

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ КЕРУВАННЯ РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Видання друге, перероблене і доповнене

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, які навчаються
за спеціальністю
G7 «Автоматизація, комп'ютерно- інтегровані технології та робототехніка»

Укладач Л. Д. Ярощук

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2026

УДК 519.873

Я 76

Укладач

Ярошук Людмила Дем'янівна, канд. техн. наук, доц.

Рецензент

Щербина В.Ю., д-р техн. наук, проф., каф. хімічного, полімерного та силікатного машинобудування КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний
редактор

Цапар В. С., канд. техн. наук, завідувач каф. технічних та програмних засобів автоматизації факультету автоматизації, промислової інженерії та екології КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 08.05.2026 р.)*

*за поданням вченої ради факультету автоматизації, промислової інженерії та екології
(протокол № 4 від 27.04.2026 р.)*

XXX **Статистичні методи досліджень об'єктів та систем керування**
[Електронний ресурс] : розрахункова робота : навч. посіб. для здобувачів ступеня магістра за освіт. програмою «Технічні та програмні засоби автоматизації» спец. G7 Автоматизація, комп'ютерно- інтегровані технології та робототехніка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Л. Д. Ярошук. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 69 с.

Посібник містить матеріал для виконання розрахункової роботи з дослідження об'єктів та систем керування статистичними методами. Розглянуто отримання експериментальних даних, визначення емпіричних функцій розподілу та гістограм, точкових та інтервальних оцінок параметрів; оцінювання кореляційного зв'язку, ідентифікація об'єкта керування та аналіз регресійних моделей. Наведено приклади виконання завдань в *MathCAD*, *MatLab* і *MS Excel*.

Посібник є другим, переробленим і доповненим виданням навчального посібника «Статистичні методи: Теорія оцінювання та статистичні гіпотези: Розрахункова робота [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Л. Д. Ярошук. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,72 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 64 с.

Призначений для здобувачів ступеня магістра за спеціальністю «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» усіх форм навчання.

УДК 519.873

Реєстр. № НП 25/26- . Обсяг 2,08 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026

ЗМІСТ

	стор.
ВСТУП.....	4
МЕТА ТА ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ.....	6
ЗАВДАННЯ НА РОЗРАХУНКОВУ РОБОТУ.....	7
СКЛАД, ОБСЯГ І СТРУКТУРА РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ.....	8
МЕТОДИКА ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ.....	10
РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ОФОРМЛЕННЯ	54
ПОРЯДОК ЗАХИСТУ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	55
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	57
ДОДАТКИ. Статистичні таблиці.....	59
Додаток 1. Значення функції Лапласа.....	60
Додаток 2. Критичні значення t –критерію (Стьюдента).....	62
Додаток 3. Критичні значення F – критерію (Фішера) при $\alpha = 5\%$	65

ВСТУП

Математична статистика – це наука, яка створює раціональні прийоми обробки експериментальних даних, що належать до масових явищ і відображають вплив випадкових факторів.

Предметом навчальної дисципліни «Статистичні методи досліджень об'єктів та систем керування» є методи експериментального дослідження об'єктів та систем, обробки та аналізу даних статистичними методами для створення моделей та систем автоматичного керування (САК).

Отримані моделі використовують в алгоритмах керування технологічними процесами для моніторингу, прогнозування, пошуку оптимальних режимів тощо.

Дисципліна має сформувати у студентів наступні компетентності:

- здатність аналізувати виробничо-технологічні системи і комплекси як об'єкти автоматизації;
- здатність проведення досліджень на відповідному рівні;
- здатність застосовувати спеціалізоване програмне забезпечення та цифрові технології для розв'язання складних задач і проблем автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти будуть вміти застосовувати методи теорії ймовірностей та математичної статистики для дослідження та створення систем автоматизації складними технологічними та організаційно-технічними об'єктами кіберфізичних виробництв.

Розрахункова робота має наступне спрямування – планування експериментів на конкретному технологічному об'єкті та статистична обробка експериментальних даних, яка передбачає оцінювання властивостей технологічних змінних як випадкових величин (ВВ), ідентифікацію об'єкту та аналіз отриманих моделей.

При виконанні роботі передбачено використання математичних пакетів, зокрема *MathCAD*, *MatLab* та *MS Excel*.

Посібник є другим, переробленим та доповненим виданням навчального посібника «Статистичні методи: Теорія оцінювання та статистичні гіпотези: Розрахункова робота [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Л. Д. Ярощук. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,72 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 64 с.».

У порівнянні з першим виданням уведено матеріали по організації експериментальних досліджень об'єктів в умовах функціонування контурів керування зі зворотним зв'язком, наведено рекомендації по експертному визначенню даних для розрахункової роботи, приклади виконання завдань засобами *MatLab*, формули в алгоритм аналізу альтернативних моделей шляхом порівняння залишкових дисперсій. Для балансу складності робіт та обсягу часу самостійної роботи студентів із переліку завдань вилучені інтервальне оцінювання дисперсій та параметрів регресійних рівнянь. Оновлено список використаної та рекомендованої літератури.

МЕТА ТА ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Метою виконання розрахункової роботи є закріплення знань, отриманих на лекціях та набуття умінь для виконання дослідження технологічних об'єктів та систем керування за результатами експериментів.

Основні задачі, які стоять перед розрахунковою роботою, наступні:

- ознайомлення з методиками отримання даних в пасивному та активному експериментах, спрямованих на дослідження властивостей випадкових величин експериментально-статистичними методами;
- визначення властивостей емпіричних законів розподілу ймовірностей, зокрема точкових та інтервальних оцінок їх параметрів;
- дослідження тісноти кореляційних зв'язків між випадковими величинами;
- отримання та дослідження регресійних моделей технологічних об'єктів керування (ТОК);
- ознайомлення з засобами математичних процесорів щодо виконання завдань розрахункової роботи.

Розрахунки треба проводити у середовищі однієї із спеціалізованих програм: *MatLab*, *MathCAD* або *MS Excel*, що підтвердити зображеннями відповідних вікон програм.

ЗАВДАННЯ НА РОЗРАХУНКОВУ РОБОТУ

1. Описати технологічний об'єкт керування. Визначити канал керування « $X \rightarrow Y$ » («Вхідна змінна $\rightarrow$ Вихідна змінна»).
2. Визначити статистичні властивості випадкових величин X та Y за результатами пасивних експериментів (ПЕ).
 - 2.1. Спланувати пасивний експеримент для дослідження об'єкту й отримати його результати.
 - 2.2. Розрахувати та зобразити емпіричні функції розподілу ймовірностей та гістограми для X та Y . Порівняти графіки емпіричної та теоретичної (для нормального закону) функцій розподілу ймовірностей.
 - 2.3. Розрахувати точкові оцінки математичних сподівань і дисперсій для X та Y .
 - 2.4. Розрахувати інтервальні оцінки математичних сподівань для X та Y при довірчій ймовірності 95%.
3. Визначити властивості кореляційного зв'язку між випадковими величинами X та Y за результатами активних експериментів (АЕ).
 - 3.1. Спланувати активний експеримент для отримання статичної характеристики об'єкта.
 - 3.2. Зобразити кореляційне поле для X та Y . Розрахувати вибірковий коефіцієнт парної кореляції між X та Y і перевірити гіпотезу про суттєвість цього кореляційного зв'язку при рівні значущості 5%.
 - 3.3. Отримати регресійні моделі ТОК: лінійну $- y = a_0 + a_1x$ та квадратичну $- y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Нанести відповідні функції на кореляційне поле.
 - 3.4. Перевірити адекватність обох моделей.
 - 3.5. Визначити точність моделей.
 - 3.6. Проаналізувати властивості залишків лінійної моделі.
 - 3.7. Перевірити однорідність залишкових дисперсій обох моделей і зробити висновок про доцільність застосування квадратичної моделі замість лінійної.

СКЛАД, ОБСЯГ І СТРУКТУРА РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Розрахункова робота подається у вигляді пояснювальної записки, яка містить текстову частину з описом технологічного об'єкта керування (не більше 2 сторінок), обґрунтуванням вибору випадкових величин, які будуть названі в подальшому X та Y , відповідних розрахунків та графіків. Значення X та Y подати у вигляді масивів (таблиць).

Склад роботи повинен відповідати пунктам завдання.

Обсяг роботи не повинен перевищувати 25 сторінок.

Згідно з наведеними вище завданнями на розрахункову роботу її структура повинна бути наступною:

Титульний аркуш

Завдання на розрахункову роботу.

ЗМІСТ (*приклад наведено далі*)

1. ОПИС ТЕХНОЛОГІЧНОГО ОБ'ЄКТУ КЕРУВАННЯ. ВИЗНАЧЕННЯ КАНАЛУ КЕРУВАННЯ « $X \rightarrow Y$ »

2. ВИЗНАЧЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН X ТА Y ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ПАСИВНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

2.1. Планування пасивного експерименту для дослідження об'єкту

2.2. Розрахунок та зображення емпіричних функцій розподілу ймовірностей та гістограм для X та Y . Порівняння графіків емпіричної та теоретичної (для нормального закону) функцій розподілу ймовірностей

2.3. Розрахунок точкових оцінок математичних сподівань і дисперсій для X та Y

2.4. Розрахунок інтервальних оцінок математичних сподівань для X та Y при довірчій ймовірності 95%

3. ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОРЕЛЯЦІЙНОГО ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ВИПАДКОВИМИ ВЕЛИЧИНАМИ X ТА Y ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ АКТИВНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

3.1. Планування активного експерименту для отримання статичної характеристики об'єкта

3.2. Зображення кореляційного поля для X та Y . Розрахунок вибіркового коефіцієнта парної кореляції між X та Y . Перевірка гіпотези про суттєвість кореляційного зв'язку при рівні значущості 5%

3.3. Отримання регресійної моделі ТОК: лінійної – $y = a_0 + a_1x$ та квадратичної – $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Нанесення відповідних функцій на кореляційне поле

3.4. Перевірка адекватності обох моделей

3.5. Визначення точності моделей

3.6. Аналіз властивостей залишків лінійної моделі

3.7. Перевірка однорідності залишкових дисперсій обох моделей.

Висновок про доцільність застосування квадратичної моделі замість лінійної

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

ДОДАТКИ (за необхідністю)

МЕТОДИКА ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Послідовність пояснень та прикладів виконання розрахункової роботи відповідають рекомендованому змісту.

1. ОПИС ТЕХНОЛОГІЧНОГО ОБ'ЄКТУ КЕРУВАННЯ. ВИЗНАЧЕННЯ КАНАЛУ КЕРУВАННЯ « $X \rightarrow Y$ »

При виборі ТОК треба керуватися рівнем власних знань про процеси, які в ньому відбуваються. При виконанні цього завдання студенту потрібно вибрати ТОК, технологія якого йому знайома з попередніх досліджень (дипломний чи курсовий проєкт, курсові та розрахункові роботи тощо). Дослідження передбачає опис процесів, які відбуваються в апараті, аналіз їх як об'єкту керування (інерційність, розподіленість властивостей, керувальні та збурювальні впливи тощо). Треба вказати канал керування («вхідна змінна, $X \rightarrow$ вихідна змінна, Y »), властивості якого будуть визначатися на основі експериментально-статистичних методів.

Як приклад ТОК використаємо процес підігріву пари шляхом спалювання природного газу у печі. На основі опису технології та вибору контуру керування треба скласти схеми, відповідні зображеним на рис. 1.1.

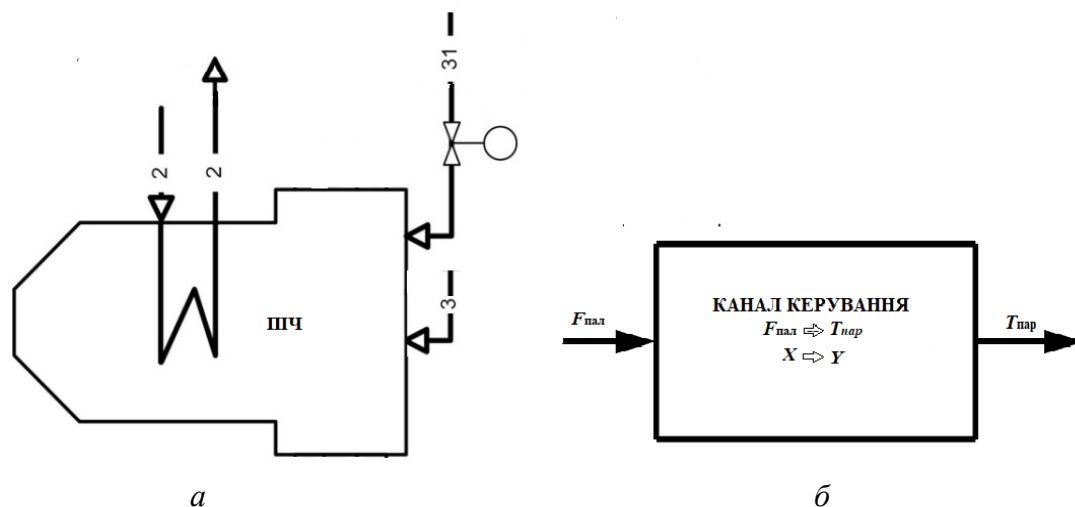


Рис. 1.1. Спрощені схеми об'єкта керування: а – технологічна; б – інформаційна;
потoki: 2 – пара; 3 – повітря; 31 – паливо;
 $F_{\text{пал}}$ – витрата палива; $T_{\text{пар}}$ – температура пари

2. ВИЗНАЧЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН X ТА Y ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ПАСИВНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

2.1. Планування пасивних експериментів для дослідження об'єкту

При плануванні ПЕ треба встановити необхідну кількість засобів вимірювання X та Y . Частина з них може вже входити в склад існуючого контуру керування. На рис. 2.1 наведено фрагмент схеми автоматизації печі, який задовольняє інформаційним запитам для отримання результатів пасивного та активного експериментів.

Якщо на виробництві функціонує САК температури пари впливом на витрату палива (блакитна лінія зв'язку), то її треба перевести з автоматичного в ручний режим, тобто розірвати зв'язок між елементами ТТ та ТС (позначено червоним хрестиком). Якщо на виробництві відсутній контроль палива в піч, то треба його організувати (помаранчевий контур з FE, FT, FIR).

Для спрощення схеми на ній не наведено контур керування співвідношенням між витратами палива та повітря.

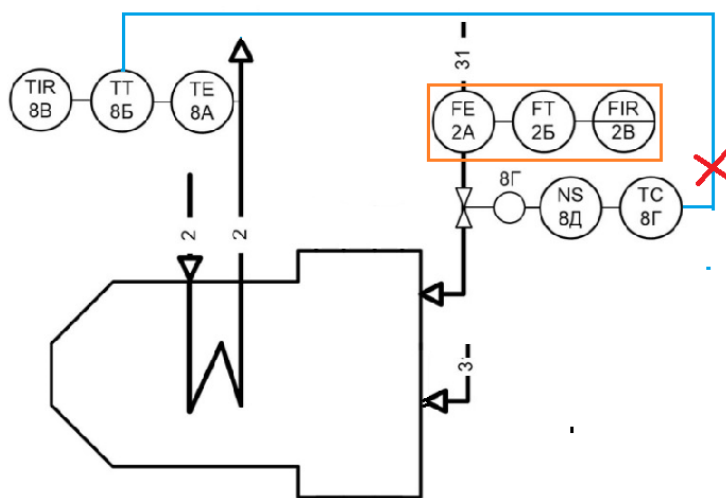


Рис. 2.1. Схема системи автоматизації печі для проведення експериментальних досліджень

Експериментальні дані для виконання пп. 1 – 3 повинні бути отримані за допомогою пасивного експерименту в околі певного значення фактору X , близького до середини діапазону можливих його значень згідно з технологічним регламентом процесу.

На рис. 2.2 наведено графік статичної характеристики каналу керування $X \rightarrow Y$, який може допомогти в отриманні числового матеріалу для розрахункової роботи.

Переріз I відповідає середині першого діапазону припустимих значень X . За можливості треба провести пасивний експеримент ще при декількох значеннях змінної X (наприклад, для її перерізів II та III).

Впродовж експерименту в певному перерізі впливи на X неприпустимі, стан об'єкта повинен відповідати стаціонарному режиму. Тому відхилення між значеннями $x_{1,I}$, $x_{2,I}$, ..., $x_{N,I}$ випадкової величини X у перерізі I (як і в II, III) повинні бути несуттєві. На рис. 2.2 межі діапазону значень X у кожному перерізі для зручності позначені пунктирними кольоровими лініями, а середина діапазону – суцільною.

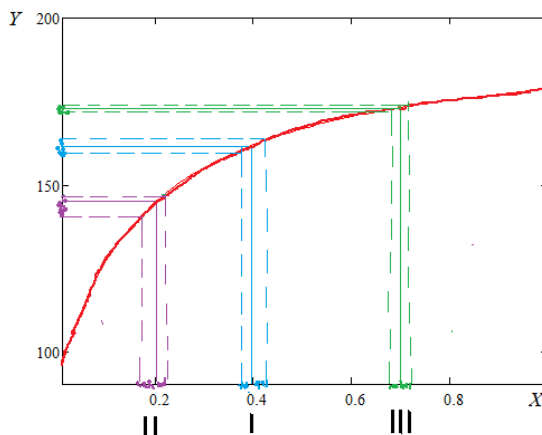


Рис. 2.2. Схема з ілюстрацією використання статичної характеристики каналу $X \rightarrow Y$ для організації пасивного експерименту

Значення вихідної змінної Y можна визначити за проєкціями значень осі X на вісь Y , використовуючи лінію статичної характеристики. Експериментальні дані у розрахунковій роботі треба подати у вигляді табл. 2.1.

Таблиця 2.1. Форма таблиці результатів для пасивного експерименту

№ досліду	Час	X	Y
1	t_0	x_1	y_1
2	t_1	x_2	y_2
...	...	...	...
N	t_N	x_N	y_N

Інтервали $(t_1 - t_0)$, $(t_2 - t_1)$, ... між реєстрацією вимірювань як X , так і Y визначають, враховуючи інерційність об'єкту.

2.2. Розрахунок та зображення емпіричних функцій розподілу ймовірностей та гістограм для X та Y . Порівняння графіків емпіричної та теоретичної (для нормального закону) функцій розподілу ймовірностей

Емпіричним розподілом випадкової величини називають перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот, які спостерігались у вибірці експериментальних даних.

Використовуючи вибіркові дані, можна визначити емпіричну функцію розподілу, а також гістограму та полігон [1]. Останні дві фігури певною мірою відображають функцію щільності розподілу. Позначимо через N_x кількість спостережень (варіант), при яких величини ознак (тобто значення X) були меншими за певне x , N – загальна кількість експериментальних даних.

Емпіричною функцією розподілу (ЕФР) називають функцію $F^*(x)$, яка для кожного значення x визначає відносну частоту події « $X < x$ »:

$$F^*(x) = N_x / N.$$

Різниця між емпіричною $F^*(x)$ та теоретичною $F(x)$ функціями розподілу полягає в тому, що $F(x)$ визначає імовірність події « $X < x$ », а $F^*(x)$ характеризує відносну частоту цієї події.

При наявності експериментальних даних треба спочатку подати закон розподілу ймовірностей у вигляді таблиці. Її перший рядок міститиме значення випадкової величини, які спостерігалися в експерименті, а другий – частоти (N_i), або відносні частоти ($W_i = N_i/N$) появи цих значень (табл.2.2).

Таблиця 2.2. Таблиця розподілу випадкової величини X

X	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_N
W	W_1	W_2	W_3	...	W_i	...	W_N

При упорядкуванні таблиці звичайно формують **варіаційний ряд (ряд розподілу)**, тобто розташовують дані в порядку зростання:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_i \dots \leq x_N.$$

Для дискретної випадкової величини X , яка може приймати значення $x_1, x_2, \dots, x_N$, функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Нерівність $x_i < x$ означає, що підсумовування поширюється на ті значення x_i , які менше за x .

Побудуємо для прикладу функцію розподілу випадкової величини X , розподіл якої раніше було подано у вигляді таблиці. Функція розподілу має стрибки у тих точках, у яких випадкова величина приймає значення, вказані у ряді розподілу. В інтервалах між цими значеннями функція $F(x)$ – стала величина. Сума всіх стрибків функції дорівнює одиниці.

Наведемо алгоритм розрахунку $F(x)$:

$$F(x_1) = P(X < x_1) = 0;$$

$$F(x_2) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = P_1;$$

$$F(x_3) = P(X < x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = P_1 + P_2;$$

.....

$$\begin{aligned} F(x_N) &= P(X < x_N) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_{N-1}) = \\ &= P_1 + P_2 + \dots + P_{N-1}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

при $X > x_N$;

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_{N-1}) + P(X = x_N) = \\ &= P_1 + P_2 + \dots + P_{N-1} + P_N = 1. \end{aligned}$$

Графік функції розподілу дискретної випадкової величини – це розривна східчаста ламана лінія, вона подана на рис. 2.3.

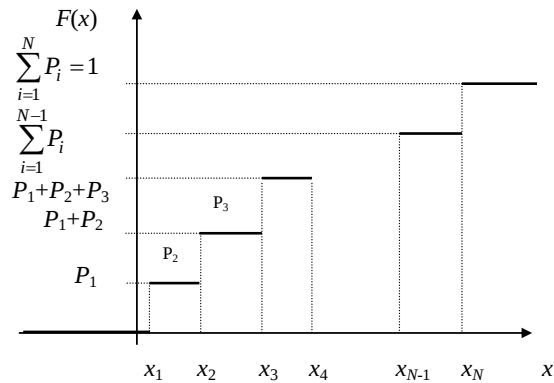


Рис. 2.3. Графік функції розподілу дискретної випадкової величини

Якщо розглядати навіть неперервну за природою випадкову величину, але подану за структурою табл. 2.2, то ЕФР будують так, як для дискретної випадкової величини.

На рис. 2.4 наведено приклад визначення $F^*(x)$ у вигляді документу *MathCAD*. Ряд розподілу подано у вигляді матриці **A**.

ORIGIN := 1

Створення матриці $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$

Далі використовуємо інструмент програмування - Add Line (панель інструментів "Математика" -> Програмування -> Add Line, або Вид -> Панелі інструментів -> Программирование -> Add Line)

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } -\infty < x < A_{1,1} \\ A_{2,1} & \text{if } A_{1,1} \leq x < A_{1,2} \\ ((A_{2,1} + A_{2,2})) & \text{if } A_{1,2} \leq x < A_{1,3} \\ ((A_{2,1} + A_{2,2} + A_{2,3})) & \text{if } A_{1,3} \leq x < A_{1,4} \\ ((A_{2,1} + A_{2,2} + A_{2,3} + A_{2,4})) & \text{if } A_{1,4} \leq x < A_{1,5} \\ 1 & \text{if } A_{1,5} \leq x < \infty \end{cases}$$

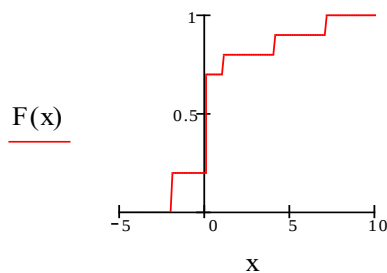


Рис. 2.4. Документ *MathCAD* для визначення емпіричної функції розподілу ймовірностей, $F^*(x)$

Mathcad має багату бібліотеку функцій роботи зі стандартними розподілами. Кожний розподіл може бути поданий трьома функціями – розподілу, щільності розподілу і функцією, оберненою до функції розподілу. Синтаксис кожної з них передбачає вживання на першому місці символів p , d , q відповідно, умовного позначення закону і в дужках певних аргументів (параметрів розподілу).

У загальному випадку запис такий:

- $d<\text{ідентифікатор закону}>(x, \text{параметри закону})$ – повертає значення функції щільності розподілу для значення випадкової величини, що дорівнює x і має вказані параметри закону розподілу;
- $p<\text{ідентифікатор закону}>(x, \text{параметри закону})$ - повертає значення функції розподілу;
- $q<\text{ідентифікатор закону}>(P, \text{параметри закону})$ - повертає значення випадкової величини при заданій імовірності P і параметрах розподілу.

Для отримання теоретичної функції розподілу $F(x)$ у *MathCAD* існує стандартна функція $pnorm(x, \mu, \sigma)$. На рис. 2.5 наведено приклади нанесення емпіричної ($F(x)$ – ідентифікатор на рис. 2.5) та теоретичної ($F1(x)$ – ідентифікатор на рис. 2.5) функцій розподілу на площину одних і тих самих осей координат.

$$F1(x) := pnorm(x, 89.32, 10)$$

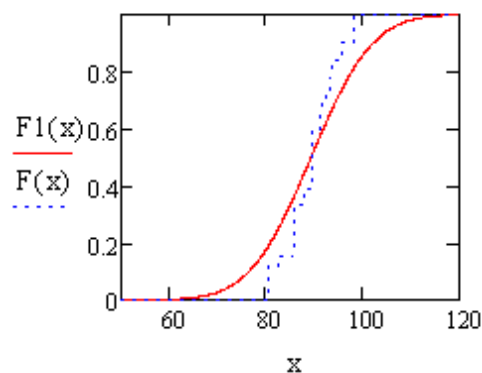


Рис. 2.5. Зображення емпіричної $F^*(x)$ та теоретичної $F1(x)$ функцій розподілу

Далі наведемо один із варіантів програмного визначення $F^*(x)$ у *MatLab*.

```

X_vals = [1, 3, 5, 7, 9];
N_vals = [10, 15, 30, 33, 12];
Sum_N = sum(N_vals);
% Розрахунок відносних частот
W = N_vals / Sum_N;
A = [X_vals; W];
% Створення сітки для побудови графіка
x_plot = 0:0.1:10;
y_plot = zeros(size(x_plot));
% Реалізація
for i = 1:length(x_plot)
    if (x_plot(i) >= A(1,1)) && (x_plot(i) < A(1,2))
        y_plot(i) = A(2,1);
    elseif (x_plot(i) >= A(1,2)) && (x_plot(i) < A(1,3))
        y_plot(i) = A(2,1) + A(2,2);
    elseif (x_plot(i) >= A(1,3)) && (x_plot(i) < A(1,4))
        y_plot(i) = A(2,1) + A(2,2) + A(2,3);
    elseif (x_plot(i) >= A(1,4)) && (x_plot(i) < A(1,5))
        y_plot(i) = A(2,1) + A(2,2) + A(2,3) + A(2,4);
    elseif (x_plot(i) >= A(1,5))
        y_plot(i) = 1;
    else
        y_plot(i) = 0;
    end
end
% Побудова графіка
figure;
bar(X_vals, [A(2,1), A(2,1)+A(2,2), sum(A(2,1:3)), sum(A(2,1:4)),
1], 1.0);
grid on;
title('Емпірична функція розподілу');
xlabel('X');
ylabel('F(X)');

```

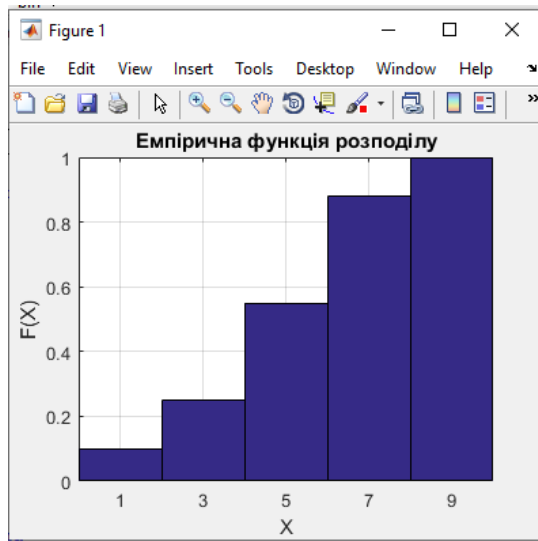
Інший варіант програми демонструє застосування вбудованої функції для розрахунку кумулятивної суми (`CUMSUM(A(2,:))`) кількості дослідів (у цьому прикладі використано частоти, а не відносні частоти):

```

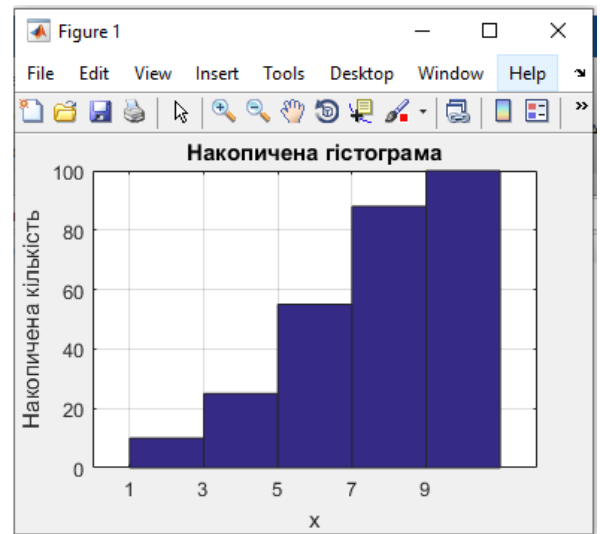
clear; close all; clc;
% Завдання 1 – Бар-діаграма
A = [1 3 5 7 9;
10 15 30 33 12];
x = A(1,:);
F = cumsum(A(2,:)); % накопичена сума
figure(1);
bar(x, F, 'histc'); % щоб стовпчики торкались один одного
title('Накопичена гістограма');
xlabel('x');
ylabel('Накопичена кількість');
grid on;

```

На рис. 2.6 показано графіки $F^*(x)$, отримані за обома програмами. Графік рис. 2.6а відповідає графіку відносних частот, а графік 2.6б – графіку частот.



а



б

Рис. 2.6. Графік емпіричної функції розподілу ймовірностей, $F^*(x)$

Гістограмою частот називають східчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною Δ , а висоти дорівнюють відношенню N_i/Δ , яке називається щільністю частоти.

Гістограмою відносних частот називають східчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною Δ , а висоти дорівнюють W_i / Δ (щільність відносної частоти).

При побудові гістограми спочатку знаходять найменше та найбільше значення варіаційного ряду: x_{min} та x_{max} . Інтервал $[x_{min}, x_{max}]$, в якому містяться всі результати спостережень, розбивають на декілька часткових інтервалів, m довжиною Δ . Їх кількість визначають найчастіше за формулою Старджеса:

$$m = 1 + 3,322 \cdot \lg N;$$

отже довжину одиничного інтервалу визначають наступним чином

$$\Delta = (x_{max} - x_{min}) / (1 + 3,322 \cdot \lg N).$$

Початком першого інтервалу вважають величину $\delta_1 = x_{min} - \Delta/2$, другого – $\delta_2 = \delta_1 + \Delta$, i – о інтервалу відповідно $\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta$.

Інтервали визначають доти, доки початок наступного інтервалу не перевищить x_{max} . Для кожного i -го часткового інтервалу знаходять кількість експериментальних даних, N_i , які потрапили до нього, а потім розраховують і відкладають по осі ординат щільність частоти (або відносної частоти в залежності від типу гістограми). Якщо інтервали мають різну довжину, то слід розглядати окремі Δ_i .

MathCAD має спеціальну функцію для побудови гістограм, $hist(\delta, X)$. Результатом обчислень $hist(\delta, X)$ є вектор, кожний елемент якого дорівнює кількості вибірових даних, N_i , значення яких належать відповідному інтервалу. Параметр δ – вектор, в якому зберігаються ліві граничні точки інтервалів. Розмірність вектора $hist(\delta, X)$ співпадає з розмірністю вектора δ і дорівнює кількості інтервалів. Визначивши необхідні складові $hist(\delta, X)$, можна отримати функцію $\varphi = hist(\delta, X)$. Ця функція визначає кількість експериментальних значень у кожному інтервалі.

Для отримання зображення гістограми треба скористатися діалоговим вікном побудови графіків ***Format/Graph/X-Y Plot (Formating/Currently Selected/X-Y Plot)*** і його опцією ***Type***. Для побудови гістограми вибирають ***Type*** опцію ***bar***.

Отримання гістограми засобами *MathCAD* наведено на рис. 2.7.

На рис. 2.8 наведено приклади нанесення гістограми ($f_2(x)$ – ідентифікатор на рис. 2.8) та теоретичної функції щільності розподілу ймовірностей ($f_1(x)$ – ідентифікатор на рис. 2.8) на площину одних і тих самих осей координат. Коефіцієнт 1/135 дозволяє звести висоти зображень до однакових висот.

$\text{ORIGIN} := 1$ $\text{Nbr} := 1$ $N := 200$ $\mu := 10 \cdot \text{Nbr}$ $\sigma := \text{Nbr}$
 $x := \text{morm}(N, \mu, \sigma)$
 $x^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	10.4	10.494	8.598	10.708	10.599	11.737	9.294	...

 $\text{Xmax} := \max(x)$ $\text{Xmax} = 12.747$ $\text{Xmin} := \min(x)$ $\text{Xmin} = 7.791$
 $x := \text{sort}(x)$
 $x^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	7.791	7.868	7.924	7.935	7.937	7.97	7.986	...

 $Rx := \text{Xmax} - \text{Xmin}$ $Rx = 4.956$
 $m := 1 + 3.322 \cdot \log(N)$ $m = 8.644$
 $m := \text{floor}(m)$
 $\Delta := \frac{Rx}{m}$ $\Delta = 0.619$
 $j := 1..m + 2$ $\delta_j := \text{Xmin} + (2j - 3) \cdot \frac{\Delta}{2}$ $f := \text{hist}(\delta, x)$

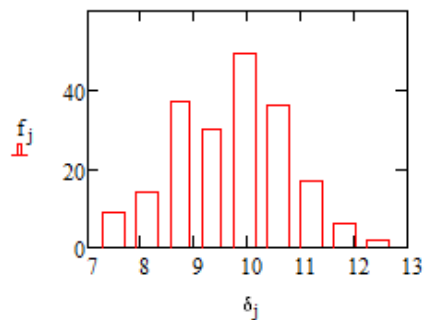


Рис. 2.7. Документ *MathCAD* для побудови гістограми

$f2 := \frac{f}{135}$
 $\mu1 := 10$ $\sigma1 := 0.1 \cdot \mu1$ $x := 5, 5.001..14$
 $f1(x) := \text{dnorm}(x, \mu1, \sigma1)$

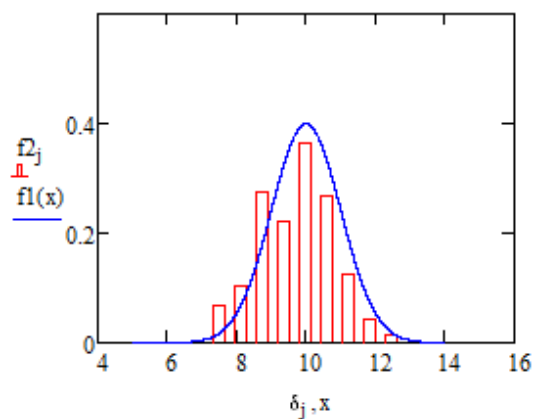


Рис. 2.8. Зображення гістограми, $f2$ та теоретичної функції щільності розподілу, $f1(x)$

Формування гістограми засобами *MatLab* можна виконати способом, застосованим у наступному прикладі. Експериментальні дані, підпорядковані нормального закону розподілу, згенеруємо за допомогою спеціальної вбудованої функції з синтаксисом ***normrnd*(μ, σ, k)**, де μ , σ – задані математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення X . Якщо k – число (скаляр), то функція повертає вектор-стовпець розміром $k \times 1$, якщо k – вектор ($[m, n]$), то функція повертає матрицю розміром $m \times n$. Для виведення рядка з k чисел можна вжити синтаксис ***normrnd* ($N, P, 1, k$)** або ***normrnd* ($N, P, [1 \ k]$)**. У наведеному далі прикладі функція записана, як ***normrnd* ($\mu, \sigma, N, 1$)** з параметрами:

$$N = 200, \mu = 10, \sigma = 1.$$

Наведемо приклад програми у *MatLab* для побудови гістограми:

```
>> N = 200;

% Параметри закону розподілу
>> mu = 1;
>> sigma = 0.1;

% Генерування вектора випадкових значень
>> X = normrnd(mu, sigma, N, 1);
>> X_max = max(X)
>> X_min = min(X)
>> X = sort(X);
>> Rx = X_max - X_min
>> m = 1 + 3.322*log10(N);
>> m = ceil(m)
>> D = Rx/m
>> for j = 1:m + 2
>>   d(j) = X_min + (2*j - 3) * (D/2);
>> end;
```

% Будуємо графік функції, що визначає кількість експериментальних значень у кожному інтервалі. Подаємо його у вигляді гістограми і полігона

```
>> hist(X, d)
```

% (гістограма побудована, вмикаємо утримування зображення на графічному полі і будуємо на ньому полігон, задаючи для нього червоний колір)

```
>> hold on
```

```
>> graph = plot(d,hist(X,d),'r');
```

% Оформлюємо побудоване зображення (задаємо товщину лінії полігону, назву графіка, мітки осей координат та вимикаємо утримування зображення)

```
>> set(graph,'LineWidth',2)
```

```
>> title('\bfНормальний розподіл, N = 200');
```

```
>> xlabel('d'), ylabel('F(X,d)');
```

```
>> hold off
```

Результати виконання цієї програми залежать від конкретного масиву згенерованих даних (генератор псевдовипадкових чисел не повторює послідовності при повторних запусках програми). При одному з виконань програми були отримані такі результати:

$X_{\max} = 1.3035$, $X_{\min} = 0.7056$, $R_x = 0.5979$, $m = 9$,
 $D = 0.0664$.

Гістограму наведено на рис. 2.9.

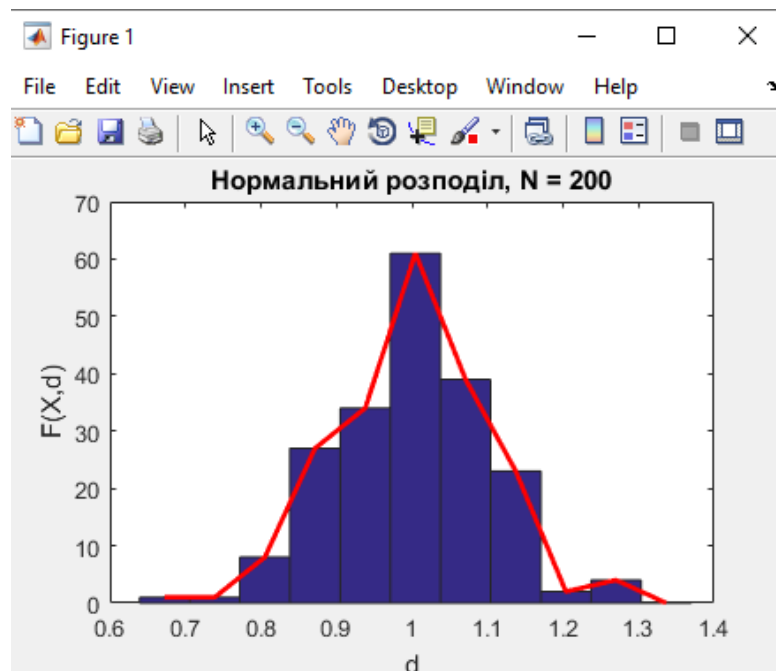


Рис. 2.9. Гістограма, виконана у *MatLab*

2.3. Розрахунок точкових оцінок математичних сподівань і дисперсій для X та Y

Закон розподілу ймовірностей випадкових величин описують різними способами. Розглянемо для прикладу нормальний закон розподілу ймовірностей, найбільш поширений для ТОК неперервної дії [1–3]. Його описують, зокрема, наступною функцією щільності розподілу з двома параметрами: μ_x , та σ_x :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

де μ_x , σ_x – математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення (СКВ, також – стандартне відхилення) випадкової величини X .

Ці параметри є також основними числовими характеристиками випадкових величин й інших законів розподілу (рівномірного, експоненціального тощо), хоча не є параметрами останніх.

Визначити ці параметри кількісно можна було б, ґрунтуючись на результатах нескінченно великої кількості дослідів ($N \rightarrow \infty$). Така сукупність даних має назву *генеральної сукупності*. Це поняття розуміють як певну абстракцію.

Дослідник має справу не з генеральною сукупністю, а з набагато меншим набором даних, тобто $N \ll \infty$. Його називають *вибіркою* з генеральної сукупності. Отже, при використанні вибірки мова може йти про розрахунок наближених значень параметрів, так званих *оцінок* параметрів. Оцінки розділяють на точкові та інтервальні [1, 2].

Точковою називають таку статистичну оцінку параметра, що подають одним числом. Значення такої оцінки θ^* невідомого параметра θ теоретичного розподілу, розраховують як функцію від спостережуваних випадкових величин $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x$, ($x_i \in X$), отриманих у результаті N незалежних експериментів (спостережень).

Найбільш характерним для неперервних технологічних об'єктів автоматизації є нормальний закон розподілу випадкових величин.

Нехай для вивчення генеральної сукупності випадкової величини X отримана вибірка обсягу N .

Вибіркове середнє арифметичне, M_x є незсуненою, обґрунтованою й ефективною оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності μ_x . Середню арифметичну розраховують за формулою

$$M_x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \quad (2.2)$$

Дисперсія σ_x^2 характеризує розсіювання випадкової величини навколо математичного сподівання. Її значення розраховують як математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від математичного сподівання:

Обґрунтованою та незсуненою є наступна точкова оцінка **дисперсії**:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - M_x)^2}{N - 1}. \quad (2.3)$$

Вибіркове СКВ розраховують як

$$S_x = \sqrt{S_x^2}. \quad (2.4)$$

Розрахунки точкових оцінок параметрів засобами *MathCAD* можна виконувати або записуючі відповідні формули, або через стандартні функції. У табл. 2.3 наведено математичними виразами та відповідні стандартні функції *MathCAD* і *MatLab*.

На рис. 2.10 наведено документ, у якому для розрахунку числових характеристик випадкових величин вжито стандартні функції *MathCAD*.

Таблиця 2.3. Таблиця стандартних функцій *MathCAD* та *MatLab*

Назва	Формула	Функції <i>MathCAD</i>	Функції <i>MatLab</i>
Середнє арифметичне	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	<i>mean(x)</i>	<i>mean(x)</i>
Середнє гармонічне	$N(\sum_{i=1}^N 1/x_i)^{-1}$	<i>harmmean(x)</i>	<i>harmmean(x)</i>
Середнє геометричне	$\sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i}$	<i>geomean(x)</i>	<i>geomean(x)</i>
Дисперсія генеральної сукупності	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - M_x)^2$	<i>var(x)</i>	<i>var(x,1)</i>
Дисперсія незсунена (виправлена)	$\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - M_x)^2$	<i>Var(x)</i>	<i>var(x)</i> <i>var(x,0)</i>
Середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності	$\sqrt{\text{var}(x)}$	<i>stdev(x)</i>	<i>std (x,1)</i>
Середнє квадратичне відхилення по незсуненій дисперсії	$\sqrt{\text{Var}(x)}$	<i>Stdev(x)</i>	<i>std(x)</i> <i>std(x,0)</i>
Розмах вибірки	$R = x_{\max} - x_{\min}$	<i>range(x)</i>	<i>range(x)</i>
Середнє лінійне відхилення	$S_{lin} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i - M_x }{N}$	—	<i>mad(x)</i>

Робота з матрицями-рядками (чи матрицями-стовпцями)

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{середнє} \quad \text{mean}(A) = 1.8$$

$$\text{медіана} \quad \text{median}(A) = 1$$

$$\text{дисперсія} \quad \text{var}(A) = 13.36$$

$$\text{середнє квадратичне відхилення} \quad \text{stdev}(A) = 3.655$$

Робота з матрицями типу N*M

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mean}(A) = 1.9 \quad \text{median}(A) = 1.5 \quad \text{var}(A) = 6.29 \quad \text{stdev}(A) = 2.508$$

Рис. 2.10. Документ *MathCAD* з розрахунком числових характеристик випадкових величин

2.4. Розрахунок інтервальних оцінок математичних сподівань для X та Y при довірчій імовірності 95%

За вибіркою малого обсягу точкова оцінка може значно відрізнятися від оцінюваного параметра, що призводить до грубих помилок при аналізі даних.

Інтервальною називають оцінку, що визначають двома числами – меншим і більшим значеннями випадкової величини, між якими може знаходитися дійсне значення параметру. Для прогнозування поведінки певного ТОК на основі невеликої вибірки варто використовувати саме інтервальні оцінки. Їх характеризують точністю та надійністю.

Нехай за експериментальними даними (вибіркою) розраховано точкову оцінку θ^* невідомого параметра θ , яка тим точніше визначає параметр θ , чим меншою буде абсолютна величина різниці між ними, $|\theta - \theta^*|$. Додатнє число δ ($\delta > 0$), для якого можна записати $|\theta - \theta^*| < \delta$, характеризує **точність оцінки**. Чим менше δ , тим точніше інтервальна оцінка.

Враховуючи те, що дослідження стосується саме випадкових величин, то дійсне значення параметру, θ може знаходитися в довірчому діапазоні лише з певною ймовірністю.

Довірчою ймовірністю (надійністю) називають імовірність P , з якою виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$. Звичайно цей показник задають наперед, вибираючи близьким до 1, наприклад, 0,95; 0,99; 0,999.

Зв'язок між точністю та надійністю оцінки можна записати й так:

$$P[\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta] = P.$$

Протилежній події – «довірчий інтервал *не містить* параметра θ » відповідає ймовірність $\alpha = 1 - P$ під назвою «*рівень значущості*».

Довірчим інтервалом називають інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, що покриває невідомий параметр θ із заданою довірчою ймовірністю P . Цей інтервал має випадкові кінці, їх називають **довірчими границями**.

Інтервальна оцінка математичного сподівання. Нехай випадкова величина X розподілена нормально. Метод розрахунку інтервальної оцінки залежить від того, чи відоме **дійсне** значення дисперсії випадкової величини X (з теоретичних джерел чи з репрезентативної вибірки). Якщо воно відоме, то використовують наступний вираз з функцією Лапласа

$$P[|M_x - \mu_x| < \delta] = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{N}}{\sigma_x}\right) = 2\Phi(b) = P, \quad (2.5)$$

де $\Phi(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функція Лапласа, b – аргумент функції Лапласа.

Аргумент b пов'язаний з властивостями вибірки наступним виразом

$$b = \frac{\delta\sqrt{N}}{\sigma_x}.$$

З останньої формули розраховують точність оцінки δ :

$$\delta = b \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}.$$

Взявши до уваги, що довірна ймовірність задана й дорівнює P , остаточно маємо

$$P[M_x - b \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} < \mu_x < M_x + b \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}] = 2\Phi(b) = P. \quad (2.6)$$

Аргумент b визначають так: спочатку з (2.5) розраховують саму функцію (зі співвідношення $\Phi(b) = P/2$), а потім за таблицею функції Лапласа знаходять аргумент b , якому відповідає знайдена $\Phi(b)$.

Подамо довірчі границі інтервальної оцінки для μ_x

$$\left(M_x - b \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}, M_x + b \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \right). \quad (2.7)$$

Таблицю функції Лапласа наведено у табл. Д1 Додатку1.

Приклад 2.1. Знайти довірчі інтервали для невідомого математичного сподівання μ_x .

Вихідні дані наступні: випадкова величина X має нормальний розподіл, обсяг вибірки $N = 36$, середнє арифметичне $M_x = 40$, довірна ймовірність $P = 0,95$, відоме середнє квадратичне відхилення $\sigma_x = 3$.

Розв'язування. Оскільки відоме $\sigma_x = 3$, то скористаємось функцією Лапласа та розрахуємо довірчий інтервал, виходячи з виразу (2.6).

$$2\Phi(b) = P = 0,95; \Phi(b) = 0,475; b = 1,96.$$

Знайдемо точність оцінки δ :

$$\delta = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{1,96 \cdot 3}{6} = 0,98.$$

Відповідно до (2.7), довірчий інтервал має наступні границі:

$$[40 - 0,98, 40 + 0,98].$$

У тому разі, коли дисперсія апіорно не відома, а її оцінку можна визначити за вибірковими даними (2.3), то довірчий інтервал розраховують наступним чином

$$\left[M_x - t_{\alpha, N-1} \sqrt{\frac{S_x^2}{N}}; M_x + t_{\alpha, N-1} \sqrt{\frac{S_x^2}{N}} \right], \quad (2.8)$$

де $t_{\alpha, N-1}$ – табличне значення критерію Стюдента, при рівні значущості α та $N - 1$ ступенях вільності для двосторонньої критичної області.

Таблицю критерію Стюдента наведено у табл. Д2 Додатку2. Для двобічної критичної області використовують співвідношення $P = 1 - 0,5\alpha$.

Замість використання статистичних таблиць можна скористатися вбудованими функціями *MathCAD* (див. табл. 2.4).

Таблиця 2.4. Засоби *MathCAD* для визначення інтервальних оцінок

Назва параметру	Довжина інтервалу	Табличний параметр		Функція <i>MathCAD</i>
		Позначення	Назва	
Математичне сподівання при відомому σ	$b \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$	b	Аргумент функції Лапласа	$qnorm(1 - \alpha/2, 0, 1),$ $qnorm((1 + P)/2, 0, 1)$
Імовірність події	$b S_{WA}$	b	Аргумент функції Лапласа	Те саме
Коефіцієнт кореляції	$b \sigma_{r_{xy}}$	b	Те саме	– " –
Математичне сподівання при невідомому σ	$t_{tabl} \frac{S_x}{\sqrt{N}}$	t_{tabl}	Критерій Стьюдента	$qt(1 - \alpha/2, N - 1),$ $qt((1 + P)/2, N - 1)$
Дисперсія та середнє квадратичне відхилення	$\frac{NS_x^2}{\chi_2^2}$	χ_2^2	Критерій Пірсона	$qchisq(1 - \alpha/2, N - 1),$ $qchisq((1 + P)/2, N - 1)$
	$\frac{NS_x^2}{\chi_1^2}$	χ_1^2		$qchisq(\alpha/2, N - 1),$ $qchisq((1 - P)/2, N - 1)$

Приклад 2.2. Знайти довірчі інтервали для невідомого математичного сподівання μ_x . Вихідні дані наступні: випадкова величина X має нормальний розподіл, обсяг вибірки $N = 16$, довірна ймовірність $P = 0,95$, вибіркове середнє арифметичне $M_x = 20,2$, вибіркове середнє квадратичне відхилення $S_x = 0,8$.

Розв’язування. Знайдемо за таблицею значень двостороннього критерію Стьюдента величину t_{tabl} , використовуючи величини $P = 0,95$; ($\alpha = 0,05$); $k = N - 1 = 15$. Критерій дорівнює $t_{tabl} = 2,13$.

Якщо в розпорядженні є таблиця одностороннього критерію, то $\alpha = 0,05/2$.
Якщо таблиця вимагає не α , а P , то $P = 1 - 0,025 = 0,975$.

Розрахуємо нижню і верхню границі довірчого інтервалу:

$$M_x - t_{\text{tabl}} \frac{S_x}{\sqrt{N}} = 20,2 - 2,13 \frac{0,8}{\sqrt{16}} = 19,774;$$

$$M_x + t_{\text{tabl}} \frac{S_x}{\sqrt{N}} = 20,2 + 2,13 \frac{0,8}{\sqrt{16}} = 20,626;$$

$$19,774 < \mu_x < 20,626.$$

На рис. 2.11 показано документ *MathCAD* з прикладом визначення довірчого інтервалу для μ_x при довірчій ймовірності $P = 0,95$.

$$\begin{aligned} M_x &:= 20.2 & S_x &:= 0.8 & N &:= 16 \\ P &:= 0.95 & \alpha &:= 1 - P = 0.05 & m &:= 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \\ t &:= \text{qt}(m, N - 1) = 2.131 \\ M_x - t \cdot \sqrt{\frac{S_x}{N}} &= 19.723 & M_x + t \cdot \sqrt{\frac{S_x}{N}} &= 20.677 \end{aligned}$$

Рис. 2.11. Документ *MathCAD* з прикладом визначення довірчого інтервалу для математичного сподівання при невідомому σ_x

У табл. 2.5 наведено функції *MatLab*, які використовують при інтервальному оцінюванні.

Нижче наведено приклад програми з розрахунком у *MatLab* деяких параметрів табл. 2.5. Результати позначено ідентифікатором *ans*.

```
>> norminv((1+0.95)/2, 0, 1)
ans =
    1.9600
>> tinv(0.05, 19)
ans =
   -1.7291
>> tinv((1+0.950)/2, 19)
ans =
    2.0930
```

Далі наведено фрагмент програми для *MatLab* із визначенням довірчого інтервалу для математичного сподівання з використанням критерію Стюдента.

```
>> Mw=Mx+tinva((1+P)/2,N-1)*Sx/sqrt(N)
>> Mn=Mx-tinva((1+P)/2,N-1)*Sx/sqrt(N)
>> di=Mw-Mn
```

Таблиця 2.5. Засоби *MatLab* для визначення інтервальних оцінок

Табличний параметр		Функція <i>MatLab</i>
Позначення	Назва	
b	Аргумент функції Лапласа	$norminv(1-\alpha/2,0,1)$, $norminv((1+P)/2,0,1)$
t_{tabl}	Критерій Стюдента	$tinva(\alpha, N-1)$, $tinva(1-P, N-1)$
χ^2_2	Критерій Пірсона	$chi2inv(1-\alpha/2, N-1)$, $chi2inv((1+P)/2, N-1)$
χ^2_1		$chi2inv(\alpha/2, N-1)$, $chi2inv((1-P)/2, N-1)$

3. ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОРЕЛЯЦІЙНОГО ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ВИПАДКОВИМИ ВЕЛИЧИНАМИ X ТА Y ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ АКТИВНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

3.1. Планування активного експерименту для отримання статичної характеристики об'єкта

Активний експеримент передбачає примусове встановлення певних значень вхідної змінної X відповідно до плану експерименту та реєстрацію значень вихідної змінної Y .

У задачах ідентифікації динамічних властивостей ТОК необхідно реєструвати значення Y , що надходять від моменту зміни X до встановлення нового сталого значення Y (трохи довше, щоб бути впевненим, що досягнуто сталий режим). *У задачі ідентифікації статичної моделі ТОК використовувати треба тільки ті значення Y , які відповідають початковому сталому X_i та кінцевому сталому, $(X_i + \Delta X)$ значенням вхідної змінної. Тобто, після нанесення ΔX треба дочекатися закінчення перехідного процесу у ТОК і зареєструвати декілька значень Y , після цього розрахувати середнє арифметичне цих значень і використати його як значення вихідної змінної, що відповідає $(X_i + \Delta X)$.*

Якщо подивитися на рис. 1.1 та 2.1, то зрозуміємо, що йдеться про зміну витрати палива як про ΔX . Можна передбачати в плані експерименту спочатку збільшення, а потім зменшення X . Доцільно встановлювати повторно однакові значення X при прямому та зворотному напрямках зміни X .

Для вибору розміру кроків ΔX доцільно дослідити моделі статички, отримані аналітично, хоча вони й передбачають певні припущення для спрощення моделювання.

На рис. 3.1 наведено графік попередньо отриманої аналітичним способом статичної характеристики каналу керування « $X \rightarrow Y$ », який може допомогти в отриманні числового матеріалу для активного експерименту розрахункової роботи експертним способом.

Значення X , які можна встановлювати за умовою експерименту, на рисунку позначені суцільними та пунктирними кольоровими лініями, що перемежуються для уникнення візуального ефекту злиття. Реакції об'єкту, Y на відповідні значення X зображено чорними точками.

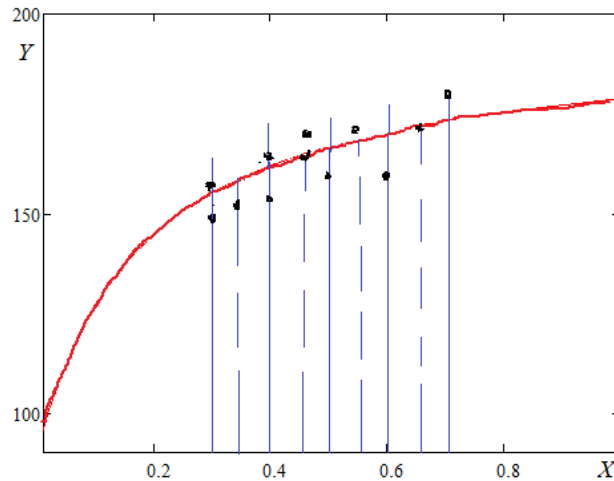


Рис. 3.1. Схема з ілюстрацією використання аналітичної статичної характеристики каналу « $X \rightarrow Y$ » для організації активного експерименту

Експериментальні дані, що відповідають тільки усталеним режимам, повинні бути подані у вигляді табл. 3.1.

Таблиця 3.1. Результати активного експерименту для задачі ідентифікації

№ досліджу	X	Y
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...	...	...
N	x_N	y_N

3.2. Зображення кореляційного поля для X та Y . Розрахунок вибіркового коефіцієнта парної кореляції між X та Y . Перевірка гіпотези про суттєвість кореляційного зв'язку при рівні значущості 5%

Кореляційний зв'язок – це такий вид статистичного зв'язку між випадковими величинами, при якому зміна однієї з них призводить до зміни середнього значення іншої.

Тісноту зв'язку оцінюють за допомогою величини розсіювання значень Y навколо їх умовного середнього $M_{y|x}$. Значне розсіювання свідчить про слабку залежність Y від X або взагалі про її відсутність. Невелике розсіювання вказує на наявність достатньо сильної залежності. У цьому випадку величини Y та X можуть бути пов'язані навіть функціонально, але під впливом другорядних випадкових чинників цей зв'язок стає дещо розмитим. У результаті при тому самому значенні X величина Y приймає різні значення.

Умовним середнім, $M_{y|x}$ називають середнє арифметичне значення випадкової величини Y , що відповідають якомусь одному значенню випадкової величини X , наприклад, $X = x_1$. Рис. 3.2 ілюструє поняття умовного середнього.

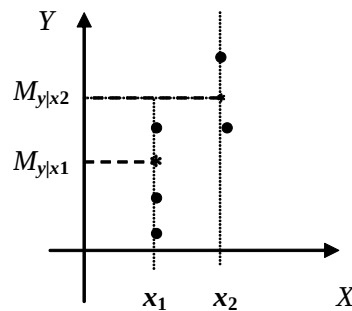


Рис. 3.2. Графічна інтерпретація умовного середнього випадкової величини Y

Існує декілька показників, які оцінюють тісноту кореляційного зв'язку. Одним із найбільш важливих є **коефіцієнт парної кореляції**. Він характеризує тісноту лінійного зв'язку між випадковими величинами X та Y .

Вибірковий коефіцієнт кореляції розраховують за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - M_x)(y_i - M_y)}{(N-1) \cdot S_x \cdot S_y}, \quad (3.1)$$

де N – кількість пар даних X - Y .

Значення коефіцієнта r_{xy} можуть знаходитися в діапазоні $-1 \leq r_{xy} \leq 1$. Чим більше $|r_{xy}|$, тим сильніший лінійний зв'язок між змінними.

Значення $r_{xy} = 0$ свідчить або про відсутність будь-якої форми зв'язку, або про значну нелінійну залежність. Якщо $r_{xy} > 0$, то X та Y одночасно або зростають,

або зростають. У випадку, коли $r_{xy} < 0$ одна величина убиває зі зростанням іншої. Якщо $|r_{xy}| = 1$, то X та Y пов'язані лінійною функціональною залежністю.

Отримати уяву про форму і тісноту зв'язку можна за допомогою кореляційних полів (див. рис. 3.3). **Кореляційним полем** називають зображення сукупності вибірових значень двох змінних [1].

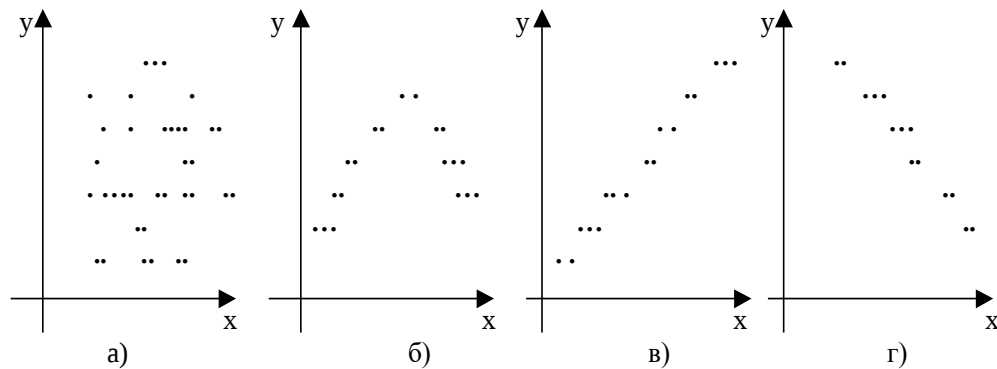


Рис. 3.3. Типи кореляційних полів:

- а) відсутність будь-якої форми зв'язку; б) суттєвий нелінійний зв'язок;
в) зв'язок при $r_{xy} > 0$; г) зв'язок при $r_{xy} < 0$

Вбудовані функції для розрахунку коефіцієнта парної кореляції засобами *MathCAD* – $\text{corr}(X,Y)$ і *MatLab* – $\text{corrcoef}(X,Y)$. Аргументи цих вбудованих функцій X, Y – матриці експериментальних даних активного експерименту. Приклад розрахунку в *MatLab* наведено нижче.

```
% Задаємо вектори експериментальних даних
>> X = [85.5 81.7 71.7 62.7 66.4 70.6 65.0 72.8 67.6
90.2 60.2 74.8 63.4 74.2 71.6 60.9 81.1 71.5 77.2 91.2];
>> Y = [17.3 19.8 30.1 31.9 38.3 26.5 36.2 21 29.5
24.9 25 28 33.9 16.1 21 28.7 30.3 19.9 22.6 20.1];

% Обчислюємо коефіцієнт парної кореляції
>> R = corrcoef(X,Y);
```

Суттєвість кореляційного зв'язку між X та Y потрібно підтвердити за допомогою алгоритму перевірки статистичних гіпотез. Перевірка дасть зрозуміти, чи закономірно r_{xy} відрізняється від нуля, чи цю відмінність можна пояснити впливом випадковостей.

Відповідно до алгоритму формулюють статистичні гіпотези:

- основну: $H_0: \rho = 0$,
- альтернативну: $H_1: \rho \neq 0$,

де ρ – коефіцієнт парної кореляції, притаманний генеральній сукупності величин X та Y .

Вид альтернативної гіпотези H_1 свідчить про те, що розглядають двосторонню критичну область критерію Стюдента, який використовують при перевірці H_0 . При вибраному α треба або скористатися таблицею двостороннього критерію Стюдента, або для таблиці одностороннього критерію прийняти $\alpha = \alpha / 2$. Розрахункове значення критерію визначають за формулою

$$t = \frac{|r_{xy}| \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}.$$

Потім перевіряють умову

$$t < t_{N-2, \alpha}, \quad (3.2)$$

де $t_{N-2, \alpha}$ – табличне значення критерію при $N-2$ ступенях вільності та рівні значущості α .

Якщо умова (3.2) виконується, то гіпотезу H_0 приймають, тобто зв'язок між випадковими величинами не можна визнати суттєвим. На рис. 3.4 подано документ *MathCAD* з кореляційним полем $X - Y$, розрахунком r_{xy} та t , значенням $t_{N-2, \alpha}$ для перевірки гіпотези (дані відмінні від даних прикладу з *MatLab*).

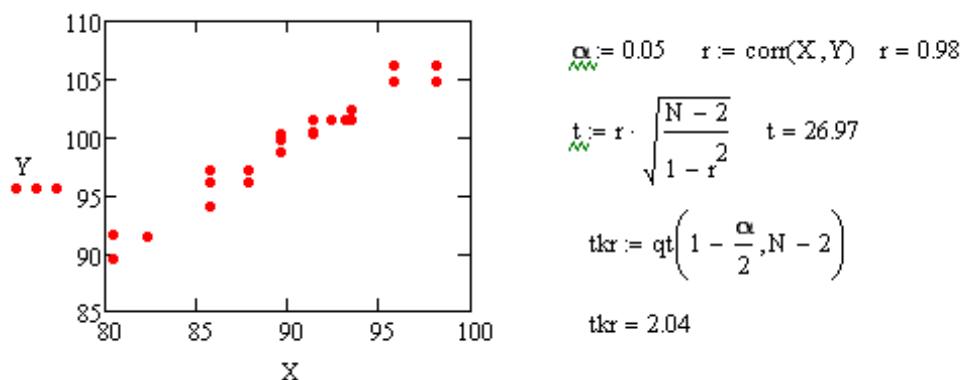


Рис. 3.4. Документ *MathCAD* з кореляційним полем $X - Y$, визначенням r_{xy} і t , інформацією про $t_{N-2, \alpha}$

3.3. Отримання регресійної моделі ТОК: лінійної – $y = a_0 + a_1x$ та квадратичної – $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Нанесення відповідних функцій на кореляційне поле

У разі існування суттєвого кореляційного зв'язку між випадковими величинами доцільно визначити його форму, тобто, створити математичну модель об'єкту. Цей етап кореляційного аналізу дуже важливий як при розробці систем керування технологічними процесами різних галузей виробництва, так і в інших сферах життєдіяльності людини. Його називають *регресійним аналізом*.

Регресійний аналіз передбачає послідовне розв'язування наступних задач:

- створення математичної моделі об'єкту у вигляді регресійного рівняння за експериментальними даними (*ідентифікація*);
- аналіз цієї моделі.

Ідентифікація передбачає отримання залежності виду (див. п. 3.2)

$$M_{y|x} = f(x). \quad (3.3)$$

Якщо різноманітні значення X та відповідні їм значення Y спостерігалися тільки один раз, то немає потреби використовувати поняття умовної середньої, а тому шукане рівняння (3.3) можна записати так

$$\hat{y} = y = f(x), \quad (3.4)$$

де $\hat{y}$ – значення Y , розраховане за моделлю.

Рівняння (3.4) називають *рівнянням регресії* або *регресійною моделлю* Y на X ; функцію $f(x)$ називають *регресією* Y на X , або *функцією відгуку*, її графік – *лінією регресії* Y на X .

У подальшому цю форму запису сприйматимемо як загальну. Найбільш поширеними є поліноміальні моделі.

Приклади лінійних поліноміальних рівнянь:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x; \quad (3.5.)$$

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k.$$

Приклади рівнянь, нелінійних за факторами:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 + b_3 x_2 + b_4 x_1 x_3;$$

$$\hat{y} = b_0 + b_1 e^{x+1}.$$

Величини b_i називають **коефіцієнтами (параметрами)** регресії; чинники x_i , які формують множину значень X , називають **факторами**. Смысл x_i залежить від контексту завдання: якщо розглядають вплив лише одного чинника, який позначають X , то x_i – це значення цього чинника в i -у експерименті).

Розрахунок коефіцієнтів регресійної моделі складає зміст **параметричної ідентифікації** моделі [1–3].

Для прикладу визначимо параметри лінійного регресійного рівняння (3.5). Для цього проведемо N незалежних дослідів, з яких отримаємо N пар чисел. Результати дослідів наведемо у формі таблиці (див. табл. 3.1).

Такі пари чисел можна розглядати як випадкову вибірку з генеральної сукупності всіх можливих значень випадкових величин X та Y . Рівняння регресії, які отримано за такими даними, називають **вибірковими**, а значення коефіцієнтів – **оцінками** параметрів регресії.

Розрахуємо оцінки параметрів (далі для спрощення виразів – параметри) b_0 і b_1 так, щоб сума квадратів відхилень значень Y , які спостерігаються (y_i), від розрахункових ($\hat{y}_i$) була мінімальною, тобто

$$Q(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (3.6)$$

Метод розрахунку b_0 і b_1 , заснований на такій вимозі, називають **методом найменших квадратів**. Його застосування правочинне, якщо випадкові величини, між якими шукають зв'язок, підпорядковані нормальному закону розподілу ймовірностей.

Розкриємо $\hat{y}_i$ для лінійного рівняння:

$$Q(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Для відшукування мінімуму функціонала $Q(b_0, b_1)$, прирівняємо його частинні похідні по b_0 і по b_1 до нуля:

$$\begin{cases} \frac{Q(b_0, b_1)}{\partial b_0} = 2 \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 x_i - y_i) = 0; \\ \frac{Q(b_0, b_1)}{\partial b_1} = 2 \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 x_i - y_i) \cdot x_i = 0. \end{cases}$$

Розкриємо знаки сум і винесемо коефіцієнти b_0 та b_1 за ці знаки:

$$\begin{cases} b_0 \cdot N + b_1 \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N y_i = 0; \\ b_0 \sum_{i=1}^N x_i + b_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N y_i x_i = 0. \end{cases}$$

Перенесемо праворуч від знаків рівності ті члени рівнянь, які не містять коефіцієнтів (далі для зручності межі підсумовування не вказуємо):

$$\begin{cases} b_0 \cdot N + b_1 \sum x_i = \sum y_i; \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum y_i x_i. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо оцінки параметрів b_0 і b_1 :

$$b_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2};$$

$$b_1 = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Приклад 3.1. Знайти параметри лінійного регресійного рівняння за даними п'яти ($N = 5$) спостережень.

Розв'язування. Наведемо розрахункові дані для задачі у табл. 3.2.

Підставимо отримані дані у вирази для розрахунку параметрів:

$$b_0 = \frac{57,5 \cdot 8,15 - 15 \cdot 26,975}{5 \cdot 57,5 - 15^2} = 1,024;$$

$$b_1 = \frac{5 \cdot 26,975 - 15 \cdot 8,15}{62,5} = 0,202.$$

Таблиця 3.2. Розрахункові дані до прикладу 3.1

X	Y	X^2	XY
1,0	1,25	1,0	1,250
1,5	1,40	2,25	2,100
3,0	1,50	9,0	4,500
4,5	1,75	20,25	4,875
5,0	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8,15$	$\sum x_i^2 = 57,50$	$\sum x_i y_i = 26,975$

Запишемо шукане рівняння регресії:

$$\hat{y} = 1,024 + 0,202x.$$

Щоб з'ясувати, наскільки добре узгоджуються обчислені значення $\hat{y}_i$ з тими, які спостерігалися впродовж часу досліджень, y_i , знайдемо відхилення $\hat{y}_i - y_i$. Отримані розрахунки занесемо у табл. 3.3.

Таблиця 3.3. Дані для розрахунків точності моделі

X	$\hat{Y}$	Y	$(\hat{Y} - Y)$
1,0	1,226	1,25	-0,024
1,5	1,327	1,40	-0,073
3,0	1,630	1,50	0,13
4,5	1,933	1,75	0,083
5,0	2,034	2,25	-0,216

Досить великі відхилення $(\hat{Y} - Y)$ пояснюються або малою кількістю спостережень, або впливом ще й інших факторів, або нелінійною формою залежності між X та Y .

У *MathCAD* для обчислення параметрів однофакторних лінійних моделей b_0 та b_1 (див. 3.5) використовують функції *intercept*(X,Y) і *slope*(X,Y) відповідно. У дужках, параметрами вбудованих функцій, записують імена матриць з експериментальними даними. На рис. 3.5 подано документ *MathCAD* з результатами застосування цих функцій.

$b0 := \text{intercept}(X, Y)$ $b1 := \text{slope}(X, Y)$

$b0 = 17.09$

$b1 = 0.91$

Рис. 3.5. Документ *MathCAD* з результатами застосування функцій *intercept(x,y)* та *slope(x,y)*

Наведемо програму *MatLab* для регресійного моделювання ТОК (однофакторна лінійна модель) на основі експериментальних даних.

```
% Задаємо вектори експериментальних даних
>> X1 = [85.5 81.7 71.7 62.7 66.4 70.6 65.0 72.8 67.6
90.2 60.2 74.8 63.4 74.2 71.6 60.9 81.1 71.5 77.2 91.2];
>> Y = [17.3 19.8 30.1 31.9 38.3 26.5 36.2 21 29.5
24.9 25 28 33.9 16.1 21 28.7 30.3 19.9 22.6 20.1];

% Зберігаємо довжину вектору з даними (однакова для
всіх трьох векторів) як окрему змінну
>> N = length(Y)

% Обчислюємо коефіцієнти регресійної моделі за методом
найменших квадратів.
>> p = polyfit(X1,Y,1); % 1 – степінь полінома

% За обчисленими коефіцієнтами, відомим вектором
незалежних змінних та видом рівняння регресії розраховуємо
вихідний вектор Z0, та будуємо його разом з заданими даними
на графіку.
>> for i = 1:N
>>     Z0(i) = p(2)+p(1)*X1(i);
>> end;
>> plot(X1,Y, 'o',X1,Z0);

% Обчислюємо вектор оцінок параметрів (коефіцієнтів)
>> B0 = (X1*X1')^-1*(X1*Y')
```

На рис. 3.6 наведено кореляційне поле та результати моделювання за лінійною однофакторною регресійною моделлю засобами *MatLab*

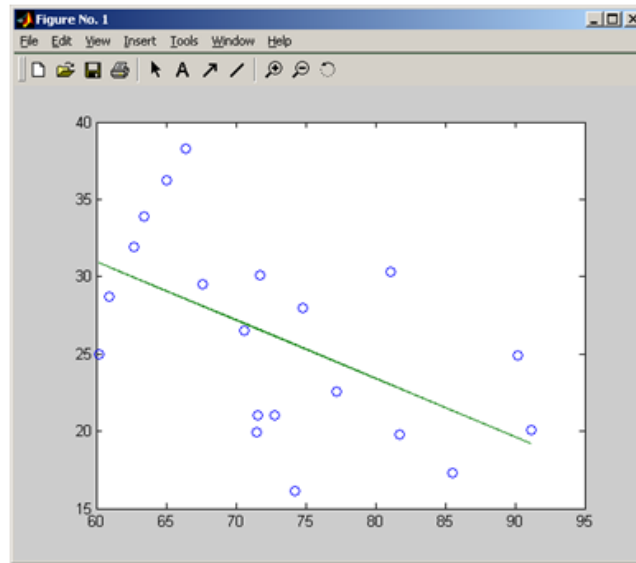


Рис. 3.6. Кореляційне поле та результати моделювання лінійною регресійною моделлю

$$y = f_1(x_1) \text{ засобами } \textit{MatLab}$$

Метод оцінювання параметрів *багатофакторної* чи *нелінійної* моделі аналогічний тому, який використовують для однофакторної моделі. Проблема тільки у тому, що розрахунки стають громіздкими. Тому переходять до матричної форми подання і отримання даних.

Оскільки спостереження за кожною змінною дає не одне, а декілька її значень, то зручно записувати кожний такий ряд за допомогою вектору, а сукупність всіх незалежних змінних – за допомогою двовимірної матриці.

Уведемо позначення, притаманні матричній формі запису:

$B = (b_j)$ – вектор оцінок параметрів;

$Y = (y_i)$ – вектор значень залежної змінної, $i = \overline{1, N}$;

$X = (x_{ij})$ – матриця значень незалежних змінних розмірністю $N \times M$,
 M – кількість незалежних змінних (факторів);

$$B = (X^T X)^{-1} \cdot (X^T Y). \quad (3.7)$$

Матрицю X записують у вигляді

$$X = \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{M1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{M2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{MN} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Таким чином, 1-й рядок матриці X – це значення M вхідних змінних моделі у першому експерименті, N -й – у N -у експерименті.

Якщо досліджувати однофакторну квадратичну модель структури

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2,$$

то матриця X матиме такий вигляд

$$X = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & \dots & \dots \\ 1 & x_N & x_N^2 \end{vmatrix}$$

Матриця Y - це вектор-стовпець:

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{vmatrix}. \quad (3.9)$$

Документ *MathCAD* для визначення параметрів нелінійної моделі згідно з (3.7) наведено на рис. 3.7. Нанесені на один графік кореляційне поле і результати моделювання за лінійною і квадратичною однофакторними моделями наведено на рис. 3.8.

Ідентифікацію засобами MS Excel описано в п.3.4, оскільки в цьому табличному процесорі розглянуто таку функцію ідентифікації, яка одразу виконує перевірку адекватності моделі.

$$X1 := \begin{pmatrix} 1 & 80.45 & 80.45^2 \\ 1 & 82.35 & 82.35^2 \\ 1 & 80.45 & 80.45^2 \\ 1 & \dots & \dots \\ 1 & 85.78 & 85.78^2 \\ 1 & 89.60 & 89.60^2 \end{pmatrix}$$

$$B := (X1^T \cdot X1)^{-1} \cdot (X1^T \cdot Y)$$

$$B = \begin{pmatrix} -79.47 \\ 3.09 \\ -0.01 \end{pmatrix} \quad Y2 := X1 \cdot B$$

Рис. 3.7. Документ *MathCAD* для визначення параметрів квадратичної моделі

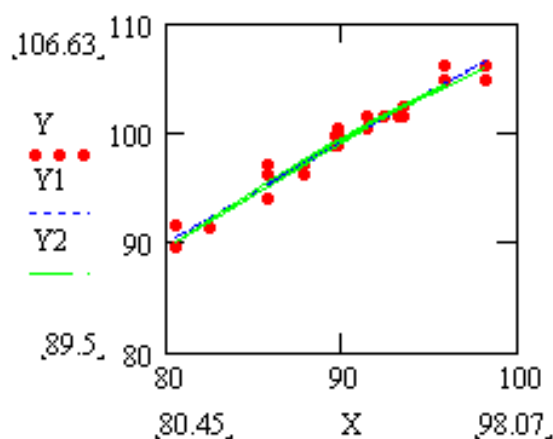


Рис. 3.8. Кореляційне поле та результати моделювання за лінійною та квадратичною однофакторними регресійними моделями засобами *MathCAD*

3.4. Перевірка адекватності обох моделей

Після отримання регресійної моделі потрібно виконати її аналіз. Першим кроком в цьому напрямку є перевірка на **адекватність**, тобто на відповідність її поведінки поведінці реального об'єкту. Тільки адекватну модель можна використовувати для дослідження властивостей об'єктів моделювання й оптимізації їх функціонування.

Оцінку адекватності здійснюють на основі дисперсійного аналізу двома способами: порівнянням залишкової дисперсії або з дисперсією вихідної величини або з дисперсією відтворюваності у паралельних дослідах. У розрахунковій роботі передбачено використання першого способу. Згідно з ним параметрична ідентифікація та перевірка адекватності базуються на одній і тій самій вибірці випадкових величин X та Y .

Отже, треба порівняти такі дві дисперсії:

а) дисперсію, обумовлену розсіюванням значень Y навколо лінії регресії

$$S_{\text{зал}}^2 = \frac{\sum(\hat{y}_i - y_i)^2}{N - (M + 1)}, \quad (3.10)$$

де $S_{\text{зал}}^2$ – залишкова дисперсія (дисперсія адекватності); M – кількість коефіцієнтів моделі без вільного коефіцієнта;

б) дисперсію випадкової величини Y відносно її середньої, S_y^2 (2.3).

Якщо між цими дисперсіями існує співвідношення $S_{\text{зал}}^2 \geq S_y^2$, то регресійну модель не можна визнати адекватною експериментальним даним. У протилежному випадку треба перевірити основну (H_0) та альтернативну (H_1) гіпотези:

$$\begin{aligned} H_0: \sigma_y^2 &= \sigma_{\text{зал}}^2; \\ H_1: \sigma_y^2 &> \sigma_{\text{зал}}^2. \end{aligned}$$

Для перевірки того, що $S_{\text{зал}}^2$ суттєво менша ніж S_y^2 , використовують критерій Фішера.

Розрахункове значення критерію визначають наступним чином:

$$\begin{aligned} F &= \frac{S_y^2}{S_{\text{зал}}^2}; \left\{ \frac{N - 1}{N - (M + 1)} \right\}. \\ F &= \frac{\sum(y_i - M_y)^2 / (N - 1)}{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2 / (N - (M + 1))}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

У фігурних дужках тут і далі вказані степені вільності дисперсій чисельника та знаменника, які треба використовувати при пошуку табличного (критичного) значення критерію Фішера, $F_{N-1, N-(M+1), \alpha}$ (див. табл. ДЗ Додатку 3).

Значення F показує, у скільки разів зменшується розсіювання експериментальних даних навкруг лінії регресії по відношенню до їх розсіювання навкруг оцінки математичного сподівання Y .

Тобто, F показує, у скільки разів регресія краще описує зв'язок між факторами та виходом, Y ніж зв'язок між факторами та M_y .

Якщо виконується співвідношення $F > F_{N-1, N-(M+1), \alpha}$, то гіпотезу H_0 відкидають, тобто модель можна вважати адекватною експериментальним даним.

Приклад 3.2. У табл. 3.4 наведено експериментальні дані (X – витрата продукту, Y – температура у технологічному апараті). Потрібно отримати регресійну модель між названими технологічними змінними та перевірити її адекватність.

Розв'язування. Побудуємо кореляційне поле (рис. 3.9).

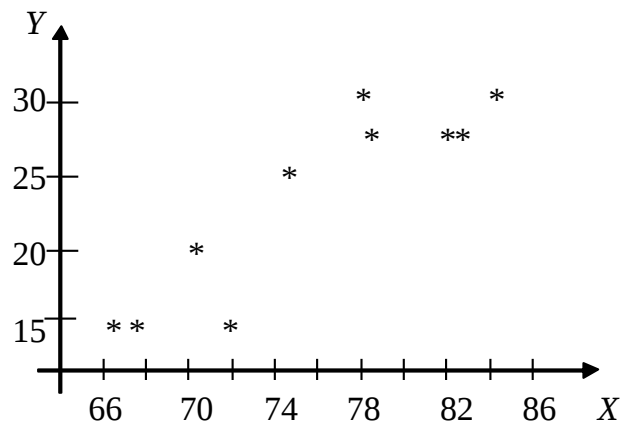


Рис. 3.9. Кореляційне поле до прикладу 3.2

Таблиця 3.4. Експериментальні дані для задачі 3.2

№ п.п	Витрата продукту, X	Температура, Y	$\hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$	$(y - M_y)^2$
1	79	28,0	27,79	0,04	18,84
2	70	21,0	19,44	2,43	7,08
3	80	27,7	28,72	1,25	15,52
4	71	16,2	20,37	17,37	55,65
5	77	29,7	25,94	14,17	36,48
6	77	26,8	25,94	0,75	9,86
7	84	30,2	32,43	4,55	44,09
8	66	15,7	15,73	0	63,36
9	74	25,5	23,15	5,51	3,39
10	67	15,8	16,66	0,73	61,78
Σ	745	236,6	160,94	46,73	316,05

Рис. 3.9 показує, що зв'язок близький до прямолінійного і для ідентифікації можна використати лінійне рівняння регресії виду (3.5).

Скористаємось методом найменших квадратів.

$$\begin{cases} 10a + 745b = 236,6 \\ 745a + 55817b = 17917,7 \end{cases} \begin{matrix} :10 \\ :745 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a + 74,5b = 23,66 \\ a + 74,92b = 24,05 \end{cases}$$

$$0,42b = 0,39;$$

$$b = 0,928 \left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{кг} / \text{с}} \right];$$

$$236,6 = 10a + 745 \cdot 0,9286;$$

$$a = \frac{236,6 - 691,8}{10} = -45,52 [^{\circ}\text{C}]$$

Лінійна регресійна модель процесу має вид

$$\hat{y} = -45,52 + 0,928x.$$

Перевіримо адекватність цієї моделі. Розрахуємо спочатку дисперсію адекватності:

$$S_{\text{зал}}^2 = \frac{\sum_1^N (\hat{y}_i - y_i)^2}{N-2} = \frac{46,73}{10-2} = 5,84.$$

Визначимо дисперсію випадкової величини Y :

$$S_y^2 = \frac{\sum_1^N (y_i - M_y)^2}{N-1} = \frac{316,05}{10-1} = 35,1.$$

Оскільки $S_{\text{зал}}^2 < S_y^2$, то скористаємось критерієм Фішера

$$F = \frac{S_y^2}{S_{\text{зал}}^2} = \frac{35,1}{5,84} = 6,01$$

З'ясуємо табличне значення критерію Фішера при рівні значущості $\alpha = 0,05$. Воно дорівнює $F_{9,8,0.05} = 3,39$.

Виконується умова $F > F_{9,8,0.05}$. Таким чином, модель об'єкту можемо вважати адекватною експериментальним даним.

На рис. 3.10 наведено документ *MathCAD* з іншим прикладом, який ілюструє використання вбудованої функції по визначенню табличного значення критерію Фішера.

$$\begin{array}{lll} N_x := 10 & N_y := 18 & \alpha := 0.1 \\ S2x := 1.23 & S2y := 0.41 & \\ \text{Розрахункове значення F - критерію} & & \\ F := \frac{S2x}{S2y} & F = 3 & \\ \text{КРИТИЧНА ОБЛАСТЬ - ДВОСТОРОННЯ} & & \\ \text{Критичне значення критерію Фішера} & & \\ qF\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 9, 17\right) = 2.494 & & \end{array}$$

Рис. 3.10. Документ *MathCAD* з прикладом використання вбудованої функції для визначення табличного значення критерію Фішера

Повернемося до застосування *MS Excel* для задач ідентифікації. Цей табличний процесор має декілька способів створення регресійних моделей. Однофакторну модель доцільно отримати за наступним алгоритмом: отримання *точкової діаграми*, вибору структури моделі, отримання самого рівняння та,

нарешті, **визначення кореляційного відношення**, яке характеризує тісноту вибраної форми зв'язку між змінними X та Y .

Оцінка параметрів багатофакторної моделі в *MS Excel* виконується за допомогою стандартної функції *LINEST* (ЛИНЕЙН).

Функція має такий синтаксис ***LINEST*(Y ; X ; константа; статистика)**. На рис. 3.11 відображене діалогове вікно цієї функції.

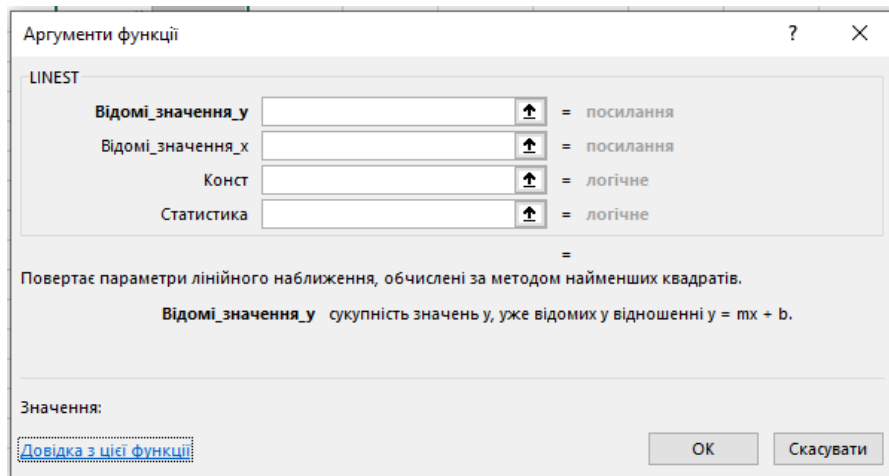


Рис. 3.11. Діалогове вікно функції *LINEST* із переліком параметрів

Параметри мають наступний смисл:

Y – вектор залежної змінної;

X – матриця незалежних змінних, де кожна змінна $X_1, X_2, \dots, X_p$ є вектор стовпець, тобто

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_p] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{p1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix};$$

константа дорівнює 1, якщо в моделі є коефіцієнт b_0 , у противному разі константа дорівнює 0;

статистика – це логічне значення, що вказує, чи потрібно повернути додаткову інформацію стосовно регресійного рівняння.

Якщо **статистика** має значення 0, то функція *LINEST* повертає тільки рядок коефіцієнтів моделі, b_i . Якщо її значення дорівнює 1, то функція *LINEST* повертає також додаткову регресійну статистику.

Для роботи з $LINEST()$ треба виділити в робочому листі MS Excel блок комірок такого розміру: кількість стовпців дорівнює кількості параметрів моделі, а кількість рядків – п'ять.

Після цього потрібно викликати функцію $LINEST$ з категорії **Статистичні** у вікні **Вставлення функції** (кнопка $f(x)$ панелі інструментів) та виділити за допомогою миші діапазони комірок:

Y – вектор залежної змінної;

X – матрицю незалежних змінних

та визначити параметри

константа дорівнює 1;

статистика дорівнює 1.

Натиснути кнопку $\langle OK \rangle$, потім клавішу $\langle F2 \rangle$, а далі одночасно натиснути клавіші $\langle Ctrl \rangle + \langle Shift \rangle + \langle Enter \rangle$.

Функція $LINEST$ поверне додаткову регресійну статистику у вигляді табл. 3.5.

Таблиця 3.5. Характеристики регресійної моделі

b_p	b_{p-1}	...	b_{p-2}	b_{p-1}	b_0
Sb_p	Sb_{p-1}	...	Sb_2	Sb_1	Sb_0
R^2	$S_{\text{зал}}$				
F	k				
$W_{\text{рег}}$	$W_{\text{залт}}$				

де $b_p; b_{p-1}; \dots; b_{p-2}; b_{p-1}; b_0$ – оцінки коефіцієнтів моделі;

$Sb_0 - Sb_p$ – стандартні похибки для оцінок коефіцієнтів;

R^2 – коефіцієнт детермінації $0 \leq R^2 \leq 1$;

$S_{\text{зал}} = \sqrt{S_{\text{зал}}^2}$, де $S_{\text{зал}}^2$ – залишкова дисперсія (адекватності), див. (3.10);

F – критерій Фішера (див. 3.11);

$W_{\text{рег}}$ – регресійна сума квадратів, яку розраховують за формулою

$$W_{\text{рег}} = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - M_y)^2.$$

$W_{\text{зал}}$ – залишкова сума квадратів, яку розраховують за формулою

$$W_{\text{зал}} = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

3.5. Визначення точності моделей

Точність моделі можна оцінити за наступними показниками:

- залишкова дисперсія, $K_1 = S_{\text{зал}}^2$;
- середнє значення квадратів відхилень розрахункових даних від експериментальних (на один експеримент):

$$K_2 = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2 / N;$$

- середнє значення абсолютних відхилень розрахункових даних від експериментальних (на один експеримент):

$$K_3 = \sum_{i=1}^N |\hat{y}_i - y_i| / N;$$

- найбільше серед абсолютних відхилень розрахункових даних від експериментальних, $\max(|\hat{y}_i - y_i|)$.

3.6. Аналіз властивостей залишків лінійної моделі

Аналіз моделі передбачає ще один етап – дослідження залишків δ_i , де $\delta_i = \hat{y}_i - y_i$. Треба вирахувати значення залишку для кожного експериментального значення x_i та перевірити умову: середнє значення залишків повинно наближатися до нуля. Крім цього будують графік залишків (кореляційне поле між x_i та δ_i). На рис. 3.12 наведено графік, створений засобами *MathCAD*. Графік повинен показати, чи однаково розподілені залишки для різних значень фактору X . Якщо залишки рівномірно розташовані на всьому інтервалі експериментальних даних, то модель однаково точно відтворює об'єкт при різних рівня фактору X .

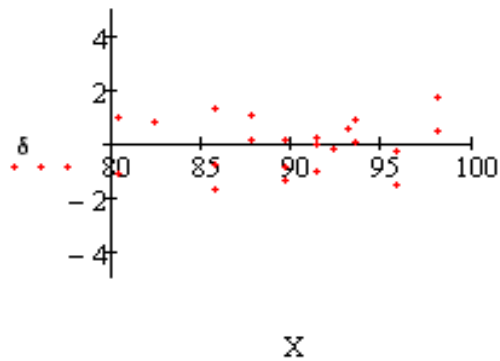


Рис. 3.12. Графік залишків лінійної моделі у *MathCAD*

Засобами *MatLab* визначимо залишки, їхнє середнє значення та дисперсію. На рис. 3.13 наведено графік залишків. Наведемо відповідну програму.

% Розраховуємо вектор залишків, їх середнє значення та дисперсію

```
>> for i = 1:N
>>     Z2(i) = y(i)-Y(i);
>> end;
>> mn = mean(Z2)
>> disp = var(Z2,1)
```

% Будуємо графік з розподілом величини залишків відносно нуля.

```
>> plot(1:N,Z2,'o',1:N,zeros(N,1));
```

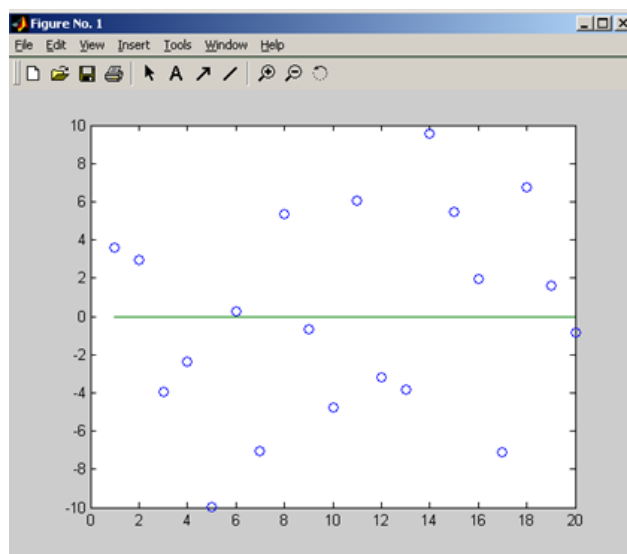


Рис. 3.13. Графік залишків, створений засобами *MatLab*

3.7. Перевірка однорідності залишкових дисперсій обох моделей.

Висновок про доцільність застосування квадратичної моделі замість лінійної

Це завдання виконують для того, щоб визначитись у питанні зі структурою регресійної моделі у випадку, коли досліджують декілька альтернативних структур. Порівняння лінійної та квадратичної структур, як правило, засвідчує вищу точність останньої. Однак, використання складних моделей в алгоритмах оптимального керування не завжди доцільне, оскільки витратитиме більше ресурсів комп'ютерної системи. Тому треба навчитися обґрунтовано вибирати одну структуру моделі із декількох.

В основі порівняння моделей знаходяться їх залишкові дисперсії (3.10), як показники точності:

$$S_{\text{зал,л}}^2 = \frac{\sum_1^N (\hat{y}_i - y_i)^2}{N - (1 + 1)};$$

$$S_{\text{зал,кв}}^2 = \frac{\sum_1^N (\hat{y}_i - y_i)^2}{N - (1 + 2)};$$

де $S_{\text{зал,л}}^2$, $S_{\text{зал,кв}}^2$ – залишкові дисперсії лінійної та квадратичної моделей.

Одна з них виявиться більшою, її позначимо, $S_{\text{зал,б}}^2$, меншу позначимо $S_{\text{зал,м}}^2$.

Сформуємо статистичні гіпотези для порівняння залишкових дисперсій лінійної та квадратичної моделей:

$$H_0: \sigma_{\text{зал,б}}^2 = \sigma_{\text{зал,м}}^2;$$

$$H_1: \sigma_{\text{зал,б}}^2 > \sigma_{\text{зал,м}}^2$$

Порівняння двох дисперсій, як вже відомо, треба виконати за критерієм Фішера (нагадаємо, що розраховують цей критерій діленням більшої дисперсії на меншу):

$$F = \frac{S_{\text{зал,б}}^2}{S_{\text{зал,м}}^2};$$

з подальшим порівнянням цього розрахункового значення з табличним, F_{tab} , ступені вільності якого визначаються знаменниками дисперсій чисельника та знаменника (див. п. 3.4).

РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ОФОРМЛЕННЯ

При оформленні роботи треба керуватися наступними характеристиками паперу та тексту:

- властивості сторінки: папір А4, поля: ліве – 2,5 см, інші – 2 см;
- параметри форматування тексту: *Times New Roman*, 14 пт, міжрядковий інтервал – 1,5; абзацний відступ – 1,2;
- нумерація сторінок наскрізна, знизу посередині, починаючи з 2-ї сторінки (перша – титульна);
- нумерація рисунків, формул та таблиць (далі «об'єкт») за схемою: **N1.N2** (*N1* – номер розділу завдання, їх передбачено 4; *N2* – номер об'єкту в тексті виконання конкретного завдання), наприклад, табл.3.1 – перша таблиця в третьому розділі завданні, таким же чином для рисунку – рис.3.1, для формули – (3.1);
- опис технології, що передує експериментальним даним, не повинен перевищувати 2-х сторінок;
- текст пояснень виконувати у *MS Word*, результати розрахунків подавати фрагментами з документів математичного процесора (за вибором студента – *MathCAD*, *MatLab* або *MS Excel*), позначаючи ці фрагменти як рисунки.

ПОРЯДОК ЗАХИСТУ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

Захист розрахункової роботи відбувається після виконання усіх розділів завдання.

Студент підтверджує виконання завдань, наводячи відповідні дослідження та розрахунки з пояснювальної записки.

За вимогою викладача студент повинен показати своє вміння використовувати математичний процесор, задіяний для виконання розрахунків.

Для підготовки до захисту розрахункової роботи студент повинен знати відповіді на наступні запитання:

1. Що таке закон розподілу ймовірностей випадкової величини?
2. Що таке емпіричний закон розподілу ймовірностей?
3. Як побудувати емпіричну функцію розподілу ймовірностей та гістограму дискретної випадкової величини?
4. Як побудувати емпіричну функцію розподілу та гістограму засобами *MathCAD*?
5. Що таке оцінка параметру?
6. Що таке точкова оцінка параметру? Знати формули розрахунків точкових оцінок математичного сподівання, дисперсії та стандартного відхилення.
7. Що таке інтервальна оцінка параметру? Чим вона характеризується?
8. Як визначити інтервальні оцінки математичного сподівання?
9. Які способи визначення точкових параметрів надає задіяний математичний процесор?
10. Дати визначення кореляційного зв'язку між величинами.
11. Що характеризує коефіцієнт парної кореляції? Як розраховувати його точкову оцінку?
12. Як визначити суттєвість кореляційного зв'язку?
13. Як визначити коефіцієнти парної та часткової кореляції у задіяному математичному процесорі?
14. Які задачі розв'язує регресійний аналіз?

15. Що таке фактори, а що – параметри моделі?
16. Який метод застосовують для розрахунку параметрів регресійної моделі при нормальному розподілі випадкових величин?
17. Як перевірити адекватність регресійної моделі при нормальному розподілі випадкових величин?
18. Як визначити точність моделі?
19. У чому полягає дослідження залишків моделі?
20. Як обґрунтувати вибір структури моделі з альтернативних варіантів?
21. Які способи проведення регресійного аналізу надає використаний математичний процесор?

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Математичні методи в задачах автоматизації [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: А. І. Жученко, Л. Д. Ярошук, Т. А. Дунаєва. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,65 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 385 с.

2. Жученко А. І., Ярошук Л. Д. Оцінювання параметрів та перевірка статистичних гіпотез. Теорія та практика роботи з *Mathcad, Matlab, MS Excel*: Навч. посіб. – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 156 с.

3. Статистичні методи визначення залежностей між випадковими величинами [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня доктор філософії за освітньою програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» спеціальності 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Ю. В. Куц, Ю. Ю. Лисенко. – Електронні текстові дані (1 файл 2,52 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2023. – 115 с.

4. Найко Д.А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / Д.А. Найко, О.Ф. Шевчук – Вінниця: ВНАУ, 2020. – 382 с.

5. Статистичний аналіз даних вимірювань [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за 115 напрямом підготовки «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології» / В. С. Єременко, Ю. В. Куц, В. М. Мокійчук, О. В. Самойліченко ; Нац. авіац. ун-т. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,73 Мбайт). – Київ : НАУ, 2013. – 321 с.

6. *Machine learning*: стартовий курс : електронний навчальний посібник / Штовба С.Д., Козачко О.М. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 81 с.

7. Методи та засоби комп'ютерних обчислень. – Електронний навчальний посібник / Є. М. Крижановський, В.Б. Мокін, Г.В. Горячев, І.В. Варчук. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 90 с.

8. Довідник з математичної статистики з прикладами обчислень у *MatLab* : навчально-практичний посібник. Ч. 2 / О. О. Єгоршин, Л. М. Малярець, Б. В. Сінкевич. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2009. – 508 с.

9. *Excel* 2013–2016 : навчальний посібник / Укладач: Дячук С.Ф. – Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2021. – 308 с.

10. Теорія ймовірностей та математична статистика (конспект лекцій + тести) : навчальний посібник. Вид. 2-ге, допов. / Я. Т. Соловко, П.Г. Остафійчук, О. З. Гарпуль, С. А. Войтик. – Івано-Франківськ: Репозитарій / ЗВО «Університет Короля Данила», 2021. – 150 с.

ДОДАТКИ

СТАТИСТИЧНІ ТАБЛИЦІ

Таблиця Д1. Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	Φ (x)	x	Φ(x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177
0.05	0.0199	0.50	0.1915	0.95	0.3289	1.40	0.4192
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265
0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382
0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4406
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3686	1.57	0.4418
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	0.3708	1.58	0.4429
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0.3790	1.62	0.4474
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4505
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4515
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525

Продовження табл. Д1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4515
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582
0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4066	1.77	0.4616
0.43	0.1664	0.88	0.3106	1.33	0.4082	1.78	0.4625
0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633
1.80	0.4641	2.00	0.4772	2.40	0.4918	2.80	0.4974
1.81	0.4649	2.02	0.4783	2.42	0.4922	2.82	0.4976
1.82	0.4656	2.04	0.4793	2.44	0.4927	2.84	0.4977
1.83	0.4664	2.06	0.4803	2.46	0.4931	2.86	0.4979
1.84	0.4671	2.08	0.4812	2.48	0.4934	2.88	0.4980
1.85	0.4678	2.10	0.4821	2.50	0.4938	2.90	0.4981
1.86	0.4686	2.12	0.4830	2.52	0.4941	2.92	0.4982
1.87	0.4693	2.14	0.4838	2.51	0.4945	2.94	0.4984
1.88	0.4699	2.16	0.4846	2.56	0.4948	2.96	0.4985
1.89	0.4706	2.18	0.4854	2.58	0.4951	2.98	0.4986
1.90	0.4713	2.20	0.4861	2.60	0.4953	3.00	0.49865
1.91	0.4719	2.22	0.4868	2.62	0.4956	3.20	0.49931
1.92	0.4726	2.24	0.4875	2.64	0.4959	3.40	0.49966
1.93	0.4732	2.26	0.4881	2.66	0.4961	3.60	0.499841
1.94	0.4738	2.28	0.4887	2.68	0.4963	3.80	0.499928
1.95	0.4744	2.30	0.4893	2.70	0.4965	4.00	0.499968
1.96	0.4750	2.32	0.4898	2.72	0.4967	4.50	0.499997
1.97	0.4756	2.34	0.4904	2.74	0.4969	5.00	0.499997
1.98	0.4761	2.36	0.4909	2.76	0.4971		
1.99	0.4767	2.38	0.4913	2.78	0.4973		

Таблиця Д2. Критичні значення t -критерію (Стюдента)

Кількість степенів вільності k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
31	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375	3.633
32	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
33	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356	3.611
34	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
35	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591
36	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
37	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574
38	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
39	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
41	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301	3.544
42	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296	3.538
43	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291	3.532
44	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286	3.526
45	1.679	2.014	2.412	2.69	3.281	3.520
46	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277	3.515
47	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273	3.510
48	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269	3.505
49	1.677	2.010	2.405	2.68	3.265	3.500
50	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Продовження табл. Д2.

Кількість степенів вільності k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
51	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258	3.492
52	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255	3.488
53	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251	3.484
54	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248	3.480
55	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245	3.476
56	1.673	2.003	2.395	2.667	3.242	3.473
57	1.672	2.002	2.394	2.665	3.239	3.470
58	1.672	2.002	2.392	2.663	3.237	3.466
59	1.671	2.001	2.391	2.662	3.234	3.463
60	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
61	1.670	2.000	2.389	2.659	3.229	3.457
62	1.670	1.999	2.388	2.657	3.227	3.454
63	1.669	1.998	2.387	2.656	3.225	3.452
64	1.669	1.998	2.386	2.655	3.223	3.449
65	1.669	1.997	2.385	2.654	3.220	3.447
66	1.668	1.997	2.384	2.652	3.218	3.444
67	1.668	1.996	2.383	2.651	3.216	3.442
68	1.668	1.995	2.382	2.650	3.214	3.439
69	1.667	1.995	2.382	2.649	3.213	3.437
70	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
71	1.667	1.994	2.380	2.647	3.209	3.433
72	1.666	1.993	2.379	2.646	3.207	3.431
73	1.666	1.993	2.379	2.645	3.206	3.429
74	1.666	1.993	2.378	2.644	3.204	3.427
75	1.665	1.992	2.377	2.643	3.202	3.425
76	1.665	1.992	2.376	2.642	3.201	3.423
77	1.665	1.991	2.376	2.641	3.199	3.421
78	1.665	1.991	2.375	2.640	3.198	3.420
79	1.664	1.990	2.374	2.640	3.197	3.418
80	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
81	1.664	1.990	2.373	2.638	3.194	3.415
82	1.664	1.989	2.373	2.637	3.193	3.413
83	1.663	1.989	2.372	2.636	3.191	3.412
84	1.663	1.989	2.372	2.636	3.190	3.410
85	1.663	1.988	2.371	2.635	3.189	3.409
86	1.663	1.988	2.370	2.634	3.188	3.407
87	1.663	1.988	2.370	2.634	3.187	3.406
88	1.662	1.987	2.369	2.633	3.185	3.405
89	1.662	1.987	2.369	2.632	3.184	3.403
90	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
91	1.662	1.986	2.368	2.631	3.182	3.401
92	1.662	1.986	2.368	2.630	3.181	3.399
93	1.661	1.986	2.367	2.630	3.180	3.398
94	1.661	1.986	2.367	2.629	3.179	3.397
95	1.661	1.985	2.366	2.629	3.178	3.396
96	1.661	1.985	2.366	2.628	3.177	3.395
97	1.661	1.985	2.365	2.627	3.176	3.394
98	1.661	1.984	2.365	2.627	3.175	3.393
99	1.660	1.984	2.365	2.626	3.175	3.392
100	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.39
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Продовження табл.Д2.

Кількість степенів вільності k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
101	1.660	1.984	2.364	2.625	3.173	3.389
102	1.660	1.983	2.363	2.625	3.172	3.388
103	1.660	1.983	2.363	2.624	3.171	3.388
104	1.660	1.983	2.363	2.624	3.170	3.387
105	1.659	1.983	2.362	2.623	3.170	3.386
106	1.659	1.983	2.362	2.623	3.169	3.385
107	1.659	1.982	2.362	2.623	3.168	3.384
108	1.659	1.982	2.361	2.622	3.167	3.383
109	1.659	1.982	2.361	2.622	3.167	3.382
110	1.659	1.982	2.361	2.621	3.166	3.381
111	1.659	1.982	2.360	2.621	3.165	3.380
112	1.659	1.981	2.360	2.620	3.165	3.380
113	1.658	1.981	2.360	2.620	3.164	3.379
114	1.658	1.981	2.360	2.620	3.163	3.378
115	1.658	1.981	2.359	2.619	3.163	3.377
116	1.658	1.981	2.359	2.619	3.162	3.376
117	1.658	1.980	2.359	2.619	3.161	3.376
118	1.658	1.980	2.358	2.618	3.161	3.375
119	1.658	1.980	2.358	2.618	3.160	3.374
120	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
121	1.658	1.980	2.358	2.617	3.159	3.373
122	1.657	1.980	2.357	2.617	3.158	3.372
123	1.657	1.979	2.357	2.616	3.158	3.371
124	1.657	1.979	2.357	2.616	3.157	3.371
125	1.657	1.979	2.357	2.616	3.157	3.370
126	1.657	1.979	2.356	2.615	3.156	3.369
127	1.657	1.979	2.356	2.615	3.156	3.369
128	1.657	1.979	2.356	2.615	3.155	3.368
129	1.657	1.979	2.356	2.614	3.155	3.368
130	1.657	1.978	2.355	2.614	3.154	3.367
131	1.657	1.978	2.355	2.614	3.154	3.366
132	1.656	1.978	2.355	2.614	3.153	3.366
133	1.656	1.978	2.355	2.613	3.153	3.365
134	1.656	1.978	2.354	2.613	3.152	3.365
135	1.656	1.978	2.354	2.613	3.152	3.364
136	1.656	1.978	2.354	2.612	3.151	3.364
137	1.656	1.977	2.354	2.612	3.151	3.363
138	1.656	1.977	2.354	2.612	3.150	3.362
139	1.656	1.977	2.353	2.612	3.150	3.362
140	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.361
141	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.361
142	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.360
143	1.656	1.977	2.353	2.611	3.148	3.360
144	1.656	1.977	2.353	2.61	3.148	3.359
145	1.655	1.976	2.352	2.61	3.147	3.359
146	1.655	1.976	2.352	2.61	3.147	3.358
147	1.655	1.976	2.352	2.61	3.147	3.358
148	1.655	1.976	2.352	2.609	3.146	3.357
149	1.655	1.976	2.352	2.609	3.146	3.357
150	1.655	1.976	2.351	2.609	3.145	3.357
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Таблиця ДЗ. Критичні значення F – критерію (Фішера) при $\alpha = 5\%$
 ($k_{\text{більш}}$ – степені вільності дисперсії у чисельнику,
 $k_{\text{менш}}$ – степені вільності дисперсії у знаменнику критерія)

$k_{\text{менш}}$	$k_{\text{більш}}$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.1172	9.1172	9.0135	8.9406	8.8868	8.8152	8.8103
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.1881	6.3560	6.1694	6.0043	6.0410	5.9988
5	6.6679	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2066	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8378	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8626	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3808	3.5319	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3513	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3661
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0380	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9751	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2103	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2782	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0848	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2400	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2540	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6803	2.4472	2.2900	2.1750	2.0867	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

Продовження табл.ДЗ

$k_{\text{менш}}$	$k_{\text{більш}}$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,447	199,5	215,7073	224,5832	230,161	233,986	236,768	238,882	240,543	241,881
2	18,5128	19	19,1643	19,2468	19,2964	19,3295	19,3532	19,371	19,3848	19,3959
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123	8,7855
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,041	5,9988	5,9644
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,099	4,06
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,866	3,787	3,7257	3,6767	3,6365
8	5,3177	4,459	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881	3,3472
9	5,1174	4,2565	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789	3,1373
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,478	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204	2,9782
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,948	2,8962	2,8536
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964	2,7534
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144	2,671
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458	2,6022
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876	2,5437
16	4,494	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377	2,4935
17	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,81	2,6987	2,6143	2,548	2,4943	2,4499
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563	2,4117
19	4,3807	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227	2,3779
20	4,3512	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,599	2,514	2,4471	2,3928	2,3479
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,366	2,321
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419	2,2967
23	4,2793	3,4221	3,028	2,7955	2,64	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201	2,2747
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002	2,2547
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,603	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821	2,2365
26	4,2252	3,369	2,9752	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655	2,2197
27	4,21	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501	2,2043
28	4,196	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,236	2,19
29	4,183	3,3277	2,934	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2783	2,2229	2,1768
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107	2,1646
40	4,0847	3,2317	2,8387	2,606	2,4495	2,3359	2,249	2,1802	2,124	2,0772
50	4,0343	3,1826	2,79	2,5572	2,4004	2,2864	2,1992	2,1299	2,0734	2,0261
60	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2541	2,1665	2,097	2,0401	1,9926
70	3,9778	3,1277	2,7355	2,5027	2,3456	2,2312	2,1435	2,0737	2,0166	1,9689
80	3,9604	3,1108	2,7188	2,4859	2,3287	2,2142	2,1263	2,0564	1,9991	1,9512
90	3,9469	3,0977	2,7058	2,4729	2,3157	2,2011	2,1131	2,043	1,9856	1,9376
100	3,9361	3,0873	2,6955	2,4626	2,3053	2,1906	2,1025	2,0323	1,9748	1,9267
110	3,9274	3,0788	2,6871	2,4542	2,2969	2,1821	2,0939	2,0236	1,9661	1,9178
120	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2899	2,175	2,0868	2,0164	1,9588	1,9105
∞	3,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799	1,8307

Продовження табл.ДЗ

$k_{\text{менш}}$	$k_{\text{більш}}$									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	242,9835	243,906	244,6898	245,364	245,9499	246,4639	246,9184	247,3232	247,6861	248,0131
2	19,405	19,4125	19,4189	19,4244	19,4291	19,4333	19,437	19,4402	19,4431	19,4458
3	8,7633	8,7446	8,7287	8,7149	8,7029	8,6923	8,6829	8,6745	8,667	8,6602
4	5,9358	5,9117	5,8911	5,8733	5,8578	5,8441	5,832	5,8211	5,8114	5,8025
5	4,704	4,6777	4,6552	4,6358	4,6188	4,6038	4,5904	4,5785	4,5678	4,5581
6	4,0274	3,9999	3,9764	3,9559	3,9381	3,9223	3,9083	3,8957	3,8844	3,8742
7	3,603	3,5747	3,5503	3,5292	3,5107	3,4944	3,4799	3,4669	3,4551	3,4445
8	3,313	3,2839	3,259	3,2374	3,2184	3,2016	3,1867	3,1733	3,1613	3,1503
9	3,1025	3,0729	3,0475	3,0255	3,0061	2,989	2,9737	2,96	2,9477	2,9365
10	2,943	2,913	2,8872	2,8647	2,845	2,8276	2,812	2,798	2,7854	2,774
11	2,8179	2,7876	2,7614	2,7386	2,7186	2,7009	2,6851	2,6709	2,6581	2,6464
12	2,7173	2,6866	2,6602	2,6371	2,6169	2,5989	2,5828	2,5684	2,5554	2,5436
13	2,6347	2,6037	2,5769	2,5536	2,5331	2,5149	2,4987	2,4841	2,4709	2,4589
14	2,5655	2,5342	2,5073	2,4837	2,463	2,4446	2,4282	2,4134	2,4	2,3879
15	2,5068	2,4753	2,4481	2,4244	2,4034	2,3849	2,3683	2,3533	2,3398	2,3275
16	2,4564	2,4247	2,3973	2,3733	2,3522	2,3335	2,3167	2,3016	2,288	2,2756
17	2,4126	2,3807	2,3531	2,329	2,3077	2,2888	2,2719	2,2567	2,2429	2,2304
18	2,3742	2,3421	2,3143	2,29	2,2686	2,2496	2,2325	2,2172	2,2033	2,1906
19	2,3402	2,308	2,28	2,2556	2,2341	2,2149	2,1977	2,1823	2,1683	2,1555
20	2,31	2,2776	2,2495	2,225	2,2033	2,184	2,1667	2,1511	2,137	2,1242
21	2,2829	2,2504	2,2222	2,1975	2,1757	2,1563	2,1389	2,1232	2,109	2,096
22	2,2585	2,2258	2,1975	2,1727	2,1508	2,1313	2,1138	2,098	2,0837	2,0707
23	2,2364	2,2036	2,1752	2,1502	2,1282	2,1086	2,091	2,0751	2,0608	2,0476
24	2,2163	2,1834	2,1548	2,1298	2,1077	2,088	2,0703	2,0543	2,0399	2,0267
25	2,1979	2,1649	2,1362	2,1111	2,0889	2,0691	2,0513	2,0353	2,0207	2,0075
26	2,1811	2,1479	2,1192	2,0939	2,0716	2,0518	2,0339	2,0178	2,0032	1,9898
27	2,1655	2,1323	2,1035	2,0781	2,0558	2,0358	2,0179	2,0017	1,987	1,9736
28	2,1512	2,1179	2,0889	2,0635	2,0411	2,021	2,003	1,9868	1,972	1,9586
29	2,1379	2,1045	2,0755	2,05	2,0275	2,0073	1,9893	1,973	1,9581	1,9446
30	2,1256	2,0921	2,063	2,0374	2,0148	1,9946	1,9765	1,9601	1,9452	1,9317
40	2,0376	2,0035	1,9738	1,9476	1,9245	1,9037	1,8851	1,8682	1,8529	1,8389
50	1,9861	1,9515	1,9214	1,8949	1,8714	1,8503	1,8313	1,8141	1,7985	1,7841
60	1,9522	1,9174	1,887	1,8602	1,8364	1,8151	1,7959	1,7784	1,7625	1,748
70	1,9283	1,8932	1,8627	1,8357	1,8117	1,7902	1,7708	1,7531	1,7371	1,7223
80	1,9105	1,8753	1,8445	1,8174	1,7932	1,7716	1,752	1,7342	1,718	1,7032
90	1,8967	1,8613	1,8305	1,8032	1,7789	1,7571	1,7375	1,7196	1,7033	1,6883
100	1,8857	1,8503	1,8193	1,7919	1,7675	1,7456	1,7259	1,7079	1,6915	1,6764
110	1,8767	1,8412	1,8101	1,7827	1,7582	1,7363	1,7164	1,6984	1,6819	1,6667
120	1,8693	1,8337	1,8026	1,775	1,7505	1,7285	1,7085	1,6904	1,6739	1,6587
∞	1,7887	1,7522	1,7202	1,6918	1,6664	1,6435	1,6228	1,6039	1,5865	1,5705

Продовження табл. ДЗ

$k_{\text{менш}}$	$k_{\text{більш}}$									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	248,3094	248,5791	248,8256	249,0518	249,2601	249,4525	249,6309	249,7966	249,951	250,0951
2	19,4481	19,4503	19,4523	19,4541	19,4558	19,4573	19,4587	19,46	19,4613	19,4624
3	8,654	8,6484	8,6432	8,6385	8,6341	8,6301	8,6263	8,6229	8,6196	8,6166
4	5,7945	5,7872	5,7805	5,7744	5,7687	5,7635	5,7586	5,7541	5,7498	5,7459
5	4,5493	4,5413	4,5339	4,5272	4,5209	4,5151	4,5097	4,5047	4,5001	4,4957
6	3,8649	3,8564	3,8486	3,8415	3,8348	3,8287	3,823	3,8177	3,8128	3,8082
7	3,4349	3,426	3,4179	3,4105	3,4036	3,3972	3,3913	3,3858	3,3806	3,3758
8	3,1404	3,1313	3,1229	3,1152	3,1081	3,1015	3,0954	3,0897	3,0844	3,0794
9	2,9263	2,9169	2,9084	2,9005	2,8932	2,8864	2,8801	2,8743	2,8688	2,8637
10	2,7636	2,7541	2,7453	2,7372	2,7298	2,7229	2,7164	2,7104	2,7048	2,6996
11	2,6358	2,6261	2,6172	2,609	2,6014	2,5943	2,5877	2,5816	2,5759	2,5705
12	2,5328	2,5229	2,5139	2,5055	2,4977	2,4905	2,4838	2,4776	2,4718	2,4663
13	2,4479	2,4379	2,4287	2,4202	2,4123	2,405	2,3982	2,3918	2,3859	2,3803
14	2,3768	2,3667	2,3573	2,3487	2,3407	2,3333	2,3264	2,3199	2,3139	2,3082
15	2,3163	2,306	2,2966	2,2878	2,2797	2,2722	2,2652	2,2587	2,2525	2,2468
16	2,2642	2,2538	2,2443	2,2354	2,2272	2,2196	2,2125	2,2059	2,1997	2,1938
17	2,2189	2,2084	2,1987	2,1898	2,1815	2,1738	2,1666	2,1599	2,1536	2,1477
18	2,1791	2,1685	2,1587	2,1497	2,1413	2,1335	2,1262	2,1195	2,1131	2,1071
19	2,1438	2,1331	2,1233	2,1141	2,1057	2,0978	2,0905	2,0836	2,0772	2,0712
20	2,1124	2,1016	2,0917	2,0825	2,0739	2,066	2,0586	2,0517	2,0452	2,0391
21	2,0842	2,0733	2,0633	2,054	2,0454	2,0374	2,0299	2,0229	2,0164	2,0102
22	2,0587	2,0478	2,0377	2,0283	2,0196	2,0116	2,004	1,997	1,9904	1,9842
23	2,0356	2,0246	2,0144	2,005	1,9963	1,9881	1,9805	1,9734	1,9668	1,9605
24	2,0146	2,0035	1,9932	1,9838	1,975	1,9668	1,9591	1,952	1,9453	1,939
25	1,9953	1,9842	1,9738	1,9643	1,9554	1,9472	1,9395	1,9323	1,9255	1,9192
26	1,9776	1,9664	1,956	1,9464	1,9375	1,9292	1,9215	1,9142	1,9074	1,901
27	1,9613	1,95	1,9396	1,9299	1,921	1,9126	1,9048	1,8975	1,8907	1,8842
28	1,9462	1,9349	1,9244	1,9147	1,9057	1,8973	1,8894	1,8821	1,8752	1,8687
29	1,9322	1,9208	1,9103	1,9005	1,8915	1,883	1,8751	1,8677	1,8608	1,8543
30	1,9192	1,9077	1,8972	1,8874	1,8782	1,8698	1,8618	1,8544	1,8474	1,8409
40	1,826	1,8141	1,8031	1,7929	1,7835	1,7746	1,7663	1,7586	1,7513	1,7444
50	1,7709	1,7588	1,7475	1,7371	1,7273	1,7183	1,7097	1,7017	1,6942	1,6872
60	1,7346	1,7222	1,7108	1,7001	1,6902	1,6809	1,6722	1,6641	1,6564	1,6491
70	1,7088	1,6962	1,6846	1,6738	1,6638	1,6543	1,6455	1,6372	1,6294	1,622
80	1,6895	1,6768	1,6651	1,6542	1,644	1,6345	1,6255	1,6171	1,6092	1,6017
90	1,6745	1,6618	1,6499	1,6389	1,6286	1,619	1,61	1,6015	1,5935	1,5859
100	1,6626	1,6497	1,6378	1,6267	1,6163	1,6067	1,5976	1,589	1,5809	1,5733
110	1,6528	1,6399	1,6279	1,6167	1,6063	1,5966	1,5874	1,5788	1,5706	1,563
120	1,6447	1,6317	1,6197	1,6084	1,598	1,5881	1,5789	1,5703	1,5621	1,5543
∞	1,5558	1,542	1,5292	1,5173	1,5061	1,4956	1,4857	1,4763	1,4675	1,4591

Продовження табл. ДЗ

$k_{\text{менш}}$	$k_{\text{більш}}$									
	40	50	60	70	80	90	100	110	120	∞
1	251,1432	251,7742	252,1957	252,4973	252,7237	252,9	253,0411	253,1566	253,2529	254,3143
2	19,4707	19,4757	19,4791	19,4814	19,4832	19,4846	19,4857	19,4866	19,4874	19,4957
3	8,5944	8,581	8,572	8,5656	8,5607	8,5569	8,5539	8,5514	8,5494	8,5265
4	5,717	5,6995	5,6877	5,6793	5,673	5,668	5,6641	5,6608	5,6581	5,6281
5	4,4638	4,4444	4,4314	4,422	4,415	4,4095	4,4051	4,4015	4,3985	4,365
6	3,7743	3,7537	3,7398	3,7298	3,7223	3,7164	3,7117	3,7079	3,7047	3,6689
7	3,3404	3,3189	3,3043	3,2939	3,286	3,2798	3,2749	3,2708	3,2674	3,2298
8	3,0428	3,0204	3,0053	2,9944	2,9862	2,9798	2,9747	2,9705	2,9669	2,9276
9	2,8259	2,8028	2,7872	2,776	2,7675	2,7609	2,7556	2,7512	2,7475	2,7067
10	2,6609	2,6371	2,6211	2,6095	2,6008	2,5939	2,5884	2,5839	2,5801	2,5379
11	2,5309	2,5066	2,4901	2,4782	2,4692	2,4622	2,4566	2,4519	2,448	2,4045
12	2,4259	2,401	2,3842	2,372	2,3628	2,3556	2,3498	2,345	2,341	2,2962
13	2,3392	2,3138	2,2966	2,2841	2,2747	2,2673	2,2614	2,2565	2,2524	2,2064
14	2,2664	2,2405	2,2229	2,2102	2,2006	2,1931	2,187	2,182	2,1778	2,1307
15	2,2043	2,178	2,1601	2,1472	2,1373	2,1296	2,1234	2,1183	2,1141	2,0659
16	2,1507	2,124	2,1058	2,0926	2,0826	2,0748	2,0685	2,0633	2,0589	2,0096
17	2,104	2,0769	2,0584	2,045	2,0348	2,0268	2,0204	2,0151	2,0107	1,9604
18	2,0629	2,0354	2,0166	2,003	1,9927	1,9846	1,978	1,9726	1,9681	1,9168
19	2,0264	1,9986	1,9795	1,9657	1,9552	1,947	1,9403	1,9348	1,9302	1,878
20	1,9938	1,9656	1,9464	1,9323	1,9217	1,9133	1,9066	1,901	1,8963	1,8432
21	1,9645	1,936	1,9165	1,9023	1,8915	1,883	1,8761	1,8705	1,8657	1,8117
22	1,938	1,9092	1,8894	1,8751	1,8641	1,8555	1,8486	1,8428	1,838	1,7831
23	1,9139	1,8848	1,8648	1,8503	1,8392	1,8305	1,8234	1,8176	1,8128	1,757
24	1,892	1,8625	1,8424	1,8276	1,8164	1,8076	1,8005	1,7946	1,7896	1,7331
25	1,8718	1,8421	1,8217	1,8069	1,7955	1,7866	1,7794	1,7734	1,7684	1,711
26	1,8533	1,8233	1,8027	1,7877	1,7762	1,7672	1,7599	1,7539	1,7488	1,6906
27	1,8361	1,8059	1,7851	1,77	1,7584	1,7493	1,7419	1,7358	1,7306	1,6717
28	1,8203	1,7898	1,7689	1,7535	1,7418	1,7326	1,7251	1,719	1,7138	1,6541
29	1,8055	1,7748	1,7537	1,7382	1,7264	1,7171	1,7096	1,7033	1,6981	1,6377
30	1,7918	1,7609	1,7396	1,724	1,7121	1,7027	1,695	1,6887	1,6835	1,6223
40	1,6928	1,66	1,6373	1,6205	1,6077	1,5975	1,5892	1,5824	1,5766	1,5089
50	1,6337	1,5995	1,5757	1,558	1,5445	1,5337	1,5249	1,5176	1,5115	1,4383
60	1,5943	1,559	1,5343	1,516	1,5019	1,4906	1,4814	1,4737	1,4673	1,3893
70	1,5661	1,53	1,5046	1,4857	1,4711	1,4594	1,4498	1,4419	1,4351	1,3529
80	1,5449	1,5081	1,4821	1,4628	1,4477	1,4357	1,4259	1,4176	1,4107	1,3247
90	1,5284	1,491	1,4645	1,4448	1,4294	1,4171	1,407	1,3985	1,3914	1,302
100	1,5151	1,4772	1,4504	1,4303	1,4146	1,402	1,3917	1,3831	1,3757	1,2832
110	1,5043	1,466	1,4388	1,4183	1,4024	1,3896	1,3791	1,3703	1,3628	1,2674
120	1,4952	1,4565	1,429	1,4083	1,3922	1,3792	1,3685	1,3595	1,3519	1,2539
∞	1,394	1,3501	1,318	1,2933	1,2735	1,2572	1,2434	1,2317	1,2214	1,0033