НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико - математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірності

«На правах рукопису»

УДК 001.09

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

__________ Клесов Олег Іванович

«____»______________ 2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Метод Ньютона для знаходження коренів нелінійних рівнянь та його застосування»

Виконав (-ла):
студент (-ка) II курсу магістратури, групи ОМ-31мн
Кондренко Марія Сергіївна ____________
Науковий керівник:
Професор, доктор фізико-математичних наук
Клесов Олег Іванович ____________
Рецензент:
Професор, доктор фізико-математичних наук
Гавриленко Валерій Володимирович ____________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент (-ка) ______________

Київ 2025

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського
Фізико - математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірності

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)
Спеціальність – 111 «Математика»
Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
__________ Клесов Олег Іванович
«____»_______________ 2025 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту
Кондренко Марія Сергіївна

1. Тема дисертації «Метод Ньютона для знаходження коренів нелінійних рівнянь та його застосування», науковий керівник дисертації професор, доктор фізико-математичних наук Клесов Олег Іванович, затверджені наказом по університету від «21» березня 2025 р. № 1276-с

2. Термін подання студентом дисертації 15.05.2025.

3. Об'єктом дослідження є Метод Ньютона для знаходження коренів нелінійних рівнянь та його застосування.

4. Предметом дослідження є Метод Ньютона для знаходження коренів нелінійних рівнянь, інші методи для знаходження коренів нелінійних рівнянь та їх застосування.

5. Перелік завдань, які потрібно виконати:

1) Розгляд іноземної літератури, яка описує Метод Ньютона для знаходження коренів нелінійних рівнянь та його застосування.

2) Розгляд інших методів для знаходження коренів нелінійних рівнянь та їх застосування.

3) Розв'язання рівнянь за вибраними методами.

4) Порівняння роботи Методу Ньютона для знаходження коренів нелінійних рівнянь з іншими методами.

6. Дата видачі завдання 04.02.2025

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Збір та аналіз літератури по темі дослідження. Формулювання основних завдань.	04.02.2025-04.03.2025	виконано
2	Розробка плану дисертації. Визначення інших методів, які будуть застосовуватися у самостійній роботі.	05.03.2025-15.03.2025	виконано
3	Виконання частини з самостійної роботи.	16.03.2025-30.03.2025	виконано
4	Написання попереднього тексту дисертації.	31.03.2025-15.04.2025	виконано
5	Аналіз отриманих даних.	16.04.2025-26.04.2025	виконано
6	Написання основного тексту дисертації. Редагування та коректура.	27.04.2025-09.05.2025	виконано
7	Формування висновків. Підготовка презентації за результатами дослідження.	10.05.2025-14.05.2025	виконано

Студент Кондренко Марія Сергіївнаа

Науковий керівник Клесов Олег Іванович

Реферат

Магістерська дисертація: 76 сторінка, 15 слайдів для проектора, 9 першоджерела.

У цьому рефераті ми досліджуємо застосування Методу Ньютона для знаходження коренів нелінійних рівнянь. Зокрема, розглядаємо інші методи для знаходження коренів нелінійних рівнянь. Робота включає як теоретичний аналіз цих методів, так і практичне їх застосування та порівняння для визначення найкращого способу для знаходження кількості коренів нелінійних рівнянь.
Мета роботи є дослідження методу Ньютона для знаходження коренів нелінійних рівнянь, аналіз його ефективності та порівняння з іншими чисельними методами розв'язку нелінійних рівнянь
Завданням роботи є теоретичний аналіз методу Ньютона та його математичне обґрунтування, аналіз прикладів розв'язування нелінійних рівнянь за допомогою методу Ньютона та проведення порівняльного аналізу результатів з іншими методами.
Ключові слова: метод Ньютона, метод Штурма, метод Гаусса-Люка, правило знаків Декарта, поліном, дійсні корені, комплексні корені, нелінійні рівняння.

Master's thesis: 76 pages, 15 slides for projector, 9 primary sources.

In this essay, we investigate the application of Newton's Method to find the roots of nonlinear equations. In particular, we consider other methods for finding the roots of nonlinear equations. The work includes both a theoretical analysis of these methods and their practical application and comparison to determine the best method for finding the number of roots of nonlinear equations.

The aim of the work is to study Newton's method for finding the roots of nonlinear equations, analyze its effectiveness and compare it with other numerical methods for solving nonlinear equations.

The task of the paper is to theoretically analyze Newton's method and its mathematical justification, analyze examples of solving nonlinear equations using Newton's method, and conduct a comparative analysis of the results with other methods.

Keywords: Newton's method, Sturm's method, Gauss-Lucas method, Descartes' rule of signs, polynomial, real roots, complex roots, nonlinear equations.

Зміст

1 Вступ

Досліджуючи наукову літературу та аналізуючи різні підходи до розв'язання нелінійних рівнянь, варто окремо виділити проблему визначення кількості їх коренів. Це питання має принципове значення як для теоретичної математики, так і для прикладних галузей знань — таких як фізика, біомедицина, економіка, де кількість розв'язків може відповідати кількості станів або рішень реальної системи. Особливої складності набуває ця задача у випадку нелінійних рівнянь, для яких аналітичне обчислення коренів неможливе або надто трудомістке. Знання кількості дійсних та комплексних коренів, наприклад, при розв'язуванні характеристичного рівняння для диференціальних рівнянь допомогає правильно записати загальний розв'язок, задовольнити початкові або крайові умови, отримати повні та правильні розв'язки. Навіть якщо точне значення коренів не відоме, але відома кількість комплексних та дійсних коренів, а також їх кратність, то можна уявити яким буде розв'язок диференціального рівняння.

У цій роботі основна увага приділяється методу Ньютона, який зазвичай використовується для знаходження наближених значень коренів. Проте, при його грамотному застосуванні, можливо також отримати інформацію щодо кількості коренів шляхом аналізу збіжності ітерацій при різних початкових значеннях, а також геометричних властивостей функції. Цей підхід розкриває потенціал методу Ньютона не лише як засобу для знаходження окремих коренів, а й як інструменту для дослідження їх структури.

Однак для повноцінного аналізу кількості коренів одного лише методу Ньютона недостатньо. Саме тому в роботі також розглядаються класичні аналітичні методи, такі як правило знаків Декарта, метод Штурма та метод Гаусса–Люка. Ці методи дозволяють точно або наближено визначити кількість дійсних коренів на заданому проміжку або в усьому просторі дійсних чисел, кожен з них має свої переваги, обмеження та сфери ефективного застосування.

Зіставлення результатів, отриманих різними методами, на прикладі конкретних нелінійних рівнянь дозволяє не лише виявити сильні та слабкі сторони кожного з підходів, а й сформувати рекомендації щодо їх практичного використання. Такий порівняльний аналіз дає змогу краще зрозуміти внутрішню структуру рівнянь, кількість та характер їхніх коренів.

Таким чином, метою цієї роботи є дослідження та порівняння методів визначення кількості коренів нелінійних рівнянь, зокрема: методу Ньютона, правила знаків Декарта, методу Штурма та методу Гаусса–Люка, а також виявлення їх ефективності на прикладах конкретних задач.

Я сподіваюся внести свій вклад у розвиток даної теми, за допомогою розглянутих мною надалі математичних методів.

2 Метод Ньютона

2.1 Неповні та повні правила Ньютона

Розглянемо поліном

$$p(x) = \binom{n}{0} a_n x^n + \binom{n}{1} a_{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} a_1 x + \binom{n}{n} a_0$$

з дійсними коефіцієнтами, що записується у вказаній формі.

Прості елементи $p(x)$ визначені як $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0$, тоді як квадратичні елементи $p(x)$ визначені як $Q_n, Q_{n-1}, Q_{n-2}, ..., Q_0$, де $Q_n = a_n^2, Q_{n-1} = a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2}, Q_{n-2} = a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2 - a_{n-1} a_{n-3}, ..., Q_1 = a_1^2 - a_2 a_0, Q_0 = a_0^2$.

Теорема 2.1 (Неповне правило Ньютона). Припустимо, що всі квадратичні елементи полінома $p(x)$ відмінні від нуля. Тоді кількість змін знаку у послідовності $Q_n, Q_{n-1}, Q_{n-2}, ..., Q_0$ дає нижню межу для кількості уявних коренів $p(x)$.

Зауважимо, що ця межа обов'язково є парним числом, оскільки і Q_n, і Q_0 додатні. Це має сенс, оскільки, як знав Ньютон, комплексні корені бувають сполученими парами. Далі ми зосередимося на загальній ситуації ненульових простих елементів і ненульових квадратичних елементів.

Як приклад, розглянемо $p(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4$. Прості елементи обчислюються як 1, -5/5, 4/10, -2/10, -5/5, -4, що дає такі квадратичні елементи: 1, 6/10, -4/100, 44/100, 2/10, 16. результуюча послідовність знаків + + - + ++, що вказує принаймні на два уявні корені за неповним правилом Ньютона. Наступні наслідки демонструють, що в деяких випадках правило дає знання про існування єдиної пари уявних коренів без праці по створенню послідовності знаків.

Наслідок 2.1. Для полінома $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{n-i} x^{n-i}$ співвідношення

$$p_r^2 < p_{r+1} \cdot p_{r-1}$$

для деякого r вказує на існування пари уявних коренів.

Доведення. Нагадаємо, що

$$Q_r = \frac{p_r^2}{\binom{n}{r}^2} - \frac{p_{r+1}}{\binom{n}{r+1}} \cdot \frac{p_{r-1}}{\binom{n}{r-1}} = \frac{1}{\binom{n}{r}^2}[p_r^2 - (\frac{r+1}{n-r})(\frac{n-r+1}{r})p_{r+1} \cdot p_{r-1}].$$

З точністю до знака ми можемо ігнорувати першу константу, і використовуючи

$$(\frac{r+1}{r})(\frac{n-r+1}{n-r}) > 1,$$

ми маємо

$$p_r^2 - (\frac{r+1}{n-r})(\frac{n-r+1}{r})p_{r+1} \cdot p_{r-1} < p_r^2 - p_{r+1} \cdot p_{r-1},$$

що за гіпотезою є від'ємним. Таким чином, Q_r є від'ємним. Знову ж таки, оскільки і Q_n, і Q_0 є додатними, послідовність квадратичних елементів матиме принаймні дві варіації знака. Неповне правило Ньютона гарантує принаймні одну пару уявних коренів. □

Наприклад, поліном $p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 16$ має пару уявних коренів, оскільки $4^2 < -2 \cdot -16$.

Наслідок 2.2. Для полінома $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{n-i}x^{n-i}$, той факт, що обидві умови $|p_r| < |p_{r+1}|$ та $|p_r| < |p_{r-1}|$ виконуються для деякого r, причому p_{r+1} та p_{r-1} одного знака, вказує на існування пари уявних коренів.

Доведення. Коефіцієнти задовольняють умову минулого наслідку . □

Як приклад, поліном $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ має пару уявних коренів, оскільки $|2| < |-3|$ та $|2| < |-4|$.

Оскільки неповне правило Ньютона дає нижню межу для кількості уявних коренів, що мають поліноми, також отримано верхню межу для кількості дійсних коренів. Фактично, Ньютон покращив верхні межі, отримані шляхом застосування правила Декарта. Ми можемо встановити, що пара уявних коренів, позначених певними квадратичними елементами, прихована серед кількості додатних дійсних коренів або від'ємних дійсних коренів, передбачених правилом Декарта, розглядаючи варіації та сталість відповідних простих елементів. Це повне правило Ньютона, в якому розглядаються як прості, так і квадратичні послідовності. Ми записуємо прості елементи як горизонтальну послідовність зверху, а квадратичні елементи як горизонтальну послідовність знизу:

$$\begin{array}{cccc} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \\ Q_n & Q_{n-1} & \dots & Q_0 \end{array}$$

Зосередимося на пов'язаних парах послідовних елементів,

$$\begin{array}{cc} a_{r+1} & a_r \\ Q_{r+1} & Q_r. \end{array}$$

Розглянемо можливу зміну знака у верхній парі та можливу зміну знака у нижній парі, що дає чотири можливості. Ми використовуємо позначення νV, νP, ρV та ρP, де перший символ завжди стосується поведінки знаків зверху, а другий символ — поведінки знаків знизу. Літери ν та V позначають зміну знака; літери ρ та P позначають сталість знака. Таким чином, νV позначає зміну знака у верхній парі $a_{r+1}a_r$ та зміну знака у відповідній нижній парі $Q_{r+1}Q_r$. Символ νV позначає зміну знака у верхній парі $a_{r+1}a_r$, але сталість знака у нижній парі $Q_{r+1}Q_r$. Символи ρV та ρP мають аналогічні значення.

Теорема 2.2 (Повне правило Ньютона). Припустимо, що прості та квадратичні елементи полінома $p(x)$ не є нульовими та відображаються як

$$\begin{array}{cccc} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \\ Q_n & Q_{n-1} & \dots & Q_0 \end{array}$$

Тоді загальна кількість подвійних інтервалів сталості, що записується як $\sum \rho P$, є верхньою межею для кількості від'ємних коренів $p(x)$, а загальна кількість інтервалів сталості, що записується як $\sum \nu P$, є верхньою межею для кількості додатних коренів.

Другий висновок теореми випливає з першого, якщо розглянути $p(-x)$. Як наслідок, загальна кількість дійсних коренів менша або дорівнює сумі подвійних інтервалів сталості та інтервалів сталості, тобто загальній кількості $\sum P$ сталості у послідовності квадратичних елементів. Отже, загальна кількість уявних коренів більша або дорівнює $n - \sum P = \sum V$, загальній кількості варіацій у послідовності квадратичних елементів. Це, звичайно, неповне правило Ньютона, яке тепер розглядається як підпорядковане повному правилу.

У нашому попередньому прикладі, $p(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4$, пов'язані послідовності простих та квадратичних елементів мають вигляд

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & - & - \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

що виявляє один інтервал сталості та дві подвійних інтервалів сталості, а отже, вказує на один додатний корінь та максимум два від'ємні корені.

Повне правило Ньютона дає повне уявлення про природу коренів будь-якого многочлена, який не має більше уявних коренів, ніж розкриває правило, на відміну від випадку вищезгаданої квінтики. Ньютон вважав, що цей останній сценарій трапляється рідко, але тим не менш навів приклад $p(x) = x^3 - 3a^2x - 3a^3$, який дає квадратичні елементи зі знаком $++++$, тим самим приховуючи два уявні корені, знайдені за допомогою роздільної здатності кубічного елемента Кардана. Ньютон додав, що в таких випадках можна змінити корені, змінивши змінну з x на $x + p$.

А якщо й існують якісь неможливі корені, то рідко трапляється, що їх не можна знайти за дві чи три такі спроби. Також не може бути рівняння, неможливі корені якого не можна було б знайти таким чином.

Цей загадковий коментар є ключем до доказу Сильвестра повного правила Ньютона, в якому він ретельно відображає, як змінюються прості та квадратичні знакоподібні шаблони для поліномів $\rho(x+\lambda)$ при безперервному русі λ через $\mathbb{R}$. Цей метод аналогічний методу, розробленому Фур'є в 1796 році, який довів узагальнення правила Декарта, опубліковане посмертно в 1831 році.

Теорема 2.3 (Узагальнення Сильвестра повного правила Ньютона). Нехай μ та ν — будь-які два дійсних числа з $\mu > \nu$. Тоді

$$\sum \rho P(\mu) - \sum \rho P(\nu) = (\nu, \mu) + 2k,$$

де (ν, μ) позначає загальну кількість дійсних коренів $\rho(x)$ між ν та μ, враховуючи кратності, а k — деяке невід'ємне ціле число.

Як коментар, нагадаємо, що графік полінома $\rho(x+\mu)$ можна розглядати як графік $\rho(x)$, зміщений на μ одиниць ліворуч. Аналогічно для $\rho(x+\nu)$. Тепер, коли μ перевищує ν, $\rho(x+\mu)$ матиме щонайменше стільки ж від'ємних дійсних коренів, скільки й $\rho(x+\nu)$, можливо, більше. Теорема Сільвестра кількісно визначає, як зміна подвійних інтервалів сталості для простих і квадратичних послідовностей, пов'язаних з цими двома поліномами, співмірна зі зміною природи коренів. Попередній результат Фур'є стверджує, що

$$\sum \rho P(\mu) - \sum \rho P(\nu) = (\nu, \mu) + 2k.$$

Таким чином, Фур'є розглядав лише знакову схему простих елементів, тобто схему, розглянуту в правилі Декарта.

2.2 Приклад застосування теореми Сильвестра

Щоб проілюструвати теорему Сильвестра, розглянемо поліном $\rho(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$. Ми обчислюємо відповідну послідовність знаків, утворену з простих елементів та квадратичних елементів для поліномів $\rho(x+\lambda)$, де $\lambda = -1, 0 та 2$.

$$\lambda = -1,\ (\sum \rho P = 0) \quad \begin{matrix} + & - & + & - \\ + & - & + & + \end{matrix}$$

$$\lambda = 0,\ (\sum \rho P = 1) \quad \begin{matrix} + & + & + & + \\ + & - & + & + \end{matrix}$$

$$\lambda = 2,\ (\sum \rho P = 1) \quad \begin{matrix} + & + & + & + \\ + & - & - & + \end{matrix}$$

Згідно з теоремою Сильвестра, при $\mu = 0$ та $\nu = -1$, ми повинні отримати стільки ж подвійних інтервалів сталості, скільки коренів для $\rho(x)$ у $(-1, 0)$, або більше на парне число. Закономірність при $\lambda = -1$ змінюється від відсутності подвійних інтервалів сталості до однієї подвійної сталості при $\lambda = 0$, що вказує на те, що $\rho(x)$ має лише один корінь у $(-1, 0)$. (Фактично, повне правило Ньютона вказує, що $\rho(x)$ має один негативний корінь та два уявних корені. Закономірність для $\rho(x)$ відповідає $\lambda = 0$.) Також спостерігається зміна закономірності при розгляді $\mu = 2$ та $\nu = 0$, але кількість подвійних інтервалів сталості не змінюється.

Як додатковий приклад, нехай $\rho(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 3$. Показано відповідні послідовності знаків для $\rho(x+\lambda)$ для кількох варіантів λ.

$$\lambda = -3 \quad \begin{matrix} + & - & + & - & + \\ + & + & + & + & + \end{matrix} \qquad \lambda = -2 \quad \begin{matrix} + & - & + & - & + \\ + & + & + & - & + \end{matrix} \qquad \lambda = -1 \quad \begin{matrix} + & - & + & + & + \\ + & + & + & + & + \end{matrix}$$

$$\lambda = 0 \quad \begin{matrix} + & + & + & + & + \\ + & + & - & - & + \end{matrix} \qquad \lambda = 6 \quad \begin{matrix} + & + & + & + & + \\ + & + & + & - & + \end{matrix} \qquad \lambda = 14 \quad \begin{matrix} + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + \end{matrix}$$

Поліном $\rho(x)$ має чотири уявні корені, і тому, згідно з теоремою Сильвестра, ми очікуємо збільшення кількості подвійних інтегралів сталості лише на парні числа. Наприклад, при $\mu = 14$ та $\nu = -3$ ми бачимо збільшення на чотири подвійні інтеграли сталості.

Наслідок 2.3 (Повне правило Ньютона справедливе.). Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$\Sigma\rho P(0) - \Sigma\rho P(-\infty) = \Sigma\rho P(0),$$

де

$$\Sigma\rho P(-\infty) = \lim_{\lambda\to-\infty} \Sigma\rho P(\lambda).$$

Це випливає з того, що розкладання $\rho(x+\lambda)$ дає

$$a_n x^n + n(a_n\lambda + a_{n-1})x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(a_n\lambda^2 + 2a_{n-1}\lambda + a_{n-2})x^{n-2} + \ldots.$$

Для достатньо негативного λ, r-й коефіцієнт матиме той самий знак, що й $a_n\lambda^r$, таким чином $\sum \rho P(-\infty) = 0$, оскільки прості елементи чергуються за знаком. Зауважимо, що $\Sigma\rho P(0)$ відповідає нашому початковому у $\Sigma\rho P$. За теоремою Сильвестра ми маємо

$$\Sigma\rho P(0) = \Sigma\rho P(0) - \Sigma\rho P(-\infty) \geq (-\infty, 0).$$

Зрештою, зміна $\rho(x)$ на $\rho(-x)$ змінює сталість та варіації простих елементів, що призводить до $\Sigma\nu P(0) \geq (0, \infty)$. $\square$

2.3 Доведення Сильвестра

Сильвестр стверджував, що пов'язані послідовності знаків для поліномів $\rho(x+\mu)$ та $\rho(x+\nu)$ відрізняються точним чином (що дозволило Сильвестру підтвердити попередню роботу Ньютона). Фактично, k-й простий (квадратичний) елемент для полінома $\rho(x+\mu)$ матиме той самий знак, що й відповідний k-й елемент для $\rho(x+\nu)$, якщо тільки цей елемент не стане нулем для полінома $\rho(x+\lambda)$, де $\mu > \lambda > \nu$. Без обмеження загальності, нехай $\mu = \lambda + \epsilon$ та $\nu = \lambda - \epsilon$, де ϵ достатньо мале, щоб вираз полінома

$$\rho^{(n)}(\lambda), \rho^{(n-1)}(\lambda), 2!\rho^{(n-2)}(\lambda), 3!\rho^{(n-3)}(\lambda), 4!\rho^{(n-4)}(\lambda), ..., n!\rho(\lambda) \tag{2.1}$$

для k-го простого (квадратичного)

$$Q_n(\lambda), Q_{n-1}(\lambda), Q_{n-2}(\lambda), Q_{n-3}(\lambda), Q_{n-4}(\lambda), ..., Q_0(\lambda),$$

де

$$Q_n(\lambda) = (\rho^{(n)}(\lambda))^2, Q_0(\lambda) = (\rho(\lambda))^2 \tag{2.2}$$

елемента дорівнював нулю в інтервалі $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$ лише в точці λ.

У цьому розділі ми представляємо тотожності, які Сильвестр використовував, щоб показати, як зміна від 0 (у точці λ) до + або - (у точці $\lambda \pm \epsilon$) повністю визначається знаками ненульових суміжних елементів у точці λ та знаком ϵ.

Сильвестр вивів наступні тотожності з наведених виразів (??), (??) та

$$Q_k(\lambda) = (\rho^{(k)}(\lambda))^2 - \gamma_k \rho^{(k-1)}(\lambda)\rho^{(k+1)}(\lambda) \tag{2.3}$$

з $\gamma_k = (n-k+1)/(n-k)$ коли $1 \leq k \leq n-1$ для простих та квадратичних елементів, теореми Тейлора та неперервності поліномів. Саме на цих співвідношеннях базується аналіз. У наступних виведеннях для тотожностей (??) та (??) Сільвестр використовував той факт, що $2 - \gamma_k = 1/\gamma_{k+1}$. Також зауважте, що апроксимації мають члени похибки, які прямують до нуля згідно з теоремою Тейлора про залишки для поліномів. Таким чином, знаки членів по обидва боки символу апроксимації обов'язково однакові, коли ϵ достатньо мале. Ось апроксимації, які застосував Сільвестр:

1. $\rho^{(k)}(\lambda) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho^{(k)}(\lambda+\epsilon) \approx \epsilon\rho^{(k+1)}(\lambda)$
2. $\rho^{(k)}(\lambda) = 0 = \rho^{(k+1)}(\lambda) = \cdots = \rho^{(k+i-1)}(\lambda) = 0$
   $\Rightarrow \qquad \rho^{(k)}(\lambda+\epsilon) \approx \frac{\epsilon^i}{i!}\rho^{(k+i)}(\lambda)$
3. $Q_k(\lambda) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q_k(\lambda+\epsilon) \approx \epsilon \cdot \frac{d}{dx}Q_k(x)|_{x=\lambda} = \frac{\epsilon}{\gamma_{k+1}} \cdot \frac{\rho^{(k)}(\lambda)}{\rho^{(k+1)}(\lambda)}Q_{k+1}(\lambda)$
4. $Q_k(\lambda) = 0 = Q_{k+1}(\lambda) = \cdots = Q_{k+i-1}(\lambda)$
   $\Rightarrow \qquad Q_k(\lambda+\epsilon) \approx \frac{\epsilon^i}{i!\gamma_{k+1}\cdots\gamma_{k+i}} \cdot \frac{\rho^k(\lambda)}{\rho^{k+i}(\lambda)}Q_{k+i}(\lambda)$

Випадок а. Припустимо, що ми спостерігаємо одноразове зникнення простого елемента $\rho^{(k)}(\lambda)$ з $k \neq 0$ або n. Квадратичні елементи в (??) визначаються верхніми елементами, і тому у нас є лише $\rho^{(k+1)}$ та $\rho^{(k-1)}$ для вільного призначення знака плюс або мінус. Однак, зміна всіх знаків зверху не змінює сталість та варіацію. Таким чином, ми фактично маємо $2^2/2 = 2$ можливості для того, що відбувається в λ. Члени в рамці будуть використовуватися для обчислення знаків до та після λ.

$$\begin{matrix} \rho^{(k+1)} & \rho^{(k)} & \rho^{(k-1)} \\ Q_{k+1} & Q_k & Q_{k-1} \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{+} & 0 & + \\ + & - & + \end{matrix} \quad \text{або} \quad \begin{matrix} \boxed{+} & 0 & - \\ + & + & + \end{matrix} \tag{2.4}$$

Зауважимо, що всі знаки у (??) мають залишатися сталими під час переходу, за винятком можливої позиції, яку займає k-ий простий елемент. Відповідні знаки для цієї позиції визначаються за допомогою тотожності (1), яка говорить, що знак $\rho^{(k)}(\lambda+\epsilon)$ визначається множенням знака ϵ на знак у рамці.

Перед цим моментом обнулення (тобто при $\lambda-\epsilon$), відповідні елементи мають вигляд:

$$\begin{matrix} \rho^{(k+1)} & \rho^{(k)} & \rho^{(k-1)} \\ Q_{k+1} & Q_k & Q_{k-1} \end{matrix} = \begin{matrix} + & - & + \\ + & + & + \end{matrix} \quad \text{або} \quad \begin{matrix} + & - & - \\ + & + & + \end{matrix}$$

Після появи нуля (тобто в точці $\lambda+\epsilon$) ми обчислюємо відповідні елементи як:

$$\begin{matrix} \rho^{(k+1)} & \rho^{(k)} & \rho^{(k-1)} \\ Q_{k+1} & Q_k & Q_{k-1} \end{matrix} = \begin{matrix} + & + & + \\ + & - & + \end{matrix} \quad \text{або} \quad \begin{matrix} + & + & - \\ + & + & + \end{matrix}$$

Таким чином, ми не бачимо жодної чистої втрати чи прибутку від подвійної сталості при переході від $\lambda - \epsilon$ до $\lambda + \epsilon$ у $\mathbb{R}$.

Випадок b. Припустимо, ми спостерігаємо одиничне занулення квадратичного елемента $Q_k(\lambda)$, де k відрізняється від 0 та n. Цей нульовий елемент за означенням Q_k вимагає, щоб зовнішні прості елементи обов'язково мали однаковий знак, і ми маємо чотири позиції, де можна вільно призначати $+$ або $-$. Однак, як і раніше, насправді ми маємо лише $2^4/4 = 4$ можливості при λ (у цьому випадку нижні знаки не визначаються потрійкою вище них):

$$\begin{matrix} \boxed{+} & \boxed{+} & + \\ \boxed{+} & 0 & - \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boxed{+} & \boxed{+} & + \\ \boxed{+} & 0 & + \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boxed{+} & \boxed{-} & + \\ \boxed{+} & 0 & - \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boxed{+} & \boxed{-} & + \\ \boxed{+} & 0 & +. \end{matrix}$$

Новий знак, що відповідає k-й квадратичній позиції, виводиться з тотожності (3), яка говорить, що цей знак отримується як добуток обведених термінів зі знаком ϵ.

Перед виникненням нуля (тобто при $\lambda - \epsilon$) ми обчислюємо відповідні елементи як:

$$\begin{matrix} + & + & + \\ + & - & - \end{matrix} \quad \begin{matrix} + & + & + \\ + & - & + \end{matrix} \quad \begin{matrix} + & - & + \\ + & + & - \end{matrix} \quad \begin{matrix} + & - & + \\ + & + & +. \end{matrix}$$

Після виникнення нуля (тобто при $\lambda + \epsilon$) ми отримуємо відповідні елементи:

$$\begin{matrix} + & + & + \\ + & + & - \end{matrix} \quad \begin{matrix} + & + & + \\ + & + & + \end{matrix} \quad \begin{matrix} + & - & + \\ + & - & - \end{matrix} \quad \begin{matrix} + & - & + \\ + & - & +. \end{matrix}$$

Таким чином, ми не бачимо ні чистого приросту, ні збитку для першої, третьої та четвертої форм, а також приріст двох подвійних сталостей у другій формі.

Випадок c. Якщо λ є коренем кратності i для $\rho(x)$, то останні $i+1$ елементів пов'язаних послідовностей у λ,

$$\begin{array}{lllll} \rho^{(i)} & \rho^{(i-1)} & \dots & \rho' & \rho \\ Q_i & Q_{i-1} & \dots & Q_1 & Q_0, \end{array}$$

стають

$$\begin{array}{lllll} \rho^{(i)} & 0 & ... & 0 & 0 \\ Q_i & 0 & \dots & 0 & 0, \end{array}$$

що зводиться до єдиного випадку

$$\begin{array}{lllll} + & 0 & \dots & 0 & 0 \\ + & 0 & \dots & 0 & 0. \end{array}$$

У точці $\lambda - \epsilon$ ми бачимо

$$\begin{array}{lllllll} + & - & + & - & \dots & \pm & \mp \\ + & + & + & + & \dots & + & +, \end{array}$$

а в точці $\lambda + \epsilon$ форма

$$\begin{array}{lllllll} + & + & + & + & \dots & + & + \\ + & + & + & + & \dots & + & +, \end{array}$$

набирає i подвійних інтегралів сталості, коли ми проходимо через корінь кратності i. Знаки простих елементів були обчислені за допомогою тотожності (2), де вираз $\epsilon^{i-k}\rho^{(i)}(\lambda)/(i-k)!$ вказує, що знак походить від ϵ^{i-k}, що створює прості варіації перед переходом (ϵ негативне) та прості сталості після переходу (ϵ додатне). Вже тоді ми бачимо, що подвійних сталостей при $\lambda - \epsilon$ не виникає. Що стосується квадратичних елементів, зауважимо, що $Q_i(x)$ є додатним протягом усього переходу за принципом неперервності, а $Q_0(x)$ є додатним у точках $\lambda-\epsilon$ та $\lambda+\epsilon$, оскільки він визначається простим елементом над ним за формулою (??). Прямий аналіз з використанням формули (??) показує, що проміжні квадратичні елементи залишаються додатними протягом усього переходу.

Підсумовуючи, зі збільшенням параметра λ кількість подвійних сталостей у пов'язаних послідовностях простих і квадратичних елементів збільшується на кількість пропущених дійсних коренів, кожен з яких підрахований з кратністю, а будь-яке збільшення понад цю кількість задається парним цілим числом. Решта випадків, випадки (d) та (e), мають кілька членів, які одночасно зникають. Сильвестр зазначив, що невелике руйнування коефіцієнтів змінить ці сингулярні випадки на загальний, залишаючи при цьому природу коренів незмінною. Однак можливий виняток пов'язаний з переходом дійсних коренів до уявної пари, і замість того, щоб розібратися з цією тонкістю, він розглянув сингулярні випадки, як ми вказали.

Розв'язання загального квадратного рівняння за неповним правилом Ньютона

Розглянемо загальне квадратне рівняння:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Коефіцієнти полінома:

$$a_2 = a, \quad a_1 = b, \quad a_0 = c$$

Крок 1: Обчислення квадратичних елементів

За формулами з теореми Ньютона:

$$Q_2 = a_2^2 = a^2$$

$$Q_1 = a_1^2 - a_2 a_0 = b^2 - ac$$

$$Q_0 = a_0^2 = c^2$$

Крок 2: Аналіз знаків послідовності

Послідовність: Q_2, Q_1, Q_0
Зміни знаку в послідовності $(+/-)$ визначають нижню межу кількості пар спряжених комплексних коренів.

Висновок

- Якщо $Q_1 = b^2 - ac < 0$, маємо одну зміну знаку (наприклад, $+, -, +$) — отже, рівняння має одну пару комплексних спряжених коренів. - Якщо $Q_1 \geq 0$, зміни знаку можуть бути відсутні — можливо, є два дійсні корені.
Таким чином, теорема дозволяє встановити нижню межу кількості уявних коренів без обчислення дискримінанта.

Розв'язання рівняння $x^2 + 1 = 0$ за неповним правилом Ньютона

Крок 1: Запис полінома у потрібному вигляді

Поліном:

$$p(x) = x^2 + 0x + 1$$

Отже, прості коефіцієнти:

$$a_2 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 1$$

Крок 2: Обчислимо квадратичні елементи

Формули з теореми:

$$Q_n = a_n^2, \quad Q_{n-1} = a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2}, \quad Q_{n-2} = a_{n-2}^2$$

У нашому випадку:

$$Q_2 = a_2^2 = 1^2 = 1$$

$$Q_1 = a_1^2 - a_2 a_0 = 0^2 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$Q_0 = a_0^2 = 1^2 = 1$$

Крок 3: Визначимо знаки послідовності Q_2, Q_1, Q_0

Це:

$$Q_2 = 1 \quad (+), \quad Q_1 = -1 \quad (-), \quad Q_0 = 1 \quad (+)$$

Послідовність знаків:

$$+,\ -,\ +$$

Маємо 2 зміни знаку, що згідно з теоремою Н'ютона (Theorem 2.1), означає не менше двох уявних коренів (комплексних), тобто одну пару спряжених уявних чисел.

Висновок

Згідно з неповним правилом Ньютона, рівняння:

$$x^2 + 1 = 0$$

має одну пару уявних коренів, що збігається з точним розв'язком:

$$x = \pm i$$

Розв'язання рівняння $f(x) = x^3 - 2x + 2 = 0$ за неповним правилом Ньютона

Крок 1: Запис полінома у потрібному вигляді

Запишемо поліном у стандартному вигляді:

$$f(x) = x^3 + 0x^2 - 2x + 2$$

Отже, прості коефіцієнти:

$$a_3 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = -2, \quad a_0 = 2$$

Крок 2: Обчислення квадратичних елементів

Формули для квадратичних елементів:

$$Q_n = a_n^2, \quad Q_{n-1} = a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2}, \quad Q_{n-2} = a_{n-2}^2 - a_{n-1} a_{n-3}, \quad Q_0 = a_0^2$$

У нашому випадку:

$$Q_3 = a_3^2 = 1^2 = 1$$

$$Q_2 = a_2^2 - a_3 a_1 = 0^2 - 1 \cdot (-2) = 2$$
$$Q_1 = a_1^2 - a_2 a_0 = (-2)^2 - 0 \cdot 2 = 4$$
$$Q_0 = a_0^2 = 2^2 = 4$$

Крок 3: Аналіз послідовності знаків

Послідовність квадратичних елементів:

$$Q_3, Q_2, Q_1, Q_0 = 1,\ 2,\ 4,\ 4$$

Послідовність знаків:

$$+,\ +,\ +,\ +$$

Змін знаків немає.

Висновок

Згідно з неповним правилом Ньютона, кількість змін знаку в послідовності $Q_n, Q_{n-1}, \ldots, Q_0$ є нижньою межею для кількості уявних коренів полінома.
Оскільки змін знаку немає, правило не гарантує наявності жодного уявного кореня.
Проте це не означає, що їх немає — насправді рівняння

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

не має дійсних коренів, і всі його корені є комплексними. Просто правило Ньютона цього не виявило, оскільки всі квадратичні елементи додатні.

Розв'язання рівняння $(x-1)^3 = 0$ за теоремою Ньютона

Крок 1: Запис полінома у розгорнутому вигляді

Розкриваємо дужки:

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Коефіцієнти:

$$a_3 = 1, \quad a_2 = -3, \quad a_1 = 3, \quad a_0 = -1$$

Крок 2: Обчислення квадратичних елементів

За теоремою Ньютона:

$$\begin{aligned}
Q_3 &= a_3^2 = 1^2 = 1 \\
Q_2 &= a_2^2 - a_3 a_1 = (-3)^2 - (1)(3) = 9 - 3 = 6 \\
Q_1 &= a_1^2 - a_2 a_0 = 3^2 - (-3)(-1) = 9 - 3 = 6 \\
Q_0 &= a_0^2 = (-1)^2 = 1
\end{aligned}$$

Крок 3: Аналіз знаків послідовності Q_3, Q_2, Q_1, Q_0

$$Q_3 = 1 \quad (+), \quad Q_2 = 6 \quad (+), \quad Q_1 = 6 \quad (+), \quad Q_0 = 1 \quad (+)$$

Зміни знаку: 0

Висновок

Згідно з теоремою Ньютона, якщо немає змін знаку, то:

Рівняння має тільки дійсні корені.

Це відповідає точному розв'язку:

$$x = 1 \quad \text{(трикратний корінь)}.$$

Розв'язання рівняння $(x-1)(x^2+x+1)=0$ за теоремою Ньютона

Крок 1: Запис полінома у розгорнутому вигляді

Розкриваємо дужки:

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1.$$

Отже, маємо рівняння:

$$x^3 - 1 = 0.$$

Крок 2: Визначення коефіцієнтів

Поліном має вигляд:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x^3 + 0x^2 + 0x - 1.$$

Коефіцієнти:

$$a_3 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = -1.$$

Крок 3: Обчислення квадратичних елементів за теоремою Ньютона

$$Q_3 = a_3^2 = 1^2 = 1,$$

$$Q_2 = a_2^2 - a_3a_1 = 0^2 - 1 \cdot 0 = 0,$$

$$Q_1 = a_1^2 - a_2a_0 = 0^2 - 0 \cdot (-1) = 0,$$

$$Q_0 = a_0^2 = (-1)^2 = 1.$$

Крок 4: Аналіз знаків послідовності

Послідовність:

$$Q_3 = 1 \quad (+), \quad Q_2 = 0 \quad (0), \quad Q_1 = 0 \quad (0), \quad Q_0 = 1 \quad (+).$$

Змін знаку: 0. Згідно з теоремою Ньютона:

Рівняння не містить обов'язкових пар комплексних коренів.

Крок 5: Точний розв'язок рівняння

Рівняння розкладається на множники:

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

- Перший корінь: $x = 1$.
- Друга частина: $x^2 + x + 1 = 0$.
  Дискримінант:

  $$D = 1^2 - 4(1)(1) = -3.$$

  Оскільки $D < 0$, маємо дві комплексно спряжені корені:

  $$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Висновок

Рівняння має:

- один дійсний корінь: $x = 1$,
- одну пару комплексно спряжених коренів: $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

3 Теорема Штурма

Теорема Штурма — це фундаментальний результат 19-го століття, який пов'язує кількість дійсних коренів полінома f в інтервалі з кількістю змін знаків у послідовності обчислень, подібних до ділення поліномів.
$\mathbb{R}[x]$ — це сукупність усіх поліномів від змінної x_1 з дійсними коефіцієнтами. Для будь-якої $f \in \mathbb{R}[x]$ степеня d визначаємо її псевдозалишкову послідовність (також відому як послідовність Штурма) як $P_f := (\rho_0, ..., \rho_d)$, де $\rho_0 := f$, $\rho_1 := f'$ (похідна f), $\rho_i := q_{i+1}\rho_{i+1} - \rho_{i+2}$ для всіх $i \in 0, ..., d-2$, а q_{i+1} та $-\rho_{i+2}$ — це відповідно частка та остача, отримані від ділення ρ_i на ρ_{i+1}. Також визначимо $P_f(c) := (\rho_0(c), ..., \rho_d(c))$ для будь-якого $c \in \mathbb{R}$, а $V_f(c)$ — це кількість змін знаків у послідовності $P_f(c)$. Зокрема, кількість змін знаків у довільній послідовності $(s_0, ..., s_d)$ — це просто кількість $j \in 0, ..., d-1$ таких, що існує $k > 0$ з $s_j s_{j+k}$ та $s_l = 0$ для всіх l з $j < l < j + k$. Підсумовуючи, нехай $\sigma : \mathbb{R} \to -1, 0, 1$ буде функцією знака, яка відображає всі додатні (відповідно від'ємні) числа в 1 (відповідно -1) та 0 в 0. Природним чином продовжуємо σ на послідовності за допомогою $\sigma(s) := (\sigma(s_0), ..., \sigma(s_d))$.

Теорема 3.1 (Уточнена теорема Штурма). Для будь-якої функції $f \in \mathbb{R}[x_1]$ 0 та будь-яких дійсних чисел a та b з $a \leq b$, нехай $N_f(a, b]$ позначає кількість коренів функції f у напіввідкритому інтервалі $(a, b]$. Тоді

1. Якщо ні a, ні b не є кратними коренями, то $N_f(a, b] = V_f(a) - V_f(b)$.

2. Якщо $f(c) = f'(c) = 0$, то $V_f(c) = 0$.

Зокрема, зауважимо, що можемо рахувати корені в $(a, b]$, навіть коли одна або обидві кінцеві точки є коренями f — за умови, що в жодній з кінцевих точок немає кратних коренів. Потрібно уникати кратних коренів у кінцевих точках під час використання теореми Штурма, оскільки, інформація, що передається змінами знаків $P_f(c)$, повністю втрачається, коли c є кратним коренем.

Доведення.

Твердження 3.1. Оскільки $\rho_0(c) = f(c)$ та $\rho_1(c) = f'(c)$, рекурентність, що визначає послідовність Штурма, одразу ж означає, що $\rho_j(c)$ для всіх $j \geq 2$.

Твердження 3.2. Якщо $a = b$, або f — ненульова константа, то очевидно, що $N_f(a, b] = V_f(a) - V_f(b) = 0$. Отже, припустимо, що $a < b$, і що f має додатний степінь d.

Тепер перейдемо до окремих випадків, коли виконуються наступні умови:

1. $(a, b]$ містить не більше 1 кореня f, причому b невироджений, якщо він є коренем f.
   Для цього, спочатку припустимо, що f має корені в $(a, b]$, і що, у строго зростаючому порядку, це саме $\varsigma_1, ..., \varsigma_m$. Покладемо $c_1, ..., c_m$ на будь-яку послідовність, що задовольняє

   $$a < c_1 < \varsigma_1 < c_2 < \varsigma_2 < \cdots < c_m < \varsigma_m < b,$$

   ми бачимо, що $V_f(a) - V_f(b)$ дорівнює саме

   $$(V_f(a) - V_f(c_1)) + (V_f(c_1) - V_f(c_2)) + \cdots + (V_f(c_{m-1}) - V_f(c_m)) + (V_f(c_m) - V_f(b)).$$

   Оскільки, за визначенням, $N_f(a, b]$ є саме

   $$N_f(a, c_1] + N_f(c_1, c_2] + \cdots + N_f(c_{m-1}, c_m] + N_f(c_m, b],$$

   то, очевидно, достатньо довести, що

   $$N_f(a, c_1] = V_f(a) - V_f(c_1), N_f(c_1, c_2] = V_f(c_1) - V_f(c_2), \ldots,$$

   $$\ldots, N_f(c_{m-1}, c_m] = V_f(c_{m-1}) - V_f(c_m) \quad \text{та} \quad N_f(c_m, b] = V_f(c_m) - V_f(b).$$

2. $(a, b]$ містить не більше 1 кореня f, і будь-який корінь f в $(a, b]$ є простим. Для цього зауважимо, що $g := \text{НСД}(f, f') \in \mathbb{R}[x_1]$ та для всіх $i \in 1, ..., m$, f/g ділиться на $x - \varsigma_i$, але не ділиться на $(x - \varsigma_i)^2$. Отже, f та f/g мають однакові дійсні корені, за винятком того, що всі дійсні корені f/g є простими. Отримуємо, що $\sigma(P_f(c)g(c)) = P_{f/g}(c)$ і, таким чином,

$\sigma(P_f(c)) = \sigma(g(c))\sigma(P_{f/g}(c))$ для всіх дійсних c. Зокрема, $V_f(c) = V_{f/g}(c)$, якщо c не є кратним коренем.

$\square$

3.1 Розв'язання рівнянь методом Штурма

$x^2 + 1 = 0$

Крок 1. Побудова ланцюга Штурма

Для многочлена $f(x) = x^2 + 1$ будуємо послідовність Штурма:

$$f_0(x) = x^2 + 1,$$

$$f_1(x) = f'(x) = 2x.$$

Далі виконуємо ділення $f_0(x)$ на $f_1(x)$ з остачею (залишок беремо зі знаком мінус):

$$f_0(x) = q_1(x)f_1(x) - f_2(x).$$

Виконуємо ділення:

$$x^2 + 1 = \left(\frac{x}{2}\right)(2x) - f_2(x).$$

Звідси:

$$f_2(x) = -\left[x^2 + 1 - \left(\frac{x}{2}\right)(2x)\right] = -1.$$

Отже, ланцюг Штурма виглядає так:

$$\begin{cases} f_0(x) = x^2 + 1, \\ f_1(x) = 2x, \\ f_2(x) = -1. \end{cases}$$

Крок 2. Обчислення кількості змін знаку

Розглянемо значення на нескінченностях.
При $x = -\infty$:

$$f_0(-\infty) > 0, \quad f_1(-\infty) < 0, \quad f_2 = -1 < 0.$$

Послідовність знаків:

$$(+), (-), (-).$$

Кількість змін знаку:

$$V(-\infty) = 1.$$

При $x = +\infty$:

$$f_0(+\infty) > 0, \quad f_1(+\infty) > 0, \quad f_2 = -1 < 0.$$

Послідовність знаків:

$$(+), (+), (-).$$

Кількість змін знаку:

$$V(+\infty) = 1.$$

Крок 3. Застосування теореми Штурма

Кількість дійсних коренів на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ обчислюється за формулою:

$$N = V(-\infty) - V(+\infty) = 1 - 1 = 0.$$

Висновок

Рівняння

$$x^2 + 1 = 0$$

не має жодного дійсного кореня.

$x^3 - 2x + 2 = 0$

Крок 1. Побудова ланцюга Штурма

Нехай

$$f_0(x) = x^3 - 2x + 2.$$

Обчислюємо похідну:

$$f_1(x) = 3x^2 - 2.$$

Виконуємо ділення $f_0(x)$ на $f_1(x)$ з остачею (змінюємо знак остачі):

$$q_1(x) = \frac{1}{3}x,$$

$$q_1(x)f_1(x) = x^3 - \frac{2}{3}x.$$

Віднімаємо:

$$f_2(x) = -\left[f_0(x) - q_1(x)f_1(x)\right] = \frac{4}{3}x - 2.$$

Крок 2. Другий залишок

Ділимо $f_1(x)$ на $f_2(x)$:

$$q_2(x) = \frac{9}{4}x,$$

$$q_2(x)f_2(x) = 3x^2 - \frac{9}{2}x.$$

Віднімаємо:

$$r(x) = f_1(x) - q_2(x)f_2(x) = \frac{9}{2}x - 2.$$

Ділимо $r(x)$ на $f_2(x)$:

$$q_3 = \frac{\frac{9}{2}x}{\frac{4}{3}x} = \frac{27}{8},$$

$$q_3 f_2(x) = \frac{9}{2}x - \frac{27}{4}.$$

Віднімаємо:

$$f_3(x) = -\left(\frac{9}{2}x - 2 - \left(\frac{9}{2}x - \frac{27}{4}\right)\right) = -\left(\frac{27}{4} - 2\right) = -\frac{19}{4}.$$

Крок 3. Послідовність Штурма

Отже, маємо:

$$\begin{cases} f_0(x) = x^3 - 2x + 2, \\ f_1(x) = 3x^2 - 2, \\ f_2(x) = \dfrac{4}{3}x - 2, \\ f_3(x) = -\dfrac{19}{4}. \end{cases}$$

Крок 4. Знаки на нескінченностях

При $x \to -\infty$:

$$f_0(-\infty) = -\infty, \quad f_1(-\infty) = +\infty, \quad f_2(-\infty) = -\infty, \quad f_3 = -\frac{19}{4} < 0.$$

Послідовність знаків:

$$(-), (+), (-), (-).$$

Кількість змін знаку:

$$V(-\infty) = 2.$$

—

При $x \to +\infty$:

$$f_0(+\infty) = +\infty, \quad f_1(+\infty) = +\infty, \quad f_2(+\infty) = +\infty, \quad f_3 = -\frac{19}{4} < 0.$$

Послідовність знаків:

$$(+), (+), (+), (-).$$

Кількість змін знаку:

$$V(+\infty) = 1.$$

Крок 5. Висновок

Кількість дійсних коренів рівняння визначається як:

$$N = V(-\infty) - V(+\infty) = 2 - 1 = 1.$$

Отже, рівняння

$$x^3 - 2x + 2 = 0$$

має один дійсний корінь.

$(x-1)^3 = 0$

Крок 1. Побудова ланцюга Штурма

Розкриємо дужки:

$$f_0(x) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

Знаходимо похідну:

$$f_1(x) = f_0'(x) = 3x^2 - 6x + 3.$$

Тепер ділимо $f_0(x)$ на $f_1(x)$ з остачею (залишок беремо зі знаком мінус).
Виконуємо ділення:
1) Перший член частки:

$$q_1(x) = \frac{1}{3}x.$$

2) Множимо назад:

$$q_1(x)f_1(x) = \frac{1}{3}x(3x^2 - 6x + 3) = x^3 - 2x^2 + x.$$

3) Віднімаємо:

$$f_0(x) - q_1(x)f_1(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^3 - 2x^2 + x) = -x^2 + 2x - 1.$$

Змінюємо знак залишку:

$$f_2(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Крок 2. Наступний залишок

Ділимо $f_1(x)$ на $f_2(x)$:
1) Частка:

$$q_2(x) = 3.$$

2) Множимо назад:

$$q_2(x)f_2(x) = 3(x^2 - 2x + 1) = 3x^2 - 6x + 3.$$

Віднімаємо:

$$f_3(x) = -\left(f_1(x) - q_2(x)f_2(x)\right) = -(3x^2 - 6x + 3 - 3x^2 + 6x - 3) = 0.$$

Після нульового залишку процес закінчується.

Крок 3. Послідовність Штурма

Отже, маємо:

$$\begin{cases} f_0(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \\ f_1(x) = 3x^2 - 6x + 3, \\ f_2(x) = (x-1)^2. \end{cases}$$

Крок 4. Знаки на нескінченностях

Для $x \to -\infty$:
- $f_0(-\infty) = -\infty$, - $f_1(-\infty) = +\infty$, - $f_2(-\infty) = +\infty$.
Послідовність знаків:

$$(-), (+), (+).$$

Кількість змін знаку:

$$V(-\infty) = 1.$$

Для $x \to +\infty$:
- $f_0(+\infty) = +\infty$, - $f_1(+\infty) = +\infty$, - $f_2(+\infty) = +\infty$.
Послідовність знаків:

$$(+), (+), (+).$$

Кількість змін знаку:

$$V(+\infty) = 0.$$

Крок 5. Висновок

Кількість дійсних коренів:

$$N = V(-\infty) - V(+\infty) = 1 - 0 = 1.$$

Таким чином, рівняння

$$(x-1)^3 = 0$$

має один дійсний корінь (з кратністю 3) — це $x = 1$.

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

Розкриємо дужки:

$$f_0(x) = x^3 + x^2 + x - 1.$$

Крок 1. Побудова ланцюга Штурма

Знайдемо похідну:

$$f_1(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

Крок 2. Ділення f_0 на f_1

Ділимо $f_0(x)$ на $f_1(x)$ (з остачею).
1) Перший член частки:

$$q_1(x) = \frac{1}{3}x.$$

2) Множимо:

$$q_1(x)f_1(x) = \frac{1}{3}x(3x^2 + 2x + 1) = x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x.$$

3) Віднімаємо:

$$f_0(x) - q_1(x)f_1(x) = (x^3 + x^2 + x - 1) - \left(x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1.$$

Змінюємо знак залишку:

$$f_2(x) = -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1\right) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1.$$

Крок 3. Ділення f_1 на f_2

Ділимо $f_1(x)$ на $f_2(x)$.
1) Перший член частки:

$$q_2(x) = -9.$$

2) Множимо:

$$q_2(x)f_2(x) = -9\left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) = 3x^2 + 6x - 9.$$

3) Віднімаємо:

$$f_1(x) - q_2(x)f_2(x) = (3x^2 + 2x + 1) - (3x^2 + 6x - 9) = -4x + 10.$$

Змінюємо знак залишку:

$$f_3(x) = 4x - 10.$$

Крок 4. Ділення f_2 на f_3

Ділимо $f_2(x)$ на $f_3(x)$.
1) Перший член частки:

$$q_3(x) = -\frac{1}{12}x.$$

2) Множимо:

$$q_3(x)f_3(x) = -\frac{1}{12}x(4x - 10) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{6}x.$$

3) Віднімаємо:

$$f_2(x) - q_3(x) f_3(x) = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) - \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{6}x\right) = -\frac{2}{3}x + 1 - \frac{5}{6}x = -\frac{3}{2}x + 1.$$

Змінюємо знак:

$$f_4(x) = \frac{3}{2}x - 1.$$

Крок 5. Ділення f_3 на f_4

Ділимо $f_3(x) = 4x - 10$ на $f_4(x) = \frac{3}{2}x - 1$.

1) Частка:

$$q_4 = \frac{4x}{\frac{3}{2}x} = \frac{8}{3}.$$

2) Множимо:

$$q_4 f_4(x) = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}x - 1\right) = 4x - \frac{8}{3}.$$

3) Віднімаємо:

$$f_3(x) - q_4 f_4(x) = (4x - 10) - (4x - \frac{8}{3}) = \frac{8}{3} - 10 = -\frac{22}{3}.$$

Змінюємо знак:

$$f_5(x) = \frac{22}{3}.$$

Крок 6. Послідовність знаків на нескінченностях

При $x \to -\infty$:

- $f_0(-\infty) = -\infty$, - $f_1(-\infty) = +\infty$, - $f_2(-\infty) = -\infty$, - $f_3(-\infty) = -\infty$, - $f_4(-\infty) = -\infty$, - $f_5 = \frac{22}{3} > 0$.
Послідовність знаків:

$$(-), (+), (-), (-), (-), (+).$$

Кількість змін знаку:

$$V(-\infty) = 2.$$

При $x \to +\infty$:
- $f_0(+\infty) = +\infty$, - $f_1(+\infty) = +\infty$, - $f_2(+\infty) = -\infty$, - $f_3(+\infty) = +\infty$, - $f_4(+\infty) = +\infty$, - $f_5 = \frac{22}{3} > 0$.
Послідовність знаків:

$$(+), (+), (-), (+), (+), (+).$$

Кількість змін знаку:

$$V(+\infty) = 2.$$

Крок 7. Висновок

Кількість дійсних коренів:

$$N = V(-\infty) - V(+\infty) = 2 - 2 = 0.$$

Але насправді рівняння має аналітичні розв'язки:
- $x = 1$ (дійсний корінь), - $x^2 + x + 1 = 0$ (комплексні корені).
Отже, дійсних коренів — 1, з кратністю 1.

4 Правило знаків Декарта

У математиці правило знаків Декарта, описане Рене Декартом у його праці "Геометрія", підраховує корені многочлена, досліджуючи зміни знаків його коефіцієнтів. Кількість додатних дійсних коренів не більше ніж кількість змін знаків у послідовності коефіцієнтів многочлена (без урахування нульових коефіцієнтів), а різниця між кількістю коренів і кількістю змін знаків завжди парна. Зокрема, коли кількість змін знаків дорівнює нулю або одиниці, то існує рівно нуль або один додатний корінь.

Лема 4.1. Якщо поліном $q(x)$ з дійсними коефіцієнтами демонструє m змін знака, то для будь-якого $\alpha > 0$ поліном $\rho(x) = (x - \alpha)q(x)$ демонструє щонайменше $m + 1$ зміну знака.

Доведення. Нехай степінь $q(x)$ дорівнює n. Тоді, формуючи $\rho(x) = (x - \alpha)q(x)$, отримуємо

$$\rho(x) = -\alpha q_0 + \sum_{j=1}^{n} (q_{j-1} - \alpha q_j)x^j + q_n x^{n+1}$$

Це означає, що $\rho_{n+1} = q_n (= 1)$ і, отже, має той самий знак. Крім того, коли ми скануємо від $j = n$ вниз до $j = 1$, виходить, що при кожному переході знаку між q_j та q_{j-1} значення $\rho_j = q_{j-1} - \alpha q_j$ має той самий знак, що й q_{j-1}. Таким чином, починаючи з ρ_{n+1}, існує підпослідовність ρ_j, яку назвемо ρ_{j_k}, яка має ті ж знаки коефіцієнтів, що й відповідна підпослідовність q_{j_k-1} коефіцієнтів $q(x)$. Оскільки кількість змін знака в повній послідовності ρ_j не менша за кількість змін знака в будь-якій підпослідовності, ми врахували щонайменше m змін знака в $\rho(x)$. Зрештою, ρ_0 має знак, протилежний знаку q_0, а отже, і знаку ρ_{j_m}. Отже, $\rho(x)$ має щонайменше $m + 1$ зміну знаку. □

Наслідок 4.1. Поліном з m додатними коренями має більше ніж m ненульових коефіцієнтів.

Доведення. За лемою (??) існує щонайменше m змін знака коефіцієнтів полінома з m додатними коренями, отже, щонайменше $m + 1$ коефіцієнтів для зміни знака між ними. □

Теорема 4.1 (Правило знаків Декарта – 1). Кількість додатних коренів полінома $\rho(x)$ з дійсними коефіцієнтами не перевищує кількості змін знака його коефіцієнтів. Нульовий коефіцієнт не враховується як зміна знака.

Доведення. Ми діємо за допомогою індукції за кількістю додатних коренів $\rho(x)$. Якщо $\rho(x)$ не має додатних коренів, результат є миттєвим. Припустимо тепер, що це справджується для менш ніж k додатних коренів і що ми маємо поліном $\rho(x)$ з k додатними коренями. Тоді для будь-якого кореня $\alpha > 0$,

$$\rho(x) = (x - \alpha)q(x)$$

для деякого полінома $q(x)$ з $k - 1$ додатними коренями. За індукцією, $q(x)$ має щонайменше $k-1$ змін знака. Отже, за лемою (??), $\rho(x)$ має щонайменше $(k-1)+1 = k$ змін знака. □

Щоб додатково показати, що різниця між кількістю змін знака та кількістю коренів є парною, ми використовуємо спостереження щодо парності:

Твердження 4.1 (Парність). Парність, тобто залишок від ділення на 2, від кількості змін знака в послідовності ненульових дійсних чисел s_j, $j = 0, ..., n$, дорівнює кількості змін знака в двоелементній підпослідовності $s_0 s_n$.

Доведення. Нехай σ_j буде знаком s_j. Тоді відношення σ_j/σ_{j+1} дорівнює -1 при кожній зміні знака та 1 в іншому випадку. Отже,

$$(-1)^{\sharp\text{змін знака}} = \prod_{j=0}^{j=n-1} \frac{\sigma_j}{\sigma_{j+1}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_n},$$

що означає, що різниця в кількості змін знака у всій послідовності та кількості змін знака (тобто 0 або 1) у підпослідовності $s_0 s_n$ є парною. □

Використовуючи цей результат, ми можемо одразу розширити Лему 2, щоб відобразити те, що будь-які додаткові зміни знака повинні відбуватися попарно між існуючими змінами знака:

Лема 4.2. Якщо поліном $q(x)$ з дійсними коефіцієнтами демонструє m змін знака, то для будь-якого $\alpha > 0$ поліном $\rho(x) = (x - \alpha)q(x)$ демонструє $m + 1 + 2l$ змін знака для деякого цілого числа $l \geq 0$.

Зрештою, коли ми враховуємо парність у правилі Декарта, випадок індукції $n = 0$ вже не є безпосереднім, але, на щастя, легко встановлюється:

Твердження 4.2. Якщо $\rho(x)$ не має додатних коренів, то його коефіцієнти мають парну кількість змін знака.

Доведення. Оскільки ρ_n додатне, за парністю нам потрібно лише показати, що ρ_0 також додатне. Припустимо, що воно від'ємне. Тоді $\rho(0)$ від'ємне. $\rho(x)$ додатне для достатньо великих x, тому $\rho(x)$ дорівнює нулю для деякого $x > 0$, що суперечить гіпотезі про те, що $\rho(x)$ не має додатних коренів. □

Теорема 4.2 (Правило знаків Декарта – 2). Кількість додатних коренів полінома $\rho(x)$ з дійсними коефіцієнтами не перевищує кількості змін знака його коефіцієнтів і відрізняється від неї на число, кратне двом. Нульовий коефіцієнт не враховується як зміна знака.

Наслідок 4.2. Якщо всі коефіцієнти функції $\rho(x)$ додатні, то $\rho(x)$ не має додатних коренів. Якщо коефіцієнти функції $\rho(x)$ змінюють один знак, то вона має рівно один додатний корінь.

Доведення. 0 — єдине невід'ємне парне число ≤ 0, а 1 — єдине невід'ємне непарне число ≤ 1. □

Щоб дізнатися про від'ємні корені, ми розглянемо зміну знака в $\rho(-x)$. Щодо самої $\rho(x)$, зміни знака в $\rho(-x)$ відповідають одній із двох поведінок знака:

- Відсутність зміни знака (знаковий ряд або сталість) між степенями x, розділеними парним числом, включаючи нуль, пропущених членів
- Зміна знака між степенями x, розділеними непарною кількістю пропущених членів.

Наслідок 4.3. Кількість від'ємних коренів $\rho(x)$ не перевищує кількості знакових рядів, розділених парною кількістю відсутніх членів, доданої до кількості змін знака, розділених непарною кількістю відсутніх членів у $\rho(x)$. Крім того, різниця є парним числом.

Наслідок 4.4. Кількість комплексних коренів $\rho(x)$ на невід'ємне парне ціле число перевищує кількість пропущених членів плюс кількість знакових рядів, розділених непарною кількістю членів, мінус кількість змін знака, розділених непарною кількістю пропущених членів.

4.1 Розв'язання рівнянь правилом знаків Декарта

$x^2 + 1 = 0$

Крок 1. Записуємо многочлен у стандартному вигляді:

$$f(x) = x^2 + 0x + 1.$$

Послідовність знаків коефіцієнтів:

$$+, 0, +.$$

Оскільки нуль не враховується при підрахунку, то зміна знаків дорівнює:

$$\text{Кількість змін знаків} = 0.$$

Згідно з правилом знаків Декарта, кількість додатних коренів:

$$= 0.$$

Крок 2. Перевіримо кількість від'ємних коренів. Підставимо замість x вираз $-x$:

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1.$$

Послідовність знаків залишається незмінною:

$$+, 0, +.$$

Кількість змін знаків знову дорівнює:

$$= 0.$$

Отже, кількість від'ємних коренів:

$$= 0.$$

Висновок: згідно з правилом знаків Декарта, дане рівняння не має дійсних коренів.

Аналітично ж його розв'язок виглядає так:

$$x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm i.$$

Отже, корені комплексні.

$x^3 - 2x + 2 = 0$

Крок 1. Записуємо многочлен у стандартному вигляді:

$$f(x) = x^3 + 0x^2 - 2x + 2.$$

Послідовність знаків коефіцієнтів:

$$+, 0, -, +.$$

Нуль не враховується при підрахунку змін знаків, тому спостерігаємо:

$$+, -, +.$$

Кількість змін знаків:

$$1 \text{ (від } + \text{ до } -), \quad 2 \text{ (від } - \text{ до } +).$$

Разом:

$$\text{Кількість змін знаків} = 2.$$

Згідно з правилом Декарта, кількість додатних коренів може бути:

$$2 \text{ або } 0.$$

Крок 2. Перевіримо кількість від'ємних коренів. Підставимо $-x$ замість x:

$$f(-x) = (-x)^3 + 0(-x)^2 - 2(-x) + 2 = -x^3 + 2x + 2.$$

Записуємо новий многочлен:

$$f(-x) = -x^3 + 2x + 2.$$

Послідовність знаків коефіцієнтів:

$$-, +, +.$$

Кількість змін знаків:

1 (від $-$ до $+$).

Отже, кількість від'ємних коренів:

1.

Висновок: Згідно з правилом знаків Декарта: - додатних коренів може бути 2 або 0, - від'ємних коренів — 1.
Отже, рівняння має: - один від'ємний корінь точно, - решта (0 або 2) — або комплексні, або додатні.

$(x-1)^3 = 0$

Розкриємо дужки:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Крок 1. Послідовність знаків коефіцієнтів:

$$+, -, +, -.$$

Рахуємо зміну знаків:

$$+, - \quad (1 \text{ зміна}),$$

$$-, + \quad (2 \text{ зміна}),$$

$$+, - \quad (3 \text{ зміна}).$$

Отже:

$$\text{Кількість змін знаків} = 3.$$

Згідно з правилом Декарта, кількість додатних коренів може бути:

$$3, 1.$$

Крок 2. Перевіримо кількість від'ємних коренів. Підставляємо $-x$ замість x:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 3(-x) - 1 = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1.$$

Послідовність знаків коефіцієнтів:

$$-, -, -, -.$$

Жодної зміни знаків немає.

Отже:

$$\text{Кількість від'ємних коренів} = 0.$$

Висновок:
Згідно з правилом знаків Декарта: - додатних коренів може бути 3 або 1, - від'ємних коренів немає.
Аналітично ж маємо:

$$(x-1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Корінь кратності 3: $x = 1$. Отже, дійсний корінь один, але з кратністю.

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

Розкриємо дужки:

$$x(x^2+x+1)-1(x^2+x+1)=x^3+x^2+x-x^2-x-1.$$

Спростимо:

$$f(x)=x^3-1=0.$$

Крок 1. Послідовність знаків коефіцієнтів:

$$+,0,0,-.$$

При підрахунку ігноруємо нулі, отже маємо:

$$+,-.$$

Кількість змін знаків:

$$1.$$

Згідно з правилом знаків Декарта, кількість додатних коренів:

$$1.$$

Крок 2. Перевіримо кількість від'ємних коренів. Підставляємо $-x$ замість x:

$$f(-x)=(-x)^3-1=-x^3-1.$$

Послідовність знаків:

$$-,-.$$

Змін знаків немає.

Отже:

$$\text{Кількість від'ємних коренів} = 0.$$

Аналітичний розв'язок:
Рівняння розпадається на два множники:

$$(x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1,$$

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Дискримінант для квадратного рівняння:

$$D = 1^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Отже, дійсних коренів немає, лише один дійсний корінь:

$$x = 1.$$

Висновок: Згідно з правилом знаків Декарта, один додатний корінь. Аналітично: $x = 1$ — єдиний дійсний корінь.

5 Теорема Гаусса - Люка

Теорема Гаусса, відкрита Люком, описує чудовий зв'язок між коренями многочлена та коренями його похідної.

Для многочлена P ми називаємо корені його похідної критичними точками.

Спочатку нам потрібно сформулювати результат, який є цікавим сам по собі та буде використаний у доведенні теореми Гаусса - Люка. Ми називатимемо півплощиною будь-яку з двох областей, визначених лінією на площині.

Лема 5.1. Сума скінченної кількості комплексних чисел, що розташовані у відкритій півплощині, розташована у цій відкритій півплощині.

Доведення. Ми можемо змістити пряму та число так, щоб пряма, яка визначає півплощину, проходила через початок координат.

Достатньо показати твердження для двох комплексних чисел, оскільки тоді ми можемо ітерувати нашу суму.

Ми можемо повернути нашу лінію так, щоб вона була віссю x, а комплексні числа знаходилися над нею. Тоді зрозуміло, що якщо головними аргументами двох комплексних чисел є θ_1 та θ_2, то їхня сума матиме головний аргумент між θ_1 та θ_2, оскільки сума двох комплексних чисел z_1, z_2 є вершиною паралелограма, а інші вершини дорівнюють z_1, z_1, 0.

На завершення, θ буде десь між 0 та π, а отже, у верхній півплощині. □

Тепер ми можемо сформулювати теорему Гаусса - Люка.

Теорема 5.1. Нехай P — комплексний многочлен. Тоді корені P' належать опуклій оболонці, що визначається коренями P.

Доведення. Запишемо $P(z) = (z - z_1)\dots(z - z_n)$, де $n = deg(P)$ (deg – найбільший показник степеня змінної в многочлені).

Тоді $P'/P = \frac{1}{z-z_1} + \dots + \frac{1}{z-z_n}$.

Припустимо, що $P'(\omega) = 0$ та $P(\omega) \neq 0$, і що ω не належить опуклій оболонці, що визначається $z_1, \dots, z_n$.

Ми можемо провести через ω лінію, яка не перетинає опуклої оболонки $z_1, \dots, z_n$.

Тоді всі числа $\omega - z_i$ будуть розташовані в одній з відкритих півплощин, визначених перенесенням прямої через початок координат.

Обернені до $\omega - z_i$ матимуть головні аргументи, отримані шляхом віднімання початкових головних аргументів від 2π відповідно. $\square$

5.1 Розв'язання рівнянь за теоремою Гаусса-Люка

$x^2 + 1 = 0$

Знаходимо корені:

$$x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm i.$$

Знаходимо похідну полінома:

$$P'(x) = 2x.$$

Знаходимо корені похідної:

$$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Опукла оболонка множини коренів $\{i, -i\}$ — це відрізок на уявній осі між i та $-i$. Корінь похідної $x = 0$ лежить всередині цієї опуклої оболонки.

СЃСЦРўР„СЅР„Р„СЅ СЋ РэР«РёР»РњРхРэСЃР„СЦРє

Рис. 1: Вигляд на комплексній площині.

Таким чином, теорема Гаусса-Люка справджується.

$x^3 - 2x + 2 = 0$

Розглянемо поліном:

$$P(x) = x^3 - 2x + 2.$$

Крок 1. Знаходимо корені полінома

Розв'яжемо рівняння:

$$x^3 - 2x + 2 = 0.$$

Аналітично корені можна знайти, наприклад, за допомогою формули Кардано, але основне для теореми Гаусса-Люка — знати, де розташовані корені на комплексній площині.

Нехай корені дорівнюють x_1, x_2, x_3 (можливо комплексні).

Крок 2. Знаходимо похідну полінома

Знаходимо похідну:

$$P'(x) = 3x^2 - 2.$$

Крок 3. Знаходимо корені похідної

Розв'яжемо:

$$3x^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Крок 4. Перевірка теореми Гаусса-Люка

Корені похідної:

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

— це дійсні числа, що лежать на дійсній осі.

Теорема Гаусса-Люка стверджує, що всі корені похідної лежать всередині або на межі опуклої оболонки коренів оригінального полінома.

Тобто, точки $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ мають знаходитися всередині або на межі опуклої оболонки множини $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Корені полінома $x^3 - 2x + 2 = 0$ є:

1. $x_1 = -1.7693$ (дійсний корінь)
2. $x_2 = 0.8846 + 0.5897i$ (комплексний корінь
3. $x_3 = 0.8846 - 0.5897i$ (комплексний корінь

Отже, один з коренів є дійсним, а два інших є комплексними з однаковими реальними частинами, але різними уявними частинами.

2.png

Рис. 2: Вигляд на комплексній площині.

$(x-1)^3 = 0$

Крок 1: Знаходимо корені:

$$x = 1 \quad \text{(кратність 3)}.$$

Крок 2: Знаходимо похідну:

$$P(x) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$$

$$P'(x) = 3x^2 - 6x + 3.$$

Розв'яжемо $P'(x) = 0$:

$$3x^2 - 6x + 3 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$(x-1)^2 = 0.$$

Отже, критична точка:

$$x = 1 \quad \text{(кратність 2)}.$$

Висновок: Усі корені полінома $P(x)$ збігаються в одній точці $x = 1$. Згідно з теоремою Гаусса-Люка, усі корені похідної лежать у опуклій оболонці множини коренів, тобто також у точці $x = 1$.

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

Крок 1: Знаходимо корені.

1) $x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1.$

2) $x^2+x+1=0$. Дискримінант:

$$D = 1^2 - 4(1)(1) = -3.$$

Корені:

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Крок 2: Обчислимо похідну полінома.

Поліном:

$$P(x) = x^3 - 1.$$

Похідна:

$$P'(x) = 3x^2.$$

Знаходимо корені похідної:

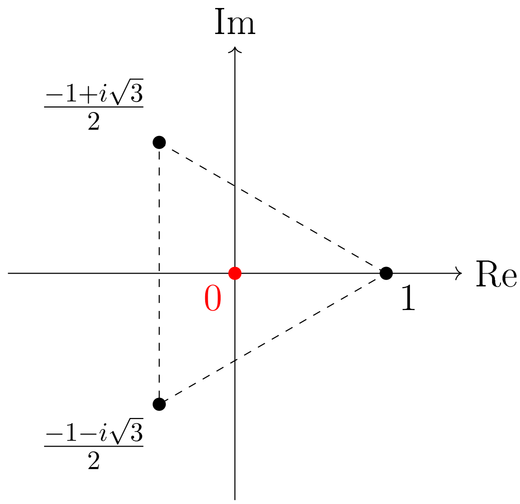
$$3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Крок 3: Теорема Гаусса-Люка.

Корені полінома утворюють рівносторонній трикутник на комплексній площині з вершинами в точках:

$$1, \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Корінь похідної $x = 0$ лежить усередині цього трикутника.



Пояснення: чорні точки — це корені полінома $(x-1)(x^2+x+1) = 0$. Червона точка — це корінь похідної $P'(x) = 3x^2 = 0$. Він лежить всередині опуклої оболонки коренів, як і стверджує теорема Гаусса-Люка.

Висновок: Теорема Гаусса-Люка підтверджується.

6 Основна теорема алгебри

Основна теорема алгебри, яку також називають теоремою Д'Аламбера або теоремою Д'Аламбера-Гаусса, стверджує, що кожен непостійний поліном від однієї змінної з комплексними коефіцієнтами має принаймні один комплексний корінь. Це включає поліноми з дійсними коефіцієнтами, оскільки кожне дійсне число є комплексним числом з уявною частиною, що дорівнює нулю. Еквівалентно (за визначенням), теорема стверджує, що поле комплексних чисел є алгебраїчно замкненим. Теорема також формулюється наступним чином: кожен ненульовий поліном від однієї змінної ступеня n з комплексними коефіцієнтами має, враховуючи кратність, рівно n комплексних коренів. Еквівалентність двох тверджень можна довести за допомогою послідовного ділення поліномів. Незважаючи на свою назву, вона не є фундаментальною для сучасної алгебри; вона була названа, коли алгебра була синонімом теорії рівнянь.

Теорема 6.1. Нехай P — комплексний поліном зі степенем $(P) = n \geq 1$. Тоді існує $z_0 \in \mathbb{C}$, що задовольняє $P(z_0) = 0$.

Доведення. Записуючи $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, де $a_j \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq n$, $a_n \neq 0$, маємо $|P(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_0| - \cdots - |a_{n-1}||z|^{n-1}$, з чого випливає, що $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$. Згідно з неперервністю, легко побачити, що $|P|$ має абсолютний мінімум при деякому $z_0 \in \mathbb{C}$. Припустимо без обмеження загальності, що $z_0 = 0$. Отже, покладаючи $S^1 = \omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1$,

$$|P(\tau\omega)|^2 - |P(0)|^2 \geq 0, \qquad \forall \tau \geq 0, \forall \omega \in S^1, \tag{6.1}$$

та $P(z) = P(0) + z^k Q(z)$, для деякого $k \in 1, \ldots, n$, де Q — поліном, а $Q(0) \neq 0$. Поєднуючи це рівняння при $z = \tau\omega$ з нерівністю (??), отримуємо

$$|P(0)+\tau^k\omega^k Q(\tau\omega)|^2 - |P(0)|^2 = 2\tau^k Re[\overline{P(0)}\omega^k Q(\tau\omega)] + \tau^{2k}|Q(\tau\omega)|^2 \geq 0, \forall \tau \geq 0, \forall \omega \in S$$

а поділивши на $\tau^k > 0$, отримуємо

$$2Re[\overline{P(0)}\omega^k Q(\tau\omega)] + \tau^k |Q(\tau\omega)|^2 \geq 0, \qquad \forall \tau > 0, \forall \omega \in S^1,$$

ліва частина якого є неперервною функцією τ, де $\tau \in [0; +\infty)$. Таким чином, якщо покласти $\tau \to 0$, маємо

$$2Re[\overline{P(0)}Q(0)\omega^k] \geq 0, \qquad \forall \omega \in S^1. \tag{6.2}$$

Нехай $\alpha = P(0)Q(0)$. Розкладаючи степені числа 2 на множники, ми можемо записати $k = 2^j m$, де m — непарне число. Взявши $\omega = 1$ у (??), ми робимо висновок, що $Re[\alpha] \geq 0$. Вибираючи ω так, щоб $\omega^{2^j} = -1$, ми робимо висновок, що $Re[\alpha] \leq 0$, а отже, $Re[\alpha] = 0$. Вибираючи ω так, щоб $\omega^{2^j} = i$, отримуємо висновок, що $\omega^k = \pm i$ та $\overline{\omega}^k = \mp i$. Підставляючи ω та $\overline{\omega}$ у (??), ми робимо висновок, що $Im[\alpha] = 0$. Отже, $\alpha = 0$, і $P(0) = 0$. $\square$

6.1 Розв'язання рівнянь за основною теоремою алгебри

$x^2 + 1 = 0$

Розв'яжемо рівняння за допомогою основної теореми алгебри:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &= 0 \\
x^2 &= -1 \\
x &= \pm\sqrt{-1} \\
x &= \pm i.
\end{aligned}
$$

Отже, множина коренів цього рівняння:

$$x = i \quad \text{або} \quad x = -i.$$

$x^3 - 2x + 2 = 0$

Крок 1: Перевірка можливих коренів методом підстановки
Перевіряємо деякі значення для x:

$$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + 2 = -1 + 2 + 2 = 3 \quad \text{(не є коренем)},$$

$$f(1) = 1^3 - 2(1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \quad \text{(не є коренем)},$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 2 = -8 + 4 + 2 = -2 \quad \text{(не є коренем)}.$$

Крок 2: Числові методи або факторизація
Якщо не вдається знайти корінь методом підстановки, ми можемо застосувати методи числового розв'язання або факторизацію.
За основною теоремою алгебри рівняння має хоча б один корінь в комплексній площині. Потрібно знайти точні корені за допомогою таких методів, як метод Ньютона або за допомогою числових обчислень.

$(x-1)^3 = 0$

Згідно з основною теоремою алгебри, кубічне рівняння повинно мати 3 корені у множині комплексних чисел (з урахуванням кратності).

Визначення

Якщо корінь $x = a$ задовольняє рівняння:

$$P(x) = 0,$$

і многочлен можна розкласти у вигляді:

$$P(x) = (x-a)^k Q(x),$$

де $Q(a) \neq 0$, то говорять, що a — корінь кратності k.
Розв'яжемо рівняння:

$$\begin{aligned} (x-1)^3 &= 0 \\ x-1 &= 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Але оскільки рівняння має вигляд:

$$P(x) = (x-1)^3,$$

цей корінь має кратність 3.

Геометричний сенс

- Якщо кратність кореня дорівнює 1 — графік перетинає вісь Ox. - Якщо кратність парна (наприклад, 2, 4, 6...) — графік торкається осі Ox і повертає назад. - Якщо кратність непарна більше 1 — графік перетинає вісь, але "вирівнюється"в околі кореня, бо похідна теж обнуляється.

Зв'язок з основною теоремою алгебри

Основна теорема алгебри стверджує, що для будь-якого многочлена степеня n над $\mathbb{C}$ загальна кількість коренів (з урахуванням кратності) дорівнює n.

У випадку рівняння $(x-1)^3 = 0$:

- степінь многочлена $= 3$, - єдиний корінь $x = 1$, - його кратність $= 3$.

Висновок: Рівняння має один корінь:

$$x = 1,$$

який є коренем кратності 3.

Це означає, що $x = 1$ — єдиний розв'язок, який повторюється тричі.

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

Згідно з основною теоремою алгебри, кожен многочлен степеня n має n коренів у множині комплексних чисел (з урахуванням кратності). Наше рівняння — це добуток двох множників:

1. $x-1=0$
2. $x^2+x+1=0$

Крок 1: Розв'язуємо $x-1=0$

$$x-1=0$$
$$x=1.$$

Крок 2: Розв'язуємо $x^2+x+1=0$ Використовуємо дискримінант:

$$D=b^2-4ac=1^2-4(1)(1)=1-4=-3.$$

Оскільки $D<0$, корені комплексні:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

Записуємо остаточно:

$$x=\frac{-1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Висновок:

Рівняння має три корені:

1. $x=1$ (дійсний); 2. $x=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (комплексний); 3. $x=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (комплексний спряжений).

Це повністю узгоджується з основною теоремою алгебри: у рівняння степеня 3 — три корені.

7 Теорема про раціональні корені

В алгебрі теорема про раціональні корені (або тест про раціональні корені, теорема про раціональний нуль, тест про раціональний нуль або $\frac{p}{q}$ теорема) встановлює обмеження на раціональні розв'язки поліноміального рівняння

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

з цілочисельними коефіцієнтами $a_i \in \mathbb{Z}$ та $a_0, a_n \neq 0$. Розв'язки рівняння також називаються коренями або нулями полінома з лівого боку.

Теорема стверджує, що кожен раціональний розв'язок $x = \frac{p}{q}$, записаний у найменших членах (тобто p та q є взаємно простими), задовольняє:

- p — цілочисельний множник постійного члена a_0,
- q — цілочисельний множник старшого коефіцієнта a_n.

Теорема 7.1 (Теорема про раціональні корені). Нехай $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, це поліном в $\mathbb{Q}[x]$, де $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$. Кожен раціональний корінь τ від f в $\mathbb{Q}$ має вигляд $\tau = b/c$ $(b, c \in \mathbb{Z})$, де $b | a_0$ та $c | a_n$.

Доведення. Нехай $\tau = b/c$ — раціональний корінь функції f, де b, c — взаємно прості цілі числа.

Маємо:

$$0 = \sum_{i=0}^{n} a_i (b/c)^i.$$

Помноживши обидві частини вищенаведеного рівняння на c_n, маємо:

$$0 = a_0 c^n + a_1 c^{n-1} b + a_2 c^{n-2} b^2 + \cdots + a_n b^n$$

або еквівалентно:

$$a_0 c^n = -(a_1 c^{n-1} b + a_2 c^{n-2} b^2 + \cdots + a_n b^n).$$

Оскільки b ділить праву частину, а b та c взаємно прості числа, b має ділити

a_0. Аналогічно, маємо:

$$a_n b^n = -(a_0 c^n + a_1 c^{n-1} b + a_2 c^{n-2} b^2 + \cdots + a_{n-1} c b^{n-1}).$$

Оскільки c ділить праву частину, а b та c взаємно прості числа, c має ділити a_n. $\square$

7.1 Розв'язання рівнянь за теоремою про раціональниі корені

$x^2 + 1 = 0$

Перепишемо його як многочлен:

$$P(x) = x^2 + 0x + 1 = 0.$$

Згідно з теоремою про раціональні корені, якщо корінь $x = \frac{p}{q}$ раціональний, то:

1. p має ділити вільний член $a_0 = 1$, тобто $p = \pm 1$; 2. q має ділити старший коефіцієнт $a_2 = 1$, тобто $q = \pm 1$.

Отже, можливі раціональні корені:

$$x = \pm \frac{1}{1} = \pm 1.$$

Перевіримо:

Для $x = 1$:

$$1^2 + 1 = 2 \neq 0.$$

Для $x = -1$:

$$(-1)^2 + 1 = 2 \neq 0.$$

Отже, раціональних коренів немає.

Розв'язок цього рівняння будуть комплексні числа:

$$x^2 = -1,$$

тобто

$$x = \pm i.$$

Таким чином, розв'язок:

$$x = \pm i.$$

$x^3 - 2x + 2 = 0$

Згідно з теоремою про раціональні корені, можливі раціональні корені мають вигляд $x = \frac{p}{q}$, де:
1. p має ділити вільний член $a_0 = 2$, тобто $p = \pm 1, \pm 2$; 2. q має ділити старший коефіцієнт $a_3 = 1$, тобто $q = \pm 1$.
Отже, можливі раціональні корені:

$$x = \pm 1, \pm 2.$$

Перевіримо ці значення.
Для $x = 1$:

$$1^3 - 2(1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \neq 0.$$

Для $x = -1$:

$$(-1)^3 - 2(-1) + 2 = -1 + 2 + 2 = 3 \neq 0.$$

Для $x = 2$:

$$2^3 - 2(2) + 2 = 8 - 4 + 2 = 6 \neq 0.$$

Для $x = -2$:

$$(-2)^3 - 2(-2) + 2 = -8 + 4 + 2 = -2 \neq 0.$$

Отже, жоден з перевірених коренів не є розв'язком рівняння, і це означає, що рівняння не має раціональних коренів.

$(x-1)^3 = 0$

Щоб знайти корінь цього рівняння, скористаємося властивістю степенів: рівняння буде виконуватися, якщо вираз $(x-1)$ дорівнює нулю:

$$x - 1 = 0 \qquad\qquad x = 1$$

Отже, єдиний корінь рівняння — це $x = 1$, причому цей корінь має кратність 3, оскільки рівняння було підняте до куба.

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

Якщо добуток дорівнює нулю, один з множників має бути рівний нулю.

1. Розв'язуємо перший множник:

$$x - 1 = 0 \implies x = 1.$$

2. Розв'язуємо другий множник:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Розв'язок цього рівняння за допомогою формули для коренів квадратного рівняння:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, корені другого множника:

$$x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{та} \quad x = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Таким чином, розв'язки рівняння:

$$x = 1, \quad x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

7.2 Розв'язання рівнянь за геометричними властивостями коренів полінома

$x^2 + 1 = 0$

Переносимо 1 в інший бік:

$$x^2 = -1$$

Розв'язуємо це рівняння у множині комплексних чисел:

$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Геометрична інтерпретація

У комплексній площині число i відповідає точці:

$$\mathrm{Re}(i) = 0, \quad \mathrm{Im}(i) = 1$$

а число $-i$ відповідає точці:

$$\mathrm{Re}(-i) = 0, \quad \mathrm{Im}(-i) = -1$$

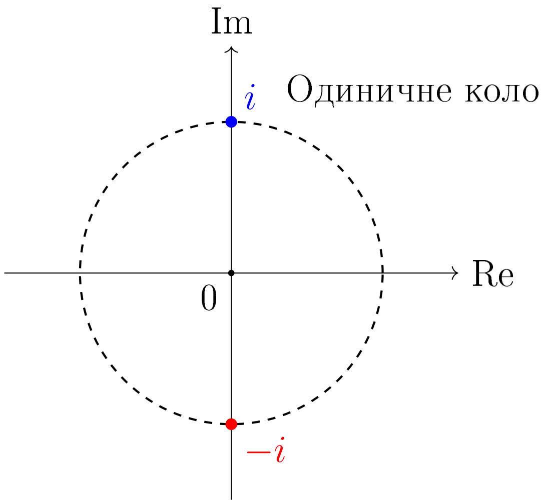
Отже, корені $x = \pm i$ лежать на одиничному колі:

$$|x| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Ці корені є комплексно спряженими, симетричними відносно дійсної осі, і розміщені на одиничному колі в точках:

$$x_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad x_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Графік коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$ на комплексній площині



Висновок

Геометрично, корені рівняння $x^2 + 1 = 0$ — це точки на одиничному колі, що утворюють кут $\frac{\pi}{2}$ та $-\frac{\pi}{2}$ з додатним напрямом дійсної осі.

$x^3 - 2x + 2 = 0$

1. Загальний вигляд рівняння

Розгляньмо кубічне рівняння:

$$x^3 + px + q = 0$$

У нашому випадку:

$$x^3 - 2x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -2, \quad q = 2$$

2. Формула дискримінанта для кубічного рівняння

Дискримінант кубічного рівняння визначається як:

$$D = -4p^3 - 27q^2$$

Підставимо значення $p = -2$, $q = 2$:

$$D = -4(-2)^3 - 27(2)^2 = -4(-8) - 27(4) = 32 - 108 = -76$$

Оскільки $D < 0$, маємо:

- Один дійсний корінь
- Два комплексно спряжені корені

3. Геометрична інтерпретація коренів

Якщо корінь x_1 дійсний, а x_2 і x_3 комплексно спряжені, то:

$$x_2 = a + bi, \quad x_3 = a - bi$$

Тоді ці два корені лежать симетрично відносно дійсної осі на комплексній площині. Всі корені можна уявити як точки або вектори, що формують вершини фігури (в нашому випадку — відображення симетрії).

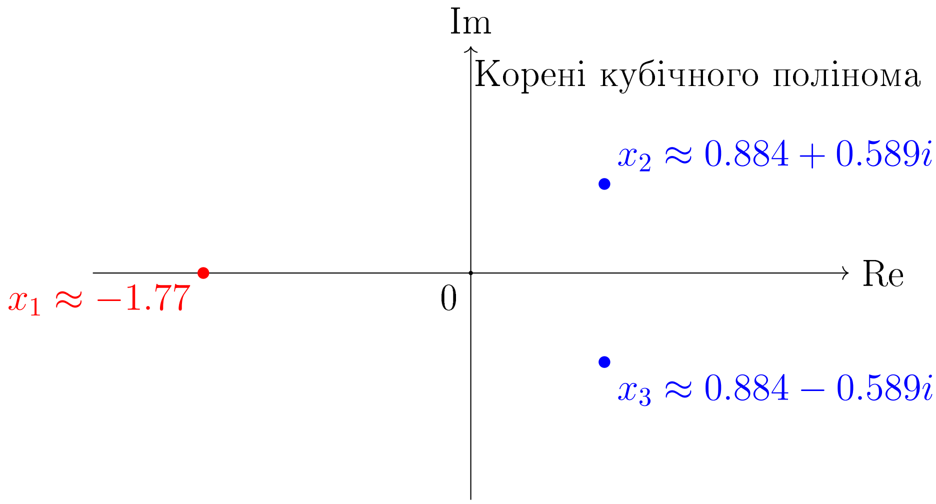
4. Геометрія векторів

Усі три корені задовольняють умову:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

(оскільки коефіцієнт при x^2 дорівнює нулю).
Отже, геометрично ці три вектори (корені) утворюють замкнену фігуру на площині — трикутник, де векторна сума дорівнює нулю. Якщо один корінь дійсний, два інші повинні мати рівну дійсну частину, протилежні уявні частини — тобто це симетричне розташування відносно дійсної осі.

Графік коренів рівняння $x^3 - 2x + 2 = 0$



5. Висновок

Рівняння $x^3 - 2x + 2 = 0$ має:

- Один дійсний корінь
- Два комплексні корені, які є спряженими
- Геометрично — ці корені утворюють симетричну фігуру, центром якої є початок координат

$(x-1)^3 = 0$

1. Аналітичне розв'язання

Розкриємо дужки:

$$(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{(кратність 3)}$$

2. Характеристика коренів

Рівняння має один дійсний корінь $x = 1$, але він має кратність 3. Це означає:

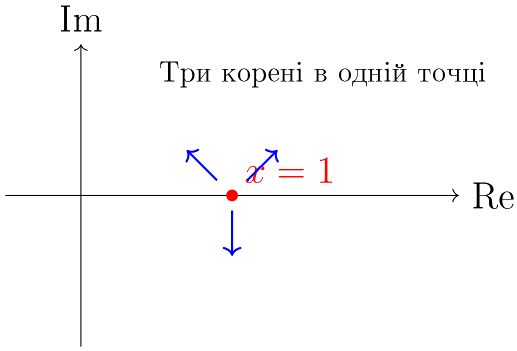
- Усі три корені рівні: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$
- Графік функції $y = (x-1)^3$ дотикається до осі x у точці $x = 1$, але не перетинає її.

3. Геометрична інтерпретація коренів

З погляду геометрії:

- Усі корені розташовані в одній точці на дійсній осі: $x = 1$
- На комплексній площині це точка $(1, 0)$
- Якщо уявити корені як вектори, вони спрямовані однаково — тобто не формують замкненої фігури, як у випадку різних коренів
- Алгебраїчно: сума коренів (з урахуванням кратності) дорівнює $1+1+1 = 3$, що відповідає коефіцієнтам, якщо розкрити поліном

Графік потрійного кореня рівняння $(x-1)^3 = 0$



4. Висновок

Поліном $(x-1)^3 = 0$ має один корінь кратності 3. Геометрично, це означає:

- Усі три корені збігаються в одній точці
- На графіку функції це точка дотику до осі x
- На комплексній площині корінь розташований на дійсній осі

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

1. Розв'язання рівняння

Рівняння має вигляд добутку двох множників:

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

Отже, корені рівняння — це:

- $x_1 = 1$
- x_2, x_3 — корені квадратного рівняння $x^2+x+1=0$

Розв'яжемо квадратне рівняння:

$$x^2+x+1=0 \quad \Rightarrow \quad D=b^2-4ac=1^2-4(1)(1)=-3$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

Отже:

$$x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

2. Геометрична інтерпретація

На комплексній площині:

- $x_1 = 1$ — дійсний корінь (лежить на осі Re)
- x_2, x_3 — комплексно спряжені корені, розташовані симетрично відносно осі Re
- Усі три корені лежать на одиничному колі:

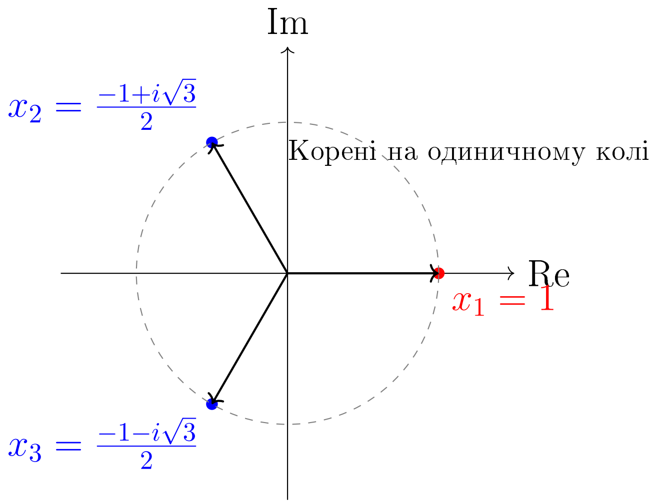
  $$|x|=1$$

  оскільки всі задовольняють умову $|x|=1$

Ці корені відповідають кубічним кореням з одиниці:

$$1, \quad e^{2\pi i/3}, \quad e^{4\pi i/3}$$

Графік коренів рівняння $(x-1)(x^2+x+1)=0$



3. Висновок

Корені рівняння:

$$x = 1, \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

— утворюють вершини правильного рівностороннього трикутника на одиничному колі в комплексній площині. Це три кубічні корені з одиниці.

8 Порівняльна таблиця методів

У наступній таблиці містяться результати аналізу зазначених рівнянь.

Метод	$x^2 + 1 = 0$	$x^3 - 2x + 2 = 0$	$(x-1)^3 = 0$	$(x-1)(x^2+x+1) = 0$	Примітки
Правило знаків Декарта	0	≤ 2	0	1	Дає оцінку кількості додатних коренів
Метод Штурма	0	1	1	1	Точна кількість дійсних коренів
Неповне правило Ньютона	0	1	1	1	Оцінка на основі похідних
Теорема Гаусса-Люка	—	так	—	—	Корені похідної в опуклій оболонці

9 Висновки

У ході дослідження чисельних методів для знаходження коренів нелінійних рівнянь було з'ясовано, що метод Ньютона є дуже потужним інструментом для чисельного розв'язування нелінійних рівнянь, однак для його ефективного застосування важливим є вибір початкового наближення, яке повинно бути достатньо близьким до кореня.

Загалом, проведене дослідження підтвердило високу ефективність методу Ньютона, який є одним із основних інструментів для розв'язування нелінійних рівнянь у багатьох наукових і технічних задачах.

Ці результати можуть бути корисними не лише в теоретичних дослідженнях, але й у практичних застосуваннях чисельних методів для розв'язання задач, де необхідно точно знаходити корені функцій у реальному світі, таких як інженерні, фізичні та економічні моделі.

10 Список літератури

- Newton's Rule of Signs for Imaginary Roots. Author: Daniel J. Acosta
- Descartes' rule of signs
- Descartes' Rule of Signs - How hard can it be? Author: Stewart A. Levin
- Fundamental theorem of algebra
- The Fundamental Theorem of Algebra: an Elementary and Direct Proof. Author: Oswaldo Rio Branco de Oliveira
- Florian Enescu, Fall 2010 Polynomials: Lecture notes Week 9.
- Rational root theorem
- Rational Root Theorem, Gauss's Theorem, Eisenstein's Criterion. Math 2070 Week 12
- Sturm's Theorem with Endpoints. Author: Philippe Pebay, J. Maurice Rojas, David C. Thompson. February 23, 2017