

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Москвичова Катерина Костянтинівна**

УДК 519.21

## **ДИСЕРТАЦІЯ**

# **Властивості корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в моделі нелінійної регресії**

01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

К. К. Москвичова

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор  
Іванов Олександр Володимирович

Київ – 2018

## АНОТАЦІЯ

*Москвичова К.К.* Властивості корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в моделі нелінійної регресії. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика. – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», МОН України, Київ, 2018.

Регресійний аналіз є величезною частиною математичної та прикладної статистики. Нелінійний регресійний аналіз є істотним розширенням та ускладненням класичного лінійного регресійного аналізу, завдяки використанню нелінійних або частково нелінійних за параметрами моделей, які адекватніше, ніж лінійні моделі, описують явища, що потребують статистичного аналізу. Розвитку нелінійного регресійного аналізу дає поштовх велика кількість прикладних задач у чисельних наукових галузях, серед яких астрономія, науки про Землю, статистична радіофізика, хімічна кінетика, біологія, медицина, економетрика, фінанси, соціологія тощо; у технічних галузях знань, пов'язаних з вивченням коливальних процесів, – акустиці, вібраційній техніці, автоматичній, електротехніці тощо.

Задача оцінювання векторного параметра сигналу в моделях спостережень «сигнал+шум» є добре відомою проблемою статистики випадкових процесів, а у випадку нелінійного за параметром сигналу, – задачею нелінійного регресійного аналізу.

Коли в описаній моделі виникає потреба оцінити функціональні характеристики випадкового шуму, то можна сказати, що сигнал (функція регресії) із корисного перетворюється на заважаючий. Для знешкодження його впливу треба спочатку оцінити параметр функції регресії, який набуває статус заважаючого, а потім розглядати оцінку, скажімо, коваріаційної функції стаціонарного випадкового шуму, використовуючи залишки.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню асимптотичних властивостей залишкової корелограми як оцінки невідомої коваріаційної функції випадкового стаціонарного гауссівського шуму в нелінійній моделі регресії з неперервних часом.

Для оцінювання параметра функції регресії у дисертації використано оцінку найменших квадратів, означення якої не потребує знання жодної характеристики випадкового шуму. У якості оцінки коваріаційної функції стаціонарного шуму в моделі регресії природно розглядати залишкову корелограму, яка в моделях із корельованими спостереженнями узагальнює залишкову суму квадратів класичного регресійного аналізу.

Але на відміну від залишкової суми квадратів і звичайної корелограми результати про залишкову корелограму недостатньо представлені в статистичній літературі, крім окремих результатів для лінійної моделі регресії з дискретним часом та стаціонарно корельованими похибками спостережень. Таке загальне дослідження асимптотичної поведінки залишкової корелограми, як у цій роботі, раніше не робилося, незважаючи на великий теоретичний та практичний інтерес до цієї природної проблеми.

Метою роботи є розвиток теорії оцінювання коваріаційної функції стаціонарного гауссівського шуму в нелінійній моделі регресії з неперервним часом спостереження.

Об'єктом дослідження є нелінійна модель регресії з неперервним часом та описаним вище випадковим шумом.

Предметом дослідження є асимптотичні властивості залишкової корелограми як оцінки коваріаційної функції вказаного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії.

У роботі використано методи отримання експоненціальних оцінок імовірностей великих відхилень оцінок найменших квадратів параметра нелінійної моделі регресії та корелограми гауссівського стаціонарного процесу, елементи теорії збіжності ймовірнісних мір у метричних просторах, теорію асимптотичних розвинень, пов'язаних із статистичними оцінками, зокрема, з оцінкою найменших квадратів. Застосовано також деякі факти нелінійного регресійного аналізу, поняття спектральної міри функції регресії.

Дисертація складається зі вступу, огляду літератури (1-й розділ), трьох розділів (2-й, 3-й, 4-й), розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел, що містить 113 найменувань. Обсяг дисертації становить 142 сторінки друкованого тексту.

У 2-му розділі для нелінійної моделі регресії з гауссівським стаціонар-

ним шумом отримано результат щодо експоненціальної збіжності до нуля ймовірностей великих відхилень корелограмної оцінки невідомої коваріаційної функції шуму в рівномірній метриці. Використання цього факту надає можливість сформулювати достатні умови консистентності вказаної оцінки.

У підрозділі 2.1 описано модель спостережень та постановку задачі.

У підрозділі 2.2 доведено теорему про експоненціальну збіжність до нуля ймовірностей великих відхилень оцінки найменших квадратів векторного параметра нелінійної функції регресії в моделі зі стаціонарним гауссівським шумом з обмеженою спектральною щільністю, причому в явному вигляді записано константу під знаком експоненти, яка залежить від розмірності параметричної множини, супремуму спектральної щільності шуму та константи, яка характеризує здатність функції регресії розрізняти параметри.

У підрозділі 2.3 отримано теорему про ймовірності великих відхилень у рівномірній метриці нормованої корелограми гауссівського стаціонарного шуму з незалежною від часу спостереження константою в експоненті правої частини відповідно нерівності, на відміну від відомого аналогічного результату з константою, яка залежить від часу спостереження.

У підрозділі 2.4 з використанням цих результатів доведено теорему про експоненціальну збіжність до нуля ймовірностей великих відхилень у рівномірній метриці нормованої різниці залишкової корелограми та коваріаційної функції випадкового шуму. Як прості наслідки вказаного факту отримано посилені властивості слабкої консистентності залишкової корелограми.

У 3-му розділі доведено функціональну центральну граничну теорему в просторі неперервних функцій для нормованої залишкової корелограми в нелінійній моделі регресії, яку ми розглядаємо. Отриманий результат показує, що граничний майже напевно неперервний гауссівський процес співпадає з граничним процесом у функціональній центральній граничній теоремі для стандартної корелограми випадкового шуму в нашій моделі регресії.

Для одержання такого результату у підрозділі 3.2 було посилено умо-

ви розділу 2 до функції регресії та гауссівського стаціонарного шуму. Так, функція регресії повинна бути двічі неперервно диференційовною, її частинні похідні 1-го та 2-го порядків мають задовольняти деяким умовам на швидкість зростання, вимагається також існування спектральної міри функції регресії. Гауссівський стаціонарний шум повинен мати абсолютно інтегровну коваріаційну функцію тощо. Доведення центральної граничної теореми зводиться до отримання рівномірної збіжності за ймовірністю доданків, записаних, зокрема, у підрозділі 3.1, на які залишкова корелограма відрізняється від звичайної корелограми.

При вивченні асимптотичної поведінки статистичних оцінок особливий прикладний інтерес становить задача про знаходження асимптотики моментів цих оцінок, особливо, перших двох моментів: математичного сподівання, а, фактично, зсуву, середнього квадрата відхилення та дисперсії у випадку скалярної оцінки, якою і є залишкова корелограма. У 4-му розділі отримано розв'язок саме цієї задачі, при цьому припускається, що функція регресії неперервно диференційовна за параметрами  $k \geq 2$  разів та всі її частинні похідні задовольняють деяким умовам обмеженості за час спостереження. Крім цього, вважається, що інформаційна матриця є додатно визначеною рівномірно за тривалістю спостереження.

У підрозділі 4.1 отримано стохастичне асимптотичне розвинення нормованої залишкової корелограми, тобто її представлення у вигляді деякої суми за степенями  $T^{-1/2}$  ( $T$  – час спостереження) зі стохастично малим залишковим членом. Коефіцієнти цієї суми при степенях  $T^{-1/2}$  є поліномами від інтегралів від випадкового шуму, зваженого похідними функції регресії. У явному вигляді записано перші три члени розвинення. Для отримання цього розвинення, зокрема, було посилено відомий неявний результат про стохастичне асимптотичне розвинення нормованої оцінки найменших квадратів параметра нелінійної функції регресії в моделі з гауссівським стаціонарним шумом.

Стохастичне асимптотичне розвинення є першим кроком у отриманні подальших тонких результатів щодо статистичної оцінки. Наприклад, таких важливих у застосуваннях результатів, як асимптотичні розвинення її моментів. Спираючись на стохастичне асимптотичне розвинення підрозді-

ду 4.1, у випадку, коли у функції регресії існують та неперервні всі частинні похідні за параметрами до порядків 4, 3 та 2 включно, і у підрозділі 4.2 отримано асимптотичні розвинення зсуву, середнього квадрата відхилення та дисперсії залишкової корелограми. Асимптотичне розвинення дисперсії розв'язує відому в асимптотичній статистиці проблему Ю. В. Лінніка для залишкової корелограми.

Результати, отримані в дисертації, мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані в різних галузях природничих, технічних, економічних наук тощо, де виникає проблема статистичного оцінювання функціональних характеристик випадкових шумів у моделях нелінійного регресійного аналізу.

**Ключові слова:** нелінійна модель регресії з неперервним часом, коваріаційна функція стаціонарного гауссівського шуму, оцінка найменших квадратів, залишкова корелограма, імовірності великих відхилень, консистентність, асимптотична нормальність, стохастичне асимптотичне розвинення, асимптотичне розвинення моментів.

### **Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації**

За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 наукових статей у фахових виданнях (3 з яких опубліковано у журналі, який індексується науково-метричною базою Scopus) та 13 робіт у матеріалах наукових конференцій, 10 з яких є міжнародними.

1. Іванов О.В. Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2014. – 90. – С. 78-91.
2. Іванов О.В. Асимптотична нормальність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2014. – 91. – С. 55-63.
3. Іванов О.В. Асимптотичний розклад моментів корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Український математичний журнал. – 2014. – 66(6). – С. 784-805.

4. Іванов О.В. Консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Наукові вісті «НТУУ КПІ». – 2015. – 4. – С. 57-62.
5. Москвичова К.К. Великі відхилення корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії/ К.К. Москвичова // Доповіді Національної академії наук України. – 2016. – №9. – С. 23-28.
6. Moskvychova K.K. Asymptotic expansion related to random noise covariance function estimator in nonlinear regression model / К.К. Moskvychova // Ukrainian-German Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory. – 2013. – Koktebel. – P. 10.
7. Іванов О.В. Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в моделі «сигнал+шум» / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Збірник тез за матеріалами третьої міжуніверситетської наукової конференція молодих вчених з математики та фізики. – Київ. – 2013. – С. 44-45.
8. Іванов О. В. Консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Матеріали XV Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. Матеріали конференції. Секція III. – Київ. – 2014. – С. 65.
9. Moskvychova K.K. Strong consistency of the correlogram estimator of covariance function of random noise in nonlinear regression/ К.К. Moskvychova // 4th International Scientific Conference of Students and young scientists «Theoretical and applied aspects of cybernetics ТААС». – Kyiv.: «Bukrek». – 2014. – P. 158-161.
10. Moskvychova K.K. Asymptotic expansions of the residual correlogram estimator moments / К.К. Moskvychova // International Conference Stochastic Processes in Abstract Spaces. – Kyiv. – 2015. – P. 41.
11. Москвичова К.К. Консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в регресійній моделі / К.К. Москвичо-

- ва // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики. Тези доповідей. – Київ. – 2015. – С. 24.
12. Moskvychova K.K. Asymptotic Normality of Residual Correlogram Estimator / K.K. Moskvychova // International Conference Probability, Reliability and Stochastic Optimization. Conference materials. – Kyiv. – 2015. – P. 43–44.
  13. Москвичова К.К. Про асимптотичні розклади моментів оцінки коваріаційної функції випадкового шуму / К.К. Москвичова // Матеріали XVI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. Секція III. – Київ. – 2015. – С. 51–52.
  14. Москвичова К.К. Великі відхилення корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму / К.К. Москвичова // Матеріали XVII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. Секція III. – Київ. – 2016. – С. 118 – 120.
  15. Москвичова К.К. Про ймовірність великих відхилень корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму / К.К. Москвичова // П'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Тези доповідей. – Київ. – 2016. – С. 14.
  16. Moskvychova K.K. Probabilities of large deviations of random noise covariance function estimator in nonlinear regression model / K.K. Moskvychova // Limit Theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics. International workshop in honour of Prof. V.V. Buldygin. Abstracts. – Kyiv. – 2016. – P. 39.
  17. A.V. Ivanov Properties of correlogram estimator of random noise covariance function in nonlinear regression model / A.V. Ivanov, K.K. Moskvychova // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications. IV. – Kyiv. – 2018. – P. 29–30.
  18. Moskvychova K. K. Large deviations of residual correlogram as estimator of the noise unknown covariance function / K.K. Moskvychova // International Conference "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes" dedicated to the 100th anniversary of I. I. Gikhman. – Kyiv. – 2018. – P. 67-68.

## ABSTRACT

*Moskvychova K.K.* Properties of correlogram estimator of random noise covariance function in nonlinear regression model. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscripts.

Thesis for candidate degree in physical and mathematical sciences by speciality 01.01.05 – probability theory and mathematical statistics. – National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», MES of Ukraine, Kyiv, 2018.

Regression analysis is a huge part of mathematical and applied statistics. Nonlinear regression analysis is a significant extension and complication of classical linear regression analysis, due to the use of nonlinear or partially nonlinear in parameters models that describe more adequate than linear models phenomena requiring statistical analysis. A large number of applied problems in numerical scientific fields, including astronomy, Earth science, statistical radiophysics, chemical kinetics, biology, medicine, econometrics, finance, sociology, etc., in the technical fields of knowledge associated with study of oscillation processes such as acoustics, vibration technology, automation, electrical engineering, etc., give impetus to the development of nonlinear regression analysis.

The task of estimation the vector signal parameter in the «signal+noise» observation models is a well-known problem of statistics of random processes, and in the case of a nonlinear signal parameter is the problem of nonlinear regression analysis.

When in the described model there is a need to estimate the functional characteristics of random noise, then you can say that the signal (regression function) from the useful turns into nuisance one. To neutralize its influence, it is first necessary to estimate the parameter of the regression function, which gets the status of the nuisance parameter, and then consider an estimator, say, of the covariance function of the stationary random noise using the residuals.

The thesis is devoted to the study of asymptotic properties of residual correlogram as an estimator of random stationary Gaussian noise covariance function in continuous time nonlinear regression model. For estimation of the regression function parameters in the thesis the least squares estimator is used,

the definition of which does not require knowledge of any characteristics of random noise. As an estimator of the covariance function of stationary noise in the regression model, it is advisable to consider the residual correlogram which in the models with correlated observations generalizes the residual sum of squares of the classical regression analysis.

However, unlike the residual sum of squares and the usual correlogram, the results on the residual correlograms are not sufficiently represented in statistical literature, except for individual results for linear regression models with discrete time and stationary correlated observations errors. Such a general study of the asymptotic behavior of the residual correlogram, as in this work, has not been done before in spite of the great theoretical and practical interest in this natural problem.

The goal of this work is the development of the theory of covariance function estimation of stationary Gaussian noise in a nonlinear continuous time regression model.

The object of the study is a continuous time nonlinear regression model with random noise described above.

The subject of the study is the asymptotic properties of the residual correlogram as an estimator of the covariance function of the indicated random noise in the nonlinear regression model.

We used the techniques of obtaining exponential bounds of large deviation probabilities of the least squares estimator of nonlinear regression model parameter and correlogram of the Gaussian stationary process, elements of the probability measures convergence theory in metric spaces, the theory of asymptotic expansions associated with statistical estimators, in particular, with the least squares estimator. Some facts of nonlinear regression analysis, the concept of regression function spectral measure have been applied also.

The thesis consists of an introduction, a review of literature (section 1), three sections (2nd, 3rd, 4th), broken down into subsections, conclusions, and list of used sources containing 113 titles. The volume of the thesis is 142 pages of printed text.

In section 2, for a nonlinear regression model with Gaussian stationary noise, the result on the exponential convergence to zero of the probabilities of

large deviations of the correlogram estimator of the noise unknown covariance function in uniform metric is obtained. The use of this fact provides an opportunity to formulate sufficient conditions for the consistency of indicated estimator.

In subsection 2.1 the observation model and statement of the problem is described.

In subsection 2.2 the theorem is proved on exponential convergence to zero of the probabilities of large deviations of nonlinear regression function vector parameter the least squares estimator in the model with Gaussian stationary noise and bounded spectral density, and in the explicit form the constant is written under the sign exponent that depends on the dimension of the parametric set, the supremum of the noise spectral density, and the constant which characterizes the ability of the regression function to distinguish the parameters.

In subsection 2.3 a theorem is obtained on probabilities of large deviations in uniform metric of the normed correlogram of Gaussian stationary noise with independent of observation time constant in the exponent of the right-hand side of the correspondent inequality, in contrast to the known analogous result with a constant depending on the observation time.

In subsection 2.4 relying on these these results a theorem was proved on exponential convergence to zero of the probabilities of large deviations in uniform metric of the normed difference of residual correlogram and random noise covariance function. As simple corollaries of this fact, the enhanced properties of the residual correlogram weak consistency are obtained.

In section 3 a functional central limit theorem is proved in the space of continuous functions for the normed residual correlogram in nonlinear regression model in consideration. The result obtained shows that the limiting almost surely continuous Gaussian process coincides with the limiting process in the functional central limit theorem for standard correlogram of random noise in our regression model.

To obtain such a result in subsection 3.2, the conditions of section 2 were strengthened to the regression function and Gaussian stationary noise. Thus, the regression function must be twice continuously differentiable, its partial

derivatives of the 1st and 2nd orders must satisfy certain conditions on the growth rate, the existence of the spectral measure of regression function is also required. Gaussian stationary noise must have an absolutely integrable covariance function, etc. The proof of the central limit theorem is reduced to obtaining uniform convergence in probabilities of terms that are written, in particular, in subsection 3.1, for which the residual correlogram differs from the usual density correlogram.

When studying the asymptotic behavior of statistical estimators, the problem of special applied interest is the finding of asymptotics of the moments of these estimators especially of the first two moments: expectation, or, in fact, the bias, mean square deviation and variance in the case of scalar estimator, as the residual correlogram. In section 4 the solution to this particular problem is obtained, in this connection it is assumed that the regression function is continuously differentiable by the parameter not less than twice, and all its partial derivatives satisfy certain condition of boundness during the observation time.

In subsection 4.1 a stochastic asymptotic expansion of the residual correlogram is obtained, that is its representation in the form of a certain sum in powers of  $T^{-1/2}$  ( $T$  is observation time) with stochastically small residual term. The coefficients of this sum at the powers of  $T^{-1/2}$  are the polynomials of integrals of random noise weighted by the regression function derivatives. The first three terms of the expansion are written in the explicit form. To obtain this expansion, in particular, the well-known existing result on the stochastic asymptotic expansions of the normed least squares estimator of nonlinear regression parameter in the model with Gaussian stationary noise was sharpened.

Stochastic asymptotic expansion is the first step in obtaining of further refine results regarding statistical estimator. For example, so important in applications results as asymptotic expansions of its moment. Relying on the stochastic asymptotic expansion of the subsection 4.1, in the case when all the regression function partial derivatives by parameters, exist and are continuous up to the orders 4, 3, and 2 inclusive in the subsection 4.2 asymptotic expansions of the bias, mean square deviation, and variance of the residual

correlogram are obtained. Asymptotic expansion of variance solves famous in asymptotic statistics Yu. V. Linnik's problem for residual correlogram.

The results obtained in the thesis are of theoretical nature. They can be applied in various branches of natural, technical, economic sciences, etc., where the problem of statistical estimation of random noises functional characteristics in the models of nonlinear regression analysis occurs.

**Key words:** continuous time nonlinear regression model, covariance function of stationary Gaussian noise, the least squares estimator, residual correlogram, probabilities of large deviations, consistency, asymptotic normality, stochastic asymptotic expansion, asymptotic expansion of the moments.

### **Applicant's publications list concerning the topic of the thesis**

The main results of the thesis are published in 5 papers in professional publications (3 of them are published in journals indexed by Scopus) and in 13 conference proceedings (10 of them are international).

1. Ivanov O.V. Stochastic asymptotic expansion of correlogram estimator of the correlation function of random noise in nonlinear regression model. / O.V. Ivanov, K.K. Moskvichova // Theor. Probability and Math. Statist. – 2015. – **90**. – pp. 87-101.
2. Ivanov O.V. Asymptotic normality of the correlogram estimator of the covariance function of a random noise in the nonlinear regression model / O.V. Ivanov, K.K. Moskvichova // Theor. Probability and Math. Statist. – 2015. – **91**. – pp. 61-70.
3. Ivanov A.V. Asymptotic Expansion of the Moments of Correlogram Estimator for the Random–Noise Covariance Function in the Nonlinear Regression Model / A.V. Ivanov, K.K. Moskvychova // Ukrainian Mathematical Journal. – 2014. – **66**(6). – pp. 884–904.
4. Ivanov A.V. Consistency of a correlogram estimator of covariance function of random noise in the nonlinear regression model / A.V. Ivanov, K.K. Moskvychova // Naukovi Visti «NTUU KPI». – 2015. – **4**. – С. 57-62. (in Ukrainian)

5. Moskvychova K.K. Large deviations of a correlogram estimator of the random noise covariance function in a nonlinear regression model. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, 9, 2016, pp. 23–28.
6. Moskvychova K.K. Asymptotic expansion related to random noise covariance function estimator in nonlinear regression model / K.K. Moskvychova // *Ukrainian-German Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory.* – 2013. – Koktebel. – P. 10.
7. Ivanov A.V. Stochastic asymptotic expansion of the correlogram estimator of the random noise covariance function in the « signal + noise » model / A.V. Ivanov, K.K. Moskvychova // *Abstracts of The Third Inter-university Scientific Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics.* – Kyiv. – 2013. – P. 44-45.(in Ukrainian)
8. Ivanov A.V. Consistency of correlogram estimator of random noise covariance function in nonlinear regression model / A.V. Ivanov, K.K. Moskvychova // *Materials of the XV acad. M. Kravchuk International Scientific Conference. Section III.* – Kyiv. – 2014. – P. 65.(in Ukrainian)
9. Moskvychova K.K. Strong consistency of the correlogram estimator of covariance function of random noise in nonlinear regression/ K.K. Moskvychova // *4th International Scientific Conference of Students and young scientists «Theoretical and applied aspects of cybernetics TAAC».* – Kyiv.:«Bukrek». – 2014. – P. 158-161.
10. Moskvychova K.K. Asymptotic expansions of the residual correlogram estimator moments / K.K. Moskvychova // *International Conference Stochastic Processes in Abstract Spaces.* – Kyiv. – 2015. – P. 41.
11. Moskvychova K.K. Consistency of a correlogram estimator of random noise covariance function in regression model /K.K. Moskvychova // *Fourth All-Ukrainian Scientific Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics. Abstracts of reports.* – Kyiv. – 2015. – P. 24.(in Ukrainian)
12. Moskvychova K.K. Asymptotic Normality of Residual Correlogram Estimator / K.K. Moskvychova // *International Conference Probability, Reliability and Stochastic Optimization. Conference materials.* – Kyiv. – 2015. – P. 43–44.

13. Moskvychova K.K. On asymptotic expansions of moments of estimator of random noise covariance function / K.K. Москвичова // Materials of the XVI acad. M. Kravchuk International Scientific Conference. Section III. – Kyiv. – 2015. – P. 51–52.(in Ukrainian)
14. Moskvychova K. K. Large deviations of correlogram estimator of random noise covariance function / Moskvychova K. K. // Materials of the XVII acad. M. Kravchuk International Scientific Conference. Section III. – Kyiv. – 2016. – P. 118 – 120.(in Ukrainian)
15. Moskvychova K. K. The probability of large deviations of the correlogram estimator of the random noise covariance function / K.K. Moskvychova // Fifth All-Ukrainian Scientific Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics « Actual Problems of Modern Mathematics and Physics and Methods of Their Teaching ». Abstracts of reports. – Kyiv. – 2016. – P. 14. (in Ukrainian)
16. Moskvychova K.K. Probabilities of large deviations of random noise covariance function estimator in nonlinear regression model / K.K. Moskvychova // Limit Theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics. International workshop in honour of Prof. V.V. Buldygin. Abstracts. – Kyiv. – 2016. – P. 39.
17. A.V. Ivanov Properties of correlogram estimator of random noise covariance function in nonlinear regression model / A.V. Ivanov, K.K. Moskvychova // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications. IV. – Kyiv. – 2018. – P. 29–30.
18. Moskvychova K. K. Large deviations of residual correlogram as estimator of the noise unknown covariance function / K.K. Moskvychova// International Conference "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes"dedicated to the 100th anniversary of I. I. Gikhman. - Kyiv. - 2018. - P. 67-68.

## ЗМІСТ

Список введених у дисертації умов	18
Список введених у дисертації позначень	19
Вступ	21
<b>Розділ 1</b>	<b>ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ</b>
	39
<b>Розділ 2</b>	<b>ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ КОРЕЛОГРАМНОЇ ОЦІНКИ ТА ЇЇ КОНСИСТЕНТНІСТЬ</b>
	46
2.1	Модель спостережень та постановка задачі . . . . .
	46
2.2	Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів параметра нелінійної регресії . . . . .
	48
2.3	Імовірності великих відхилень корелограми гауссівського стаціонарного процесу . . . . .
	57
2.4	Імовірності великих відхилень залишкової корелограми та її консистентність . . . . .
	68
<b>Висновки до розділу 2</b>	<b>74</b>
<b>Розділ 3</b>	<b>АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ КОРЕЛОГРАМНОЇ ОЦІНКИ</b>
	76
3.1	Попередні зауваження . . . . .
	76
3.2	Теорема про асимптотичну нормальність корелограмної оцінки . . . . .
	78
<b>Висновки до розділу 3</b>	<b>91</b>
<b>Розділ 4</b>	<b>АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ, ПОВ'ЯЗАНІ З КОРЕЛОГРАМНОЮ ОЦІНКОЮ</b>
	92
4.1	Стохастичне асимптотичне розвинення корелограмної оцінки . . . . .
	92

4.2	Асимптотичне розвинення моментів корелограмної оцінки . . . . .	109
	<b>Висновки до розділу 4</b>	128
	<b>ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ</b>	130
	<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	131
	<b>ДОДАТОК</b> Список опублікованих праць за темою дисертації	141

## СПИСОК ВВЕДЕНИХ У ДИСЕРТАЦІЇ УМОВ

На цій сторінці ми перелічуємо всі умови, які було введено в тексті роботи і вказуємо номери підрозділів, де формулювання цих умов знаходяться.

### РОЗДІЛ 2

#### Підрозділ 2.1

$N1(i), (ii)$ .

#### Підрозділ 2.2

$R1(i), (ii)$ ;  $R1(ii')$ ;  $R2(i), (ii)$ ;  $R3$ ;  $R4$ ;  $R5(i), (ii)$ ;  $R5(i')$ .

#### Підрозділ 2.3

$N2$ ;  $N2'$ .

#### Підрозділ 2.4

$N3$ ;  $C$ ;  $R5(ii')$ .

### РОЗДІЛ 3

#### Підрозділ 3.1

$N1(ii')$ .

#### Підрозділ 3.2

$R1'(i), (ii), (iii)$ ;  $R6$ ;  $R7$ ;  $AN$ ;  $RN1$ ;  $N4$ ;  $RN1'(i), (ii), (iii)$ .

### РОЗДІЛ 4

#### Підрозділ 4.1

$R1''$ ;  $R8$ ;  $R9$ .

#### Підрозділ 4.2

$R10$ .

## СПИСОК ВВЕДЕНИХ У ДИСЕРТАЦІЇ ПОЗНАЧЕНЬ

Перелік позначень в основному тексті роботи з вказанням номерів сторінок, де їх було введено.

- c.46.  $X(t), g(t, \theta), \varepsilon(t), \Theta, \Theta_\gamma, B(t), f(\lambda), \|B\|_2, \|f\|_2$ .
- c.47.  $\widehat{\theta}_T, \widehat{X}(t), B_T(z, \widehat{\theta}_T), B_T(z)$ .
- c.48.  $d_T(\theta), d_{iT}(\theta), g_i(t, \theta)$ .
- c.49.  $I(T), f_0, \Delta(t), \|\Delta\|_T$ .
- c.50.  $G_T(x), U_T(\theta), \Gamma_{T,\theta,R}, \mathfrak{A}, a_T(R), \gamma(R), \Delta(t, u), \Phi_T(u, v)$ .
- c.51.  $I(T, u), \zeta_T(u)$ .
- c.54.  $\varphi_T(\tau_1, \tau_2), s_T$ .
- c.57.  $Y_T(z), L_0(\Omega), \text{Prg}(\Omega)$ .
- c.58.  $U, L_U(\Omega), \|\eta\|_U, \text{Exp}_\psi(\Omega), \text{Exp}_{(1)}(\Omega), \|\cdot\|_{E(1)}, K(\Omega)$ .
- c.59.  $K_\sigma, \varkappa(n), \Gamma_0^{(2)}(\Omega), \Gamma^{(2)}(\Omega)$ .
- c.60.  $\rho(z_1, z_2), (H, \rho), \rho_\xi(z_1, z_2), \sigma_\xi(z_1, z_2)$ .
- c.61.  $q(z), \sqrt{\rho}, c(r), \rho_{Y_T}(z_1, z_2), \sigma_{Y_T}(z_1, z_2)$ .
- c.62.  $\mathbf{N}_\rho(H, \varepsilon), \mathbf{H}_\rho(H, \varepsilon)$ .
- c.63.  $I(\xi, K), \mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)$ .
- c.64.  $r^*, D(r), \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon), \varepsilon(\sqrt{\rho})$ .
- c.65.  $\varepsilon_{0T}, \varepsilon_0$ .
- c.68.  $a_0, I_{iT}(z), i = 1, 2, 3$ .
- c.69.  $s_T^*(z)$ .
- c.70.  $K(x)$ .
- c.76.  $R_T(z)$ .
- c.77.  $Y$ .
- c.78.  $g_{ij}, G_j, D_{jT}, G_{ij}, D_{ij,T}, \Psi_{jT}(z_1, z_2; \tau)$ .
- c.79.  $g_T^j(\lambda, \tau), \mu_T^{jl}(d\lambda, \tau), \mu_T(d\lambda, \tau), \mu(d\lambda, \tau), J_T(\tau), J(\tau)$ .
- c.80.  $b(\lambda), \tilde{g}_T^j(\lambda, \tau)$ .
- c.93.  $d_T^2(\alpha, \tau), \Phi_T^{[\alpha]}(\tau_1, \tau_2), \mathfrak{J}_{ij}(\theta), \mathfrak{J}(\theta), \Lambda^{ij}(\theta), \Lambda(\theta), b_{i_1 \dots i_r}(z, \theta), b_{i_1 \dots i_r}(\theta)$ .
- c.94.  $b^{(\alpha)}(\theta), b_1^{(\alpha)}(z, \theta), b_2^{(\alpha)}(z, \theta), b^{(\alpha)}(z, \theta), a_{i_1 \dots i_r}(z, \theta), \Pi^{(\beta)(\gamma)}(z, \theta), \Pi_{(i)(j)}(z, \theta), \Pi_{(i)(jk)}(z, \theta), \Pi_{(ij)(k)}(z, \theta), a_{ij}(z, \theta), a_{ijk}(z, \theta), a_{ij}(\theta), a_{ijk}(\theta)$ .
- c.95.  $h_{\nu i}(\theta), h_\nu(\theta), \xi_{k-1}(\theta)$ .

- c.96.  $b_T^2$ .
- c.97.  $h_0, h_1, \delta(u)$ .
- c.106.  $\zeta_{k-1}(\theta), P_0(z)$ .
- c.107.  $A_\nu(z, \theta), B_\nu(z, \theta), P_\nu(z, \theta)$ .
- c.108.  $A_1(z), B_1(z), P_1(z), A_2(z)$ .
- c.109.  $B_2(z), P_2(z)$ .
- c.110.  $\Psi_{ij}(z, \theta), \Psi_{ij}(\theta)$ .
- c.111.  $L_T(z), W_T, \sigma_{\alpha T}^2(z), \gamma_{jT}$ .
- c.112.  $W_{\alpha T}^{(0)}, W_{\alpha T}^{(j)}$ .
- c.114.  $\delta_{jT}, W_T^{(j)}$ .
- c.116.  $W_{jT}^*$ .
- c.119.  $V_T, P_j^*(z), j = 0, 1, 2$ .
- c.122.  $P_{11}^*(z), P_{12}^*(z), \Delta_{j_1 j_2}(z)$ .
- c.123.  $\varphi_{i_1 j_1}^{(1)}, \varphi_{i_1 j_1}^{(k)(z)}, k = 2, 3, 4$ .
- c.125.  $\Psi_{i_1 i_2}^{(1)}(z), \Psi_{i_1 i_2}^{(2)}(z), K_T^2(z), M_T(z), N_T(z)$ .

## ВСТУП

### **Актуальність теми.**

Регресійний аналіз є величезною частиною математичної та прикладної статистики: див., наприклад, енциклопедичні монографії Н. Дрейпера, Г. Сміта (1986) [18], С. Р. Рао (1968) [45], Г. А. Себера, А. Дж. Лі (2003) [107].

Нелінійний регресійний аналіз є істотним розширенням та ускладненням класичного лінійного регресійного аналізу, завдяки використанню нелінійних або частково нелінійних за параметрами моделей, які адекватніше, ніж лінійні моделі, описують явища, що потребують статистичного аналізу. Розвитку нелінійного регресійного аналізу дає поштовх велика кількість прикладних задач у чисельних галузях природничих та соціальних наук, серед яких астрономія, науки про Землю, статистична радіофізика, хімічна кінетика, біологія, медицина, економетрика, фінанси, соціологія тощо; у технічних галузях знань, пов'язаних з вивченням коливальних процесів, – акустиці, вібраційній техніці, автоматичній, електротехніці тощо. Пошлемося, наприклад, на видання з математичних проблем нелінійного регресійного аналізу Д. М. Бейтса, Д. Г. Уотса (1988) [55], О. В. Іванова (1997) [69], В. Г. Квина, Е. Хеннана (2001) [103], Р. Дж. Керрола та ін. (2006) [60].

Задача оцінювання векторного параметра сигналу в моделях спостережень «сигнал+шум» є добре відомою проблемою статистики випадкових процесів, а у випадку нелінійного сигналу, – задачею нелінійного регресійного аналізу. Коли в описаній моделі виникає проблема оцінити функціональні характеристики випадкового шуму, то можна сказати, що сигнал із корисного перетворюється на заважаючий. Для знешкодження його впливу треба спочатку оцінити параметр функції регресії, який набуває статус заважаючого, а потім розглядати оцінку, скажімо, коваріаційної функції стаціонарного випадкового шуму, використовуючи залишки.

Для оцінювання параметра функції регресії доцільно використовувати, наприклад, оцінку найменших квадратів (ОНК), означення якої не потребує знання жодної характеристики випадкового шуму. Численні асим-

асимптотичні властивості ОНК параметра нелінійної моделі регресії отримано в монографіях О. В. Іванова, М. М. Леоненка (1989) [71] та О. В. Іванова (1997) [69].

У якості оцінки коваріаційної функції стаціонарного процесу доцільно розглядати його корелограму. Важливі факти про корелограми однорідних, однорідних та ізотропних випадкових полів наведено в книзі [71]. Глибокі результати стосовно корелограм стаціонарних гауссівських процесів містяться у монографії В. В. Булдигіна, Ю. В. Козаченка (1998) [5].

У якості оцінки коваріаційної функції стаціонарного шуму в моделі регресії природно обрати залишкову корелограму, яка є узагальненням на випадок корельованих спостережень залишкової суми квадратів класичного регресійного аналізу. Але на відміну від залишкової суми квадратів та звичайної корелограми результати про залишкові корелограми недостатньо представлені в статистичній літературі. Добре відомо, що в корелограмах стаціонарних часових рядів значення спостережень центруються вибірковими середніми, які є ОНК невідомого середнього часового ряду. Властивості таких «простих» залишкових корелограм однорідних та ізотропних випадкових полів вивчалися М. М. Леоненком (1999) [84]. У розділі 10.3 монографії Т. В. Андерсена (1971) [53] отримано деякі твердження про вибіркові коваріації (у нас – залишкові корелограми), які відповідають лінійній моделі регресії з дискретним часом і стаціонарним шумом.

Таке загальне дослідження асимптотичної поведінки залишкової корелограми, як у цій роботі, раніше не робилося, незважаючи на великий теоретичний та практичний інтерес до цієї природної проблеми. Таким чином, напрямок досліджень дисертаційної роботи є актуальним.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» у рамках держбюджетної науково-дослідної роботи № 2810Ф "Дослідження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцій та узагальнених процесів відновлення"(номер державної реєстрації 0115U000371).

### **Мета та задачі дослідження.**

Метою роботи є розвиток теорії оцінювання коваріаційної функції стаціонарного гауссівського шуму в нелінійній моделі регресії з неперервним часом спостереження.

**Об'єктом дослідження** є нелінійна модель регресії з неперервним часом та описаним вище випадковим шумом.

**Предметом дослідження** є асимптотичні властивості залишкової корелограми як оцінки коваріаційної функції вказаного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії.

У роботі розглянуто такі задачі:

- отримання експоненціальних оцінок для ймовірностей великих відхилень супремума нормованої залишкової корелограми та посиленних властивостей її консистентності;
- вивчення граничного розподілу нормованої залишкової корелограми в просторі неперервних функцій;
- дослідження умов, за яких нормована залишкова корелограма припускає стохастичне асимптотичне розвинення;
- отримання асимптотичних розвинень зсуву, середнього квадрату відхилення та дисперсії залишкової корелограми.

#### **Методика дослідження.**

У роботі використано методи отримання експоненціальних оцінок ймовірностей великих відхилень ОНК параметра нелінійної моделі регресії та корелограми гауссівського стаціонарного процесу, елементи теорії збіжності ймовірнісних мір у метричних просторах, теорію асимптотичних розвинень, пов'язаних із статистичними оцінками, зокрема, з ОНК. Застосовано також деякі факти нелінійного регресійного аналізу, поняття спектральної міри функції регресії.

#### **Наукова новизна одержаних результатів.**

Усі отримані в дисертації результати є новими. Зокрема,

- наведено умови, за яких ймовірності великих відхилень ОНК параметра функції регресії мають експоненціально спадну мажоранту;
- отримано результат про експоненціальну оцінку зверху ймовірностей великих відхилень корелограми гауссівського стаціонарного процесу з

константою в експоненті, що не залежить від тривалості спостереження його траєкторії;

- доведено теорему про існування експоненціально спадної мажоранти для ймовірностей великих відхилень залишкової корелограми, і, в якості наслідку, отримано посилену властивість слабкої консистентності залишкової корелограми;
- доведено функціональну теорему в просторі неперервних функцій про асимптотичну нормальність залишкової корелограми;
- отримано стохастичне асимптотичне розвинення залишкової корелограми;
- знайдено асимптотичні розвинення зсуву, середнього квадрата відхилення та дисперсії залишкової корелограми.

### **Практичне значення одержаних результатів.**

Результати, отримані в дисертації, мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані в різних галузях природничих, технічних, економічних наук тощо, де виникає проблема статистичного оцінювання функціональних характеристик випадкових шумів у моделях нелінійного регресійного аналізу.

### **Особистий внесок здобувача.**

Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. За результатами дисертації автором опубліковано п'ять робіт, з них чотири у співавторстві з науковим керівником Івановим О. В., у яких Іванову О. В. належить постановка задач та загальне керівництво роботою.

### **Апробація результатів.**

Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на

- Міжнародній конференції «Ukrainian-German Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory» (м. Коктебель, 2013 р.);
- III, IV, V-ій міжуніверситетських конференціях молодих вчених з математики та фізики (м. Київ, 2013 р., 2015 р., 2016 р.);
- XV, XVI, XVII-ій міжнародних наукових конференціях імені академіка М. Кравчука ( м. Київ, 2014 р., 2015 р., 2016 р.);

- Міжнародній конференції «Theoretical and applied aspects of cybernetics, ТААС. IV» (м. Київ, 2014 р.);
- Міжнародній конференції «Stochastic Processes in Abstract Spaces» (м. Київ, 2015 р.);
- Міжнародній конференції «Probability, Reliability and Stochastic Optimization» (м. Київ, 2015 р.);
- Міжнародній конференції «Limit Theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics. International workshop in honour of Prof. V.V. Buldygin» (м. Київ, 2016 р.);
- Міжнародній конференції «Modern Stochastics: Theory and Applications. IV.» (м. Київ, 2018 р.);
- засіданні наукового семінару «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського (керівники – д.ф.-м.н., проф. О. І. Клецов, д.ф.-м.н., проф. О. В. Іванов) (м. Київ, 2013 р., 2014 р., 2018 р.);
- засіданні наукового семінару відділу математичних методів дослідження операцій Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України (керівник – член-корр. НАН України, д.ф.-м.н., проф. П. С. Кнопов) (м. Київ, 2018 р.);
- сумісному засіданні наукових семінарів «Теорія ймовірностей і математична статистика» кафедри теорії ймовірностей, статистики і актуарної математики КНУ ім. Тараса Шевченка (керівники д.ф.-м.н., проф., Ю. С. Мішура, д.ф.-м.н., проф., Ю. В. Козаченко) та «Асимптотичні методи в статистиці» кафедри математичного аналізу КНУ ім. Тараса Шевченка (керівники д.ф.-м.н., проф., О. Г. Кукуш, д.ф.-м.н., проф., Р. Є. Майборода) (м. Київ, 2018 р.).

**Публікації.** За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 статей у фахових виданнях [23–26, 43] та 13 тез доповідей на конференціях [27, 28, 40–42, 44, 74, 90–95]. До наукометричних баз даних входять три статті.

### **Структура та обсяг дисертації.**

Дисертація складається зі вступу, огляду літератури (1-й розділ), трьох розділів (2-й, 3-й, 4-й), розбитих на підрозділи, висновків та списку вико-

ристаних джерел, що містить 113 найменувань. Обсяг дисертації становить 143 сторінки друкованого тексту.

**Зміст роботи.** У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, стисло викладено зміст основної частини роботи та наукову новизну отриманих результатів.

У *першому* розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за її темою.

*Другий* розділ дисертації містить експоненціальні оцінки швидкості збіжності ймовірностей великих відхилень нормованої залишкової корелограми як оцінки коваріаційної функції гауссівського стаціонарного шуму в нелінійній моделі регресії.

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t, \theta) + \varepsilon(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

де  $g : (-\gamma, \infty) \times \Theta_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$  – неперервна функція, що залежить від невідомого параметра  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q) \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$ ,  $\Theta$  – обмежена відкрита опукла множина,  $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\| < 1} (\Theta + \gamma a)$ ,  $\gamma > 0$  – деяке число, а випадковий шум  $\varepsilon$  задовольняє умові

**N1. (i)**  $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$  – дійсний майже напевно (м.н.) вибірково неперервний стаціонарний гауссівський процес, заданий на ймовірнісному просторі  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $E \varepsilon(0) = 0$ ;

**(ii)** процес  $\varepsilon$  має обмежену спектральну щільність  $f = \{f(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Якщо коваріаційна функція  $B = \{B(t), t \in \mathbb{R}\}$  шуму  $\varepsilon$  невідома, то виникає задача оцінювання  $B$  за спостереженнями (1), причому параметр  $\theta$  функції регресії грає роль заважаючого параметра.

**Означення 2.1.1.** ОНК невідомого параметра  $\theta \in \Theta$  на інтервалі спостережень  $[0, T]$  називається будь-який випадковий вектор  $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_{1T}, \dots, \hat{\theta}_{qT}) \in \Theta^c$ , де  $\Theta^c$  – замикання  $\Theta$ , для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau), \quad Q_T(\tau) = \int_0^T [X(t) - g(t, \tau)]^2 dt.$$

У якості оцінки  $B$  візьмемо залишкову корелограму, побудовану за залишками  $\widehat{X}(t) = X(t) - g(t, \widehat{\theta}_T)$ ,  $t \in [0, T + H]$ , тобто

$$B_T(z, \widehat{\theta}_T) = T^{-1} \int_0^T \widehat{X}(t+z) \widehat{X}(t) dt, \quad z \in [0, H],$$

$H > 0$  – фіксоване число. Зауважимо, що

$$B_T(z, \theta) = B_T(z) = T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t+z) \varepsilon(t) dt$$

є корелограмою випадкового шуму  $\varepsilon$ .

У підрозділі 2.2 отримано теореми про ймовірності великих відхилень ОНК  $\widehat{\theta}_T$ . Введемо діагональну матрицю

$$d_T(\theta) = \text{diag} (d_{iT}(\theta), i = \overline{1, q}), \quad d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T g_i^2(t, \theta) dt,$$

де позначено  $g_i(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t, \theta)$ .

**R1. (i)** Функція  $g(t, \tau)$  при кожному  $t > -\gamma$  неперервно диференційовна за  $\tau \in \Theta_\gamma$  та при кожному  $\tau \in \Theta$  частинні похідні  $g_i(t, \tau)$ ,  $i = \overline{1, q}$ , інтегровні за  $t$  з квадратом на кожному проміжку  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , причому  $d_{iT}^2(\tau) \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \infty$ ,  $i = \overline{1, q}$ .

**(ii)** Для будь-яких фіксованих  $H > 0$  та  $\tau \in \Theta$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} d_{i, T+H}(\tau) d_{iT}^{-1}(\tau) = 1, \quad i = \overline{1, q}.$$

Позначимо

$$\Phi_T(u, v) = \int_0^T (g(t, \theta + d_T^{-1}(\theta)u) - g(t, \theta + d_T^{-1}(\theta)v))^2 dt,$$

$$u, v \in U_T(\theta) = d_T(\theta)(\Theta^c - \theta),$$

$f_0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} f(\lambda) < \infty$ . Замість слів «для достатньо великих  $T, R$ » будемо писати «для  $T > T_0, R > R_0$ ».

**R4.** Існують додатні числа  $c_0$  і  $c_1$  такі, що для будь-якого  $\theta \in \Theta$  та  $u, v \in U_T(\theta)$  для  $T > T_0$ , де  $T_0$  не залежить від  $\theta$ ,

$$c_0 \|u - v\|^2 \leq \Phi_T(u, v) \leq c_1 \|u - v\|^2. \quad (2)$$

**Теорема 2.2.2.** *За умов N1, R1(i) та R4 існують константи  $B^*$ ,  $b > 0$  такі, що для  $T > T_0, R > R_0$*

$$\mathbb{P} \left\{ \|d_T(\theta) (\hat{\theta}_T - \theta)\| \geq R \right\} \leq B^* \exp \{-bR^2\},$$

причому для будь-якого  $\beta > 0$  константу  $B^*$  можна обрати так, що

$$b \geq \frac{c_0}{16\pi f_0(1+q)} - \beta.$$

У тексті підрозділу 2.2 наведено достатні умови, за яких виконується подвійна нерівність (2) та розглянуто приклад їх виконання.

У підрозділі 2.3 доведено теорему про ймовірності великих відхилень випадкової величини

$$\sup_{z \in [0, H]} |Y_T(z)|, \quad Y_T(z) = T^{1/2}(B_T(z) - B(z)) \quad (3)$$

із незалежною від  $T$  константою в експоненті правої частини відповідної нерівності.

Розглянемо функцію

$$q(z) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \sin^2 \frac{\lambda z}{2} d\lambda \right)^{1/2}, \quad z \geq 0,$$

де  $f$  – спектральна щільність процесу  $\varepsilon$ . За умови N1 функція  $q$  означена і задає псевдометрики

$$\rho(z_1, z_2) = q(|z_1 - z_2|), \quad \sqrt{\rho}(z_1, z_2) = \sqrt{\rho(z_1, z_2)}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

Псевдометрика  $\sqrt{\rho}$ , розглянута в [5], грає важливу роль у вивченні асимптотичних при  $T \rightarrow \infty$  властивостей корелограмів  $B_T(z)$  випадкового шуму  $\varepsilon$  в моделі спостережень (1). У наступному абзаці і формулюванні теореми 2.3.1 літера  $\varepsilon$  позначає числову змінну.

Нехай  $\mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}([0, H], \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , – метрична масивність множини  $[0, H]$  відносно псевдометрики  $\sqrt{\rho}$ , а  $\mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}([0, H], \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , – метрична ентропія відносно псевдометрики  $\sqrt{\rho}$  [5]. Позначимо  $\mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) = \mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}([0, 1], \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Оскільки псевдометрика  $\sqrt{\rho}$  залежить тільки від  $|z_1 - z_2|$ , то для будь-якого число  $H > 0$

$$\int_{+0} \mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty \Leftrightarrow \int_{+0} \mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}([0, H], \varepsilon) d\varepsilon < \infty.$$

**Теорема 2.3.1.** *Нехай виконано умови **N1** та*

$$\mathbf{N2}. \quad \int_{+0} \mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty.$$

Тоді для будь-яких  $x > 0$  та числа  $r^* \simeq 0.8982$ , яке є розв'язком рівняння  $-\ln(1-r) - r = 2 \ln 2$ ,

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} |Y_T(z)| \geq x \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{x}{D(r^*)} \right\},$$

$$D(r) = \left( \frac{\pi c(r)}{\ln 2} \right)^{1/2} \left( 98 \|f\|_2 + 16e^2 \|f\|_2^{1/2} \int_0^{\varepsilon(\sqrt{\rho})} \ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)) d\varepsilon \right) < \infty,$$

$$\begin{aligned} \text{де } c(r) &= -r^{-2} \ln(1-r) - r^{-1}, \quad \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) = \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}([0, H], \varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \\ \varepsilon(\sqrt{\rho}) &= \sup_{z_1, z_2 \in [0, H]} \sqrt{\rho}(z_1, z_2) \leq \|f\|_2^{1/2}, \quad \|f\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) d\lambda \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

У підрозділі 2.4, синтезуючи теореми 2.2.1 та 2.3.1, отримуємо наступний результат.

**Теорема 2.4.1.** *Нехай виконано умови **N1**, **N2**, **R1** та **R4**. Тоді для будь-якого*

$$a < a_0 = \frac{1}{16\pi f_0(1+q)} \cdot \frac{c_0}{c_1} \left( 1 \wedge \frac{1}{2B(0)} \right) \wedge \frac{1}{D(r^*)}$$

існує така константа  $A$ , що для  $T > T_0$ ,  $R > R_0$

$$\mathbb{P} \left\{ T^{1/2} \sup_{z \in [0, H]} |B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z)| \geq R \right\} \leq A \exp\{-aR\}.$$

З теореми 2.4.1 можна отримати важливий наслідок щодо рівномірної за  $z \in [0, H]$  слабкої консистентності оцінки  $B_T(z, \hat{\theta}_T)$  коваріаційної функції  $B(z)$ .

**Наслідок 2.4.1.** *Нехай  $\gamma \in [0, 1/2)$ ,  $h > 0$  – довільне число,  $R = h T^{1/2-\gamma}$ . Тоді в умовах теореми 2.4.1 для  $T > T_0 \vee \left(\frac{R_0}{h}\right)^{\frac{2}{1-2\gamma}}$*

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} |B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z)| \geq hT^{-\gamma} \right\} \leq A \exp\{-ahT^{1/2-\gamma}\}.$$

У третьому розділі дисертаційної роботи доведено функціональну граничну теорему в просторі неперервних функцій  $C([0, H])$  про асимптотичну при  $T \rightarrow \infty$  нормальність випадкових елементів  $X_T$ , що відповідають, процесам

$$X_T(z) = T^{1/2} \left( B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z) \right) = Y_T(z) + R_T(z), \quad z \in [0, H], \quad (4)$$

$$R_T(z) = T^{-1/2}(I_{1T}(z) + I_{2T}(z) + I_{3T}(z)), \quad (5)$$

$$I_{1T}(z) = \int_0^T (g(t+z, \hat{\theta}_T) - g(t+z, \theta))(g(t, \hat{\theta}_T) - g(t, \theta))dt,$$

$$I_{2T}(z) = \int_0^T \varepsilon(t+z)(g(t, \hat{\theta}_T) - g(t, \theta))dt,$$

$$I_{3T}(z) = \int_0^T \varepsilon(t)(g(t+z, \hat{\theta}_T) - g(t+z, \theta))dt,$$

$Y_T(z)$  означено в (3). Граничному випадковому елементу  $Y$  відповідає центрований гауссівський процес  $\{Y(z), z \in [0, H]\}$  з коваріаційною функцією

$$\mathbf{E} Y(z_1)Y(z_2) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \cos \lambda z_1 \cos \lambda z_2 d\lambda .$$

Для формулювання точного результату введемо ряд умов.

**N1(ii')**. Коваріаційна функція  $B = \{B(t), t \in \mathbb{R}\}$  процесу  $\varepsilon$  абсолютно інтегровна.

Очевидно, умова **N1(ii')** сильніша за умову **N1(ii)**.

Позначимо  $g_{ij}(t, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j} g(t, \tau)$ .

**R1'**. (i) Функція  $g(t, \tau)$  при кожному  $t > -\gamma$  двічі неперервно диференційовна за  $\tau \in \Theta_\gamma$ , причому ці похідні неперервні за сукупністю змінних і  $\liminf_{T \rightarrow \infty} T^{-1/2} d_{iT}(\tau) > 0, \tau \in \Theta, i = \overline{1, q}$ .

(ii)  $\sup_{\tau \in \Theta^c} |g_j(t, \tau)| \leq G_j(t)$  для деяких неперервних функцій  $G_j(t), t \geq 0$ ,

та для  $D_{jT}^2 = \int_0^T G_j^2(t) dt$ ,

$$D_{jT} d_{jT}^{-1}(\tau) \leq c_j(\tau) < \infty, \tau \in \Theta, j = \overline{1, q}.$$

(iii)  $\sup_{\tau \in \Theta^c} |g_{ij}(t, \tau)| \leq G_{ij}(t)$  для деяких неперервних функцій  $G_{ij}(t),$

$t \geq 0$ , та для  $D_{ij,T}^2 = \int_0^T G_{ij}^2(t) dt$  і обмежених констант  $c_{ij}(\tau)$

$$D_{ij,T} d_{iT}^{-1}(\tau) d_{jT}^{-1}(\tau) \leq c_{ij}(\tau) T^{-1/2}, \tau \in \Theta, i, j = \overline{1, q}.$$

Позначимо

$$\Psi_{jT}(z_1, z_2; \tau) = \int_0^T (g_j(t + z_1, \tau) - g_j(t + z_2, \tau))^2 dt.$$

$$\mathbf{R6.} \quad d_{jT}^{-2}(\tau) \Psi_{jT}(z_1, z_2; \tau) \leq \bar{c}_j(\tau) |z_1 - z_2|^2, \quad z_1, z_2 \in [0, H],$$

$$\bar{c}_j(\tau) < \infty, \tau \in \Theta, j = \overline{1, q}.$$

Для моделі спостережень (1) введемо сім'ю матричних мір  $\mu_T(d\lambda, \tau)$ ,  $\tau \in \Theta$ , на  $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}))$ , де  $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$  –  $\sigma$ -алгебра вимірних за Лебегом підмножин

$\mathbb{R}$ , з матричними щільностями відносно міри Лебега  $(\mu_T^{jl}(\lambda, \tau))_{j,l=1}^q$ ,  $\tau \in \Theta$ ,

$$\mu_T^{jl}(\lambda, \tau) = g_T^j(\lambda, \tau) \overline{g_T^l(\lambda, \tau)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |g_T^j(\lambda, \tau)|^2 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} |g_T^l(\lambda, \tau)|^2 d\lambda \right)^{-1/2},$$

$$g_T^j(\lambda, \tau) = \int_0^T e^{i\lambda t} g_j(t, \tau) dt, \quad j, l = \overline{1, q}.$$

**R7.** Сім'я мір  $\mu_T(d\lambda, \tau)$ ,  $\tau \in \Theta$ , слабо збігається при  $T \rightarrow \infty$  до додатно визначеної матричної міри  $\mu(d\lambda, \tau)$ ,  $\tau \in \Theta$ .

**Означення 3.2.1.** Міра  $\mu(d\lambda, \tau)$ ,  $\tau \in \Theta$ , називається спектральною мірою функції  $g(t, \tau)$ , або спектральною мірою градієнта  $\nabla g(t, \tau)$  функції  $g(t, \tau)$  (див., наприклад, [19], [71], [73], [77]).

**AN.** Випадковий вектор  $d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$  асимптотично при  $T \rightarrow \infty$  нормальний з нульовим середнім та коваріаційною матрицею

$$2\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda, \theta) \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu(d\lambda, \theta) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda, \theta) \right)^{-1}.$$

Достатні умови виконання умови **AN** досить громіздкі і наведено в [71] та, наприклад, у роботі [73].

Нехай  $\mu^{jj}$ ,  $j = \overline{1, q}$ , – діагональні елементи (міри) матричної спектральної міри  $\mu$ .

**Означення 3.2.2** [19]. Функцію  $b(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , будемо називати  $\mu^{jj}$ -припустимою, якщо вона інтегровна за мірою  $\mu^{jj}$  та виконується співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) \mu_T^{jj}(d\lambda, \tau) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) \mu^{jj}(d\lambda, \tau), \quad T \rightarrow \infty, \quad \tau \in \Theta.$$

**RN1.** Для деякого  $\delta \in (0, 1]$  функція  $b(\lambda) = |\lambda|^{1+\delta} f(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , є  $\mu^{jj}$ -припустимою,  $j = \overline{1, q}$ .

У тексті роботи розглянуто деякі достатні умови виконання **RN1**.

**Теорема 3.2.1.** *Якщо виконано умови  $N1(i)$ ,  $N1(ii')$ ,  $N2$ ,  $R1$ ,  $R1'$ ,  $R6$ ,  $R7$ ,  $AN$  та  $RN1$ , то  $X_T \xrightarrow{D} Y$ ,  $T \rightarrow \infty$ .*

Доведення полягає у застосуванні теореми 6.4.1 із [5] до випадкових елементів  $Y_T$  (див. (3)) і встановленні у представленні (4), (5) збіжності

$$T^{-1/2} \sup_{z \in [0, H]} |I_{kT}(z)| \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, 3,$$

що і зроблено в лемах 3.2.2 – 3.2.4.

Наприкінці третього розділу наведено приклад функції  $g(t, \tau)$ , для якої виконано вимоги теореми 3.2.1 до функції регресії.

У *четвертому* розділі дисертації знайдено деякі асимптотичні розвинення, пов'язані з залишковою корелограмою. Так, у підрозділі 4.1 отримано стохастичне асимптотичне розвинення нормованої залишкової корелограми, тобто її представлення у вигляді скінченної суми за степенями  $T^{-1/2}$  із стохастично малим залишковим членом і коефіцієнтами при цих степенях, які є поліномами від стандартних інтегралів від випадкового шуму, зваженого похідними функції регресії.

Нехай  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$  – мультиіндекс,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_q$ ,  $u^\alpha = u_1^{\alpha_1} \dots u_q^{\alpha_q}$ ,  $u = (u_1, \dots, u_q)$ . Для гладкої функції  $A(\tau)$  приймемо

$$A^{(\alpha)}(\tau) = (\partial^{|\alpha|} / \partial \tau_1^{\alpha_1} \dots \partial \tau_q^{\alpha_q}) A(\tau),$$

$$A_{i_1 \dots i_r}(\tau) = (\partial^r / \partial \tau_{i_1} \dots \partial \tau_{i_r}) A(\tau), \quad i_1, \dots, i_r = \overline{1, q}.$$

**R1''.** У функції  $g(t, \tau)$  існують і неперервні всі частинні похідні за змінними  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_q) \in \Theta_\gamma$  до порядку  $k \geq 2$  включно для кожного  $t \geq 0$ , причому функції  $g^{(\alpha)}(t, \tau)$ ,  $|\alpha| = \overline{1, k}$ , локально інтегровні з квадратом за  $t$  для довільного  $\tau \in \Theta^c$ , і  $\liminf_{T \rightarrow \infty} T^{-1} d_{iT}^2(\varepsilon) > 0$ ,  $\tau \in \Theta$ ,  $i = \overline{1, q}$ .

Позначимо

$$d_T^2(\alpha, \tau) = \int_0^T \left( g^{(\alpha)}(t, \tau) \right)^2 dt, \quad \Phi_T^{[\alpha]}(\tau_1, \tau_2) = \int_0^T \left( g^{(\alpha)}(t, \tau_1) - g^{(\alpha)}(t, \tau_2) \right)^2 dt,$$

$$\mathfrak{J}(\theta) = \left( T^{-1} \int_0^T g_i(t, \theta) g_j(t, \theta) dt \right)_{i,j=1}^q, \quad \Lambda(\theta) = (\Lambda^{ij}(\theta))_{i,j=1}^q = \mathfrak{J}^{-1}(\theta),$$

$$b_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T [\varepsilon(t+z) g_{i_1 \dots i_r}(t, \theta) + \varepsilon(t) g_{i_1 \dots i_r}(t+z, \theta)] dt,$$

$$b_{i_1 \dots i_r}(\theta) = \frac{1}{2} b_{i_1 \dots i_r}(0, \theta), \quad b^{(\alpha)}(\theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \varepsilon(t) g^{(\alpha)}(t, \theta) dt,$$

$$a_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) = \mathbb{E} (B_{T, i_1 \dots i_r}(z, \tau) |_{\tau=\theta}), \quad \Pi_{(i)(j)}(z, \theta) = T^{-1} \int_0^T g_i(t+z, \theta) g_j(t, \theta) dt,$$

$$\Pi_{(i)(jk)}(z, \theta) = T^{-1} \int_0^T g_i(t+z, \theta) g_{jk}(t, \theta) dt,$$

$$\Pi_{(ij)(k)}(z, \theta) = T^{-1} \int_0^T g_{ij}(t+z, \theta) g_k(t, \theta) dt,$$

$$a_{ij}(z, \theta) = \Pi_{(i)(j)}(z, \theta) + \Pi_{(j)(i)}(z, \theta),$$

$$a_{ijk}(\theta) = 2(\Pi_{(ij)(k)}(0, \theta) + \Pi_{(ik)(j)}(0, \theta) + \Pi_{(jk)(i)}(0, \theta)).$$

Далі ми зберігаємо нумерацію констант  $C$  з основного тексту роботи

$$\mathbf{R8.} \quad \sup_{\tau \in \Theta^c} T^{-\frac{1}{2}} d_T(\alpha; \tau) \leq C_1(\alpha), \quad |\alpha| = \overline{1, k};$$

$$\sup_{\tau_1, \tau_2 \in \Theta^c} T^{-1} \Phi_T^{[\alpha]}(\tau_1, \tau_2) \|\tau_1 - \tau_2\|^{-2} \leq C_2(\alpha), \quad |\alpha| = k.$$

Нехай  $\lambda_{\min}(A)$  – найменше власне число додатно визначеної матриці  $A$ .

$$\mathbf{R9.} \quad \text{Для деякого } \lambda_0 > 0 \text{ та } T > T_0 \quad \lambda_{\min}(\mathfrak{J}(\theta)) \geq \lambda_0.$$

Наступна теорема є уточненням теореми 3.3.2 [71].

**Теорема 4.1.1.** *За умов  $\mathbf{N1}$ ,  $\mathbf{R1''}$ ,  $\mathbf{R4}$ ,  $\mathbf{R8}$  та  $\mathbf{R9}$  для будь-якого  $m > 0$  є вірним стохастичне асимптотичне розвинення нормованої ОНК  $\widehat{\theta}_T$ :*

$$T^{1/2}(\widehat{\theta}_T - \theta) = \sum_{\nu=0}^{k-2} h_\nu(\theta) T^{-\nu/2} + \xi_{k-1}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}}, \quad (6)$$

де  $h_\nu(\theta) = (h_{\nu i}(\theta))_{i=1}^q$ ,  $\nu = \overline{0, k-2}$ , є однорідними векторними поліномами від випадкових величин  $b^{(\alpha)}(\theta)$ ,  $|\alpha| = \overline{1, \nu+1}$ , з рівномірно за  $T$  обмеженими коефіцієнтами, причому

$$P \left\{ \|\xi_{k-1}(\theta)\| \geq C_4(k, m) \ln^{\frac{k}{2}} T \right\} = O \left( (\ln T)^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{m}{2}} \right).$$

Відомі явні вирази для перших трьох поліномів розвинення (6) (див., наприклад, [71]). Для запису подальших асимптотичних розвинень приймемо тензорну угоду, а саме: якщо в добутку двох або більшого числа множників деякий індекс зустрічається двічі, це означає підсумовування за цим індексом від 1 до  $q$ . Позначимо для  $\nu \geq 1$

$$A_\nu(z, \theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu+1} \frac{1}{r!} a_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) h_{\alpha_1, i_1}(\theta) \dots h_{\alpha_r, i_r}(\theta),$$

$$B_\nu(z, \theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu} \frac{1}{r!} b_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) h_{\alpha_1, i_1}(\theta) \dots h_{\alpha_r, i_r}(\theta),$$

$$P_\nu(z, \theta) = A_\nu(z, \theta) - B_\nu(z, \theta),$$

де підсумовування у сумах ведеться за  $r$ -вимірними мультиіндексами  $\alpha(r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ .

**Теорема 4.1.2.** *За умов теореми 4.1.1 для довільного  $m > 0$*

$$T^{1/2} \left( \mathbb{B}_T \left( z, \widehat{\theta}_T \right) - \mathbb{B}(z) \right) = \sum_{\nu=0}^{k-2} P_\nu(z, \theta) T^{-\nu/2} + \zeta_{k-1}(\theta) T^{-(k-1)/2},$$

де  $P_0(z, \theta) = P_0(z) = Y_T(z)$ , поліноми  $P_\nu(z, \theta)$ ,  $\nu \geq 1$ , означено вище, а випадкова величина  $\zeta_{k-1}(\theta)$  має наступну властивість:

$$P \left\{ \|\xi_{k-1}(\theta)\| \geq C_4(k, m) \ln^{\frac{k}{2}} T \right\} = O \left( (\ln T)^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{m}{2}} \right).$$

У подальших формулах не будемо вказувати залежність від  $\theta$ .

**Наслідок 4.1.1.** *За умов теореми 4.1.1 при  $k = 4$*

$$T^{1/2} \left( \mathbb{B}_T \left( z, \widehat{\theta}_T \right) - \mathbb{B}(z) \right) = \sum_{\nu=0}^2 P_\nu(z) T^{-\nu/2} + \zeta_3 T^{-3/2},$$

$$\begin{aligned}
P \{ |\zeta_3| \geq C_{24}(4, m) \ln^2 T \} &= O \left( (\ln T)^{-1/2} T^{-m/2} \right); \\
P_1(z) &= \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{i_1 i_2}(z) b_{j_1} b_{j_2} - \Lambda^{i_1 j_1} b_{i_1}(z) b_{j_1}, \\
P_2(z) &= \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{j_3 j_4} a_{i_1 i_2}(z) b_{j_1} b_{j_2 j_3} b_{j_4} - \\
&\quad - \frac{1}{4} \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{j_3 j_4} \Lambda^{j_5 j_6} a_{i_1 i_2}(z) a_{j_2 j_3 j_5} b_{j_1} b_{j_4} b_{j_6} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{i_3 j_3} \tilde{a}_{i_1 i_2 i_3}(z) b_{j_1} b_{j_2} b_{j_3} - \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{j_2 j_3} b_{i_1}(z) b_{j_1 j_2} b_{j_3} + \\
&\quad + \frac{1}{4} \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{j_2 j_3} \Lambda^{j_4 j_5} a_{j_1 j_2 j_4} b_{i_1}(z) b_{j_3} b_{j_5} - \frac{1}{2} \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} b_{i_1 i_2}(z) b_{j_1} b_{j_2}.
\end{aligned}$$

Далі, у підрозділі 4.2, спираючись на наслідок 4.1.1, ми отримуємо асимптотичні розвинення зсуву та дисперсії залишкової корелограми. Позначимо для  $i, j = \overline{1, q}$ ,  $z \in [0, H]$

$$\begin{aligned}
\Psi_{ij}(z) &= \mathbf{E} b_i(z) b_j = T^{-1} \int_0^T \int_0^T (B(t-s+z) g_i(t) g_j(s) + \\
&\quad + B(t-s) g_i(t+z) g_j(s)) dt ds, \quad \Psi_{ij} = \frac{1}{2} \Psi_{ij}(0).
\end{aligned}$$

Наступна теорема, фактично, дає асимптотичне представлення (розвинення) зсуву залишкової корелограми.

**Теорема 4.2.1.** *Нехай для  $k = 4$  виконано умови **R1**", **R8**. Крім цього, нехай також виконано умови **N1**, **R4**, **R9**. Тоді*

$$T^{1/2} \mathbf{E} \left( B_T \left( z, \hat{\theta}_T \right) - B(z) \right) = L_T(z) T^{-1/2} + O \left( T^{-3/2} \ln^2 T \right),$$

де

$$L_T(z) = \mathbf{E} P_1(z) = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) \Psi_{j_1 j_2} - \Lambda^{i_1 j_1} \Psi_{i_1 j_1}(z).$$

Введемо додаткову умову

$$\mathbf{R10.} \quad \sup_{\tau \in \Theta^c} \sup_{t \geq 0} |g_i(t, \tau)| \leq C_1(e_i), \quad i = \overline{1, q},$$

де  $e_i$  – орт в  $\mathbb{R}^q$ , у якого одиниця стоїть на  $i$ -му місці.

Позначимо

$$\Delta_{j_1 j_2}(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T \int_0^T B(t-s+z) B(t-u) g_{j_1}(s) g_{j_2}(u) dt ds du,$$

$$\varphi_{i_1 j_1}^{(1)} = T^{-1} \int_0^T \int_0^T \int_0^T B(t-s)B(t-u)g_{i_1}(s)g_{j_1}(u)dt ds du,$$

$$\varphi_{i_1 j_1}^{(2)}(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T \int_0^T B(t-u+z)B(t-s-z)g_{i_1}(s)g_{j_1}(u)dt ds du,$$

$$\varphi_{i_1 j_1}^{(3)}(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T \int_0^T B(t-s+z)B(t-u)g_{i_1}(s+z)g_{j_1}(u)dt ds du,$$

$$\varphi_{i_1 j_1}^{(4)}(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T \int_0^T B(t-u+z)B(t-s)g_{i_1}(s+z)g_{j_1}(u)dt ds du.$$

$$\Psi_{i_1 i_2}^{(1)}(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T B(t-s-z)g_{i_1}(t+z)g_{i_2}(s)dt ds,$$

$$\Psi_{i_1 i_2}^{(2)}(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T B(t-s)g_{i_1}(t+z)g_{i_2}(s+z)dt ds,$$

$$K_T^2(z) = \mathbf{D}Y_T(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T (B^2(t-s) + B(t-s+z)B(t-s-z)) dt ds.$$

**Теорема 4.2.2.** *Нехай для  $k = 4$  виконано умови **R1''**, **R8**. Якщо також виконано умови **N1(i)**, **N1(ii')**, **R4**, **R9**, **R10**, то*

$$\begin{aligned} T \mathbf{E} \left( B_T \left( z, \widehat{\theta}_T \right) - B(z) \right)^2 &= K_T^2(z) + (M_T(z) + N_T(z)) T^{-1} + \\ &+ O \left( T^{-3/2} \ln^3 T \right), \end{aligned}$$

де

$$M_T(z) = 2 \left( \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} a_{i_1 i_2}(z) \Delta_{j_1 j_2}(z) - \Lambda^{i_1 j_1} \left( \varphi_{i_1 j_1}^{(1)} + \sum_{k=2}^4 \varphi_{i_1 j_1}^{(k)}(z) \right) \right),$$

$$N_T(z) = \left( \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) \Psi_{j_1 j_2} \right)^2 +$$

$$+ \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{i_3 j_3} \Lambda^{i_4 j_4} \Pi_{(i_1)(i_4)}(z) a_{i_2 i_3}(z) \Psi_{j_1 j_2} \Psi_{j_3 j_4} -$$

$$\begin{aligned}
& -2\Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{i_3 j_3} \left( \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) \Psi_{j_1 j_2} \Psi_{i_3 j_3}(z) + a_{i_1 i_2}(z) \Psi_{j_1 j_3} \Psi_{i_3 j_2}(z) \right) + \\
& + \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \left( \Psi_{i_1 j_1}(z) \Psi_{i_2 j_2}(z) + \Psi_{i_1 j_2}(z) \Psi_{i_2 j_1}(z) + \right. \\
& \left. + \Psi_{j_1 j_2} \left( \Psi_{i_1 i_2} + 2\Psi_{i_1 i_2}^{(1)}(z) + \Psi_{i_1 i_2}^{(2)}(z) \right) \right).
\end{aligned}$$

Із теореми 4.2.1 та 4.2.2 випливає наступне твердження про асимптотичне розвинення дисперсії залишкової корелограми.

**Теорема 4.2.3.** *За умов теореми 4.2.2*

$$\begin{aligned}
\mathbf{DB}_T(z, \hat{\theta}_T) &= K_T^2(z) T^{-1} + (M_T(z) + N_T(z) - L_T^2(z)) T^{-2} + \\
&+ O\left(T^{-5/2} \ln^3 T\right).
\end{aligned}$$

У тексті дисертації наведено також у вигляді наслідків варіанти теорем 4.2.1 – 4.2.3 для  $k = 3, 2$ .

## Розділ 1

### ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

У розділі дано огляд важливих робіт за проблемами, піднятими у дисертації.

Регресійний аналіз – це великий розділ сучасної математичної та прикладної статистики, який містить розвинутий інструментарій розв’язання широкого кола задач обробки статистичних даних: див., наприклад, фундаментальні видання С. Р. Рао (1968) [45], Г. Шневайса, Г.-Й. Міттага (1986) [110], Н. Дрейпера, Г. Сміта (1986) [18], Г. А. Себера, А. Дж. Лі (2003) [107], Дж. Фокса (2015) [63].

У лінійному регресійному аналізі гладку поверхню відгуку системи замінюють її поліноміальною апроксимацією. Роль невідомих параметрів при цьому грають коефіцієнти апроксимуючих поліномів, які часто не мають фізичного сенсу.

Принциповим узагальненням лінійного регресійного аналізу є нелінійний регресійний аналіз, який має справу з нелінійними відносно невідомих параметрів моделями. Такі моделі мають більшу адекватність, і одночасно їхні параметри, що потребують оцінки, здебільшого, мають фізичний сенс. Перелічимо деякі видання, присвячені розв’язанню складних математичних задач нелінійного регресійного аналізу. Це монографії І. Барда (1974) [54], Д. А. Ратковського (1983) [105], А. Р. Галанта (1987) [75], Д. М. Бейтса, Д. Г. Уотса (1988) [55], Є. З. Деміденка (1981, 1989) [15, 16], У. А. Фуллера (1987) [64], Дж. С. Росса (1990) [106], Р. Дж. Керрола, Д. Рупперта, Л. А. Стефанські (1995) [59], О. В. Іванова (1997) [69], Р. Дж. Керрола та ін. (2006) [60], С. В. Масюка та ін. (2015) [38].

У класичному регресійному аналізі превалюючим методом оцінювання параметрів моделі регресії є метод найменших квадратів. Базові факти лінійної теорії ОНК були отримані у працях К. Ф. Гаусса (1809) [76], А. А. Маркова (1898, 1900) [37, 87], а потім розвинуті Дж. Нейманом, Ф. М. Девісом (1938) [96], Ю. В. Лінніком (1962) [35], С. Р. Рао (1968) [45] та багатьма іншими математиками. Асимптотичні властивості ОНК параме-

трів нелінійних моделей вивчались у великій кількості журнальних статей та цитованих вище монографіях з нелінійного регресійного аналізу.

Систематичне перенесення та узагальнення задач і методів класичної математичної статистики, викладених Г. Крамером (1948) [32] з позицій аксіоматичної теорії ймовірностей, на задачі статистики випадкових процесів розпочав У. Гренандер (1961) [12]. Ці дослідження було продовжено у майже неозорій кількості публікацій з теорії оцінювання функціональних характеристик випадкових процесів, а, згодом, і полів та теорії перевірки гіпотез щодо цих характеристик.

Що стосується регресійної тематики, вкажемо на монографії У. Гренандера, М. Розенблатта (1956, 1984) [78, 79], І. А. Ібрагімова, Ю. А. Розанова (1970) [19], Т. В. Андерсона (1971) [53], Р. Ш. Липцера, А. М. Ширяєва (1974) [36], Е. Хеннана (1976) [48], І. А. Ібрагімова, Р. З. Хасьминського (1979) [20], І. Ш. Ібрамхалілова, А. В. Скорохода (1980) [21], М. Й. Ядренка (1980) [52], Ю. А. Кутоянца (1980, 2004) [34, 83], П. С. Кнопова (1980) [29], А. Я. Дороговцева (1982) [17], О. В. Іванова, М. М. Леоненка (1989) [71], Б. Л. С. Пракаса Рао (1987) [100], В. Г. Квина, Е. Хеннана (2001) [103], Ф. Штуляйтера (2002) [108], М. М. Рао (2014) [104]. Треба також послатися на дисертацію О.Г. Кукуша (1995) [33].

Теорія великих відхилень є важливою частиною теорії ймовірностей і математичної статистики, теорії випадкових процесів і статистики випадкових процесів, в якій вивчається швидкість збіжності на нескінченності до нуля хвостів імовірнісних розподілів. Зокрема, теорія великих відхилень в математичній статистиці та статистиці випадкових процесів вивчає асимптотичну поведінку хвостів функцій розподілів параметричних та непараметричних статистичних оцінок.

Що стосується параметричних оцінок, то треба послатися на монографію [20], в якій було отримано експоненціальну швидкість збіжності ймовірності великих відхилень оцінок максимальної вірогідності. Цей результат привів до появи великої кількості публікацій з тематики великих відхилень статистичних оцінок.

Далі будемо говорити тільки про ОНК параметрів нелінійної регресії. Так у роботі О. В. Іванова (1976) [22] було доведено теорему про ймовірності

сті великих відхилень зі степеневою швидкістю спадання ОНК скалярного параметра нелінійної регресії. Аналогічний результат отримав Б.Л.С. Пракаса Рао (1984) [101] для гауссівської регресії та експоненціальної швидкості збіжності. Зішлемося також на роботу С. ван де Гір (1986) [111], присвячену тій же тематиці. У вказаних роботах розглядалися нелінійні моделі з незалежними однаково розподіленими помилками спостережень. У статті Б.Л.С. Пракаса Рао (1984) [102] вивчалась швидкість збіжності до нуля ймовірностей великих відхилень ОНК в моделі нелінійної регресії у випадку слабо залежної стаціонарної послідовності похибок спостережень.

У монографії [71] з використанням результатів [20] було отримано степеневу збіжність ймовірностей великих відхилень ОНК параметра нелінійної регресії з однорідним гауссівським випадковим полем в якості шуму.

У роботі А. Сайдерса, К. Джапарідзе (1987) [109] було доведено теорему про ймовірності великих відхилень, що узагальнює результат [20], із застосуванням до ОНК параметра нелінійної регресії з незалежними та однаково розподіленими предгауссівськими та субгауссівськими помилками спостережень.

Деякі узагальнення результатів [109] на корельовані спостереження містяться у роботах S. H. Nu (1993) [65], W. Z. Yang, S. H. Nu (2014) [113], X. Huang et al. (2016) [66]. У статті О. В. Іванова (2016) [70] отримано експоненціальні оцінки ймовірностей великих відхилень ОНК у моделях з дискретним часом та стаціонарним сумісно строго субгауссівським шумом. Для моделі з неперервним часом та стаціонарним гауссівським шумом експоненціальні оцінки було отримано у роботі К. К. Москвичової (2016) [43]. О. В. Іванов, І. В. Орловський (2018) [72] узагальнили цей результат на нелінійні моделі з неперервним часом та стаціонарним сумісно строго субгауссівським шумом.

Загальний математичний апарат теорії великих відхилень було запропоновано у 1966 р. Р. С. Вараданом [112], який у 2007 р. отримав Абелеву премію за цикл робіт у цій галузі. Ряд результатів про великі відхилення для функціоналів від різноманітних класів випадкових процесів містяться в монографіях Л. Сауліса, В. Статулавічуса (1989) [46], О. Д. Вентцеля (1986) [9] та В. В. Булдігіна, Ю. В. Козаченка (1998) [5].

У останній спеціальний інтерес для нас представляють глибокі факти стосовно корелограми стаціонарного гауссівського процесу, яка є непараметричною статистичною оцінкою невідомої коваріаційної функції цього процесу, якщо ми його спостерігаємо. Зауважимо, що корелограми вивчаються давно, і базові факти про корелограми стаціонарних процесів містяться, наприклад, в книжках М. С. Бартлетта (1958) [2], [53], [48], Р. Дж. Броквелла, Р. А. Девіса (2002) [58].

У монографії [71] досить детально вивчено корелограми однорідних, однорідних та ізотропних випадкових полів з сильним перемішуванням. Для них отримано властивості рівномірної консистентності та функціональні центральні граничні теореми, в яких встановлюється слабка збіжність в просторі неперервних функцій нормованих корелограм вказаних полів до гауссівських полів, коваріаційні функції яких записано в явному вигляді.

У монографії [5] для нормованих корелограм стаціонарного гауссівського процесу з використанням ентропійної техніки було доведено і сьогодні найсильнішу функціональну граничну теорему про слабку збіжність в просторі неперервних функцій цієї корелограми до гауссівського випадкового процесу. Крім цього, там же отримано експоненціальні оцінки ймовірностей великих відхилень корелограми в точці та супремума нормованої корелограми гауссівського стаціонарного процесу. У дисертації в оцінці ймовірностей великих відхилень супремума корелограми нам вдалось константу під знаком експоненти, яка залежить від тривалості часу спостереження  $T$ , замінити на константу, яка від  $T$  не залежить. Разом з теоремою про ймовірності великих відхилень ОНК, це надало нам можливість отримати результат про ймовірності великих відхилень супремума нормованої залишкової корелограми, яка є головним об'єктом вивчення у статті [43]. Вказаний результат є основним у 2-му розділі дисертації, та з нього випливають посилені властивості консистентності залишкової корелограми. Про консистентність залишкової корелограми як оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії йдеться також у роботі О. В. Іванова, К. К. Москвичової (2015) [25].

Варто зауважити, що нам невідомі роботи, в яких залишкова коре-

логограма вивчалась би в такій загальності, як в нашому дослідженні. Коли спостерігається стаціонарний процес з ненульовим середнім, то в безлічі робіт при розгляданні корелограми значення процесу центрують його вибіркового середнім, яке є ОНК невідомого середнього. Польові узагальнення такого центрування можна знайти у М. М. Леоненка (1999) [84].

У розділі 10.3 монографії [53] отримано деякі твердження про залишкову корелограму, яка відповідає лінійній моделі регресії з дискретним часом і стаціонарним шумом.

Корелограмні оцінки цікаві дослідникам і зараз. Зішлемося, наприклад, на роботи Ю. В. Козаченка, В. Трошки (2014) [81], Ю. В. Козаченка, М. П. Сергієнка (2014) [82], Ю. В. Козаченка, І. В. Розори (2015) [30], І. П. Блажієвської (2015) [4], Ю. В. Козаченка, І. В. Розори (2016) [80].

У 3-му розділі дисертації йдеться про асимптотичну нормальність залишкової корелограми. Теорія слабкої збіжності розподілів у метричних просторах викладена у класичних монографіях підручниках І. І. Гіхмана, А. В. Скорохода (1965, 1971) [10, 11], П. Біллінгслі (1977) [3]. Вище ми зауважили, що функціональні граничні теореми для корелограм гауссівських стаціонарних процесів, однорідних, однорідних та ізотропних випадкових полів було отримано в [5], [71].

Доведення основного результату 3-го розділу надруковано в статті О. В. Іванова, К. К. Москвичової (2014) [23] і спирається на факти, наведені у роботах В. В. Булдігіна (1995) [6] та [5], використовує граничну теорему Ю. В. Прохорова [10, 11] і поняття спектральної міри функції регресії: У. Гренандер (1954) [77], І. А. Ібрагімов, Ю. А. Розанов (1970) [19], О. В. Іванов (1980) [67], див. також [71], [73].

У 4-му розділі дисертації отримано деякі асимптотичні розклади, пов'язані із залишковою корелограмою. Стохастичний асимптотичний розклад – це представлення нормованої статистичної оцінки у вигляді суми за напівцілими від'ємними степенями об'єму вибірки  $n$  (чи тривалості спостережень  $T$ ) зі стохастично малим залишковим членом. Коефіцієнти цієї суми при степенях  $n^{-1/2}$  ( $T^{-1/2}$ ) є векторними поліномами, якщо оцінка векторна, або звичайними поліномами, якщо оцінка скалярна, від стандартних зважених сум (інтегралів) від похибок спостережень (випадкового шуму).

Перші стохастичні асимптотичні розклади оцінок максимальної вірогідності у схемі незалежних однаково розподілених спостережень були отримані у роботах Ю. В. Лінніка, Н. М. Мітрофанової (1963, 1965) [85, 86], Н. М. Мітрофанової (1967) [39]. Пізніше при ослаблених умовах такі ж результати для загальніших оцінок мінімального контрасту були отримані Д. М. Чібісовим (1972, 1973) [49–51, 61] та І. Пфанцаглем (1973) [98, 99]. Р. Міхель (1975, 1977) [88, 89] запропонував підхід, пов'язаний з методом Ньютона – Рафсона для отримання стохастичних асимптотичних розкладів статистичних оцінок. Стохастичні асимптотичні розклади різних оцінок розглядали М. В. Бурнашев (1977, 1981) [7, 8], С. І. Гусев (1975, 1976) [13, 14] та інші автори. У роботі Р. Н. Бхаттачарія, Дж. К. Гхоша (1978) [56] було наведено широкі умови регулярності, що забезпечують існування стохастичних асимптотичних розкладів статистичних оцінок. Стохастичний асимптотичний розклад ОНК в моделі нелінійної регресії з незалежними однаково розподіленими похибками спостережень був запропонований О. В. Івановим, З. Цванциг (1983) [68] та Т. О. Бардадим, О. В. Івановим (1985) [1]. Загальні стохастичні асимптотичні розклади ОНК з'явилися в монографіях [71], [69]. Стохастичний асимптотичний розклад залишкової корелограми було знайдено в роботі О. В. Іванова, К. К. Москвичової (2014) [26].

Стохастичний асимптотичний розклад є першим кроком у отриманні подальших тонких результатів щодо статистичної оцінки. Наприклад, таких важливих у застосуваннях результатів, як асимптотичні розклади її моментів.

Асимптотичний розклад моментів деяких статистичних оцінок скалярного параметра був знайдений в [14] в зв'язку з проблемою Ю. В. Лінніка, див. також роботу [8]. Цю проблему, яку академік Ю. В. Ліннік поставив для скалярних оцінок максимальної вірогідності в 60-х роках минулого століття, можна сформулювати наступним чином. Припустимо, що ми маємо асимптотично нормальну оцінку, скажімо, скалярного параметра, і відомо, що дисперсія нормованої оцінки збігається при  $n \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow \infty$ ) до дисперсії граничного нормального закону. Задача полягає у знаходженні наступних членів асимптотики цієї збіжності. Задачу отримання асимптотичних розкладів моментів статистичних оцінок можна розв'язувати і в інших си-

туаціях, наприклад, коли можна оцінити ймовірності великих відхилень розподілу нормованої оцінки та отримати її стохастичний асимптотичний розклад [69].

Перші члени асимптотичного розкладу зсуву ОНК векторного параметра нелінійної регресії були знайдені М. Дж. Боксом (1971) [57]. Для моделі з незалежними однаково розподіленими гауссівськими похибками спостережень перші члени асимптотичного розкладу коваріаційної матриці ОНК були знайдені Г. Р. Кларком (1980) [62] без врахування залишкового члена. Асимптотичні розклади змішаних моментів векторної ОНК будь-якого порядку та асимптотичні розклади моментів залишкової суми квадратів для нелінійної моделі регресії з незалежними однаково розподіленими похибками спостережень міститься у монографії [69].

У підрозділі 4.2 дисертації отримано асимптотичні розклади зсуву, середнього квадрата відхилення та дисперсії нормованої залишкової корелограми: див. статтю О. В. Іванова, К. К. Москвичової (2014) [24].

## Розділ 2

# ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ КОРЕЛОГРАМНОЇ ОЦІНКИ ТА ЇЇ КОНСИСТЕНТНІСТЬ

У розділі для нелінійної моделі регресії з гауссівським стаціонарним шумом отримано результат щодо експоненціальної збіжності до нуля ймовірностей великих відхилень корелограмної оцінки невідомої коваріаційної функції шуму в рівномірній метриці. Використання цього факту надає можливість сформулювати достатні умови консистентності вказаної оцінки.

### 2.1 Модель спостережень та постановка задачі

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t, \theta) + \varepsilon(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1.1)$$

де  $g : (-\gamma, \infty) \times \Theta_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$  – неперервна функція, що залежить від невідомого параметра  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q) \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$ ,  $\Theta$  – обмежена відкрита опукла множина,  $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\| < 1} (\Theta + \gamma a)$ ,  $\gamma > 0$  – деяке число, а випадковий шум  $\varepsilon$  задовольняє умові

**N1. (i)**  $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$  – дійсний майже напевно (м.н.) вибірково неперервний стаціонарний гауссівський процес, заданий на ймовірнісному просторі  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $E \varepsilon(0) = 0$ ;

**(ii)** процес  $\varepsilon$  має обмежену спектральну щільність  $f = \{f(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

За умови **N1(ii)**  $f$  та коваріаційна функція  $B = \{B(t), t \in \mathbb{R}\}$  процесу  $\varepsilon$  належить  $L_2(\mathbb{R})$ , і за тотожністю Планшереля

$$\|B\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} B^2(t) dt \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) d\lambda \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi} \|f\|_2. \quad (2.1.2)$$

Якщо функція  $B$  невідома, то виникає задача оцінювання коваріаційної функції випадкового шуму  $\varepsilon$  в моделі (2.1.1) за спостереженнями  $\{X(t), t \geq 0\}$ , причому параметр  $\theta$  функції регресії набуває статус заважаючого параметра.

**Означення 2.1.1.** ОНК невідомого параметра  $\theta \in \Theta$  на інтервалі спостережень  $[0, T]$  називається будь-який випадковий вектор  $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_{1T}, \dots, \hat{\theta}_{qT}) \in \Theta^c$ , де  $\Theta^c$  – замикання  $\Theta$ , для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau), \quad Q_T(\tau) = \int_0^T [X(t) - g(t, \tau)]^2 dt. \quad (2.1.3)$$

За наведених вище умов мінімум у (2.1.3) досягається, і тоді за теоремою (3.10), стор. 270 роботи [97], існує хоча б один такий випадковий вектор  $\hat{\theta}_T$ .

У якості оцінки  $B$ , прив'язаної до оцінки  $\hat{\theta}_T$  заважаючого параметра  $\theta$ , візьмемо залишкову корелограму, побудовану за залишками

$$\hat{X}(t) = X(t) - g(t, \hat{\theta}_T), \quad t \in [0, T + H], \quad (2.1.4)$$

а саме:

$$B_T(z, \hat{\theta}_T) = T^{-1} \int_0^T \hat{X}(t+z) \hat{X}(t) dt, \quad z \in [0, H], \quad (2.1.5)$$

$H > 0$  – фіксоване число.

Зауважимо, що  $B_T(0, \hat{\theta}_T) = T^{-1} Q_T(\hat{\theta}_T) \in$  ОНК дисперсії  $B(0)$  випадкового процесу  $\varepsilon$ . З іншого боку,

$$B_T(z, \theta) = B_T(z) = T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t+z) \varepsilon(t) dt, \quad z \in [0, H], \quad (2.1.6)$$

є корелограмою процесу  $\varepsilon$ .

У даному розділі отримано теорему про ймовірності великих відхилень величини  $T^{1/2} \sup_{z \in [0, H]} |B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z)|$  і, як наслідок цього результату, теорему про консистентність в рівномірній метриці корелограмної оцінки  $B_T(z, \hat{\theta}_T)$  коваріаційної функції  $B(z)$  випадкового шуму  $\varepsilon$ .

З умови **N1(i)** випливає, що інтеграли (2.1.5) і (2.1.6) можна розглядати як інтеграли Рімана, побудовані за траєкторіями відповідних процесів. Більш того, ці інтеграли за  $z \in$  м. н. вибірково неперервними процесами на

відрізку  $[0, H]$  (див., наприклад, [5], [31], [71]).

## 2.2 Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів параметра нелінійної регресії

Даний підрозділ містить твердження про ймовірності великих відхилень ОНК  $\widehat{\theta}_T$  моделі спостережень (2.1.1).

В асимптотичній теорії нелінійної регресії в задачах нормальної апроксимації розподілу ОНК відхилення ОНК від істинного значення параметра  $\widehat{\theta}_T - \theta$  нормується діагональною матрицею

$$d_T(\theta) = \text{diag}(d_{iT}(\theta), i = \overline{1, q}), \quad d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T g_i^2(t, \theta) dt, \quad (2.2.1)$$

де позначено  $g_i(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t, \theta)$ . Наступна умова забезпечує існування матриці  $d_T(\theta)$  та регулює її поведінку.

**R1. (i)** Функція  $g(t, \tau)$  при кожному  $t > -\gamma$  неперервно диференційовна за  $\tau \in \Theta_\gamma$  та при кожному  $\tau \in \Theta$  частинні похідні  $g_i(t, \tau)$ ,  $i = \overline{1, q}$ , інтегровні за  $t$  з квадратом на кожному проміжку  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , причому  $d_{iT}^2(\tau) \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \infty$ ,  $i = \overline{1, q}$ .

**(ii)** Для будь-яких фіксованих  $H > 0$  та  $\tau \in \Theta$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} d_{i, T+H}(\tau) d_{iT}^{-1}(\tau) = 1, \quad i = \overline{1, q}. \quad (2.2.2)$$

Вкажемо одну достатню умову виконання **R1(ii)**.

**R1(ii')**. Для будь-якого  $\tau \in \Theta$  існують константи  $c_i(\tau)$  такі, що починаючи з деякого  $T > 0$ ,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |g_i(t, \tau)| d_{iT}^{-1}(\tau) \leq c_i(\tau) T^{-1/2}, \quad i = \overline{1, q}.$$

За цієї умови

$$r_i = d_{i, T+H}^2(\tau) d_{iT}^{-2}(\tau) = 1 + \left( \int_T^{T+H} g_i^2(t, \tau) dt \right) d_{iT}^{-2}(\tau) \leq$$

$$\leq 1 + H \sup_{0 \leq t \leq T+H} |g_i(t, \tau)|^2 d_{iT}^{-2}(\tau) r_i \leq 1 + c_i^2(\tau) \frac{H}{T+H} r_i.$$

Тоді для відповідних  $T$

$$1 \leq r_i \leq \frac{1}{1 - c_i^2(\tau) H (T+H)^{-1}}, \text{ та } r_i \rightarrow 1, T \rightarrow \infty, i = \overline{1, q}.$$

Нехай  $\Delta(t)$ ,  $t \geq 0$ , – неперервна функція. Тоді з умови **N1** випливає існування інтегралів

$$I(T) = \int_0^T \Delta(t) \varepsilon(t) dt, \quad T > 0, \quad (2.2.3)$$

визначених для майже всіх траєкторій випадкового процесу  $\varepsilon$  як інтеграли Рімана.

Для будь-яких  $\lambda \in \mathbb{R}$  та  $T > 0$

$$\mathbb{E} \exp\{\lambda I(T)\} = \exp\left\{\frac{1}{2} \lambda^2 \mathbb{E} I^2(T)\right\}. \quad (2.2.4)$$

Позначимо  $f_0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} f(\lambda) < \infty$ ,  $\|\Delta\|_T = \left(\int_0^T \Delta^2(t) dt\right)^{1/2}$ . За тотожністю

Планшереля

$$\begin{aligned} \mathbb{E} I^2(T) &= \int_0^T \int_0^T B(t-s) \Delta(t) \Delta(s) dt ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \left| \int_0^T e^{i\lambda t} \Delta(t) dt \right|^2 d\lambda \leq 2\pi f_0 \|\Delta\|_T^2. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Хоча оцінки для хвостів розподілів гауссівських випадкових величин добре відомі, нам далі потрібна перша з оцінок наступної простої лема.

**Лема 2.2.1.** *За умови **N1** для будь-яких  $T > 0$ ,  $x > 0$*

$$\mathbb{P}\{I(T) \geq x\} \leq G_T(x), \quad \mathbb{P}\{I(T) \leq -x\} \leq G_T(x),$$

$$\mathbb{P}\{|I(T)| \geq x\} \leq 2G_T(x), \quad (2.2.6)$$

де

$$G_T(x) = \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\pi f_0 \|\Delta\|_T^2} \right\}. \quad (2.2.7)$$

*Доведення.* Для будь-яких  $x > 0$ ,  $\lambda > 0$  за нерівністю Чебишова-Маркова та (2.2.4), (2.2.5)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{I(T) \geq x\} &\leq \exp\{-\lambda x\} \exp\left\{\frac{\lambda^2}{2} \mathbb{E} I^2(T)\right\} \leq \\ &\leq \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2 \pi f_0 \|\Delta\|_T^2 - \lambda x\right\}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Мінімізація правої частини нерівності (2.2.8) за  $\lambda$  дає першу нерівність з (2.2.6). Доведення другої нерівності таке ж саме. Третя нерівність випливає з перших двох.  $\square$

У доведенні теорем цього підрозділу ми спираємося на загальний підхід роботи [109] (див. також [69], [71]). Запишемо

$$U_T(\theta) = d_T(\theta)(\Theta^c - \theta), \quad \Gamma_{T,\theta,R} = U_T(\theta) \cap \{u \in \mathbb{R}^q : R \leq \|u\| \leq R+1\}.$$

Позначимо через  $\mathfrak{A}$  сім'ю всіх функцій  $a_T(R)$ ,  $T > 0$ ,  $R > 0$ , що мають наступні властивості:

- 1) при фіксованому  $T$  виконується  $a_T(R) \uparrow \infty$  при  $R \rightarrow \infty$ ;
- 2) для будь-якого  $r > 0$

$$R^r \exp\{-a_T(R)\} \rightarrow 0 \text{ при } R, T \rightarrow \infty.$$

Нехай також  $\gamma(R)$  – поліноми від  $R$  (можливо, різні) з коефіцієнтами, які не залежать від  $T$ ,  $\theta$ ,  $u$ ,  $v$ . Покладемо

$$\Delta(t, u) = g(t, \theta + d_T^{-1}(\theta)u) - g(t, \theta), \quad t \in [0, T],$$

$$\Phi_T(u, v) = \int_0^T (\Delta(t, u) - \Delta(t, v))^2 dt, \quad u, v \in U_T(\theta). \quad (2.2.9)$$

Припустимо, що існують функція  $a \in \mathfrak{A}$ , константи  $\delta \in (0, 1/2)$ ,  $\varkappa > 0$ ,  $\rho \in (0, 1]$  та поліноми  $\gamma(R)$  такі, що для достатньо великих  $T$ ,  $R$  (будемо писати  $T > T_0$ ,  $R > R_0$ ) виконано наступні умови

**R2.** (i) Для будь-яких  $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$  таких, що  $\|u - v\| \leq \varkappa$ ,

$$\Phi_T(u, v) \leq \gamma(R)\|u - v\|^{2\rho}. \quad (2.2.10)$$

(ii) Для будь-яких  $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$   $\Phi_T(u, 0) \leq \gamma(R)$ .

**R3.** Для будь-яких  $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$

$$\Phi_T(u, 0) \geq 4\pi f_0 \delta^{-2} a_T(R). \quad (2.2.11)$$

**Теорема 2.2.1.** *Нехай виконано умови **N1**, **R1(i)**, **R2** та **R3**. Тоді існують такі константи  $B_0, b_0 > 0$ , що для  $T > T_0$ ,  $R > R_0$*

$$\mathbb{P} \left\{ \|d_T(\theta) (\widehat{\theta}_T - \theta)\| \geq R \right\} \leq B_0 \exp \{-b_0 a_T(R)\}, \quad (2.2.12)$$

причому значення  $b_0$  можна зробити довільно близьким знизу до  $\frac{\rho}{\rho+q}$ , обравши  $B_0$  достатньо великим, тобто для будь-якого  $\beta > 0$  константу  $B_0$  можна обрати так, що

$$b_0 \geq \frac{\rho}{\rho+q} - \beta. \quad (2.2.13)$$

*Доведення.* Покладемо

$$I(T, u) = \int_0^T \Delta(t, u) \varepsilon(t) dt, \quad \zeta_T(u) = I(T, u) - \frac{1}{2} \Phi_T(u, 0).$$

Для доведення теореми достатньо перевірити виконання припущень **(M1)** та **(M2)** загальної теореми 2.1 з [109], переформульованих аналогічно використаємо в доведенні теореми 3.1 там же.

**(M1)** Для будь-якого  $m > 0$  та  $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$  таких, що  $\|u - v\| \leq \varkappa$ ,

$$\mathbb{E} |\zeta_T(u) - \zeta_T(v)|^m \leq \gamma(R)\|u - v\|^{\rho m}; \quad (2.2.14)$$

$$\mathbf{(M2)} \quad \mathbb{P} \left\{ \zeta_T(u) - \zeta_T(0) \geq -\left(\frac{1}{2} - \delta\right) \Phi_T(u, 0) \right\} \leq \exp\{-a_T(R)\}. \quad (2.2.15)$$

З першої нерівності (2.2.6) леми 2.2.1 для  $\Delta(t) = \Delta(t, u)$ ,  $x = \delta \Phi_T(u, 0)$ , умови **R3**, беручи до уваги те, що  $\zeta_T(0) = 0$  в нашому частинному випадку,

ми отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_T(u) - \zeta_T(0) \geq -(\frac{1}{2} - \delta)\Phi_T(u, 0)\} &= \mathbf{P}\{I(T, u) \geq \delta\Phi_T(u, 0)\} \leq \\ &\leq \exp\{-\delta^2(4\pi f_0)^{-1}\Phi_T(u, 0)\} \leq \exp\{-a_T(R)\}, \end{aligned}$$

тобто нерівність (2.2.15) є вірною.

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|\zeta_T(u) - \zeta_T(v)|^m &\leq \max(1, 2^{m-1})(\mathbf{E}|I(T, u) - I(T, v)|^m + \\ &\quad + 2^{-m}|\Phi_T(u, 0) - \Phi_T(v, 0)|^m), \quad (2.2.16) \\ |\Phi_T(u, 0) - \Phi_T(v, 0)| &\leq \int_0^T |\Delta(t, u) - \Delta(t, v)| |\Delta(t, u) + \Delta(t, v)| dt \leq \\ &\leq \Phi_T^{1/2}(u, v) \left( \Phi_T^{1/2}(u, 0) + \Phi_T^{1/2}(v, 0) \right) \leq 2(\gamma(R))^{1/2} \|u - v\|^\rho (\gamma(R))^{1/2} \leq \\ &\leq (\gamma(R) + \gamma(R)) \|u - v\|^\rho = \gamma(R) \|u - v\|^\rho, \end{aligned}$$

завдяки умові **R2** (поліноми  $\gamma(R)$  різні в останніх двох рядках). Таким чином, отримуємо оцінку

$$|\Phi_T(u, 0) - \Phi_T(v, 0)|^m \leq \gamma(R) \|u - v\|^{\rho m}. \quad (2.2.17)$$

Оскільки випадкова величина  $I(T, u) - I(T, v)$  є гауссівською з нульовим середнім та дисперсією

$$\sigma^2 = \int_0^T \int_0^T B(t-s) (\Delta(t, u) - \Delta(t, v)) (\Delta(s, u) - \Delta(s, v)) dt ds \leq (2\pi f_0) \Phi_T(u, v),$$

то для  $m > 0$

$$\mathbf{E}|I(T, u) - I(T, v)|^m \leq (2\pi f_0)^{\frac{m}{2}} \mathbf{E}|z|^m \Phi_T^{\frac{m}{2}}(u, v), \quad (2.2.18)$$

де  $z$  – стандартна гауссівська випадкова величина,  $\mathbf{E}|z|^m = 2^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\sqrt{\pi}}$ .

Співвідношення (2.2.16) – (2.2.18) та (2.2.10) приводять до оцінки (2.2.14).  $\square$

Наступна умова жорсткіша за **R2** та **R3**, але зручніша.

**R4.** Існують додатні числа  $c_0$  і  $c_1$  такі, що для будь-якого  $\theta \in \Theta$  та  $u, v \in U_T(\theta)$  для  $T > T_0$ , де  $T_0$  не залежить від  $\theta$ ,

$$c_0 \|u - v\|^2 \leq \Phi_T(u, v) \leq c_1 \|u - v\|^2. \quad (2.2.19)$$

Умову типу (2.2.19) було введено в [22], згодом варіанти цієї умови розглядались у роботах [101], [109], [65]. Наступна теорема узагальнює теорему 3.2 із [109].

**Теорема 2.2.2.** *За умов **N1**, **R1(i)** та **R4** існують константи  $B^*$ ,  $b > 0$  такі, що для  $T > T_0$ ,  $R > R_0$*

$$\mathbb{P} \left\{ \|d_T(\theta) (\hat{\theta}_T - \theta)\| \geq R \right\} \leq B^* \exp \{-bR^2\}, \quad (2.2.20)$$

причому для будь-якого  $\beta > 0$  константу  $B^*$  можна обрати так, що

$$b \geq \frac{c_0}{16\pi f_0(1+q)} - \beta. \quad (2.2.21)$$

*Доведення.* Ми покажемо, що із умови **R4** випливає виконання умов **R2** і **R3**. Нерівність (2.2.10) умови **R2(i)** випливає з правої частини нерівностей (2.2.19), якщо взяти  $\rho = 1$ ,  $\gamma(R) = c_1$ . Нерівність умови **R2(ii)** також виконується, якщо ми візьмемо в правій частині (2.2.19)  $v = 0$ ,  $\gamma(R) = c_1(R+1)^2$ .

Для перевірки виконання **R3** перепишемо ліву частину (2.2.19) для  $v = 0$ :

$$\Phi_T(u, 0) \geq c_0 \|u\|^2 \geq 4\pi f_0 \delta^{-2} \left( \frac{\delta^2 c_0}{4\pi f_0} R^2 \right),$$

тобто в нерівності (2.2.11) можна взяти  $a_T(R) = \frac{\delta^2 c_0}{4\pi f_0} R^2$ . В цьому випадку показник степеня в (2.2.12) набуває вигляду

$$-b_0 a_T(R) = -\frac{\delta^2 b_0 c_0}{4\pi f_0} R^2.$$

Оскільки зараз в (2.2.13)  $\rho = 1$ , то для довільного  $\beta > 0$  в (2.2.20) можна взяти в якості  $b$  величину

$$b_\delta = \frac{\delta^2 b_0 c_0}{4\pi f_0} \geq \frac{\delta^2 c_0}{4\pi f_0(1+q)} - \beta.$$

За умов **R4** та **N1** нерівність (2.2.11) із функцією  $a_T(R) = \frac{\delta^2 c_0}{4\pi f_0} R^2$  справедлива для будь-якого  $\delta \in (0, 1/2)$ . Ми отримуємо нерівність (2.2.21) при  $\delta \rightarrow 1/2$ .  $\square$

Позначимо

$$\varphi_T(\tau_1, \tau_2) = \int_0^T (g(t, \tau_1) - g(t, \tau_2))^2 dt, \quad \tau_1, \tau_2 \in \Theta^c, \quad (2.2.22)$$

і перепишемо нерівність (2.2.19) в еквівалентному вигляді: для будь-якого  $\theta \in \Theta$  та  $T > T_0$ , де  $T_0$  не залежить від  $\theta$ ,

$$c_0 \|d_T(\theta)(\tau_1 - \tau_2)\|^2 \leq \varphi_T(\tau_1, \tau_2) \leq c_2 \|d_T(\theta)(\tau_1 - \tau_2)\|^2, \quad \tau_1, \tau_2 \in \Theta^c. \quad (2.2.23)$$

Вкажемо умову, достатню для виконання (2.2.23) і, відповідно, умови **R4**. Введемо діагональну матрицю

$$s_T = \text{diag}(s_{iT}, i = \overline{1, q}), \quad s_{iT} \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow \infty, \quad i = \overline{1, q}.$$

$$\mathbf{R5. (i)} \quad \sup_{\tau \in \Theta^c} |s_{iT}^{-2} d_{iT}^2(\tau) - l_i| \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty, \quad (2.2.24)$$

де  $l_i > 0$ ,  $i = \overline{1, q}$ , – деякі числа.

**(ii)** Для деяких додатних чисел  $c_0^*, c_1^*$  для  $T > T_0$

$$c_0^* \|s_T(\tau_1 - \tau_2)\|^2 \leq \varphi_T(\tau_1, \tau_2) \leq c_1^* \|s_T(\tau_1 - \tau_2)\|^2, \quad \tau_1, \tau_2 \in \Theta^c. \quad (2.2.25)$$

**Лема 2.2.2.** *За умови **R5** є вірною нерівність (2.2.23) для будь-яких чисел  $c_0 < c_0^*(\max_{1 \leq i \leq q} l_i)^{-1}$ ,  $c_1 > c_1^*(\min_{1 \leq i \leq q} l_i)^{-1}$  при  $T > T_0$ .*

*Доведення.* Разом з (2.2.24) є вірним також співвідношення

$$\sup_{\tau \in \Theta^c} |s_{iT}^2 d_{iT}^{-2}(\tau) - l_i^{-1}| \longrightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.2.26)$$

Тоді для довільного  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|s_T(\tau_1 - \tau_2)\|^2 &= \|(s_T d_T^{-1}(\theta)) d_T(\theta)(\tau_1 - \tau_2)\|^2 \leq \sum_{i=1}^q (l_i^{-1} + \varepsilon) d_{iT}^2(\theta) (\tau_{i1} - \tau_{i2})^2 < \\ &< ((\min_{1 \leq i \leq q} l_i)^{-1} + \varepsilon) \|d_T(\theta)(\tau_1 - \tau_2)\|^2, \\ \|s_T(\tau_1 - \tau_2)\|^2 &\geq ((\max_{1 \leq i \leq q} l_i)^{-1} - \varepsilon) \|d_T(\theta)(\tau_1 - \tau_2)\|^2. \end{aligned}$$

□

Варіантом умови **R5(i)** може бути слабкіша умова.

**R5(i')**. Існують додатні константи  $\underline{c}_i, \bar{c}_i, i = \overline{1, q}$ , такі, що для  $T > T_0$  рівномірно за  $\tau \in \Theta^c$

$$\underline{c}_i < s_{iT}^{-1} d_{iT}(\tau) < \bar{c}_i, \quad i = \overline{1, q}. \quad (2.2.27)$$

В цьому випадку в (2.2.23) можна взяти

$$c_0 = c_0^* (\max_{1 \leq i \leq q} \bar{c}_i)^{-1}, \quad c_1 = c_1^* (\min_{1 \leq i \leq q} \underline{c}_i)^{-1}. \quad (2.2.28)$$

**Наслідок 2.2.1.** *За умов N1, R1(i), R5(i) або R5(i'), R5(ii) є вірним висновок теореми 2.2.2.*

Наступний приклад демонструє, як можна застосовувати наслідок 2.2.1 для отримання співвідношень (2.2.20), (2.2.21).

**Приклад 2.2.1.** Нехай  $g(t, \tau) = \exp\{\langle \tau, y(t) \rangle\}$ , де  $\langle \tau, y(t) \rangle = \sum_{i=1}^q \tau_i y_i(t)$ , регресори  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_q(t))$ ,  $t \geq 0$ , набувають значень в компактній множині  $Y \subset \mathbb{R}^q$ . Припустимо, що

$$J_T = \left( T^{-1} \int_0^T y_i(t) y_j(t) dt \right)_{i,j=1}^q \longrightarrow J = (J_{ij})_{i,j=1}^q, \quad \text{при } T \rightarrow \infty, \quad (2.2.29)$$

де  $J$  – додатно визначена матриця. Позначимо

$$M = \max_{y \in Y, \tau \in \Theta^c} \exp\{\langle \tau, y \rangle\}, \quad L = \min_{y \in Y, \tau \in \Theta^c} \exp\{\langle \tau, y \rangle\}.$$

Тоді для будь-якого  $\delta > 0$  та  $T > T_0$

$$L^2(J_{ii} - \delta) < T^{-1} d_{iT}^2(\theta) < M^2(J_{ii} + \delta), \quad i = \overline{1, q}, \quad (2.2.30)$$

і умову **R5(i')** виконано з матрицею  $s_T = T^{1/2} \mathbb{I}_q$ , де  $\mathbb{I}_q$  – одинична матриця  $q$ -го порядку, та  $\underline{c}_i = L^2(J_{ii} - \delta)$ ,  $\bar{c}_i = M^2(J_{ii} + \delta)$ ,  $i = \overline{1, q}$ .

Перевіримо виконання умови **R5(ii)**. Маємо

$$e^{\langle y(t), \tau_1 \rangle} - e^{\langle y(t), \tau_2 \rangle} = e^{\langle y(t), \tau_2 \rangle} \left( e^{\langle y(t), \tau_1 - \tau_2 \rangle} - 1 \right).$$

Оскільки  $(e^x - 1)^2 \geq x^2$ ,  $x \geq 0$ , та  $(e^x - 1)^2 > e^{2x} x^2$ ,  $x < 0$ , то

$$(e^{\langle y(t), \tau_1 - \tau_2 \rangle} - 1)^2 \geq \Delta \langle y(t), \tau_1 - \tau_2 \rangle^2, \quad \Delta = \min(1, e^{2\langle y(t), \tau_1 - \tau_2 \rangle}).$$

Таким чином,

$$e^{2\langle y(t), \tau_2 \rangle} \left( e^{\langle y(t), \tau_1 - \tau_2 \rangle} - 1 \right)^2 \geq \langle y(t), \tau_1 - \tau_2 \rangle^2 e^{2\langle y(t), \tau_2 \rangle} \Delta \geq L^2 \langle y(t), \tau_1 - \tau_2 \rangle^2,$$

і тому для будь-якого  $\delta > 0$  та  $T > T_0$

$$\begin{aligned} \varphi_T(\tau_1, \tau_2) &\geq L^2 \sum_{i,j=1}^q J_{ij,T}(T^{1/2}(\tau_{i1} - \tau_{i2}))(T^{1/2}(\tau_{j1} - \tau_{j2})) \geq \\ &\geq L^2(\lambda_{\min}(J) - \delta) \|T^{1/2}(\tau_1 - \tau_2)\|^2, \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

де  $\lambda_{\min}(J)$  – мінімальне власне число матриці  $J$ .

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \left| e^{\langle y(t), \tau_1 \rangle} - e^{\langle y(t), \tau_2 \rangle} \right| &= \left| \sum_{i=1}^q y_i(t) \exp\{y(t), \langle \tau_2 + \eta(t)(\tau_1 - \tau_2) \rangle\} (\tau_{i1} - \tau_{i2}) \right| \leq \\ &\leq M \left| \sum_{i=1}^q y_i(t) (\tau_{i1} - \tau_{i2}) \right|, \quad \eta(t) \in (0, 1), \end{aligned}$$

та

$$\varphi_T(\tau_1, \tau_2) \leq M^2 \int_0^T \left( \sum_{i=1}^q y_i(t) (\tau_{i1} - \tau_{i2}) \right)^2 dt \leq$$

$$\leq M^2 \sum_{i,j=1}^T J_{ij,T}(T^{1/2}(\tau_{i1} - \tau_{i2}))(T^{1/2}(\tau_{j1} - \tau_{j2})),$$

і тому для будь-якого  $\delta > 0$  та  $T > T_0$

$$\varphi_T(\tau_1, \tau_2) \leq M^2(\lambda_{\max}(J) + \delta)\|T^{1/2}(\tau_1 - \tau_2)\|^2, \quad (2.2.32)$$

де  $\lambda_{\max}(J)$  – максимальне власне число матриці  $J$ , що разом з (2.2.31) встановлює **R5(ii)**.

Враховуючи нерівності (2.2.30) – (2.2.32) за формулами (2.2.28) в нерівностях (2.2.23) для  $T > T_0$  можна вказати числа

$$c_0 < \frac{L^2 \lambda_{\min}(J)}{M^2 \max_{1 \leq i \leq q} J_{ii}}, \quad c_1 > \frac{M^2 \lambda_{\max}(J)}{L^2 \min_{1 \leq i \leq q} J_{ii}}. \quad (2.2.33)$$

### 2.3 Імовірності великих відхилень корелограми гауссівського стаціонарного процесу

В цьому підрозділі отримано теорему про ймовірності великих відхилень випадкової величини  $\sup_{z \in [0, H]} |Y_T(z)|$ , де  $Y_T(z) = T^{1/2}(B_T(z) - B(z))$ ,  $z \in [0, H]$ , – нормована корелограма випадкового процесу  $\varepsilon$ . Власно кажучи, теорема 6.3.2 монографії [5] є твердженням такого типу, але із залежною від  $T$  константою в експоненті правої частини відповідної нерівності. Однак нам потрібна константа, яка від  $T$  не залежить. В подальшому тексті підрозділу ми використовуємо поняття та факти, наведені в [5].

Нехай  $\xi(z)$ ,  $z \in H$ , – випадковий процес, заданий на ймовірносному просторі  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $L_0(\Omega)$  – простір всіх дійсних випадкових величин на  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Тоді відображення  $\xi : H \rightarrow L_0(\Omega)$  є кривою в просторі  $L_0(\Omega)$ .

**Означення 2.3.1.** Нехай  $\mathcal{M}$  – підпростір в  $L_0(\Omega)$ . Випадковий процес  $\xi$  називається  $\mathcal{M}$ -процесом, якщо  $\xi : H \rightarrow \mathcal{M}$ .

**Означення 2.3.2.** Випадкова величина  $\eta$  називається предгауссівською, якщо для деяких чисел  $\Lambda \in (0, \infty]$  і  $a \in [0, \infty)$  та будь-яких  $\lambda \in (-\Lambda, \Lambda)$

$$E \exp\{\lambda \eta\} \leq \exp\left\{\frac{a^2 \lambda^2}{2}\right\}. \quad (2.3.1)$$

Клас всіх предгауссівських випадкових величини на  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$  позначимо  $\text{Prg}(\Omega)$ .

**Означення 2.3.3.** Процес  $\xi$  називається предгауссівським, якщо  $\mathcal{M} = \text{Prg}(\Omega)$ .

**Означення 2.3.4.** Неперервна опукла парна функція  $U = (U(x), x \in \mathbb{R})$  називається  $\mathbb{C}$ -функцією, якщо  $U(0) = 0$  і  $U(x)$  монотонно зростає при  $x > 0$ .

**Означення 2.3.5.** Нехай  $U$  – довільна  $\mathbb{C}$ -функція. Простором Орлича випадкових величин  $L_U(\Omega)$  називається така сім'я випадкових величин, що для кожної  $\eta \in L_U(\Omega)$  існує така константа  $r_\eta > 0$ , що

$$\mathbf{E} U \left( \frac{\eta}{r_\eta} \right) < \infty.$$

На просторі Орлича  $L_U(\Omega)$  задамо функціонал

$$\|\eta\|_U = \inf \{ r > 0 : \mathbf{E} U \left( \frac{\eta}{r} \right) \leq 1 \},$$

який називається нормою Люксембурга. Простір Орлича  $L_U(\Omega)$  є банаховим простором відносно норми Люксембурга.

**Означення 2.3.6.** Нехай  $\psi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , довільна  $\mathbb{C}$ -функція. Простір Орлича, породжений  $\mathbb{C}$ -функцією  $U(x) = \exp\{\psi(x)\} - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , називається простором Орлича експоненціального типу і позначається  $\text{Exp}_\psi(\Omega)$ .

Якщо  $\psi(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , то простір  $\text{Exp}_\psi(\Omega)$  будемо позначати  $\text{Exp}_{(1)}(\Omega)$ , а відповідну норму  $\|\cdot\|_{E(1)}$ .

З огляду на означення 2.3.1, аналогічно означенню 2.3.3, випадковий процес  $\xi$  називається орличевим і, зокрема, орличевим експоненціального типу, якщо  $\mathcal{M} = L_U(\Omega)$  і  $\mathcal{M} = \text{Exp}_\psi(\Omega)$ , відповідно.

З теореми 2.3.5 та наслідку 2.3.4 [5] випливає, що простір  $\text{Prg}(\Omega)$  є замкненим підпростором простору  $(\text{Exp}_{(1)}(\Omega), \|\cdot\|_{E(1)})$ .

У подальшому тексті підрозділу ми використовуємо поняття  $M$ -характеристики  $\text{Exp}_{(1)}(\Omega)$  – простору, і нам потрібно надати необхідні роз'яснення.

**Означення 2.3.7.** Лінійний підпростір  $K(\Omega)$  простору випадкових величин  $L_0(\Omega)$  називається ґраткою, якщо

$$\max\{\eta, \xi\} \in K(\Omega), \quad \min\{\eta, \xi\} \in K(\Omega),$$

для всіх  $\eta, \xi \in K(\Omega)$ .

**Означення 2.3.8.** Гратка  $K(\Omega)$  називаються  $K_\sigma$ -простором, якщо  $K(\Omega)$  є банаховим простором з нормою  $\|\cdot\|$  і виконуються наступні умови:

1. якщо  $\eta, \xi \in K(\Omega)$  і  $|\eta| \leq |\xi|$  м.н., то  $\|\eta\| \leq \|\xi\|$ ;
2. якщо для послідовності  $\{\eta_n, n \geq 1\}$  з  $K(\Omega)$  знайдеться така випадкова величина  $\xi$ , що  $\sup_{n \geq 1} |\eta_n| \leq \xi$  м.н. та  $\xi \in K(\Omega)$ , то  $\sup_{n \geq 1} \|\eta_n\| \in K(\Omega)$ .

**Означення 2.3.9.** Додатна монотонно неспадна послідовність  $\{\varkappa(n), n \in \mathbb{N}\}$  називається  $M$ -характеристикою (мажоруючою характеристикою)  $K_\sigma$ -простору  $K(\Omega)$ , якщо для будь-яких  $n \geq 1$  і  $\eta_k \in K(\Omega)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , справедлива нерівність

$$\left\| \max_{1 \leq k \leq n} |\eta_k| \right\| \leq \varkappa(n) \max_{1 \leq k \leq n} |\eta_k|.$$

З теореми 2.3.3 [5] випливає, що простори Орлича  $L_U(\Omega) \in K_\sigma$ -просторами, а приклад 2.3.2 там же показує, що для функцій  $U(x) = \exp\{a|x|^\alpha\} - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $M$ -характеристикою простору Орлича, породженою функцією  $U$ , є послідовність

$$\varkappa(n) = \begin{cases} n, & \text{при } n \leq \exp\{2a\} - 1; \\ \exp\{2a\} \left(\frac{\ln(1+n)}{a}\right)^{1/\alpha}, & \text{при } n > \exp\{2a\} - 1. \end{cases}$$

Зокрема, для простору  $\text{Exp}_{(1)}(\Omega)$ , породженого функцією  $U(x) = e^{|x|} - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , маємо  $a = \alpha = 1$ ,  $e^2 - 1 \simeq 6.3875$ . Таким чином, в цьому випадку

$$\varkappa(n) = \begin{cases} n, & \text{при } n \leq 6; \\ e^2 \ln(1+n), & \text{при } n \geq 7. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Розглянемо на  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  сукупність випадкових величин вигляду  $\langle A\gamma, \gamma \rangle$ , де  $\gamma$  – довільний центрований гауссівський вектор довільної розмірності  $n \geq 1$ ,  $A$  – довільна дійсна квадратна матриця порядку  $n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярний добуток в  $\mathbb{R}^n$ . Позначимо введену сукупність  $\Gamma_0^{(2)}(\Omega)$  і зауважимо, що  $\Gamma_0^{(2)}(\Omega)$  є лінійним підпростором гільбертова простору  $L_2(\Omega)$  зі скалярним добутком  $\langle \eta, \xi \rangle = E \eta \xi$ . Нехай  $\Gamma^{(2)}(\Omega)$  – це замикання у середньквadratичному  $\Gamma_0^{(2)}(\Omega)$ , тобто  $\Gamma^{(2)}(\Omega)$  є гільбертовим підпростором  $L_2(\Omega)$ .

**Означення 2.3.10.** Будемо називати  $\Gamma^{(2)}(\Omega)$  простором квадратично гауссівських випадкових величин.

Теорема 6.2.2 [5] разом з теоремою 2.3.5 там же показують, що всі випадкові величини  $\eta \in \Gamma^{(2)}(\Omega)$  належать простору  $\text{Exp}_{(1)}(\Omega)$  і, відповідно, випадкові величини  $\eta - \mathbf{E} \eta \in \text{Prg}(\Omega)$ . У свою чергу, лема 6.3.1 [5] стверджує, що корелограма  $B_T(z) \in \Gamma^{(2)}(\Omega)$ ,  $B_T(z_1) - B_T(z_2) \in \Gamma^{(2)}(\Omega)$  для будь-яких  $z \geq 0$ ,  $z_1 \geq 0$ ,  $z_2 \geq 0$ . Тоді за теоремою 6.2.3 [5]  $Y_T(z) \in \text{Prg}(\Omega)$ ,  $z \geq 0$ , а це, за вже згаданою теоремою 2.3.5, еквівалентно тому, що  $Y_T(z) \in \text{Exp}_{(1)}(\Omega)$ ,  $z \geq 0$ .

**Означення 2.3.11.** Нехай  $H$  непорожня множина. Функція  $\rho : H \times H \rightarrow [0, \infty)$  називається псевдометрикою, якщо вона задовольняє умовам

- 1)  $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$ ,  $z_1, z_2 \in H$ ;
- 2)  $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$ ,  $z_1, z_2, z_3 \in H$ ;
- 3) якщо  $z_1 = z_2$ , то  $\rho(z_1, z_2) = 0$ .

Пара  $(H, \rho)$  називається псевдометричним простором.

Нехай  $\mathcal{M} \subset L_0(\Omega)$  – лінійний простір з нормою  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ , а випадковий процес  $\xi(z)$ ,  $z \in H$ , є  $\mathcal{M}$  – процесом. Тоді функція

$$\rho_{\xi}(z_1, z_2) = \|\xi(z_1) - \xi(z_2)\|_{\mathcal{M}}, \quad z_1, z_2 \in H, \quad (2.3.3)$$

є псевдометрикою на  $H$ .

**Означення 2.3.12.** Псевдометрика  $\rho_{\xi}$ , називається псевдометрикою, породженою процесом  $\xi$ .

Наступні дві псевдометрики, породжені відповідними випадковими  $\mathcal{M}$ -процесами, використано в подальшому тексті.

- 1) Нехай  $\mathcal{M} = L_2(\Omega)$ . Тоді

$$\rho_{\xi}(z_1, z_2) = \sigma_{\xi}(z_1, z_2) = (\mathbf{E} |\xi(z_1) - \xi(z_2)|^2)^{1/2}, \quad z_1, z_2 \in H. \quad (2.3.4)$$

- 2) Нехай  $\mathcal{M} = \text{Exp}_{(1)}(\Omega)$ . Тоді

$$\rho_{\xi}(z_1, z_2) = \|\xi(z_1) - \xi(z_2)\|_{E(1)}, \quad z_1, z_2 \in H. \quad (2.3.5)$$

Розглянемо функцію (див. підрозділ 6.4 глави 6, книги [5])

$$q(z) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \sin^2 \frac{\lambda z}{2} d\lambda \right)^{1/2}, \quad z \geq 0, \quad (2.3.6)$$

де  $f$  – спектральна щільність процесу  $\varepsilon$ .

За умови **N1** функція  $q$  означає і задає псевдометрики

$$\rho(z_1, z_2) = q(|z_1 - z_2|), \quad \sqrt{\rho}(z_1, z_2) = \sqrt{\rho(z_1, z_2)}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.3.7)$$

Псевдометрика  $\sqrt{\rho}$  грає важливу роль у вивченні асимптотичних при  $T \rightarrow \infty$  властивостей корелограми  $B_T(z)$  випадкового шуму  $\varepsilon$  в моделі спостережень (2.1.1).

З теореми 6.2.3, 2.3.5 [5] із використанням прикладу 6.2.1 там же для чисел  $r \in (0, 1)$  таких, що

$$(2 \ln 2)^{1/2} < r c^{1/2}(r), \quad c(r) = -r^{-2} \ln(1 - r) - r^{-1}, \quad (2.3.8)$$

впливає, що для  $\text{Exp}_{(1)}(\Omega)$ -процесу  $\{\xi(z), z \in H\} = \{Y_T(z), z \in H\}$  виконуються нерівності (див. формули (2.3.4) і (2.3.5))

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{Y_T}(z_1, z_2) \leq \rho_{Y_T}(z_1, z_2) \leq \left( \frac{c(r)}{\ln 2} \right)^{1/2} \sigma_{Y_T}(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in [0, H]. \quad (2.3.9)$$

Зараз інтервал  $[0, H]$  грає роль множини  $H$  в попередніх означеннях, і ми сподіваємось, що використання однієї й тієї ж самої літери  $H$  не викличе непорозумінь.

**Означення 2.3.13.** Нехай  $(H, \rho)$  – псевдометричний простір. Процес  $\{\xi(z), z \in H\}$  називається  $\rho$ -неперервним за ймовірністю, якщо  $\xi(z_n) \xrightarrow{P} \xi(z)$  при  $\rho(z_n, z) \rightarrow 0$ .

**Лема 2.3.1.** За умови **N1** псевдометричний простір  $([0, H], \rho_{Y_T})$  є  $\rho_{Y_T}$ -сепарабельним. Крім цього, процес  $(Y_T(z), z \in [0, H])$  є  $\rho_{Y_T}$ -неперервним за ймовірністю.

*Доведення.* Нехай  $S$  – будь-яка зліченна всюди щільна в  $[0, H]$  в метриці

$m(t, s) = |t - s|$  множина точок,  $z \in [0, H]$  – довільна точка і  $\{z_n, n \geq 1\} \subset S$  така послідовність, що  $z_n \rightarrow z$  в метриці  $m(t, s)$ . З леми 6.4.1 [5] випливає, що для будь-яких  $T > 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{Y_T}(z_n, z) &\leq (8\pi\rho^2(z_n, z) + 8\pi\|f\|_2\rho(z_n, z))^{1/2} \leq \\ &\leq 4(\pi\|f\|_2)^{1/2}\sqrt{\rho}(z_n, z) \longrightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

де псевдометрику  $\sqrt{\rho}$  задано формулами (2.3.6), (2.3.7). Співвідношення (2.3.10) означає, що процес  $Y_T$  неперервний в середнеквадратичному, а із правої частини нерівності (2.3.9) випливає, що  $\rho_{Y_T}(z_n, z) \longrightarrow 0$ . Це доводить  $\rho_{Y_T}$ -сепарабельність псевдометричного простору  $([0, H], \rho_{Y_T})$ .

Припустимо тепер, що для деякої послідовності  $\{z_n, n \geq 1\} \subset [0, H]$  і  $z \in [0, H]$ ,  $\rho_{Y_T}(z_n, z) \longrightarrow 0$ . Тоді з лівої частини нерівності (2.3.9) випливає, що  $\sigma_{Y_T}(z_n, z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  і, отже,  $Y_T(z_n) \xrightarrow{P} Y(z)$ .  $\square$

Доведена лема та теореми 3.1.1, 3.1.2 [5] показують, що випадковий процес  $\{Y_T(z), z \in [0, H]\}$  є  $\rho_{Y_T}$ -сепарабельним.

Нехай  $(H, \rho)$  псевдометричний простір і  $\varepsilon > 0$ . Надалі поняття  $\varepsilon$ -покриття множини  $H > 0$  та  $\varepsilon$ -сітки в множині  $H$  розглядаються відносно псевдометрики  $\rho$ .

**Означення 2.3.14.** Систему замкнених куль  $\mathcal{B} = \{\bar{B}\}$ ,  $\bar{B} \subset H$ , радіуси яких не перевищують  $\varepsilon$ , будемо називати  $\varepsilon$ -покриттям множини  $H$ , якщо  $\bigcup_{\bar{B} \in \mathcal{B}} \bar{B} = H$ . Множину  $Q \subset H$  будемо називати  $\varepsilon$ -сіткою в множині  $H$ , якщо для будь-якої точки  $z \in H$  знайдеться точка  $h \in Q$  така, що  $\rho(z, h) \leq \varepsilon$ .

**Означення 2.3.15.** Якщо існує скінченне  $\varepsilon$ -покриття множини  $H$ , то  $\mathbf{N}_\rho(H, \varepsilon)$  позначає число елементів в найменшому  $\varepsilon$ -покритті цієї множини. Вважаємо, що  $\mathbf{N}_\rho(H, \varepsilon) = +\infty$ , якщо не існує скінченного  $\varepsilon$ -покриття множини  $H$ . Функцію  $\mathbf{N}_\rho(H, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , назвемо метричною масивністю множини  $H$  відносно псевдометрики  $\rho$ .

**Означення 2.3.16.** Функцію

$$\mathbf{H}_\rho(H, \varepsilon) = \begin{cases} \ln \mathbf{N}_\rho(H, \varepsilon), & \text{якщо } \mathbf{N}_\rho(H, \varepsilon) < +\infty, \\ +\infty, & \text{якщо } \mathbf{N}_\rho(H, \varepsilon) = +\infty. \end{cases}$$

будемо називати метричною ентропією відносно псевдометрики  $\rho$ .

Серед властивостей метричної масивності (див., наприклад, лему 3.2.1 [5]) нам потрібна наступна.

Нехай на  $H$  задано псевдометрики  $\rho_1, \rho_2$ , і  $\varphi(x)$ ,  $x \geq 0$ , – така неспадна функція, що

$$\rho_1(z_1, z_2) \leq \varphi(\rho_2(z_1, z_2)), \quad z_1, z_2 \in H. \quad (2.3.11)$$

Тоді для будь-якого  $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{N}_{\rho_1}(H, \varepsilon) \leq \mathbf{N}_{\rho_2}(H, \varphi^{(-1)}(\varepsilon)), \quad (2.3.12)$$

де  $\varphi^{(-1)}$  – узагальнена обернена функція до функції  $\varphi$ .

Нехай  $K = K(\Omega)$  деякий  $K_\sigma$ -простір випадкових величин,  $\|\cdot\|_K$  – норма на  $K$ ;  $\{\varkappa(n), n \geq 1\}$  –  $M$ -характеристика простору  $K$  (див. означення 2.3.7–2.3.9). Нехай також  $\xi = \{\xi(z), z \in H\}$  деякий  $K_\sigma$ -процес, тобто  $\{\xi(z), z \in H\} \subset K$ ;  $\rho_\xi(z_1, z_2) = \|\xi(z_1) - \xi(z_2)\|_K$ ,  $z_1, z_2 \in H$ , – псевдометрика, породжена процесом  $\xi$ ,  $\mathbf{N}(\varepsilon) = \mathbf{N}_{\rho_\xi}(H, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , – метрична масивність параметричної множини  $H$  відносно псевдометрики  $\rho_\xi$ .

Припустимо, що виконано наступні умови:

$$\mathbf{A}_1) \quad \sup_{z \in H} \|\xi(z)\|_K < \infty;$$

$\mathbf{A}_2)$  простір  $(H, \rho_\xi)$  є сепарабельним, та процес  $\xi$  є сепарабельним на  $(H, \rho_\xi)$ ;

$$\mathbf{A}_3) \quad I(\xi, K) = \int_0^{\varepsilon^*} \varkappa(\mathbf{N}(\varepsilon)) d\varepsilon < \infty, \quad (2.3.13)$$

де  $\varepsilon^* = \sup_{z_1, z_2 \in H} \rho_\xi(z_1, z_2) < \infty$ .

Обмеженість  $\varepsilon^*$  є наслідком  $\mathbf{A}_1$ ).

За умов  $\mathbf{A}_1) - \mathbf{A}_3)$ , як стверджується в теоремі 3.3.1 [5],  $\sup_{z \in H} |\xi(z)| \in K$  і

$$\left\| \sup_{z \in H} |\xi(z)| \right\|_K \leq \sup_{z \in H} \|\xi(z)\|_K + 4I(\xi, K). \quad (2.3.14)$$

Позначимо  $\mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) = \mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}([0, 1], \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Оскільки псевдометрика  $\sqrt{\rho}$

залежить тільки від  $|z_1 - z_2|$ , то для будь-якого числа  $H > 0$

$$\int_{+0} \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty \Leftrightarrow \int_{+0} \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}([0, H], \varepsilon) d\varepsilon < \infty. \quad (2.3.15)$$

**Теорема 2.3.1.** *Нехай виконано умови **N1** та*

$$\mathbf{N2.} \quad \int_{+0} \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty. \quad (2.3.16)$$

Тоді для будь-яких  $x > 0$  та числа  $r^* \simeq 0.8982$ , яке є розв'язком рівняння  $-\ln(1-r) - r = 2 \ln 2$ ,

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} |Y_T(z)| \geq x \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{x}{D(r^*)} \right\}, \quad (2.3.17)$$

$$D(r) = \left( \frac{\pi c(r)}{\ln 2} \right)^{1/2} \left( 98 \|f\|_2 + 16e^2 \|f\|_2^{1/2} \int_0^{\varepsilon(\sqrt{\rho})} \ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)) d\varepsilon \right) < \infty, \quad (2.3.18)$$

де  $\mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) = \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}([0, H], \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon(\sqrt{\rho}) = \sup_{z_1, z_2 \in [0, H]} \sqrt{\rho}(z_1, z_2) \leq \|f\|_2^{1/2}$ .

*Доведення.* Розглянемо  $Y_T = \{Y_T(z), z \in [0, H]\}$  як  $\text{Exp}_{(1)}(\Omega)$ -процес. Нагадаємо, що  $\text{Exp}_{(1)}(\Omega) = K(\Omega) \in K_\sigma$ -простором випадкових величин з М-характеристикою (2.3.2). Процес  $Y_T$  породжує псевдометричний простір  $([0, H], \rho_{Y_T})$ , де  $\rho_{Y_T}(z_1, z_2) = \|Y_T(z_1) - Y_T(z_2)\|_{E(1)}$ ,  $z_1, z_2 \in [0, H]$ .

Як випливає з леми 2.3.1 та зауваження після її доведення, простір  $([0, H], \rho_{Y_T})$  є сепарабельним, а процес  $Y_T$  можна вважати сепарабельним на  $([0, H], \rho_{Y_T})$ . Таким чином, умову **A2**) виконано.

З іншого боку, для  $r \in (r^*, 1)$  аналогічно (2.3.9)

$$\|Y_T(z)\|_{E(1)} \leq \left( \frac{c(r)}{\ln 2} \right)^{1/2} (\mathbf{E} Y_T^2(z))^{1/2}, \quad z \in [0, H].$$

Маємо далі

$$\mathbf{E} Y_T^2(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T (B^2(t-s) + B(t-s+z)B(t-s-z)) dt ds \leq 2 \|B\|_2^2 = 4\pi \|f\|_2^2,$$

Таким чином,

$$\sup_{z \in [0, H]} \|Y_T(z)\|_{E(1)} \leq 2 \left( \frac{\pi c(r)}{\ln 2} \right)^{1/2} \|f\|_2, \quad (2.3.19)$$

і умову  $\mathbf{A}_1$ ) також виконано.

Перевіримо виконання умови  $\mathbf{A}_3$ ). З (2.3.19) випливає, що для довільного  $T > 0$

$$\varepsilon_{0T} = \sup_{z_1, z_2 \in [0, H]} \rho_{Y_T}(z_1, z_2) \leq 4 \left( \frac{\pi c(r)}{\ln 2} \right)^{1/2} \|f\|_2 < \infty. \quad (2.3.20)$$

Права нерівність (2.3.9) та ланцюжок нерівностей (2.3.10) призводить до тієї самої оцінки.

Позначимо  $\mathbf{N}_{\rho_{Y_T}}([0, H], \varepsilon) = \mathbf{N}_T(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . За формулою (2.3.2)

$$\begin{aligned} I(Y_T, [0, H]) &= \int_0^{\varepsilon_{0T}} \varkappa(\mathbf{N}_T(\varepsilon)) d\varepsilon = \int_{(0, \varepsilon_{0T}] \cap \{\varepsilon: \mathbf{N}_T(\varepsilon) \leq 6\}} \mathbf{N}_T(\varepsilon) d\varepsilon + \\ &+ e^2 \int_{(0, \varepsilon_{0T}] \cap \{\varepsilon: \mathbf{N}_T(\varepsilon) \geq 7\}} \ln(1 + \mathbf{N}_T(\varepsilon)) d\varepsilon = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Очевидно,

$$I_1 \leq 6\varepsilon_{0T} \leq 24 \left( \frac{\pi c(r)}{\ln 2} \right)^{1/2} \|f\|_2. \quad (2.3.22)$$

З нерівностей (2.3.9) та (2.3.10) маємо ланцюг нерівностей для псевдометрик

$$\rho_{Y_T}(z_1, z_2) \leq \left( \frac{c(r)}{\ln 2} \right)^{1/2} \sigma_{Y_T}(z_1, z_2) \leq 4 \left( \frac{\pi c(r)}{\ln 2} \|f\|_2 \right)^{1/2} \sqrt{\rho}(z_1, z_2), \quad (2.3.23)$$

$T > 0$ ,  $z_1, z_2 \in [0, H]$ . Нерівності (2.3.11), (2.3.12) для псевдометрик  $\rho_{Y_T}$ ,  $\sqrt{\rho}$  та функції  $\varphi(x) = kx$ ,  $x > 0$ ,  $k = 4 \left( \frac{\pi c(r)}{\ln 2} \|f\|_2 \right)^{1/2}$ , показують, що

$$\mathbf{N}_T(\varepsilon) \leq \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(k^{-1}\varepsilon), \quad \varepsilon > 0. \quad (2.3.24)$$

З нерівностей (2.3.23) випливає, що  $\varepsilon_{0T} \leq k\varepsilon(\sqrt{\rho}) = \varepsilon_0$ , і ми можемо записати

$$I_2 \leq e^2 \int_0^{\varepsilon_0} \ln(1 + \mathbf{N}_T(\varepsilon)) d\varepsilon \leq e^2 \int_0^{\varepsilon_0} \ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(k^{-1}\varepsilon)) d\varepsilon. \quad (2.3.25)$$

Функція  $\ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(k^{-1}\varepsilon))$  має розриви в точках  $\varepsilon(j) = k\varepsilon_j$ , де  $\varepsilon_j$ ,  $j \geq 1$ , – точки розриву функції  $\mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)$ . Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon_0} \ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(k^{-1}\varepsilon)) d\varepsilon &= \ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon))(\varepsilon_0 - k\varepsilon_1) + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon_j))(k\varepsilon_j - k\varepsilon_{j+1}) = \\ &= k \left[ \ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon))(\varepsilon(\sqrt{\rho}) - \varepsilon_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon_j))(k\varepsilon_j - k\varepsilon_{j+1}) \right] \\ &= k \int_0^{\varepsilon(\sqrt{\rho})} \ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Фактично, ми зробили лінійну заміну змінної в інтегралі Лебега від схід-частої функції. Оскільки

$$\ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)) \leq \mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}([0, H], \varepsilon) + \ln 2,$$

то останній інтеграл в (2.3.26) збігається, якщо виконано умову **N2**.

Збираючи оцінки (2.3.22), (2.3.25) і (2.3.26), отримуємо

$$\begin{aligned} I(Y_T, [0, H]) &\leq 24 \left( \frac{\pi c(r)}{\ln 2} \right)^{1/2} \|f\|_2 + \\ &+ 4e^2 \left( \frac{\pi c(r)}{\ln 2} \right)^{1/2} \|f\|_2^{1/2} \int_0^{\varepsilon(\sqrt{\rho})} \ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)) d\varepsilon < \infty \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

для будь-якого  $r \in (r^*, 1)$ , де  $r^*$  означено в формулюванні теореми 2.3.1. Таким чином, умову **A3**) виконано.

На підставі оцінок (2.3.19), (2.3.27) та загальній нерівності (2.3.14) ми можемо записати для  $r \in (r^*, 1)$

$$\|\eta\|_{E(1)} \leq D(r), \quad \eta = \sup_{z \in [0, H]} |Y_T(z)|. \quad (2.3.28)$$

За нерівністю Чебишова-Маркова для будь-якого  $x > 0$

$$\mathbb{P}\{\eta \geq x\} \leq \exp\left\{-\frac{x}{\|\eta\|_{E(1)}}\right\} \mathbb{E} \exp\left\{\frac{\eta}{\|\eta\|_{E(1)}}\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{x}{D(r)}\right\}.$$

Функція  $c(r)$ ,  $r \in (0, 1)$ , яку задано виразом (2.3.8), є монотонно зростаючою. Дійсно,

$$c(r) = -\frac{\ln(1-r) + r}{r^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{n-2}}{n}, \quad c'(r) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{n} r^{n-3} > 0, \quad r \in (0, 1). \quad (2.3.29)$$

Нерівність (2.3.17) випливає з (2.3.29).  $\square$

Варто відмітити, що  $c(r^*) \simeq 1.7184$ , а в формулі (2.3.18) для  $r = r^*$

$$98 \left(\frac{\pi c(r^*)}{\ln 2}\right)^{1/2} \simeq 273.4948, \quad 16e^2 \left(\frac{\pi c(r^*)}{\ln 2}\right)^{1/2} \simeq 329.9378. \quad (2.3.30)$$

**Зауваження 2.3.1.** У доведенні теореми 2.3.1 було використано послаблену умову **N1** щодо спектральної щільності  $f$ , а саме: ми вимагали лише, щоб  $f \in L_2(\mathbb{R})$ .

**Зауваження 2.3.2.** Як показано в [5] (див. також с. 182–183 книги [31]), інтеграл (2.3.16) збігається, якщо виконано наступну умову.

**N2'.** Для будь-якого  $\delta > 0$

$$\int_0^{\infty} f^2(\lambda) \ln^{4+\delta}(1+\lambda) d\lambda < \infty. \quad (2.3.31)$$

У свою чергу, якщо  $f \in L_2(\mathbb{R})$ , то **N2'** виконується при деяких додаткових вимогах до характеру спадання  $f$  на нескінченності [5].

## 2.4 Імовірності великих відхилень залишкової корелограми та її консистентність

У підрозділі з використанням теореми 2.2.2, теореми 2.3.1 з неї отримано твердження про ймовірності великих відхилень залишкової корелограми в рівномірній метриці. Консистентність залишкової корелограми як оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в моделі (2.1.1) є наслідком цього результату.

**Теорема 2.4.1.** *Нехай виконано умови **N1**, **N2**, **R1** та **R4**. Тоді для будь-якого*

$$a < a_0 = \frac{1}{16\pi f_0(1+q)} \cdot \frac{c_0}{c_1} \left( 1 \wedge \frac{1}{2B(0)} \right) \wedge \frac{1}{D(r^*)} \quad (2.4.1)$$

*існує така константа  $A$ , що для  $T > T_0$ ,  $R > R_0$*

$$\mathbf{P} \left\{ T^{1/2} \sup_{z \in [0, H]} |B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z)| \geq R \right\} \leq A \exp\{-aR\}. \quad (2.4.2)$$

*Доведення.* Запишемо

$$\begin{aligned} T^{1/2}(B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z)) &= Y_T(z) + T^{-1/2}I_{1T}(z) - T^{-1/2}I_{2T}(z) - \\ &\quad - T^{-1/2}I_{3T}(z), \quad z \in [0, H], \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

де

$$I_{1T}(z) = \int_0^T (g(t+z, \hat{\theta}_T) - g(t+z, \theta))(g(t, \hat{\theta}_T) - g(t, \theta))dt, \quad (2.4.4)$$

$$I_{2T}(z) = \int_0^T \varepsilon(t+z)(g(t, \hat{\theta}_T) - g(t, \theta))dt, \quad (2.4.5)$$

$$I_{3T}(z) = \int_0^T \varepsilon(t)(g(t+z, \hat{\theta}_T) - g(t+z, \theta))dt. \quad (2.4.6)$$

Із правої нерівності (2.2.23) та умови **R1(ii)** випливає для довільного

$\delta > 0$  та  $T > T_0$

$$\begin{aligned} \varphi_{T+H}(\widehat{\theta}_T, \theta) &\leq c_1 \max_{1 \leq i \leq q} d_{i,T+H}^2(\theta) d_{iT}^{-2}(\theta) \|d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T - \theta)\|^2 \leq \\ &\leq (1 + \delta)^2 c_1 \|d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T - \theta)\|^2, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{aligned} \sup_{z \in [0, H]} |I_{1T}(z)| &\leq \varphi_{T+H}^{1/2}(\widehat{\theta}_T, \theta) \varphi_T^{1/2}(\widehat{\theta}_T, \theta) \leq \\ &\leq (1 + \delta) c_1 \|d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T - \theta)\|^2, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

і ми отримуємо за теоремою 2.2.2

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} T^{-1/2} |I_{1T}(z)| \geq RT^{-1/2} \right\} \leq \\ &\leq \mathbb{P} \left\{ \|d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T - \theta)\|^2 \geq (1 + \delta)^{-1/2} c_1^{-1/2} R^{1/2} \right\} \leq A_1 \exp\{-a_1 R\}, \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

причому для будь-якого  $\beta > 0$  можна обрати  $A_1$  таким чином, щоб для  $T > T_0$ ,  $R > R_0$  виконувалась нерівність

$$a_1 \geq \frac{1}{16\pi f_0(1+q)} \cdot \frac{c_0}{c_1} - \beta. \quad (2.4.10)$$

Позначимо  $s_T^*(z) = T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t+z) dt$ ,  $z \in [0, H]$ . Тоді

$$\sup_{z \in [0, H]} s_T^*(z) \leq (1 + HT^{-1}) s_{T+H}^*(0). \quad (2.4.11)$$

Нехай  $\alpha = B(0)T^{1/2} \wedge R$ . Маємо

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} T^{-1/2} |I_{2T}(z)| \geq \alpha^{-1/2} R \right\} \leq \\ &\leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} (s_T^*(z))^{1/2} \varphi_T^{1/2}(\widehat{\theta}_T, \theta) \geq \alpha^{-1/2} R \right\} \leq \\ &\mathbb{P} \left\{ (s_{T+H}^*(0))^{1/2} \|d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T - \theta)\| \geq \alpha^{-1/2} (1 + HT^{-1})^{-1/2} c_1^{-1/2} R, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. s_{T+H}^*(0) \leq B(0) + RT^{-1/2} \right\} + \\
& + \mathbf{P} \left\{ (s_{T+H}^*(0))^{1/2} \|d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)\| \geq \alpha^{-1/2} (1 + HT^{-1})^{-1/2} c_1^{-1/2} R, \right. \\
& \left. s_{T+H}^*(0) > B(0) + RT^{-1/2} \right\} = P_{21} + P_{22}. \tag{2.4.12}
\end{aligned}$$

Отримуємо далі

$$P_{21} \leq \mathbf{P} \left\{ \|d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)\| \geq \frac{R}{(\alpha(1 + HT^{-1})c_1(B(0) + RT^{-1/2}))^{1/2}} \right\}. \tag{2.4.13}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
\frac{R}{(B(0) + RT^{-1/2})^{1/2}} &= \left( \frac{R}{B(0)} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{B(0)T^{1/2}R}{B(0)T^{1/2} + R} \right)^{1/2} \geq \\
&\geq \left( \frac{R}{2B(0)} \right)^{1/2} \cdot \alpha^{1/2}, \tag{2.4.14}
\end{aligned}$$

і тому за теоремою 2.2.2 для будь-якого  $\beta > 0$  можна обрати константу  $A_{21}$  таким чином, щоб для  $T > T_0$ ,  $R > R_0$  були вірними нерівності

$$P_{21} \leq A_{21} \exp\{-a_{21}R\}, \quad a_2 \geq \frac{1}{32\pi f_0(1+q)B(0)} \cdot \frac{c_0}{c_1} - \beta. \tag{2.4.15}$$

З іншого боку,

$$P_{22} \leq P\{s_{T+H}^*(0) > B(0) + RT^{-1/2}\}, \tag{2.4.16}$$

і для оцінювання цієї ймовірності скористаємось першою з нерівностей теорему 6.3.1 монографії [5], а саме:

$$\mathbf{P}\{s_{T+H}^*(0) - B(0) > \sqrt{Ds_{T+H}^*(0)}x\} \leq K(x), \tag{2.4.17}$$

$$K(x) = (1 + \sqrt{2}x)^{1/2} \exp\{-x/\sqrt{2}\}, \quad x > 0.$$

За формулою Ісерліса

$$Ds_{T+H}^*(0) = 2(T + H)^{-1}b_{T+H}^2,$$

$$b_{T+H}^2 = (T+H)^{-1} \int_0^{T+H} \int_0^{T+H} B^2(t-s) dt ds \longrightarrow \|B\|_2^2, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.4.18)$$

Візьмемо в нерівності (2.4.17)  $x = (Ds_{T+H}^*(0))^{-1/2} RT^{-1/2}$ , і тоді для будь-якого  $\delta > 0$  і  $T > T_0$

$$\begin{aligned} P_{22} &\leq K \left( (Ds_{T+H}^*(0))^{-1/2} RT^{-1/2} \right) = \\ &= (1 + (1 + HT^{-1})^{1/2} b_{T+H}^{-1} R)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(1 + HT^{-1})^{1/2} b_{T+H}^{-1} R\right\} \leq \\ &\leq \left(1 + (1 + \delta)^{1/2} \frac{R}{\|B\|_2 - \delta}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\|B\|_2}(1 - \delta\|B\|_2^{-1})R\right\}. \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Таким чином, для будь-якого  $\beta > 0$  існують такі константи  $A_{22}$  та  $a_{22}$ , що для  $T > T_0$ ,  $R > R_0$

$$P_{22} \leq A_{22} \exp\{-a_{22}R\}, \quad a_{22} > \frac{1}{2\|B\|_2} - \beta. \quad (2.4.20)$$

Стосовно  $I_{3T}(z)$  отримуємо аналогічно попереднім міркуванням

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} T^{-1/2} |I_{3T}(z)| \geq \alpha^{-1/2} R \right\} \leq \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ (s_T^*(0))^{1/2} \varphi_{T+H}^{1/2}(\widehat{\theta}_T, \theta) \geq \alpha^{-1/2} R, \quad s_T^*(0) \leq B(0) + RT^{-1/2} \right\} + \\ &+ \mathbf{P} \left\{ (s_T^*(0))^{1/2} \varphi_{T+H}^{1/2}(\widehat{\theta}_T, \theta) \geq \alpha^{-1/2} R, \quad s_T^*(0) > B(0) + RT^{-1/2} \right\} = \\ &= P_{31} + P_{32}. \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Для довільно  $\delta > 0$  та  $T > T_0$ ,  $R > R_0$

$$P_{31} \leq \mathbf{P} \left\{ \|d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T - \theta)\| \geq (1 + \delta)^{-1} (2B(0)c_1)^{-1/2} R^{1/2} \right\}. \quad (2.4.22)$$

Збільшуючи  $T$  і  $R$ , якщо потрібно, для довільного  $\beta > 0$  можна вказати константу  $A_{31}$  таку, щоб виконувалась нерівність

$$P_{31} \leq A_{31} \exp\{-a_{31}R\}, \quad (2.4.23)$$

де константа  $a_{31}$  задовольняє другу з нерівностей (2.4.15).

Не важко також зрозуміти, що для довільного  $\beta > 0$  існує така константа  $A_{32}$ , що для  $T > T_0$ ,  $R > R_0$

$$P_{32} \leq A_{32} \exp\{-a_{32}R\}, \quad (2.4.24)$$

причому для константи  $a_{32}$  є вірною друга з нерівностей (2.4.20).

Крім цього, з теореми 2.3.1 випливає, що для будь-якого  $\beta > 0$  та  $T > T_0$ ,  $R > R_0$

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} |Y_T(z)| \geq (1 - T^{-1/2} - 2\alpha^{-1/2})R \right\} \leq 2 \exp\{-a_Y R\}, \quad (2.4.25)$$

$a_Y \geq D^{-1}(r^*) - \beta$ , де константу  $D(r^*)$  задано формулою (2.3.18).

Збираючи оцінки (2.4.9), (2.4.10), (2.4.15), (2.4.19), (2.4.22) – (2.4.24), ми бачимо, що для будь-якого  $\beta > 0$  і  $T > T_0$ ,  $R > R_0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ T^{1/2} \sup_{z \in [0, H]} |B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z)| \geq R \right\} \leq \\ & \leq A_1 \exp \left\{ - \left( \frac{1}{16\pi f_0(1+q)} \cdot \frac{c_0}{c_1} - \beta \right) R \right\} + \\ & + (A_{21} + A_{31}) \exp \left\{ - \left( \frac{1}{16\pi f_0(1+q)} \cdot \frac{c_0}{c_1} \cdot \frac{1}{2B(0)} - \beta \right) R \right\} + \\ & + (A_{22} + A_{32}) \exp \left\{ - \left( \frac{1}{2\|B\|_2} - \beta \right) R \right\} + \\ & + 2 \exp \left\{ - \left( \frac{1}{D(r^*)} - \beta \right) R \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Формула (2.3.30) для  $D(r^*)$  показує, що  $D(r^*) > 2\|B\|_2 = 2\sqrt{2\pi}\|f\|_2$ , і тому з нерівності (2.4.26) отримуємо твердження теореми 2.4.1.  $\square$

Зауважимо, що константа  $a_0$  з (2.4.1) не залежить від істинного значення параметра функції регресії  $\theta$ , але залежить від невідомих характеристик  $f_0$ ,  $B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\lambda = \|f\|_1$ ,  $\|f\|_2$  випадкового процесу  $\{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$

та інтеграла  $\int_0^{\varepsilon(\sqrt{\rho})} \ln(1 + \mathbf{N}_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)) d\varepsilon$ , відносно якого ми знаємо тільки, що він збігається. Це ускладнює практичне застосування нерівності (2.4.2), тому що, по-перше, ми не знаємо наскільки малою є константа  $a_0$ , по-друге, ми не можемо контролювати константи  $A_1, A_{21}, A_{31}$  в (2.4.26), завдяки особливостям методу доведення загальної теореми 2.1 роботи [109], на яку спираються доведення теорем 2.2.1 та 2.2.2.

З іншого боку, з теореми 2.4.1 можна отримати важливі теоретичні наслідки щодо рівномірної за  $z \in [0, H]$  слабкої консистентності оцінки  $B_T(z, \hat{\theta}_T)$  коваріаційної функції  $B(z)$ .

**Наслідок 2.4.1.** *Нехай  $\gamma \in [0, 1/2)$ ,  $h > 0$  – довільне число,  $R = h T^{1/2-\gamma}$ . Тоді в умовах теореми 2.4.1 для  $T > T_0 \vee \left(\frac{R_0}{h}\right)^{\frac{2}{1-2\gamma}}$*

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} |B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z)| \geq h T^{-\gamma} \right\} \leq A \exp \left\{ -ah T^{1/2-\gamma} \right\}. \quad (2.4.27)$$

**Наслідок 2.4.2.** *Нехай  $h > 0$  – довільне число,  $R = h \ln T$ . Тоді в умовах теореми 2.4.1 для  $T > T_0 \vee \exp \left\{ \frac{R_0}{h} \right\}$*

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} |B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z)| \geq h (\ln T) T^{-1/2} \right\} \leq A T^{-ah}. \quad (2.4.28)$$

Наведемо одну теорему про рівномірну сильну консистентність залишкової корелограми  $B_T(z, \hat{\theta}_T)$ ,  $z \in [0, H]$ . Нам знадобляться наступні умови.

**N3.** Для деякого  $\delta > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^\delta f(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (2.4.29)$$

**C.**  $\hat{\theta}_T \rightarrow \theta$  м.н.,  $T \rightarrow \infty$ .

**R5(ii').** Для деякого числа  $c_1^*$  та  $T > T_0$

$$T^{-1} \varphi_T(\tau_1, \tau_2) \leq c_1^* \|\tau_1 - \tau_2\|^2, \quad \tau_1, \tau_2 \in \Theta^c. \quad (2.4.30)$$

Достатні умови сильної консистентності ОНК  $\widehat{\theta}_T$  (умова **C**) наведено в [69, 71]. Нерівність (2.4.30) є правою частиною нерівності (2.2.25) умови **R5(ii)** у випадку  $s_T = T^{1/2}\mathbb{I}_q$ , і вона не протирічить умовам сильної консистентності ОНК.

**Теорема 2.4.2.** *Якщо виконано умови **N1**, **N3**, **R5(ii')** та **C**, то*

$$\sup_{z \in [0, H]} |B_T(z, \widehat{\theta}_T) - B(z)| \longrightarrow 0 \text{ м.н., } T \rightarrow \infty. \quad (2.4.31)$$

*Доведення.* Перепишемо тотожність (2.4.3) у вигляді

$$B_T(z, \widehat{\theta}_T) - B(z) = B_T - B(z) + T^{-1}I_{1T}(z) - T^{-1}I_{2T}(z) - T^{-1}I_{3T}(z), \quad z \in [0, H]. \quad (2.4.32)$$

З використанням умов **R5(ii')** та **C** отримуємо

$$\begin{aligned} \sup_{z \in [0, H]} T^{-1}|I_{1T}(z)| &\leq (1 + HT^{-1})^{1/2} \left( (T + H)^{-1} \varphi_{T+H}(\widehat{\theta}_T, \theta) \right)^{1/2} \times \\ &\times \left( T^{-1} \varphi_T(\widehat{\theta}_T, \theta) \right)^{1/2} \leq (1 + HT^{-1})^{1/2} c_1^* \|\widehat{\theta}_T - \theta\|^2 \longrightarrow 0 \text{ м.н., } T \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

Оскільки за умови **N1**  $s_T^*(0) \longrightarrow B(0)$  м.н. при  $T \rightarrow \infty$ , то

$$\sup_{z \in [0, H]} T^{-1}|I_{2T}(z)| \leq (s_{T+H}^*(0))^{1/2} \left( T^{-1} \varphi_T(\widehat{\theta}_T, \theta) \right)^{1/2} \longrightarrow 0 \text{ м.н., } T \rightarrow \infty. \quad (2.4.34)$$

Аналогічно

$$\sup_{z \in [0, H]} T^{-1}|I_{3T}(z)| \longrightarrow 0 \text{ м.н., } T \rightarrow \infty. \quad (2.4.35)$$

Якщо  $B \in L_2(\mathbb{R})$ , що випливає з **N1**, та виконано умову **N3**, то за теоремою 4.2.3 книги [71]

$$\sup_{z \in [0, H]} |B_T(z) - B(z)| \longrightarrow \theta \text{ м.н., } T \rightarrow \infty. \quad (2.4.36)$$

□

## Висновки до розділу 2

У другому розділі отримано теорему про ймовірності великих відхилень ОНК векторного параметра нелінійної функції регресії в моделі із гауссівським стаціонарним процесом у якості випадкового шуму та теорему про ймовірності великих відхилень у рівномірній метриці корелограми такого процесу.

З використанням цих результатів доведено теорему про експоненціальну збіжність до нуля ймовірностей великих відхилень у рівномірній метриці нормованої різниці залишкової корелограми та коваріаційної функції випадкового шуму.

Як прості наслідки вказаного факту, отримано посилені властивості слабкої консистентності залишкової корелограми як оцінки невідомої коваріаційної функції шуму в нелінійній гауссівській регресії.

### Розділ 3

## АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ КОРЕЛОГРАМНОЇ ОЦІНКИ

У розділі доведено функціональну теорему у просторі неперервних функцій про асимптотичну нормальність нормованої різниці залишкової корелограми та коваріаційної функції випадкового шуму в моделі регресії (2.1.1).

### 3.1 Попередні зауваження

Нехай разом з **N1(i)** виконано умову

**N1(ii')**. Коваріаційна функція  $B = \{B(t), t \in \mathbb{R}\}$  процесу  $\varepsilon$  абсолютно інтегровна.

Очевидно, якщо  $B \in L_1(\mathbb{R})$ , то процес  $\varepsilon$  має обмежену та неперервну спектральну щільність  $f = \{f(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Таким чином, умова **N1(ii')** сильніша за умову **N1(ii)**.

Перепишемо тотожність (2.4.3) у вигляді

$$X_T(z) = T^{1/2} \left( B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z) \right) = Y_T(z) + R_T(z), \quad z \in [0, H], \quad (3.1.1)$$

де

$$R_T(z) = T^{-1/2} I_{1T}(z) + T^{-1/2} I_{2T}(z) + T^{-1/2} I_{3T}(z),$$

а величини  $I_{1T}$ ,  $I_{2T}$ ,  $I_{3T}$  задано формулами (2.4.4) – (2.4.6).

Процеси  $Y_T$ ,  $I_{1T}$ ,  $I_{2T}$ ,  $I_{3T}$ , а з ними  $X_T$  та  $R_T$ , будемо розглядати як випадкові елементи у вимірному просторі  $(C([0, H]), \mathfrak{B})$ ,  $\mathfrak{B}$  –  $\sigma$ -алгебра борелевих підмножин простору неперервних функцій  $C([0, H])$ . Нехай  $Z$  – будь-який із введених вище випадкових елементів. Розподіл  $Z$  є ймовірнісною мірою  $PZ^{-1}$  на  $(C([0, H]), \mathfrak{B})$ .

**Означення 3.1.1** [3]. Сім'я  $\{U_T\}$  випадкових елементів збігається за розподілом при  $T \rightarrow \infty$  до випадкового елемента  $U$  в просторі  $C([0, H])$  (пишемо  $U_T \xrightarrow{D} U$ ), якщо розподіли  $P_T$  елементів  $U_T$  слабо збігаються при  $T \rightarrow \infty$  до розподілу  $P$  елемента  $U$ .

Оскільки за наших припущень  $f \in L_2(\mathbb{R})$ , то, як добре відомо, при

$T \rightarrow \infty$  для всіх  $z_1, z_2 \geq 0$

$$\mathbb{E} Y_T(z_1) Y_T(z_2) \longrightarrow b(z_1, z_2) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \cos \lambda z_1 \cos \lambda z_2 d\lambda. \quad (3.1.2)$$

Нехай  $Y = \{Y(z), z \in [0, H]\}$  – дійсний центрований гауссівський процес з коваріаційною функцією (3.1.2). Якщо  $f \in L_2(\mathbb{R})$ , то як доведено в роботі [6], всі скінченномірні розподіли процесів  $Y_T$  слабо збігаються при  $T \rightarrow \infty$  до відповідних скінченномірних розподілів гауссівського процесу  $Y$ .

Далі припускаємо, що процес  $Y$  є сепарабельним. Наступний результат отримано в [5] (теорема 6.4.1).

**Теорема.** *Нехай  $f \in L_2(\mathbb{R})$  та виконано умову **N2** (див. (2.3.16)). Тоді для будь-якого  $H > 0$*

- I)  $Y \in C([0, H])$  м.н.;
- II)  $Y_T \in C([0, H])$  м.н.,  $T > 0$ ;
- III)  $Y_T \xrightarrow{D} Y$ .

Зокрема, для будь-якого  $x > 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} |Y_T(z)| < x \right\} = \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, H]} |Y(z)| < x \right\}. \quad (3.1.3)$$

Цю теорему отримано при слабкіших припущенням на процес  $\varepsilon$ , ніж наші. У нас висновок II) цієї теореми автоматично випливає з того, що за умови **N1(i)** процеси  $Y_T$ ,  $T > 0$ , м.н. вибірково неперервні.

Враховуючи цитовану теорему, сформулюємо важливий для нас факт, який є перефразованою для  $C([0, H])$  теоремою 4.1 ([3], стор. 40). Для функцій  $a(z)$ ,  $z \in [0, H]$ , в цьому розділі будемо писати  $\|a\| = \sup_{z \in [0, H]} |a(z)|$ .

**Лема.** *Якщо  $Y_T \xrightarrow{D} Y$  і*

$$\|R_T\| \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.1.4)$$

то і  $X_T \xrightarrow{D} Y$ ,  $T \rightarrow \infty$ .

Таким чином, для отримання функціональної теореми про асимптотичну нормальність процесу  $X_T$  треба довести співвідношення (3.1.4).

### 3.2 Теорема про асимптотичну нормальність корелограмної оцінки

Для отримання вказаного в назві підрозділу результату нам потрібні подальші умови, які керують поведінкою перших та других частинних похідних функції регресії за параметром та умову на шум  $\varepsilon$  та ОНК  $\widehat{\theta}_T$  параметра  $\theta$  моделі (2.1.1).

Позначимо  $g_{ij}(t, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j} g(t, \tau)$ .

**R1'.** (i) Функція  $g(t, \tau)$  при кожному  $t > -\gamma$  двічі неперервно диференційовна за  $\tau \in \Theta_\gamma$ , причому ці похідні неперервні за сукупністю змінних і  $\liminf_{T \rightarrow \infty} T^{-1/2} d_{iT}(\tau) > 0$ ,  $\tau \in \Theta$ ,  $i = \overline{1, q}$ .

(ii)  $\sup_{\tau \in \Theta^c} |g_j(t, \tau)| \leq G_j(t)$  для деяких неперервних функцій  $G_j(t)$ ,  $t \geq 0$ , та для  $D_{jT}^2 = \int_0^T G_j^2(t) dt$ ,

$$D_{jT} d_{jT}^{-1}(\tau) \leq c_j(\tau) < \infty, \quad \tau \in \Theta, \quad j = \overline{1, q}. \quad (3.2.1)$$

(iii)  $\sup_{\tau \in \Theta^c} |g_{ij}(t, \tau)| \leq G_{ij}(t)$  для деяких неперервних функцій  $G_{ij}(t)$ ,  $t \geq 0$ , та для  $D_{ij,T}^2 = \int_0^T G_{ij}^2(t) dt$  і обмежених констант  $c_{ij}(\tau)$

$$D_{ij,T} d_{iT}^{-1}(\tau) d_{jT}^{-1}(\tau) \leq c_{ij}(\tau) T^{-1/2}, \quad \tau \in \Theta, \quad i, j = \overline{1, q}. \quad (3.2.2)$$

Позначимо

$$\Psi_{jT}(z_1, z_2; \tau) = \int_0^T (g_j(t + z_1, \tau) - g_j(t + z_2, \tau))^2 dt.$$

$$\mathbf{R6.} \quad d_{jT}^{-2}(\tau) \Psi_{jT}(z_1, z_2; \tau) \leq \bar{c}_j(\tau) |z_1 - z_2|^2, \quad z_1, z_2 \in [0, H], \quad (3.2.3)$$

$$\bar{c}_j(\tau) < \infty, \quad \tau \in \Theta, \quad j = \overline{1, q}.$$

Для базової моделі спостережень (2.1.1) введемо сім'ю матричних мір  $\mu_T(d\lambda, \tau)$ ,  $\tau \in \Theta$ , на  $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}))$ , де  $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$  –  $\sigma$ -алгебра вимірних за Лебегом підмножин  $\mathbb{R}$ , з матричними щільностями відносно міри Лебега  $\left(\mu_T^{jl}(\lambda, \tau)\right)_{j,l=1}^q$ ,  $\tau \in \Theta$ ,

$$\mu_T^{jl}(\lambda, \tau) = g_T^j(\lambda, \tau) \overline{g_T^l(\lambda, \tau)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |g_T^j(\lambda, \tau)|^2 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} |g_T^l(\lambda, \tau)|^2 d\lambda \right)^{-1/2}, \quad (3.2.4)$$

$$g_T^j(\lambda, \tau) = \int_0^T e^{i\lambda t} g_j(t, \tau) dt, \quad j, l = \overline{1, q}.$$

За тотожністю Планшереля для  $j, l = \overline{1, q}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_T^j(\lambda, \tau) \overline{g_T^l(\lambda, \tau)} d\lambda = 2\pi \int_0^T g_j(t, \tau) \overline{g_l(t, \tau)} dt. \quad (3.2.5)$$

**R7.** Сім'я мір  $\mu_T(d\lambda, \tau)$ ,  $\tau \in \Theta$ , слабо збігається при  $T \rightarrow \infty$  до додатно визначеної матричної міри  $\mu(d\lambda, \tau)$ ,  $\tau \in \Theta$ .

Додатна визначеність  $\mu(d\lambda, \tau)$  означає, що елементи  $\mu^{jl}(d\lambda, \tau)$  матриці  $\mu(d\lambda, \tau)$  є комплексними зарядами обмеженої варіації та матриця  $\mu(B, \tau)$  невід'ємно визначена для будь-якої множини  $B \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ , причому  $\mu(\mathbb{R}, \tau)$  – додатно визначена матриця.

**Означення 3.2.1.** Міра  $\mu(d\lambda, \tau)$ ,  $\tau \in \Theta$ , називається спектральною мірою функції  $g(t, \tau)$ , або спектральною мірою градієнта  $\nabla g(t, \tau)$  функції  $g(t, \tau)$  (див., наприклад, [19], [71], [77]).

Враховуючи (3.2.5), за умови **R7**

$$\begin{aligned} \mu_T(\mathbb{R}, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(d\lambda, \tau) = \left( d_{jT}^{-1}(\tau) d_{lT}^{-1}(\tau) \int_0^T g_j(t, \tau) \overline{g_l(t, \tau)} dt \right)_{j,l=1}^q = \\ &= J_T(\tau) \longrightarrow J(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda, \tau) > 0, \quad T \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

**AN.** Випадковий вектор  $d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T - \theta)$  асимптотично при  $T \rightarrow \infty$  нормальний з нульовим середнім та коваріаційною матрицею

$$2\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda, \theta) \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu(d\lambda, \theta) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda, \theta) \right)^{-1}. \quad (3.2.7)$$

Достатні умови виконання умови **AN** вельми громіздкі і наведено в [71] та, наприклад, у недавній роботі [73]. Зокрема, для доведення асимптотичної нормальності у вказаних роботах потрібна умова **R7**. Надалі для нас будуть важливі тільки факти асимптотичної нормальності ОНК  $\widehat{\theta}_T$  та існування спектральної міри  $\mu$  функції регресії  $g$ .

Нехай  $\mu^{jj}$ ,  $j = \overline{1, q}$ , – діагональні елементи (міри) матричної спектральної міри  $\mu$ .

**Означення 3.2.2** [19]. Функцію  $b(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , будемо називати  $\mu^{jj}$ -припустимою, якщо вона інтегровна за мірою  $\mu^{jj}$  та виконується співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) \mu_T^{jj}(d\lambda, \tau) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) \mu^{jj}(d\lambda, \tau), \quad T \rightarrow \infty, \quad \tau \in \Theta. \quad (3.2.8)$$

**RN1.** Для деякого  $\delta \in (0, 1]$  функція  $b(\lambda) = |\lambda|^{1+\delta} f(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , є  $\mu^{jj}$ -припустимою,  $j = \overline{1, q}$ .

Розглянемо деякі достатні умови  $\mu^{jj}$ -припустимості функції  $b(\lambda)$  з умови **RN1** у випадку, коли виконано умову **N1(ii')**. Якщо

$$\mathbf{N4.} \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\lambda|^{1+\delta} f(\lambda) < \infty, \quad (3.2.9)$$

то (2.3.8) впливає з означення слабкої збіжності мір.

Позначимо  $(\partial/\partial t)g_j(t, \tau) = g_j'(t, \tau)$ ,  $\tilde{g}_T^j(\lambda, \tau) = \int_0^T e^{i\lambda t} g_j'(t, \tau) dt$  і введемо умову

**RN1'.** (i) Функції  $g_j(t, \tau)$ ,  $\tau \in \Theta$ , неперервно диференційовні за  $t > -\gamma$  при  $\tau \in \Theta$ , і існує  $\lambda_0 > 0$  таке, що для  $T > T_0$

$$\sup_{|\lambda| > \lambda_0} d_{jT}^{-2}(\tau) |\tilde{g}_T^j(\lambda, \tau)|^2 \leq h_j(\tau) < \infty, \quad j = \overline{1, q}, \quad \tau \in \Theta. \quad (3.2.10)$$

(ii) Існує  $\lambda_1 > 0$  таке, що для  $\lambda > \lambda_1$  функція  $\lambda^{1+\delta}f(\lambda)$  строго монотонно зростає і

$$|\lambda|^{1+\delta}f(\lambda) \longrightarrow \infty, \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.2.11)$$

$$(iii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{1+\delta}f(\lambda)\mu^{jj}(d\lambda, \tau) < \infty, \quad j = \overline{1, q}, \quad \tau \in \Theta. \quad (3.2.12)$$

**Лема 3.2.1.** З умов **N1(ii')**, **RN1'**, **R1(ii')** та **R7** випливає умова **RN1**.

*Доведення.* Для  $M > 0$  розглянемо зрізку

$$b^M(\lambda) = b(\lambda)\chi\{\lambda : b(\lambda) \leq M\} + M\chi\{\lambda : b(\lambda) > M\}$$

та запишемо

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda)\mu_T^{jj}(d\lambda, \tau) - \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda)\mu^{jj}(d\lambda, \tau) \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda)\mu_T^{jj}(d\lambda, \tau) - \int_{-\infty}^{\infty} b^M(\lambda)\mu_T^{jj}(d\lambda, \tau) \right| + \\ & + \left| \int_{-\infty}^{\infty} b^M(\lambda)\mu_T^{jj}(d\lambda, \tau) - \int_{-\infty}^{\infty} b^M(\lambda)\mu^{jj}(d\lambda, \tau) \right| + \\ & + \left| \int_{-\infty}^{\infty} b^M(\lambda)\mu^{jj}(d\lambda, \tau) - \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda)\mu^{jj}(d\lambda, \tau) \right| = \\ & = K_{1j}(T, M) + K_{2j}(T, M) + K_{3j}(M), \quad j = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

За теоремою Лебега про монотонну збіжність із **RN1'(iii)** випливає, що

$$\lim_{M \rightarrow \infty} K_{3j}(M) = 0. \quad (3.2.14)$$

За умови **R7** при фіксованому  $M$  матимемо

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K_{2j}(T, M) = 0. \quad (3.2.15)$$

З іншого боку, за умов леми

$$\begin{aligned} K_{1j}(T, M) &= (2\pi)^{-1} \int_{\{\lambda: b(\lambda) > M\}} (b(\lambda) - M) d_{jT}^{-2}(\tau) |g_T^j(\lambda, \tau)|^2 d\lambda \leq \\ &\leq (2\pi)^{-1} \int_{\{\lambda: b(\lambda) > M\}} b(\lambda) d_{jT}^{-2}(\tau) |g_T^j(\lambda, \tau)|^2 d\lambda. \end{aligned}$$

Інтегруючи частинами, отримаємо

$$\begin{aligned} |g_T^j(\lambda, \tau)| &= |\lambda|^{-1} \left| e^{i\lambda T} g_j(T, \tau) - g_j(0, \tau) - \tilde{g}_T^j(\lambda, \tau) \right| \leq \\ &\leq |\lambda|^{-1} \left( 2 \sup_{0 \leq t \leq T} |g_j(t, \tau)| + |\tilde{g}_T^j(\lambda, \tau)| \right). \end{aligned}$$

Таким чином, за умови **R1(ii')**

$$d_{jT}^{-2}(\tau) |g_T^j(\lambda, \tau)|^2 \leq \lambda^{-2} \left( 4 d_{jT}^{-2}(\tau) \sup_{0 \leq t \leq T} |g_j(t, \tau)|^2 + 2 d_{jT}^{-2}(\tau) |\tilde{g}_T^j(\lambda, \tau)|^2 \right),$$

$$\begin{aligned} K_{1j}(T, M) &\leq 2c^2(\tau) \pi^{-1} T^{-1} \int_{\{\lambda: b(\lambda) > M\}} |\lambda|^{-1+\delta} f(\lambda) d\lambda + \\ &+ \pi^{-1} \int_{\{\lambda: b(\lambda) > M\}} |\lambda|^{-1+\delta} d_{jT}^{-2}(\tau) |\tilde{g}_T^j(\lambda, \tau)|^2 d\lambda = \\ &= K_{1j}^{(1)}(T, M) + K_{1j}^{(2)}(T, M). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Нехай  $\varepsilon > 0$  – довільне фіксоване число. Оскільки інтеграл в  $K_{1j}^{(1)}(T, M)$  мажорується спектральним моментом  $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{-1+\delta} f(\lambda) d\lambda < \infty$ , то для  $T > T_0$  маємо  $K_{1j}^{(1)}(T, M) < \varepsilon/4$ .

Покладемо  $\max_{0 \leq \lambda \leq \lambda_1} b(\lambda) = b(\bar{\lambda}_1)$  для деякого  $\bar{\lambda}_1 \geq \lambda_1$ , де  $\lambda_1$  – число з умови **RN1'(ii)**. Нехай також  $\Lambda > 0$  таке число, що  $b(\lambda) > M = b(\Lambda) > b(\bar{\lambda}_1)$ . Тоді  $\{\lambda : b(\lambda) > M\} = \{\lambda : |\lambda| > \Lambda\}$ , і якщо  $\Lambda \geq \lambda_0$ , то для  $T > T_0$  з умови **RN1'(i)** отримуємо

$$K_{1j}^{(2)}(T, M) = \pi^{-1} \int_{\{\lambda: |\lambda| > \Lambda\}} |\lambda|^{-1+\delta} f(\lambda) d_{jT}^{-2}(\tau) |\tilde{g}_T^j(\lambda, \tau)|^2 d\lambda \leq$$

$$\leq \pi^{-1} h_j(\tau) \int_{\{\lambda: |\lambda| > \Lambda\}} |\lambda|^{-1+\delta} f(\lambda) d\lambda.$$

Тепер вибором  $\Lambda$ , тобто вибором рівня зрізки  $M = b(\Lambda)$ , можна забезпечити виконання нерівності  $K_{1j}^{(2)}(T, M) < \varepsilon/4$ . Збільшуючи  $\Lambda$ , якщо потрібно, з (3.2.14) отримуємо  $K_{3j}(T, M) < \varepsilon/4$ . Так само, збільшуючи  $T_0$ , якщо потрібно, одержуємо з (3.2.15)  $K_{2j}(T, M) < \varepsilon/4$ .  $\square$

**Теорема 3.2.1.** *Якщо виконано умови  $\mathbf{N1}(i)$ ,  $\mathbf{N1}(ii')$ ,  $\mathbf{N2}$ ,  $\mathbf{R1}$ ,  $\mathbf{R1}'$ ,  $\mathbf{R6}$ ,  $\mathbf{R7}$ ,  $\mathbf{AN}$  та  $\mathbf{RN1}$ , то*

$$X_T(\cdot) = T^{1/2} \left( \mathbf{B}_T(\cdot, \hat{\theta}_T) - \mathbf{B}(\cdot) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.2.17)$$

З урахуванням теореми і леми підрозділу 3.1 для отримання (3.2.17) достатньо довести (3.1.4). Це доведення складається з доведення трьох лем.

**Лема 3.2.2.** *За умов  $\mathbf{R1}$ ,  $\mathbf{R1}'(i)$ ,  $\mathbf{R1}'(ii)$  та  $\mathbf{AN}$*

$$T^{-1/2} \|I_{1T}\| \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.2.18)$$

*Доведення.* Використовуючи позначення (2.4.4), запишемо

$$\begin{aligned} T^{-1/2} \|I_{1T}\| &\leq T^{-1/2} \varphi_T^{1/2}(\hat{\theta}_T, \theta) \varphi_{T+H}^{1/2}(\hat{\theta}_T, \theta), \\ T^{-1/2} \varphi_T^{1/2}(\hat{\theta}_T, \theta) &\leq T^{-1/2} \left( \sum_{i,j=1}^q \int_0^T G_i(t) G_j(t) dt |\hat{\theta}_{iT} - \theta_i| |\hat{\theta}_{jT} - \theta_j| \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^q \frac{D_{jT}}{d_{jT}(\theta)} \left( T^{-1/2} d_{jT}(\theta) |\hat{\theta}_{jT} - \theta_j| \right) \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

З іншого боку, для будь-якого  $\Delta > 0$  і  $T > T_0(\Delta)$

$$\begin{aligned} \varphi_{T+H}^{1/2}(\hat{\theta}_T, \theta) &\leq \sum_{j=1}^q \frac{D_{j,T+H}}{d_{j,T+H}(\theta)} \cdot \frac{d_{j,T+H}(\theta)}{d_{jT}(\theta)} \left| d_{jT}(\theta) (\hat{\theta}_{jT} - \theta_j) \right| \leq \\ &\leq (1 + \Delta) \|c(\theta)\| \|d_T(\hat{\theta}_T - \theta)\|, \end{aligned}$$

де  $c(\theta) = (c_1(\theta), c_2(\theta), \dots, c_q(\theta))$ . Твердження леми тепер випливає з добре відомих фактів, а саме: див., наприклад теорему (X)(а) стор. 118 [45] та векторний варіант теореми (XII) стор. 119 там же.  $\square$

**Лема 3.2.3.** *За умов  $\mathbf{N1}(i)$ ,  $\mathbf{N1}(ii')$ ,  $\mathbf{R1}'$ ,  $\mathbf{R7}$ ,  $\mathbf{RN1}$  та  $\mathbf{AN}$*

$$T^{-1/2} \|I_{2T}\| \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.2.19)$$

*Доведення.* Умова  $\mathbf{R1}'$  дозволяє застосувати формулу Тейлора до інтеграла  $T^{-1/2}I_{2T}(z)$  (див. формулу (2.4.5)) і записати

$$\begin{aligned} T^{-1/2}I_{2T}(z) &= \sum_{j=1}^q d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t+z)g_j(t, \theta)dt \left( T^{-1/2}d_{jT}(\theta) \left( \widehat{\theta}_{jT} - \theta_j \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^q d_{iT}^{-1}(\theta)d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t+z)g_{ij}(t, \theta_T^*)dt \times \\ &\times d_{iT}(\theta) \left( \widehat{\theta}_{iT} - \theta_i \right) \left( T^{-1/2}d_{jT}(\theta) \left( \widehat{\theta}_{jT} - \theta_j \right) \right) = \\ &= \sum_{1T}(z) + \sum_{2T}(z), \quad \|\theta_T^* - \theta\| \leq \|\widehat{\theta}_T - \theta\|. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Розглянемо м.н. вибірково неперервні випадкові процеси

$$\xi_{jT}(z) = d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t+z)g_j(t, \theta)dt, \quad z \in [0, H], \quad T > 0, \quad j = \overline{1, q}. \quad (3.2.21)$$

За умови  $\mathbf{R7}$  при  $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} B_{jT}(z_1 - z_2) &= \mathbf{E} \xi_{jT}(z_1)\xi_{jT}(z_2) = \\ &= d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^T \int_0^T B(t-s+z_1-z_2)g_j(t, \theta)g_j(s, \theta)dtds = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(z_1-z_2)} f(\lambda)\mu_T^{jj}(d\lambda, \theta) \longrightarrow 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda(z_1 - z_2) f(\lambda)\mu^{jj}(d\lambda, \theta) = \end{aligned}$$

$$= B_j(z_1 - z_2), \quad z_1, z_2 \in [0, H]. \quad (3.2.22)$$

Таким чином, всі скінченномірні розподіли стаціонарних гауссівських процесів  $\xi_{jT} = \{\xi_{jT}(z), z \in [0, H]\}$  збігаються до відповідних скінченномірних розподілів стаціонарних гауссівських процесів  $\xi_j = \{\xi_j(z), z \in [0, H]\}$  з коваріаційною функцією  $B_j(z_1 - z_2)$ ,  $z_1, z_2 \in [0, H]$ ,  $j = \overline{1, q}$ . Ми припускаємо, що процеси  $\xi_j$ ,  $j = \overline{1, q}$ , є сепарабельними.

Оскільки за умови **RN1** для деякого  $\delta \in (0, 1]$

$$c_j(\delta, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{1+\delta} f(\lambda) \mu^{jj}(\lambda, \theta) < \infty, \quad j = \overline{1, q}, \quad (3.2.23)$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (\xi_j(z_1) - \xi_j(z_2))^2 &= 2 (B_j(0) - B_j(z_1 - z_2)) \leq \\ &\leq 2^{2-\delta} \pi c_j(\delta, \theta) |z_1 - z_2|^{1+\delta}, \quad z_1, z_2 \in [0, H], \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

і процеси  $\xi_j$  неперервні м.н. за теоремою Колмогорова (див., наприклад, [10]). З іншого боку, за тією ж самою умовою для  $T > T_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (\xi_{jT}(z_1) - \xi_{jT}(z_2))^2 &= 2 (B_{jT}(0) - B_{jT}(z_1 - z_2)) \leq \\ &\leq 2^{2-\delta} \pi (c_j(\delta, \theta) + 1) |z_1 - z_2|^{1+\delta}. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Таким чином,  $\xi_{jT} \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi_j$ ,  $j = \overline{1, q}$ , в просторі  $C([0, H])$ , і для всіх неперервних на  $C([0, H])$  функціоналів  $\ell$  розподіл  $\ell(\xi_{jT})$  буде збігатися до розподілу  $\ell(\xi_j)$ . Використовуючи те ж саме позначення для слабкої збіжності випадкових величин, зокрема, отримуємо  $\|\xi_{jT}\| \xrightarrow{\mathcal{D}} \|\xi_j\|$ ,  $j = \overline{1, q}$ , і (див. (3.2.20))

$$\left\| \sum_{1T} \right\| \leq \sum_{j=1}^q \|\xi_{jT}\| \left( T^{-1/2} d_{jT}(\theta) |\hat{\theta}_{jT} - \theta_{jT}| \right) \xrightarrow{P} 0. \quad (3.2.26)$$

З іншого боку, окремий доданок суми  $\sum_{2T}(z)$ ,  $z \in [0, H]$ , за умови **R1'(iii)** мажорується величиною

$$\sqrt{2} \frac{T^{1/2} D_{ij,T}}{d_{iT}(\theta) d_{jT}(\theta)} (s_{2T}^*(0))^{1/2} \left| d_{iT}(\theta) \left( \widehat{\theta}_{iT} - \theta_i \right) \right| \left( T^{-1/2} d_{jT}(\theta) \left| \widehat{\theta}_{jT} - \theta_j \right| \right),$$

причому  $T^{1/2} D_{ij,T} d_{iT}^{-1}(\theta) d_{jT}^{-1}(\theta) \leq c_{ij}(\theta)$ .

Крім цього, очевидно,

$$\mathbb{E} (s_T^*(0) - B(0))^2 = 2T^{-2} \int_0^T \int_0^T B^2(t-s) dt ds = O(T^{-1}),$$

тобто  $s_T^*(0) \xrightarrow{P} B(0)$ ,  $T \rightarrow \infty$ .

Отже,

$$\left\| \sum_{2T} \right\| \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty, \quad (3.2.27)$$

і результат леми випливає з (3.2.20), (3.2.26) і (3.2.27).  $\square$

**Лема 3.2.4.** *За умов  $\mathbf{N1(i)}$ ,  $\mathbf{N1(ii')}$ ,  $\mathbf{R1}$ ,  $\mathbf{R1'}$ ,  $\mathbf{R6}$  та  $\mathbf{AN}$*

$$T^{-1/2} \|I_{3T}\| \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.2.28)$$

*Доведення.* Запишемо

$$\begin{aligned} T^{-1/2} I_{3T}(z) &= \sum_{j=1}^q d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t) g_j(t+z, \theta) dt \left( T^{-1/2} d_{jT}(\theta) \left( \widehat{\theta}_{jT} - \theta_j \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^q d_{iT}^{-1}(\theta) d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t) g_{ij}(t+z, \theta_T^*) dt \left( d_{iT}(\theta) \left( \widehat{\theta}_{iT} - \theta_i \right) \right) \times \\ &\times \left( T^{-1/2} d_{jT}(\theta) \left( \widehat{\theta}_{jT} - \theta_j \right) \right) = \sum_{3T}(z) + \sum_{4T}(z). \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Розглянемо м.н. неперервні гауссівські процеси

$$\eta_{jT}(z) = d_{jT}^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t) g_j(t+z, \theta) dt, \quad z \in [0, H], \quad T > 0, \quad j = \overline{1, q}. \quad (3.2.30)$$

Маємо для  $z_1, z_2 \in [0, H]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \eta_{jT}(z_1) \eta_{jT}(z_2) &= d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^T \int_0^T B(t-s) g_j(t+z_1, \theta) g_j(s+z_2, \theta) dt ds = \\
&= d_{jT}^{-2}(\theta) \int_{z_1}^{T+z_1} \int_{z_2}^{T+z_2} B(t-s+z_2-z_1) g_j(t, \theta) g_j(s, \theta) dt ds, \tag{3.2.31}
\end{aligned}$$

причому подвійний інтеграл (3.2.31) можна символічно записати як

$$\int_{z_1}^{T+z_1} \int_{z_2}^{T+z_2} = \left( \int_0^T + \int_T^{T+z_1} - \int_0^{z_1} \right) \left( \int_0^T + \int_T^{T+z_2} - \int_0^{z_2} \right). \tag{3.2.32}$$

Оцінимо інтеграл

$$\begin{aligned}
\left| d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^T \int_T^{T+z_2} \right| &\leq \left( \int_T^{T+z_2} \int_0^T B^2(t-s+z_2-z_1) dt ds \right)^{1/2} \times \\
&\times \left( d_{jT}^{-2}(\theta) \int_T^{T+z_2} g_j^2(s, \theta) ds \right)^{1/2} \leq \\
&\leq H^{1/2} \|B\|_2 \left( d_{jT}^{-2}(\theta) \left( d_{j, T+H}^2(\theta) - d_{jT}^2(\theta) \right) \right)^{1/2} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

за умови **R1(ii)**. Так само  $d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^{T+z_1} \int_0^T \longrightarrow 0$ .

Аналогічно

$$\left| d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^T \int_0^{z_2} \right| \leq H^{1/2} \|B\|_2 d_{jH}(\theta) d_{jT}^{-1}(\theta) \longrightarrow 0, \quad d_{jT}^{-2} \int_0^{z_1} \int_0^T \longrightarrow 0.$$

Далі отримуємо

$$\left| d_{jT}^{-2}(\theta) \int_T^{T+z_1} \int_T^{T+z_2} \right| \leq HB(0) d_{jT}^{-2}(\theta) \int_T^{T+H} g_j^2(t, \theta) dt \longrightarrow 0,$$

$$\left| d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^{z_1} \int_T^{T+z_2} \right| \leq HB(0)d_{jH}(\theta)d_{jT}^{-1}(\theta) \left( d_{jT}^{-2}(\theta) \int_T^{T+H} g_j^2(s, \theta) ds \right)^{1/2} \longrightarrow 0,$$

$$d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^{T+z_1} \int_0^{z_2} \longrightarrow 0, \quad d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \longrightarrow 0.$$

Таким чином,

$$\mathbb{E} \eta_{jT}(z_1)\eta_{jT}(z_2) = B_{jT}(z_1 - z_2) + o_{jT}(1), \quad o_{jT}(1) \rightarrow 0, \quad z_1, z_2 \in [0, H], \quad (3.2.33)$$

і всі скінченномірні розподіли процесів  $\eta_{jT}$  збігаються до відповідних скінченномірних розподілів м.н. неперервних процесів  $\xi_j$ ,  $j = \overline{1, q}$ , — див. доведення леми 3.2.3.

Крім цього, за умов **N1(ii')**, **R6**

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (\eta_{jT}(z_1) - \eta_{jT}(z_2))^2 &= d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^T \int_0^T B(t-s) (g_j(t+z_1, \theta) - g_j(t+z_2, \theta)) \times \\ &\quad \times (g_j(s+z_1, \theta) - g_j(s+z_2, \theta)) dt ds \leq \\ &\leq d_{jT}^{-2}(\theta) \int_0^T \int_0^T |B(t-s)| (g_j(t+z_1, \theta) - g_j(t+z_2, \theta))^2 dt ds \leq \\ &\leq \|B\|_1 d_{jT}^{-2}(\theta) \Psi_{jT}(z_1, z_2; \theta) \leq \bar{c}_j(\theta) \|B\|_1 |z_1 - z_2|^2, \end{aligned}$$

$$z_1, z_2 \in [0, H], \quad j = \overline{1, q}, \quad \|B\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |B(t)| dt < \infty.$$

Ми довели, що  $\|\eta_{jT}\| \xrightarrow{\mathcal{D}} \|\xi_j\|$ ,  $j = \overline{1, q}$ , і з умови **AN** випливає, що

$$\left\| \sum_{3T} \right\| \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.2.34)$$

Окремий доданок суми  $\sum_{4T}(z)$ ,  $z \in [0, H]$ , оцінюємо зверху величиною

$$(s_T^*(0))^{1/2} \frac{D_{ij, T+H}(T+H)^{1/2}}{d_{i, T+H}(\theta)d_{j, T+H}(\theta)} \frac{T^{1/2}}{(T+H)^{1/2}} \left( \frac{d_{i, T+H}(\theta)}{d_{iT}(\theta)} \right) \left( \frac{d_{j, T+H}(\theta)}{d_{jT}(\theta)} \right) \times$$

$$\times \left| d_{iT}(\theta) \left( \widehat{\theta}_{iT} - \theta_i \right) \right| \left| T^{-1/2} d_{jT}(\theta) \left( \widehat{\theta}_{jT} - \theta_j \right) \right| \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty,$$

завдяки умовам **N1(i)**, **N1(ii')**, **R1(ii)**, **R1'(iii)** та **AN**.

Отже,

$$\left\| \sum_{4T} \right\| \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.2.35)$$

Співвідношення (3.2.29), (3.2.34), (3.2.35) доводять лему.  $\square$

**Приклад 3.2.1.** Нехай  $g(t, \theta) = A \cos \varphi t + B \sin \varphi t$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (A, B, \varphi) \in \Theta = (\underline{A}, \overline{A}) \times (\underline{B}, \overline{B}) \times (\underline{\varphi}, \overline{\varphi})$ ,  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{\varphi} > 0$ ,  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{\varphi} < \infty$ . Функція  $g(t, \tau)$ ,  $(t, \tau) \in (-\gamma, \infty) \times \Theta_\gamma$ ,  $\gamma > 0$  – деяке число, задовольняє умовам гладкості, висунутим до функції регресії в формулюванні теореми 3.2.1. Очевидно,  $d_{1T}^2(\theta) = \frac{T}{2} + O(1)$ ,  $d_{2T}^2(\theta) = \frac{T}{2} + O(1)$ ,  $d_{3T}^2(\theta) = \frac{A^2 + B^2}{6} T^3 + O(T^2)$ ,  $T \rightarrow \infty$ .

В умові **R1'(ii)** можна взяти  $G_1(t) = G_2(t) = 1$ ,  $G_3(t) = (\overline{A} + \overline{B})t$ . Тоді  $D_{1T}^2 = D_{2T}^2 = T$ ,  $D_{3T}^2 = \frac{(\overline{A} + \overline{B})^2}{3} T^3$ , і ми бачимо, що умову **R1'(ii)** виконано. Також очевидно, що  $g_{11} = g_{22} = g_{12} = 0$ ,  $g_{13} = -t \sin \varphi t$ ,  $g_{23} = t \cos \varphi t$ ,  $g_{33} = -At^2 \cos \varphi t - Bt^2 \sin \varphi t$ ,  $G_{13}(t) = G_{23}(t) = t$ ,  $G_{33}(t) = (\overline{A} + \overline{B}) t^2$ ,  $D_{13,T}^2 = D_{23,T}^2 = \frac{T^3}{3}$ ,  $D_{33,T}^2 = \frac{(\overline{A} + \overline{B})^2}{5} T^5$ ,

$$\frac{D_{j3,T}^2}{d_{jT}(\theta) d_{3T}(\theta)} = O(T^{-1/2}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.36)$$

і тому нерівність (3.2.2) умови **R1'(iii)** виконано.

Як добре відомо (див., наприклад, [73]), функція  $g(t, \theta) = A \cos \varphi t + B \sin \varphi t$  має спектральну міру

$$\mu(d\lambda, \theta) = \begin{bmatrix} \delta & i\rho & \overline{\beta} \\ -i\rho & \delta & \overline{\gamma} \\ \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad (3.2.37)$$

де

$$\beta = \frac{\sqrt{3}(B\delta + iA\rho)}{2\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}(-A\delta + iB\rho)}{2\sqrt{A^2 + B^2}},$$

міра  $\delta = \delta(d\lambda)$  та заряд  $\rho = \rho(\lambda)$  зосереджені у точках  $\pm\varphi$ , причому  $\delta(\{\pm\varphi\}) = \frac{1}{2}$ ,  $\rho(\{\pm\varphi\}) = \pm\frac{1}{2}$ . Зауважимо, що матриця

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}BC^{-1} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}AC^{-1} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}BC^{-1} & -\frac{\sqrt{3}}{2}AC^{-1} & 1 \end{bmatrix},$$

де  $C^2 = A^2 + B^2$ ,  $\epsilon$  додатно визначеною, і в наших позначеннях  $\mu^{ii} = \delta$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Перевіримо виконання умови **RN1**. Перш за все,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{1+\delta} f(\lambda) \mu^{ii}(d\lambda, \theta) = \varphi^{1+\delta} f(\varphi) < \infty, \quad (3.2.38)$$

тобто функція  $f(\lambda)$  інтегровна за мірами  $\mu^{ii}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Перевіримо збіжність (3.2.8) за допомогою леми 3.2.1. Виконання умови **RN1'(iii)** випливає з (3.2.38). Припустимо, що умову **RN1'(ii)** також виконано. Це може, наприклад, трапитись тоді, коли поза межами деякого околу нуля спектральна щільність  $f(\lambda)$  буде поводити себе як функція  $\frac{c}{|\lambda| \ln^a(1 + |\lambda|)}$ ,  $a > 1$ .

Зауважимо, що для перших похідних функції прикладу  $g(t, \theta) = A \cos \varphi t + B \sin \varphi t$  виконано умову **R1'(ii)**, і нам залишилось перевірити виконання умови **RN1'(i)** леми 3.2.1. Оскільки  $g'_1(t, \tau) = -\varphi \sin \varphi t$ ,  $g'_2(t, \tau) = \varphi \cos \varphi t$ ,

$$g'_3(t, \tau) = -A \sin \varphi t - A \varphi t \sin \varphi t + B \cos \varphi t - B \varphi t \cos \varphi t, \quad (3.2.39)$$

то завдяки тому, що можна взяти, наприклад,  $|\lambda| > \bar{\varphi} + 1 = \lambda_0$ , при підрахунках інтегралів  $\tilde{g}_T^j(\lambda, \tau)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , не виникне неінтегровних сингулярностей вигляду  $\frac{1}{\lambda \pm \varphi}$ . Більш того, у розглянутому прикладі виконується посилений варіант нерівності (3.2.10) умови **RN1'(i)**.

$$\sup_{|\lambda| > \lambda_0} d_{jT}^{-2}(\tau) |\tilde{g}_T^j(\lambda, \tau)|^2 \leq h_j(\tau) T^{-1}, \quad h_j(\tau) < \infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad \tau \in \Theta.$$

Якщо виконано умову **N4**, то описані складнощі не виникають.

Зауважимо, що в цьому прикладі при  $f(\varphi) \neq 0$

$$B_j(z) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda z f(\lambda) \delta(d\lambda) = 2\pi f(\varphi) \cos \varphi z, \quad j = 1, 2, 3.$$

Це означає, що граничні процеси  $\xi_j(z)$ ,  $z \in [0, H]$ , є випадковими гармонічними коливаннями, а саме:  $\xi_j(z) = \eta_j \cos \varphi z + \zeta_j \sin \varphi z$ , де  $\eta_j$ ,  $\zeta_j$  – незалежні  $N(0, 2\pi f(\varphi))$  випадкові величини.

Перевіримо виконання умови **R6** (див. (3.2.3)). Для  $j = 1, 2$  це очевидно. Нехай  $z_2 > z_1$ , тоді

$$|g_3(t + z_1, \theta) - g_3(t + z_2, \theta)| = |g'_3(t^*, \theta)| |z_1 - z_2|,$$

де  $t^* = t + z_1 + \nu(z_2 - z_1) \leq t + H$ ,  $\nu \in (0, 1)$ , – деяке число. За формулою (3.2.39)

$$\begin{aligned} |g'_3(t^*, \theta)|^2 &= | -A \sin \varphi t^* - A \varphi t^* \cos \varphi t^* + B \cos \varphi t^* - B \varphi t^* \sin \varphi t^* |^2 \leq \\ &\leq (A^2 + B^2)(1 + \varphi H + \varphi t)^2, \end{aligned}$$

і тому

$$d_{3T}^{-2}(\theta) \Psi_{3T}(z_1, z_2; \theta) \leq (1 + O(T^{-1}))^{-1} \left( \frac{2\varphi^2(A + B)^2}{A^2 + B^2} + O(T^{-1}) \right) |z_1 - z_2|^2.$$

Щодо умови **AN**, то асимптотичну нормальність нормованої ОНК  $d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$  для тригонометричної функції регресії отримано, наприклад, в роботах [67], [73].

### Висновки до розділу 3

У розділі доведено функціональну центральну граничну теорему у просторі неперервних функцій для нормованої залишкової корелограми, побудованої за спостереженнями випадкового процесу  $X$  у моделі регресії (2.1.1). Отриманий результат показує, що граничний м.н. вибірково неперервний гауссівський випадковий процес співпадає з граничним процесом у центральній граничній теоремі для стандартної корелограми випадкового шуму вказаної моделі регресії.

## Розділ 4

### АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ, ПОВ'ЯЗАНІ З КОРЕЛОГРАМНОЮ ОЦІНКОЮ

При вивченні асимптотичної поведінки статистичних оцінок особливий прикладний інтерес становить задача про знаходження асимптотики моментів цих оцінок, зокрема, перших двох моментів: математичного сподівання, а, фактично, зсуву та середнього квадрата відхилення, дисперсії у випадку скалярної оцінки, якою і є залишкова корелограма.

У підрозділі 4.1 отримано стохастичне асимптотичне розвинення нормованої залишкової корелограми, тобто її представлення у вигляді деякої суми за степенями  $T^{-1/2}$  зі стохастично малим залишковим членом. Коefіцієнти цієї суми при степенях  $T^{-1/2}$  є поліномами від інтегралів від випадкового шуму, зваженого похідними функції регресії.

У підрозділі 4.2 з використанням цього стохастичного асимптотичного розвинення отримано асимптотичні розвинення перших двох моментів залишкової корелограми.

#### 4.1 Стохастичне асимптотичне розвинення корелограмної оцінки

У книзі [69] для класичної нелінійної моделі регресії з незалежними однаково розподіленими випадковими похибками спостережень знайдено стохастичне асимптотичне розвинення нормованої залишкової суми квадратів як ОНК невідомої дисперсії похибки спостережень (теорема 26, стр. 173).

У цьому підрозділі отримано стохастичне асимптотичне розвинення нормованої оцінки  $B_T(z, \hat{\theta}_T)$ , яка фактично, узагальнює для моделі з корельованими спостереженнями усереднену залишкову суму квадратів класичного регресійного аналізу. Це розвинення є відправною точкою для вивчення тонких асимптотичних властивостей оцінки  $B_T(z, \hat{\theta}_T)$ , зокрема, для знаходження важливих у застосуваннях асимптотик моментів оцінки  $B_T(z, \hat{\theta}_T)$ .

Першою частиною доведення основного результату підрозділу є теорема про стохастичне асимптотичне розвинення самої ОНК  $\widehat{\theta}_T$ . Для подальших формулювань необхідно ввести ряд позначень та припущень.

Нехай  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$  – мультиіндекс,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_q!$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_q$ ,  $u^\alpha = u_1^{\alpha_1} \dots u_q^{\alpha_q}$ ,  $u = (u_1, \dots, u_q)$ . Для гладкої функції  $A(\tau)$  приймемо

$$A^{(\alpha)}(\tau) = \left( \partial^{|\alpha|} / \partial \tau_1^{\alpha_1} \dots \partial \tau_q^{\alpha_q} \right) A(\tau),$$

$$A_{i_1 \dots i_r}(\tau) = (\partial^r / \partial \tau_{i_1} \dots \partial \tau_{i_r}) A(\tau), \quad i_1, \dots, i_r = \overline{1, q}.$$

**R1”.** У функції  $g(t, \tau)$  існують і неперервні всі частинні похідні за змінними  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_q) \in \Theta_\gamma$  до порядку  $k \geq 2$  включно для кожного  $t \geq 0$ , причому функції  $g^{(\alpha)}(t, \tau)$ ,  $|\alpha| = \overline{1, k}$ , локально інтегровні з квадратом за  $t$  для довільного  $\tau \in \Theta^c$ , і  $\liminf_{T \rightarrow \infty} T^{-1} d_{iT}^2(\varepsilon) > 0$ ,  $\tau \in \Theta$ ,  $i = \overline{1, q}$ .

Позначимо

$$d_T^2(\alpha, \tau) = \int_0^T \left( g^{(\alpha)}(t, \tau) \right)^2 dt,$$

$$\Phi_T^{[\alpha]}(\tau_1, \tau_2) = \int_0^T \left( g^{(\alpha)}(t, \tau_1) - g^{(\alpha)}(t, \tau_2) \right)^2 dt,$$

$$\mathfrak{J}(\theta) = (\mathfrak{J}_{ij}(\theta))_{i,j=1}^q = \left( T^{-1} \int_0^T g_i(t, \theta) g_j(t, \theta) dt \right)_{i,j=1}^q,$$

$$\Lambda(\theta) = (\Lambda^{ij}(\theta))_{i,j=1}^q = \mathfrak{J}^{-1}(\theta).$$

Приймемо при  $z \in [0, H]$

$$b_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T [\varepsilon(t+z) g_{i_1 \dots i_r}(t, \theta) + \varepsilon(t) g_{i_1 \dots i_r}(t+z, \theta)] dt,$$

$$b_{i_1 \dots i_r}(\theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \varepsilon(t) g_{i_1 \dots i_r}(t, \theta) dt = \frac{1}{2} b_{i_1 \dots i_r}(0, \theta),$$

$$b^{(\alpha)}(\theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \varepsilon(t) g^{(\alpha)}(t, \theta) dt, \quad b_1^{(\alpha)}(z, \theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \varepsilon(t+z) g^{(\alpha)}(t, \theta) dt,$$

$$b_2^{(\alpha)}(z, \theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \varepsilon(t) g^{(\alpha)}(t+z, \theta) dt, \quad b^{(\alpha)}(z, \theta) = b_1^{(\alpha)}(z, \theta) + b_2^{(\alpha)}(z, \theta).$$

Нехай також

$$a_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) = \mathbf{E} \left( B_{T, i_1 \dots i_r}(z, \tau) \Big|_{\tau=\theta} \right),$$

$$\Pi^{(\beta)(\gamma)}(z, \theta) = T^{-1} \int_0^T g^{(\beta)}(t+z, \theta) g^{(\gamma)}(t, \theta) dt,$$

$$\Pi_{(i)(j)}(z, \theta) = T^{-1} \int_0^T g_i(t+z, \theta) g_j(t, \theta) dt,$$

$$\Pi_{(i)(jk)}(z, \theta) = T^{-1} \int_0^T g_i(t+z, \theta) g_{jk}(t, \theta) dt,$$

$$\Pi_{(ij)(k)}(z, \theta) = T^{-1} \int_0^T g_{ij}(t+z, \theta) g_k(t, \theta) dt.$$

Тоді

$$a_{ij}(z, \theta) = \Pi_{(i)(j)}(z, \theta) + \Pi_{(j)(i)}(z, \theta); \quad (4.1.1)$$

$$a_{ijk}(z, \theta) = \Pi_{(ij)(k)}(z, \theta) + \Pi_{(k)(ij)}(z, \theta) + \Pi_{(ik)(j)}(z, \theta) +$$

$$+ \Pi_{(j)(ik)}(z, \theta) + \Pi_{(jk)(i)}(z, \theta) + \Pi_{(i)(jk)}(z, \theta); \quad (4.1.2)$$

$$a_{ij}(\theta) = a_{ij}(0, \theta) = 2\Pi_{(i)(j)}(0, \theta) = 2\mathfrak{I}_{ij}(\theta);$$

$$a_{ijk}(\theta) = a_{ijk}(0, \theta) = 2 \left( \Pi_{(ij)(k)}(0, \theta) + \Pi_{(ik)(j)}(0, \theta) + \Pi_{(jk)(i)}(0, \theta) \right).$$

Літерами  $C_i, i \geq 1$ , будемо позначати додатні скінченні сталі. Присутність в будь-якому співвідношенні сталої  $C_i$  означає, що існує така стала  $C_i$ , що це співвідношення виконується.

Припустимо, що виконуються наступні умови.

$$\mathbf{R8.} \quad \sup_{\tau \in \Theta^c} T^{-\frac{1}{2}} d_T(\alpha; \tau) \leq C_1(\alpha), \quad |\alpha| = \overline{1, k}; \quad (4.1.3)$$

$$\sup_{\tau_1, \tau_2 \in \Theta^c} T^{-1} \Phi_T^{[\alpha]}(\tau_1, \tau_2) \|\tau_1 - \tau_2\|^{-2} \leq C_2(\alpha), \quad |\alpha| = k. \quad (4.1.4)$$

Зауважимо, що умова (4.1.4) для мультиіндексів  $\alpha$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq k - 1$ , випливає із співвідношень (4.1.3), що виконуються для  $\alpha + e_i$ ,  $i = \overline{1, q}$ , де  $e_i \in \mathbb{R}^q$  –  $i$ -й одиничний орт, тобто вектор  $e_i$  має  $i$ -ту координату 1, а решту – нулі [69].

**R9.** Для деякого  $\lambda_0 > 0$  та  $T > T_0$

$$\lambda_{\min}(\mathfrak{J}(\theta)) \geq \lambda_0.$$

Нижче ми вважаємо коректним диференціювання за змінними  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_q)$  під знаком інтеграла  $B_T(z, \tau)$ . Найпростішою достатньою умовою для цього, яка випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність, є неперервність відповідних частинних похідних за сукупністю змінних  $(t, \tau)$ .

Припустимо що виконано умови **N1**, **R1''**, **R8**, **R9**, і числова функція  $\gamma_T$ ,  $T > 0$ , така що  $\gamma_T \rightarrow \infty$ ,  $\gamma_T T^{-k/2} \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow \infty$ . Тоді, як встановлено при доведенні теореми 3.3.1 монографії [71], справедливе представлення

$$T^{1/2}(\widehat{\theta}_T - \theta) = \sum_{\nu=0}^{k-2} h_\nu(\theta) T^{-\nu/2} + \xi_{k-1}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}}, \quad (4.1.5)$$

де  $h_\nu(\theta) = (h_{\nu i}(\theta))_{i=1}^q$ ,  $\nu = \overline{0, k-2}$ , є однорідними векторними поліномами степеня  $\nu + 1$  від випадкових величин  $b^{(\alpha)}(\theta)$ ,  $|\alpha| = \overline{1, \nu + 1}$ , з рівномірно за  $T$  обмеженими коефіцієнтами, а випадковий вектор  $\xi_{k-1}(\theta)$  у залишковому члені формули (4.1.5) має властивість

$$\begin{aligned} P\{\|\xi_{k-1}(\theta)\| \geq C_3 \gamma_T\} &\leq P\{\|\widehat{\theta}_T - \theta\| \geq \varkappa_0\} + \\ &+ P\{s_T^*(0) - B(0) \geq 1\} + \sum_{|\alpha|=1}^k P\{|b^{(\alpha)}(\theta)| \geq \varkappa \gamma_T^{1/k}\}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

В нерівності (4.1.6)  $\varkappa_0 > 0$  – деяке фіксоване число,  $\varkappa > 0$  – довільне

число, а  $C_3 = C_3(\varkappa)$ .

За припущенням **R1''** існують такі числа  $\varkappa_i > 0$ , що для  $T > T_0$   $T^{-1/2}d_{iT}(\theta) \geq \varkappa_i$ ,  $i = \overline{1, q}$ , тобто  $T^{1/2}d_{iT}^{-1}(\theta) \leq (\min_{1 \leq i \leq q} \varkappa_i)^{-1} = \varkappa_*^{-1}$ . Тоді, якщо додати до перелічених умов ще умову **R4**, то є вірним висновок теореми 2.2.2, і ми отримуємо з врахуванням (2.2.20), (2.2.21) для  $T > T_0$

$$\begin{aligned} P\{\|\widehat{\theta}_T - \theta\| \geq \varkappa_0\} &= P\{\|T^{1/2}d_T^{-1}(\theta)(d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T - \theta))\| \geq \varkappa_0 T^{1/2}\} \leq \\ &\leq P\{\|d_T(\widehat{\theta}_T - \theta)\| \geq \varkappa_0 \varkappa_* T^{1/2}\} \leq B^* \exp\{-b \varkappa_0^2 \varkappa_*^2 T\}. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

З іншого боку,  $Ds_T^*(0) = 2T^{-1}b_T^2$ ,

$$b_T^2 = T^{-1} \int_0^T \int_0^T B^2(t-s) dt ds \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \|B\|_2^2.$$

В нерівності (2.4.17) при  $H = 0$  візьмемо  $x = T^{1/2}/\sqrt{2}b_T$ , тоді

$$P\{s_T^*(0) \geq B(0) + 1\} \leq \left(1 + \frac{T^{1/2}}{b_T}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{T^{1/2}}{2b_T}\right\}. \quad (4.1.8)$$

Оцінимо суму в правій частині нерівності (4.1.6), поклавши  $\gamma_T = \ln^{k/2} T$ . За нерівностями (2.2.5) та (4.1.3)

$$\mathbb{E}(b^{(\alpha)}(\theta))^2 \leq 2\pi f_0 C_1^2(\alpha), \quad |\alpha| = \overline{1, k}. \quad (4.1.9)$$

Нехай  $C_1^* = \max_{|\alpha|=\overline{1, k}} C_1(\alpha)$ , і для довільного  $m > 0$   $\varkappa = (2\pi f_0 m)^{1/2} C_1^*$ . Тоді з (4.1.9) та нерівності

$$\int_{\delta}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \leq \delta^{-1} e^{-\delta^2/2}, \quad \delta > 0, \quad (4.1.10)$$

випливає, що

$$P\{|b^{(\alpha)}(\theta)| \geq \varkappa \ln^{1/2} T\} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{m^{1/2} \ln^{1/2} T}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{\pi m}\right)^{1/2} (\ln T)^{-1/2} T^{-\frac{m}{2}}. \quad (4.1.11)$$

Наведені зауваження дозволяють сформулювати наступне уточнення теореми 3.3.2 [71].

**Теорема 4.1.1.** *За умов **N1**, **R1''**, **R4**, **R8** та **R9** для будь-якого  $m > 0$  вірне стохастичне асимптотичне розвинення (4.1.5) нормованої ОНК  $\widehat{\theta}_T$ , причому*

$$P \left\{ \|\xi_{k-1}(\theta)\| \geq C_4(k, m) \ln^{\frac{k}{2}} T \right\} = O \left( (\ln T)^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{m}{2}} \right). \quad (4.1.12)$$

Точний вигляд поліномів  $h_\nu(\theta)$  може бути отриманим з використанням методу, запропонованого в доведенні теореми 3.3.1 [71]. Для запису перших поліномів стохастичного асимптотичного розвинення приймемо тензорну угоду, а саме: якщо в добутку двох або більшого числа множників деякий індекс зустрічається двічі, це означає підсумовування за цим індексом від 1 до  $q$ . Тоді маємо, пропускаючи в запису формул залежність від  $\theta$ ,

$$h_0 = (\Lambda^{ii_1} b_{i_1})_{i_1=1}^q, \quad (4.1.13)$$

$$h_1 = \left( \Lambda^{ii_1} \Lambda^{i_2 i_3} \left( b_{i_1 i_2} b_{i_3} - \frac{1}{4} \Lambda^{i_4 i_5} a_{i_1 i_2 i_4} b_{i_3} b_{i_5} \right) \right)_{i_1=1}^q. \quad (4.1.14)$$

Нехай виконуються умови теореми 4.1.1. Повернемося знов до представлення (2.4.3)–(2.4.6) процесу  $T^{1/2} \left( B_T(z, \widehat{\theta}_T) - B(z) \right)$ ,  $z \in [0, H]$ , і розглянемо спочатку  $I_{1T}$ . Зробимо заміну змінних  $u = T^{\frac{1}{2}} \left( \widehat{\theta}_T - \theta \right)$ , тобто

$$\widehat{\theta}_T = \theta + T^{-\frac{1}{2}} u \equiv \delta(u),$$

і запишемо розвинення у ряд Тейлора за  $u = (u_1, \dots, u_q)$ :

$$\begin{aligned} T^{-\frac{1}{2}} I_{1T} &= T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T (g(t+z, \delta(u)) - g(t+z, \theta)) (g(t, \delta(u)) - g(t, \theta)) dt = \\ &= T^{-\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha|=2}^{k-1} \frac{1}{\alpha!} \left( \int_0^T [(g(t+z, \delta(u)) - g(t+z, \theta)) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (g(t, \delta(u)) - g(t, \theta))^{(\alpha)} \Big|_{u=0} dt u^\alpha + \\
& + T^{-\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} \left( \int_0^T [(g(t+z, \delta(u)) - g(t+z, \theta)) \times \right. \\
& \times (g(t, \delta(u)) - g(t, \theta))^{(\alpha)} \Big|_{u=u^*} dt - \int_0^T [(g(t+z, \delta(u)) - g(t+z, \theta)) \times \\
& \left. (g(t, \delta(u)) - g(t, \theta))^{(\alpha)} \Big|_{u=0} dt] u^\alpha, \quad \|u^*\| < \|u\|. \tag{4.1.15}
\end{aligned}$$

При  $|\alpha| \geq 2$  маємо

$$\begin{aligned}
& \int_0^T [(g(t+z, \delta(u)) - g(t+z, \theta)) (g(t, \delta(u)) - g(t, \theta))]^{(\alpha)} dt = \\
& = T^{-\frac{|\alpha|}{2}} \left[ \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta, \gamma) \int_0^T g^{(\beta)}(t+z, \delta(u)) g^{(\gamma)}(t, \delta(u)) dt + \right. \\
& \quad + \int_0^T g^{(\alpha)}(t+z, \delta(u)) (g(t, \delta(u)) - g(t, \theta)) dt + \\
& \quad \left. + \int_0^T (g(t+z, \delta(u)) - g(t+z, \theta)) g^{(\alpha)}(t, \delta(u)) dt \right],
\end{aligned}$$

де мультиіндекси  $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$  і  $C(\beta, \gamma)$  – константи. Завдяки цьому, залишковий член в розвиненні (4.1.15) можна записати у вигляді

$$R_{k-1}^{(1)}(\theta) = T^{-\frac{k}{2}} \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} S(\alpha) u^\alpha, \tag{4.1.16}$$

$$\begin{aligned}
S(\alpha) = & \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta, \gamma) \int_0^T \left[ g^{(\beta)}(t+z, \delta(u^*)) \times \right. \\
& \times g^{(\gamma)}(t, \delta(u^*)) - g^{(\beta)}(t+z, \theta) g^{(\gamma)}(t, \theta) \Big] dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T g^{(\alpha)}(t+z, \delta(u^*)) (g(t, \delta(u^*)) - g(t, \theta)) dt + \\
& + \int_0^T g^{(\alpha)}(t, \delta(u^*)) (g(t+z, \delta(u^*)) - g(t+z, \theta)) dt.
\end{aligned}$$

За умови (4.1.3)

$$\begin{aligned}
& T^{-\frac{1}{2}} \left| \int_0^T g^{(\alpha)}(t+z, \delta(u^*)) (g(t, \delta(u^*)) - g(t, \theta)) dt \right| \leq \\
& \leq T^{-\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \left( g^{(\alpha)}(t+z, \delta(u^*)) \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \varphi_T^{\frac{1}{2}}(\delta(u^*), \theta) \leq C_5 \|u\|. \quad (4.1.17)
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$T^{-\frac{1}{2}} \left| \int_0^T g^{(\alpha)}(t, \delta(u^*)) (g(t+z, \delta(u^*)) - g(t+z, \theta)) dt \right| \leq C_6 \|u\|, \quad (4.1.18)$$

$$\begin{aligned}
& T^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta, \gamma) \left( \Pi^{(\beta)(\gamma)}(z, \delta(u^*)) - \Pi^{(\beta)(\gamma)}(z, \theta) \right) \right| \leq \\
& \leq T^{-\frac{1}{2}} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta, \gamma) \left[ \left| \int_0^T \left( g^{(\beta)}(t+z, \delta(u^*)) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - g^{(\beta)}(t+z, \theta) \right) g^{(\gamma)}(t, \delta(u^*)) dt \right| + \\
& \left. + \left| \int_0^T g^{(\beta)}(t+z, \delta(u^*)) \left( g^{(\gamma)}(t, \delta(u^*)) - g^{(\gamma)}(t, \theta) \right) dt \right| \right] \leq C_7 \|u\|. \quad (4.1.19)
\end{aligned}$$

Оскільки  $|u^\alpha| \leq \|u\|^{|\alpha|}$ , із (4.1.16)–(4.1.19) одержуємо

$$\left| R_{k-1}^{(1)}(\theta) \right| \leq C_8 T^{-\frac{k-1}{2}} \|u\|^k. \quad (4.1.20)$$

**Лема 4.1.1.** *За умов теореми 4.1.1 для будь-якого  $m > 0$*

$$P \left\{ T^{\frac{1}{2}} \|\widehat{\theta}_T - \theta\| \geq C_9(m) \ln^{\frac{1}{2}} T \right\} = O \left( (\ln T)^{-1/2} T^{-\frac{m}{2}} \right). \quad (4.1.21)$$

*Доведення.* Застосуємо співвідношення (4.1.12) при  $k = 2$ :

$$\begin{aligned} & P \left\{ T^{\frac{1}{2}} \|\widehat{\theta}_T - \theta\| \geq C_9(m) \ln^{\frac{1}{2}} T \right\} \leq \\ & P \left\{ \|T^{\frac{1}{2}} (\widehat{\theta}_T - \theta) - h_0(\theta)\| + \|h_0(\theta)\| \geq C_9(m) \ln^{\frac{1}{2}} T \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \|T^{\frac{1}{2}} (\widehat{\theta}_T - \theta) - h_0(\theta)\| \geq C_4(2, m) T^{-\frac{1}{2}} \ln T \right\} + \\ & + P \left\{ \|h_0(\theta)\| \geq C_9(m) \ln^{\frac{1}{2}} T - C_4(2, m) T^{-\frac{1}{2}} \ln T \right\} = P_1 + P_2. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

За (4.1.12)  $P_1 = O \left( (\ln T)^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{m}{2}} \right)$ . З нерівностей

$$\|h_0(\theta)\| \leq \lambda_{\max}(\Lambda) \|B(\theta)\| \leq \lambda_0^{-1} \|B(\theta)\|,$$

$$B(\theta) = (b_1(\theta), \dots, b_q(\theta)),$$

отримуємо

$$P_2 \leq P \left\{ \|B(\theta)\| \geq \lambda_0 C'_9(m) \ln^{\frac{1}{2}} T \right\} \leq \sum_{i=1}^q P \left\{ |b_i(\theta)| \geq \lambda_0 q^{-\frac{1}{2}} C'_9(m) \ln^{\frac{1}{2}} T \right\},$$

де  $C'_9(m) < C_9(m)$ . Оскільки  $\mathbf{E} b_i^2(\theta) \leq 2\pi f_0 C_1^2(e_i)$ ,  $i = \overline{1, q}$ , то аналогічно (4.1.11) з нерівності (4.1.10) для  $C'_9(m) = (2\pi f_0 q m)^{1/2} C_1^* \lambda_0^{-1}$  маємо  $P_2 = O \left( (\ln T)^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{m}{2}} \right)$ .  $\square$

З (4.1.20), (4.1.21) при  $u = T^{\frac{1}{2}} (\widehat{\theta}_T - \theta)$  отримуємо

$$R_{k-1}^{(1)}(\theta) = T^{-\frac{k-1}{2}} \eta_{k-1}^{(1)}(\theta),$$

причому

$$P \left\{ |\eta_{k-1}^{(1)}(\theta)| \geq C_{10}(k, m) \ln^{\frac{k}{2}} T \right\} = O \left( (\ln T)^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{m}{2}} \right). \quad (4.1.23)$$

Отже,

$$T^{-\frac{1}{2}}I_{1T} = \sum_{\nu=1}^{k-2} \sum_{|\alpha|=\nu+1} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta, \gamma) \Pi^{(\beta)(\gamma)}(z, \theta) \times \\ \times \left( T^{1/2} \left( \widehat{\theta}_T - \theta \right) \right)^\alpha T^{-\frac{\nu}{2}} + \eta_{k-1}^{(1)}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}}.$$

Маємо далі

$$T^{-\frac{1}{2}}I_{2T} = \sum_{|\alpha|=1}^{k-2} \frac{1}{\alpha!} b_1^{(\alpha)}(z, \theta) u^\alpha T^{-\frac{|\alpha|}{2}} + R_{k-1}^{(2)}(\theta) + R_{k-1}^{(3)}(\theta), \quad (4.1.24)$$

де

$$R_{k-1}^{(2)}(\theta) = \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} b_1^{(\alpha)}(z, \theta) u^\alpha T^{-\frac{k-1}{2}}, \\ R_{k-1}^{(3)}(\theta) = \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} \left( b_1^{(\alpha)}(z, \delta(u^*)) - b_1^{(\alpha)}(z, \theta) \right) u^\alpha T^{-\frac{k-1}{2}}.$$

В подальших міркуваннях ми не будемо вказувати залежність констант від  $k$  та  $m$ . При фіксованому  $\alpha$ ,  $|\alpha| = k - 1$  можна обрати константу  $C_{11} = C_{12}(\alpha)C_9^{k-1}$  таку, що за лемою 4.1.1

$$P \left\{ \left| b_1^{(\alpha)}(z, \theta) \right| \cdot \|u\|^{k-1} \geq C_{11} \ln^{\frac{k}{2}} T \right\} \leq P \left\{ \left| b_1^{(\alpha)}(z, \theta) \right| \geq C_{12}(\alpha) \ln^{\frac{1}{2}} T \right\} + \\ + P \left\{ \|u\| \geq C_9 \ln^{\frac{1}{2}} T \right\} = O \left( (\ln T)^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{m}{2}} \right).$$

Це означає, що

$$R_{k-1}^{(2)}(\theta) = \eta_{k-1}^{(2)}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}}, \quad (4.1.25)$$

де випадкова величина  $\eta_{k-1}^{(2)}(\theta)$  має властивість (4.1.23) з константою  $C_{13}$ .

З іншого боку,

$$\left| \left( b_1^{(\alpha)}(z, \delta(u^*)) - b_1^{(\alpha)}(z, \theta) \right) \right| \leq (s_T^*(z))^{1/2} \left( \Phi_T^{[\alpha]}(\delta(u^*), \theta) \right)^{1/2}, \quad (4.1.26)$$

де  $s_T^*(z)$  введено у (2.4.11). Із (4.1.3) випливає, що для фіксованого  $\alpha$ ,  $|\alpha| =$

$k - 1$ ,

$$\left( \Phi_T^{[\alpha]}(\theta + \delta(u^*), \theta) \right)^{1/2} \leq C_{14} \|u\|. \quad (4.1.27)$$

Розглянемо сепарабельний випадковий процес  $\varepsilon_z(t) = \varepsilon(t + z)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тоді величина  $s_T^*(z)$  є значенням корелограми процесу  $\varepsilon_z$  в нулі, і ми можемо застосувати до неї першу з нерівностей (3.3) стор. 205 книги [5], якою ми користувались у підрозділі 2.4 і вище у цьому підрозділі:

$$P \left\{ s_T^*(z) - B(0) > \sqrt{\mathbf{D}s_T^*(z)x} \right\} \leq K(x),$$

$$K(x) = \left(1 + \sqrt{2}x\right)^{1/2} \exp \left\{ -x/\sqrt{2} \right\}, \quad x > 0.$$

За формулою Ісерліса  $\mathbf{D}s_T^*(z) = 2T^{-1}b_T^2$ . Візьмемо  $x = \frac{T^{1/2}}{\sqrt{2}b_T}$ , тоді для будь-якого  $m > 0$  (порівняйте з (4.1.8))

$$P \left\{ s_T^*(z) > B(0) + 1 \right\} \leq \left(1 + \frac{T^{1/2}}{b_T}\right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{T^{1/2}}{2b_T} \right\} = o(T^{-\frac{m}{2}}). \quad (4.1.28)$$

Покладемо

$$\eta_{k-1}^{(3)}(\theta) = \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} \left( T^{-1/2} \int_0^T \varepsilon(t+z) \left( g^{(\alpha)}(t, \delta(u^*)) - g^{(\alpha)}(t, \theta) \right) dt \right) u^\alpha.$$

Із (4.1.26), (4.1.27) випливає, що

$$|\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)| \leq C_{15} (s_T^*(z))^{1/2} \|u\|^k.$$

Маємо

$$\begin{aligned} P \left\{ |\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)| \geq C_{16} \ln^{\frac{k}{2}} T \right\} &= P \left\{ |\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)| \geq C_{16} \ln^{\frac{k}{2}} T, \quad s_T^*(z) \leq B(0) + 1 \right\} + \\ &+ P \left\{ |\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)| \geq C_{16} \ln^{\frac{k}{2}} T, \quad s_T^*(z) > B(0) + 1 \right\} = P_3 + P_4. \end{aligned}$$

За (4.1.28)  $P_4 = o(T^{-\frac{m}{2}})$ . Далі обираємо константу  $C_{16}$  таку, що

$$P_3 \leq P \left\{ C_{15}(B(0) + 1)^{1/2} \|u\|^k \geq C_{16} \ln^{\frac{k}{2}} T \right\} = O \left( (\ln T)^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{m}{2}} \right),$$

тобто

$$R_{k-1}^{(3)}(\theta) = \eta_{k-1}^{(3)}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}}, \quad (4.1.29)$$

де випадкова величина  $\eta_{k-1}^{(3)}(\theta)$  має властивість (4.1.23) з константою  $C_{16}$ .

Із (4.1.24), (4.1.25), (4.1.29) випливає, що

$$T^{-1/2} I_{2T} = \sum_{|\alpha|=1}^{k-2} \frac{1}{\alpha!} b_1^{(\alpha)}(z, \theta) \left( T^{1/2} (\widehat{\theta}_T - \theta) \right)^\alpha T^{-\frac{|\alpha|}{2}} + \eta_{k-1}^{(4)}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}},$$

причому випадкова величина  $\eta_{k-1}^{(4)}$  задовольняє (4.1.23) зі сталою  $C_{17}$ .

Так само можна довести, що

$$T^{-1/2} I_{3T} = \sum_{|\alpha|=1}^{k-2} \frac{1}{\alpha!} b_2^{(\alpha)}(z, \theta) \left( T^{1/2} (\widehat{\theta}_T - \theta) \right)^\alpha T^{-\frac{|\alpha|}{2}} + \eta_{k-1}^{(5)}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}},$$

де випадкова величина  $\eta_{k-1}^{(5)}$  має властивість (4.1.23) з константою  $C_{18}$ .

Ми довели таке твердження.

**Лема 4.1.2.** *За умов теореми 4.1.1*

$$\begin{aligned} T^{1/2} \left( B_T(z, \widehat{\theta}_T) - B(z) \right) &= T^{1/2} (B_T(z) - B(z)) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{k-2} \left( \sum_{|\alpha|=\nu+1} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta, \gamma) \Pi^{(\beta)(\gamma)}(z, \theta) \left( T^{1/2} (\widehat{\theta}_T - \theta) \right)^\alpha - \right. \\ &\left. - \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{1}{\alpha!} b^{(\alpha)}(z, \theta) \left( T^{1/2} (\widehat{\theta}_T - \theta) \right)^\alpha \right) T^{-\nu/2} + \eta_{k-1}^{(6)}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}}, \quad (4.1.30) \end{aligned}$$

де випадкова величина  $\eta_{k-1}^{(6)}(\theta)$  задовольняє співвідношення (4.1.23) зі сталою  $C_{19}$ .

Для формулювання наступної леми введемо деякі позначення. Нехай  $r = (r_1, \dots, r_q)$  – мультиіндекс,  $|r| = s \geq 1$ . Розглянемо множину мультиін-

дексів

$$a_{ls} = \left( (i_0, \dots, i_l) : \sum_{\nu=0}^l i_\nu = s; \sum_{\nu=0}^l \nu i_\nu = l \right)$$

та сукупність  $(l+1) \times q$  матриць з невід'ємними цілими елементами

$$A_{ls}(r) = \left\{ (d_{\nu j}) : \sum_{j=1}^q d_{\nu j} = i_\nu, \nu = \overline{0, l}, (i_0, \dots, i_l) \in a_{ls}; \sum_{\nu=0}^l d_{\nu j} = r_j, j = \overline{1, q} \right\}.$$

Для  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^q$  позначимо

$$\langle h_\nu(\theta), \lambda \rangle = h_\nu \langle \lambda \rangle, \quad \nu = \overline{0, k-2},$$

$$\langle \xi_{k-1}(\theta), \lambda \rangle = \xi_{k-1} \langle \lambda \rangle, \quad \langle T^{1/2}(\widehat{\theta}_T - \theta), \lambda \rangle = \theta_T \langle \lambda \rangle.$$

**Лема 4.1.3.** *Нехай виконано умови теореми 4.1.1 і  $s$  – натуральне число. Тоді*

$$(i) \quad \theta_T^s \langle \lambda \rangle = \sum_{l=0}^{k-2} \tilde{h}_{ls} \langle \lambda \rangle T^{-\frac{l}{2}} + \tilde{h}_{k-1,s} \langle \lambda \rangle T^{-\frac{k-1}{2}},$$

$$\tilde{h}_{ls} \langle \lambda \rangle = \sum_{a_{ls}} s! \prod_{\nu=0}^l \frac{1}{i_\nu!} h_\nu^{i_\nu} \langle \lambda \rangle, \quad l = \overline{0, k-2},$$

де  $\sum_{a_{ls}}$  є сумою за множиною мультиіндексів  $a_{ls}$ ;

(ii) коефіцієнти  $\tilde{h}_{l,r}(\theta)$ ,  $|r| = s$ , полінома  $\tilde{h}_{ls} \langle \lambda \rangle$  при степені  $\lambda^r = \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_q^{r_q}$  мають вигляд

$$\tilde{h}_{l,r}(\theta) = \sum_{A_{ls}(r)} s! \prod_{\nu=0}^l \prod_{j=1}^q \frac{1}{d_{\nu j}!} h_{\nu j}^{d_{\nu j}}(\theta), \quad l = \overline{0, k-2},$$

де  $\sum_{A_{ls}(r)}$  є сумою за множиною матричних індексів  $A_{ls}(r)$ .

(iii) коефіцієнти  $\tilde{h}_{k-1,r}(\theta)$ ,  $|r| = s$ , полінома  $\tilde{h}_{k-1,s} \langle \lambda \rangle$  мають наступну властивість:

$$P \left\{ \left| \tilde{h}_{k-1,r}(\theta) \right| \geq C_{20}(r) \ln^{(k+s-1)/2} T \right\} = O \left( (\ln T)^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{m}{2}} \right).$$

*Доведення.* Доведення (i) очевидно. Для доведення (iii) зауважимо, що коефіцієнти  $\tilde{h}_{k-1,r}(\theta)$ ,  $|r| = s$ , полінома  $\tilde{h}_{k-1,s}\langle\lambda\rangle$  можуть бути сумами добутків трьох типів.

1) Добуток  $\Pi_1$  містить  $s - 1$  множників  $b_i(\theta)$  та  $\xi_{k-1,j}(\theta)$ . В цьому випадку

$$P \left\{ |\Pi_1| \geq C_{21} \ln^{(k+s-1)/2} T \right\} = O \left( (\ln T)^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{m}{2}} \right). \quad (4.1.31)$$

2) Добуток  $\Pi_2$  містить степені координат  $h_{\nu i}^{i_\nu}(\theta)$  векторів  $h_\nu(\theta)$ ,  $\nu = \overline{0, k-2}$ , причому

$$\sum_{\nu=0}^{k-2} i_\nu = s, \quad \sum_{\nu=0}^{k-2} \nu i_\nu = k - 1.$$

Оскільки  $h_{\nu i}(\theta)$  є однорідними поліномами степеня  $\nu + 1$  від величин  $b^{(\alpha)}(\theta)$ , то  $\Pi_2$  складається з суми добутків величин  $b^{(\alpha)}(\theta)$  степеня

$$\sum_{\nu=0}^{k-2} (\nu + 1) i_\nu = k + s - 1.$$

Таким чином,  $\Pi_2$  має властивість (4.1.31) з константою  $C_{22}$ .

3) Добуток  $\Pi_3$  містить величини  $b^{(\alpha)}(\theta)$ ,  $\xi_{k-1,j}(\theta)$  у невід'ємних степенях і додатний степінь  $T^{-1/2}$ . І в цьому випадку  $\Pi_3$  має властивість (4.1.31) з константою  $C_{23}$ .

Твердження (ii) випливає з рівності

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{ls}\langle\lambda\rangle &= \sum_{a_{ls}} s! \prod_{\nu=0}^l \frac{1}{i_\nu!} \sum_{d_{\nu 1} + \dots + d_{\nu q} = i_\nu} i_\nu! \prod_{j=1}^q \frac{1}{d_{\nu j}!} (h_\nu^j)^{d_{\nu j}} \lambda_j^{d_{\nu j}} = \\ &= \sum_{a_{ls}} \sum_{B_l} s! \prod_{\nu=0}^l \prod_{j=1}^q \frac{1}{d_{\nu j}!} h_{\nu j}^{d_{\nu j}} \lambda_j^{d_{\nu j}}, \end{aligned}$$

де  $\sum_{B_l}$  — сума за множиною матриць

$$B_l = \left\{ (d_{\nu j}) : \sum_{j=1}^q d_{\nu j} = i_\nu, \quad \nu = \overline{0, l} \right\}. \quad \square$$

Підставимо в формулу (4.1.30) замість величин  $\left(T^{1/2}(\widehat{\theta} - \theta)\right)^\alpha$  їх стохастичні асимптотичні розвинення, отримані в лемі 4.1.3. Для цього візьмемо  $r = \alpha$  і  $s = \nu, \nu + 1$ . Тоді для  $|\alpha| = \nu$

$$\left(T^{1/2}(\widehat{\theta}_T - \theta)\right)^\alpha = \sum_{l=0}^{k-2} \nu! \sum_{A_{l\nu}} \prod_{\mu=0}^l \prod_{j=1}^q \frac{1}{d_{\mu j}!} h_{\mu j}^{d_{\mu j}} T^{-\frac{l}{2}} + \tilde{h}_{k-1,\alpha}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}}. \quad (4.1.32)$$

Для  $s = \nu + 1$  отримуємо аналогічний вираз.

Підставимо у стохастичне асимптотичне розвинення (4.1.30) вирази (4.1.33). Тоді після очевидних перетворень приходимо до наступного результату.

**Лема 4.1.4.** *В умовах теореми 4.1.1 справедливе стохастичне асимптотичне розвинення*

$$\begin{aligned} T^{1/2} \left( B_T(z, \widehat{\theta}_T) - B(z) \right) &= T^{1/2} (B_T(z) - B(z)) + \\ &+ \sum_{\rho=1}^{k-2} \left( \sum_{\substack{l+\nu=\rho, \\ 0 \leq l \leq k-2, \\ 1 \leq \nu \leq k-2}} \sum_{|\alpha|=\nu+1} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C(\beta, \gamma) \Pi^{(\beta)(\gamma)}(z, \theta) \times \right. \\ &\quad \times (\nu + 1)! \sum_{A_{l,\nu+1}(\alpha)} \prod_{\mu=0}^l \prod_{j=1}^q \frac{1}{d_{\mu j}!} h_{\mu j}^{d_{\mu j}}(\theta) - \\ &\quad \left. - \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{1}{\alpha!} b^{(\alpha)}(z, \theta) \nu! \sum_{A_{l\nu}(\alpha)} \prod_{\mu=0}^l \prod_{j=1}^q h_{\mu j}^{d_{\mu j}}(\theta) \right) T^{-\rho/2} + \zeta_{k-1}(\theta) T^{-(k-1)/2}, \quad (4.1.33) \end{aligned}$$

де випадкова величина  $\zeta_{k-1}(\theta)$  має властивість (4.1.23) зі сталою  $C_{24}(k, m)$ .

Стохастичне асимптотичне розвинення (4.1.33) визначає порядок спадання залишкового члена, але він занадто складний, щоб ним користуватись. Зосередимо зусилля на наданні формулі (4.1.33) прийняттого вигляду. Позначимо

$$P_0(z, \theta) = P_0(z) = T^{1/2} (B_T(z) - B(z)) =$$

$$= T^{-1/2} \int_0^T (\varepsilon(t+z)\varepsilon(t) - B(z)) dt. \quad (4.1.34)$$

Припускаючи, що функції  $g(t, \tau)$  нескінченно диференційовні за  $\tau$  і знов використовуючи тензорну угоду, формально знаходимо

$$T^{1/2} \left( B_T \left( z, \widehat{\theta}_T \right) - B(z) \right) = P_0(z, \theta) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left( a_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) T^{-(r-1)/2} - b_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) T^{-r/2} \right) u_{i_1} \dots u_{i_r}. \quad (4.1.35)$$

Підставимо в (4.1.35) формальне розвинення

$$u_{i_n} = T^{1/2} \left( \widehat{\theta}_{i_n T} - \theta_{i_n T} \right) = \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} h_{\alpha_n, i_n}(\theta) T^{-\alpha_n/2}, \quad n = \overline{1, r}.$$

Тоді знаходимо

$$T^{1/2} \left( B_T \left( z, \widehat{\theta}_T \right) - B(z) \right) = P_0(z, \theta) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu+1} \frac{1}{r!} a_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) \times \right. \\ \left. \times h_{\alpha_1, i_1}(\theta) \dots h_{\alpha_r, i_r}(\theta) - \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu} \frac{1}{r!} b_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) h_{\alpha_1, i_1}(\theta) \dots h_{\alpha_r, i_r}(\theta) \right) T^{-\nu/2}.$$

Підсумовування в  $\sum_{r+|\alpha(r)|=\nu}$  ведеться за  $r$ -вимірними мультиіндексами  $\alpha(r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ .

Для  $\nu \geq 1$  позначимо

$$A_\nu(z, \theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu+1} \frac{1}{r!} a_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) h_{\alpha_1, i_1}(\theta) \dots h_{\alpha_r, i_r}(\theta), \quad (4.1.36)$$

$$B_\nu(z, \theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu} \frac{1}{r!} b_{i_1 \dots i_r}(z, \theta) h_{\alpha_1, i_1}(\theta) \dots h_{\alpha_r, i_r}(\theta), \quad (4.1.37)$$

$$P_\nu(z, \theta) = A_\nu(z, \theta) - B_\nu(z, \theta). \quad (4.1.38)$$

**Теорема 4.1.2.** *За умов теореми 4.1.1*

$$T^{1/2} \left( B_T \left( z, \widehat{\theta}_T \right) - B(z) \right) = \sum_{\nu=0}^{k-2} P_\nu(z, \theta) T^{-\nu/2} + \zeta_{k-1}(\theta) T^{-(k-1)/2}, \quad (4.1.39)$$

де поліноми  $P_\nu(z, \theta)$  визначено співвідношеннями (4.1.34), (4.1.36)–(4.1.38), а  $\zeta_{k-1}(\theta)$  міститься в залишковому члені формули (4.1.33).

Очевидно, теорема 4.1.2 є зручним переформулюванням леми 4.1.4.

**Наслідок 4.1.1.** *За умов теореми 4.1.1 при  $k = 4$*

$$T^{1/2} \left( B_T \left( z, \hat{\theta}_T \right) - B(z) \right) = \sum_{\nu=0}^2 P_\nu(z, \theta) T^{-\nu/2} + \zeta_3(\theta) T^{-3/2}, \quad (4.1.40)$$

$$P \left\{ |\zeta_3(\theta)| \geq C_{24}(4, m) \ln^2 T \right\} = O \left( (\ln T)^{-1/2} T^{-m/2} \right). \quad (4.1.41)$$

Формули (4.1.36) – (4.1.38) дозволяють знайти в явному вигляді, принаймні, поліноми стохастичного асимптотичного розвинення (4.1.40). В наступних формулах не будемо вказувати залежність від  $\theta$ . Маємо при  $\nu = 1$

$$A_1(z) = \frac{1}{2!} a_{i_1 i_2}(z) h_{0i_1} h_{0i_2} = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) b_{j_1} b_{j_2},$$

$$B_1(z) = b_{i_1}(z) h_{0i_1} = \Lambda^{i_1 j_1} b_{i_1}(z) b_{j_1},$$

$$P_1(z) = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) b_{j_1} b_{j_2} - \Lambda^{i_1 j_1} b_{i_1}(z) b_{j_1}. \quad (4.1.42)$$

Нехай тепер  $\nu = 2$ . Знайдемо  $A_2(z)$ . При  $r = 2$  доданок суми (4.1.36), з урахуванням (4.1.14), має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} a_{i_1 i_2}(z) (h_{1i_1} h_{0i_2} + h_{0i_1} h_{1i_2}) &= a_{i_1 i_2}(z) h_{1i_1} h_{0i_2} = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{j_3 j_4} a_{i_1 i_2}(z) \times \\ &\times b_{j_1} b_{j_2 j_3} b_{j_4} - \frac{1}{4} \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{j_3 j_4} \Lambda^{j_5 j_6} a_{i_1 i_2}(z) a_{j_2 j_3 j_5} b_{j_1} b_{j_4} b_{j_6}. \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

При  $r = 3$  і  $\alpha(3) = (0, 0, 0)$  доданок суми (4.1.36), з огляду на (4.1.2), дорівнює

$$\frac{1}{3!} a_{i_1 i_2 i_3}(z) h_{0i_1} h_{0i_2} h_{0i_3} = \frac{1}{2} \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{i_3 j_3} \tilde{a}_{i_1 i_2 i_3}(z) b_{j_1} b_{j_2} b_{j_3}, \quad (4.1.44)$$

де

$$\tilde{a}_{i_1 i_2 i_3}(z) = \Pi_{(i_1 i_2)(i_3)}(z) + \Pi_{(i_3)(i_1 i_2)}(z).$$

Підрахуємо  $B_2(z)$ . При  $r = 1$  доданок суми (4.1.37) запишемо у вигляді

$$b_{i_1}(z)h_{1i_1} = \Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{j_2j_3}b_{i_1}(z)b_{j_1j_2}b_{j_3} - \frac{1}{4}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{j_2j_3}\Lambda^{j_4j_5}a_{j_1j_2j_4}b_{i_1}(z)b_{j_3}b_{j_5}. \quad (4.1.45)$$

Нехай  $r = 2$ , тоді  $\alpha(2) = (0, 0)$ , і відповідний доданок має вигляд

$$\frac{1}{2}b_{i_1i_2}(z)h_{0i_1}h_{0i_2} = \frac{1}{2}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}b_{i_1i_2}(z)b_{j_1}b_{j_2}. \quad (4.1.46)$$

З урахуванням формул (4.1.43) – (4.1.46), знаходимо

$$\begin{aligned} P_2(z) &= \Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{j_3j_4}a_{i_1i_2}(z)b_{j_1}b_{j_2j_3}b_{j_4} - \\ &- \frac{1}{4}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{j_3j_4}\Lambda^{j_5j_6}a_{i_1i_2}(z)a_{j_2j_3j_5}b_{j_1}b_{j_4}b_{j_6} + \\ &+ \frac{1}{2}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{i_3j_3}\tilde{a}_{i_1i_2i_3}(z)b_{j_1}b_{j_2}b_{j_3} - \Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{j_2j_3}b_{i_1}(z)b_{j_1j_2}b_{j_3} + \\ &+ \frac{1}{4}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{j_2j_3}\Lambda^{j_4j_5}a_{j_1j_2j_4}b_{i_1}(z)b_{j_3}b_{j_5} - \frac{1}{2}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}b_{i_1i_2}(z)b_{j_1}b_{j_2}. \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

## 4.2 Асимптотичне розвинення моментів корелограмної оцінки

У цьому підрозділі знайдемо асимптотичні розвинення зсуву, середнього квадрата відхилення та дисперсії корелограмної оцінки невідомої коваріаційної функції гауссівського стаціонарного шуму моделі спостережень (2.1.1).

Будемо користуватись результатами та позначеннями попереднього підрозділу. Ми також зберігаємо та продовжуємо нумерацію констант  $C$  підрозділу 4.1.

Відправною точкою наших міркувань є наслідок 4.1.1 з величиною  $P_0(z)$ , заданою (4.1.34), та поліномами  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$ , що задані виразами (4.1.42), (4.1.47), відповідно. Припустимо, що умови теореми 4.1.1 виконано при  $k = 4$ .

Перш за все, зауважимо, що аналогічно (4.1.7) легко отримати для

$T > T_0, R > R_0$  нерівності

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T^{1/2}\|\widehat{\theta}_T - \theta\| \geq R\} &= \mathbf{P}\{\|T^{1/2}d_T^{-1}(\theta)(d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T - \theta))\| \geq R\} \leq \\ &\leq \mathbf{P}\{\|d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T - \theta)\| \geq \varkappa_* R\} \leq B^* \exp\{-b\varkappa_*^2 R^2\}, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

з якої, в свою чергу, для будь-якого  $m > 0$  випливає, що для  $T > T_0, R > R_0$

$$\mathbf{P}\{T^{1/2}\|\widehat{\theta}_T - \theta\| \geq R\} \leq C_{25}(m)R^{-m} \quad (4.2.2)$$

з константою  $C_{25}(m) = B^* \left(\frac{m}{2b\varkappa_*^2 e}\right)^{\frac{m}{2}}$ .

Степенева оцінка (4.2.2), будучи істотно грубішою за показникову, має технічні переваги в подальшому оцінюванні сум рядів, виникаючих у процесі доведень. Зрозуміло, що в результаті застосування нерівності (4.2.2) замість нерівності (4.2.1) відповідні оцінки виявляються грубішими, але, як ми побачимо, у підсумку, це не вплине на порядок малості залишкового члена в асимптотичних розвиненнях моментів корелограмної оцінки.

Позначимо для  $i, j = \overline{1, q}, z \in [0, H]$

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}(z, \theta) &= \mathbf{E} b_i(z, \theta) b_j(\theta) = \\ &= T^{-1} \int_0^T \int_0^T (B(t-s+z)g_i(t, \theta)g_j(s, \theta) + B(t-s)g_i(t+z, \theta)g_j(s, \theta)) dt ds. \end{aligned}$$

Тоді

$$\Psi_{ij}(\theta) = \mathbf{E} b_i(\theta) b_j(\theta) = \frac{1}{2} \Psi_{ij}(0, \theta) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T B(t-s)g_i(t, \theta)g_j(s, \theta) dt ds.$$

**Теорема 4.2.1.** *Нехай для  $k = 4$  виконано умови **R1**", **R8**. Крім цього, нехай також виконано умови **N1**, **R4**, **R9**. Тоді*

$$T^{1/2} \mathbf{E} \left( \mathbf{B}_T \left( z, \widehat{\theta}_T \right) - \mathbf{B}(z) \right) = L_T(z) T^{-1/2} + O \left( T^{-3/2} \ln^2 T \right),$$

де

$$L_T(z) = \mathbf{E} P_1(z) = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) \Psi_{j_1 j_2} - \Lambda^{i_1 j_1} \Psi_{i_1 j_1}(z).$$

*Доведення.* Введемо подію

$$W_T = \{|\zeta_3| < C_{24}(4, m) \ln^2 T\}, \quad (4.2.3)$$

де  $C_{24}(4, m)$  – константа із (4.1.41). Нехай  $\chi(A)$  – індикатор події  $A$ ,  $\bar{\chi} = 1 - \chi$ . Помножимо обидві частини рівності (4.1.40) на  $\chi\{W_T\}$  і візьмемо математичне сподівання. Тоді отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{E} T^{1/2} \left( B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z) \right) \chi\{W_T\} &= \sum_{\nu=0}^2 \mathbf{E} P_\nu(z) \chi\{W_T\} T^{-\frac{\nu}{2}} + \\ &+ O\left(T^{-\frac{3}{2}} \ln^2 T\right). \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Оцінимо математичні сподівання  $\mathbf{E} P_\nu(z) \bar{\chi}\{W_T\}$ ,  $\nu = 1, 2$ . Поліноми  $P_\nu(z)$ ,  $\nu = 1, 2$ , асимптотичного розвинення (4.1.40) за формулами (4.1.42), (4.1.47) є однорідними степеня  $\nu + 1$  від випадкових величин  $b_i$ ,  $b_{ij}$ ,  $b_i(z)$ ,  $b_{ij}(z)$ . Тому для оцінки  $\mathbf{E} P_\nu(z) \bar{\chi}\{W_T\}$  достатньо оцінити величини  $\mathbf{E} |b^{(\alpha)}(z)|^{\nu+1} \bar{\chi}\{W_T\}$ ,  $|\alpha| = \overline{1, \nu}$ .

Маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha T}^2 &= \mathbf{E} \left( b^{(\alpha)}(z) \right)^2 \leq 2 \left( \mathbf{E} \left( b_1^{(\alpha)}(z) \right)^2 + \mathbf{E} \left( b_2^{(\alpha)}(z) \right)^2 \right), \\ \mathbf{E} \left( b_2^{(\alpha)}(z) \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) T^{-1} \left| \int_0^T e^{i\lambda t} g^{(\alpha)}(t+z) dt \right|^2 d\lambda \leq \\ &\leq 2\pi f_0 T^{-1} \int_z^{T+z} \left( g^{(\alpha)}(t, \theta) \right)^2 dt \leq 4\pi f_0 (2T)^{-1} d_{2T}^2(\alpha, 0) \leq 4\pi f_0 C_1^2(\alpha) \end{aligned}$$

за умови (4.1.3). Таким чином,  $\sigma_{\alpha T}^2(z) \leq 12\pi f_0 C_1^2(\alpha) < \infty$ .

Для деякого  $u > 1$  позначимо

$$\gamma_{jT} = \sigma_{\alpha T}(z) (u^j + m)^{1/2} \ln^{1/2} T, \quad j \geq 0, \quad (4.2.5)$$

і введемо події

$$W_{\alpha T}^{(0)} = \left\{ \left| b^{(\alpha)}(z) \right| < \gamma_{0T} \right\}; \quad W_{\alpha T}^{(j)} = \left\{ \gamma_{j-1,T} \leq \left| b^{(\alpha)}(z) \right| < \gamma_{jT} \right\}, \quad j \geq 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| b^{(\alpha)}(z) \right|^{\nu+1} \bar{\chi} \{W_T\} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left| b^{(\alpha)}(z) \right|^{\nu+1} \chi \{W_{\alpha T}^{(j)}\} \bar{\chi} \{W_T\} \leq \\ &\leq \mathbb{E} \left| b^{(\alpha)}(z) \right|^{\nu+1} \chi \{W_{\alpha T}^{(0)}\} \bar{\chi} \{W_T\} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} \left| b^{(\alpha)}(z) \right|^{\nu+1} \chi \{W_{\alpha T}^{(j)}\}. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Використовуючи (4.1.41) і (4.2.5), отримуємо оцінку для 1-го доданка правої частини нерівності (4.2.6):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| b^{(\alpha)}(z) \right|^{\nu+1} \chi \{W_{\alpha T}^{(0)}\} \bar{\chi} \{W_T\} &\leq \sigma_{\alpha T}^{\nu+1}(z) (1+m)^{\frac{\nu+1}{2}} \ln^{\frac{\nu+1}{2}} T \cdot P \{\bar{W}_T\} = \\ &= O \left( T^{-\frac{m}{2}} \ln^{\frac{\nu}{2}} T \right). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Для 2-го доданка правої частини (4.2.6) маємо

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} \left| b^{(\alpha)}(z) \right|^{\nu+1} \chi \{W_{\alpha T}^{(j)}\} &\leq \sigma_{\alpha T}^{\nu+1}(z) \ln^{\frac{\nu+1}{2}} T \sum_{j=1}^{\infty} (u^j + m)^{\frac{\nu+1}{2}} \times \\ &\times P \left\{ \left| b^{(\alpha)}(z) \right| \geq \sigma_{\alpha T}(z) (u^{j-1} + m)^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} T \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

За нерівністю (4.1.10), що застосовується до  $\delta = (u^{j-1} + m)^{1/2} \ln^{1/2} T$ , запишемо

$$\begin{aligned} &P \left\{ \left| b^{(\alpha)}(z) \right| \geq \sigma_{\alpha T}(z) (u^{j-1} + m)^{1/2} \ln^{1/2} T \right\} \leq \\ &\leq \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} (u^{j-1} + m)^{-1/2} \ln^{-1/2} T \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u^{j-1} + m) \ln T \right\} \leq \\ &\leq \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} u^{-\frac{j-1}{2}} \left( \ln^{-1/2} T \right) T^{-m/2} \cdot T^{-\frac{1}{2} u^{j-1}}, \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

З (4.2.8) і (4.2.9) отримуємо

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} \left| b^{(\alpha)}(z) \right|^{\nu+1} \chi \left\{ W_{\alpha T}^{(j)} \right\} \leq \\ & \leq \sigma_{\alpha T}^{\nu+1}(z) \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left( \ln^{\frac{\nu}{2}} T \right) T^{-\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} (u^j + m)^{\frac{\nu+1}{2}} u^{-\frac{j-1}{2}} T^{-\frac{1}{2}u^{j-1}}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Оцінимо ряд в правій частині (4.2.10). Оскільки існує таке  $j_0$ , що  $\frac{1}{2} u^{j-1} \geq j u^{\nu/2}$  для  $j > j_0$ , то  $T^{-\frac{1}{2}u^{j-1}} \leq T^{-ju^{\nu/2}}$  для тих самих  $j$ . Таким чином,

$$\left( \sum_{j=1}^{j_0} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \right) (u^j + m)^{\frac{\nu+1}{2}} u^{-\frac{j-1}{2}} T^{-\frac{1}{2}u^{j-1}} = \sum_1 + \sum_2,$$

причому  $\sum_1 = O\left(T^{-\frac{1}{2}}\right)$ ,

$$\begin{aligned} \sum_2 & \leq C_{26} u^{1/2} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left( u^{\frac{\nu}{2}} T^{-u^{\frac{\nu}{2}}} \right)^j = \\ & = C_{26} u^{1/2} \rho^{j_0+1} T^{-\rho(j_0+1)} (1 - \rho T^{-\rho})^{-1}, \quad \rho = u^{\nu/2}. \end{aligned}$$

Це означає, що  $\sum_2 = o\left(T^{-\frac{1}{2}}\right)$ , і

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} \left| b^{(\alpha)}(z) \right|^{\nu+1} \chi \left\{ W_{\alpha T}^{(j)} \right\} = O\left(T^{-\frac{m+1}{2}} \ln^{\nu/2} T\right). \quad (4.2.11)$$

Співвідношення (4.2.6), (4.2.7), (4.2.10) і (4.2.11), показують, що

$$\mathbb{E} \left| b^{(\alpha)}(z) \right|^{\nu+1} \bar{\chi} \{W_T\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}} \ln^{\frac{\nu+1}{2}} T\right), \quad (4.2.12)$$

або

$$T^{-\nu/2} \mathbb{E} P_{\nu}(z) \bar{\chi} \{W_T\} = O\left(T^{-\frac{m+\nu}{2}} \ln^{\frac{\nu+1}{2}} T\right), \quad \nu = 1, 2. \quad (4.2.13)$$

Оцінимо тепер  $\mathbb{E} P_0(z) \bar{\chi} \{W_T\}$ . Для цього застосуємо третю нерівність

теорема 6.3.1 монографії [5], а саме:

$$P \left\{ T^{-1/2} |P_0(z)| > \sqrt{\mathbf{D}T^{-1/2}P_0(z)x} \right\} \leq 2(1 + \sqrt{2x})^{1/2} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}, \quad z \geq 0, \quad x > 0. \quad (4.2.14)$$

Маємо за формулою Ісерліса

$$\begin{aligned} \mathbf{D}T^{-1/2}P_0(z) &= \mathbf{E} \left( T^{-1} \int_0^T (\varepsilon(t+z)\varepsilon(t) - B(z)) dt \right)^2 = \\ &= T^{-2} \int_0^T \int_0^T (B^2(t-s) + B(t-s+z)B(t-s-z)) dt ds = T^{-1} K_T^2(z), \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

$$\begin{aligned} K_T^2(z) &= T^{-1} \int_0^T \left( \int_{-t}^t (B^2(s) + B(s+z)B(s-z)) ds \right) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (B^2(s) + B(s+z)B(s-z)) ds < \infty. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Останнє співвідношення впливає з регулярності аналога узагальненого підсумовування рядів методом Чезаро для узагальнених значень розбіжних невластних інтегралів ([47], п. 485, с. 595–597).

Перепишемо нерівність (4.2.14) у зручнішому вигляді:

$$P \left\{ |P_0(z)| > \sqrt{2} K_T(z) x \right\} \leq 2(1 + 2x)^{1/2} e^{-x}, \quad z \geq 0, \quad x > 0, \quad (4.2.17)$$

і покладемо для деякого  $u > 1$

$$\delta_{jT} = \sqrt{2} K_T(z) (u^j + m) \ln T, \quad j \geq 0,$$

$$W_T^{(0)} = \{|P_0(z)| \leq \delta_{0T}\}, \quad W_T^{(j)} = \{\delta_{j-1,T} < |P_0(z)| \leq \delta_{jT}\}, \quad j \geq 1. \quad (4.2.18)$$

Як і раніше, маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |P_0(z)| \bar{\chi} \{W_T\} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} |P_0(z)| \bar{\chi} \{W_T\} \chi \{W_T^{(j)}\} \leq \\ &\leq \mathbb{E} |P_0(z)| \bar{\chi} \{W_T\} \chi \{W_T^{(0)}\} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} |P_0(z)| \chi \{W_T^{(j)}\}; \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |P_0(z)| \bar{\chi} \{W_T\} \chi \{W_T^{(0)}\} &\leq \\ &\leq \sqrt{2} K_T(z) (1+m) \ln T \cdot P \{\bar{W}_T\} = O \left( T^{-\frac{m}{2}} (\ln T)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Оцінимо  $j$ -й член ряду правої частини нерівності (4.2.19) з використанням (4.2.17):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |P_0(z)| \chi \{W_T^{(j)}\} &\leq \sqrt{2} K_T(z) (u^j + m) \ln T \times \\ &\times \mathbb{P} \left\{ |P_0(z)| > \sqrt{2} K_T(z) (u^{j-1} + m) \ln T \right\} \leq \\ &\leq \sqrt{2} K_T(z) (u^j + m) \ln T \cdot 2 \left( 1 + 2(u^{j-1} + m) \ln T \right)^{1/2} \exp \left\{ -(u^{j-1} + m) \ln T \right\} \leq \\ &\leq C_{27} T^{-m} \ln^{\frac{3}{2}} T \left( u^{\frac{3}{2}} T^{-u^{\frac{3}{2}}} \right)^j \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

для  $j > j_0$ , причому константа  $C_{27}$  не залежить від  $j$ . Таким чином, для ряду (4.2.19) отримуємо

$$\sum_{j=1}^{j_0} = O \left( T^{-m-1} \ln^{\frac{3}{2}} T \right), \quad (4.2.22)$$

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \leq C_{27} T^{-m} \left( \ln^{\frac{3}{2}} T \right) \frac{u^{\frac{3}{2}(j_0+1)} T^{-u^{\frac{3}{2}(j_0+1)}}}{1 - u^{3/2} T^{-u^{3/2}}} = o \left( T^{-m-1} \ln^{\frac{3}{2}} T \right). \quad (4.2.23)$$

Із (4.2.19) – (4.2.23) випливає, що

$$\mathbb{E} |P_0(z)| \bar{\chi} \{W_T\} = O \left( T^{-\frac{m}{2}} (\ln T)^{1/2} \right). \quad (4.2.24)$$

Оцінимо  $\mathbf{E} T^{1/2} \left( B_T \left( z, \widehat{\theta}_T \right) - B(z) \right) \bar{\chi} \{W_T\}$ . Для цього запишемо

$$\begin{aligned} T^{1/2} \left| B_T(z, \widehat{\theta}_T) - B(z) \right| &\leq T^{1/2} |s_T^*(z) - B(0)| + T^{1/2} |s_T^*(0) - B(0)| + \\ &+ T^{-1/2} \Phi_T^{[0]} \left( \widehat{\theta}_T, \theta \right) + T^{-1/2} \Phi_{2T}^{[0]} \left( \widehat{\theta}_T, \theta \right) + 3B(0)T^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

За умови **R8**

$$T^{-1/2} \Phi_T^{[0]} \left( \widehat{\theta}_T, \theta \right) + T^{-1/2} \Phi_{2T}^{[0]} \left( \widehat{\theta}_T, \theta \right) \leq 3C_2(0)T^{1/2} \left\| \widehat{\theta}_T - \theta \right\|^2. \quad (4.2.26)$$

У підрозділі 4.1 вже було зауважено, що величину  $s_T^*(z)$  можна розглядати як значення корелограми в нулі сепарабельного стаціонарного гауссівського процесу  $\varepsilon_z(t) = \varepsilon(t+z)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Це означає, що аналогічно (4.2.24) для  $z \in [0, H]$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( T^{1/2} |s_T^*(z) - B(0)| + T^{1/2} |s_T^*(0) - B(0)| \right) \bar{\chi} \{W_T\} &= \\ &= O \left( T^{-\frac{m}{2}} (\ln T)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

З іншого боку,

$$\mathbf{E} B(0)T^{1/2} \bar{\chi} \{W_T\} = 3B(0)T^{1/2} P \{ \overline{W}_T \} = O \left( T^{-\frac{m-1}{2}} (\ln T)^{-1/2} \right), \quad (4.2.28)$$

і, завдяки (4.2.26), залишається оцінити  $T^{1/2} \mathbf{E} \left\| \widehat{\theta}_T - \theta \right\|^2 \bar{\chi} \{W_T\}$ .

Для деяких  $u > 1$  і  $\beta \in (0, \frac{1}{2})$  покладемо

$$\begin{aligned} W_{0T}^* &= \left\{ \left\| \widehat{\theta}_T - \theta \right\| < T^{-\beta} \right\}; \\ W_{jT}^* &= \left\{ u^{j-1} T^{-\beta} \leq \left\| \widehat{\theta}_T - \theta \right\| < u^j T^{-\beta} \right\}, \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Тоді

$$\begin{aligned} T^{1/2} \mathbf{E} \left\| \widehat{\theta}_T - \theta \right\|^2 \bar{\chi} \{W_T\} &\leq T^{1/2} \mathbf{E} \left\| \widehat{\theta}_T - \theta \right\|^2 \bar{\chi} \{W_T\} \chi \{W_{0T}^*\} + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} T^{1/2} \mathbf{E} \left\| \widehat{\theta}_T - \theta \right\|^2 \chi \{W_{jT}^*\} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Для 1-го доданка отримуємо

$$\mathbf{E}_1 \leq T^{1/2-2\beta} P \{ \overline{W}_T \} = O \left( T^{-\frac{m-1+4\beta}{2}} (\ln T)^{-1/2} \right). \quad (4.2.31)$$

Оцінимо 2-й доданок, використовуючи нерівність (4.2.2) при  $R = u^{j-1} T^{1/2-\beta}$ ,  $j \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &\leq T^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} (u^j T^{-\beta})^2 P \left\{ \left\| \widehat{\theta}_T - \theta \right\| \geq u^{j-1} T^{-\beta} \right\} \leq \\ &\leq C_{25}(m) T^{1/2-2\beta} \sum_{j=1}^{\infty} u^{2j-m(j-1)} T^{-m(\frac{1}{2}-\beta)} = \\ &= C_{25}(m) \frac{u^m}{u^{m-2} - 1} T^{-(m(1-2\beta)-1+4\beta)/2}. \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

Підставляючи оцінки (4.2.31) і (4.2.32) в (4.2.30), отримуємо

$$T^{1/2} \mathbf{E} \left\| \widehat{\theta}_T - \theta \right\|^2 \chi \{ \overline{W}_T \} = O \left( T^{-(m(1-2\beta)-1+4\beta)/2} \right). \quad (4.2.33)$$

Знайдемо такі значення  $m$ , для яких серед оцінок (4.2.13), (4.2.24), (4.2.27), (4.2.28) і (4.2.33) найгрубіший порядок був не менше порядку залишкового члена в рівності (4.2.4). Для цього запишемо розв'язок рівняння  $m(1-2\beta) - 1 + 4\beta = 3$  відносно  $m$  у вигляді  $m = 4 + n$ , де  $n = \frac{4\beta}{1-2\beta}$  — натуральне число, або  $\beta = \frac{n}{2(2+n)} \in (0, \frac{1}{2})$ . Наприклад, якщо  $n = 1$ , то  $\beta = \frac{1}{6}$ , і так далі. Таким чином, для натуральних  $m \geq 5$

$$T^{1/2} \mathbf{E} \left( B_T \left( z, \widehat{\theta}_T \right) - B(z) \right) = \mathbf{E} P_1(z) T^{-1/2} + O \left( T^{-3/2} \ln^2 T \right), \quad (4.2.34)$$

тому що  $\mathbf{E} P_0(z) = \mathbf{E} P_2(z) = 0$ . □

Наступне очевидне твердження є асимптотичним розвиненням зсуву залишкової корелограми.

**Наслідок 4.2.1.** *За умов теореми 4.2.1*

$$\mathbf{E} B_T \left( z, \widehat{\theta}_T \right) - B(z) = L_T(z) T^{-1} + O \left( T^{-2} \ln^2 T \right). \quad (4.2.35)$$

Виникає природне питання про асимптотичні розвинення зсуву зали-

шкової корелограми при значеннях  $k < 4$ .

**Наслідок 4.2.2.** *Нехай умови теореми 4.2.1 виконані для  $k = 3$ . Тоді*

$$\mathbb{E} B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z) = L_T(z)T^{-1} + O\left(T^{-\frac{3}{2}} \ln^{\frac{3}{2}} T\right). \quad (4.2.36)$$

*Доведення.* Достатньо записати формулювання теореми 4.2.1 для  $k = 3$  і повторити відповідні викладки. Єдина відмінність полягає в тому, що рівняння  $(m(1 - 2\beta) - 1 + 4\beta) = 2$  має розв'язок  $m = 2 + \frac{1}{1-2\beta}$ , і якщо натуральне  $n = \frac{1}{1-2\beta}$ , то  $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \in (0, \frac{1}{2})$  при  $n \geq 2$ . Таким чином, для натуральних  $m \geq 4$  отримуємо (4.2.36).  $\square$

**Наслідок 4.2.3.** *Нехай умови теореми 4.2.1 виконані для  $k = 2$ . Тоді для  $m \geq 2$*

$$\mathbb{E} B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z) = O(T^{-1} \ln T). \quad (4.2.37)$$

Далі ми будемо розглядати асимптотичне розвинення нормованого середнього квадрата відхилення залишкової корелограми від відповідного значення коваріаційної функції процесу  $\varepsilon$ , знов спираючись на наслідок 4.1.1. Теорема про це розвинення має громіздке формулювання, яке буде зрозумілим після проведення деяких обчислень. У подальших міркуваннях вважаємо, що виконано умови теореми 4.2.1, але замість **N1(ii)** виконано **N1(ii')**.

З рівності (4.1.40), піднесеної до квадрату, отримуємо

$$\begin{aligned} T \left( B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z) \right)^2 &= P_0^2(z) + 2P_0(z)P_1(z)T^{-\frac{1}{2}} + \\ &+ (P_1^2(z) + 2P_0(z)P_2(z)) T^{-1} + \bar{\zeta}_3 T^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

$$\bar{\zeta}_3 = 2P_0(z)\zeta_3 + 2P_1(z)P_2(z) + 2P_1(z)\zeta_3 T^{-\frac{1}{2}} + 2P_2(z)\zeta_3 T^{-1} + \zeta_3^2 T^{-\frac{3}{2}}.$$

Із міркувань попереднього розділу випливає, що для довільного  $m > 0$

$$P \left\{ |\bar{\zeta}_3| \geq C_{28}(m) \ln^3 T \right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}} (\ln T)^{-1/2}\right). \quad (4.2.39)$$

Введемо подію  $V_T = \{|\bar{\zeta}_3| < C_{28}(m) \ln^3 T\}$ . Тоді

$$\begin{aligned} T \mathbf{E} \left( B_T \left( z, \hat{\theta}_T \right) - B(z) \right)^2 \chi \{V_T\} = \\ = \sum_{\nu=0}^2 \mathbf{E} P_\nu^*(z) \chi \{V_T\} T^{-\nu/2} + O \left( T^{-\frac{3}{2}} \ln^3 T \right), \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

$$P_0^*(z) = P_0^2(z), \quad P_1^*(z) = 2P_0(z)P_1(z), \quad P_2^*(z) = P_1^2(z) + 2P_0(z)P_2(z).$$

Оцінимо  $\mathbf{E} P_\nu^*(z) \bar{\chi} \{V_T\}$ ,  $\nu = 0, 1, 2$ . Оскільки

$$2P_0(z)P_\nu(z) \leq P_0^2(z) + P_\nu^2(z), \quad \nu = 1, 2,$$

то задача зводиться до оцінювання  $\mathbf{E} P_\nu^2(z) \bar{\chi} \{V_T\}$ ,  $\nu = 0, 1, 2$ , причому для  $\nu = 1, 2$  достатньо оцінити величини  $\mathbf{E} |b^{(\alpha)}(z)|^{2(\nu+1)} \bar{\chi} \{V_T\}$ ,  $|\alpha| = \overline{1, \nu}$ . Оцінювання цих математичних сподівань не відрізняється від оцінювання відповідних величин із попереднього розділу, і, замість (4.2.12), ми отримуємо оцінку

$$\mathbf{E} |b^{(\alpha)}(z)|^{2(\nu+1)} \bar{\chi} \{V_T\} = O \left( T^{-\frac{m}{2}} \ln^{\nu+\frac{1}{2}} T \right), \quad \nu = 1, 2. \quad (4.2.41)$$

Для оцінювання  $\mathbf{E} P_0^2(z) \bar{\chi} \{V_T\}$  будемо користуватись величинами  $\delta_{jT}$  і подіями  $W_T^{(j)}$ ,  $j \geq 0$ , означеними в (4.2.18). Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{E} P_0^2(z) \bar{\chi} \{V_T\} \chi \left\{ W_T^{(0)} \right\} &\leq 2K_T^2(z) (1+m)^2 \ln^2 T \cdot P \left\{ \bar{V}_T \right\} = \\ &= O \left( T^{-\frac{m}{2}} \ln^{3/2} T \right), \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E} P_0^2(z) \chi \left\{ W_T^{(j)} \right\} \leq C_{29} T^{-m} \ln^{5/2} T \sum_{j=1}^{\infty} u^{\frac{5}{2}j} T^{-u^{j-1}}.$$

Оскільки  $T^{-u^{j-1}} < T^{-ju^{5/2}}$  для  $j > j_0$ , то аналогічно (4.2.22) і (4.2.23)

$$\sum_{j=1}^{j_0} = O \left( T^{-m-1} \ln^{5/2} T \right), \quad \sum_{j=j_0+1}^{\infty} = o \left( T^{-m-1} \ln^{5/2} T \right). \quad (4.2.43)$$

Порівняння (4.2.42) і (4.2.43) дозволяє стверджувати, що

$$\mathbf{E} P_0^2(z) \bar{\chi} \{V_T\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}} \ln^{3/2} T\right). \quad (4.2.44)$$

Оцінимо тепер  $T \mathbf{E} \left( B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z) \right)^2 \bar{\chi} \{V_T\}$ . Із співвідношень (4.2.25), (4.2.26) отримуємо

$$\begin{aligned} T \left( B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z) \right)^2 &\leq 4T (s_T^*(z) - B(0))^2 + 4T (s_T^*(0) - B(0))^2 + \\ &+ 36C_2^2(0)T \left\| \hat{\theta}_T - \theta \right\|^4 + 36B^2(0)T. \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

Аналогічно (4.2.27) із (4.2.44) випливає, що

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( T (s_T^*(z) - B(0))^2 + T (s_T^*(0) - B(0))^2 \right) \bar{\chi} \{V_T\} &= \\ &= O\left(T^{-\frac{m}{2}} \ln^{3/2} T\right). \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

Крім того, аналогічно (4.2.28)

$$\mathbf{E} T \bar{\chi} \{V_T\} = O\left(T^{-\frac{m-2}{2}} (\ln T)^{-1/2}\right). \quad (4.2.47)$$

Залишилось оцінити  $\mathbf{E} T \left\| \hat{\theta}_T - \theta \right\|^4 \bar{\chi} \{V_T\}$ . Використовуючи події (4.2.29), запишемо

$$\begin{aligned} T \mathbf{E} \left\| \hat{\theta}_T - \theta \right\|^4 \bar{\chi} \{V_T\} &\leq T \mathbf{E} \left\| \hat{\theta}_T - \theta \right\|^4 \bar{\chi} \{V_T\} \chi \{W_{0T}^*\} + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} T \mathbf{E} \left\| \hat{\theta}_T - \theta \right\|^4 \chi \{W_{jT}^*\} = \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4, \\ \mathbf{E}_3 &\leq T^{1-4\beta} P \{V_T\} = O\left(T^{-\frac{m-2+8\beta}{2}} (\ln T)^{-1/2}\right), \end{aligned} \quad (4.2.48)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_4 &\leq T \sum_{j=1}^{\infty} (u^j T^{-\beta})^4 P \left\{ \left\| \hat{\theta}_T - \theta \right\| \geq u^{j-1} T^{-\beta} \right\} \leq \\ &\leq C_{25}(m) \frac{u^m}{u^{m-4} - 1} T^{-\frac{m(1-2\beta)-2+8\beta}{2}}. \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

Як і раніше, для отриманих оцінок треба знайти таке значення  $m$ , щоб їх найгрубіший порядок був не менше порядку залишкового члена формули (4.2.40). З цією метою запишемо розв'язки рівняння  $m(1-2\beta) - 2 + 8\beta = 3$  у вигляді  $m = 4 + n$ , де  $n = \frac{1}{1-2\beta}$ , або  $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \in (0, \frac{1}{2})$  тоді, коли  $n \geq 2$ , і, відповідно,  $m \geq 6$ . Для таких  $m$

$$T \mathbb{E} \left( B_T \left( z, \hat{\theta}_T \right) - B(z) \right)^2 = \sum_{\nu=0}^2 \mathbb{E} P_{\nu}^*(z) T^{-\nu/2} + O \left( T^{-\frac{3}{2}} \ln^3 T \right). \quad (4.2.50)$$

Запишемо рівність (4.1.39) при  $k = 3$ :

$$T^{1/2} \left( B_T \left( z, \hat{\theta}_T \right) - B(z) \right) = P_0(z) + P_1(z) T^{-1/2} + \zeta_2 T^{-1}, \quad (4.2.51)$$

$$\mathbb{P} \left\{ |\zeta_2| \geq C_{24}(3, m) \ln^{3/2} T \right\} = O \left( T^{-\frac{m}{2}} (\ln T)^{-1/2} \right). \quad (4.2.52)$$

Піднесемо її до квадрату:

$$T \left( B_T \left( z, \hat{\theta}_T \right) - B(z) \right)^2 = P_0^2(z) + 2P_0(z)P_1(z)T^{-1/2} + \bar{\zeta}_2 T^{-1}, \quad (4.2.53)$$

де випадкова величина

$$\bar{\zeta}_2 = P_1^2(z) + 2P_0(z)\zeta_2 + 2P_1(z)\zeta_2 T^{-1/2} + \zeta_2^2 T^{-1}, \quad (4.2.54)$$

має властивість

$$\mathbb{P} \left\{ |\bar{\zeta}_2| \geq C_{30}(m) \ln^{5/2} T \right\} = O \left( T^{-\frac{m}{2}} (\ln T)^{-1/2} \right). \quad (4.2.55)$$

Якщо  $m \geq 4$ , то аналогічно наслідку 4.2.2 можна довести, що

$$\begin{aligned} T \mathbb{E} \left( B_T \left( z, \hat{\theta}_T \right) - B(z) \right)^2 &= \mathbb{E} P_0^2(z) + 2 \mathbb{E} P_0(z)P_1(z)T^{-1/2} + \\ &+ O \left( T^{-1} \ln^{5/2} T \right). \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

Для  $k = 2$  рівність (4.1.39) набуває вигляду

$$T \left( B_T \left( z, \hat{\theta}_T \right) - B(z) \right) = P_0(z) + \zeta_1 T^{-1/2}, \quad (4.2.57)$$

$$P \{ |\zeta_1| \geq C_{24}(2, m) \ln T \} = O \left( T^{-\frac{m}{2}} (\ln T)^{-1/2} \right). \quad (4.2.58)$$

а (4.2.53) перетвориться на рівність

$$T \left( B_T \left( z, \hat{\theta}_T \right) - B(z) \right)^2 = P_0^2(z) + \bar{\zeta}_1 T^{-1/2}, \quad (4.2.59)$$

де  $\bar{\zeta}_1 = 2P_0(z)\zeta_1 + \zeta_1^2 T^{-1/2}$ , причому

$$P \{ |\bar{\zeta}_1| \geq C_{31}(m) \ln^2 T \} = O \left( T^{-\frac{m}{2}} (\ln T)^{-1/2} \right). \quad (4.2.60)$$

Якщо  $\beta = \frac{1}{4}$  і  $m \geq 2$ , то

$$T \mathbb{E} \left( B_T \left( z, \hat{\theta}_T \right) - B(z) \right)^2 = \mathbb{E} P_0^2(z) + O \left( T^{-1/2} \ln^2 T \right). \quad (4.2.61)$$

Підрахуємо математичні сподівання правої частини рівності (4.2.50), користуючись формулою (4.2.38) та позначеннями (4.2.40). За формулами (4.2.15), (4.2.16)

$$\mathbb{E} P_0^*(z) = \mathbb{E} P_0^2(z) = K_T^2(z).$$

Маємо далі, використовуючи (4.1.42),

$$\begin{aligned} \mathbb{E} P_1^*(z) &= 2 \mathbb{E} P_0(z) P_1(z) = 2 \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) \mathbb{E} P_0(z) b_{j_1} b_{j_2} - \\ &- 2 \Lambda^{i_1 j_1} \mathbb{E} P_0(z) b_{i_1}(z) b_{j_1} = \mathbb{E} P_{11}^*(z) - \mathbb{E} P_{12}^*(z). \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\mathbb{E} P_0(z) b_{j_1} b_{j_2} = (\Delta_{j_1 j_2}(z) + \Delta_{j_2 j_1}(z)) T^{-1/2},$$

де

$$\Delta_{j_1 j_2}(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T \int_0^T B(t-s+z) B(t-u) g_{j_1}(s) g_{j_2}(u) dt ds du. \quad (4.2.62)$$

Неважко тепер зрозуміти, що

$$\mathbb{E} P_{11}^*(z) = 2\Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} a_{i_1 i_2}(z) \Delta_{j_1 j_2}(z) T^{-1/2}. \quad (4.2.63)$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} P_{12}^*(z) &= 2\Lambda^{i_1 j_1} \mathbb{E} P_0(z) b_{i_1}(z) b_{j_1} = \\ &= 2\Lambda^{i_1 j_1} \left( \varphi_{i_1 j_1}^{(1)} + \sum_{k=2}^4 \varphi_{i_1 j_1}^{(k)}(z) \right) T^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.2.64)$$

$$\varphi_{i_1 j_1}^{(1)} = T^{-1} \int_0^T \int_0^T \int_0^T B(t-s) B(t-u) g_{i_1}(s) g_{j_1}(u) dt ds du,$$

$$\varphi_{i_1 j_1}^{(2)}(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T \int_0^T B(t-u+z) B(t-s-z) g_{i_1}(s) g_{j_1}(u) dt ds du,$$

$$\varphi_{i_1 j_1}^{(3)}(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T \int_0^T B(t-s+z) B(t-u) g_{i_1}(s+z) g_{j_1}(u) dt ds du,$$

$$\varphi_{i_1 j_1}^{(4)}(z) = T^{-1} \int_0^T \int_0^T \int_0^T B(t-u+z) B(t-s) g_{i_1}(s+z) g_{j_1}(u) dt ds du. \quad (4.2.65)$$

Таким чином, з (4.2.63) і (4.2.64) випливає, що

$$\mathbb{E} P_1^*(z) = 2 \left( \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} a_{i_1 i_2}(z) \Delta_{j_1 j_2}(z) - \Lambda^{i_1 j_1} \left( \varphi_{i_1 j_1}^{(1)} + \sum_{k=2}^4 \varphi_{i_1 j_1}^{(k)}(z) \right) \right) T^{-1/2}. \quad (4.2.66)$$

Введемо додаткову умову обмеженості перших похідних функції регресії за сукупністю змінних.

$$\mathbf{R10.} \quad \sup_{\tau \in \Theta^c} \sup_{t \geq 0} |g_i(t, \tau)| \leq C_1(e_i), \quad i = \overline{1, q}. \quad (4.2.67)$$

Очевидно, з **R10** випливає, що

$$\sup_{\tau \in \Theta^c} T^{-1/2} d_{iT}(\tau) \leq C_1(e_i), \quad i = \overline{1, q}, \quad (4.2.68)$$

тобто умова (4.1.3) для перших похідних за  $\tau$  функції  $g$ . При вивченні асимптотичних властивостей оцінки  $\widehat{\theta}_T$  часто використовується умова типу

$$d_{iT}^{-1}(\theta) \sup_{\tau \in \Theta^c} \sup_{a \leq t \leq T} |g_i(t, \tau)| \leq C(i)T^{-1/2}, \quad i = \overline{1, q}, \quad (4.2.69)$$

яка є варіантом умови **R1(ii')** підрозділу 2.2. Тоді **R10** з іншими константами є наслідком (4.2.68) і (4.2.69).

Покажемо, що за умови **R10** величини (4.2.62) і (4.2.65) обмежені. Отримуємо, наприклад, з використанням **N(ii')**

$$\begin{aligned} |\Delta_{j_1 j_2}(z)| &\leq C_1(e_{j_1}) C_1(e_{j_2}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |B(s)| ds \cdot T^{-1} \int_0^T \int_0^T |B(t-u)| dt du \leq \\ &\leq C_1(e_{j_1}) C_1(e_{j_2}) \|B\|_1^2. \end{aligned}$$

Величини (4.2.65) оцінюються аналогічно. Таким чином, член  $\mathbf{E} P_1^*(z)T^{-1/2}$  у розвиненні (4.2.50) треба зсунути на крок вправо до члена  $\mathbf{E} P_2^*(z)T^{-1}$ .

Розглянемо

$$\mathbf{E} P_2^*(z) = \mathbf{E} P_1^2(z) + 2 \mathbf{E} P_0(z)P_2(z) = \mathbf{E} P_1^2(z), \quad (4.2.70)$$

тому що добуток  $P_0(z)P_2(z)$  містить непарні степені гауссівських випадкових величин. Запишемо

$$\begin{aligned} P_1^2(z) &= \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{i_3 j_3} \Lambda^{i_4 j_4} \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) \Pi_{(i_3)(i_4)}(z) b_{j_1} b_{j_2} b_{j_3} b_{j_4} - \\ &\quad - 2 \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{i_3 j_3} \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) b_{j_1} b_{j_2} b_{j_3} b_{i_3}(z) + \\ &\quad + \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} b_{i_1}(z) b_{j_1} b_{i_2}(z) b_{j_2} = I_1 - 2I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Неважко побачити, що

$$\mathbf{E} I_1 = \left( \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) \Psi_{j_1 j_2} \right)^2 + \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{i_3 j_3} \Lambda^{i_4 j_4} \Pi_{(i_1)(i_4)}(z) a_{i_2 i_3}(z) \Psi_{j_1 j_2} \Psi_{j_3 j_4},$$

$$\mathbf{E} I_2 = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{i_3 j_3} \left( \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) \Psi_{j_1 j_2} \Psi_{i_3 j_3}(z) + a_{i_1 i_2}(z) \Psi_{j_1 j_3} \Psi_{i_3 j_2}(z) \right).$$

Крім цього,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} I_3 &= \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} (\Psi_{i_1 j_1}(z) \Psi_{i_2 j_2}(z) + \Psi_{i_1 j_2}(z) \Psi_{i_2 j_1}(z) + \Psi_{j_1 j_2} \mathbf{E} b_{i_1}(z) b_{i_2}(z)), \\ \mathbf{E} b_{i_1}(z) b_{i_2}(z) &= \Psi_{i_1 i_2} + 2\Psi_{i_1 i_2}^{(1)}(z) + \Psi_{i_1 i_2}^{(2)}(z), \\ \Psi_{i_1 i_2}^{(1)}(z) &= T^{-1} \int_0^T \int_0^T B(t-s-z) g_{i_1}(t+z) g_{i_2}(s) dt ds, \\ \Psi_{i_1 i_2}^{(2)}(z) &= T^{-1} \int_0^T \int_0^T B(t-s) g_{i_1}(t+z) g_{i_2}(s+z) dt ds. \end{aligned} \quad (4.2.71)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} I_3 &= \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} (\Psi_{i_1 j_1}(z) \Psi_{i_2 j_2}(z) + \Psi_{i_1 j_2}(z) \Psi_{i_2 j_1}(z) + \\ &+ \Psi_{j_1 j_2} (\Psi_{i_1 i_2} + 2\Psi_{i_1 i_2}^{(1)}(z) + \Psi_{i_1 i_2}^{(2)}(z))). \end{aligned}$$

Ми отримали такий результат.

**Теорема 4.2.2.** *Нехай для  $k = 4$  виконано умови **R1''**, **R8**. Якщо також виконано умови **N1(i)**, **N1(ii')**, **R4**, **R9**, **R10**, то*

$$\begin{aligned} T \mathbf{E} \left( \mathbf{B}_T(z, \hat{\theta}_T) - \mathbf{B}(z) \right)^2 &= K_T^2(z) + (M_T(z) + N_T(z)) T^{-1} + \\ &+ O\left(T^{-3/2} \ln^3 T\right), \end{aligned} \quad (4.2.72)$$

де

$$\begin{aligned} K_T^2(z) &= T^{-1} \int_0^T \int_0^T (\mathbf{B}^2(t-s) + \mathbf{B}(t-s+z) \mathbf{B}(t-s-z)) dt ds, \\ M_T(z) &= 2 \left( \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} a_{i_1 i_2}(z) \Delta_{j_1 j_2}(z) - \Lambda^{i_1 j_1} \left( \varphi_{i_1 j_1}^{(1)} + \sum_{k=2}^4 \varphi_{i_1 j_1}^{(k)}(z) \right) \right), \\ N_T(z) &= \left( \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Pi_{(i_1)(i_2)}(z) \Psi_{j_1 j_2} \right)^2 + \\ &+ \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \Lambda^{i_3 j_3} \Lambda^{i_4 j_4} \Pi_{(i_1)(i_4)}(z) a_{i_2 i_3}(z) \Psi_{j_1 j_2} \Psi_{j_3 j_4} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{i_3j_3}\left(\Pi_{(i_1)(i_2)}(z)\Psi_{j_1j_2}\Psi_{i_3j_3}(z) + a_{i_1i_2}(z)\Psi_{j_1j_3}\Psi_{i_3j_2}(z)\right) + \\
& +\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\left(\Psi_{i_1j_1}(z)\Psi_{i_2j_2}(z) + \Psi_{i_1j_2}(z)\Psi_{i_2j_1}(z) + \right. \\
& \left. +\Psi_{j_1j_2}\left(\Psi_{i_1i_2} + 2\Psi_{i_1i_2}^{(1)}(z) + \Psi_{i_1i_2}^{(2)}(z)\right)\right),
\end{aligned}$$

величини  $\Delta_{j_1j_2}(z)$ ,  $\varphi_{i_1j_1}^{(1)}$ ,  $\varphi_{i_1j_1}^{(k)}(z)$ ,  $k = 2, 3, 4$ ,  $\Psi_{i_1i_2}^{(l)}(z)$ ,  $l = 1, 2$ , означено в (4.2.62), (4.2.65), (4.2.71).

Перепишемо (4.2.72) природнішим чином.

**Наслідок 4.2.4.** В умовах теореми 4.2.2

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathbb{B}_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - \mathbb{B}(z)\right)^2 &= K_T^2(z)T^{-1} + (M_T(z) + N_T(z))T^{-2} + \\
&+ O\left(T^{-5/2}\ln^3 T\right).
\end{aligned} \tag{4.2.73}$$

З рівностей (4.2.56) і (4.2.66) випливає

**Наслідок 4.2.5.** Якщо умови теореми 4.2.2 виконано для  $k = 3$ , і в нерівності (4.2.2) число  $t \geq 4$ , то

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{B}_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - \mathbb{B}(z)\right)^2 = K_T^2(z)T^{-1} + O\left(T^{-2}\ln^{5/2} T\right).$$

В свою чергу з (4.2.61) маємо

**Наслідок 4.2.6.** Якщо умови теореми 4.2.2 виконано для  $k = 2$ , і в нерівності (4.2.2) число  $t \geq 2$ , то

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{B}_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - \mathbb{B}(z)\right)^2 = K_T^2(z)T^{-1} + O\left(T^{-3/2}\ln^2 T\right).$$

З теорем 4.2.1 і 4.2.2 випливає наступне твердження.

**Теорема 4.2.3.** За умов теореми 4.2.2

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}\mathbb{B}_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) &= K_T^2(z)T^{-1} + (M_T(z) + N_T(z) - L_T^2(z))T^{-2} + \\
&+ O\left(T^{-5/2}\ln^3 T\right).
\end{aligned} \tag{4.2.74}$$

Доведення. Дійсно,

$$\mathbf{D}B_T(z, \hat{\theta}_T) = \mathbf{E} \left( B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z) \right)^2 - \left( \mathbf{E} B_T(z, \hat{\theta}_T) - B(z) \right)^2. \quad (4.2.75)$$

Підставляючи в (4.2.75) вирази (4.2.73) і (4.2.35), отримуємо (4.2.74).  $\square$

**Наслідок 4.2.7.** *Нехай умови теореми 4.2.2 виконано для  $k = 3$ , і в нерівності (4.2.2) число  $m \geq 4$ . Тоді*

$$\mathbf{D}B_T(z, \hat{\theta}_T) = K_T^2(z)T^{-1} + O\left(T^{-2} \ln^{5/2} T\right). \quad (4.2.76)$$

Коли ті ж умови виконано для  $k = 2$  і  $m \geq 2$ , то

$$\mathbf{D}B_T(z, \hat{\theta}_T) = K_T^2(z)T^{-1} + O\left(T^{-3/2} \ln^2 T\right). \quad (4.2.77)$$

Наступний приклад є продовженням прикладу 2.2.1.

**Приклад 4.2.1.** Розглянемо функцію регресії  $g(t, \tau) = e^{\langle y(t), \tau \rangle}$ , де  $\langle y(t), \tau \rangle = \sum_{i=0}^q y_i(t)\tau_i$ , регресори  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_q(t))$ ,  $t \geq 0$ , набувають значень в компактній множині  $Y \subset \mathbb{R}^q$  та мають властивість (2.2.29). Покажемо, що ця функція задовольняє всім вимогам, висунутим до функції регресії у теоремах 4-го розділу роботи.

Перш за все, у самому тексті прикладу 2.2.1 доведено, що для функції  $g(t, \tau)$  справедливе **Р4**. Щодо умови **Р1**", зауважимо, що функція  $g(t, \tau)$  нескінченно диференційовна і співвідношення

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} T^{-1} d_{iT}^2(\tau) > 0, \quad \tau \in \Theta, \quad i = \overline{1, q},$$

також отримано в тексті прикладу 2.2.1. Маємо далі  $g^{(\alpha)}(t, \tau) = y^\alpha(t) e^{\langle y(t), \tau \rangle}$ , де  $y^\alpha(t) = y_1^{\alpha_1}(t) \dots y_q^{\alpha_q}(t)$ , і, таким чином, всі похідні  $g^{(\alpha)}(t, \tau)$  локально інтегровні з квадратом за  $t$  для довільного  $\tau \in \Theta^c$ .

Для будь-якого натурального  $k \geq 2$  та мультиіндекса  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ ,

$$|\alpha| = k,$$

$$\sup_{\tau \in \Theta^c} T^{-1} \int_0^T (y^\alpha(t))^2 e^{2\langle y(t), \tau \rangle} dt \leq C_1^2(\alpha), \quad (4.2.78)$$

що забезпечує виконання нерівностей (4.1.3) умови **R8**. Більш того, як вже було доведено, справедливість (4.1.3) для мультиіндексів  $\alpha$  з  $|\alpha| = k + 1$  тягне за собою виконання нерівностей (4.1.4) умови **R8**. Виконання умови **R10** очевидне.

Нарешті, додатна визначеність матриці

$$\mathfrak{J}(\theta) = \left( T^{-1} \int_0^T y_i(t) y_j(t) e^{2\langle y(t), \theta \rangle} dt \right)_{i,j=1}^q \quad (4.2.79)$$

впливає з (2.2.29) та інших припущень щодо функцій  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_q(t))$ ,  $t \geq 0$ , тобто є вірною умова **R9**.

Наприкінці 4-го розділу зробимо загальне зауваження, яке стосується всього тексту дисертації.

**Зауваження 4.2.1.** Припустимо, що замість нелінійної моделі (2.1.1) ми розглядаємо лінійну модель з функцією регресії

$$g(t, \theta) = \sum_{i=1}^q \theta_i g_i(t), \quad t \geq 0, \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q.$$

Прослідкуємо, що станеться з результатами, наведеними в роботі.

По-перше, результати підрозділу 2.2 залишаються вірними, а інтерпретація умов теорем 2.2.1 та 2.2.2, продиктована лінійністю функції регресії, тільки полегшується.

По-друге, у 3-му розділі зникають всі умови, які містять другі частинні похідні функції регресії, що значно спрощує доведення центральної граничної теореми 3.2.1.

По-третє, результати підрозділу 4.1 для лінійної моделі регресії втрачають сенс, тому що тоді поняття стохастичного асимптотичного розв'язання стає виродженим, завдяки рівності нулю всіх частинних похідних функції регресії за параметрами порядку вище першого. З іншого боку,

у підрозділі 4.2 зсув, середній квадрат відхилення та дисперсію залишкової корелограми у випадку лінійної параметризації моделі можна підрахувати в явному вигляді, причому отримати ті ж самі рівності в теоремах 4.2.1 – 4.2.3, але без залишкових членів.

#### **Висновки до розділу 4**

У розділі отримано уточнення теореми про стохастичне асимптотичне розвинення нормованої ОНК невідомого параметра функції регресії. З використанням цього факту знайдено стохастичний асимптотичний розклад нормованої залишкової корелограми і записано в явному вигляді перші три члени розвинення.

Спираючись на це стохастичне асимптотичне розвинення у випадку, коли у функції регресії існують та неперервні всі частинні похідні за параметрами до порядків  $k = 4, 3, 2$ , отримано асимптотичні розвинення зсуву, середнього квадрата відхилення та дисперсії залишкової корелограми.

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено вивченню асимптотичних властивостей корелограмної оцінки неперервного в середнє квадратичному та м.н. вибірково неперервного гауссівського стаціонарного шуму в нелінійній моделі регресії з неперервним часом. Корелограмну оцінку побудовано за залишками, тобто різницями між значеннями випадкового процесу, що спостерігається, та значеннями функції регресії, в яку замість невідомого параметра підставлено його ОНК. Зокрема,

- наведено умови, за яких імовірності великих відхилень ОНК параметра функції регресії мають експоненціально спадну мажоранту;

- отримано результат про експоненціальну оцінку зверху ймовірностей великих відхилень корелограми гауссівського стаціонарного процесу з константою в експоненті, що не залежить від тривалості спостереження його траєкторії;

- доведено теорему про існування експоненціально спадної мажоранти для ймовірностей великих відхилень залишкової корелограми, і, в якості наслідку, отримано посилену властивість слабкої консистентності залишкової корелограми як оцінки невідомої коваріаційної функції випадкового шуму;

- доведено функціональну теорему в просторі неперервних функцій про асимптотичну нормальність залишкової корелограми;

- отримано стохастичне асимптотичне розвинення залишкової корелограми;

- з використання цього стохастичного асимптотичного розвинення знайдено асимптотичні розвинення зсуву, середнього квадрата відхилення та дисперсії залишкової корелограми у випадку, коли функція регресії має неперервні всі частинні похідні за параметрами до порядків 4, 3 та 2 включно.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бардадим Т.О. Апроксимація поліномами оцінки найменших квадратів при нестандартному нормуванні / О.В. Іванов, Т.О. Бардадим // ДАН України, серія А. — 1985. — 7. — С. 59–61.
2. Бартлетт М.С. Введение в теорию случайных процессов / Бартлетт М.С. // М.: ИЛ. — 1958. — 384 с.
3. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер/ П. Биллингсли // М.:Наука. — 1977. — 352 с.
4. Блажієвська І.П. Кумулянтні методи в задачах оцінювання перехідних функцій однорідних лінійних систем / І.П. Блажієвська // Дис. канд. фіз.-мат. наук., К.: КНУ ім. Тараса Шевченка. — 2015. — 191 с.
5. Булдыгин В.В. Метрические характеристики случайных величин и процессов/ В.В. Булдыгин, Ю.В. Козаченко // К.:ТВиМС. — 1998. — 289 с.
6. Булдыгин В.В. О свойствах эмпирической корелограммы гауссовского процесса с интегрируемой в квадрате спектральной плотностью/ В.В. Булдыгин // Укр. мат. журн. — 7. — 1995. — С. 876–889.
7. Бурнашев М.В. Асимптотическое разложение оценок параметра сигнала в белом гауссовском шуме / М.В. Бурнашев // Мат. сборник. — 1977. — 104(146). — С. 179–206.
8. Бурнашев М.В. Исследование свойств второго порядка статистических оценок в схеме независимых наблюдений / М.В. Бурнашев // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1981. — 45(3). — С. 509–539.
9. Вентцель А.Д. Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов / Вентцель А.Д. // М.: Наука. — 1986. — 176 с.
10. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход // М.: Наука. — 1965. — 656 с.
11. Гихман И.И. Теория случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход // М.: Наука. — 1971. — т.1. — 664 с.

12. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы / У. Гренандер // М.: ИЛ. — 1961. — 167 с.
13. Гусев С.И. Асимптотические разложения, связанные с некоторыми статистическими оценками в гладком случае. I. Разложения случайных величин / С.И. Гусев // ТВП. — 1975. — XX. — 3. — С. 488—514;
14. Гусев С.И. Асимптотические разложения, связанные с некоторыми статистическими оценками в гладком случае. II. Разложения моментов и распределений // ТВП. — 1976. — XXI. — 1. — С. 16—33.
15. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия / Е.З. Демиденко // М.: Финансы и статистика. — 1981. — 304 с.
16. Демиденко Е.З. Оптимизация и регрессия / Е.З. Демиденко // М.: Наука. — 1989. — 296 с.
17. Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов / А.Я. Дороговцев // К.: Вища школа. — 1982. — 192 с.
18. Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Г. Смит // М.: Финансы и статистика. — 1986. — Кн.1. — 336 с., Кн.2. — 351 с.
19. Ибрагимов И.А. Гауссовские случайные процессы / И.А. Ибрагимов, Ю.А. Розанов // М.:Наука. — 1970. — 384 с.
20. Ибрагимов И.А. Асимптотическая теория оценивания / И.А. Ибрагимов, Р.З. Хасьминский // М.:Наука. — 1979. — 528 с.
21. Ибрамхалилов И.Ш. Состоятельные оценки параметров случайных процессов / И.Ш. Ибрамхалилов, А.В. Скороход // К.: Наукова думка. — 1980. — 192 с.
22. Иванов А. В. Асимптотическое разложение распределения оценки наименьших квадратов параметра нелинейной регрессии / А.В. Иванов // Теория вероят. и ее примен. — 1976. — 21. — С. 571—583.
23. Иванов О.В. Асимптотична нормальність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Иванов, К.К. Москвичова // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2014. — 91. — С. 55—63.
24. Иванов О.В. Асимптотичний розклад моментів корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії /

- О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**(6). – С. 787–805.
25. Іванов О.В. Консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії/ О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2015. – **4**(102). – С. 57–62.
26. Іванов О.В. Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії/О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2014. – **90**. – С. 77–90.
27. Іванов О.В. Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в моделі «сигнал+шум» / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Збірник тез за матеріалами третьої міжуніверситетської наукової конференція молодих вчених з математики та фізики. – Київ. – 2013. – С. 44–45.
28. Іванов О. В. Консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Матеріали XV Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. Матеріали конференції. Секція III. – Київ. – 2014. – С. 65.
29. Кнопов П.С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем / П.С. Кнопов // К.: Наукова думка. – 1980. – 151 с.
30. Козаченко Ю.В. Про корелограмні оцінки імпульсних перехідних функцій / Ю.В. Козаченко, І.В. Розора // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2015. – **93**. – С. 75–86.
31. Крамер Г. Стационарные случайные процессы/Г. Крамер, М. Лидбеттер // М.: Мир. – 1969. – 399 с.
32. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер // М.: ИЛ. – 1948. – 632 с.
33. Кукуш А.Г. Асимптотические свойства оценок бесконечномерных параметров случайных процессов / А.Г. Кукуш // Дис. ... доктора физ.-мат. наук, К.: Институт математики НАН Украины. – 1995. – 268 с.

34. Кутоянц Ю.А. Оценивание параметров случайных процессов / Ю.А. Кутоянц // Ереван: Из-во АН Армянской ССР. — 1980. — 253 с.
35. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений / Ю.В. Линник // М.: Физматгиз. — 1962. — 352 с.
36. Липцер Р.Ш. Статистика случайных процессов / Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев // М.: Наука. — 1974. — 696 с.
37. Марков А.А. Закон больших чисел и метод наименьших квадратов (1898) / А.А. Марков // Избр. труды, М.: из-во АН СССР. — 1951. — С. 233–251.
38. Масюк С.В. Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків / С.В. Масюк, О.Г. Кукуш, С.В. Шкляр, М.І. Чепурний, І.А. Ліхтарьов // Київ "ДІА". — 2015. — 288 с.
39. Митрофанова Н.М. Об асимптотике распределения оценки максимального правдоподобия векторного параметра / Н.М. Митрофанова // ТВП. — 1967. — **12**. — С. 418–425.
40. Москвичова К.К. Консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в регресійній моделі / К.К. Москвичова // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики. Тези доповідей. — Київ. — 2015. — С. 24.
41. Москвичова К.К. Про асимптотичні розклади моментів оцінки коваріаційної функції випадкового шуму / К.К. Москвичова // Матеріали XVI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. Секція III. — Київ. — 2015. — С. 51–52.
42. Москвичова К.К. Великі відхилення корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму / К.К. Москвичова // Матеріали XVII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. Секція III. — Київ. — 2016. — С. 118–120.
43. Москвичова К.К. Великі відхилення корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / К.К. Москвичова // Доповіді Національної академії наук України. — 2016. — №9. — С. 23–28.

44. Москвичова К.К. Про ймовірність великих відхилень корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму / К.К. Москвичова // П'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Тези доповідей. – Київ. – 2016. – С. 14.
45. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения / С.Р. Рао // М.: Наука. – 1968. – 548 с.
46. Саулис С. Предельные теоремы о больших отклонениях / Л. Саулис, В. Статулявичус // Вильно: Мокслас. – 1989. – 208 с.
47. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц // М.: Москва. – Том II. – 1959. – 806 с.
48. Хеннан Э. Многомерные временные ряды / Э. Хеннан // М.: Мир. – 1976. – 757 с.
49. Чибисов Д. М. , Асимптотические разложения для оценок максимального правдоподобия / Д. М. Чибисов // ТВП. – 1972. – 17:2. – С. 387–388.
50. Чибисов Д. М. Асимптотическое разложение для распределения статистики, допускающей асимптотическое разложение/ Д. М. Чибисов // ТВП. – 1972. – 17:4. – С. 658–668.
51. Чибисов Д. М. Асимптотическое разложение для одного класса оценок, включающего оценки максимального правдоподобия / Д. М. Чибисов // ТВП. – 1973. – 18:2. – С. 303–311.
52. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей / М.И. Ядренко // К.: Вища школа. – 1980. – 208 с.
53. Anderson T.W. The Statistical Analysis of Time Series / T.W. Anderson // Wiley, New York. – 1971. – 704 p.
54. Bard Y. Nonlinear Parameter Estimation / Y. Bard // Academic Press, New York. – 1974. – 341 p.
55. Bates D.M. Nonlinear Regression Analysis and Its Application / D.M. Bates, D.G. Watts // Wiley, New York. – 1988. – 365 p.
56. Bhattacharya R.N. On the Validity of the Formal Edgeworth Expansion / R.N. Bhattacharya, J.K. Ghosh // Ann. Statist. – 1978. – 6. – P. 434–451.

57. Box M.J. Bias in Nonlinear Estimation (with Discussion) / M.J. Box // J. Roy. Statist. Soc. B. — 1971. — **32**. — P. 171–201.
58. Brockwell P.I. Introduction to time series and forecasting / P.I. Brockwell, R.A. Davis // Springer. — 2-nd Edition. — 2002. — 434 p.
59. Carroll R.J. Measurement Error in Nonlinear Models / R.J. Carroll, D. Ruppert, L.A. Stefanski // New York: Chapman&Hall. — 1995. — 305 p.
60. Carroll R.J. Measurement Error in Nonlinear Models. A Modern Perspective / R.J. Carroll, D. Ruppert, L.A. Stefanski, C.A. Crainiceanu // Boca Raton: Chapman&Hall. — 2006. — 438 p.
61. Chibisov D. M. On the normal approximation for a certain class of statistics / D. M. Chibisov // Proc. 6th Berkeley Symp. Mathematical Statistics and Probability. — 1972. — I. — P. 153–174.
62. Clarke G.P.Y. Moments of the Least Squares Estimators in a Non-Linear Regression Model / G.P.Y. Clarke // J. Roy. Statist. Soc. B. — 1980. — **42**. — P. 227–237.
63. Fox J. Applied Regression Analysis and Generalized Linear Models, 3rd ed. / J. Fox // SAGE Publications. — 2015. — 816 p.
64. Fuller W.A. Measurement Error Models / W.A. Fuller // New York: Wiley. — 1987. — 440 p.
65. Hu S.H. A large deviation result for the least squares estimators in nonlinear regression/ S.H. Hu // Stochastic Processes and their Applications. — 1993. — **47**. — P. 345–352.
66. Huang X. The large deviation for the least squares estimator of nonlinear regression model based on WOD errors/ X. Huang, X. Tang, X. Deng, X. Wang // J. Inequal. Appl. — 2016. — No. 125. — 11 p.
67. Ivanov A.V. A solution of the problem of detecting hidden periodicities/ A.V. Ivanov // Theory Probability and Math. Statist. — **20**. — 1980. — P. 51–68.
68. Ivanov A.V. An Asymptotic Expansion of the Least Squares Estimator of a Non-Linear Regression Vector Parameter / A.V. Ivanov, S. Zwanzig // Theor. Prob. Math. Statist. — 1983. — **26**. — P. 45–52.
69. Ivanov A.V. Asymptotic Theory of Nonlinear Regression / A.V. Ivanov // Kluwer Academic Press, Dordrecht. — 1997. — 327 p.

70. Ivanov A.V. Large deviations of regression parameter estimate in the models with stationary sub-Gaussian noise / A.V. Ivanov // Theory of Probab. and Math. Statist. – 2016. – **95**. – P. 92–100.
71. Ivanov A.V. Statistical Analysis of Random Fields / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko // Dordrecht-Boston-London: Kluwer Acad. Publ. – 1989. – 244 p.
72. Ivanov A.V. Large deviations of regression parameter estimator in continuous-time model with sub-Gaussian noise / A.V. Ivanov, I. Orlovskiy // MSTA. – 2018. – **5**(2). – P. 191–206.
73. Ivanov A.V. Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, B.M. Zhurakovskiy // Statist.: J. Theor. Appl. Statist. – 49(1). – 2015. – P. 156–186.
74. Ivanov A.V. Properties of correlogram estimator of random noise covariance function in nonlinear regression model / A.V. Ivanov, K.K. Moskvychova // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications. IV. – Kyiv. – 2018. – P. 29-30.
75. Gallant A.R. Nonlinear Statistical Models / A.R. Gallant // Wiley, New York. – 1987. – 610 p.
76. Gauss K.F. Werke / K.F. Gauss // Gottingen. – 1809. – Vol. 1. – 484 p.
77. Grenander U. On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance / U. Grenander // Ann. Math. Statist. – 1954. – Vol. 25, 2. – P. 252-272.
78. Grenander U. Statistical Analysis of Stationary Time Series / U. Grenander, M. Rosenblatt // Almqvist and Wiksell, Stockholm. – 1956. – 300 p.
79. Grenander U. Statistical Analysis of Stationary Time Series / U. Grenander, M. Rosenblatt // Chelsea Publ. Company, New York. – 1984. – 308 p.
80. Kozachenko Yu.V. A criterion for testing hypothesis about impulse response function / Y.V. Kozachenko, I. Rozora // Statistics, Optimization and Information Computing. – 2016. – 4 (3). – P. 214–232.

81. Kozachenko Yu.V. A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process / Yu.V. Kozachenko, V. Troshki // *Modern Stochastics: Theory and Applications*. – 2014. – Vol. 1, №2. – P. 139–149.
82. Kozachenko Yu.V. The criterion of hypothesis testing on the covariance function of a Gaussian stochastic process / Y.V. Kozachenko, M.P. Sergiienko // *Monte Carlo Methods Appl.* – 2014. – **20**(2). – P. 137–144.
83. Kutoyants Yu.A. *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes* / Yu.A. Kutoyants // New York: Springer. – 2004. – 482 p.
84. Leonenko N.N. *Limit Theorems for Random Fields with Singular Spectrum* / N.N. Leonenko // Kluwer AP, Dordrecht. – 1999. – 401 p.
85. Linnik Yu. V. On Asymptotic Distribution of Maximum Likelihood Estimators / Yu.V. Linnik, N.M. Mitrofanova // *Sov. Math.* – 1963. – **4**. – P. 421–423.
86. Linnik Yu. V. Some Asymptotic Expansions for the Distribution of the Maximum Likelihood Estimate / Yu.V. Linnik, N.M. Mitrofanova // *Sankhya*. – 1965. – A. **27**. – P. 73–82.
87. Markoff A.A. *Wahrscheinlichkeitsrechnung* / A.A. Markoff // Teubner, Leipzig. – 1900. – 317 p.
88. Michel R. An Asymptotic Expansion for the Distribution of Asymptotic Maximum Likelihood Estimators of Vector Parameters / R. Michel // *J. Multivar. Anal.* – 1975. – **5**. – P. 67–82.
89. Michel R. A Myltidimensional Newton-Raphson Method and Its Applications of the Existence of Asymptotic  $F_n$ -Estimators and Their Stochastic Expansions / R. Michel // *J. Multivar. Anal.* – 1977. – **7**. – P. 235–248.
90. Moskvychova K.K. Asymptotic expansion related to random noise covariance function estimator in nonlinear regression model / K.K. Moskvychova // *Ukrainian-German Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory*. – 2013. – Koktebel. – P. 10.

91. Moskvychova K.K. Asymptotic expansions of the residual correlogram estimator moments / K.K. Moskvychova // International Conference Stochastic Processes in Abstract Spaces. – Kyiv. – 2015. – P. 41.
92. Moskvychova K.K. Asymptotic Normality of Residual Correlogram Estimator / K.K. Moskvychova // International Conference Probability, Reliability and Stochastic Optimization. Conference materials. – Kyiv. – 2015. – P. 43–44.
93. Moskvychova K. K. Large deviations of residual correlogram as estimator of the noise unknown covariance function / K.K. Moskvychova// International Conference "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes" dedicated to the 100th anniversary of I. I. Gikhman. – Kyiv. – 2018. – P. 67-68.
94. Moskvychova K.K. Probabilities of large deviations of random noise covariance function estimator in nonlinear regression model / K.K. Moskvychova // Limit Theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics. International workshop in honour of Prof. V.V. Buldygin. Abstracts. – Kyiv. – 2016. – P. 39.
95. Moskvychova K.K. Strong consistency of the correlogram estimator of covariance function of random noise in nonlinear regression/ K.K. Moskvychova // 4th International Scientific Conference of Students and young scientists «Theoretical and applied aspects of cybernetics TAAC». – Kyiv.:«Bukrek». – 2014. – P. 158–161.
96. Neyman J. Extention of Markoff Theorem on Least Squares / J. Neyman, F.N. Davis // Statist. Res. Mem. – 1938. – Vol. 2. – P. 105-116.
97. Pfanzagl J. On the measurability and consistency of minimum contrast estimates/ Pfanzagl J.// Metrika. – 1969. – **14**. – P. 249–272.
98. Pfanzagl J. Asymptotically Optimum Estimation and Test Procedures / J. Pfanzagl // Proc. Prague Symp. on Asymptotic Statistics. – 1973. – **I**. – P. 201–272.
99. Pfanzagl J. Asymptotic Expansions Related to Minimum Contrast Estimators / J. Pfanzagl // Ann. Statist. – 1973. – **I**. – P. 993–1026.
100. Prakasa Rao B.L.S. Asymptotic Theory of Statistical Inference / B.L.S. Prakasa Rao // New York: Wiley. – 1987. – 464 p.

101. Prakasa Rao B.L.S. On the exponential rate of convergence of the least squares estimator in the nonlinear regression model with Gaussian errors/ B.L.S. Prakasa Rao // Stat. Probab. Lett. – 1984. – **2**. – P. 139–142.
102. Prakasa Rao B.L.S. The rate of convergence for the least squares estimator in a non-linear regression model with dependent errors/ B.L.S. Prakasa Rao // J. Multivariate Analysis. – 1984. – **14**(3). – P. 315–322.
103. Quinn B.G. The Estimation and Tracking of Frequency / B.G. Quinn, E.J. Hannan // Cambridge Univ. Press. – 2001. – 266 p.
104. Rao Malempati M. Stochastic Processes - Inference Theory / Malempati M. Rao // Springer, 2-nd Edition. – 2014. – 668 p.
105. Ratkovsky D.A. Handbook of Nonlinear Regression Models / D.A. Ratkovsky // Marcel Dekker, New York. – 1983. – 264 p.
106. Ross G.J.S. Nonlinear Estimation / G.J.S. Ross // Springer-Verlag, Berlin. – 1990. – 189 p.
107. Seber G.A.F. Linear Regression Analysis, 2nd ed. / G.A.F. Seber, A.J. Lee // New York: Wiley. – 2003. – 572 p.
108. Stulajter F. Predictions in Time Series Using Regressions Models / F. Stulajter // New York: Springer-Verlag. – 2002. – 231 p.
109. Sieders A. A large deviation result for parameter estimators and its application to nonlinear regression analysis/ A. Sieders, K. Dzhaparidze// Ann. Statist. – 1987. – **15**(3). – P. 1031–1049.
110. Schneeweiss H. Lineare Modelle mit fehlerbehafteten Daten / H. Schneeweiss, H.-J. Mittag // Heidelberg: Physica-Verlag. – 1986. – 504 p.
111. van de Geer S. On rates of convergence in least squares estimation (report)/ S. van de Geer // Amsterdam: Centre for Mathematics and Computer Science. – 1986.
112. Varadhan S.R.S. Asymptotic probability and differential equations / S.R.S. Varadhan // Comm. Pure Appl. Math. – 1966. – **19**(3). – P. 261–286.
113. Yang W. Large deviation for a least squares estimator in a nonlinear regression model / W. Yang, S.H. Hu // Statist. Probab. Lett. – 2014. – **91**. – P. 135–144.

## ДОДАТОК

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ  
ДИСЕРТАЦІЇ

*Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:*

1. Іванов О.В. Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2014. – 90. – С. 78-91.
2. Іванов О.В. Асимптотична нормальність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2014. – 91. – С. 55-63.
3. Іванов О.В. Асимптотичний розклад моментів корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // УМЖ – 2014. – **66**(6). – С. 784-805.
4. Іванов О.В. Консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // – К.: Наукові вісті «НТУУ КПІ». – 2015. – 4. – С. 57-62.
5. Москвичова К.К. Великі відхилення корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / К.К. Москвичова // Доповіді Національної академії наук України. – 2016. – №9. – С. 23-28.

*Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:*

6. Moskvychova K.K. Asymptotic expansion related to random noise covariance function estimator in nonlinear regression model / K.K. Moskvychova // Ukrainian-German Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory. – 2013. – Koktebel. – P. 10.
7. Іванов О.В. Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в моделі «сигнал+шум» /

- О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Збірник тез за матеріалами третьої міжуніверситетської наукової конференція молодих вчених з математики та фізики. – Київ. – 2013. – С. 44–45.
8. Іванов О. В. Консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії / О.В. Іванов, К.К. Москвичова // Матеріали XV Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. Матеріали конференції. Секція III. – Київ. – 2014. – С. 65.
  9. Moskvychova K.K. Strong consistency of the correlogram estimator of covariance function of random noise in nonlinear regression / K.K. Moskvychova // 4th International Scientific Conference of Students and young scientists «Theoretical and applied aspects of cybernetics ТААС». – Kyiv.: «Bukrek». – 2014. – P. 158-161.
  10. Moskvychova K.K. Asymptotic expansions of the residual correlogram estimator moments / K.K. Moskvychova // International Conference Stochastic Processes in Abstract Spaces. – Kyiv. – 2015. – P. 41.
  11. Москвичова К.К. Консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в регресійній моделі / К.К. Москвичова // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики. Тези доповідей. – Київ. – 2015. – С. 24.
  12. Moskvychova K.K. Asymptotic Normality of Residual Correlogram Estimator / K.K. Moskvychova // International Conference Probability, Reliability and Stochastic Optimization. Conference materials. – Kyiv. – 2015. – P. 43–44.
  13. Москвичова К.К. Про асимптотичні розклади моментів оцінки коваріаційної функції випадкового шуму / К.К. Москвичова // Матеріали XVI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. Секція III. – Київ. – 2015. – С. 51–52.
  14. Москвичова К.К. Великі відхилення корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму / К.К. Москвичова // Матеріали XVII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. Секція III. – Київ. – 2016. – С. 118–120.

15. Москвичова К.К. Про ймовірність великих відхилень корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму / К.К. Москвичова // П'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Тези доповідей. – Київ. – 2016. – С. 14.
16. Moskvychova K.K. Probabilities of large deviations of random noise covariance function estimator in nonlinear regression model / K.K. Moskvychova // Limit Theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics. International workshop in honour of Prof. V.V. Buldygin. Abstracts. – Kyiv. – 2016. – P. 39.
17. A.V. Ivanov Properties of correlogram estimator of random noise covariance function in nonlinear regression model / A.V. Ivanov, K.K. Moskvychova // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications. IV. – Kyiv. – 2018. – P. 29–30.
18. Moskvychova K. K. Large deviations of residual correlogram as estimator of the noise unknown covariance function / K.K. Moskvychova// International Conference "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes"dedicated to the 100th anniversary of I. I. Gikhman. - Kyiv. - 2018. - P. 67-68.