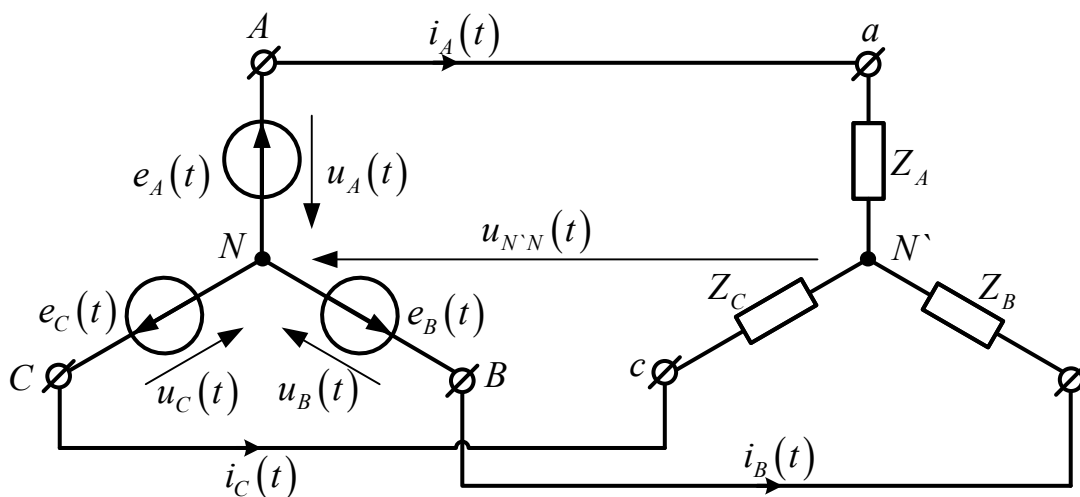


Рисунок 2.4.9 – Симетричне трифазне коло несинусоїдного струму при з'єднання фаз «зірка в зірку» без нейтрального проводу

За умови несинусоїдності напруг трифазного джерела симетричне коло характеризується напругою зміщення нейтралі, яка містить виключно гармоніки кратні трьом:

$$\dot{U}_{N'N(h)} = \frac{\dot{E}_{A(h)} \underline{Y}_{A(h)} + \dot{E}_{B(h)} \underline{Y}_{B(h)} + \dot{E}_{C(h)} \underline{Y}_{C(h)}}{\underline{Y}_{A(h)} + \underline{Y}_{B(h)} + \underline{Y}_{C(h)}} = \frac{\dot{E}_{\Phi(3k)} \cdot 3\underline{Y}_{\Phi(3k)}}{3\underline{Y}_{\Phi(3k)}} = \dot{E}_{\Phi(3k)},$$

де $E_{A(h)} = E_{B(h)} = E_{C(h)} = E_{\Phi(h)}$ – діючі значення окремих гармонічних складових фазної напруги;

$$Y_{A(h)} = Y_{B(h)} = Y_{C(h)} = Y_{\Phi(h)} = \frac{1}{Z_{\Phi(h)}} \quad \text{– модулі окремих гармонічних складових}$$

провідностей фаз навантаження;

$$Z_{A(h)} = Z_{B(h)} = Z_{C(h)} = Z_{\Phi(h)} \quad \text{– модулі окремих гармонічних складових опорів фаз навантаження.}$$

У виразі врахована умова симетрії навантаження та рівність нулю суми фазних напруг гармоніки яких створюють системи прямої та зворотної послідовностей, і особливість симетрії фазних напруг гармонік кратних трьом – $\dot{E}_{A(3k)} = \dot{E}_{B(3k)} = \dot{E}_{C(3k)} = \dot{E}_{\Phi(3k)}$.

Діюче значення напруги зміщення нейтралі рівне діючому значенню вищих гармонік кратних трьом:

$$U_{N'N} = \sqrt{E_{\Phi(3)}^2 + E_{\Phi(9)}^2 + E_{\Phi(15)}^2 + \dots}$$

За рахунок цього фазні струми, які рівні лінійним, не міститимуть гармонічні складові кратні трьом, оскільки

$$\dot{I}_{A(3k)} = \dot{I}_{B(3k)} = \dot{I}_{C(3k)} = \frac{\dot{E}_{\Phi(3k)} - \dot{U}_{N'N}}{\underline{Z}_{A(3k)}} = \frac{\dot{E}_{\Phi(3k)} - \dot{E}_{\Phi(3k)}}{\underline{Z}_{A(3k)}} = 0.$$

Тому діюче значення фазного струму обчислюється як

$$I_{\Phi} = \sqrt{I_{\Phi(1)}^2 + I_{\Phi(5)}^2 + I_{\Phi(7)}^2 + I_{\Phi(11)}^2 + \dots}$$

Зважаючи на відсутність нейтрального проводу сума фазних струмів повинна дорівнювати нулю у будь-який момент часу незалежно від гармонічного спектру, що неможливо за наявності гармонік кратних трьом.

Гармонічний спектр фазної напруги навантаження відповідає гармонічному спектру фазного струму, а отже не містить складових, які формують систему нульової послідовності.

Симетричне трифазне коло при з'єднанні фаз «зірка в зірку» з нейтральним проводом.

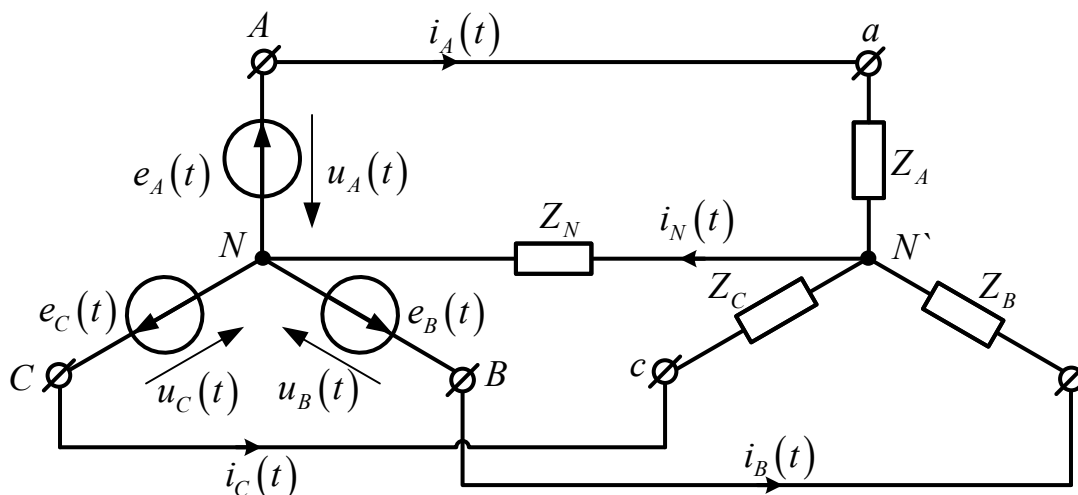


Рисунок 2.4.10 – Симетричне трифазне коло несинусоїдного струму при з'єднанні фаз «зірка в зірку» з нейтральним проводом

Припускається, що в колі на рис. 2.4.10 діє система симетричних несинусоїдних фазних ЕРС, яка створює симетричну систему фазних струмів,

гармонічні спектри яких включають наступні порядки гармонік окрім нульової ($h = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$).

В симетричній трифазній системі прямої та зворотної послідовностей фазні струми зсунуті на 120° по відношенню один до одного. За рахунок цього сумарний струм у нейтральному провіднику дорівнює нулю та не виникає напруга зміщення нейтралі. Таке твердження залишається справедливим для всіх гармонік окрім кратних трьом. Гармонічні складові фазних струмів кратні трьом створюють систему нульової послідовності та сумуються в нейтральному проводі:

$$i_N(t) = i_A(t) + i_B(t) + i_C(t) = i_{A(3)} + i_{B(3)} + i_{C(3)} = 3I_{m(3)} \sin(3k\omega t + \psi_{(3)});$$

$$I_N = 3\sqrt{I_{(3)}^2 + I_{(9)}^2 + I_{(15)}^2 + \dots}$$

Враховуючи, що напруга зміщення нейтралі приймає ненульове значення виключно в симетричній системі нульової послідовності, то її значення розраховується з врахуванням тільки гармонічних складових кратних трьом ($h = 3k, de$):

$$\dot{U}_{N'N(3k)} = \frac{3\dot{E}_{\Phi(3k)} \frac{1}{Z_{(3k)}}}{3 \frac{1}{Z_{(3k)}} + \frac{1}{Z_{N(3k)}}} = \frac{3\dot{E}_{3k}}{3 + \frac{Z_{(3k)}}{Z_{N(3k)}}} = \frac{3\dot{E}_{\Phi(3k)} Z_{N(3k)}}{3Z_{N(3k)} + Z_{(3k)}} \neq 0.$$

Аналітичний розрахунок струму у нейтральному проводі виконується за виразом:

$$\dot{I}_{N(3k)} = \frac{\dot{U}_{N'N(3k)}}{Z_{N(3k)}} = \frac{3\dot{E}_{\Phi(3k)}}{3Z_{N(3k)} + Z_{(3k)}}.$$

Приклад 2.4.5. В заданому колі, схема якого подана на рис. 2.4.11, симетричне навантаження ($R = 7.07 \text{ Ом}$, $X_L = R = 7.07 \text{ Ом}$) живиться від системи симетричних несинусоїдних ЕРС. Гармонічний спектр ЕРС джерела фази А:

$$e_A(t) = 120\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin 3\omega t + 80\sqrt{2} \sin(5\omega t + 45^\circ) \quad \text{В.}$$

Визначити покази вимірювального обладнання.

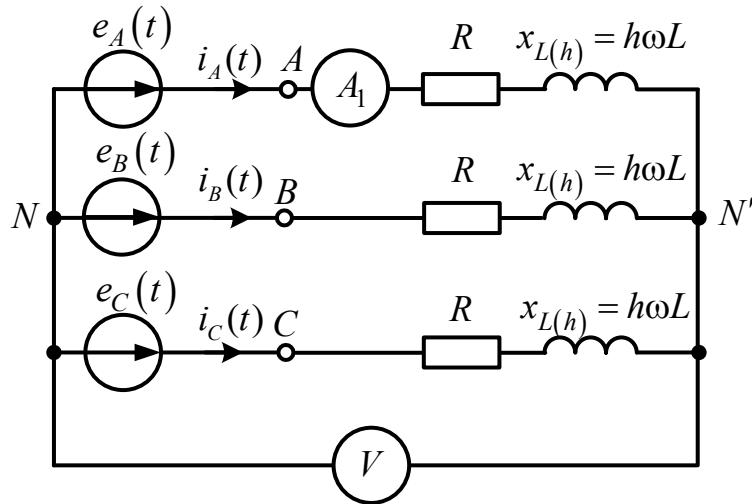


Рисунок 2.4.11 – Схема симетричного трифазного кола несинусоїдного струму до прикладу 2.4.5

Розв'язання.

1. Запишемо системи фазних ЕРС для кожної гармонічної складової окремо:

- перша гармоніка фазних напруг формує пряму послідовність:

$$e_{A(1)} = U_{m(1)} \sin(\omega t + \psi_{(1)}) = 120\sqrt{2} \sin \omega t;$$

$$e_{B(1)} = U_{m(1)} \sin(\omega t - 120^\circ + \psi_{(1)}) = 120\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$e_{C(1)} = U_{m(1)} \sin(\omega t + 120^\circ + \psi_{(1)}) = 120\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ).$$

- третя гармоніка фазних напруг формує нульову послідовність:

$$e_{A(3)} = U_{m(3)} \sin(3 \cdot \omega t + \psi_{(3)}) = 60\sqrt{2} \sin 3\omega t;$$

$$e_{B(3)} = U_{m(3)} \sin(3 \cdot \omega t - 3 \cdot 120^\circ + \psi_{(3)}) = 60\sqrt{2} \sin(3\omega t - 360^\circ) = 60\sqrt{2} \sin 3\omega t;$$

$$e_{C(3)} = U_{m(3)} \sin(3 \cdot \omega t + 3 \cdot 120^\circ + \psi_{(3)}) = 60\sqrt{2} \sin(3\omega t + 360^\circ) = 60\sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

- п'ята гармоніка фазних напруг формує нульову послідовність:

$$e_{A(5)} = U_{m(5)} \sin(5 \cdot \omega t + \psi_{(5)}) = 80\sqrt{2} \sin(5\omega t + 45^\circ);$$

$$e_{B(5)} = U_{m(5)} \sin(5 \cdot \omega t - 5 \cdot 120^\circ + \psi_{(5)}) = 80\sqrt{2} \sin\left(5\omega t - 240^\circ + 45^\circ\right) = 80\sqrt{2} \sin(5\omega t + 165^\circ);$$

$$e_{C(5)} = U_{m(5)} \sin(5 \cdot \omega t + 5 \cdot 120^\circ + \psi_{(5)}) = 80\sqrt{2} \sin\left(5\omega t + 240^\circ + 45^\circ\right) = 80\sqrt{2} \sin(5\omega t - 75^\circ).$$

Результуюча система симетричних несинусоїдних фазних ЕРС:

$$e_A(t) = 120\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin 3\omega t + 80\sqrt{2} \sin(5\omega t + 45^\circ) \quad \text{В};$$

$$e_B(t) = 120\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) + 60\sqrt{2} \sin 3\omega t + 80\sqrt{2} \sin(5\omega t + 165^\circ) \quad \text{В};$$

$$e_C(t) = 120\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ) + 60\sqrt{2} \sin 3\omega t + 80\sqrt{2} \sin(5\omega t - 75^\circ) \quad \text{В}.$$

2. Проведемо аналіз кола при дії кожної гармонічної складової окремо використовуючи символічний метод аналізу.

2.1. При дії першої гармоніки формується симетричне трифазне коло прямої послідовності чергування фаз:

$$\begin{aligned} e_{A(1)} &= 120\sqrt{2} \sin \omega t; & \dot{E}_{A(1)} &= 120e^{j0^\circ}; \\ e_{B(1)} &= 120\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ); & \dot{E}_{B(1)} &= 120e^{-j120^\circ}; \\ e_{C(1)} &= 120\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ). & \dot{E}_{C(1)} &= 120e^{j120^\circ}. \end{aligned}$$

Розрахунок симетричного кола, яке характеризується нульовою величиною напруги зміщення нейтралі ($\dot{U}_{N', N(1)} = 0$), проводимо відносно однієї фази:

$$\dot{I}_{A(1)} = \frac{\dot{E}_{A(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{\dot{E}_{A(1)}}{R + j\omega L} = \frac{120}{\underbrace{7.071 + j7.071}_{10e^{j45^\circ}}} = 12e^{-j45^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{B(1)} = a^2 12e^{-j45^\circ} = 12e^{-j165^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{C(1)} = a 12e^{-j45^\circ} = 12e^{j75^\circ} \text{ А}.$$

2.2. При дії третьої гармоніки формується симетричне трифазне коло нульової послідовності чергування фаз:

$$e_{A(3)} = 60\sqrt{2} \sin 3\omega t;$$

$$e_{B(3)} = 60\sqrt{2} \sin 3\omega t; \quad \dot{E}_{A(3)} = \dot{E}_{B(3)} = \dot{E}_{C(3)} = 60.$$

$$e_{C(3)} = 60\sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

Напруга зміщення нейтралі:

$$\dot{U}_{N'N(3)} = \frac{\dot{E}_{A(3)} \underline{Y}_{A(3)} + \dot{E}_{B(3)} \underline{Y}_{B(3)} + \dot{E}_{C(3)} \underline{Y}_{C(3)}}{\underline{Y}_{A(3)} + \underline{Y}_{B(3)} + \underline{Y}_{C(3)}} = \frac{\dot{E}_{A(3)} (\underline{Y}_{A(3)} + \underline{Y}_{B(3)} + \underline{Y}_{C(3)})}{\underline{Y}_{A(3)} + \underline{Y}_{B(3)} + \underline{Y}_{C(3)}} = \dot{E}_{A(3)} = 60.$$

Впевнюсь, що фазні/лінійні струми за відсутності нейтрального проводу не містять третю гармонічну складову:

$$\dot{I}_{A(3)} = \dot{I}_{B(3)} = \dot{I}_{C(3)} = \frac{\dot{E}_{A(3)} - \dot{U}_{N'N(3)}}{\underline{Z}_{A(3)}} = 0;$$

2.3. При дії п'ятої гармоніки формується симетричне трифазне коло зворотної послідовності чергування фаз:

$$e_{A(5)} = 80\sqrt{2} \sin(5\omega t + 45^\circ); \quad \dot{E}_{A(5)} = 80e^{j45^\circ};$$

$$e_{B(5)} = 80\sqrt{2} \sin(5\omega t + 165^\circ); \quad \dot{E}_{B(5)} = 80e^{j165^\circ};$$

$$e_{C(5)} = 80\sqrt{2} \sin(5\omega t - 75^\circ). \quad \dot{E}_{C(5)} = 80e^{-j75^\circ}.$$

Розрахунок струмів проводимо відносно фази А:

$$\dot{I}_{A(5)} = \frac{\dot{E}_{A(5)}}{\underline{Z}_{(5)}} = \frac{\dot{E}_{A(5)}}{R + 5j\omega L} = \frac{80e^{j45^\circ}}{\underbrace{7.071 + j35.355}_{36.055e^{j78.69^\circ}}} = 2.22e^{-j33.69^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{B(5)} = a 2.22e^{-j33.69^\circ} = 12e^{j86.31^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{C(5)} = a^2 2.22e^{-j33.69^\circ} = 12e^{-j153.69^\circ} \text{ A}.$$

3. Виконуємо розрахунок показів приладів.

Вольтметр знімає діюче значення напруги зміщення нейтралі, гармонічний спектр якої включає лише третю гармоніку:

$$U_V = U_{N'N} = \sqrt{E_{(3)}^2} = 60 \text{ В}.$$

Амперметр знімає діюче значення фазного струму, ряд якого містить першу та п'яту гармоніки:

$$I_A = \sqrt{I_{A(1)}^2 + I_{A(5)}^2} = \sqrt{12^2 + 2.22^2} = 12.2 \text{ А.}$$

Приклад 2.4.6. Визначити покази приладів у колі (рис. 2.4.12) за умови, що параметри генератора і навантаження такі ж, як і у прикладі 2.4.5.

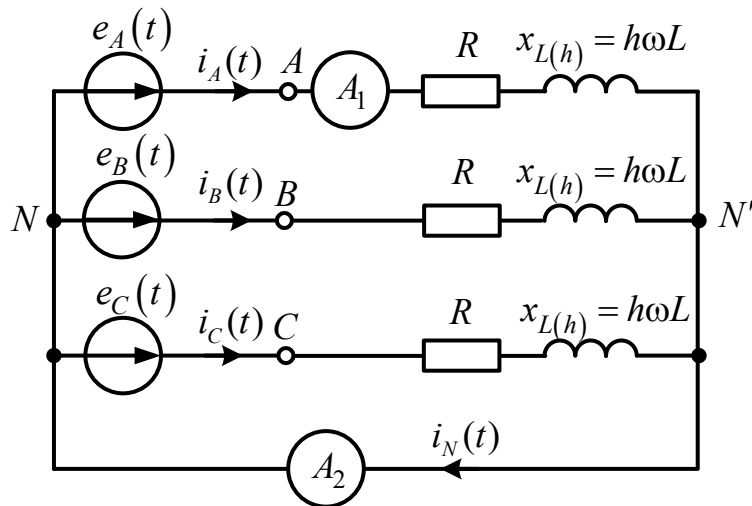


Рисунок 2.4.12 – Схема симетричного трифазного кола несинусоїдного струму до прикладу 2.4.6

Розв'язання.

1. Наявність нейтрального проводу не вносить змін в система симетричних несинусоїдних фазних ЕРС:

$$e_A(t) = 120\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin 3\omega t + 80\sqrt{2} \sin(5\omega t + 45^\circ) \text{ В;}$$

$$e_B(t) = 120\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) + 60\sqrt{2} \sin 3\omega t + 80\sqrt{2} \sin(5\omega t + 165^\circ) \text{ В;}$$

$$e_C(t) = 120\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ) + 60\sqrt{2} \sin 3\omega t + 80\sqrt{2} \sin(5\omega t - 75^\circ) \text{ В.}$$

2. Оскільки в заданому колі нейтральний провідник безвтратний ($Z_N = 0$), то аналіз фазних струмів першої, третьої і п'ятої гармонік проводимо відносно фази A :

$$\dot{I}_{A(1)} = \frac{\dot{E}_{A(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{120}{\underbrace{7.071 + j7.071}_{10e^{j45^\circ}}} = 12e^{-j45^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}_{A(3)} = \frac{\dot{E}_{A(3)}}{\underline{Z}_{(3)} + \underline{Z}_{N(3)}} = \frac{60}{(7.071 + j7.071 \cdot 3) + 0} = \frac{60}{\underbrace{7.071 + j21.213}_{22.36e^{j71.565^\circ}}} = 2.68e^{-j71.565^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{A(5)} = \frac{\dot{E}_{A(5)}}{\underline{Z}_{(5)}} = \frac{80e^{j45^\circ}}{\underbrace{7.071 + j35.355}_{36.055e^{j78.69^\circ}}} = 2.22e^{-j33.69^\circ} \text{ А}.$$

3. Амперметри у фазному та нейтральному провіднику реагують на відповідні діючі величини несинусоїдних струмів:

$$I_A = \sqrt{I_{A(1)}^2 + I_{A(3)}^2 + I_{A(5)}^2} = \sqrt{12^2 + 2.68^2 + 2.22^2} = 12.49 \text{ А},$$

$$I_N = 3I_{N(3)} = 3 \cdot 2.68 = 8.04 \text{ А}.$$

У нейтральному проводі струм містить тільки третю гармоніку.

Приклад 2.4.7. ЕРС фази A симетричного трифазного генератора подана тригонометричним рядом:

$$e_A(t) = 120\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin(3\omega t + 45^\circ) + 30\sqrt{2} \sin(5\omega t - 90^\circ).$$

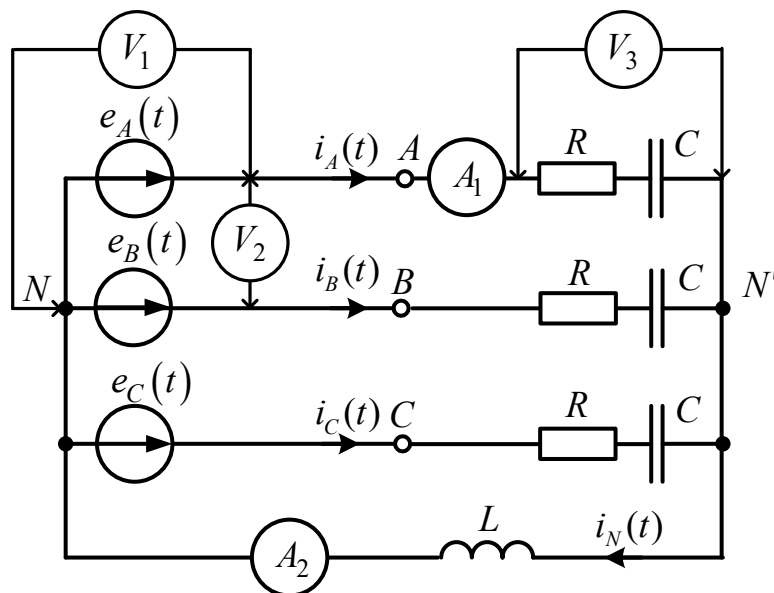


Рисунок 2.4.13 – Схема симетричного трифазного кола несинусоїдного струму до прикладу 2.4.7

Схема з'єднання генератора і споживача приведена на рис. 13.8. Параметри споживача на частоті ω становлять $R = 20 \text{ Ом}$, $x_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = 30 \text{ Ом}$; опір

нейтралі $X_{N(1)} = \omega L_N = 2 \text{ Ом}$. Визначити покази приладів електромагнітної системи та миттєві значення струмів $i_C(t), i_N(t)$.

Розв'язання.

1. Запишемо системи симетричних несинусоїдних фазних та лінійних напруг:

$$u_A(t) = e_A(t) = 120\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin(3\omega t + 45^\circ) + 30\sqrt{2} \sin(5\omega t - 90^\circ),$$

$$u_B(t) = e_B(t) = 120\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) + 60\sqrt{2} \sin(3\omega t + 45^\circ) + 30\sqrt{2} \sin(5\omega t + 30^\circ),$$

$$u_C(t) = e_C(t) = 120\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ) + 60\sqrt{2} \sin(3\omega t + 45^\circ) + 30\sqrt{2} \sin(5\omega t + 150^\circ).$$

$$u_{AB}(t) = u_A(t) - u_B(t) = 120\sqrt{2}\sqrt{3} \sin(\omega t + 30^\circ) + 30\sqrt{2}\sqrt{3} \sin(5\omega t - 120^\circ),$$

$$u_{BC}(t) = u_B(t) - u_C(t) = 120\sqrt{2}\sqrt{3} \sin(\omega t - 90^\circ) + 30\sqrt{2}\sqrt{3} \sin(5\omega t),$$

$$u_{CA}(t) = u_C(t) - u_A(t) = 120\sqrt{2}\sqrt{3} \sin(\omega t + 150^\circ) + 30\sqrt{2}\sqrt{3} \sin(5\omega t - 240^\circ).$$

Схема заміщення заданого кола з урахуванням гармонічного спектру фазних напруг зображена на рис. 2.4.14.

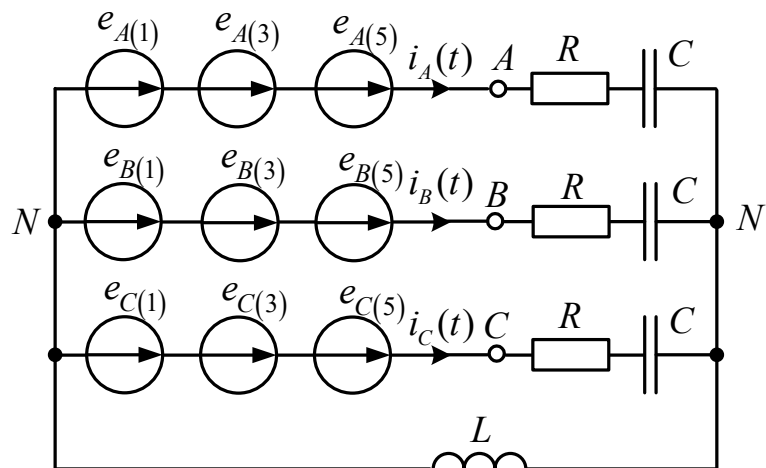


Рисунок 2.4.14 – Схема заміщення симетричного трифазного кола несинусоїдного струму заданого на рис. 2.4.13

2. Подальший розрахунок проводимо методом накладання від дії кожної гармонічної складової фазної напруги з урахуванням, що кожна гармоніка створює симетричну систему напруг.

Враховуючи, що у симетричних трифазних колах прямої та зворотної послідовностей, за рахунок нульової величини напруги зміщення нейтралі ($U_{N'N(1)} = U_{N'N(5)} = 0$), фазна напруга джерела прикладена до фази навантаження,

то перша та п'ята гармонічні складові фазних напруг джерела і навантаження:

$$U_{\Phi(1)} = U_{AN(1)} = U_{AN'(1)} = E_{A(1)} = 120 \text{ В},$$

$$U_{\Phi(5)} = U_{AN(5)} = U_{AN'(5)} = E_{A(5)} = 30 \text{ В}.$$

Тоді комплекси струмі фази A для 1-ї та 5-ї гармонік становлять:

$$\dot{I}_{A(1)} = \frac{\dot{E}_{A(1)}}{\underline{Z}_{\Phi(1)}} = \frac{\dot{E}_{A(1)}}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{120}{20 - j30} = 3.33e^{j56.3^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{A(5)} = \frac{\dot{E}_{A(5)}}{\underline{Z}_{\Phi(5)}} = \frac{\dot{E}_{A(5)}}{R - j\frac{1}{5\omega C}} = \frac{30e^{-j90^\circ}}{20 - j6} = 1.44e^{-j73.3^\circ} \text{ А}.$$

Струм у нейтральному провіднику в симетричних трифазних колах прямота зворотної послідовностей не протікає.

Напруга зміщення нейтралі для 3-ї гармоніки дорівнює:

$$\dot{U}_{N'N(3)} = \frac{3\dot{E}_{A(3)} \cdot \underline{Z}_{N(3)}}{3\underline{Z}_{N(3)} + \underline{Z}_{\Phi(3)}} = \frac{3 \cdot 60e^{j45^\circ} \cdot 6e^{j90^\circ}}{j18 + 20 - j10} = 50.16e^{j113.2^\circ} \text{ В}.$$

Комплексні струми фаз 3-ї гармоніки:

$$\dot{I}_{\Phi(3)} = \dot{I}_{A(3)} = \dot{I}_{B(3)} = \dot{I}_{C(3)} = \frac{1}{3} \dot{I}_{N(3)} \cong 2.79e^{j23.2^\circ} \text{ А}.$$

Комплекс струму нейтрального проводу 3-ї гармоніки:

$$\dot{I}_{N(3)} = \frac{\dot{U}_{N'N(3)}}{\underline{Z}_{N(3)}} = \frac{50.16e^{j113.2^\circ}}{6e^{j90^\circ}} = 8.36e^{j23.2^\circ} \text{ А}.$$

Фазна напруга споживача від струму 3-ї гармоніки:

$$U_{\Phi(3)} = I_{\Phi(3)} \cdot Z_{\Phi(3)} = 2.79\sqrt{20^2 + 10^2} \cong 62.40 \text{ В}.$$

Покази вольтметрів V_1 та V_3 :

$$U_{V_1} = \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(3)}^2 + E_{(5)}^2} = \sqrt{120^2 + 60^2 + 30^2} = 137.48 \text{ В},$$

$$U_{V_3} = \sqrt{U_{\Phi(1)}^2 + U_{\Phi(3)}^2 + U_{\Phi(5)}^2} = \sqrt{120^2 + 62.4^2 + 30^2} = 138.54 \text{ В}.$$

Показ вольметра V_2 :

$$U_{V_2} = \sqrt{3} \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(5)}^2} = 214.24 \text{ В}.$$

3. Враховуючи розраховані комплекси 1-ї, 3-ї та 5-ї гармонічних складових струму фази A , запишемо миттєве значення струму фази C :

$$i_C(t) = 3.33\sqrt{2} \sin(\omega t + 176.3^\circ) + 2.79\sqrt{2} \sin(3\omega t + 23.2^\circ) + 1.44\sqrt{2} \sin(5\omega t - 193.3^\circ) \text{ А}.$$

У виразі для $i_C(t)$ враховано, що струми 1-ї гармоніки створюють пряму послідовність $(\psi_{i_{C(1)}} = \psi_{i_{A(1)}} + 120^\circ)$, 3-ї – нульову $(\psi_{i_{A(3)}} = \psi_{i_{C(3)}})$, а 5-ї – зворотну $(\psi_{i_{C(5)}} = \psi_{i_{A(5)}} - 120^\circ)$.

Приклад 2.4.8. Вважаючи схему, яка зображена на рис. 2.4.3, а, схемою заміщення однієї з фаз симетричного трифазного кола і прийнявши в якості фазної ЕРС криву, приведену на рис. 2.4.3, б, необхідно:

- записати систему миттєвих значень фазних ЕРС трифазного джерела;
- визначити діючі значення лінійної напруги джерела;
- визначити діюче значення струму в нейтральному проводі;
- визначити діючі значення лінійних струмів та напруги між нейтральними точками джерела та навантаження у разі обриву нейтрального проводу.

Розв'язання.

1. Для наочного сприйняття поставленого завдання переходимо від однофазного кола (рис. 2.4.3, а) до трифазного симетричного кола несинусоїдного струму (рис. 2.4.15). Імітацію обриву між нейтральними точками подаємо ключем S .

При виконанні завдання використовуємо результати обчислення отримані у прикладі 2.4.1.

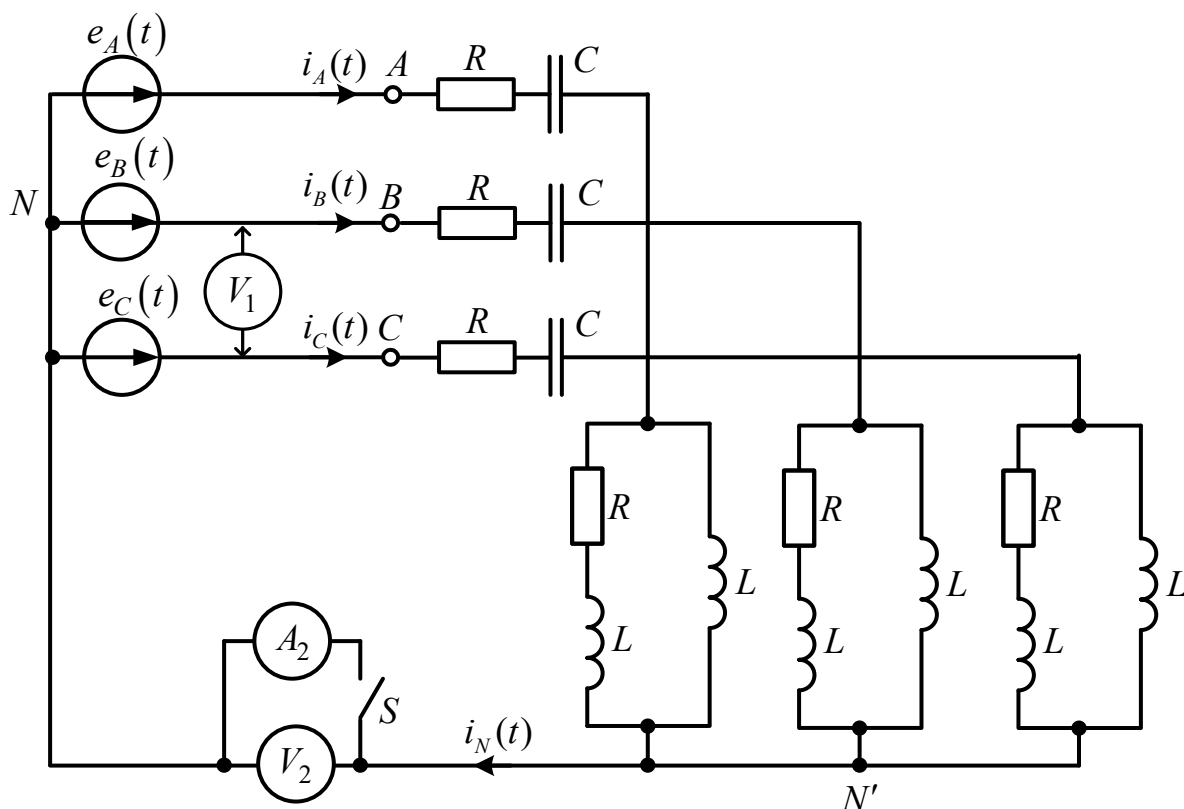


Рисунок 2.4.15 – Схема симетричного трифазного кола несинусоїдного струму на базі однофазного з імітацією за

2. Нехай крива $e(\omega t)$, приведена на рис. 2.4.3, б, являє собою ЕРС фази A трифазного джерела. Тоді система миттєвих значення ЕРС набуває вигляду:

$$e_A(\omega t) = 153 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 51 \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 30.6 \sin\left(5\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) + \dots,$$

$$e_B(\omega t) = 153 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 51 \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 30.6 \sin\left(5\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) + \dots,$$

$$e_C(\omega t) = 153 \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) + 51 \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 30.6 \sin\left(5\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + \dots,$$

2. Діюче значення лінійної напруги генератора (показ вольметра V_1) не містить третьої гармоніки:

$$U_L \approx \sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{U_{mA(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{mA(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{3} \sqrt{108^2 + 21.6^2} = 191 \text{ В.}$$

3. Діюче значення струму в нейтральному проводі (показ амперметра A_2 при замкненому ключі S) містить лише третю гармоніку фазного струму:

$$I_N \approx 3\sqrt{I_{A(1)}^2} = 3\sqrt{I_{1(1)}^2} = 3\sqrt{0.923^2} = 2.77 \text{ А.}$$

4. Діюче значення напруги зміщення нейтралі у випадку обриву між нейтральними точками джерела та споживача (показ вольметра V_2 при розімкненому ключі S) містить лише третю гармоніку фазної напруги:

$$U_{N'N} \approx \sqrt{\left(\frac{U_{mA(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 36,1 \text{ В.}$$

5. Діючі значення лінійних струмів при розриві нейтрального проводу (показ амперметра A_1 при розімкненому ключі S):

$$I_{A1} \approx \sqrt{I_{A(1)}^2 + I_{A(5)}^2} = \sqrt{I_{1(1)}^2 + I_{1(5)}^2} = \sqrt{1.11^2 + 0.574^2} = 1.25 \text{ А.}$$

2.4.6. Показники якості електроенергії за гармонійних спотворень

Відхилення кривої напруги або струму від ідеальної синусоїдальної форми оцінюється рядом коефіцієнтів. Нижче наведено порівняльний аналіз найбільш вживаних показників, які знайшли відображення в сучасних міжнародних стандартах.

Коефіцієнт форми кривої напруги (струму) є відношення діючого значення періодичної напруги (струму) до його середнього значення згідно ДСТУ 3466-96 [15]:

$$k_{\Phi_u} = \frac{U}{U_{\text{сеп}}} \bigg|_{f(t)=F_m \sin(\omega t)} = 1.11 \qquad k_{\Phi_i} = \frac{I}{I_{\text{сеп}}}$$

Коефіцієнт амплітуди кривої напруги (струму) – відношення максимального за модулем значення напруги (струму) за період до діючого значення періодичної напруги (струму) згідно ДСТУ 3466-96 [15]:

$$k_{a_u} = \frac{|U_{\text{max}}|}{U} \bigg|_{f(t)=F_m \sin(\omega t)} = \sqrt{2} \qquad k_{a_i} = \frac{|I_{\text{max}}|}{I}$$

Коефіцієнт спотворення синусоїдності кривої напруги / струму згідно ДСТУ 3466-96 [15] (англ. **Total Harmonic Distortion, THD** згідно ДСТУ EN

50160:2023 [5], IEEE Std 1459-2025 [7], IEC 60050-161:2003 [8]) – відношення діючого значення сукупності вищих гармонік напруги (струму) до діючого значення напруги (струму) основної гармоніки:

$$THD_u = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{\infty} U_{(h)}^2}}{U_{(1)}} \bigg|_{f(t)=F_m \sin(\omega t)} = 0. \quad THD_i = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{\infty} I_{(h)}^2}}{I_{(1)}}$$

Коефіцієнт спотворення несинусоїдної напруги / струму характеризує частку основної гармонічної складової у загальному спектрі напруги або струму та використовується для аналізу якості електроенергії, ефективності компенсаційних заходів і правильності роботи обладнання.

У нормативних документах цей коефіцієнт фігурує під різними назвами. Згідно ДСТУ 2815-94 [6] введено термін коефіцієнту спотворення несинусоїдної напруги (струму) (k_u); в ДСТУ IEC 60050-161:2003 цей же коефіцієнт названо як **Fundamental Factor** [8], тоді як у IEEE Std 1459-2025 для аналогічного показника використовується термін **Distortion Factor (DF)** [7]. Незважаючи на різні назви, обчислення цього коефіцієнта в трьох стандартах здійснюється за виразом:

$$DF_u = k_u = \frac{U_{(1)}}{U} \bigg|_{f(t)=F_m \sin(\omega t)} = 1 \quad DF_i = k_i = \frac{I_{(1)}}{I}$$

де $U_{(1)}$, $I_{(1)}$ – діючі значення основної гармонічної складової напруги та струму відповідно;

U , I – діючі значення несинусоїдних напруги та струму відповідно.

Коефіцієнт гармонік напруги / струму згідно ДСТУ 3466-96 [15] (англ. **h-th Harmonic Ratio** згідно ДСТУ IEC 60050-161:2003 [8]) – відношення діючого значення h-ї гармоніки напруги / струму до діючого основної гармоніки напруги (струму):

$$k_{z_u} = \left. \frac{U_{(h)}}{U_{(1)}} \right|_{f(t)=F_m \sin(\omega t)} = 0 \qquad k_{z_i} = \frac{I_{(h)}}{I_{(1)}}$$

Коефіцієнт гармонік напруги / струму, згідно ДСТУ 2815-94 [6]) – відношення сукупності вищих гармонік до діючого значення змінної величини

$$h_u = \frac{\sqrt{U^2 - U_{(1)}^2}}{U} = \sqrt{1 - k_u^2} \qquad h_i = \frac{\sqrt{I^2 - I_{(1)}^2}}{I} = \sqrt{1 - k_i^2}$$

Загальне спотворення попиту (англ. **Total Demand Distortion, TDD**) згідно IEEE Std 519-2022 [1]. Гармонічні спотворення мають найбільше значення, коли вони спостерігаються у точці загального приєднання (англ. **PCC**), зазвичай на місці вимірювання у споживача, протягом періоду, який відображає максимальний попит споживача. Як правило, цей період становить від 15 до 30 хвилин, як рекомендовано у [1]. Загальне спотворення попиту базується на струмі попиту I_{load} , виміряному протягом періоду моніторингу.

$$TDD = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{\infty} I_{(h)}^2}}{I_{load}}.$$

Коефіцієнт зміщення потужності (англ. **Displacement Power Factor, DPF**), що визначає фазовий зсув між основними гармоніками напруги та струму згідно IEEE Std 1459-2025 [7]:

$$DPF = \cos \Theta,$$

де $\Theta = \psi_{u(1)} - \psi_{i(1)}$ – кут зсуву фаз між основними гармонічними складовими напруги та струму.

У випадку синусоїдальних струмів без гармонічних спотворень цей коефіцієнт є ідентичним до коефіцієнта потужності (PF).

Для оцінки ефективності електроспоживання застосовується поняття **істинного коефіцієнта потужності** (англ. **True Power Factor, TPF**) IEEE Standard 1459-2025 [7], який враховує не лише фазовий зсув між основними гармоніками,

а й вплив гармонічних спотворень. Аналітичний вираз для визначення TPF має вигляд:

$$TPF = DPF \cdot DF_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (THD_i)^2}} \cos \Theta$$

Список використаної літератури до розділу 2.

1. IEEE Standard for Harmonic Control in Electric Power Systems. IEEE Std 519-2022 (Revision of IEEE Std 519-2014). New York: IEEE, 2022. 31 p. DOI: 10.1109/IEEESTD.2022.9848440
2. ДСТУ EN IEC 61000-3-2:2019. Електромагнітна сумісність (ЕМС). Частина 3-2. Норми. Норми емісії гармонійних складників струму (обладнання із силою вхідного струму не більше ніж 16 А в одній фазі) (EN IEC 61000-3-2:2019, IDT; IEC 61000-3-2:2018, IDT). Київ: УкрНДНЦ, 2019.
3. ДСТУ EN 61000-3-12:2017 (EN 61000-3-12:2011; IEC 61000-3-12:2011, IDT). Електромагнітна сумісність (ЕМС). Частина 3-12. Гранично допустимі рівні сили струму гармонік, створених обладнанням із номінальним вхідним струмом понад 16 А до 75 А включно на фазу, підключеним до низьковольтних електропостачальних систем загального призначення. Київ: УкрНДНЦ, 2017.
4. ДСТУ IEC 61000-4-7:2024 (IEC 61000-4-7:2009, IDT). Електромагнітна сумісність (ЕМС). Частина 4-7. Методики випробування та вимірювання. Загальна настанова щодо вимірювання гармонік та інтергармонік і відповідних вимірювальних приладів, застосованих для систем електропостачання й під'єднаного до них обладнання. Київ: УкрНДНЦ, 2024.
5. ДСТУ EN 50160:2023 (EN 50160:2022, IDT). Характеристики напруги електропостачання в електричних мережах загальної призначеності. Київ: УкрНДНЦ, 2023.
6. ДСТУ 2815-94. Електричні й магнітні кола та пристрої. Терміни та визначення (IEC 60050-131:1978, NEQ; IEC 60050-151:1978, NEQ) : [чинний від 1996-01-01, скасовано з 01.01.2026] / затв. наказом Держстандарту України від 31.10.1994 № 258. — Київ : Держстандарт України, 1995. — 51 с.
7. IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions. IEEE Std 1459-2025 (Revision of IEEE Std 1459-2010). New York: IEEE, 2025. 61 p. DOI: 10.1109/IEEESTD.2025.11004570
8. ДСТУ IEC 60050-161:2003 (IEC 60050-161:1990, IDT). Словник електротехнічних термінів. Глава 161. Електромагнітна сумісність. Київ: УкрНДНЦ, 2003. Режим доступу: <https://www.electropedia.org/>
9. Дудкін М. Є., Дюженкова О. Ю., Степахно І. В. Вища математика [Електронний ресурс] : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями / М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова, І. В. Степахно ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл). — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. — 449 с. — Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/51064/1/Dudkin_V_matymatyka_22.pdf
10. ДСТУ IEC 80000-6:2016 (IEC 80000-6:2008, IDT). Величини та одиниці. Частина 6. Електромагнітні явища : [чинний від 2018-01-01] / затв. наказом УкрНДНЦ від 27.12.2016 № 439. — Київ : УкрНДНЦ, 2016. — 34 с.

11. American Standard Definitions of Electrical Terms. – New York : American Institute of Electrical Engineers, 1941. – 147 p
12. Emanuel A. E. On the definition of power factor and apparent power in unbalanced polyphase circuits with sinusoidal voltage and currents. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 1993, vol. 8, no. 3, pp. 841–852. DOI: 10.1109/61.252612
13. Emanuel A. E. On the assessment of harmonic pollution [of power systems]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 1995, vol. 10, no. 3, pp. 1693–1698. DOI: 10.1109/61.400958
14. Emanuel A. E. Apparent power definitions for three-phase systems. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 1999, vol. 14, no. 3, pp. 767–772. DOI: 10.1109/61.772313
15. ДСТУ 3466-96. Якість електричної енергії. Терміни та визначення. Київ: Держстандарт України (нині УкрНДНЦ), 1996.
16. Теоретичні основи електротехніки: підручник: у 3 т. / В. С. Бойко, В. В. Бойко, Ю. Ф. Видолоб [та ін.] ; за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойка. – К. : ІВЦ «Видавництво “Політехніка”», 2004. – Т. 1 : Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 272 с.
17. Теоретичні основи електротехніки: підручник: у 3 т.; Т. 2: Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола / В.С. Бойко, Ю.Ф. Видолоб, І.А. Курило та ін.– К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", 2008. – 224 с.

Розділ 3. Перехідні процеси в лінійних електричних колах

Тема 3.1. Вступ до теорії аналізу перехідних процесів

3.1.1. Основні поняття та визначення

У попередніх розділах основну увагу було зосереджено на застосуванні законів електротехніки та методів для аналізу усталених режимів роботи електричних кіл, у яких форма сигналів струму та напруги на елементах відповідає формі сигналу від джерела енергії.

Усталений режим роботи кола – це режим, при якому електрорушійні сили (ЕРС), напруги та струми є постійними або періодичними функціями часу [1, 2].

Аварійні стани, штатна робота комутаційних апаратів або елементів (вимикачів, механічних чи електронних ключів тощо), а також інші перемикання супроводжується комутацією та зумовлюють зміну режиму роботи електричного кола.

Комутація електричного кола – це зміна його структури та/або фізичних величин (ЕРС та/або параметрів елементів кола) [2]. Комутація може спричиняти виникнення **перехідного процесу** [1, 2] – електромагнітного процесу, що відбувається під час переходу кола від одного усталеного режиму до іншого.

Під час перехідного процесу в колі протікають **перехідні струми** [1] та виникають **перехідні напруги** [1] на елементах. Перехідні напруги та струми є функціями часу незалежно від форми сигналу джерел енергії. Завершення перехідного процесу супроводжується встановленням усталених величин струму та напруги.

У межах вивчення цього розділу всі можливі види комутації – аварійні стани, робота механічних або електронних ключів, тощо – на схемах електричних кіл будутьображатись у вигляді механічного ключа зі стрілкою. Напрямок стрілки вказує напрям спрацювання ключа S . Схематичне зображення стрілки подано на рис. 3.1.1 у випадках замикання (рис. 3.1.1, а) та у випадку розмикання (обриву) контактів (рис. 3.1.1, б).

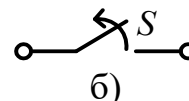
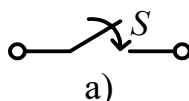


Рисунок 3.1.1 – Умовне зображення ключів та напрямку їх спрацювання для моделювання комутаційних режимів у електричних колах

При теоретичному аналізі зазвичай припускають, що момент комутації є миттєвим, нехтуючи виникненням дуги між контактами реального ключа.

Вивчення перехідних процесів дозволяє:

- оцінювати зміни форми та амплітуди сигналів;
- виявляти перенапруги, небезпечні для ізоляції та роботи електрообладнання;
- визначати пікові значення струмів та напруг та встановлювати рівні перевищення перехідних величин по відношенню до ustalених;
- прогнозувати тривалість відновлення нормального режиму та зарядно-розрядних процесів.

3.1.2. Закони комутації

Кожному ustalеному режиму електричного кола відповідає певний запас магнітної та електричної енергії накопичених відповідним реактивним елементом. При переході до нового ustalеного режиму енергетичний стан кола змінюється, виключення становлять особливі випадки співвідношення між параметрами електричних величин синусоїдного струму.

Фізично перехідні процеси являють собою процеси переходу від енергетичного стану, що відповідає докомутаційному режиму, до енергетичного стану, що відповідає післякомутаційному режиму.

Фундаментальною причиною неминучості перехідного процесу є перерозподіл енергії між реактивними елементами кола, тобто між індуктивними та ємнісними елементами, і зовнішніми джерелами енергії. При цьому в реальних колах частина енергії безповоротно перетворюється в інші види (наприклад, у теплову на активному опорі). Таким чином, комутація не є першопричиною перехідного процесу, вона може спровокувати перерозподіл електромагнітної енергії між елементами кола.

Миттєву зміну енергії магнітного або електричного поля в момент комутації міг би забезпечити елемент з нескінченно великою потужністю

$$p(t) = \frac{dW}{dt},$$

який у реальних колах відсутній. Тому зміна енергії в індуктивних і ємнісних елементах завжди відбувається плавно, що і зумовлює перехідний процес.

Енергії магнітного та електричного полів аналітично описуються виразами:

$$W_{\text{МП}} = \frac{\Psi i(t)}{2} = \frac{Li^2(t)}{2}; \quad W_{\text{ЕП}} = \frac{qu(t)}{2} = \frac{Cu^2(t)}{2};$$

де L – індуктивність,

C – ємність,

Ψ – потокощеплення самоіндукції,

$i(t)$, $u(t)$ – миттєві величини змінних струму та напруги відповідно.

Для реалізації теоретичного аналізу та визначення перехідних напруг і струмів тривалість перехідного процесу, від моменту його початку до встановлення нового усталеного режиму, розбивається на часові проміжки кожному з яких відповідає умовне позначення. Ілюстрація перехідної функції із індикацією умовних позначень умовних позначень часу подана на рис. 3.1.2.

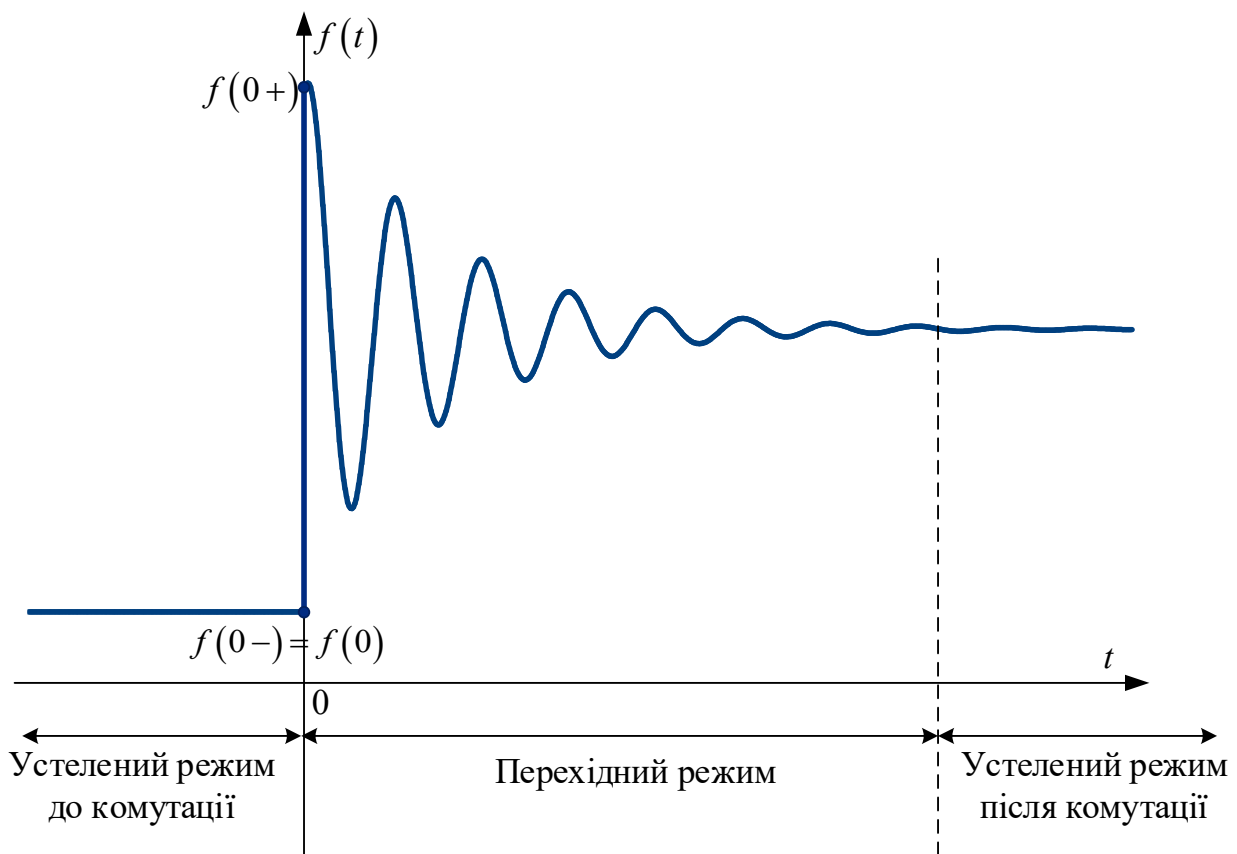


Рисунок 3.1.2 – Ілюстрація можливої зміни в часі електричної величини в колі постійного струму при комутації

Момент комутації визначає початок перехідного процесу. Під час обчислення електричних величин в момент комутації використовується індикатор часу $t = 0$. На часовій діаграмі електричні величини в момент комутації відкладаються на вертикальні осі відносно початку координат.

Момент комутації умовно поділяється на момент часу безпосередньо перед комутацією ($t = 0 -$) та момент часу безпосередньо після комутації ($t = 0 +$). Для позначення часу, коли коло працює в усталеному режимі після комутації, використовується індикатор $t = \infty$.

З точки зору часу момент комутації ($t = 0$), момент безпосередньо перед комутацією ($t = 0 -$) та момент безпосередньо після комутації ($t = 0 +$) – це один і той самий момент часу. Введення таких умовних понять моментів часу дозволяє аналітично описати неможливість миттєвої зміни енергії електричного і магнітного полів в момент комутації та забезпечує зручність математичного оцінки початкових умов.

Оскільки енергії магнітного та електричного полів, які нерозривно пов'язана із струмом котушки індуктивності та напругою конденсатора відповідно, не можуть миттєво змінити своїх значень в момент комутації, а отже не можуть миттєво змінити свого значення струм котушки та напруга конденсатора. Аналіз виразів енергії магнітного та електричного полів обґрунтовує вищесказане та лежить в основі формулювань законів комутації.

Перший закон комутації: струм (потокоццеплення) у гілці з індуктивним елементом у перший момент часу після комутації приймає теж значення, яке мав безпосередньо перед комутацією, а потім з цього значення струм (потокоццеплення) починає плавно змінюватися. Математичне подання першого закону комутації відносно струму через котушку індуктивності має вигляд:

$$i_L(0+) = i_L(0-)$$

Наслідки:

- знеструмлена гілка з котушкою індуктивності в момент комутації може бути еквівалентна розриву так як $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$;
- котушка індуктивності зі струмом безпосередньо в момент комутації може бути еквівалентно подана джерелом струму.

Другий закон комутації: напруга (заряд) ємнісного елементу в перший момент часу після комутації приймає теж значення, яке було безпосередньо перед комутацією, а потім із цього значення напруга (заряд) починає плавно

змінюватися. Математичне подання другого закону комутації відносно напруги ємнісного елементу має вигляд:

$$u_C(0+) = u_C(0-)$$

Наслідки:

- розряджений конденсатор в момент комутації еквівалентний короткому замиканню так як $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$;

- заряджений конденсатор до величини U_0 безпосередньо в момент комутації еквівалентний джерелу напруги.

В електричних колах, що складаються лише з резистивних елементів, енергія електромагнітного поля не запасається, тому перехідні процеси в них не виникають, і усталені режими встановлюються миттєво (стрибком).

3.1.3. Основи класичного методу аналізу перехідних процесів

Аналітичний аналіз перехідних процесів дозволяє визначити закони зміни струмів та/або напруг на ділянках кола у проміжку часу від моменту комутації до встановлення нового усталеного режиму. Розуміння законів зміни перехідних функцій дозволяє встановити тривалість та рівень відхилення перехідних напруг та струмів від усталених, для подальшого регулювання часу перехідного процесу, вибору систем захисту обладнання від перенапруги та інших завдань, які будуть вивчатись в спеціальних професійних курсах.

Наприклад, якщо в досліджуваній гілці кола постійного струму визначеної конфігурації до комутації існував усталений струм I_1 , а в усталеному режимі після комутації він набуває значення I_2 , то завдання аналізу полягає у визначенні закону зміни перехідного струму $i(t)$ на проміжку часу від моменту комутації ($t = 0$) до моменту t_1 , коли перехідний процес можна вважати завершеним.

Під час аналізу перехідних процесів виходять з припущення, що до моменту комутації в колі вже завершився попередній перехідний процес. Тобто, вважається, що до комутації коло перебуває в усталеному режимі.

Суть класичного методу полягає у побудові математичної моделі кола у вигляді системи диференціальних рівнянь, складених для досліджуваної схеми на основі законів Кірхгофа або методу контурних струмів чи вузлових потенціалів. При цьому враховуються залежності між миттєвими значеннями напруг і струмів на резистивних, індуктивних та ємнісних елементах:

$$u_R(t) = Ri_R(t); \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}; \quad i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Пропонується встановити узагальнений порядок аналізу перехідних процесів класичним методом на базі кола заряду конденсатора через активно-індуктивне навантаження від джерела змінної напруги (рис. 3.1.3), де комутація здійснюється механічним ключем S .

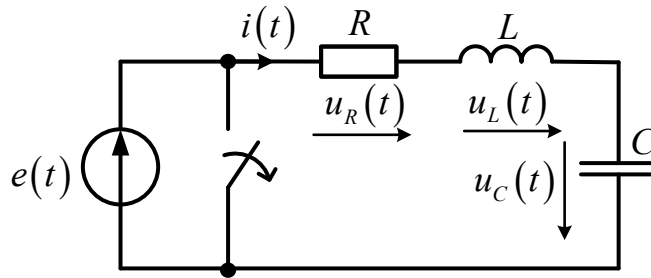


Рисунок 3.1.3 – Схема електричного кола заряду конденсатора від джерела змінної напруги

Електрична рівновага кола (рис. 3.1.3) від моменту комутації описується диференціальним рівнянням на базі другого закону Кірхгофа:

$$\begin{aligned} u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) &= e(t), \\ Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_C(t) &= e(t). \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$\frac{1}{C} \int i_C dt$$

Враховуючи, що через всі елементи послідовного з'єднання протікає один і той самий струм, який для заданого кола визначається виразом зв'язку між напругою та струмом на ємнісному елементі $\left(i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \right)$, то вихідне рівняння електричної рівноваги (3.1.1) можна подати неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку записаним відносно невідомої перехідної напруги на конденсаторі $u_C(t)$:

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = e(t). \quad (3.1.2)$$

З точки зору математики повний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами знаходять у вигляді суми часткового розв'язку неоднорідного $u'_C(t)$ й повного розв'язку відповідного однорідного рівняння $u''_C(t)$:

$$u_C(t) = u'_C(t) + u''_C(t), \quad (3.1.3)$$

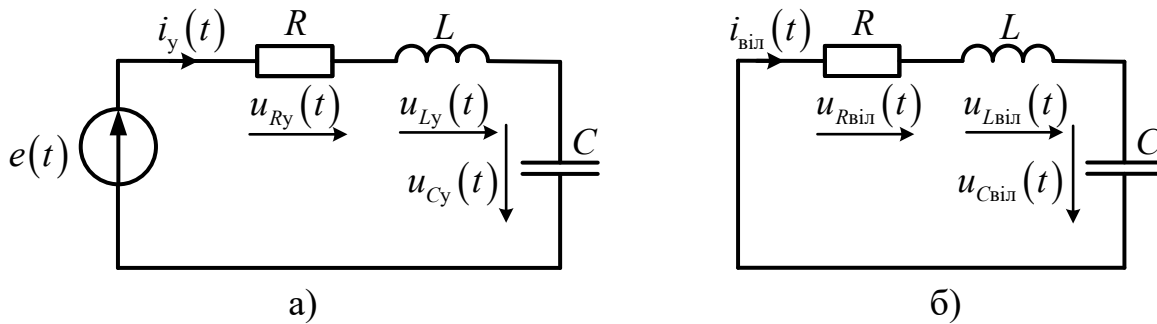


Рисунок 3.1.4 – Візуальна схематична ілюстрація застосування методу накладання до аналізу перехідних процесів

Диференціальне рівняння (3.1.2) записано на базі другого закону Кірхгофа і залишається справедливим як для моменту комутації, так і для будь-якого моменту часу після, при цьому права частина рівняння (3.1.2) являє собою напругу джерела живлення. Припустивши, що перехідний процес в колі (рис. 3.1.3) завершено і коло перебуває в усталеному стані, то рівняння електричної рівноваги (3.1.2) можна подати як

$$LC \frac{d^2 u_{Cy}(t)}{dt^2} + RC \frac{du_{Cy}(t)}{dt} + u_{Cy}(t) = e(t), \quad (3.1.4)$$

де $u_{Cy}(t)$ – усталена величина напруги на конденсаторі.

Отже, визначення часткового розв'язку неоднорідного рівняння можна звести до аналізу усталеного режиму кола після комутації:

$$u_{Cy}(t) = u'_C(t).$$

Схема заміщення вихідного кола (рис. 3.1.3) в усталеному стані після комутації зображена на рис. 3.1.4, а.

У загальному випадку аналізу, розрахунок усталених складових перехідних напруг та струмів кола після комутації визначається його схемною структурою та реалізується будь-яким з методів аналізу лінійних кіл у відповідності до форми сигналу джерела енергії.

Друга складова $u_C''(t)$ шуканої перехідної напруги конденсатора (3.1.3) визначається шляхом розв'язання однорідного диференційного рівняння, одержаного з виразу (3.1.2) за рахунок прирівняння правої частини до нуля.

$$LC \frac{d^2 u_C''(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C''(t)}{dt} + u_C''(t) = 0. \quad (3.1.5)$$

Фізично це означає, що досліджуване коло звільняється від дії джерела енергії, що проілюстровано на схемі заміщення вільного режиму роботи заданого кола після комутації (рис. 3.1.4, б) отриманої шляхом синтезу рівняння (3.1.4).

Складові перехідних функцій, визначені при розв'язанні однорідного диференціального рівняння, називаються вільними, а їх протікання в колі без джерела енергії пояснюється запасом енергії накопиченої реактивними елементами.

Вільна складова електричного струму (напруги) – електричний струм (напруга), що дорівнює різниці перехідного й усталено струмів (напруг) після комутації.

Саме вільна складова визначає закон зміни перехідної функції, що пояснюється прямим розв'язанням однорідного диференційного рівняння за теорією викладеною в курсі вищої математики [3].

Для наочної демонстрації сказаного пропонується узагальнено виконати аналіз однорідного диференційного рівняння (3.1.5). Згідно введення поняття вільної складової та відповідності $u_{C\text{віль}}(t) = u_C''(t)$ рівняння (3.1.5) може бути подано як

$$\frac{d^2 u_{C\text{віль}}(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_{C\text{віль}}(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_{C\text{віль}}(t) = 0 \quad (3.1.6)$$

З теорії вищої математики відомо, що форма запису розв'язку однорідного диференційного рівняння залежить від виду коренів його характеристичного

рівняння. Характеристичне рівняння для випадку однорідного диференційного рівняння (3.1.6) набуває вигляд:

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0, \quad (3.1.7)$$

де p – корінь характеристичного рівняння. Розв’язок характеристичного рівняння дозволяє визначити його корені. Керуючись теорією вищої математики за видом кореня обирається форма запису вільної складової перехідної функції (див. таблицю 3.1.1).

Таблиця 3.1.1 – Відповідність форми запису вільної складової перехідної функції кореню характеристичного рівняння

Корені характеристичного рівняння $(p_1, p_2, \dots, p_n)$	Вирази вільної складової
Дійсні й різні	$f_{\text{віль}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$
Дійсні і рівні $p_1 = p_2 = \dots = p_n$	$f_{\text{віль}}(t) = \sum_{k=1}^m A_k t^{k-1} e^{p_k t} + \sum_{k=m+1}^n A_k e^{p_k t}$
Комплексно-спряжені $p_{k,k+1} = -\delta_k \pm j\omega'_k$	$f_{\text{віль}}(t) = e^{-\delta_k t} (A_k \cos \omega'_k t + A_{k+1} \sin \omega'_k t) =$ $= B_k e^{-\delta_k t} \sin(\omega'_k t + \psi_k)$

З аналізу виразів, які описують закон зміни вільної складової перехідної функції для різних випадків коренів характеристичного рівняння (табл. 3.1.1) видно:

- якщо корені дійсні та різні або дійсні і рівні, то вільна складова змінюється за експоненціальним законом;
- якщо корені комплексно-спряжені, то вільна складова являє собою синусоїду обмежену експоненціальними функціями (затухаючу синусоїду).

Такий аналіз дозволяє ввести поняття аперіодичної та коливальної складових вільної складової перехідної функції:

аперіодична складова вільного струму (напруги) – складова вільного струму (напруги), яка змінюється в часі без зміни його знаку [1, 2];

коливальна складова вільного струму (напруги) – складова вільного струму (напруги), яка змінюється в часі зі зміною його знаку та зумовлена

взаємним обміном енергією між електричним полем конденсаторів і магнітним полем індуктивних котушок електричного кола [1, 2] .

Отже, корінь характеристичного рівняння визначає характер перебігу перехідного процесу:

- якщо корені дійсні та різні, то має місце **аперіодичний перехідний процес**, характерний для кіл з одним реактивним елементом;
- якщо корені дійсні та рівні, то має місце **критичний аперіодичний перехідний процес**;
- якщо корені комплексно-спряжені, то має місце **коливальний перехідний процес**, характерний для кіл з двома різнохарактерними реактивними елементами.

Схематично аналіз перехідного процесу в лінійних колах може бути представлений як результат накладання двох режимів: усталеного після комутації та вільного (рис. 3.1.4). А кожна перехідна напруга та струм кола є сумою відповідних складових отриманих шляхом аналізу усталеного післякомутаційного та вільного режимів окремо.

Результуючі перехідні функції для кола обраного для аналізу (рис. 3.1.3) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}u_C(t) &= u_{Cy}(t) + u_{C\text{віль}}(t); \\i(t) &= i_y(t) + i_{\text{віль}}(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}; \\u_L(t) &= u_{Ly}(t) + u_{L\text{віль}}(t) = L \frac{di(t)}{dt}; \\u_R(t) &= u_{Ry}(t) + u_{R\text{віль}}(t) = Ri(t).\end{aligned}$$

Кожна із форм запису вільної складової (табл. 3.1.1) містить множник біля експоненційної функції. Ці множники (A_k, B_k) називаються **постійними інтегрування** та розраховуються з початкових умов.

Розрізняють незалежні та залежні початкові умови:

- **незалежні початкові умови** – значення струмів через індуктивності й значення напруг на ємностях, відомі з аналізу докомутаційного режиму роботи кола, які за законами комутації не змінюються стрибком;
- **залежні початкові умови** – значення струмів і напруг в момент комутації на які не розповсюджується дія законів комутації та є обумовленими незалежними початковими умовами.

Швидкість затухання експоненційної складової, а отже і тривалість перехідного процесу, визначається її аргументом. Розрахунок тривалості перехідного процесу здійснюється за імперичною формулою:

$$t_{\text{пн}} = (3 \dots 4) \tau,$$

де τ – стала часу.

Стала часу – величина, яка характеризує інерційність електричного кола, в якому вільний струм є експоненційною функцією часу і яку визначають як інтервал часу, протягом якого струм в цьому колі спадає в $e=2,72$ разів, де e – основа натурального логарифму [1].

Для випадків аперіодичного перехідного процесу стала часу обернена до мінімального за модулем кореня характеристичного рівняння:

$$\tau = \frac{1}{|p_{\min}|}.$$

Для випадків коливального перехідного процесу стала часу обернена до модуля реальної складової комплексно-спряженого кореня характеристичного рівняння:

$$\tau = \frac{1}{|\delta|}.$$

Логарифмічний декримент коливального струму (напруги) – характеристика коливальної складової вільної складової перехідної функції, яку визначають як натуральний логарифм відношення двох сусідніх максимальних значень струму (напруги) одного знаку:

$$\Delta = \ln \left(\frac{f(t + T_0)}{f(t)} \right) = \ln e^{\delta T_0} = \delta T_0,$$

де T_0 – період затухаючої перехідної функції.

Розглянутий аналіз перехідних процесів в колі, поданому на рис. 3.1.3 дозволяє сформулювати рекомендовані порядки розрахунку перехідних функцій класичним методом та виявити ряд проблем, які потребують окремого вивчення.

Тема 3.2. Класичний метод аналізу перехідних процесів в колах першого порядку

3.2.1. Послідовність аналізу перехідних процесів в колах першого порядку класичним методом

Рекомендована послідовність аналізу перехідних процесів у колах першого порядку класичним методом у загальному наближенні:

Крок 1. Аналіз структури кола та приведення схеми до її еквіваленту.

Подати вихідне коло його еквівалентом кола після комутації та задати додатні напрями струмів та напруг, вважаючи їх перехідними функціями часу незалежно від форми сигналу джерела.

Якщо коло містить ділянки з послідовним або паралельним з'єднанням реактивних елементів, подати їх еквівалентами.

Крок 2. Запис математичної моделі перехідного процесу кола.

Для створеного еквівалента кола у п.1 записати систему рівнянь у диференційній формі вважаючи, що всі струми та напруги кола є перехідними функціями часу. Система рівнянь формується на базі одного з методів аналізу лінійних електричних кіл: прямого застосування законів Кірхгофа, контурних струмів, вузлових потенціалів або еквівалентного генератора.

Крок 3. Застосування методу накладання.

Подати всі перехідні напруги та струми кола як суми відповідних усталених та вільних складових:

$$i_n(t) = i_{ny}(t) + i_{n\text{віль}}(t);$$

$$u_{Rn}(t) = u_{Rny}(t) + u_{Rn\text{віль}}(t);$$

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{C\text{віль}}(t) \text{ або } u_L(t) = u_{Ly}(t) + u_{L\text{віль}}(t),$$

де n – номер гілки/елементу кола після комутації.

Крок 4. Аналіз усталеного стану кола після комутації.

4.1. Подати вихідне коло як еквівалент кола після комутації в усталеному стані з урахуванням форми сигналу джерела енергії.

4.2. Обрати метод аналізу усталеного стану кола та визначити величини його струмів та напруг. Якщо коло живиться від джерела енергії постійного струму, то котушка індуктивності характеризується нульовим опором, а отже її еквівалент – перемичка; конденсатор характеризується нескінченно великим опором, а отже його еквівалент – розрив. Якщо коло живиться від джерела енергії змінного струму, що

змінюється за законом синуса, розрахунок проводиться із використанням комплексного обчислення, а результуючі величини усталених складових подаються виключно миттєвими функціями.

Крок 5. Аналіз вільного стану кола після комутації.

5.1. Створити еквівалент кола після комутації, який характеризує роботу у вільному стані. Для цього в колі після комутації подати джерела енергії їх внутрішніми опорами. Вважати, що в колі без джерел енергії протікають вільні струми та виникають вільні напруги на елементах, напруги яких відповідають обраним для усталених складових.

5.2. Для створеного еквівалента кола, що характеризує вільний стан, скласти систему диференціальних рівнянь. Дана система відповідає системі складених у п. 2 та записаних відносно вільних складових перехідних функцій за умови дії нульових величин джерел енергії.

5.3. Привести систему рівнянь п. 5.2 до одного рівняння, записаного відносно однієї невідомої вільної складової перехідної функції.

Якщо коло містить конденсатор, то доцільно приводити систему до рівняння відносно невідомої вільної складової перехідної напруги конденсатора.

Якщо коло містить котушку індуктивності, то доцільно приводити систему до рівняння відносно невідомої вільної складової перехідного струму котушки.

5.4. Для диференціального рівняння, отриманого в п. 5.3, записати його характеристичне та визначити корінь.

Кола першого порядку містять лише один реактивний елемент, а отже у всіх випадках корінь характеристичного рівняння буде один як дійсне число.

5.5. Записати всі вільні складові перехідних функцій як

$$i_{\text{нвіль}}(t) = A_n e^{pt};$$

$$u_{\text{Rнвіль}}(t) = B_{Rn} e^{pt};$$

$$u_{\text{Cвіль}}(t) = B_C e^{pt} \text{ або } u_{\text{Lвіль}}(t) = B_L e^{pt},$$

де A_n, B_{Rn}, B_C, B_L – сталі інтегрування;

p – корінь характеристичного рівняння.

Крок 6. Формування системи невідомих перехідних функцій у загальному вигляді.

Переписати систему шуканих перехідних функцій з урахуванням розрахованих усталених величин (п. 4) та загального вигляду вільних (п. 5.5):

$$i_n(t) = i_{ny}(t) + A_n e^{pt};$$

$$u_{Rn}(t) = u_{Rny}(t) + B_{Rn} e^{pt};$$

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + B_C e^{pt} \quad \text{або} \quad u_L(t) = u_{Ly}(t) + B_L e^{pt}.$$

Крок 7. Розрахунок сталих інтегрування.

Розрахунок сталих інтегрування проводиться на базі початкових умов, тобто постає необхідність розрахувати значення всіх струмів та напруг в момент комутації.

7.1. Визначення початкових умов.

7.1.1. Розрахунок незалежних початкових умов.

Приймаючи до уваги закони комутації розрахунок струму через котушку індуктивності та напруги конденсатора проводиться з аналізу усталеного режиму роботи вихідного кола до комутації. Тобто коло до комутації подається еквівалентом усталеного режиму роботи, за аналогією створення еквіваленту в п. 4.1, та виконується розрахунок струму через котушку індуктивності ($i_L(0-)$) та напруги конденсатора ($u_C(0-)$). Ці величини в момент комутації рівні значенням до комутації:

$$i_L(0-) = i_L(0);$$

$$u_C(0-) = u_C(0).$$

7.1.2. Розрахунок залежних початкових умов.

Розрахунок всіх інших напруг ($u_{Rn}(0), u_L(0)$) та струмів ($i_n(0), i_C(0)$) проводиться на базі еквіваленту зкомутowanego кола (п. 4.1) за умови відомого струму через котушку або напруги на конденсаторі.

7.2. Безпосередній розрахунок сталих інтегрування.

Записати систему п. 6 відносно моменту комутації:

$$\begin{aligned}
i_n(0) &= i_{ny}(0) + A_n e^{pt} \Big|_{t=0} = i_{ny}(0) + A_n; & A_n &= i_n(0) - i_{ny}(0); \\
u_{Rn}(0) &= u_{Rny}(0) + B_{Rn} e^{pt} \Big|_{t=0} = u_{Rny}(0) + B_{Rn}; & B_{Rn} &= u_{Rn}(0) - u_{Rny}(0); \\
u_C(0) &= u_{Cy}(0) + B_C e^{pt} \Big|_{t=0} = u_{Cy}(0) + B_C & \Rightarrow B_C &= u_C(0) - u_{Cy}(0) \\
&\text{або} & & \text{або} \\
u_L(0) &= u_{Ly}(0) + B_L e^{pt} \Big|_{t=0} = u_{Ly}(0) + B_L. & B_L &= u_L(0) - u_{Ly}(0).
\end{aligned}$$

Крок 8. Визначення результуючих законів зміни перехідних функцій.

Систему перехідних напруг та струмів кола переписати з врахуванням розрахованих сталих інтегрування.

Крок 9. Побудова часових діаграм.

Для побудови часових діаграм необхідно чітко розуміти тривалість перехідного процесу:

$$t_{\text{пн}} = (3 \dots 4) \tau,$$

де $\tau = \frac{1}{|p|}$ – стала часу.

Далі побудова часових діаграм здійснюється або вручну, або із використання спеціальних програм. В обох випадках точність побудови залежить від кроку обчислення значень перехідних функцій у моменти часу на проміжку часу перехідного процесу.

3.2.2. Коротке замикання у контурі з котушкою індуктивності

На рис. 3.2.1 подано схему заміщення для аналізу короткого замикання реальної котушки індуктивності в колі постійного струму. Реальна котушка представлена у вигляді послідовного з'єднання ідеальної індуктивності L та активного опору R .

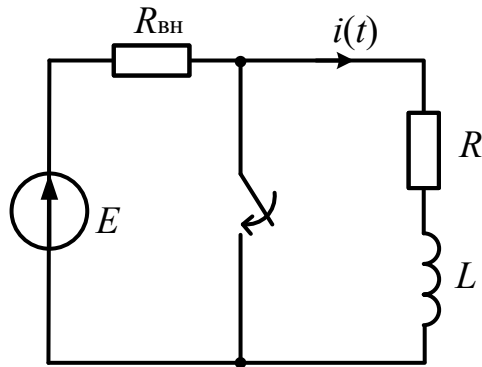


Рисунок 3.2.1 – Схематична ілюстрація короткого замикання у RL контурі

Еквівалентна схема (рис. 3.2.1) складена з урахуванням припущення, що до моменту короткого замикання котушка індуктивності перебувала в усталеному режимі та живилась від джерела постійної напруги, поданого послідовним з'єднанням ЕРС та внутрішнього опору. У момент часу $t=0$ відбувається комутація, яка спричиняє коротке замикання між затискачами котушки. На рис. 3.2.1 комутація схематично подана ключем S , який переходить у стан замикання.

Комутація змінює структуру кола, внаслідок чого виникає перехідний процес. Під час цього процесу в колі протікає перехідний струм. За припущення, що при перехідному процесі величина струму змінюється з часом, то на схемі та під час аналітичних розрахунків перехідні струм кола та, відповідно, напруги на елементах позначаються як миттєві величини навіть за умови, що коло живиться від джерела постійної напруги.

Диференціальне рівняння для RL контура після комутації, складене за законом Кірхгофа, має вигляд:

$$u_R(t) + u_L(t) = 0 \Rightarrow L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0. \quad (3.2.1)$$

Кожну складову рівняння (3.2.1): перехідний струм та напруги на елементах кола, згідно теорії класичного аналізу перехідних процесів, можна подати сумою усталеної та вільної складових:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_y + i_{\text{віль}}(t) \\ u_L(t) &= U_{Ly} + u_{L\text{віль}}(t) \\ u_R(t) &= U_{Ry} + u_{R\text{віль}}(t) \end{aligned}$$

Розрахунок усталених складових перехідних функцій зводиться до аналізу кола після комутації за умови завершення перехідного процесу. Оскільки у колі після комутації відсутні джерела живлення, то всі усталені складові рівні нулю:

$$I_y = 0; \quad U_{Ly} = 0; \quad U_{Ry} = 0.$$

Закон зміни вільних складових перехідних функцій у RL -контурі визначається за коренем характеристичного рівняння. Характеристичне рівняння, у свою чергу, складається на основі однорідного диференціального рівняння (3.2.1) записаного відносно вільної складової струму, яке описує вільний стан кола після комутації. Формування характеристичного рівняння реалізується шляхом заміни диференціалу невідомої вільної складової перехідної функції параметром $p \left(\frac{di_{\text{віль}}}{dt} = p \right)$:

$$\begin{aligned} L \frac{di_{\text{віль}}}{dt} + Ri_{\text{віль}} &= 0 \\ pL + R &= 0 \\ p &= -\frac{R}{L} \end{aligned}$$

де p , с^{-1} – корінь характеристичного рівняння.

Оскільки RL -контур містить один реактивний елемент, то таке коло описуються диференціальним рівнянням першого порядку. Розв'язок характеристичного рівняння диференціального рівняння першого порядку дає один дійсний корінь. Отже, вільні складові перехідних струму та напруг за теорією математичного аналізу подаються експоненціальними функціями (див. табл. 3.1.1) як

$$\begin{aligned} i_{\text{віль}}(t) &= Ae^{pt}, \\ u_{L\text{віль}}(t) &= B_L e^{pt}, \\ u_{R\text{віль}}(t) &= B_R e^{pt} \end{aligned}$$

де A, B_L, B_R – невідомі постійні інтегрування.

Система перехідних функцій записана у загальному вигляді з урахуванням виконаних розрахунків набуває вигляду:

$$i(t) = I_y + i_{\text{вкл}}(t) = Ae^{pt},$$

$$u_L(t) = U_{Ly} + u_{L\text{вкл}}(t) = B_L e^{pt},$$

$$u_R(t) = U_{Ry} + u_{R\text{вкл}}(t) = B_R e^{pt}.$$

Розрахунок сталих інтегрування (A, B_L, B_R) базується на визначенні початкових умов. Тобто, для розрахунку сталих інтегрування необхідно розрахувати значення струму $i(0)$ та напруг $u_L(0)$ і $u_R(0)$ в момент комутації.

Оскільки перехідний струм протікає через котушку індуктивності, то за першим законом комутації в момент замикання ключа величина струму не може змінитись миттєво. Величина струму в момент комутації розраховується з аналізу усталеного режиму роботи кола до комутації як

$$i(0) = i(0_-) = \frac{E}{R_{\text{вн}} + R}$$

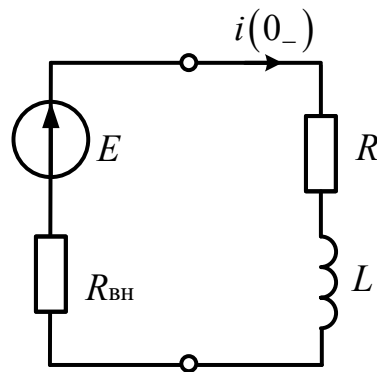


Рисунок 3.2.2 – Схематична ілюстрація усталеного режиму роботи кола до короткого замикання (комутації) у RL контурі

Перехідні напруги на котушці та резисторі в момент комутації можуть змінювати свої значення стрибком, у порівнянні з їх величинами до комутації. Ці величини розраховуються для зкомутованого кола в момент часу $t = 0$ та за умови протікання $i(0) = \frac{E}{R_{\text{вн}} + R}$:

- напруга на резистивному елементі визначається за законом Ома

$$u_R(0) = i(0)R = \underbrace{\left(\frac{E}{R_{\text{вн}} + R} \right)}_{I_0} R = I_0 R;$$

- напруга на котушці індуктивності визначається з розподілу напруг у скомп'ютованому колі за другим законом Кірхгофа:

$$u_L(0) + u_R(0) = 0 \Rightarrow u_L(0) = -u_R(0) = -I_0 R.$$

прирівнюючи його значення $i(0) = A$ у момент $t = (0)$ до значення $i(0)$, одержуємо невідомі константи

$$i(0) = I_y + i_{\text{вкл}}(0) = 0 + Ae^{p \cdot 0} = \frac{E}{R_{\text{вн}} + R} \Rightarrow A = \frac{E}{R_{\text{вн}} + R};$$

$$u_L(0) = U_{Ly} + u_{L\text{вкл}}(0) = 0 + B_L e^{p \cdot 0} = -I_0 R \Rightarrow B_L = -I_0 R;$$

$$u_R(0) = U_{Ry} + u_{R\text{вкл}}(0) = 0 + B_R e^{p \cdot 0} = I_0 R \Rightarrow B_R = I_0 R.$$

Результуючі вирази перехідних струму та напруг:

$$i(t) = I_y + i_{\text{вкл}}(t) = Ae^{pt} = \frac{E}{R_{\text{вн}} + R} e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

$$u_L(t) = U_{Ly} + u_{L\text{вкл}}(t) = B_L e^{pt} = -I_0 R e^{-\frac{R}{L}t} = -U_L e^{-\frac{R}{L}t},$$

U_L

$$u_R(t) = U_{Ry} + u_{R\text{вкл}}(t) = B_R e^{pt} = I_0 R e^{-\frac{R}{L}t} = U_R e^{-\frac{R}{L}t}.$$

$U_L = U_R$

Перехідна напруга котушки може бути визначена і як

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{R_{\text{вн}} + R} e^{-\frac{R}{L}t} \right) = -L \cdot \underbrace{\frac{E}{R_{\text{вн}} + R}}_{I_0} \cdot \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = -I_0 R e^{-\frac{R}{L}t} = -U_L e^{-\frac{R}{L}t}.$$

U_L

Тривалість перехідного процесу визначається як $t_{\text{пн}} = (3...4)\tau$,

де $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{R}$ – стала часу.

Величину сталої часу можна визначити графічно за часовими діаграмами будь-якої з перехідних функцій, наведених на рис. 3.2.3. Для цього на графіку перехідної функції в довільно обраній точці проводиться дотична до кривої. Ця дотична продовжується до її перетину з лінією, що відповідає усталеному значенню даної функції. Із точки дотику до кривої опускається перпендикуляр на лінію усталеної величини. Відстань за віссю часу між точками перетину дотичної та перпендикуляра з лінією усталеного значення відповідає сталі часу кола.

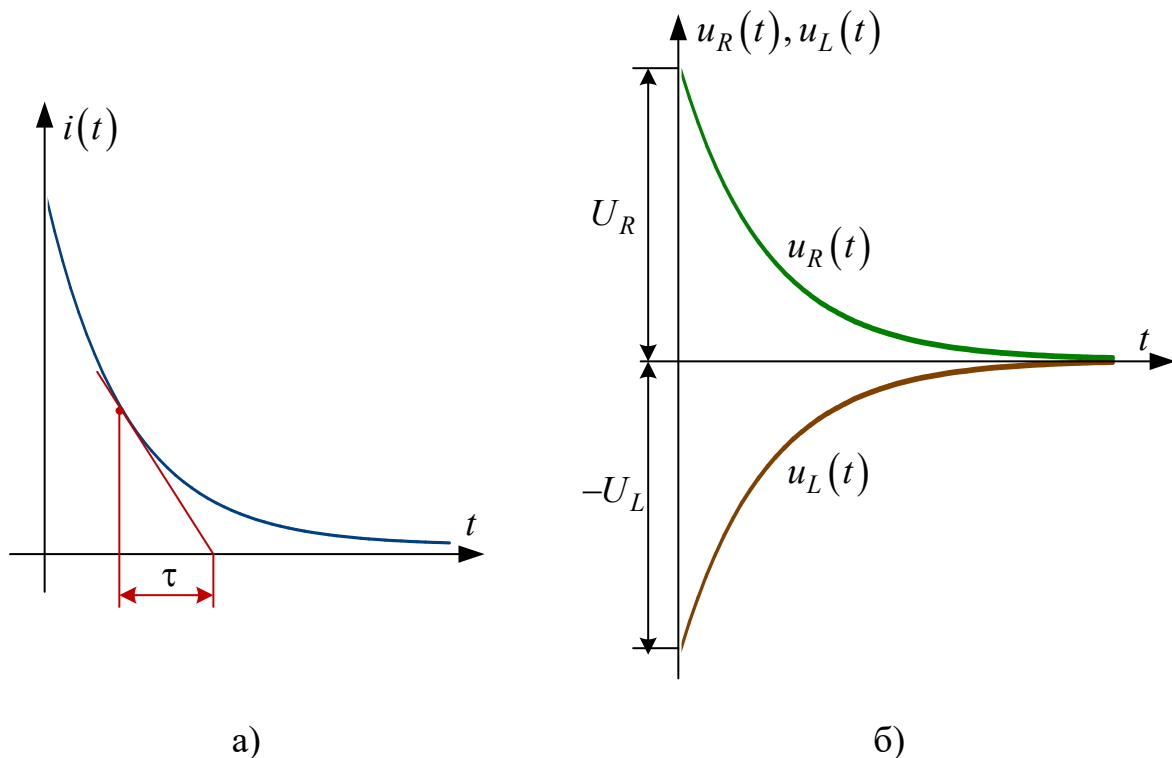


Рисунок 3.2.3 – Часові діаграми перехідних струму та напруг RL контура

Висновки за результатами аналітичного аналізу:

1. За умови короткого замикання в RL колі перехідний струм змінюється аперіодично за експоненціальним законом від усталеного докомутаційного значення до нуля.
2. Швидкість затухання перехідного процесу обернено пропорційна активному опору кола $\left(\tau = \frac{L}{R}\right)$. Відповідно, збільшення опору призводить до скорочення тривалості перехідного процесу.
3. У момент комутації струм у колі та, як наслідок, напруга на резистивному елементі не зазнають стрибкоподібної зміни:

$$i(0_-) = i(0) = \frac{E}{R_{\text{вн}} + R};$$

$$u_R(0-) = u_R(0) = I_0 R = U_R.$$

Водночас напруга на котушці індуктивності в момент комутації змінюється миттєво від нуля до $-U_L$: $u_L(0-) = 0$; $u_L(0) = -I_0 R = -U_L$.

4. З енергетичної точки зору перехідний процес характеризується перетворенням енергії магнітного поля котушки на теплові втрати в активному опорі. Опір резистора впливає не на загальну кількість виділеної теплоти W , а на початкове значення струму через котушку та тривалість перехідного процесу. Після завершення процесу вся накопичена в магнітному полі енергія переходить у тепло:

$$W = \int_0^{\infty} i^2 R dt = I_0^2 R \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{LI_0^2}{2}.$$

3.2.3. Вмикання активно-індуктивного навантаження до джерела напруги постійного струму

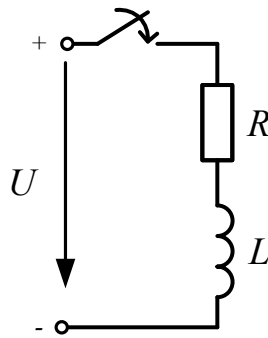


Рисунок 3.2.4 – Схема підключення RL навантаження до джерела постійної напруги

Розподіл напруг на елементах RL контуру (рис. 3.2.4) після його підключення до джерела живлення описується другим законом Кірхгофа:

$$u_R(t) + u_L(t) = U \Rightarrow L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U.$$

Перехідні струм та напруги на елементах кола після комутації подаються умовною сумою усталеної та вільної складових відповідно:

$$i(t) = I_y + i_{\text{віль}}(t) = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t};$$

$$u_L(t) = U_{Ly} + u_{L\text{віль}}(t) = 0 + B_L e^{-\frac{R}{L}t};$$

$$u_R(t) = U_{Ry} + u_{R\text{віль}}(t) = U + B_R e^{-\frac{R}{L}t},$$

де

- розрахунок усталених складових перехідних функцій виконується шляхом аналізу усталеного стану кола після комутації з урахуванням, що живлення RL навантаження здійснюється від джерела постійної напруги:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{U}{R}, \\ U_{Ly} &= 0, \\ U_{Ry} &= U. \end{aligned}$$

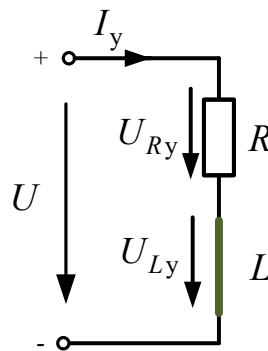


Рисунок 3.2.5 – Схематична ілюстрація усталеного режиму роботи кола після комутації (підключення RL контуру до джерела)

- розрахунок вільних складових виконується шляхом аналізу однорідного диференційного рівняння:

$$\begin{aligned} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) &= U \Rightarrow \\ L \frac{di_{\text{віль}}(t)}{dt} + Ri_{\text{віль}}(t) &= 0, \\ Lp + R &= 0, \\ p &= -\frac{R}{L}; \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} i_{\text{віль}}(t) &= Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t}, \\ u_{L\text{віль}}(t) &= B_L e^{pt} = B_L e^{-\frac{R}{L}t}, \\ u_{R\text{віль}}(t) &= B_R e^{pt} = B_R e^{-\frac{R}{L}t}. \end{aligned} \right.$$

Враховуючи факт, що однорідні рівняння для випадків короткого замикання в RL контурі, розглянутого вище, та його підключення до джерела живлення однакові, то однаковими є як корені характеристичного рівняння, так і вирази вільних складових перехідних функцій.

Для визначення сталих інтегрування розраховуються величини струму та напругу в момент комутації (початкові умови):

- оскільки до комутації струм в контурі не протікав ($i(0_-) = 0$), то в початковий момент часу струм в RL контурі рівний нулю згідно першого закону комутації:

$$i(0) = i(0_-) = 0;$$

- значення струму в момент комутації визначає початкові значення напруги на резистивному та індуктивному елементах:

$$u_R(0) = i(0)R = 0;$$

$$u_R(0) + u_L(0) = U \Rightarrow u_L(0) = U.$$

Сталі інтегрування визначаються з виразів перехідних функцій записаних для моменту комутації ($t = 0$) з урахуванням відомих початкових умов:

$$i(0) = I_y + i_{\text{віль}}(0) = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{U}{R};$$

$$u_L(0) = U_{Ly} + u_{L\text{віль}}(0) = 0 + B_L e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = U \quad \Rightarrow \quad B_L = U;$$

$$u_R(0) = U_{Ry} + u_{R\text{віль}}(0) = U + B_R e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_R = -U.$$

Результуючі вирази перехідних струму та напруг:

$$i(t) = I_y + i_{\text{віль}}(t) = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L} t},$$

$$u_L(t) = U_{Ly} + u_{L\text{віль}}(t) = U e^{-\frac{R}{L} t},$$

$$u_R(t) = U_{Ry} + u_{R\text{віль}}(t) = U - U e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Перехідні напруги на котушці та резисторі можуть бути визначені як

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L} t} \right) = L \cdot \left(-\frac{U}{R} \right) \cdot \left(-\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L} t} = U e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Часові діаграми перехідних струму та напруги подано на рис. 3.2.6.

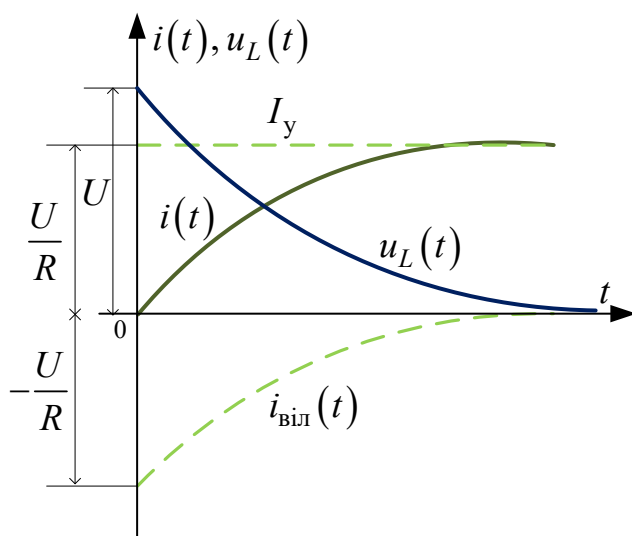


Рисунок 3.2.6 – Часові діаграми перехідних напруги та струму на котушці індуктивності у випадку підключення RL контуру до джерела постійної напруги

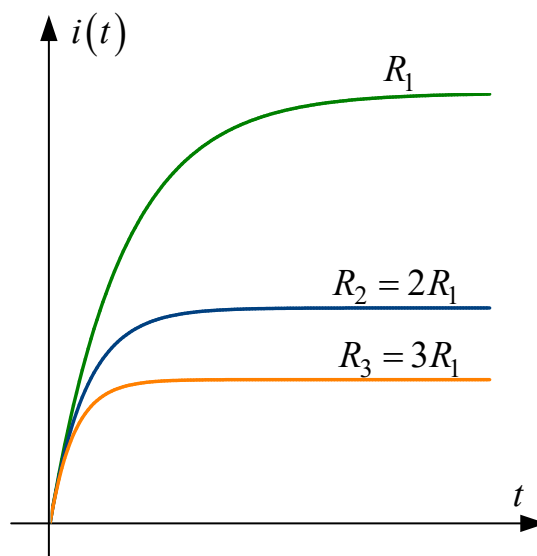


Рисунок 3.2.7 – Часові діаграми перехідного струму котушки індуктивності для трьох випадків опорів резистора у випадку підключення RL контуру до джерела постійної напруги

Висновки за результатами аналітичного аналізу:

1. Характер перехідного процесу та його швидкість не залежить від виду комутації (замикання / розмикання ключа).
2. Збільшення величини опору резистивного елементу призводить до зменшення тривалості перехідного процесу $\left(\tau = \frac{L}{R} \right)$ та зменшення усталеної складової перехідного струму $\left(I_y = \frac{U}{R} \right)$.

3.2.4. Вмикання активно-індуктивного навантаження до джерела напруги синусоїдного струму

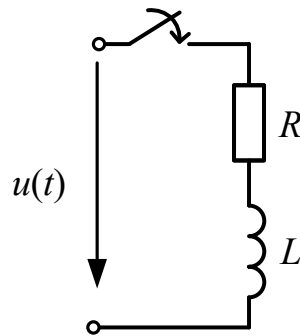


Рисунок 3.2.8 – Схема вмикання RL навантаження до джерела напруги синусоїдного струму

Розподіл напруг на елементах RL контура (рис. 3.2.8) після його підключення до джерела напруги синусоїдного струму $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$ описується другим законом Кірхгофа як і в попередньому випадку:

$$u_R(t) + u_L(t) = u(t) \Rightarrow L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t).$$

Незалежно від форми вхідного сигналу перехідні струм та напруги на елементах кола після комутації подаються як сума усталеної та вільної складових відповідно:

$$i(t) = i_y(t) + i_{\text{віль}}(t) = i_y(t) + Ae^{-\frac{R}{L}t};$$

$$u_L(t) = u_{Ly}(t) + u_{L\text{віль}}(t) = u_{Ly}(t) + B_L e^{-\frac{R}{L}t};$$

$$u_R(t) = u_{Ry}(t) + u_{R\text{віль}}(t) = u_{Ry}(t) + B_R e^{-\frac{R}{L}t},$$

де

- розрахунок усталених складових перехідних функцій виконується шляхом аналізу усталеного стану кола після комутації із використанням комплексного обчислення, оскільки живлення RL навантаження здійснюється від джерела синусоїдної напруги:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \Rightarrow \dot{U}_m = U_m e^{j\psi};$$

- повний опір кола:

$$\underline{Z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)} = Ze^{j\varphi}$$

де

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2};$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right).$$

- усталена складова струму кола:

$$\dot{I}_{my} = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{U_m e^{j\psi}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U_m}{Z} e^{j(\psi-\varphi)} = I_{my} e^{j(\psi-\varphi)} \Rightarrow i_y(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi);$$

- усталена складова напруги на котушці індуктивності:

$$\dot{U}_{Lmy} = \dot{I}_{my} \cdot \omega L e^{j90^\circ} = \frac{U_m \omega L}{Z} e^{j(\psi-\varphi+90^\circ)} \Rightarrow u_{Ly}(t) = \frac{U_m \omega L}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi + 90^\circ).$$

- розрахунок вільних складових виконується шляхом аналізу однорідного диференційного рівняння вирази яких у загальному поданні повністю відповідають отриманим у попередніх аналізах:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) \Rightarrow$$

$$L \frac{di_{\text{віль}}(t)}{dt} + Ri_{\text{віль}}(t) = 0,$$

$$Lp + R = 0,$$

$$p = -\frac{R}{L};$$

$$\left. \begin{aligned} i_{\text{віль}}(t) &= Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t}, \\ u_{L\text{віль}}(t) &= B_L e^{pt} = B_L e^{-\frac{R}{L}t}, \\ u_{R\text{віль}}(t) &= B_R e^{pt} = B_R e^{-\frac{R}{L}t}. \end{aligned} \right\}$$

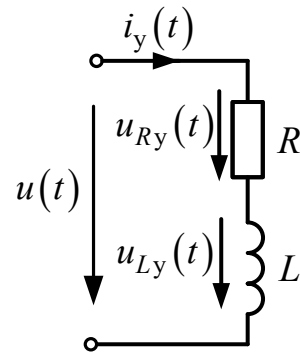


Рисунок 3.2.9 – Схематична ілюстрація усталеного режиму роботи кола після комутації (підключення RL контуру до джерела)

Вирази перехідних струму та напруги на котушці у загальному поданні мають вигляд:

$$i(t) = i_y(t) + i_{\text{вкл}}(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-\frac{R}{L}t};$$

$$u_L(t) = u_{Ly}(t) + u_{L\text{вкл}}(t) = \frac{U_m \omega L}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi + 90^\circ) + B_L e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Розрахунок сталих інтегрування здійснюється на базі початкових умов, тобто з урахуванням, що до комутації коло було знеструмленним ($i(0) = i(0_-) = 0$)

$$i(0) = i_y(0) + i_{\text{вкл}}(0) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega \cdot 0 + \psi - \varphi) + A e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) + A = 0 \Rightarrow$$

$$A = -\frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi);$$

$$u_L(0) = u_{Ly}(0) + u_{L\text{вкл}}(0) = \frac{U_m \omega L}{Z} \sin(\omega \cdot 0 + \psi - \varphi + 90^\circ) + B_L e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{U_m \omega L}{Z} \sin(\psi - \varphi + 90^\circ) + B_L = 0 \Rightarrow$$

$$B_L = -\frac{U_m \omega L}{Z} \sin(\psi - \varphi + 90^\circ).$$

Результуючі вирази перехідних струму та напруги на котушці:

$$i(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t};$$

$$u_L(t) = \frac{U_m \omega L}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi + 90^\circ) - \frac{U_m \omega L}{Z} \sin(\psi - \varphi + 90^\circ) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

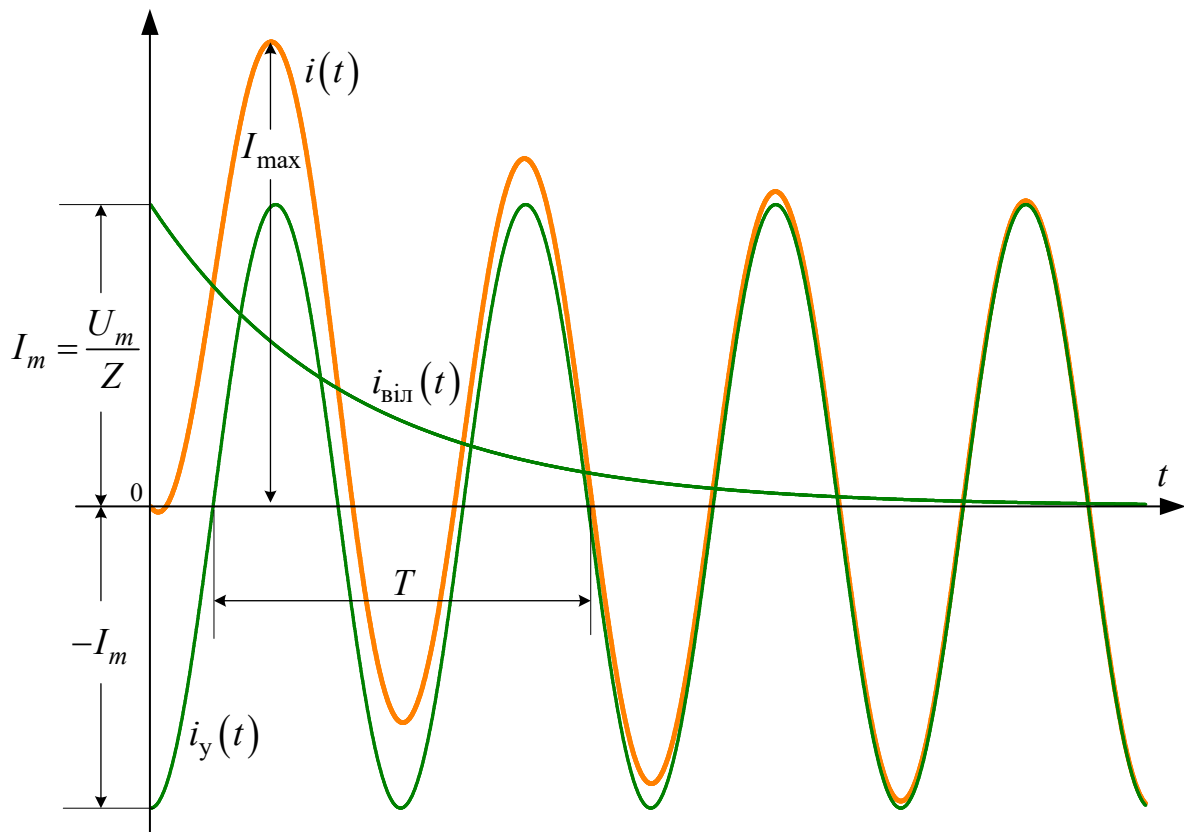


Рисунок 3.2.10 – Часові діаграми перехідних струму та напруг у RL колі при його підключенні до джерела синусоїдної напруги

Висновки за результатами аналітичного аналізу:

1. Якщо в момент вмикання початкова фаза вхідної напруги рівна куту зсуву фаз дорівнює нулю або половині періоду

$$\psi = \varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) = 0 \quad \text{або} \quad \psi = \varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \pi,$$

то вільної складової струму не виникає ($\sin(0) = \sin(\pi) = 0$) і у колі відразу виникає усталений режим:

$$i(t) = i_y(t) = I_m \sin(\omega t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t).$$

2. Якщо в момент вмикання початкова фаза вхідної напруги рівна $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, а отже вільний струм досягає максимального за модулем значення

$$i_{\text{віль}}(0) = \frac{U_m}{Z} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{U_m}{Z}$$

Як результат перехідний струм досягає максимального значення приблизно через половину періоду, однак ні при яких умовах це значення не може перевищувати подвоєної амплітуди усталеного струму (рис. 3.2.10).

3.2.5. Коротке замикання у контурі з конденсатором

На рис. 3.2.11 подано схему заміщення для аналізу розряду конденсатора на активний опір за рахунок короткого замикання в колі.

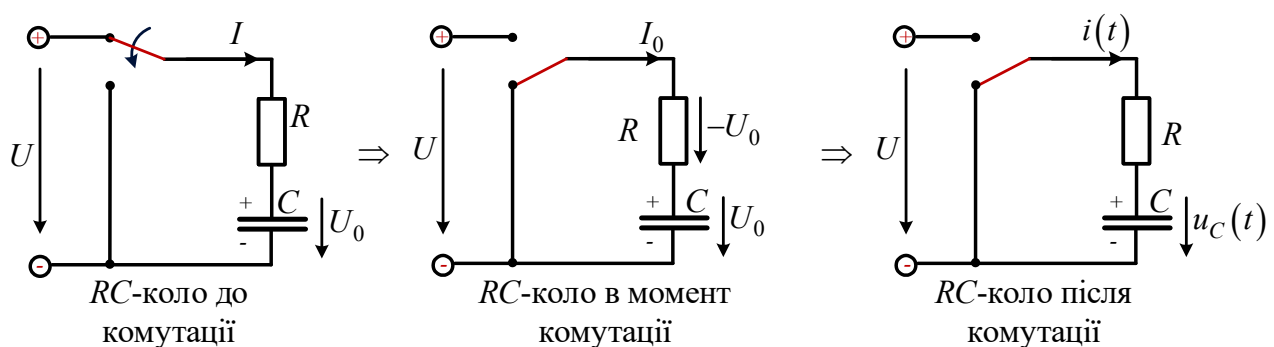


Рисунок 3.2.11 – Схема короткого замикання у RC колі

Виконання аналізу перехідних процесів в колах розряду (рис. 3.2.11) потребує врахування величини напруги конденсатора до комутації. Для уніфікації можливих випадків початкових умов напруги конденсатора пропонується прийняти, що до комутації напруга конденсатора рівна величині U_0 :

$$u_C(0_-) = U_0.$$

Енергетичний стан кола після комутації описується рівнянням

$$Ri(t) + u_C(t) = 0,$$

яке може бути подано відносно невідомої напруги конденсатора шляхом заміни

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt}. \text{ Після заміни вираз набуде вигляду}$$

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0.$$

Розв'язок даного однорідного диференційного рівняння дасть закон зміни перехідної напруги на конденсаторі.

Згідно теорії класичного аналізу перехідних процесів будь-яку перехідну функцію можна подати у вигляді суми усталеної та вільної складових:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_y + i_{\text{віль}}(t), \\ u_C(t) &= U_{Cy} + u_{C\text{віль}}(t), \\ u_R(t) &= U_{Ry} + u_{R\text{віль}}(t). \end{aligned}$$

Усталені складові струму та напруги конденсатора дорівнюють нулю:

$$U_{Cy} = 0, \quad I_y = 0.$$

Розрахунок вільних складових зводиться до аналізу характеристичного рівняння та визначення його кореня:

$$\begin{aligned} RC \frac{du_{C\text{віль}}(t)}{dt} + u_{C\text{віль}}(t) &= 0 \\ RCp + 1 &= 0 \\ p &= -\frac{1}{RC} \end{aligned}$$

Система перехідних функцій записана у загальному вигляді з урахуванням виконаних розрахунків набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
i(t) &= I_y + i_{\text{вкл}}(t) = Ae^{pt}, \\
u_C(t) &= U_{Cy} + u_{C\text{вкл}}(t) = B_C e^{pt}, \\
u_R(t) &= U_{Ry} + u_{R\text{вкл}}(t) = B_R e^{pt}.
\end{aligned}$$

де A, B_C, B_R – невідомі постійні інтегрування.

Аналіз системи перехідних функцій в момент комутації (при $t = 0$) дозволяє визначити сталі інтегрування:

$$\begin{aligned}
i(0) &= I_y + i_{\text{вкл}}(0) = 0 + Ae^{-\frac{1}{RC} \cdot 0} = -\frac{U_0}{R} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{U_0}{R}; \\
u_C(0) &= U_{Cy} + u_{C\text{вкл}}(0) = 0 + B_C e^{-\frac{1}{RC} \cdot 0} = U_0 \quad \Rightarrow \quad B_C = U_0; \\
u_R(0) &= U_{Ry} + u_{R\text{вкл}}(0) = 0 + B_R e^{-\frac{1}{RC} \cdot 0} = -U_0 \quad \Rightarrow \quad B_R = -U_0.
\end{aligned}$$

За умови розряду конденсатора на резистивний елемент напрям протікання струму залежить від полярності зарядженого конденсатора. Отже, за обраної на рис. 3.2.11 полярності у перший момент часу після короткого замикання напруга конденсатора та резистора рівні та зворотні за напрямом, що спричиняє зміну напрямку протікання перехідного струму.

Результуючі вирази перехідних функцій:

$$\begin{aligned}
i(t) &= I_y + i_{\text{вкл}}(t) = Ae^{pt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} = -I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}, \\
u_C(t) &= U_{Cy} + u_{C\text{вкл}}(t) = B_C e^{pt} = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}, \\
u_R(t) &= U_{Ry} + u_{R\text{вкл}}(t) = B_R e^{pt} = -U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}.
\end{aligned}$$

Перехідний струм кола розряду конденсатора може також бути визначений шляхом диференціювання виразу перехідної напруги конденсатора:

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -CU_0 \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Часові діаграми напруги та струму конденсатора мають вигляд затухаючих експоненційних функцій, представлених на рис. 3.2.12. Час розряду залежить від параметрів розрядного контуру та визначається як

$$t_{\text{ин}} = (3 \dots 4) \tau = (3 \dots 4) RC.$$

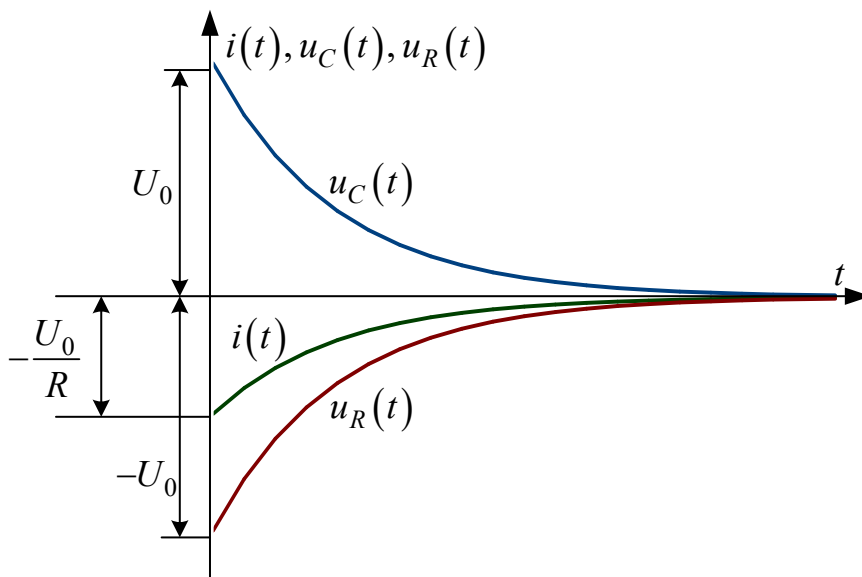


Рисунок 3.2.12 – Часові діаграми струму та напруги розряду конденсатора

Висновки за результатами аналітичного аналізу:

З аналізу аналітичних виразів та часових діаграм розрядних процесів RC контуру видно, що на відміну від напруги конденсатора, яка змінюється плавно від докомутаційної величини, струм в колі RC пропорційний швидкості зміни $u_C(t)$ та здійснює в момент $t = 0$ стрибок.

З енергетичної точки зору перехідний процес характеризується переходом енергії електричного поля конденсатора в теплову енергію резистора. Слід зазначити, що опір резистора впливає на початкове значення напруги на конденсаторі та тривалість розряду:

$$W = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{RC}t} dt = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Перехідний процес можна вважати завершеним через $t \approx (3 \dots 4)\tau$, оскільки до цього часу ємність розряджається на 98,2-99,3% і напруга знижується до 1,8-0,7% початкового значення.

3.2.6. Вмикання конденсатора до джерела напруги постійного струму (заряд конденсатора)

Здебільшого у класичній літературі розглянуто випадки заряду конденсатора від нульових початкових умов. Тобто, вважається, що у початковий момент часу конденсатор був повністю розрядженим і струм через резистор не протікав. Аналіз перехідних процесів в колах заряду (рис. 3.2.13) потребує врахування величини напруги конденсатора до комутації. Пропонується порівняти заряд конденсатора C від формувача постійної напруги за трьох можливих випадків початкових умов:

- випадок 1 – заряд повністю розрядженого конденсатора, нульові початкові умови $u_C(0_-) = u_C(0) = 0$;
- випадок 2 – дозаряд конденсатора, ненульові початкові умови $u_C(0_-) = u_C(0) = U_0$;
- випадок 3 – перезаряду конденсатора, ненульові початкові умови зі зміною полярності конденсатора $u_C(0_-) = u_C(0) = -U$.

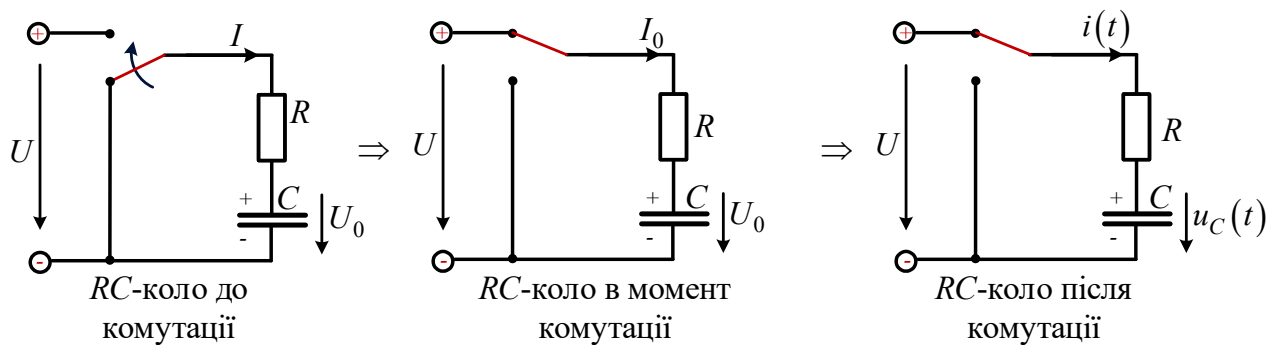


Рисунок 3.2.13 – Схема заряду конденсатора

Розподіл напруг на елементах RC контура (рис. 3.2.13) після його підключення до джерела живлення описується другим законом Кірхгофа:

$$u_R(t) + u_C(t) = U \Rightarrow RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U.$$

Перехідні струм та напруги на елементах кола після комутації подаються умовною сумою усталеної та вільної складових відповідно:

$$i(t) = I_y + i_{\text{ввл}}(t) = 0 + Ae^{-\frac{1}{RC}t};$$

$$u_C(t) = U_{Cy} + u_{C\text{ввл}}(t) = U + B_C e^{-\frac{1}{RC}t};$$

$$u_R(t) = U_{Ry} + u_{R\text{ввл}}(t) = 0 + B_R e^{-\frac{1}{RC}t},$$

де

- розрахунок усталених складових перехідних функцій виконується шляхом аналізу усталеного стану кола після комутації з урахуванням, що живлення RC навантаження здійснюється від джерела постійної напруги:

$$I_y = 0, \quad U_{Cy} = U, \quad U_{Ry} = 0.$$

- розрахунок вільних складових здійснюється шляхом аналізу однорідного диференційного рівняння:

$$\left. \begin{aligned} RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) &= U \Rightarrow \\ RC \frac{du_{C\text{ввл}}(t)}{dt} + u_{C\text{ввл}}(t) &= 0, \\ RCp + 1 &= 0, \\ p &= -\frac{1}{RC}; \end{aligned} \right| \begin{aligned} i_{\text{ввл}}(t) &= Ae^{pt} = Ae^{-\frac{1}{RC}t}, \\ u_{C\text{ввл}}(t) &= B_C e^{pt} = B_C e^{-\frac{1}{RC}t}, \\ u_{R\text{ввл}}(t) &= B_R e^{pt} = B_R e^{-\frac{1}{RC}t}. \end{aligned}$$

Сталі інтегрування вільних складових перехідних функцій визначаються з урахуванням трьох можливих випадків початкових умов:

- розрахунок сталої інтегрування B_C зводиться до аналізу математичної моделі перехідної напруги конденсатора записаної у загальному вигляді для моменту комутації ($t=0$) із зазначенням у правій частині рівняння початкової напруги конденсатора:

$$u_C(0) = U_{Cy} + u_{C\text{ввл}}(t) = \left(U + B_C e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \Bigg|_{t=0} \Rightarrow \begin{aligned} U + B_{C1} &= 0 \Rightarrow B_{C1} = -U; \\ U + B_{C2} &= U_0 \Rightarrow B_{C2} = U_0 - U; \\ U + B_{C3} &= -U \Rightarrow B_{C3} = -2U; \end{aligned}$$

- для визначення сталої інтегрування A значення струму контуру в момент комутації визначається з аналізу рівняння записаного за другим законом Кірхгофа у перший момент часу після комутації:

$$\text{- випадок 1} - i_1(0)R + u_C(0) = U \Rightarrow i_1(0) = \frac{U}{R};$$

$$u_C(0)=0$$

$$\text{- випадок 2} - i_2(0)R + u_C(0) = U \Rightarrow i_2(0) = \frac{U - U_0}{R};$$

$$u_C(0)=U_0$$

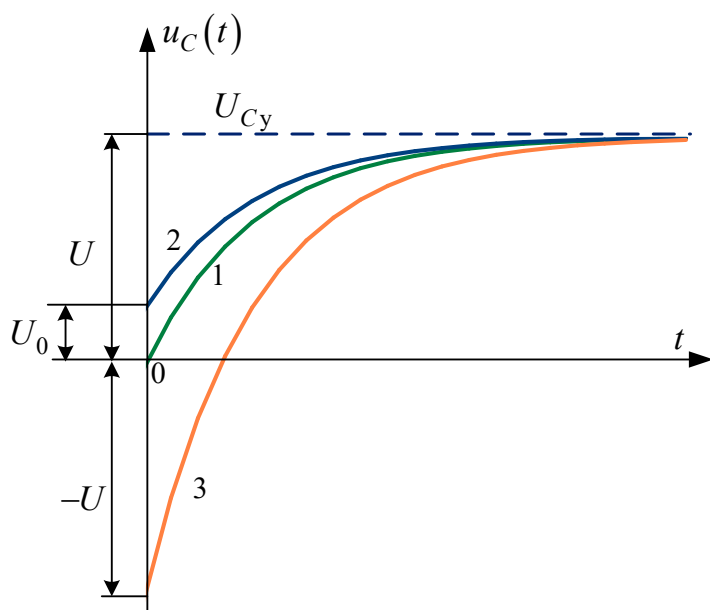
$$\text{- випадок 3} - i_3(0)R + u_C(0) = U \Rightarrow i_3(0) = \frac{2U}{2};$$

$$u_C(0)=-U$$

тоді

$$i(t) = I_y + i_{\text{ввл}}(t) = \left(0 + Ae^{-\frac{1}{RC}t} \right) \Big|_{t=0} \Rightarrow \begin{aligned} A_1 &= \frac{U}{R}; \\ A_2 &= \frac{U - U_0}{R}; \\ A_3 &= \frac{2U}{R}. \end{aligned}$$

Результуючі вирази перехідних струму і напруги конденсатора та їх часові діаграми (див. рис. 3.2.14 та рис. 3.2.15):



а

1 – заряд конденсатора:

$$i_1(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t},$$

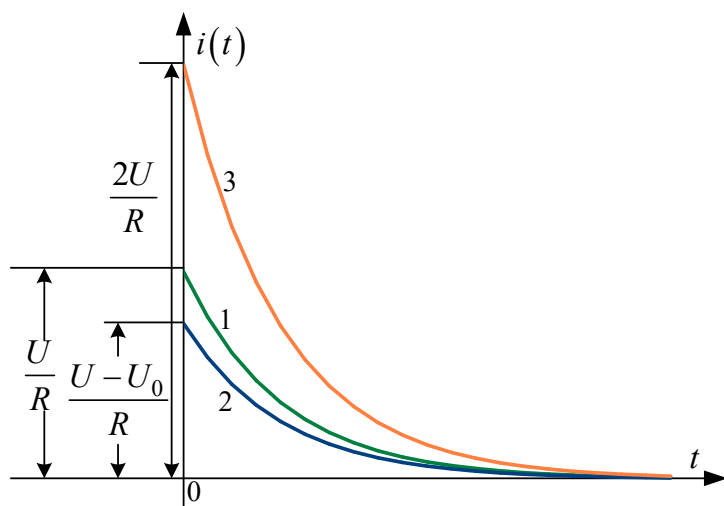
$$u_{C1}(t) = U - Ue^{-\frac{1}{RC}t};$$

2 – дозаряд конденсатора:

$$i_2(t) = \frac{U - U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t},$$

$$u_{C2}(t) = U + (U_0 - U)e^{-\frac{1}{RC}t};$$

3 – перезаряд конденсатора:



$$i_3(t) = \frac{2U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t},$$

$$u_{C3}(t) = U - 2Ue^{-\frac{1}{RC}t}.$$

б

Рисунок 3.2.14 – Часові діаграми напруги конденсатора (а) та струму контуру (б) для трьох випадків початкових умов

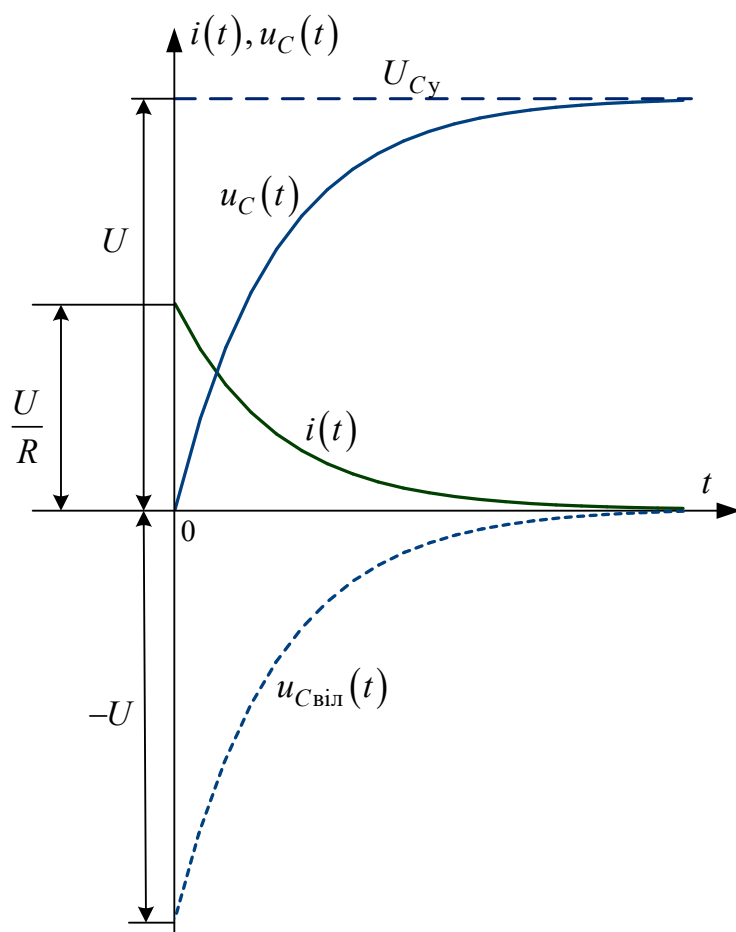


Рисунок 3.2.15 – Часові діаграми струму та напруги конденсатора для нульових початкових умов

Висновки за результатами аналітичного аналізу:

Для всіх розглянутих випадків початкових умов заряду конденсатора видно, що

- параметри та спосіб з'єднання елементів контуру дозволяють регулювати тривалість перехідного процесу та визначають його закон зміни;

- незалежні початкові умови визначають величини залежних початкових умов; для RC контуру залишкова напруга конденсатора впливає на величину струму в момент комутації: для незарядженого конденсатора струм в момент комутації визначається законом Ома $\left(i_1(0) = \frac{U}{R}\right)$; для зарядженого – зменшується

$\left(i_2(0) = \frac{U - U_0}{R}\right)$;

- струм через заряджений конденсатор не протікає, оскільки опір конденсатора в колі постійного струму – нескінченно великий.

3.2.7. Вмикання конденсатора до джерела напруги синусоїдного струму

Комутація у колі (рис. 3.2.16) спричиняє появу перехідних напруг, розподіл яких на елементах RC контуру описується другим законом Кірхгофа, а кожна перехідна функція визначається сумою відповідних усталеної та вільної складових незалежно від форми вхідного сигналу та способу з'єднання елементів:

$$u_R(t) + u_C(t) = u(t) \Rightarrow RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t)$$

де

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi);$$

$$i(t) = i_y(t) + i_{\text{віль}}(t) = i_y(t) + A e^{-\frac{1}{RC}t};$$

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{C\text{віль}}(t) = u_{Cy}(t) + B_C e^{-\frac{1}{RC}t};$$

$$u_R(t) = u_{Ry}(t) + u_{R\text{віль}}(t) = u_{Ry}(t) + B_R e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

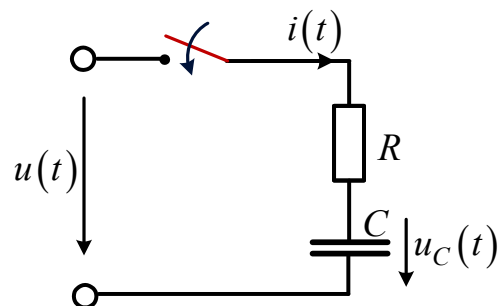


Рисунок 3.2.16 – Схема вмикання RC контуру до джерела синусоїдної напруги

В усталеному режимі роботи RC контуру за умови його живлення від джерела синусоїдної напруги в колі встановлюється синусоїдний струм, обумовлений періодичним перезарядом конденсатора. Це відрізняє зазначений

режим від процесу заряду конденсатора від джерела постійної напруги, для якого усталена складова струму набуває нульового значення.

Розрахунок усталених складових перехідних функцій виконується шляхом аналізу усталеного стану кола після комутації із використанням комплексного обчислення:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \Rightarrow \dot{U}_m = U_m e^{j\psi};$$

- повний опір кола:

$$\underline{Z} = R - j \frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j \arctg\left(\frac{1}{\omega CR}\right)} = Z e^{j\varphi}$$

де

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{1}{\omega CR}\right).$$

- усталена складова струму кола:

$$\dot{I}_{my} = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{U_m e^{j\psi}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{U_m}{Z} e^{j(\psi-\varphi)} = I_{my} e^{j(\psi-\varphi)} \Rightarrow i_y(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi);$$

- усталена складова напруги конденсатора:

$$\dot{U}_{Cmy} = \dot{I}_{my} \cdot \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ} = \frac{U_m}{Z \omega C} e^{j(\psi-\varphi-90^\circ)} \Rightarrow u_{Cy}(t) = \frac{U_m}{Z \omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - 90^\circ).$$

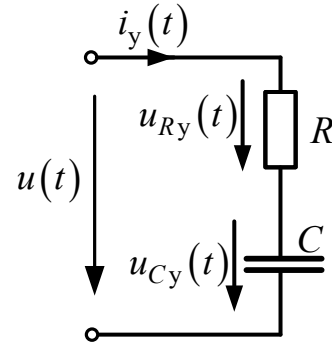


Рисунок 3.2.17 – Схематична ілюстрація усталеного режиму роботи кола після комутації (підключення RC контуру до джерела)

Розрахунок вільних складових виконується шляхом аналізу однорідного диференційного рівняння вирази яких у загальному поданні повністю відповідають отриманим у попередніх аналізах RC контуру:

$$\begin{array}{l|l}
 RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t) \Rightarrow & i_{\text{вкл}}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{1}{RC}t}, \\
 RC \frac{du_{C_{\text{вкл}}}(t)}{dt} + u_{C_{\text{вкл}}}(t) = 0, & u_{C_{\text{вкл}}}(t) = B_C e^{pt} = B_C e^{-\frac{1}{RC}t}, \\
 RCp + 1 = 0, & u_{R_{\text{вкл}}}(t) = B_R e^{pt} = B_R e^{-\frac{1}{RC}t}. \\
 p = -\frac{1}{RC}; &
 \end{array}$$

Вирази перехідних струму та напруги конденсатора у загальному поданні мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= i_y(t) + i_{\text{вкл}}(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{1}{RC}t}; \\
 u_C(t) &= u_{C_y}(t) + u_{C_{\text{вкл}}}(t) = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - 90^\circ) + B_C e^{-\frac{1}{RC}t}.
 \end{aligned}$$

Розрахунок сталих інтегрування виконується на базі виразів перехідних функцій у загальному поданні для моменту комутації ($t = 0$). Приймаючи, що до комутації конденсатор був розрядженим до нульового значення, постійна інтегрування B_C визначається за початкової умови $u_C(0) = u_C(0_-) = 0$:

$$\begin{aligned}
 u_C(0) &= u_{C_y}(0) + u_{C_{\text{вкл}}}(0) = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\omega \cdot 0 + \psi - \varphi - 90^\circ) + B_C e^{-\frac{1}{RC} \cdot 0}, \\
 0 &= \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\psi - \varphi - 90^\circ) + B_C, \\
 B_C &= -\frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\psi - \varphi - 90^\circ).
 \end{aligned}$$

Стала інтегрування у виразі струму контуру A може бути розрахована з аналізу кола в момент комутації з урахуванням незалежної початкової умови ($u_C(0) = u_C(0_-) = 0$).

$$i(0) = \frac{u(0)}{R} = \frac{U_m \sin(\psi)}{R} = \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) + A;$$

$$A = -\frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) + \frac{U_m \sin(\psi)}{R}.$$

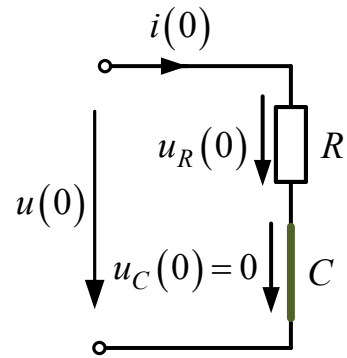


Рисунок 3.2.18 – Еквівалент кола
в момент комутації

Результуючі вирази перехідних струму та напруги конденсатора:

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{C\text{віль}}(t) = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - 90^\circ) - \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\psi - \varphi - 90^\circ) e^{-\frac{1}{RC}t},$$

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \underbrace{\frac{U_m}{Z} \cos(\omega t + \psi - \varphi - 90^\circ)}_{\frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi)} + \frac{U_m}{ZR\omega C} \sin(\psi - \varphi - 90^\circ) e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

З отриманих виразів видно, що перехідний процес залежить від початкової фази синусоїдної напруги джерела (ψ). Часові залежності перехідних напруги конденсатора та струму приведено на рис. 3.2.19. Наочну ілюстрацію формування перехідної напруги конденсатора шляхом накладання вимушеної та вільної складових за умови $\psi = \varphi$ зображено на рис. 3.2.20.

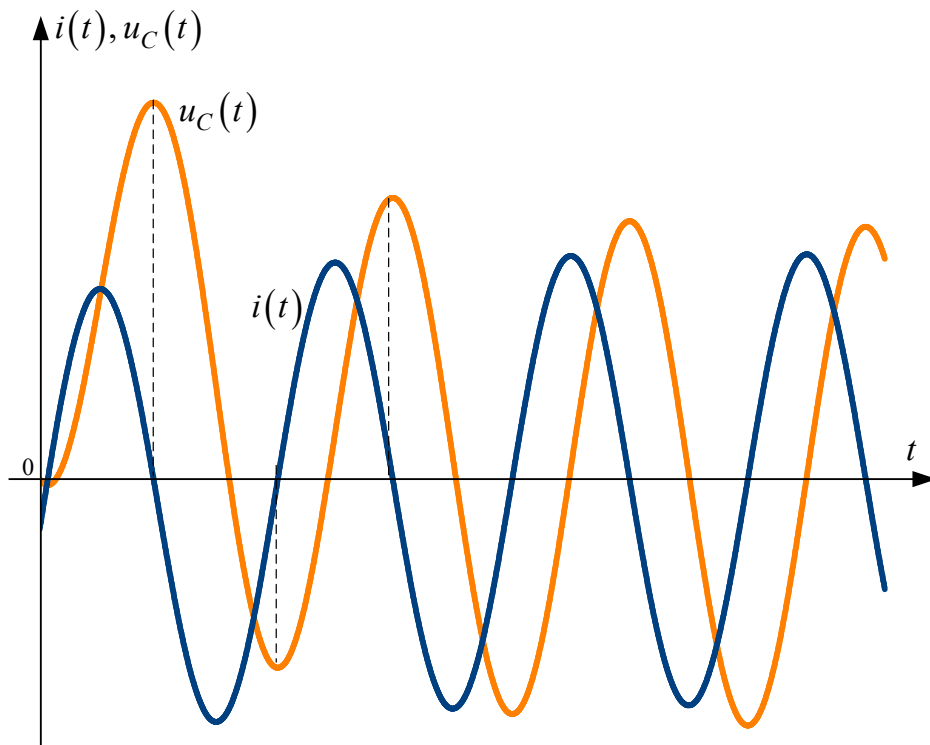


Рисунок 3.2.19 – Часові діаграми струму та напруги конденсатора для нульових початкових умов за умови $\psi = \varphi$

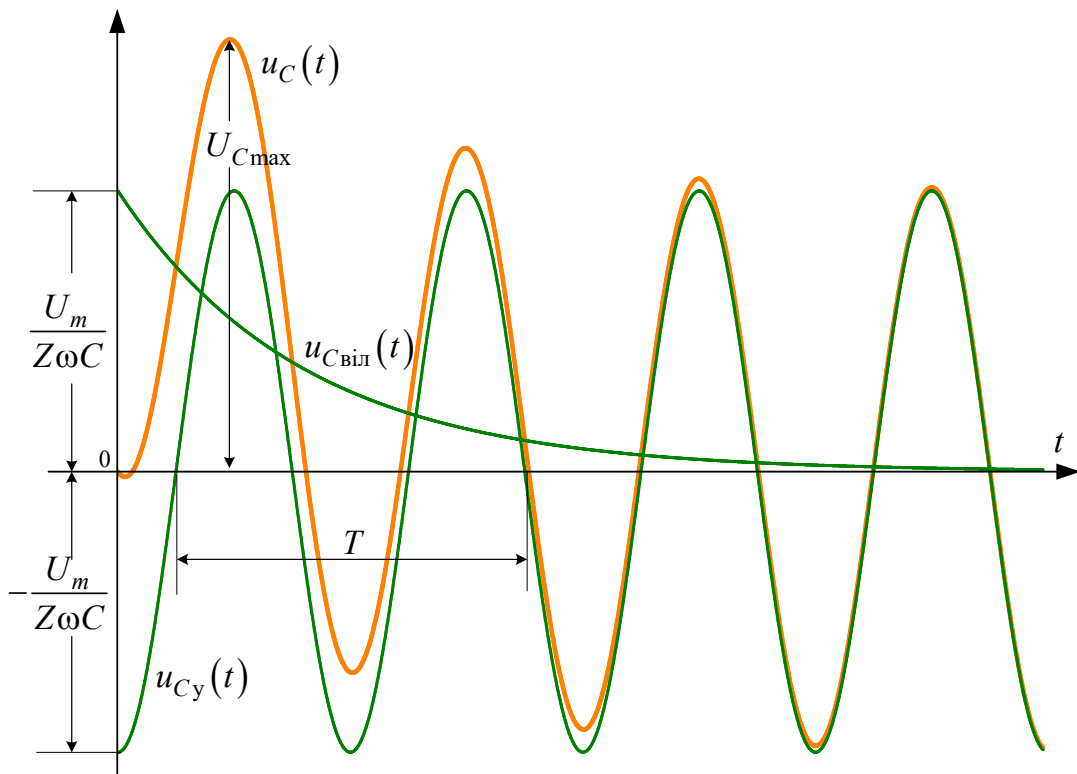


Рисунок 3.2.20 – Часові діаграми перехідної напруги конденсатора та її вимушеної і вільної складових для нульових початкових умов за умови $\psi = \varphi$

Висновки за результатами аналітичного аналізу:

- початкова фаза джерела живлення в момент комутації визначає інтенсивність перебігу перехідних процесів RC контуру:
 - при $\psi = \varphi$ вільна складова напруги конденсатора приймає максимально можливе значення в момент комутації при цьому перехідна напруга конденсатора досягає максимуму приблизно через половину періоду;
 - при $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$ вільна складова напруги конденсатора не виникає і в колі встановлюється усталений режим без перехідного. За виконання цієї умови має місце повна відповідність між запасам енергії в конденсаторі до комутації (у розглянутому випадку нуль) та усталеним запасом енергії (в даному випадку теж нуль). Це пояснює відсутність перехідного режиму.
- за умови підключення RC контуру до джерела синусоїдної напруги в колі встановлюється синусоїдний струм, що спричиняє періодичний перезаряд конденсатора як під час перехідного процесу, так і в усталеному режимі роботи.

Тема 3.3. Класичний метод аналізу перехідних процесів в колах другого порядку

3.3.1. Властивості коренів характеристичного рівняння в колах другого порядку

Колами другого порядку прийнято вважати електричні кола, що містять два реактивні елементи різного типу (індуктивність та ємність), властивості яких описуються співвідношеннями першого порядку між струмом і напругою. Сукупна дія цих елементів у одному контурі приводить до формування диференціального рівняння другого порядку відносно перехідного струму або напруги.

Характер перехідного процесу в колі другого порядку визначається законом зміни вільної складової перехідної функції та швидкості згасання (або наростання) електромагнітного процесу. Вираз закону зміни вільної складової залежить від типу коренів характеристичного рівняння (див. табл. 3.1.1), числові величини яких в свою чергу пов'язані з співвідношеннями між параметрами елементів кола та способу їх з'єднання.

Для ілюстрації впливу параметрів кола на властивості коренів характеристичного рівняння та, відповідно, на характер перехідних функцій, доцільно розглянути процес розряду конденсатора на активно-індуктивне

навантаження (рис. 3.3.1). Цей приклад є типовим для кола другого порядку та дозволяє аналітично виявити всі можливі режими зміни вільної складової перехідного процесу.

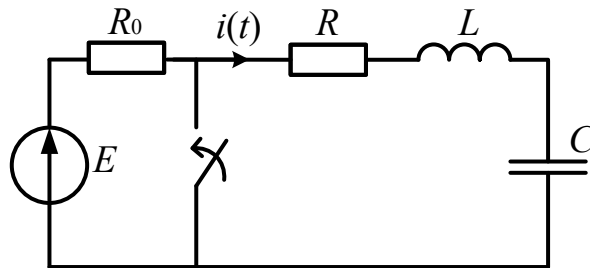


Рисунок 3.3.1 – Схема електричного кола розряду конденсатора на активно-індуктивне навантаження

Розподіл напруг на елементах контуру від моменту комутації до повного розряду описується диференціальним рівнянням відносно перехідної напруги конденсатора на базі другого закону Кірхгофа (3.1.1):

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0. \quad (3.3.1)$$

Розв’язок рівняння дасть невідому перехідну напругу конденсатора, яка містить лише вільну складову, оскільки усталені процеси в колах розряду визначаються нульовими величинами ($u_{Cy}(t) = 0$):

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{Cв\dot{u}л}(t) = u_{Cв\dot{u}л}(t).$$

Аналіз однорідного диференційного рівняння виконується на базі його характеристичного:

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (3.3.2)$$

Символьний роз’язок характеристичного рівняння дозволяє встановити співвідношення між параметрами елементів кола та типом його коренів:

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{LC}\right)}}{2};$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2},$$

де

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{R}{2\sqrt{L}\sqrt{L}} \times \frac{\sqrt{L}\sqrt{C}}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2} \times \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2} \times \frac{1}{\sqrt{L/C}} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2\rho} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\omega_0}{2Q}$$

– коефіцієнт загасання вільної складової;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансна частота ідеального коливального контуру;

$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ – кутова частота вільних коливань за умови

$\omega_0 > \delta$;

$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R}$ – добротність коливального контуру.

З урахуванням введених умовних позначень вираз для розрахунку коренів характеристичного рівняння можна подати у кількох формах запису:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j\omega'$$

.

З аналізу характеристичного рівняння слідує, що зміна параметрів елементів контуру R , L та C дозволяє отримати три можливі типи його коренів, а, отже, три можливі варіанти перебігу перехідного процесу:

а) при $\delta > \omega_0$ або $\frac{\omega_0}{2Q} > \omega_0 \Rightarrow Q < 0,5$ – корені дійсні та різні ($p_1 \neq p_2$),

має місце **аперіодичний перехідний процес**.

Вільна складова перехідної напруги конденсатора записується у вигляді

$$u_{\text{СВІЛ}}(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}.$$

б) при $\delta > \omega_0$ або $\frac{\omega_0}{2Q} = \omega_0 \Rightarrow Q = 0,5$ – корені дійсні та рівні ($p_1 = p_2$),

має місце **граничний (критичний) аперіодичний перехідний процес**.

Розрахунковий вираз для визначення коренів характеристичного рівняння спрощується до вигляду:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} = -\delta.$$

Підстановка даного розв'язку у характеристичне рівняння дозволяє розрахувати один із параметрів елементів при якому виникає граничний (критичний) аперіодичний перехідний процес. Як приклад, критичний аперіодичний режим можливий за опору резистивного елементу:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{R_{\text{кр}}}{2L}\right)^2 + \frac{R_{\text{кр}}}{L} \cdot \left(-\frac{R_{\text{кр}}}{2L}\right) + \frac{1}{LC} &= 0, \\ \frac{R_{\text{кр}}^2}{4L^2} - \frac{R_{\text{кр}}^2}{2L^2} + \frac{1}{LC} &= \frac{R_{\text{кр}}^2 - 2R_{\text{кр}}^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} = 0, \\ \frac{R_{\text{кр}}^2}{4L^2} &= \frac{1}{LC}, \\ R_{\text{кр}} &= \sqrt{\frac{4L^2}{LC}} = \sqrt{\frac{4L}{C}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \end{aligned}$$

Вільна складова перехідної напруги конденсатора, у випадку граничного аперіодичного перехідного процесу, має наступну форм запису

$$u_{\text{СВІЛ}}(t) = B_1 e^{pt} + B_2 t e^{pt}.$$

в) при $\delta > \omega_0$ або $\frac{\omega_0}{2Q} > \omega_0 \Rightarrow Q > 0,5$ – корені комплексно-спряжені

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega', \text{ де } \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

а перехідний процес матиме **коливальний характер**, де параметр δ характеризує згасання амплітуди коливань, а ω' – їх частоту.

Вільна складова перехідної напруги конденсатора у випадку коливального перехідного процесу подається як

$$u_{C_{\text{віль}}}(t) = Be^{\delta t} \sin(\omega' t + \psi).$$

3.3.2. Розряд конденсатора на активно-індуктивне навантаження

Поглиблений теоретичний аналіз розрядних процесів пропонується розглянути на прикладі запропонованого контуру другого порядку, схема якого наведена на рис. 3.3.1. У розрядному RLC -контурі зовнішнє джерело енергії відсутнє, тому перехідний процес після комутації формується виключно за рахунок енергії, накопиченої в електричному полі конденсатора та магнітному полі котушки. За такої умови загальний розв'язок диференціального рівняння стану (3.3.1) містить лише вільну складову, оскільки усталені процеси в колах розряду визначаються нульовими величинами ($u_{C_y}(t) = 0, i_y(t) = 0, u_{L_y}(t) = 0$):

$$u_C(t) = u_{C_{\text{віль}}}(t), \quad i(t) = i_{\text{віль}}(t), \quad u_L(t) = u_{L_{\text{віль}}}(t).$$

Для всіх випадків аналізу приймається, що у момент комутації конденсатор заряджено до напруги джерела живлення: $u_C(0_-) = U_0$.

3.3.2.1. Аперіодичний розряд конденсатора на активно-індуктивне навантаження

Якщо параметри контуру, зображеного на рис. 3.3.1, задовольняють умові

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC},$$

то корені характеристичного рівняння контуру дійсні, різні ($p_1 \neq p_2$) і від'ємні.

Вільні складові перехідних напруги конденсатора та струму контуру описуються рівняннями:

$$u_C(t) = u_{C_{\text{вкл}}}(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t},$$

$$i(t) = i_{\text{вкл}}(t) = C \frac{du_{C_{\text{вкл}}}(t)}{dt} = C(B_1 p_1 e^{p_1 t} + B_2 p_2 e^{p_2 t}),$$

де B_1, B_2 – постійні інтегрування.

Визначення сталих інтегрування ґрунтується на початкових умовах. Оскільки струм котушки індуктивності та напруга конденсатора не змінюють свого значення в момент комутації миттєво, то

$$u_C(0) = u_C(0_-) = U_0 \text{ та } i(0) = i(0_-) = 0.$$

За визначених вище початкових умов вирази перехідних напруги і струму у момент комутації ($t=0$) дозволяють отримати розрахункові вирази сталих інтегрування:

$$\begin{cases} u_C(0) = B_1 e^{p_1 \cdot 0} + B_2 e^{p_2 \cdot 0}, \\ i(0) = C(B_1 p_1 e^{p_1 \cdot 0} + B_2 p_2 e^{p_2 \cdot 0}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_0 = B_1 + B_2, \\ 0 = B_1 p_1 + B_2 p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = -U_0 \frac{p_2}{p_1 - p_2}; \\ B_2 = U_0 \frac{p_1}{p_1 - p_2}. \end{cases}$$

Результуючі вирази перехідних напруги конденсатора та струму контура:

$$u_C(t) = -U_0 \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + U_0 \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} = -\frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}),$$

$$i(t) = -\frac{U_0 C p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Згідно теореми Вієта добуток коренів квадратного рівняння дорівнює вільному члену квадратного рівняння. Вільний член характеристичного рівняння для випадку кола на рис. 3.3.1 рівний $\frac{1}{LC}$. Заміна $p_1 p_2 = \frac{1}{LC}$ дозволяє подати вираз перехідного струму контуру у вигляді

$$i(t) = -\frac{U_0 C p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = -\frac{U_0 C}{p_1 - p_2} \cdot \frac{1}{LC} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Тоді перехідна напруга котушки індуктивності описується виразом

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -\frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}).$$

Часові діаграми напруг котушки та конденсатора і струму розрядного RLC контуру (рис. 3.3.1) для випадку аперіодичного перехідного режиму побудовані на рис. 3.3.2.

Аналіз аналітичних виразів перехідних функцій та їх часових діаграм дозволяє встановити, що у випадку аперіодичного перехідного процесу

- перехідна напруга конденсатор зменшується за експоненційним законом від докомутаційного значення до нуля;
- струм контуру не змінює свого значення в момент комутації за рахунок послідовного з'єднання котушки індуктивності з іншими елементами контуру;
- перехідний струм зростає за модулем від свого початкового значення, досягає від'ємного максимуму та зменшується до нуля;
- напруга котушки в момент комутації миттєво змінює своє значення від нульового до від'ємної величини напруги джерела, а потім з цього значення зменшується, проходить через нульове значення в момент коли струм контуру досягає максимуму, змінює знак й, досягши свого найбільшого значення, зменшується до нуля.

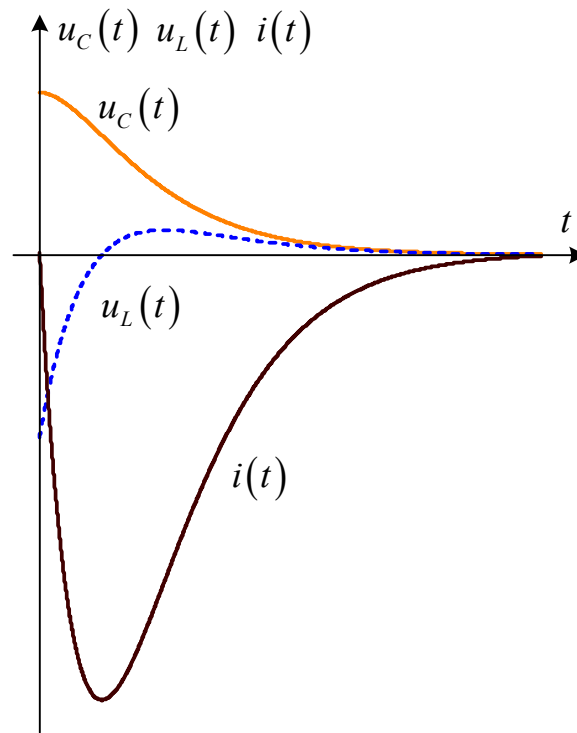


Рисунок 3.3.2 – Часові діаграми напруг та струму розрядного RLC контуру за умови аперіодичного перехідного процесу

3.3.2.2. Граничний аперіодичний розряд конденсатора на активно-індуктивне навантаження

Якщо параметри контуру, зображеного на рис. 3.3.1, задовольняють умові

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC},$$

то корені характеристичного рівняння контуру дійсні, рівні ($p_1 = p_2$) і від'ємні:

$$p_1 = p_2 = p = -\frac{R}{2L}.$$

Перехідні функції змінюються за аперіодичним законом, який граничить з коливальним:

$$u_C(t) = (B_1 + pB_2t)e^{pt};$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C(B_2 + pB_1 + pB_2t)e^{pt}.$$

За початкових умов ($u_C(0) = U_0$; $i_C(0) = 0$) сталі інтегрування рівні:

$$u_C(0) = B_1 = U_0;$$

$$i_C(0) = B_2 + pB_1 = 0 \Rightarrow B_2 + pU_0 = 0 \Rightarrow B_2 = -pU_0.$$

Результуючі вирази перехідних струму та напруг конденсатора і котушки:

$$u_C(t) = U_0(1 - pt)e^{pt};$$

$$i(t) = -Cp^2U_0te^{pt} = -\frac{U_0}{L}te^{pt};$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -U_0(1 + pt)e^{pt}.$$

Часові характеристики $i(t)$, $u_C(t)$, $u_L(t)$ відповідають характеристикам аперіодичного розряду, зображеного на рис. 3.3.2.

3.3.2.3. Коливальний розряд конденсатора на активно-індуктивне навантаження

Випадок комплексно-спряжених коренів можливий, якщо співвідношення між параметрами елементів контуру утворюють нерівність

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2,$$

тоді

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{-1 \left(\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \right)^2 - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 \right)} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega'.$$

Закон зміни перехідної напруги конденсатора за умови комплексно-спряжених коренів можна отримати двома способами:

– класичним методом, шляхом використання математичного представлення розв’язку однорідного рівняння згідно табл. 3.1.1:

$$u_C(t) = u_{C_{\text{БІЛ}}}(t) = Be^{-\delta t} \sin(\omega't + \psi),$$

$$i(t) = i_{\text{БІЛ}}(t) = C \frac{du_{C_{\text{БІЛ}}}(t)}{dt} = CBe^{-\delta t} (-\delta \sin(\omega't + \psi) + \omega' \cos(\omega't + \psi)),$$

де A , ψ – стала інтегрування та початкова фаза перехідної напруги конденсатора, величини яких розраховуються окремо з початкових умов;

– прямою підстановкою комплексно-спряжених коренів ($p_1 = -\delta + j\omega'$; $p_2 = -\delta - j\omega'$) у вираз перехідної напруги отриманої для аперіодичного перехідного процесу та спрощення його запису шляхом застосування формул Ейлера $\left(\frac{e^{j\omega't} - e^{-j\omega't}}{2j} = \sin \omega't; \frac{e^{j\omega't} + e^{-j\omega't}}{2} = \cos \omega't \right)$:

$$u_C(t) = -\frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) =$$

$$= -\frac{U_0}{-\delta + j\omega' + \delta + j\omega'} ((-\delta - j\omega') e^{-\delta t} e^{j\omega't} - (-\delta + j\omega') e^{-\delta t} e^{-j\omega't}) =$$

$$= -\frac{U_0}{j2\omega'} e^{-\delta t} (-\delta e^{j\omega't} - j\omega' e^{j\omega't} + \delta e^{-j\omega't} - j\omega' e^{-j\omega't}) =$$

$$= \frac{U_0}{\omega'} e^{-\delta t} \left(\delta \frac{e^{j\omega't} - e^{-j\omega't}}{j2} + \omega' \frac{e^{j\omega't} + e^{-j\omega't}}{2} \right) =$$

$$= \frac{U_0}{\omega'} e^{-\delta t} (\delta \sin \omega't + \omega' \cos \omega't) = \frac{U_0}{\omega'} \omega_0 e^{-\delta t} \sin(\omega't + \psi).$$

Результуючий вираз перехідної напруги конденсатора за другим підходом отримано шляхом перетворення та детального аналізу виразу:

$$(\delta \sin \omega't + \omega' \cos \omega't) = \omega_0 \sin \left(\omega't + \arctg \frac{\omega'}{\delta} \right).$$

Враховуючи, що

$$\omega_0 = \sqrt{\delta^2 + \omega'^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \psi = \arctg \frac{\omega'}{\delta},$$

наведене перетворення суми косинуса та синуса зі сталими коефіцієнтами до функції синуса дозволяє ввести наступні позначення, графічне пояснення яких наведено на рис. 3.3.3:

$$\sin \psi = \frac{\omega'}{\sqrt{\delta^2 + \omega'^2}} = \omega' \sqrt{LC};$$

$$\cos \psi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega'^2}} = \delta \sqrt{LC};$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega'}{\delta}.$$

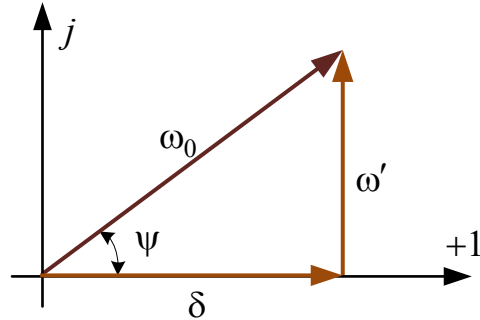


Рисунок 3.3.3 – Графічне інтерпретація співвідношення між складовими комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння

Введення вище наведених умовних позначень та врахування прийнятих початкових умов, характерних для моменту комутації ($t = 0$):

$$u_C(0) = U_0, \quad i(0) = 0,$$

дозволяють пояснити розрахунок сталої інтегрування та початкової фази у разі класичного підходу отримання перехідної напруги конденсатора:

$$u_C(0) = B e^{-\delta \cdot 0} \sin(\omega' \cdot 0 + \psi) \Rightarrow U_0 = B \sin(\psi),$$

звідки

$$B = \frac{U_0}{\sin(\psi)} = \frac{U_0}{\omega' \sqrt{LC}}.$$

Підстановка виразу сталої інтегрування у рівняння перехідної напруги конденсатора дає закон зміни ідентичний отриманому другим способом:

$$u_C(t) = u_{C\text{ввл}}(t) = Be^{-\delta t} \sin(\omega't + \psi) = U_{Cm}e^{-\delta t} \sin(\omega't + \psi);$$

$$i(t) = -I_me^{-\delta t} \sin(\omega't + \pi);$$

$$u_L(t) = U_{Lm}e^{-\delta t} \sin(\omega't + \psi),$$

де $U_{Cm} = U_{Lm} = \frac{U_0}{\omega' \sqrt{LC}}$; $I_m = \frac{U_0}{\omega' L}$ – розрахункові вирази максимальних величин аперіодичних складових вільних напруги та струму відповідно.

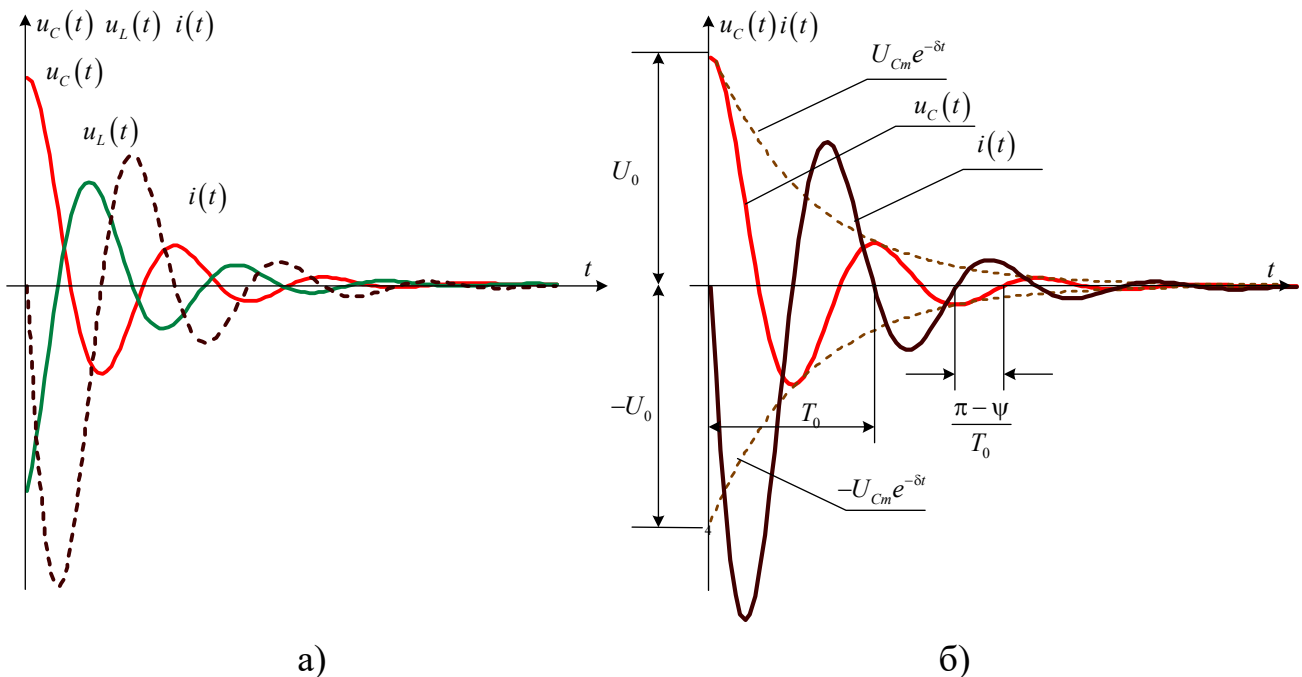


Рисунок 3.3.4 – Часові залежності напруг конденсатора і котушки та струму контуру

З аналізу аналітичних виразів та часових залежностей перехідних напруг та струму контуру, зображених на рис. 3.3.4 видно, що

- розрядний процес супроводжується затухаючими коливаннями;
- амплітуди перехідних функцій зменшуються за рахунок того, що коливальна складова кожної вільної напруги та струму обмежена відповідними аперіодичною складовою $(U_{Cm}e^{-\delta t}; U_{Lm}e^{-\delta t}; -I_me^{-\delta t})$ та її віддзеркаленням (рис. 3.3.4, б);
- кутова частота вільних коливань рівна

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2},$$

відповідно, період затухаючих коливань

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = 2\pi \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \right)^{-1}.$$

- кожен момент досягнення додатного чи від'ємного максимуму напруги конденсатора відповідає нульовому значенню струму.

Швидкість загасання коливань оцінюють декрементом коливань, що рівний відношенню амплітуд перехідних параметрів одного знаку, що відстають один від одного на період коливання T_0

$$\Delta = \frac{u_C(t)}{u_C(t+T_0)} = \frac{U_{C_m} e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \psi)}{U_{C_m} e^{-\delta(t+T_0)} \sin(\omega'(t+T_0) + \psi)} = e^{\delta T_0},$$

або логарифмічним декрементом коливання

$$\nu = \ln \Delta = \ln \frac{u_C(t)}{u_C(t+T_0)} = \delta T_0.$$

3.3.3. Заряд конденсатора через активно-індуктивне навантаження від джерела постійної напруги

Підключення послідовного RLC контуру до джерела постійної напруги (рис. 3.3.5) супроводжується виникненням перехідного процесу, зумовленого зарядом конденсатора через резистивно-індуктивне навантаження.

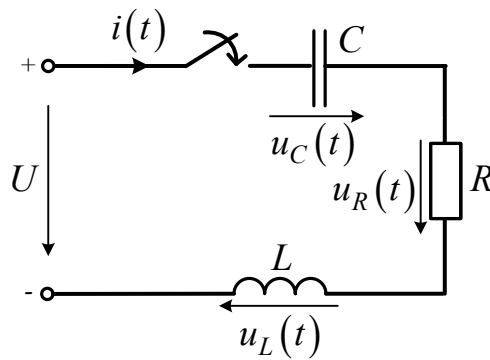


Рисунок 3.3.5 – Схема заряду конденсатора через RL вантаження

Розподіл напруг на елементах контуру визначається другим законом Кірхгофа, а використання співвідношень між напругами та струмами для кожного елементу дозволяє подати його як запис диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = U. \quad (3.3.3)$$

Розв’язок рівняння (3.3.3) дозволяє визначити невідому перехідну напругу конденсатора, яка згідно класичного методу аналізу може бути подана сумою усталеної та вільної складових:

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{C\text{віль}}(t).$$

Характер перехідного процесу визначається співвідношеннями між параметрами R , L та C контуру. Залежно від їх величин можливі три варіанти запису виразу вільної складової перехідної функції та, як наслідок, три можливі варіанти перехідного процесу: аперіодичний, граничний аперіодичний та коливальний.

Подальший аналіз спрямовано на детальне дослідження особливостей зміни перехідних напруг та струму у зарядному контурі (рис. 3.3.5). Для однозначності теоретичного вивчення пропонується розглянути символічний аналіз зарядних процесів від ненульових початкових умов ($u_C(0_-) = U_0$) до повного заряду конденсатора:

$$u_{Cy}(t) = U, i_y(t) = 0, u_{Ly}(t) = 0$$

3.3.3.1. Аперіодичний заряд конденсатора через активно-індуктивне навантаження

Згідно класичного підходу до аналізу перехідних процесів та властивостей коренів характеристичного рівняння для кіл другого порядку реалізації аперіодичного заряду конденсатора можлива за виконання умови

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R} < 0.5.$$

Для запропонованого контура (рис. 3.3.5) розв'язок рівняння (3.3.3) відносно напруги конденсатора та закон зміни струму контура набувають вигляду:

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{C\text{віль}}(t) = U + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t};$$

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C (B_1 p_1 e^{p_1 t} + B_2 p_2 e^{p_2 t}),$$

де $u_{Cy}(t) = U$ – усталена складова перехідної напруги конденсатора;

$u_{C\text{віль}}(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}$ – вільна складова перехідної напруги конденсатора;

B_1, B_2 – сталі інтегрування;

p_1, p_2 – корені характеристичного рівняння.

Визначення сталих інтегрування ґрунтується на початкових умовах. Оскільки струм котушки індуктивності та напруга конденсатора не змінюють свого значення в момент комутації миттєво, то

$$u_C(0) = u_C(0_-) = U_0 \text{ та } i(0) = i(0_-) = 0.$$

За визначених вище початкових умов вирази перехідних напруги і струму у момент комутації ($t = 0$) дозволяють отримати розрахункові вирази сталих інтегрування:

$$\begin{cases} u_C(0) = U + B_1 e^{p_1 \cdot 0} + B_2 e^{p_2 \cdot 0}, \\ i(0) = C (B_1 p_1 e^{p_1 \cdot 0} + B_2 p_2 e^{p_2 \cdot 0}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_0 - U = B_1 + B_2, \\ 0 = B_1 p_1 + B_2 p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{(U - U_0) p_2}{p_1 - p_2}; \\ B_2 = \frac{(U - U_0) p_1}{p_1 - p_2}. \end{cases}$$

Результуючі вирази перехідних функцій:

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{C\text{Вил}}(t) = U + \frac{(U - U_0)}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} + p_1 e^{p_2 t});$$

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{(U - U_0) p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} + e^{p_2 t}),$$

$$u_L(t) = \frac{U - U_0}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

Часові діаграми напруг котушки та конденсатора і струму зарядного RLC контуру (рис. 3.3.5) для випадку аперіодичного перехідного режиму побудовані на рис. 3.3.6.

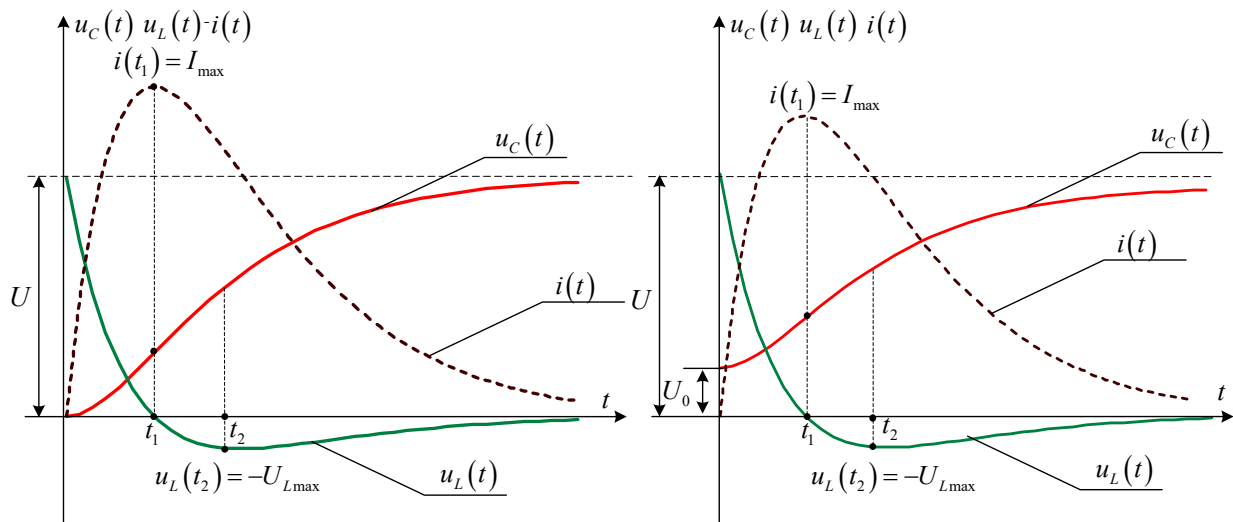


Рисунок 3.3.6 – Часові залежності напруг конденсатора і котушки та струму при аперіодичному заряді конденсатора через RL навантаження

З аналізу аналітичних виразів та часових діаграм видно, що у випадку заряду конденсатора від джерела постійної напруги через резистор та котушку індуктивності перехідний процес буде нескінченно довгим. Використання тиристорний ключ у якості комутатора дозволяє підкреслити, що аперіодичний процес заряду не є нескінченним. Він завершиться як тільки струм контуру досягає величини струму утримання тиристорного ключа у ввімкненому стані. В залежності від типу тиристора величини струму утримання становить $i_{yt} = 0.3 - 0.7$ А.

3.3.3.2. Коливальний заряд конденсатора через активно-індуктивне навантаження

Коливальний режим заряду конденсатора в RLC -колі (рис. 3.3.5) реалізується за умови

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R} > 0.5,$$

що відповідає комплексно-спряженим кореням характеристичного рівняння $p_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega'$. За умови такого співвідношення між параметрами елементів контуру (рис. 3.3.5) вільна складова напруги на конденсаторі має форму затухаючої гармонічної функції (згідно табл. 3.3.1):

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{Cв\text{іл}}(t) = U + Be^{-\delta t} \sin(\omega' t + \psi),$$

Для характеристик вільної складової перехідної функції залишаються справедливими співвідношення, наведені на рис. 3.3.3:

$$\omega_0 = \sqrt{\delta^2 + \omega'^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \psi = \arctg \frac{\omega'}{\delta},$$
$$\sin \psi = \frac{\omega'}{\sqrt{\delta^2 + \omega'^2}} = \omega' \sqrt{LC}; \quad \cos \psi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega'^2}} = \delta \sqrt{LC}; \quad tg \psi = \frac{\omega'}{\delta}.$$

Здійснивши підстановку комплексно-спряжених коренів ($p_1 = -\delta + j\omega'$; $p_2 = -\delta - j\omega'$) у вирази перехідних функцій для аперіодичного перехідного процесу кола другого порядку та застосувавши формули Ейлера $\left(\frac{e^{j\omega' t} - e^{-j\omega' t}}{2j} = \sin \omega' t; \quad \frac{e^{j\omega' t} + e^{-j\omega' t}}{2} = \cos \omega' t \right)$, вирази набувають вигляду:

— напруга конденсатора

$$\begin{aligned}
u_C(t) &= u_{Cy}(t) + u_{C\text{ввл}}(t) = U + \frac{(U - U_0)}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} + p_1 e^{p_2 t}) = \\
&= U - \frac{(U - U_{C_0})}{\omega'} e^{-\delta t} \left(\delta \frac{e^{j\omega' t} - e^{-j\omega' t}}{2j} + \omega' \frac{e^{j\omega' t} + e^{-j\omega' t}}{2} \right) = \\
&= U - \frac{U - U_{C_0}}{\omega'} e^{-\delta t} (\delta \sin \omega' t + \omega' \cos \omega' t) = \\
&= u_C(t) = U - \frac{(U - U_{C_0}) \omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin \left(\omega' t + \arctg \frac{\omega'}{\delta} \right) = \\
&= U - (U - U_0) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left[\frac{1}{2Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right) + \cos \left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right) \right];
\end{aligned}$$

– струм контуру

$$\begin{aligned}
i(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{(U - U_0) p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} + e^{p_2 t}) = \frac{(U - U_0)}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} + e^{p_2 t}) = \\
&= \frac{(U - U_0)}{\omega L} e^{-\delta t} \left(\frac{e^{j\omega' t} - e^{-j\omega' t}}{2j} \right) = \frac{U - U_0}{L\omega'} e^{-\delta t} \sin \omega' t.
\end{aligned}$$

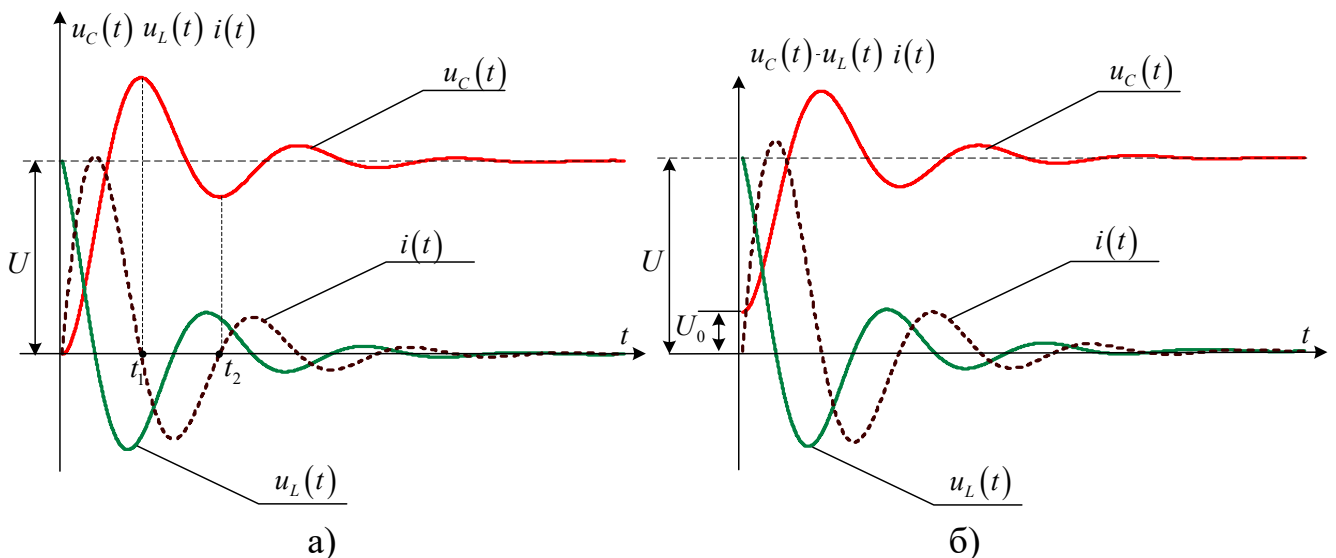


Рисунок 3.3.7 – Часові залежності напруг конденсатора і котушки та струму при коливальному заряді конденсатора через RL навантаження при нульових (а) та ненульових (б) початкових умовах

Часові залежності напруги на конденсаторі та струму в послідовному RLC -контурі (рис. 3.3.7) описуються загасаючими електричними коливаннями, що виникають за умови комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння. У цьому режимі миттєві значення напруги та струму змінюються за гармонічним законом, характеризуючись загасаючими електричними коливаннями відносно їх усталених значень.

Для коливального процесу залишається справедливою узгодженість фазових співвідношень між напругою та струмом: у моменти досягнення напругою конденсатора додатного або від'ємного максимуму миттєве значення струму дорівнює нулю. У ці моменти енергія коливального контуру повністю концентрується в електричному полі конденсатора, тоді як енергія магнітного поля індуктивності дорівнює нулю. Відповідно, коли струм досягає свого максимального або мінімального значення, напруга на конденсаторі проходить через нуль. Це відповідає стану, коли енергія повністю зосереджена в магнітному полі індуктивності, а електричне поле конденсатора набуває нульового значення.

Таким чином, часові характеристики коливального заряду конденсатора відображають періодичний взаємообмін енергією між ємнісним та індуктивним елементами. Амплітуда коливань поступово зменшується внаслідок втрат у резисторі, що визначає ступінь загасання та добротність контуру.

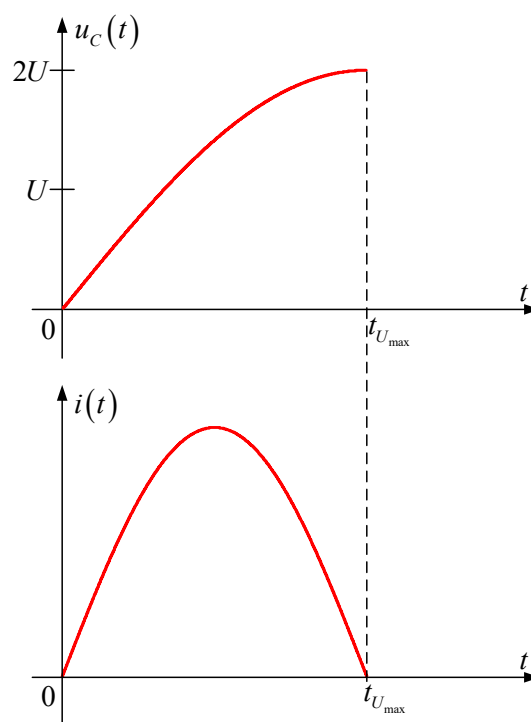


Рисунок 3.3.8 – Вплив тиристорного ключа на заряд конденсатора за умови коливального перехідного процесу

У випадку використання у якості комутатора тиристорного ключа у контурі на рис. 3.3.5, перехідний процес завершиться як тільки струм змінює полярність. А отже, при коливальному заряді конденсатора можна отримати напругу близьку до подвоєного значення напруги джерела (рис. 3.3.8).

3.3.4. Послідовність аналізу перехідних процесів в колах другого порядку класичним методом

Аналіз перехідних процесів у колах другого порядку має певні особливості, зумовлені тим, що такі кола містять два реактивні елементи. Енергетичний стан таких кіл описується двома незалежними змінними: струмом у індуктивності та напругою на ємності. Це призводить до формування диференціального рівняння другого порядку, яке у загальному вигляді може мати інтегрально-диференційне подання. Тому отримання повного розв'язку потребує застосування впорядкованої послідовності дій, що дає змогу узгоджено визначати початкові умови, формувати характеристичне рівняння, аналізувати його корені та описувати часові характеристики перехідного процесу.

У зв'язку з цим доцільно використовувати наступну послідовність аналізу перехідних процесів класичним методом у колах другого порядку:

Крок 1. Аналіз структури кола та приведення схеми до її еквіваленту.

Подати вихідне коло його еквівалентом кола після комутації та задати додатні напрями струмів та напруг, вважаючи їх перехідними функціями часу незалежно від форми сигналу джерела.

Крок 2. Запис математичної моделі перехідного процесу кола.

Для кола після комутації записати систему рівнянь у диференційній формі вважаючи, що всі струми та напруги кола є перехідними функціями часу. Система рівнянь формується на базі одного з методів аналізу лінійних електричних кіл: прямого застосування законів Кірхгофа, контурних струмів, вузлових потенціалів або еквівалентного генератора.

Крок 3. Застосування методу накладання усталеного та вільного режимів.

Подати всі перехідні напруги та струми кола як суми відповідних усталених та вільних складових:

$$i_n(t) = i_{ny}(t) + i_{n\text{вiл}}(t);$$

$$u_{Rn}(t) = u_{Rny}(t) + u_{Rn\text{вiл}}(t);$$

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{C\text{вiл}}(t);$$

$$u_L(t) = u_{Ly}(t) + u_{L\text{вiл}}(t),$$

де n – номер гілки/елементу кола після комутації.

Крок 4. Аналіз усталеного стану кола після комутації.

4.1. Подати вихідне коло як його еквівалент після комутації. Вважаючи, що перехідний процес завершився, позначити електричні величини кола, напрями яких обрано у п. 2, як усталені згідно форми сигналу джерела енергії.

4.2. Обрати метод аналізу усталеного стану кола та визначити величини його струмів та напруг. При реалізації розрахунку врахувати форму сигналу джерела:

- при дії джерела енергії постійного струму всі електричні величини вважаються незмінними в часі, а реактивні елементи подаються їх еквівалентами: котушка індуктивності характеризується нульовим опором, а отже її еквівалент – перемичка; конденсатор характеризується нескінченно великим опором, а отже його еквівалент – розрив.

- при дії джерела енергії синусоїдного струму вважається, що всі електричні величини змінюється за законом синуса, розрахунок проводиться із використанням комплексного обчислення, а результуючі величини усталених складових подаються виключно миттєвими функціями.

Крок 5. Аналіз вільного стану кола після комутації.

5.1. При виконанні розрахунку вільних складових перехідних функцій варто врахувати, що математичним відповідником будь-якої вільної складової перехідної функції є повний розв'язок однорідного диференційного рівняння, створеного на базі вихідного неоднорідного. Оскільки аналіз перехідних процесів в колах другого порядку зводиться до одночасного розрахунку струмів в усіх гілках та напруг на всіх елементах, то варто пам'ятати, що вільні складові всіх перехідних функцій кола будуть змінюватись за одним законом, який визначає корені характеристичного рівняння.

5.2. Розрахунок коренів характеристичного рівняння в колах другого порядку може бути реалізовано двома способами:

5.2.1. **Класичний спосіб.** Переписати систему рівнянь, створену у п. 2, як систему однорідних диференційних рівнянь відносно вільних складових перехідних функцій, замінивши праві частини кожного рівняння на нульові величини. Аналіз системи диференційних рівнянь другого порядку рекомендовано виконувати

через їх «алгебризацію», суть якої полягає у еквівалентній заміні операції диференціювання на параметр p . Розв'язок системи алгебричних рівнянь відносно параметра p дає дві величини, які є коренями характеристичного рівняння.

5.2.2. Графічний спосіб. Графічним відповідником системи однорідних рівнянь, згідно п. 5.2.1, є коло після комутації в якому джерела енергій подані їх внутрішніми опорами (для ідеалізованого джерела напруги внутрішній опір приймається за нуль, а для джерела струму – вважається нескінченно великим). Створене коло відображає перехідний процес у вільному стані. Опор котушки індуктивності в створеному колі позначаються як pL , а опір конденсатора – $\frac{1}{pC}$.

Далі коло, яке описує вільний стан, подається у вигляді пасивного двополюсника за рахунок виконання розриву у будь-якій його гілці (рекомендовано розрив робити послідовно у гілці з конденсатором). Відносно точок обриву записується вираз вхідного опору у комплексній формі як $\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)$. В отриманому виразі вхідного опору здійснюється еквівалентна заміна добутку $j\omega$ на параметр p . Отримай вираз прирівнюється до нуля ($\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = \underline{Z}_{\text{вх}}(p) = 0$) та виконується його розв'язок відносно невідомого параметру p .

5.3. Записати вирази вільних складових (струмів та напруг) з урахуванням характеру вільного процесу:

- якщо корені дійсні та різні:

$$f_{\text{віль}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

- якщо корені кратні:

$$f_{\text{віль}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 t e^{p_2 t};$$

- якщо корені комплексно-спряжені $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega'$:

$$f_{\text{віль}}(t) = (A_1 \cos \omega' t + A_2 \sin \omega' t) e^{-\delta t} = B e^{-\delta_k t} \sin(\omega' t + \psi).$$

Крок 6. Подання перехідних величин у загальному вигляді.

6.1. Доповнити вирази перехідних напруг та струмів кола, записаних у п. 3 як суми усталених та вільних складових, визначеними відповідними величинами та виразами згідно п. 4 та п. 5.

6.2. Додатково виконати диференціювання кожного виразу перехідної функції утворивши наступні системи:

$$\begin{cases} i_n(t) = i_{ny}(t) + i_{n\text{віль}}(t) \\ \frac{di_n(t)}{dt} = \frac{di_{ny}(t)}{dt} + \frac{di_{n\text{віль}}(t)}{dt} \\ u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{C\text{віль}}(t) \\ \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{du_{Cy}(t)}{dt} + \frac{du_{C\text{віль}}(t)}{dt} \\ u_L(t) = u_{Ly}(t) + u_{L\text{віль}}(t) \\ \frac{du_L(t)}{dt} = \frac{du_{Ly}(t)}{dt} + \frac{du_{L\text{віль}}(t)}{dt} \end{cases}$$

Крок 7. Розрахунок сталих інтегрування.

7.1. Виконати розрахунок незалежних початкових умов з аналізу усталеного стану вихідного кола до комутації:

$$i_L(0) = i_L(0_-) \text{ та } u_C(0) = u_C(0_-).$$

7.2. Виконати розрахунок залежних початкових умов з аналізу вихідного кола в момент комутації за умови відомих величин, отриманих у п. 7.1.

Стан кола в момент комутації описується системою рівнянь у диференційній формі, згідно п. 2, поданих відносно моменту часу нуль ($t = 0$). Розв'язок цієї системи дозволяє розрахувати величини струмів у гілках без котушки індуктивності у момент комутації.

Додатково доцільно виконати символічне диференціювання кожного рівняння системи, створеної у п.2, та подати ці рівняння для нульового моменту часу. Розв'язок системи продиференційованих рівнянь дозволяє визначити величини диференціалів струмів гілок в момент комутації $\left(\frac{di_n}{dt} \Big|_{t=0} \right)$.

7.3. Виконати розрахунок невідомих сталих інтегрування шляхом аналізу систем рівнянь з п. 6.2 поданих відносно нульового моменту часу за умови підстановки розрахованих величин у п. 7.1 та 7.2:

$$\begin{cases} i_n(0) = i_{ny}(0) + i_{n\text{біл}}(0) \\ \left. \frac{di_n(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_{ny}(t)}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{di_{n\text{біл}}(t)}{dt} \right|_{t=0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C(0) = u_{Cy}(0) + u_{C\text{біл}}(0) \\ \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{du_{Cy}(t)}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{du_{C\text{біл}}(t)}{dt} \right|_{t=0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_L(0) = u_{Ly}(0) + u_{L\text{біл}}(0) \\ \left. \frac{du_L(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{du_{Ly}(t)}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{du_{L\text{біл}}(t)}{dt} \right|_{t=0} \end{cases}$$

Нотатка, щодо подання вільних складових та їх диференціалів у нульовий момент часу для різних видів перехідних процесів:

- аперіодичний перехідний процес $(f_{\text{біл}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t})$:

$$\begin{aligned} f_{\text{біл}}(0) &= A_1 + A_2, \\ \left. \frac{df_{\text{біл}}}{dt} \right|_{t=0} &= A_1 p_1 + A_2 p_2; \end{aligned}$$

- граничний аперіодичний процес $(f_{\text{біл}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 t e^{p_2 t})$:

$$\begin{aligned} f_{\text{біл}}(0) &= A_1, \\ \left. \frac{df_{\text{біл}}}{dt} \right|_{t=0} &= A_1 p + A_2; \end{aligned}$$

- коливальний перехідний процес $(f_{\text{біл}}(t) = B e^{-\delta_k t} \sin(\omega' t + \psi))$:

$$f_{\text{вкл}}(0) = B \sin(\psi),$$

$$\left. \frac{df_{\text{вкл}}}{dt} \right|_{t=0} = \omega' B \cos(\psi) + \delta B \sin(\psi).$$

Крок 8. Запис результуючих виразів перехідних функцій.

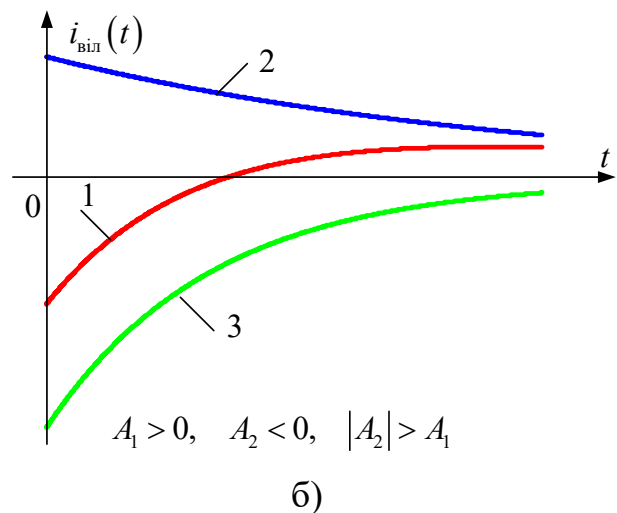
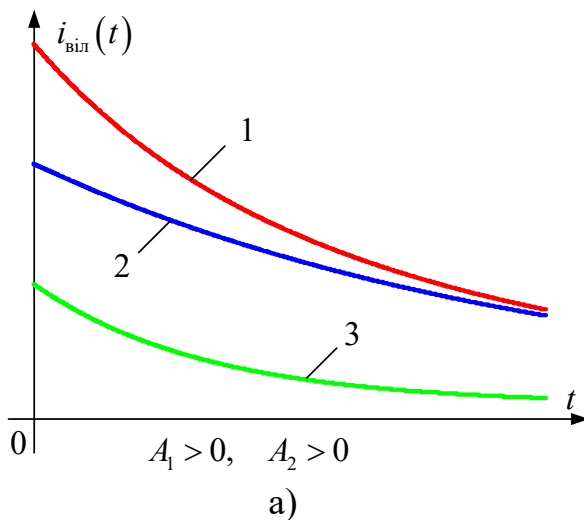
Записати результуючі вирази перехідних струмів та напруг, підставивши у вирази п. 6.1 обчислені значення сталих інтегрування.

Крок 9. Побудова часових діаграм перехідних функцій.

Аналіз перехідних процесів переважно завершується побудовою часових діаграм перехідних струмів та напруг.

Вплив сталих інтегрування на вільну складову перехідної функції.

На рис. 3.3.9 представлені часові характеристики вільної складової струму за умови аперіодичного перебігу перехідного процесу ($i_{\text{вкл}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$) для чотирьох випадків співвідношень між сталими інтегрування A_1, A_2 , де крива 1 являє собою результуючу функцію вільної складової; крива 2 – часова діаграма складової $A_1 e^{p_1 t}$; крива 3 – часова діаграма складової $A_2 e^{p_2 t}$.



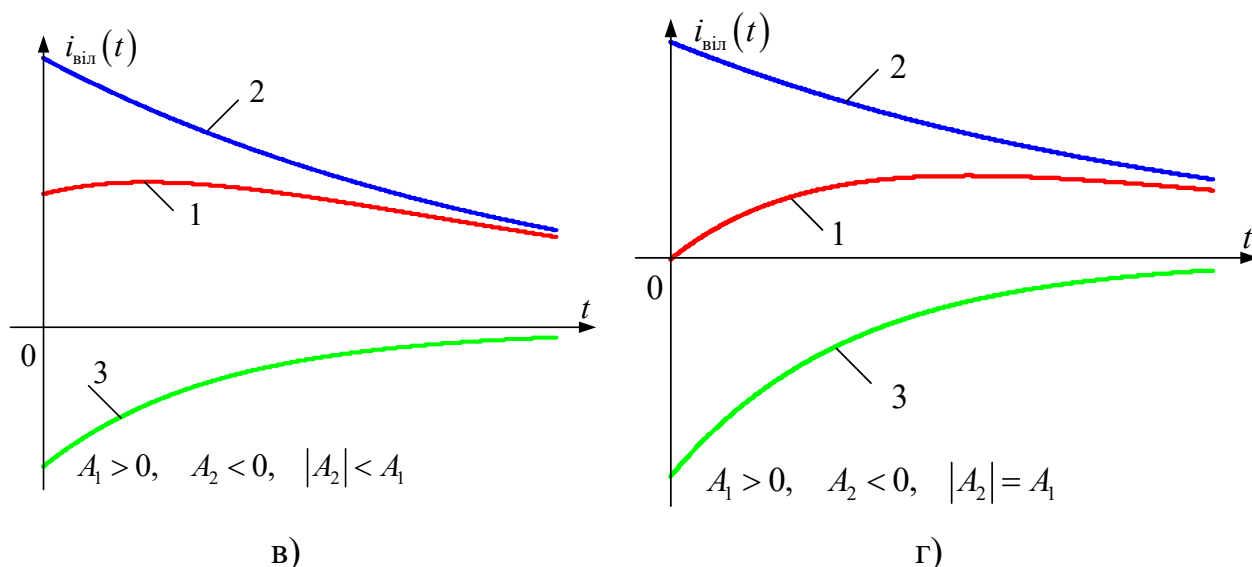


Рисунок 3.3.9 – Вплив сталих інтегрування на вільну складову перехідної функції за умови аперіодичного перехідного процесу

Графік вільної складової перехідної функції для випадку коливального процесу її загасання ($i_{\text{віль}}(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega' t + \psi)$) наведено на рис. 3.3.10.

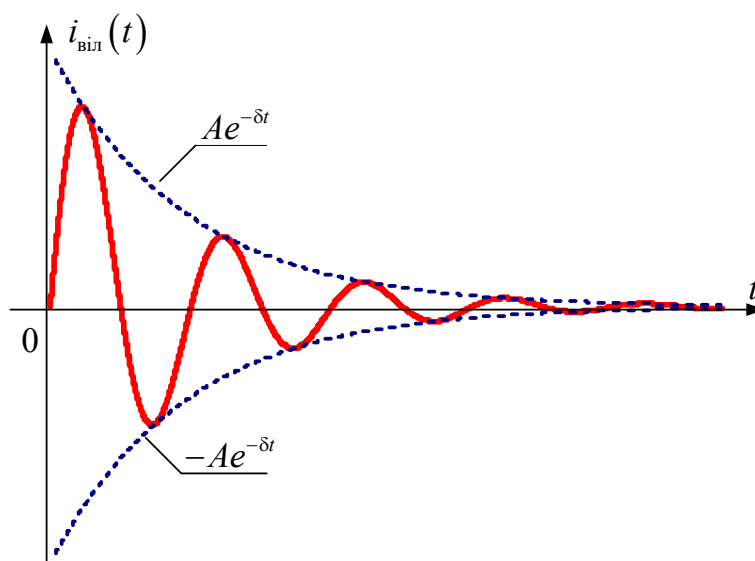


Рисунок 3.3.10 – Вплив сталих інтегрування на вільну складову перехідної функції за умови коливального перехідного процесу

З енергетичної точки зору коливання у колі викликані періодичним обміном енергій між електричним полем конденсатора та магнітним полем котушки індуктивності, а наявність резистивного елементу в контурі призводить до втрат енергії та затухання.

Аналіз математичної моделі коливального перехідного процесу дозволяє простежити взаємозв'язки між величинами сталих інтегрування (A, ψ) , швидкістю та частотою затухань, параметрами кола, початковими умовами та параметрами сигналу від джерела енергії:

- колювання вільної складової обмежуються кривими $Ae^{-\delta t}$ та $-Ae^{-\delta t}$;
- величини сталих інтегрування (A, ψ) визначаються параметрами елементів контуру, початковими умовами та параметрами сигналу від джерела живлення;
- швидкість затухають колювання визначається коефіцієнтом затухання (δ) : чим більша величина коефіцієнту затухання, тим швидше завершується перехідний процес;
- величини коефіцієнту затухання (δ) та частота вільних колювань (ω') залежать виключно від параметрів елементів контуру після комутації, а їх співвідношення дозволяють регулювати закономірності протікання перехідного процесу:
 - чим менший коефіцієнт затухання по відношенню до частоти вільних колювань, тим повільніше згасають колювання;
 - у випадку підключення контуру до джерела синусоїдної напруги за умови якщо величина δ незначна, а частота власних колювань майже рівна кутовій частоті синусоїдного джерела живлення $(\omega' \approx \omega)$, то сума вимушеної та вільної складових перехідної функції дають колювання, що характеризуються биттям амплітуд (рис. 3.3.11, а); а у випадку рівності частот вільних колювань та джерела живлення $(\omega' = \omega)$, результуюча крива має форму, показану на рис. 3.3.11, б.

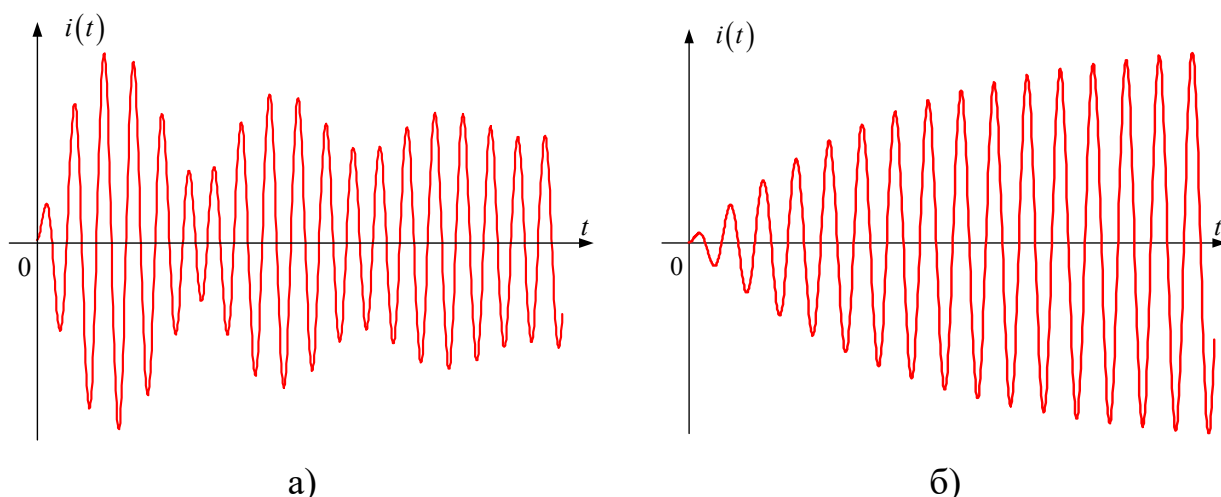


Рисунок 3.3.11 – Вплив коефіцієнту затухання (δ) та частоти вільних коливань (ω') на перехідний процес в зарядному контурі синусоїдного струму для випадків $\omega' \approx \omega$ (а) та $\omega' = \omega$ (б)

Список використаної літератури до розділу 3.

1. ДСТУ 2843-94. Електротехніка. Основні поняття. Терміни та визначення : [чинний від 1996-01-01] / затв. наказом Держстандарту України від 23.11.1994 № 290. – Київ : Держстандарт України, 1995. – 67 с.
2. ДСТУ 2815-94. Електричні й магнітні кола та пристрої. Терміни та визначення (IEC 60050-131:1978, NEQ; IEC 60050-151:1978, NEQ) : [чинний від 1996-01-01, скасовано з 01.01.2026] / затв. наказом Держстандарту України від 31.10.1994 № 258. – Київ : Держстандарт України, 1995. – 51 с.
3. Бойко В. С. Теоретичні основи електротехніки : підручник : у 3 т. Т. 2 : Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола / В. С. Бойко, Ю. Ф. Видолуб, І. А. Курило [та ін.]. – Київ : ІВЦ «Видавництво “Політехніка”», 2008. – 224 с.
4. Suprunovska N. I., Shcherba M. A., Mykhailenko V. V., Peretyatko Yu. V. Transient at changing the configuration of the discharge circuit of the capacitor of semiconductor electrical discharge installations with an electro-spark load // Tekhnichna Elektrodynamika. – 2020. – № 2. – Р. 3–9. – URL: <https://techned.org.ua/index.php/techned/article/view/94/93>
5. Щерба А. А., Супруновська Н. І., Петриченко С. В. Динамічні процеси в електророзрядних установках : монографія / НАН України, Ін-т електродинаміки. – Київ : Про Формат, 2017. – 459 с. – Бібліогр.: с. 413–459. – ISBN 978-966-02-8449-4.