



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»



БУЛАШЕНКО А. В.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ КУРС ЛЕКЦІЙ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітніми програмами: «Інформаційна та комунікаційна радіоінженерія»,
«Інтелектуальні технології радіоелектронної техніки»,
«Радіотехнічні комп'ютеризовані системи»
спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент

Шульга А.В., к.т.н., доцент кафедри прикладної
радіоелектроніки РТФ

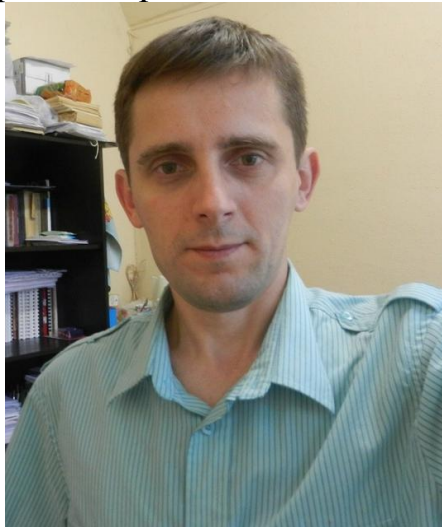
Відповідальний
редактор

Мартинюк С.Є., к.т.н., доцент,
виконуючий обов'язки завідувача
кафедри радіоінженерії РТФ

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 4 від 19.01.2023 р.)*

*за поданням Вченої ради Радіотехнічного факультету (протокол № 15/2022
від 19.12.2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання



Булашенко Андрій Васильович, старший викладач кафедри радіоінженерії

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ. КУРС ЛЕКЦІЙ

Основи теорії кіл: курс лекцій [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 7.27 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 418с.

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал щодо кіл постійного струму, змінного струму, коливальних контурів, прохідних чотириполосників та схемних функцій, довгих ліній, операторний метод з дисципліни «Основи теорії кіл». Посібник дає можливість одержати теоретичні та практичні навички при розв'язанні задач різного роду складності щодо розрахунку кіл постійного струму, змінного струму, коливальних контурів, схемних функцій та чотириполосників, розрахунку кіл класичним, операторним та часовим методами. Посібник буде корисний студентам, аспірантам та викладачам, що хочуть засвоїти теоретичний та практичний курс з дисципліни «Основи теорії кіл».

© А.В. Булашенко, 2023
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

ЗМІСТ

ВСТУП.....	8
1. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	12
1.1. Основні поняття.....	12
1.2. Пасивні елементи еквівалентних схем.....	16
1.2.1. Опір	16
1.2.2. Ємність	17
1.2.3. Індуктивність	18
1.3. Електричні схеми заміщення	19
1.4. Джерела електричної енергії.....	20
1.4.1. Джерело напруги	20
1.4.2. Джерело струму	21
1.4.3. Керовані джерела.....	22
1.5. Основні закони електричних кіл.....	23
1.6. Метод пропорційних величин.....	27
1.7. Дільники струму та напруги	29
1.8. Еквівалентні перетворення електричних кіл.....	31
1.8.1. Еквівалентні перетворення послідовно з'єднаних елементів.....	31
1.8.2. Еквівалентні перетворення паралельно з'єднаних елементів	33
1.8.3. Еквівалентні перетворення зірка-трикутник	35
1.8.4. Еквівалентні перетворення джерел електричної енергії	36
1.9. Основні методи розрахунку електричних кіл	40
1.9.1. Метод контурних струмів.....	40
1.9.2. Метод вузлових напруг.....	45
1.9.3. Принцип суперпозиції.....	53
1.9.4. Схемні функції.....	57
1.10. Основні теореми розрахунку електричних кіл.....	59
1.10.1. Теорема про еквівалентний генератор	59
1.10.2. Умова передачі максимальної потужності у навантаження	66
1.10.3. Принцип взаємності	69
1.10.4. Теорема компенсації	73
1.11. Розрахунок складних кіл різними методами	75
2. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ	83
2.1. Періодичний змінний струм.....	83
2.2. Основні поняття у колах гармонічного струму.....	85
2.3. Подання гармонічних коливань векторами, що обертаються	87
2.4. Комплексне подання гармонічних коливань.....	89
2.4.1 Метод комплексних амплітуд	89
2.4.2. Операції з комплексними числами та комплексними функціями.....	91
2.5. Пасивні елементи у колах гармонічного струму	95
2.5.1 Опір у колі гармонічного струму.....	95
2.5.2 Індуктивність у колі гармонічного струму	97

2.5.3 Ємність у колі гармонічного струму	99
2.6. Послідовне з'єднання елементів у колах гармонічного струму	102
2.7. Паралельне з'єднання елементів у колах гармонічного струму	106
2.8. Закони Ома та Кірхгофа у комплексній формі	110
2.9. Пасивний двополосник в колах гармонічного струму	117
2.9.1. Перерахунок паралельної гілки у послідовну	117
2.9.2. Активна та реактивна складові струму та напруги.....	119
2.10. Частотні характеристики кіл	122
2.11. Основні методи розрахунку кіл гармонічного струму	127
2.11.1. Закони Кірхгофа	127
2.11.2. Метод контурних струмів.....	129
2.11.3. Метод вузлових напруг.....	130
2.11.4. Метод еквівалентного генератора	131
2.12. Потужність у колах гармонічного струму	132
2.12.1. Гармонічна форма потужності.....	132
2.12.2. Комплексна форма потужності.....	135
2.12.3. Добротність гілки	139
2.12.4. Закон балансу потужностей	141
2.12.5. Передача максимальної потужності у навантаження.....	142
2.13. Побудова векторних діаграм.....	146
2.14. Кола з індуктивно зв'язаними елементами	151
2.14.1. Явище самоіндукції та взаємоіндукції	151
2.14.2. Коефіцієнт зв'язку та індуктивність розсіювання	153
2.14.3. Полярність котушок з індуктивними зв'язками.....	154
2.14.4. Послідовне з'єднання котушок з індуктивними зв'язками.....	155
2.14.5. Розв'язання індуктивного зв'язку.....	158
2.14.6. Особливості розрахунку складних кіл із магнітними зв'язками.....	161
2.15. Трансформатор у колах гармонічного струму	163
2.15.1. Двоконтурна трансформаторна схема.....	163
2.15.2. Ідеальний трансформатор.....	164
2.16. Розрахунок складних кіл гармонічного струму	166
3. ПООДИНОКИЙ КОЛИВАЛЬНИЙ КОНТУР	170
3.1. Поняття про селективність.....	170
3.2. Послідовний контур канонічного виду.....	171
3.2.1. Основні параметри контуру	171
3.2.2. Енергетичні процеси у контурі	173
3.2.3. Точне значення резонансної частоти контуру.....	175
3.3. Частотні характеристики послідовного контуру	177
3.3.1. Графічний аналіз частотних характеристик	177
3.3.2. Математичний аналіз частотних характеристик.....	179
3.3.3. Передавальні характеристики	186
3.4. Вплив опорів генератора та навантаження на вибірність контуру	187
3.4.1. Внесений опір	187
3.4.2. Способи зменшення впливу на характеристики контуру	190

3.4.3. Аналіз напруги на контурі	192
3.5. Розрахунок послідовних контурів	193
3.6. Паралельний контур канонічного виду	196
3.6.1. Основні параметри контуру	196
3.6.2. Графічний аналіз частотних характеристик	198
3.6.3. Вхідний опір та види паралельного контуру	200
3.6.4. Види паралельних контурів	203
3.7. Паралельний контур першого виду	204
3.7.1. Точне значення резонансної частоти	204
3.7.2. Передавальні характеристики	205
3.7.3. Живлення контуру	207
3.7.4. Напруги на контурі	209
3.8. Паралельний контур другого виду	211
3.8.1. Вхідний опір контуру	211
3.8.2. Струми у контурі	213
3.9. Паралельний контур третього виду	216
3.9.1. Вхідний опір контуру	216
3.9.2. Струми у контурі	218
3.10. Розрахунок паралельних контурів	221
4. ОСНОВИ СХЕМНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЧОТИРИПОЛЮСНИКІВ	226
4.1. Поняття про схемні функції та їх види	226
4.1.1. Поняття про схемні функції	226
4.1.2. Визначення коефіцієнта передачі	228
4.1.3. Види схемних функцій	232
4.2. Визначення схемних функцій	233
4.2.1. Визначення схемних функцій за матрицею опорів	233
4.2.2. Визначення схемних функцій за матрицею провідностей	234
4.3. Побудова частотних характеристик за картою нулів та полюсів	237
4.4. Знаходження реакції на довільну дію	241
4.5. Поняття про чотириполіусники	243
4.5.1. Визначення та класифікація чотириполіусників	243
4.5.2. Режими роботи чотириполіусників	245
4.5.3. Системи параметрів чотириполіусників	246
4.6. Схеми заміщення чотириполіусників	248
4.6.1. Схема заміщення Z -параметрів	248
4.6.2. Схема заміщення Y -параметрів	250
4.6.3. Схема заміщення h -параметрів	252
4.6.4. Схема заміщення F -параметрів	253
4.6.5. Схема заміщення A -параметрів	254
4.6.6. Приклад розв'язку задач	256
4.7. Приклади еквівалентності	257
4.7.1. Зв'язок між параметрами чотириполіусників	257
4.7.2. Перетворення трикутник-зірка	259
4.7.3. Приклад розв'язку задачі	260

4.8. Схеми з'єднання чотириполюсників	261
4.8.1. Послідовне з'єднання чотириполюсників	261
4.8.2. Паралельне з'єднання чотириполюсників	262
4.8.3. Послідовно-паралельне з'єднання чотириполюсників.....	263
4.8.4. Паралельно-послідовне з'єднання чотириполюсників.....	264
4.8.5. Каскадне з'єднання чотириполюсників	265
4.9. Приклади розрахунків чотириполюсників	266
5. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ КОЛАХ	271
5.1. Перехідний процес та закони комутації	271
5.1.1. Поняття про комутації та перехідний процес.....	271
5.1.2. Закони комутації.....	272
5.2. Функції Хевісайда та Дірака	274
5.3. Перетворення Лапласа та його властивості.....	278
5.3.1. Пряме та зворотне перетворення Лапласа	278
5.3.2. Основні властивості перетворення Лапласа	278
5.4. Закони Ома та Кірхгофа у операторній формі	280
5.4.1. Операторні схеми заміщення	280
5.4.2. Операторні закони Ома та Кірхгофа	283
5.5. Приклади зображення функцій.....	284
5.6. Знаходження оригіналу	286
5.6.1. Теорема розкладання.....	286
5.6.2. Загальна методика	290
5.7. Приклади розрахунку кіл операторним методом	291
5.8. Часовий метод аналізу кіл	296
5.8.1. Часові характеристики	296
5.8.2. Визначення дії часовим методом.....	301
5.9. Поняття про класичний метод розрахунку	306
5.9.1. Вільний та вимушений режим	306
5.9.2. Загальна методика розрахунку класичним методом	308
5.10. Перехідні процеси у послідовних RL- та RC-колах	309
5.10.1. Ввімкнення RL-кола під постійну напругу	309
5.10.2. Ввімкнення RC-кола під постійну напругу	311
5.10.3. Реакція RC-кола на П-подібний імпульс напруги	315
5.10.4. Приклади розрахунку класичним методом	316
6. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ..	319
6.1. Поняття про кола із розподіленими параметрами	319
6.2. Первинні параметри довгої лінії.....	321
6.3. Телеграфні рівняння лінії	322
6.4. Розв'язання телеграфних рівнянь для гармонічного режиму.....	323
6.4.1. Розв'язок телеграфних рівнянь від початку лінії.....	323
6.4.2. Розв'язок телеграфних рівнянь від кінця лінії	325
6.4.3. Падаюча та відбита хвилі, довжина хвилі та фазова швидкість	326
6.5. Вторинні параметри довгої лінії.....	329
6.6. Побудова розподілу амплітуд напруги та струму уздовж лінії.....	332

6.7. Рівняння лінії як чотириполюсника	335
6.7.1. Рівняння лінії у гіперболічних функціях	335
6.7.2. Матриця передачі та розсіювання	338
6.8. Хвильові процеси у лінії.....	339
6.9. Режим біжних хвиль	340
6.9.1. Лінія без спотворень та втрат.....	340
6.9.2. Лінія навантажена на хвильовий опір	341
6.10. Режим стійних хвиль.....	343
6.10.1. Режим холостого ходу лінії.....	343
6.10.2. Режим короткого замикання лінії.....	347
6.10.3. Лінія навантажена на реактивний опір	349
6.11. Режим змішаних хвиль	353
6.11.1. Лінія без втрат навантажена на активний опір.....	353
6.11.2. Лінія без втрат навантажена на комплексний опір	358
6.12. Способи узгодження лінії із навантаженням	360
6.12.1. Ідеальний трансформатор.....	360
6.12.2. Чвертьхвильовий трансформатор	361
6.12.3. Реактивні шлейфи.....	363
6.13. Перехідні процеси у довгих лініях	366
6.13.1. Загальні положення	366
6.13.2. Лінія без втрат узгоджена у всьому діапазоні частот.....	366
6.13.3. Лінія із втратами.....	368
6.13.4. Випадок багатократних відбиттів.....	369
6.13.5. Спосіб знаходження відбитої хвилі через падаючу.....	370
6.14. Включення лінії під постійну напругу.....	371
6.14.1. Режим холостого ходу	371
6.14.2. Режим короткого замикання	374
6.15. Розрахунок перехідних процесів у лінії.....	377
7. РОЗРАХУНОК ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ	379
8. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ	390
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	392
ДОДАТОК А. Формули диференціювання	397
ДОДАТОК Б. Тригонометричні формули	398
ДОДАТОК В. Таблиця інтегралів	400
ДОДАТОК Г. Схемні функції	401
ДОДАТОК Д. Системи параметрів прохідних чотириполюсників	402
ДОДАТОК Е. Зв'язок між параметрам чотириполюсника.....	403
ДОДАТОК Є. Таблиця перетворення Лапласа	404
ДОДАТОК Ж. Корисні співвідношення для гармонічних кіл	405
ДОДАТОК З. Часові характеристики простих кіл.....	406
ДОДАТОК І. Скрін розрахунку коефіцієнта передачі у MathCAD	407
ДОДАТОК К. Скрін побудови частотних характеристик у MathCAD.....	409
ДОДАТОК Л. Біографія автора	412

ВСТУП

Навчальний посібник «Основи теорії кіл» є базовою дисципліною при підготовці радіоінженерів. Він відповідає навчальній програмі дисципліни «Основи теорії кіл». Метою вивчення дисципліни є засвоєння основних методів розрахунку лінійних електричних кіл.

Запропонований посібник орієнтований на студентів ЗВО денної, заочної та дистанційної форми навчання спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка та інших суміжних спеціальностей.

Навчальний посібник дає можливість отримати теоретичні навички при вивченні теорії лінійних кіл постійного струму, лінійних кіл змінного струму, резонансних режимів у поодиноких контурах, основ теорії прохідних чотириполюсників, перехідних процесів у простих колах та режимів роботи довгих ліній. Курс лекцій містить теоретичний матеріал проілюстрований досить великою кількістю практичних прикладів розрахунку конкретних електричних кіл, що дозволяє розвинути у читачів праткичні навички.

Перший розділ посібника називається «Лінійні електричні кола постійного струму». До нього входять такі теми як основні поняття теорії електричних кіл, пасивні та активні елементи електричних кіл, основні закони електричних кіл, еквівалентні перетворення електричних кіл та основні методи та теореми розрахунку електричних кіл. При підготовці даного розділу використовувалися такі джерела [1, 3, 4, 9, 20, 23, 25]. Для більш детального опанування теоретичного матеріалу слід скористатися джерелами [1, 3, 4, 7, 19, 23-25, 27, 32, 38, 41-43, 46-50], а для опанування практичного розв'язання задач слід користуватися посібниками [4, 5, 9, 18, 20, 21, 28, 31, 33-35, 39, 45].

Другий розділ називається «Лінійні електричні кола змінного струму». До нього входять такі теми, як основні поняття кіл змінного та гармонічного струму, метод комплексних амплітуд, пасивні елементи у колах гармонічного струму, основні закони електричних кіл змінного струму, пасивні двополіусники у колах гармонічного струму, потужність у колах гармонічного струму, основні методи розрахунку кіл гармонічного струму, представлення струмів та напруг за допомогою векторних діаграм, кола з індуктивно зв'язаними елементами, трансформатор у колах гармонічного струму. При підготовці даного розділу використовувалися такі джерела [1, 3, 10, 18, 20, 24]. Для більш детального вивчення теоретичного матеріалу за заданої тематики слід скористатися джерелами [1, 4, 7, 19, 23-25, 30, 32, 38, 41-43, 46, 48-50], а для опанування практичного розв'язання задач слід користуватися посібниками [4, 6, 10, 17, 18, 20, 21, 22, 28, 33-35, 39].

Третій розділ називається «Поодинокий коливальний контур». До нього входять такі теми, як послідовний та паралельний коливальні контури. Розглядаються такі їх основні характеристики як селективність, резонанс, резонансна частота, характеристичний опір, добротність, смуга пропускання, вхідний опір,

коефіцієнт включення, потужність на резонансній частоті. При підготовці даного розділу використовувалися такі джерела [1, 3, 4, 6, 11, 20]. Для більш детального опанування теоретичного матеріалу по даній тематиці необхідно користуватися джерелами [1, 3, 4, 7, 19, 23-25, 32, 35, 38, 39, 41, 43, 44, 46, 48-50], а для опанування практичного розв'язання задач необхідно використовувати джерела [4, 5, 11, 18, 20, 21, 28, 33-35, 37].

Четвертий розділ називається «Основи схемних функцій та чотириполосників». До нього входять такі теми, як визначення та класифікація схемних функцій, поняття та класифікація чотириполосників, схеми заміщення параметрів чотириполосника, основні поняття теорії електричних кіл, схеми з'єднання чотириполосників та зв'язок між параметрами чотириполосників. При підготовці даного розділу використовувалися такі джерела [2, 3, 13-15, 20, 24]. Для більш детального опанування заданого теоретичного матеріалу слід скористатися такими джерелами [1, 3, 4, 7, 19, 22-24, 32, 38, 40-41, 43, 46, 48-50], а для практичного опанування слід скористатися такими джерелами [4, 5, 8, 13, 20, 28].

П'ятий розділ називається «Перехідні процеси». До нього входять такі теми як поняття про перехідні процеси та закони комутації, перетворення Лапласа та його властивості, закони Ома та Кірхгофа у операторній формі, розрахунок кіл операторним та часовим методами, розрахунок перехідних процесів у колах з комутаціями операторним та класичним методами. При підготовці даного розділу використовувалися такі джерела [2, 3, 13, 14, 20]. Для більш детального опанування заданого теоретичного матеріалу слід скористатися такими джерелами [2, 3, 8, 19, 30, 32, 38-41, 43, 46, 48-50], а для практичного опанування слід скористатися такими джерелами [4, 5, 13, 15, 20, 28, 34-36].

Шостий розділ називається «Лінійні електричні кола із розподіленими параметрами». До нього входять такі теми, як поняття та класифікація лінійних кіл із розподіленими параметрами, поняття про довгі лінії та телеграфні рівняння, що їх описують, первинні та вторинні параметри довгої лінії, розв'язок телеграфних рівнянь у випадку гармонічної дії, хвильові процеси у довгій лінії, режими роботи довгих ліній, способи узгодження лінії із навантаженням, перехідні процеси у довгих лініях. При підготовці даного розділу використовувалися такі джерела [2, 3, 12, 16, 20, 29]. Для більш детального опанування теоретичного матеріалу слід скористатися джерелами [2, 3, 4, 8, 19, 30, 32, 38, 40-41, 43, 48-50], а для практичного опанування слід скористатися такими джерелами [4, 5, 12, 20, 28, 29, 34-36].

Сьомий розділ посібника називається «Розрахунок олімпіадних задач». В цьому розділі розглядаються приклади розрахунку різних олімпіадних задач з дисципліни «Основи теорії кіл» за основними темами вивчення дисципліни. При підготовці даного розділу використовувалися такі джерела [5, 9-15, 36]. Для більш детального опанування заданого матеріалу слід скористатися джерелами [1, 2, 4, 5, 7, 8, 9-13, 19, 22, 29, 30, 33-36, 40-43, 48-50].

Засновниками дисципліни «Основи теорії кіл» на кафедрі теоретичних основ радіотехніки радіотехнічного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського були наступні видатні викладачі: професор Трохименко Я.К., професор Рибін О.І., доцент Любич Ф.Д., доцент Кисляковський А.В., доцент Куш С.М., доцент Медведєв Б.О., доцент Шашук В.Д. та інші викладачі кафедри. Вагомий внесок у розвиток теорії електричних кіл здійснили також наступні талановиті викладачі кафедри теоретичних основ радіотехніки та кафедри радіоінженерії: ст. викл. Ястребов М.І., ст. викл. Смірнов В.П., ст. викл. Гребеньков М.В., доцент Гусєва О.В. та ст. викл. Булашенко А.В. Навчальний посібник містить багаторічний досвід викладання дисциплін «Основи теорії кіл» різними поколіннями викладачів, що заснували відповідну школу на чолі з таким викладачем: професором Трохименком Я.К., доцентом Любичем Ф.Д., доцентом Кисляковським А.В., професором Рибіним О.І., доцентом Медведєв Б.О. та доцентом Ястребовим М.І.

Цей посібник написаний з нагоди 93 річниці заснування Радіотехнічного факультету НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», що відзначається у травні 2023 року. Крім того, посібник присвячується 125-ій річниці заснування КПІ ім. Ігоря Сікорського, що відзначається 31 серпня 2023 року. Більш того, навчальний посібник присвячений 32-ї річниці Незалежності України, що святкується 24 серпня 2023 року. Написаний посібник присвячений моїй мамі Булашенко Лідії Григорівні та бабусі Кохановській Ганні Миколаївні, що привили мені любов до працьовитості без якої не було створено цього посібника. Курс лекцій присвячений видатним викладачам факультету: професору Рибіну Олександровичу, професору Коцержинському Борисовичу, доценту Новоборському Юрію Леонтієвичу, доценту Макаренку Олександровичу, доценту Каширському Ігорю Серафимовичу, доценту Купрію Олександровичу, доценту Вунтесмері Володимировичу, доценту Дмитруку Віктору Опанасовичу та доценту Дяченку Станіславу Мефодійовичу, що здійснили вагомий внесок у розвиток радіотехніки на факультеті. Вони прищепили автору любов до радіотехніки. Крім того, автор з вдячністю згадує своїх перших шкільних вчителів фізики, Чорненького Євгенія Миколайовича, та математики, Безлюдного Сергія Володимировича, які прищепили мені любов до технічних наук. Також автор висловлює велику подяку завзятим та працьовитим студентам другого та першого курсів, що протягом вивчення дисципліни «Основи теорії кіл» системно та наполегливо опановували цю дисципліну. Вони активно приймали участь у покращенні даного посібника, а також мотивували автора самого покращувати представлений курс лекцій. Серед них необхідно виділити таких студентів: Шкіндер Анастасію, Потапенка Владислава, Підвишинського Нікіту, Китайко Максима, Дікмарова Михайла, Пафика Олександра, Миронова Ігоря, Яковенка Дмитра, Рубцова Івана, Петрунько Ельвіру, Бібікову Софію, Петруненка Олександра, Шкурата Миколу, Корольова Владислава, Клименка Максима, Левкова Назара, Аббу Дмитра, Сергєєва Євгенія, Коваленка Дениса, Гров Олександру, Пасіченка Сергія, Осіпова Петра, Педан Катерину, Сидорен-

ко Анастасію, Першка Федора, Демарьова Костянтина, Стужука Андрія, Лебідко Єлизавету, Овчаренка Максима, Кушнінського Івана, Силу Наталію, Ванютіну Ірину, Сидорук Ольгу, Кузнецова Івана, Євтушенка Володимира, Краська Володимира, Фурсу Данила, Філобоченко Єлизавету та всіх інших.

Автор висловлює особливу подяку за велику допомогу в підготовці даного посібника колишньому старшому викладачу М.І. Ястребову. Його зауваження покращили якість матеріалу та зміст навчального посібника. Він зробив вагомий внесок у розвиток теорії електричних кіл на радіотехнічному факультеті КПІ ім. Ігоря Сікорського. Він методично та блискуче вмів доносити інформацію з дисципліни до своїх слухачів. За допомогою його лекційних, практичних та лабораторних занять було виховане не одне покоління майбутніх викладачів кафедри з різних дисциплін. Серед його студентів необхідно виділити таких талановитих викладачів кафедри теоретичних основ радіотехніки та кафедри радіоінженерії, як: доцент Василенко Д.О, доцент Овсянник Ю.О, доцент Пільтяй С.І., доцент Сушко О.Ю., ст. викл. Булашенко А.В, ст. викл. Герасименко К.П., асистент Видалко О.Є, асистент Ванділовський Б.В. та інші. Крім того, необхідно виділити таких студентів, що є викладачами інших кафедр радіотехнічного факультету: доцент Шпилька О.О., доцент Сушко І.О, доцент Мосійчук В.С., ст. викл. Вишневий С.В., ст. викл. Неуймін О.С., ст. викл. Мирончук О.Ю., ст. викл. Товкач І.О., асистент Романенко Т.Г., асистент Махно К., асистент Середін А.П., асистент Єзерський М. та інші.

Автор висловлює вдячність кафедрі теоретичних основ радіотехніки Радіотехнічного факультету НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» за те, що вона сприяла протягом 13 років тому, що він створив даний посібник. Автор також висловлює подяку завідувачу кафедри теоретичних основ радіотехніки професору Дубровці Ф.Ф. та завідувачу кафедри радіоінженерії доценту Мартинюку С.Є. за поставлені перед початком роботи завдання. Крім того автор висловлює подяку своїм батькам та рідним, що терпіли його відсутність в той час, коли він працював над посібником, особливо в умовах відключення електроенергії.

Автор також висловлює подяку рецензенту, кандидату технічних наук, доценту кафедри прикладної радіоелектроніки, Шульзі Аліні Вікторівні за витрачений час, цінні зауваження щодо тонких місць та покращення якості навчального посібника.

При вивченні теорії електричних кіл слід не забувати гасло студентів радіотехнічного факультету: «Сила в знаннях», що було започатковане студентами другого курсу групи РЕ-21 на чолі із старостою групи пані Наталією Силою.

1. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1. Основні поняття

Електричним колом називається реальний фізичний об'єкт, що складається із сукупності елементів, які забезпечують необхідне протікання електричних процесів, що можна описати за допомогою понять *струму* та *напруги*.

До основних понять теорії кіл відносять: електричний заряд, електричний струм провідності, напругу, потужність та енергію.

Електричний заряд – кількість електрики, що накопичена тілом.

Кількісно величини зарядів оцінюються силою взаємодії між зарядженими тілами. Взаємодія заряджених тіл відбувається за допомогою електромагнітного поля. Електричний заряд позначають великою літерою Q або малою літерою q . Заряд вимірюється в кулонах (Кл).

Електричний струм провідності – це упорядкований рух будь-яких зарядів.

Величина струму визначається кількістю заряду, що протікає через перетин провідника за одиницю часу

$$i = \frac{dq}{dt}$$

i вимірюється у амперах (скорочено позначається – А). Ампер – це величина постійного струму, який проходячи по двом паралельним прямолінійним провідникам нескінченної довжини та нескінченно малого кругового перерізу, що розташований на відстані 1 м один від одного в вакуумі, викликав би між цими провідниками силу, що дорівнює $2 \cdot 10^{-7}$ Н/м.

Крім основних одиниць використовуються допоміжні, які наведені у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Допоміжні величини

Назва	Величина	Назва	Величина
кіло	10^3	піко	10^{-12}
мега	10^6	нано	10^{-9}
гіга	10^9	мікро	10^{-6}
тера	10^{12}	мілі	10^{-3}

Струм є величина скалярна. Але у теорії кіл струму надають додатний напрям, який позначають стрілкою (рис. 1.1).

Уявимо, що через опір R протікає струм від точки a до точки b (рис. 1.1). За додатний напрям струму обирають напрям руху додатних зарядів, що говорить про те, що струм протікає від додатного полюса до від'ємного.

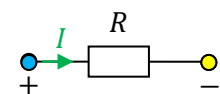


Рисунок 1.1 – Опір

По суті додатній напрям струму показує відносно чого його вимірювати.

Необхідно звернути увагу на те, що при додатному напрямку струму його значення може бути від'ємним. У цьому випадку можна змінити напрям струму, тоді значення струму буде додатнім.

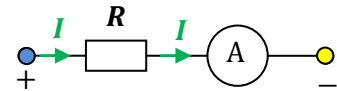


Рисунок 1.2 – Схема підключення амперметра

Для вимірювання струму використовують *амперметр* (рис. 1.2), що вмикається у коло послідовно, оскільки його внутрішній опір малий. Отже, чим нижчий внутрішній опір амперметра (в ідеалі – 0), тем менше він буде впливати на вимірювальний опір, тим вище буде точність вимірювань.

Електрична напруга – це різниця потенціалів.

Напруга вимірюється у вольтах.

Електричний потенціал – це фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі поля по перенесенню одиничного додатного заряду з нульової точки до нескінченності.

Електричний потенціал вимірюється у вольтах [В] та позначається літерою ϕ .

Додатному напрямку струму відповідає додатний напрям напруги. Ми домовимося додатний напрям теж позначати стрілкою, що направлена у сторону більшого потенціалу (рис. 1.3). Прийнятим стандартом є

$$u_{ab} = \phi_a - \phi_b.$$

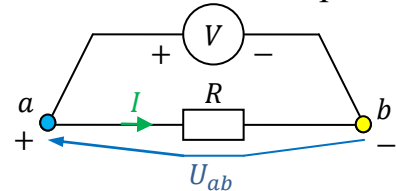


Рисунок 1.3 – Схема підключення вольтметра

Причому потенціал ϕ_a – це вищий потенціал, а потенціал ϕ_b – це нижчий потенціал, причому струм тече від більшого потенціалу до нижчого.

Для вимірювання напруги використовують *вольтметр* (рис. 1.3), що вмикається у коло паралельно, оскільки його внутрішній опір великий. Великий опір вольтметра забезпечує те, що прилад лише в незначній мірі впливає на проходження струму через коло.

Струм та напруга можуть бути змінними у часі. Зазвичай змінні у часі напруги та струми позначають маленькими літерами $u(t) = u$ та $i(t) = i$ відповідно. Постійний струм та напругу, комплексні амплітуди та операторні їх зображення позначають великими літерами. Якщо йдеться про змінний струм або напругу, то їм теж приписують додатний напрям, що показує як їх вимірювати.

Електрична енергія, що витрачається на переміщення одиничного додатного заряду між двома точками ділянки кола із напругою u до моменту часу t визначається

$$W = \int_0^q u dq = \int_0^t u i dt = u \cdot i \cdot t.$$

Одиницею виміру енергії є Джоуль (Дж).

Така енергія перетворюється з одного виду на інший, наприклад у тепло.

Потужність електричного струму – фізична величина, що характеризує швидкість зміни (передачі або перетворення) електричної енергії

$$p = \frac{dW}{dt} = u(t) \frac{dq(t)}{dt} = i(t) \cdot u(t) = I \cdot U,$$

причому додатному напрямку струму повинен відповідати додатний напрям напруги.

Одиницею виміру потужності є Ват.

Значення миттєвої потужності може бути від'ємним або додатним, що залежить від значень струму та напруги. Якщо струм та напруга одного знаку, то потужність додатна ($p > 0$, енергія споживається колом). Якщо струм та напруга різного знаку, то потужність від'ємна ($p < 0$, енергія віддається у коло). На практиці у теорії кіл, якщо елемент споживає енергію, то частіше використовують поняття «споживана потужність», а якщо елемент віддає енергію – «потужність, що відається» у коло.

Енергія, що поступає в споживач за проміжок часу від t_1 до t_2

$$W(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt.$$

Одиницею виміру енергії є Джоуль (Дж).

В теорії кіл широко використовують терміни та поняття теорії графів.

Граф – це малюнок або креслення, що складається із точок, які називаються вузлами, та ліній, які їх з'єднують, що називаються гілками.

Сукупність гілок, через які можна провести неперервну лінію утворює шлях, причому шлях по одній і тій же гілці проводити двічі не можна.

Замкнений шлях називається **контуром** (рис. 1.4).

Гілка схеми – це сукупність елементів, по яким протікає один і той же струм.

На рис. 4.1 наведений фрагмент кола (рис. 4.1 а) та відповідне йому дерево схеми (рис. 4.1 б).

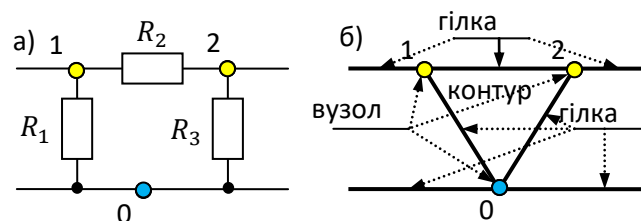


Рисунок 1.4 – Фрагмент кола (а) та його дерево (б)

На практиці інженери за вузол вважають точку, до якої можна підключити будь-який прилад. Гілки, по яким йде один і той самий струм називають з'єднаними послідовно. Гілки, які ввімкнені між двома однаковими вузлами називають з'єднаними паралельно.

Коло складається із джерел енергії, приймачів та допоміжних елементів (наприклад, дротів, що з'єднують елементи). Графічно коло можна зобразити за допомогою схеми.

Електрична схема – це умовне графічне зображення електричного кола.

Електричні схеми умовно діляться на такі: структурні, принципові, еквівалентні, заміщення.

Структурна схема – це умовне графічне зображення реального кола, на якому відображені лише важливі функціональні частини кола та основні зв'язки між ними.

Принципова схема – це малюнок або креслення, що показує спосіб з'єднання реальних фізичних елементів, які утворюють електричне коло (опори, транзистори, індуктивності, ємності, лампи, мікросхеми, електронні прилади, тощо).

Еквівалентна схема – це рисунок або креслення, що складається із ідеалізованих елементів, які із достатньою степеню точності моделюють роботу реальних елементів кола.

Схема заміщення реального елемента – це умовне графічне зображення ідеалізованого електричного кола, що моделює даний елемент в рамках поставленої задачі.

Класифікація електричних кіл:

1. За наявністю нелінійних елементів.
 - а) лінійні кола – такі кола, в яких всі елементи лінійні;
 - б) нелінійні кола – такі кола, що містять хоча б один нелінійний елемент.
2. За кількістю зовнішніх затискачів.
 - а) Двополюсники – кола, що містять два полюси (затискачі);
 - б) Багатополюсники – кола, що містять велику кількість полюсів (затискачів).
3. За енергетичними властивостями.
 - а) пасивні кола – кола, що складаються із пасивних елементів;
 - б) активні кола – кола, що містять джерела енергії.
4. За виглядом диференційного рівняння кола.
 - а) кола із зосередженими параметрами – кола, процеси в яких описуються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь;
 - б) кола із розподіленими параметрами – це кола, процеси в яких описуються диференціальними рівняннями у часткових похідних;
 - с) параметричні кола – це кола, процеси в яких описуються параметричними диференціальними рівняннями.

1.2. Пасивні елементи еквівалентних схем

До основних пасивних елементів будемо відносити опори, індуктивності, ємності, трансформатори.

1.2.1. Опір

Опір – це ідеалізований елемент електричного кола, що за властивостями наближається до резистора та характеризується тим, що забирає енергію із кола і не повертає її (виводить із кола).

За допомогою опорів можна моделювати резистори, антени, що випромінює енергію, втрати електричних двигунів.

Активний опір позначається великою літерою R або малою літерою r . Опір вимірюється в омах (Ом). Опір 1 Ом має провідник, через який при різниці потенціалів у 1 В проходить струм 1 А.

Для опору (рис. 1.5) справедливий закон Ома

$$I = \frac{U}{R}.$$

Для постійного струму R можна вважати схемною функцією – відношення реакції до дії

$$R = \frac{U}{I}.$$

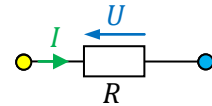


Рисунок 1.5 – Позначення опору

Будь-який опір можна характеризувати провідністю.

Провідність – величина обернена опору (позначають G або g)

$$G = g = \frac{1}{R} = \frac{1}{r}.$$

Провідність вимірюється у сіменсах (Сім).

З фізичної точки зору **провідність** – це здатність проводити електричний струм, а **опір** – це здатність провідника перешкоджати проходженню електричного струму.

Скориставшись законом Ома можна записати дві інші формули для розрахунку потужності на опорі

$$P = I \cdot U = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

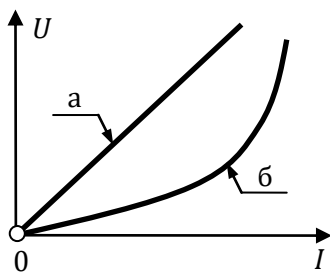
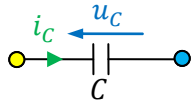


Рисунок 1.6 – ВАХ опору

Закон Ома є залежність напруги від струму, що називається вольт-амперною характеристикою (ВАХ). Опір називається лінійним, якщо його величина не залежить від величини і напрямку струму (рис 1.6 а). Опір є нелінійним, якщо його ВАХ є нелінійною, а величина опору залежить від величини і напрямку струму (рис. 1.6 б). Опір є параметричним, якщо величина опору залежить від часу ($R(t)$).

1.2.2. Ємність

Ємність – це ідеалізований елемент кола, що за своїми характеристиками наближається до конденсатора та характеризується тим, що накопичує енергію електричного поля.



Кількісно ємність визначається

$$C = \frac{q}{u}.$$

Умовне зображення ємності наведено на рис. 1.7. Одиницею виміру є фарада (Ф).

Струм ємності визначається швидкістю зміни заряду q у часі

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_c)}{dt}.$$

У разі лінійності ємності струм визначається

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}.$$

Напруга на ємності визначається

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_c(t) dt + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt,$$

$u_c(0)$ – початкова напруга з моменту часу, з якого ми починаємо розглядати процес.

Постійний струм через ємність не тече. На рис. 1.8 поданий закон зміни струму, якщо напруга на ємності має форму трапеції.

Миттєва енергія електричного поля, що накопичується у ємності

$$\begin{aligned} w_c(t) &= \int_{-\infty}^t p(t) dt = \int_{-\infty}^t i_c(t) \cdot u_c dt = \\ &= \int_{-\infty}^t C \frac{du_c}{dt} \cdot u_c dt = \frac{Cu_c^2}{2}. \end{aligned}$$

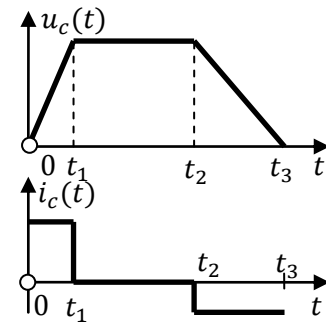


Рисунок 1.8 – Напруга та струм

Формула справедлива при умові, що при $t = -\infty$, $u_c(\infty) = 0$ ємність не заряджена.

Вольт-кулонні характеристики (ВКХ) ємності подана на рис. 1.9

$$\frac{q}{U} = tg(\alpha) \cdot m = C, \quad m - \text{коефіцієнт масштабу.}$$

На рис. 1.9 а подана лінійна ВКХ, а на рис. 1.9 б – нелінійна ВКХ для ємності.

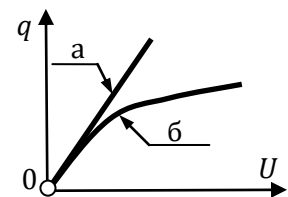


Рисунок 1.9 – ВКХ ємності

1.2.3. Індуктивність

Індуктивність – це ідеалізований елемент кола, що за своїми характеристиками наближається до котушки індуктивності та характеризується тим, що накопичує енергію магнітного поля.

На рис. 1.10 наведена схема заміщення індуктивності (рис. 1.10 а) та котушки індуктивності (рис. 1.10 б). Індуктивність позначається L та вимірюється у генрі (Гн).

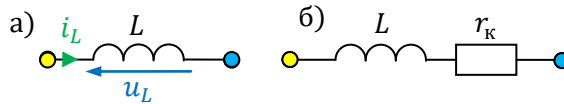


Рисунок 1.10 – Схеми індуктивності (а) та котушки індуктивності (б)

Індуктивність кількісно визначається відношенням потокозчеплення ψ , до струму, що створює магнітне поле

$$L = \frac{\psi}{i}.$$

Напруга на індуктивності визначається швидкістю зміни потокозчеплення ψ у часі за законом Фарадея

$$u_L = -e_L = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(Li_L)}{dt}.$$

У разі лінійної індуктивності визначається

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

Відповідно струм в індуктивності

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt,$$

$i_L(0)$ – початковий струм з моменту часу, з якого ми починаємо розглядати процес.

На постійному струмі індуктивності еквівалентний закороченій ділянці схеми у місті її ввімкнення.

Миттєва потужність, що надходить в індуктивність

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = \int_{-\infty}^t u_L(t) \cdot i_L dt = \int_{-\infty}^t L \frac{di_L}{dt} \cdot i_L dt = \frac{Li_L^2}{2}.$$

Формула справедлива при умові, що при $t = -\infty$, $i_L(-\infty) = 0$ струм в індуктивності дорівнює нулю.

Вебер-амперна характеристика (ВАХ) індуктивності подана на рис. 1.11

$$\frac{\psi}{I} = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot m = L, \quad m - \text{коефіцієнт масштабу.}$$

На рис. 1.11 а подана лінійна ВАХ, а на рис. 1.11 б – нелінійна індуктивності.

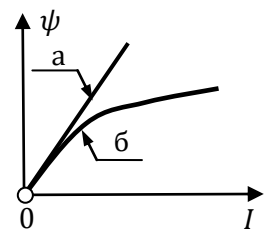


Рисунок 1.11 – ВАХ L

1.3. Електричні схеми заміщення

Окремий розгляд елементів опора, індуктивності та ємності, що локалізують втрати, магнітне та електричне поля, є наближеними методами аналізу кіл. На практиці втрати енергії, магнітне та електричні поля пов'язані та супроводжують один одного.

Електричний опір провідника на постійному струмі

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

де ρ – питомий опір; l – довжина; S – площа поперечного перетину провідника.

Тут проявляється поверхневий ефект, що полягає в тому, що зі збільшенням частоти щільність струму всередині провідника зменшується, а до поверхні збільшується, отже, опір збільшується.

Також проявляється ефект близькості, що полягає в тому, що під дією струму, що проходить по сусідньому провіднику, також відбувається перерозподіл струму в провіднику, а значить, збільшення теплових втрат.

Додаткове збільшення опору викликає випромінення у простір електромагнітної енергії на високих частотах.

Отже, реальний *резистор* наряду з опором має деяку індуктивність та ємність внаслідок пов'язаних з ним магнітного та електричного полів.

За постійного струму напруга на затискачах *катушки індуктивності*, що являє собою деяку кількість витків, визначається величиною падіння напруги на опорі та струм у всіх витках буде однаковим.

За змінного струму змінне магнітне поле буде наводити ЕРС самоіндукції величини, що буде залежати від частоти коливаль.

Між витками також буде змінне електричне поле, тобто з'явиться струм зміщення. За низьких частот можна не враховувати струм зміщення, тоді схема заміщення зображена на рис. 1.12 а).

На високих частотах не можна нехтувати струм зміщення, схема заміщення містить також та ємнісну складову (рис. 1.12 б).

Нехай конденсатор складається з двох паралельних пластин, що розділені діелектриком. При сталій напрузі та ідеальному діелектрику струму в колі з конденсатором не буде. Якщо напруга змінна, то виникає змінний струм, що створює змінне магнітне поле. Крім того, не ідеальність діелектрика призводить до виникнення струму провідності, що призводять до теплових втрат в конденсаторі зі збільшення частоти.

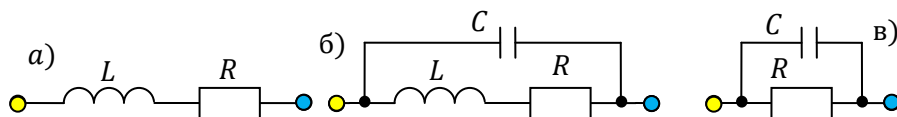


Рисунок 1.12 – Електричні схеми заміщення

Звичайно індуктивна складова конденсатора мала, та нею можна знехтувати, схема заміщення на низьких частотах подана на рис. 1.12 в).

1.4. Джерела електричної енергії

В еквівалентних схемах джерела електричної енергії діляться на незалежні, до яких належать джерела струму та напруги, та залежні, тобто керовані.

1.4.1. Джерело напруги

Джерелом напруги називається ідеалізований елемент електричної енергії, напруга на зовнішніх затискачах якого не залежить від струму, який через нього протікає (рис. 1.13).

Джерело напруги позначають малою літерою e для змінного струму та великою літерою E для постійного струму. Тоді для кола, (рис. 1.13) $u_{ab} = E$. Для постійного струму додатний напрям напруги E та струму I співпадають. Внутрішній опір такого джерела дорівнює нулю: $r_e = 0$.

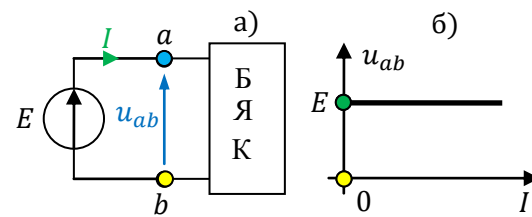


Рисунок 1.13 – Джерело напруги (а) та його ВАХ (б)

На рис. 1.13 а представлена еквівалентна схема ідеального джерела, а на рис. 1.13 б залежність струму від напруги на цьому джерелі. Якщо затискачі ідеального джерела напруги замкнути «накоротко», то струм теоретично, повинен бути нескінченно великим, тому таке джерело можна розглядати як джерело нескінченної потужності. В дійсності при замиканні затискачів реального джерела електричної енергії (гальванічного елементу, акумулятора, генератора) струм може мати тільки скінченне значення, оскільки ЕРС джерела зрівнюється напругою від струму всередині джерела.

Джерело напруги скінченної потужності зображується у вигляді джерела напруги із послідовно ввімкненим опором, який характеризує внутрішні параметри джерела та обмежує потужність, що віддається у зовнішнє електричне коло (рис. 1.14 а).

За другим законом Кірхгофа (рис. 1.14 а)

$$u_{ab} = E - u_{re} = E - IR_H.$$

Графік залежності напруги $u_{ab}(I)$ подані на рис. 1.14 б. Ця залежність називається воль-амперною характеристикою.

Навантажувальна характеристика (рис. 1.14 в)

$$u_{ab} = I \cdot R_H = \frac{ER_H}{R_H + r_E}.$$

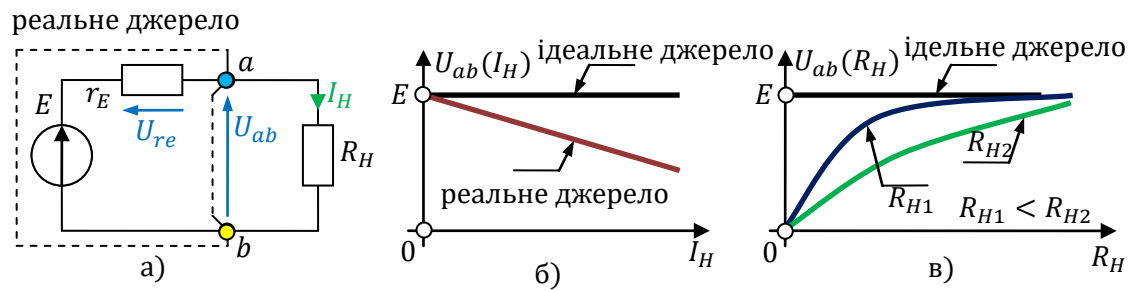


Рисунок 1.14 – Схема реального джерела напруги та його характеристики

1.4.2. Джерело струму

Джерелом струму називається ідеалізований елемент електричної енергії, струм якого не залежить від напруги, що прикладена до зовнішніх полюсів джерела (рис. 1.15).

Джерело струму позначають малою літерою j для змінного струму та великою літерою J для постійного струму. Тоді для кола (рис. 1.15) буде виконуватися рівність $I = J$. Внутрішній опір такого джерела становить $r_j = \infty$. На рис. 1.15 б залежність напруги від струму на цьому джерелі.

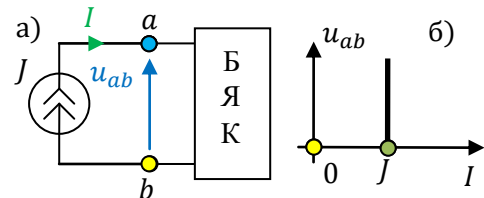


Рисунок 1.15 – Джерело струму (а) та його ВАХ (б)

Еквівалентна схема заміщення реального джерела струму (рис. 1.16 а) є паралельне ввімкнення ідеального джерела J та його внутрішнього опору r_j . Струм на затискачах реального джерела струму (рис. 1.16 а) визначається

$$I_H = J - I_i = J - \frac{u_{ab}}{r_i} = J - g_i u_{ab}.$$

Графік залежності струму $I_H(U_{ab})$ поданий на рис. 1.16 б.

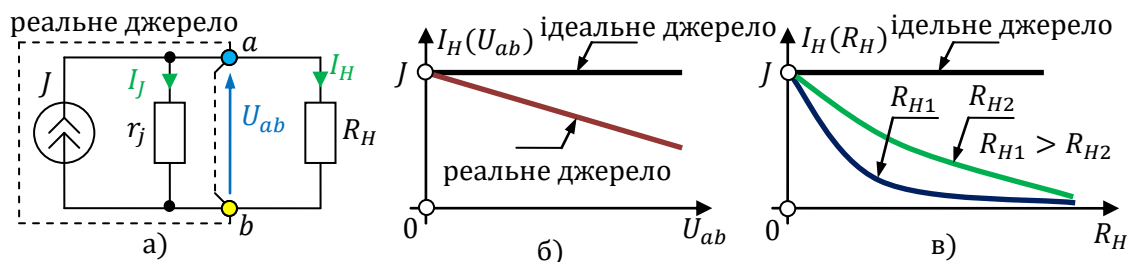


Рисунок 1.16 – Схема реального джерела струму та його характеристики

Визначимо струм у навантаженні через опір навантаження (рис. 1.16 в)

$$I_H = \frac{u_{ab}}{R} = J \frac{r_i R}{R + r_i} \cdot \frac{1}{R} = \frac{J r_i}{R + r_i}.$$

Графік залежності струму $I_H(R_H)$ поданий на рис. 1.16 в.

Потужність джерел визначається $p_E = E \cdot I$; $p_j = J \cdot u_{ab}$.

1.4.3. Керовані джерела

Для моделювання роботи електронних приладів (транзисторів, мікросхем) широко використовують керовані джерела струму та напруги. Вони зображуються аналогічно некерованим, але їх величина залежить від струму або напруги на деякій іншій ділянці кола.

Кероване джерело – це ідеалізований елемент електричної енергії, параметри якого є визначеною функцією струму чи напруги деякої ділянки кола.

Існує чотири типи керованих джерел (рис. 1.17):

- джерело напруги, кероване напругою (ДНКН): напруга $E = \mu \cdot u_{ab}$ цього джерела є визначеною функцією керуючої напруги u_{ab} , де μ – це коефіцієнт пропорційності (рис. 1.17 а);
- джерело напруги кероване струмом (ДНКС): напруга $E = \gamma \cdot I$ цього джерела є визначеною функцією керуючого струму i , γ – це коефіцієнт пропорційності (рис. 1.17 б);
- джерело струму, кероване напругою (ДСКН): струм $J = S \cdot u_{ab}$ цього джерела є визначеною функцією керуючої напруги u_{ab} , S – це коефіцієнт пропорційності (крутизна, рис. 1.17 в);
- джерело струму, кероване струмом (ДСКС): струм $J = \alpha \cdot I$ цього джерела є визначеною функцією керуючого струму i , де α – це коефіцієнт пропорційності (рис. 1.17 г).

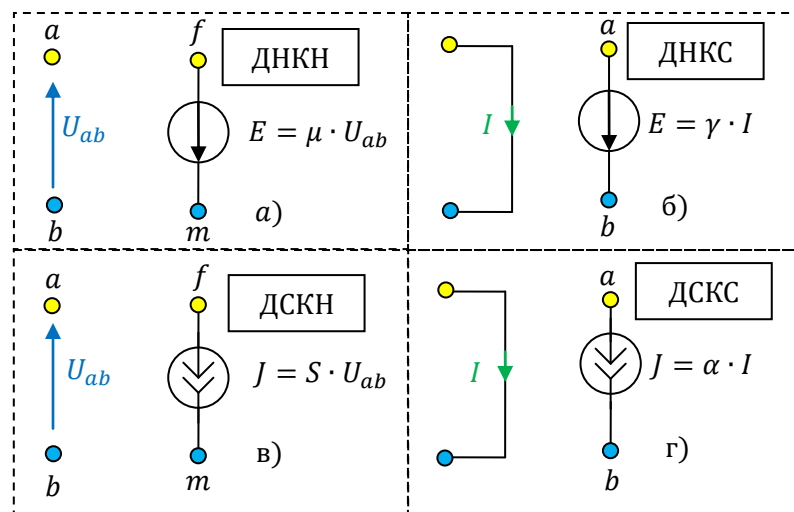


Рисунок 1.17 – Види керованих джерел

Від джерела струму до джерела напруги і навпаки можна перейти за допомогою еквівалентних перетворень, що будуть розглянуті нижче.

1.5. Основні закони електричних кіл

До основних законів електричних кіл відносять закони Ома та Кірхгофа.

Закон Ома

Сила струму прямо пропорційна напрузі і обернено пропорційна опору (рис. 1.18 а)

$$I = \frac{U_{ab}}{R} = U_{ab} \cdot g.$$

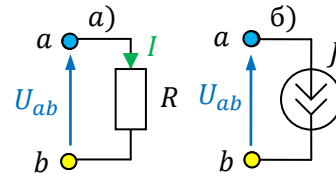


Рисунок 1.18 – Закон Ома

Звідси випливає, що джерело струму, що керується напругою на самому собі є опір (рис. 1.18 б)

$$J = \frac{U_{ab}}{R} = gU_{ab}.$$

Перший закон Кірхгофа витікає із принципу неперервності електричного заряду та формуються таким чином

Алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю.

Іншими словами одержуємо, що сума струмів, що втікає у вузол дорівнює сумі струмів, що витікає із вузла. Алгебраїчна означає, що необхідно врахувати напрям протікання струму. Кількість рівнянь для схеми менша кількості вузлів на одиницю.

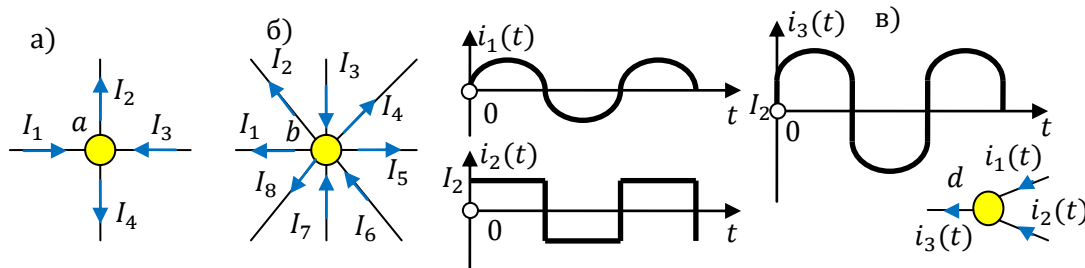


Рисунок 1.19 – Демонстрація першого закону Кірхгофа

Розглянемо приклади, що зображені на рис. 1.19.

Для вузла а (рис. 1.19 а) перший закон Кірхгофа

$$I_1 + I_3 - I_2 - I_4 = 0;$$

$$\text{або } I_2 + I_4 - I_1 - I_3 = 0.$$

Для вузла б (рис. 1.19 б) перший закон Кірхгофа

$$-I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 + I_6 + I_7 - I_8 = 0.$$

Для вузла d (рис. 1.19 в) перший закон Кірхгофа

$$i_1(t) + i_2(t) = i_3(t).$$

Другий закон Кірхгофа є наслідком закону збереження енергії та встановлює баланс напруги в контурах.

Алгебраїчна сума напруг по контуру обходу будь-якої ділянки кола дорівнює нулю.

Другий закон Кірхгофа можна сформулювати ще таким чином

Закон балансу потужностей.

Запишемо закон збереження енергії для джерел та споживачів, у випадку коли є кола постійного струму

$$\sum W_E + \sum W_J = \sum W_R;$$

$$\sum EIt + \sum UJt = \sum I^2 Rt.$$

Вирази скоротимо на час t

$$\sum EI + \sum UJ = \sum I^2 R.$$

У результаті одержимо

$$\sum P_E + \sum P_J = \sum P_R.$$

Із закону збереження енергії випливає, що для будь-якого електричного кола виконується **закон балансу потужностей**:

Алгебраїчна сума потужностей джерел дорівнює сумі потужностей споживачів.

Потужності на елементах кола

$$P_R = I^2 R = \frac{I^2}{g} = \frac{U^2}{R} = U^2 g; \quad P_E = E \cdot I_E; \quad P_J = J \cdot U_J.$$

Нижче наведені приклади розрахунку кіл за законами Кірхгофа.

Приклад 1.1. У колі (рис. 1.23) знайти всі струми та напруги. Перевірити виконання закону балансу потужностей. Зробити висновок про режими роботи кожного із джерел. Числові значення елементів наведені на схемі: опори у кОм, струми – мА, напруги – В.

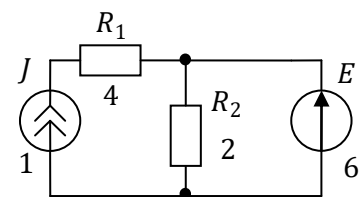


Рисунок 1.23 – Схема

Розв'язання

За законом Ома (рис. 1.24)

$$I_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ мА.}$$

За першим законом Кірхгофа (вузол А, рис. 1.24)

$$I_E = I_2 - J = 3 - 1 = 2 \text{ мА.}$$

За законом Ома:

$$U_1 = J R_1 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ В;}$$

$$U_2 = I_2 R_2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ В.}$$

За другим законом Кірхгофа (рис. 1.24)

$$U_J = U_1 + U_2 = 4 + 6 = 10 \text{ В.}$$

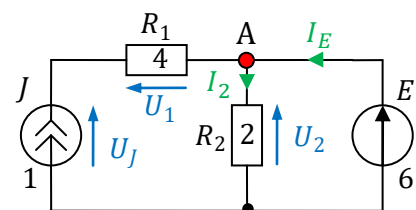


Рисунок 1.24 – Схема із напрямками U та I

Перевіримо виконання закону балансу потужностей (рис. 1.24).

Потужність споживачів

$$P_{\text{СП}} = J^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 1^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 2 = 4 + 18 = 22 \text{ мВт.}$$

Потужність джерел (рис. 1.24)

$$P_{\text{ДЖ}} = P_E + P_J = E \cdot I_E + J \cdot U_J = 6 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 12 + 10 = 22 \text{ мВт.}$$

Оскільки $P_{\text{СП}} = P_{\text{ДЖ}} = 22 \text{ мВт}$, то закон балансу потужностей виконується.

Визначимо режими роботи джерел.

Оскільки $P_E = 12 \text{ мВт} > 0$ та $P_J = 10 \text{ мВт} > 0$, то джерело напруги E та джерело струму J віддають енергію у коло.

Відповідь: $I_2 = 3 \text{ мА}$, $I_E = 2 \text{ мА}$, $U_1 = 4 \text{ В}$, $U_2 = 6 \text{ В}$, $u_J = 10 \text{ В}$, $P = 22 \text{ мВт}$.

Приклад 1.2. У колі (рис. 1.25) знайти струм I . Джерело $E_2 = \mu U_{ab}$ є керованим. Числові значення елементів наведені на схемі: опори у кОм, струми – мА, напруги – В.

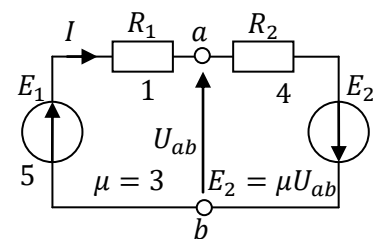


Рисунок 1.25 – Схема

Розв'язання

За другим законом Кірхгофа (рис. 1.26)

$$U_{ab} = U_2 - E_2 = IR_2 - \mu U_{ab}.$$

Спростимо вираз

$$U_{ab} + \mu U_{ab} = IR_2.$$

Визначимо напругу

$$U_{ab} = \frac{IR_2}{1 + \mu}.$$

За другим законом Кірхгофа

$$E_1 + E_2 = U_1 + U_2 = I(R_1 + R_2).$$

Підставимо у вираз

$$E_1 + \mu U_{ab} = I(R_1 + R_2).$$

Підставимо вираз напруги

$$E_1 + \frac{\mu IR_2}{1 + \mu} = I(R_1 + R_2).$$

Спростимо вираз

$$E_1 = I \left(R_1 + R_2 - \frac{\mu R_2}{1 + \mu} \right) = I \left(R_1 + \frac{R_2}{1 + \mu} \right).$$

Звідси визначимо струм

$$I = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2}{1 + \mu}} = \frac{5}{1 + \frac{4}{1 + 3}} = 2.5 \text{ мА.}$$

Відповідь: $I = 2.5 \text{ мА}$.

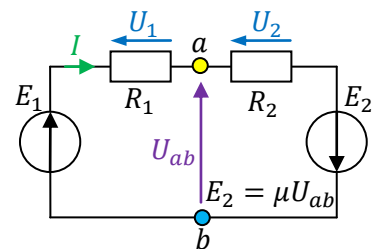


Рисунок 1.26 – Схема із напрямками U та I

1.6. Метод пропорційних величин

Метод пропорційних величин переважно використовується для розрахунку розгалужених лінійних кіл з одним джерелом енергії.

Якщо у колі лише одне джерело (E або J), то напруга/струм будь-якої гілки пропорційний значенню напруги або струму цього джерела (рис. 1.27).

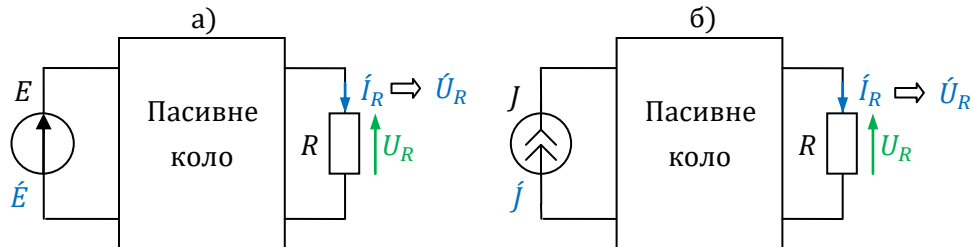


Рисунок 1.27 – Схеми до методу пропорційних величин

Задаючись струмом (напругою) у найбільш віддаленій від джерела гілці кола, за законами Ома та Кірхгофа розраховуємо коло, знаходимо напругу на вході $\hat{E}$ (струм на вході $\hat{J}$) джерела.

У колі (рис. 1.27) задавшись струмом в опорі R визначаємо напругу за законом Ома

$$\hat{U}_R = \hat{I}_R \cdot R.$$

Визначаємо коефіцієнти пропорційності

а) для схеми а (рис. 1.27 а)

$$k_1 = \frac{E}{\hat{E}};$$

б) для схеми б (рис. 1.27 б)

$$k_2 = \frac{J}{\hat{J}}.$$

Тоді напруга на виході визначається виразом

а) для схеми а (рис. 1.27 а)

$$U_R = k_1 \cdot \hat{U}_R;$$

б) для схеми б (рис. 1.27 б)

$$U_R = k_2 \cdot \hat{U}_R.$$

Приклад 1.3. У колі (рис. 1.28) визначити методом пропорційних величин напругу U_4 . Числові значення елементів кола подані на схемі: опір у кОм, напруга у В, струм у мА.

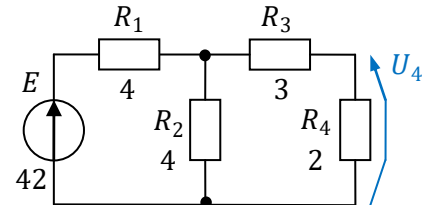


Рисунок 1.28 – Схема

Розв'язання

Задамося значенням струму через опір R_4 в кінці схеми $\dot{I}_3 = 1$ мА.

Визначимо напруги кола (рис. 1.29) за законом Ома

$$\dot{U}_4 = \dot{I}_3 \cdot R_4 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ В};$$

$$\dot{U}_3 = \dot{I}_3 \cdot R_3 = 1 \cdot 3 = 3 \text{ В}.$$

За другим законом Кірхгофа (рис. 1.29)

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_3 + \dot{U}_4 = 2 + 3 = 5 \text{ В}.$$

За законом Ома

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{R_2} = \frac{5}{4} = 1.25 \text{ мА}.$$

За першим законом Кірхгофа (рис. 1.29, вузол а)

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_4 = 1.25 + 1 = 2.25 \text{ мА}.$$

За законом Ома

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 R_1 = 2.25 \cdot 4 = 9 \text{ В}.$$

За другим законом Кірхгофа

$$\dot{E} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 9 + 5 = 14 \text{ В}.$$

Визначимо коефіцієнт пропорційності

$$k = \frac{E}{\dot{E}} = \frac{42}{14} = 3.$$

Визначимо напругу на виході

$$U_4 = \dot{U}_4 \cdot k = 2 \cdot 3 = 6 \text{ В}.$$

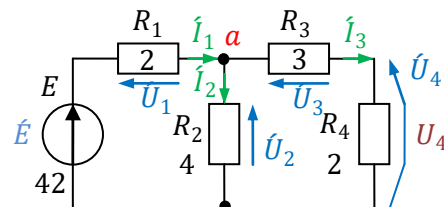


Рисунок 1.29 – Схема

Відповідь: $U_4 = 6$ В.

1.7. Дільники струму та напруги

На рис. 1.30 зображена схема дільника струму.

При паралельному з'єднанні

$$U = U_1 = U_2.$$

Загальна напруга у колі (рис. 1.30)

$$U = I \cdot R_{12} = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Напруги на опорах

$$U_1 = I_1 \cdot R_1; \quad U_2 = I_2 \cdot R_2.$$

Для визначення струмів I_1, I_2 прирівняємо відповідно $U = U_1, U = U_2$

$$I_1 \cdot R_1 = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 \cdot R_2 = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Звідси визначимо струми I_1, I_2

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Коефіцієнт передачі за струмом – це відношення струму на виході до струму на вході

$$K_{I1} = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad K_{I2} = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

На рис. 1.31 зображена схема дільника напруги.

Струм у схемі дільника напруги (рис. 1.31)

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

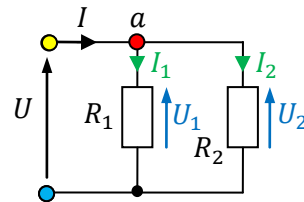


Рисунок 1.30 – Дільник струму

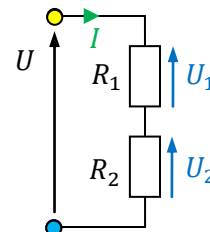


Рисунок 1.31 – Дільник напруги

Прирівняємо струми, оскільки струм за послідовного ввімкнення однаковий

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U}{R_1 + R_2}; \quad \frac{U_2}{R_2} = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Звідси визначимо співвідношення між напругами

$$U_1 = \frac{UR_1}{R_1 + R_2}; \quad U_2 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою – це відношення напруги на виході до напруги на вході

$$K_{U1} = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad K_{U2} = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Приклад 1.4. У колі (рис. 1.32) знайти значення всіх опорів. Відомо, що вхідний опір кола складає $R_{\text{ВХ}} = R_0 = 40 \text{ кОм}$, а відношення напруг $U_2/E = 0.8$.

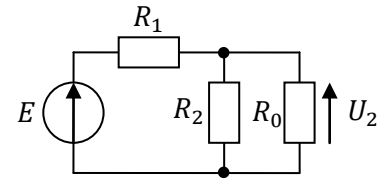


Рисунок 1.32 – Схема

Розв'язання

Еквівалентний опір кола (рис. 1.15 а)

$$R_3 = \frac{R_0 R_2}{R_0 + R_2}.$$

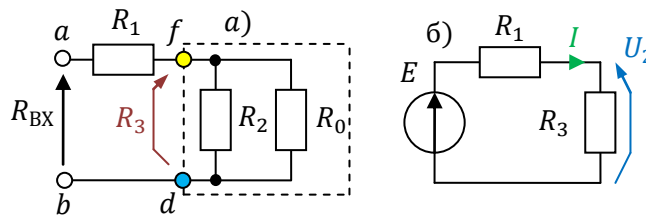


Рисунок 1.15 – Еквівалентні схеми

Вхідний опір кола (рис. 1.15 а)

$$R_{\text{ВХ}} = R_1 + R_3 = R_0 = 40 \text{ кОм}.$$

Нехай у колі протікає струм I , тоді

$$I \cdot (R_1 + R_3) = E; \quad I \cdot R_3 = U_2.$$

Розділимо друге рівняння на перше

$$\frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_3}{R_0} = \frac{R_3}{40} = \frac{U_2}{E} = 0.8.$$

Звідси визначимо номінал опора

$$R_3 = R_0 \cdot \frac{U_2}{E} = 0.8 \cdot 40 = 32 \text{ кОм}.$$

Тоді одержуємо $R_1 + R_3 = R_{\text{ВХ}} = 40$, звідси визначимо $R_1 = 40 - 32 = 8 \text{ кОм}$.

Підставимо числові значення

$$R_3 = \frac{R_0 R_2}{R_0 + R_2} = \frac{40 R_2}{40 + R_2} = 32.$$

Звідси визначимо

$$32 R_2 + 1280 = 40 R_2, \\ R_2 = 1280/8 = 160 \text{ кОм}.$$

Перевірка: визначимо вхідний опір кола

$$R_{\text{ВХ}} = R_1 + \frac{R_0 R_2}{R_0 + R_2} = 8 + \frac{40 \cdot 160}{40 + 160} = 8 + 32 = 40 \text{ кОм}.$$

Відповідь: $R_1 = 8 \text{ кОм}$, $R_2 = 160 \text{ кОм}$.

1.8. Еквівалентні перетворення електричних кіл

На підставі законів Ома та Кірхгофа можна одержати еквівалентні перетворення.

Еквівалентні перетворення – це будь-яке перетворення ділянки кола, що не призводить до зміни струмів та напруг у не перетвореній ділянці кола.

1.8.1. Еквівалентні перетворення послідовно з'єднаних елементів

Послідовне з'єднання активних та пасивних елементів подане на рис. 1.32.

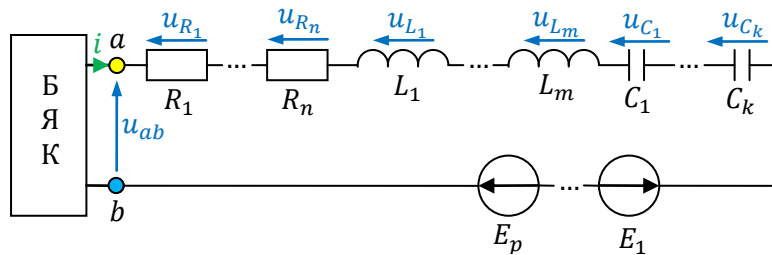


Рисунок 1.32 – Схема послідовно з'єднаних елементів

Другий закон Кірхгофа для кола (рис. 1.32)

$$\begin{aligned}
 u_{ab} &= u_{R1} + \dots + u_{Rn} + u_{L1} + \dots + u_{Lm} + u_{C1} + \dots + u_{Ck} + E_1 - \dots - E_p = \\
 &= i \cdot R_1 + \dots + i \cdot R_n + L_1 \frac{di}{dt} + \dots + L_m \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_1} \int idt + \dots + \frac{1}{C_k} \int idt + \sum_{j=1}^p E_j = \\
 &= i \cdot (R_1 + \dots + R_n) + (L_1 + \dots + L_m) \cdot \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_k} \right) \int idt + \sum_{j=1}^p E_j = \\
 &= i \cdot R_E + L_E \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_E} \int idt + E_E.
 \end{aligned}$$

У результаті отримаємо еквівалентну схему (рис. 1.33).

Виділені у дужках суми вважають за один еквівалентний елемент:

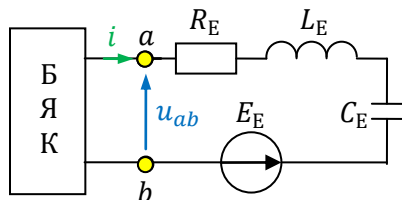
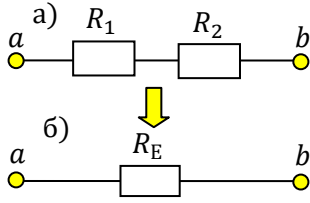


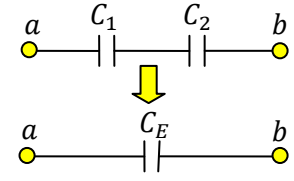
Рисунок 1.33 – Схема

$$\begin{aligned}
 R_E &= R_1 + \dots + R_n, \\
 L_E &= L_1 + \dots + L_m, \\
 \frac{1}{C_E} &= \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_k}; \\
 E_E &= E_1 + \dots - E_p.
 \end{aligned}$$

Розглянемо детально випадки

 Рисунок 1.34 – Еквівалентне з'єднання двох опорів	Визначимо еквівалентний опір (рис. 1.34 б) $R_E = R_1 + R_2.$ Визначимо через провідності (рис. 1.34 б) $\frac{1}{g_E} = \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} = \frac{g_2 + g_1}{g_1 \cdot g_2}.$ Звідси визначимо еквівалентну провідність послідовного з'єднання (рис. 1.33 б) $g_E = \frac{g_1 \cdot g_2}{g_1 + g_2}.$

Розглянемо послідовне з'єднання двох ємностей (рис. 1.35а).

 Рисунок 1.35 – Еквівалентне з'єднання двох ємностей	Визначимо еквівалентну ємність (рис. 1.35 б) $\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 \cdot C_2}.$ Звідси визначимо еквівалентну послідовного з'єднання двох ємностей (рис. 1.34 б) $C_E = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$

Розглянемо послідовне з'єднання двох джерел напруги (рис. 1.36 а) та паралельне з'єднання двох джерел напруги (рис. 1.36 б).

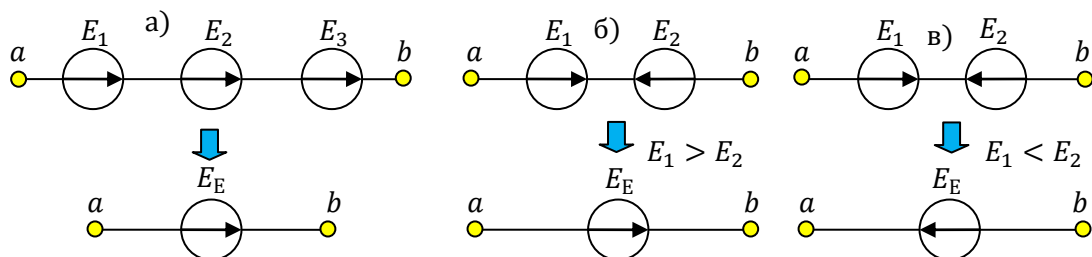


Рисунок 1.36 – Еквівалентне з'єднання джерел напруги

Визначимо величину еквівалентного джерела напруги при паралельному з'єднанні джерел напруги

а) джерела напруги мають однаковий напрям

$$E_E = E_1 + E_2 + E_3;$$

б) джерела напруги мають різний напрям ($E_1 > E_2$)

$$E_E = E_1 - E_2;$$

в) джерела напруги мають різний напрям ($E_1 < E_2$)

$$E_E = E_2 - E_1.$$

1.8.2. Еквівалентні перетворення паралельно з'єднаних елементів

Паралельне з'єднання активних та пасивних елементів (рис. 1.37).

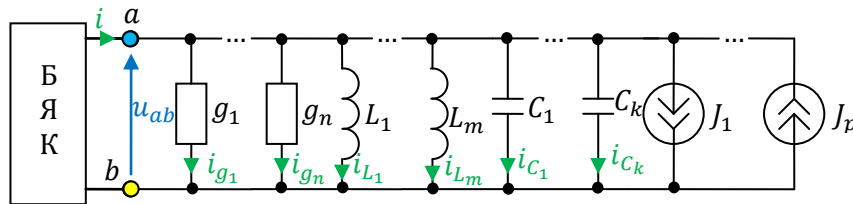


Рисунок 1.37 – Схема паралельного з'єднання елементів

Запишемо перший закон Кірхгофа (рис. 1.37)

$$\begin{aligned}
 i &= i_{g1} + \dots + i_{gn} + i_{L1} + \dots + i_{Lm} + i_{C1} + \dots + i_{Ck} + J_1 + \dots - J_p = \\
 &= \frac{u_{ab}}{R_1} + \dots + \frac{u_{ab}}{R_n} + \frac{1}{L_1} \int u_L dt + \dots + \frac{1}{L_m} \int u_L dt + C_1 \frac{du_C}{dt} + \dots + C_k \frac{du_C}{dt} + \\
 &\quad + J_1 + \dots - J_p = u_{ab}(g_1 + \dots + g_n) + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{L_1} + \dots + \frac{1}{L_m} \right) \int u_L dt + (C_1 + \dots + C_k) \frac{du_C}{dt} + J_1 + \dots - J_p = \\
 &= u_{ab}g_E + \frac{1}{L_E} \int u_L dt + C_E \frac{du_C}{dt} + J_E.
 \end{aligned}$$

У результаті отримаємо еквівалентну схему (рис. 1.38).

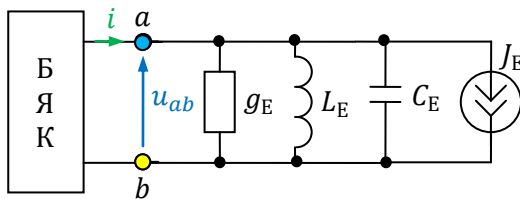


Рисунок 1.38 – Еквівалентна схема

Виділені у дужках суми вважають за один еквівалентний елемент:

$$\begin{aligned}
 g_E &= g_1 + \dots + g_n, \\
 C_E &= C_1 + \dots + C_m, \\
 \frac{1}{L_E} &= \frac{1}{L_1} + \dots + \frac{1}{L_k}, \\
 J_E &= J_1 + \dots - J_p.
 \end{aligned}$$

Розглянемо детально випадки

Розглянемо паралельне з'єднання двох опорів (рис. 1.39 а).

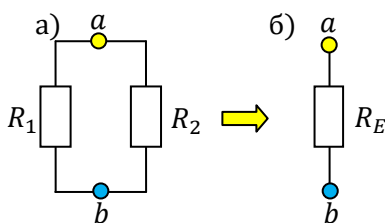


Рисунок 1.39 – Еквівалентні опори

Визначимо еквівалентну провідність (рис. 1.39 б)

$$g_E = g_1 + g_2.$$

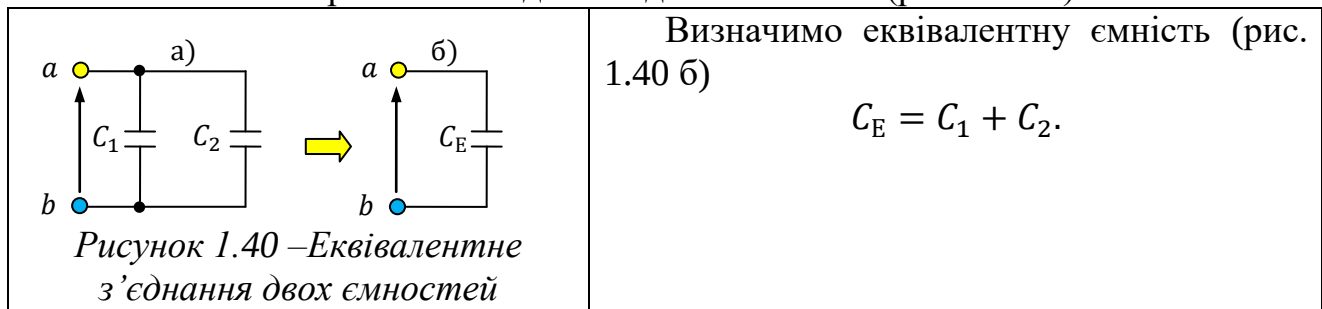
Визначимо через провідності (рис. 1.39 б)

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}.$$

Звідси визначимо еквівалентний опір (рис. 1.39 б)

$$R_E = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Розглянемо паралельне з'єднання двох ємностей (рис. 1.40 а).



Розглянемо паралельне з'єднання джерел струму (рис. 1.41).

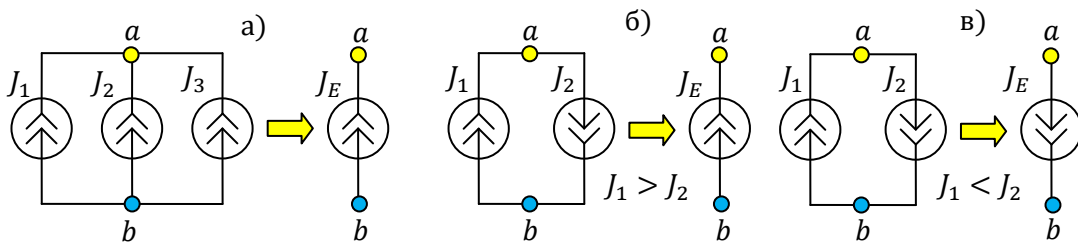


Рисунок 1.41 – Схема паралельного з'єднання ємностей

Визначимо величину еквівалентного джерела струму при паралельному з'єднанні джерел струмом (рис. 1.41)

а) джерела струму мають однаковий напрям (рис. 1.41 а)

$$J_E = J_1 + J_2 + J_3;$$

б) джерела струму мають різний напрям ($J_1 > J_2$), рис. 1.41 б

$$J_E = J_1 - J_2;$$

в) джерела струму мають різний напрям ($J_1 < J_2$), рис. 1.41 в

$$J_E = J_2 - J_1.$$

Некоректні способи з'єднання джерел

Декілька джерел напруги включати паралельно не можна (рис. 1.42).

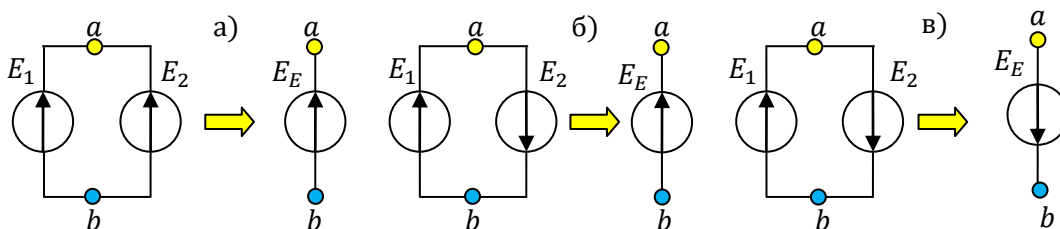


Рисунок 1.42 – Некоректне з'єднання джерел напруги

Декілька джерел струму включати послідовно не можна (рис. 1.43).

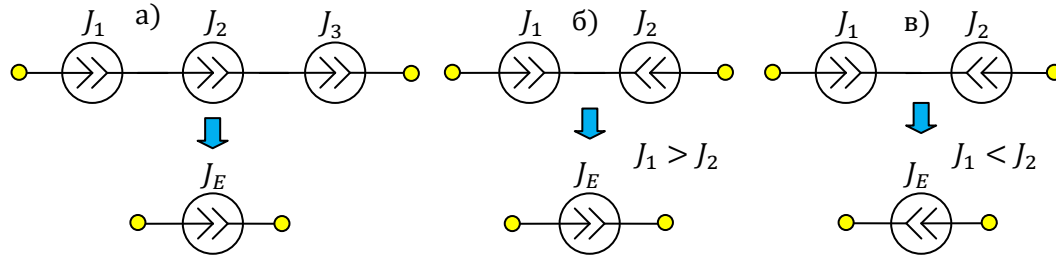


Рисунок 1.43 – Некоректне з'єднання джерел струму

1.8.3. Еквівалентні перетворення зірка-трикутник

Зірка – це з'єднання трьох опорів, яке має вигляд трипроменевої зірки (рис. 1.44 а), а сполучення трьох опорів, які утворюють сторони трикутника, називаються трикутником опорів (рис. 1.44 б).

Опори з'єднані зіркою визначаються через опори трикутника такими співвідношеннями

$$R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Опори з'єднані трикутником визначаються через опори, з'єднані зіркою такими співвідношеннями

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1},$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}.$$

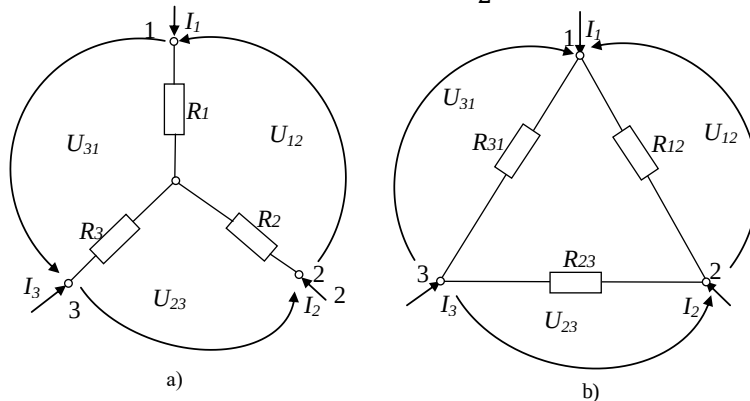


Рисунок 1.44 – Схема з'єднання опорів у формі зірки (а) та трикутника (б)

Доведемо це використовуючи метод контурних струмів та вузлових напруг

Для МКС для кола (рис. 1.45 б)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Для МВН для кола (рис. 1.45 а)

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 \\ -g_2 & g_2 + g_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Порівнявши дві системи запишемо

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} = [G]^{-1} = \frac{1}{\Delta_g} \begin{bmatrix} g_3 + g_2 & g_2 \\ g_2 & g_1 + g_3 \end{bmatrix}.$$

Визначник

$$\Delta_g = \begin{vmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 \\ -g_2 & g_2 + g_3 \end{vmatrix} = (g_1 + g_2) \cdot (g_2 + g_3) - g_2^2 = g_1 g_2 + g_2 g_3 + g_1 g_3.$$

Звідси визначимо

$$R_3 = \frac{g_2}{g_1 g_2 + g_2 g_3 + g_1 g_3} = \frac{\frac{1}{R_{12}}}{\frac{1}{R_{13}} \cdot \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{12}} \cdot \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{13}} \cdot \frac{1}{R_{23}}} = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{13} + R_{12} + R_{23}}.$$

З іншого боку

$$\frac{1}{g_3} = \frac{g_2}{g_1 g_2 + g_2 g_3 + g_1 g_3}.$$

Перевіримо дріб

$$g_3 = \frac{g_1 g_2 + g_2 g_3 + g_1 g_3}{g_2} = g_1 + g_3 + \frac{g_1 g_3}{g_2}.$$

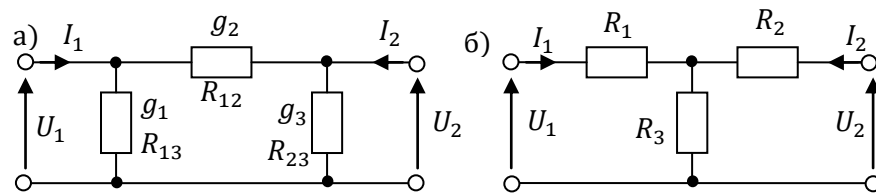


Рисунок 1.45 – Еквівалентні схеми

1.8.4. Еквівалентні перетворення джерел електричної енергії

Еквівалентне перетворення джерела напруги у джерело струму

Другий закон Кірхгофа (рис. 1.46 а)

$$E = u_R + u_{ab}.$$

Розділимо праву та ліву частини на R

$$\frac{E}{R} = \frac{u_R}{R} + \frac{u_{ab}}{R}.$$

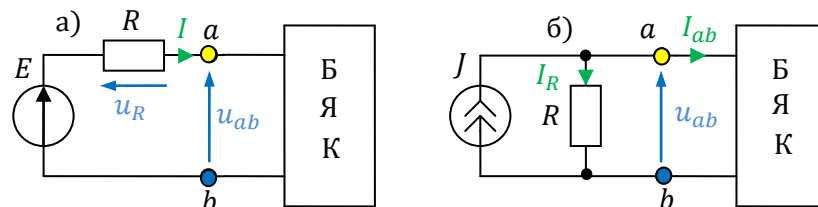


Рисунок 1.46 – Схеми перетворення джерел

У результаті одержимо перший закон Кірхгофа

$$J = I_R + I_{ab}.$$

Зобразимо схему, що відповідає останньому рівнянню (рис. 1.46 б).

Тут слід пам'ятати, що по опорі R протікають різні струми та потужності джерел E та J будуть різні.

Таким чином, одержимо параметри елементів схеми заміщення (рис. 1.47):

а) перетворення джерела напруги у джерело струму (рис. 1.47 а)

$$J = \frac{E}{R};$$

б) перетворення джерела струму у джерело напруги (рис. 1.47 б)

$$E = J \cdot R.$$

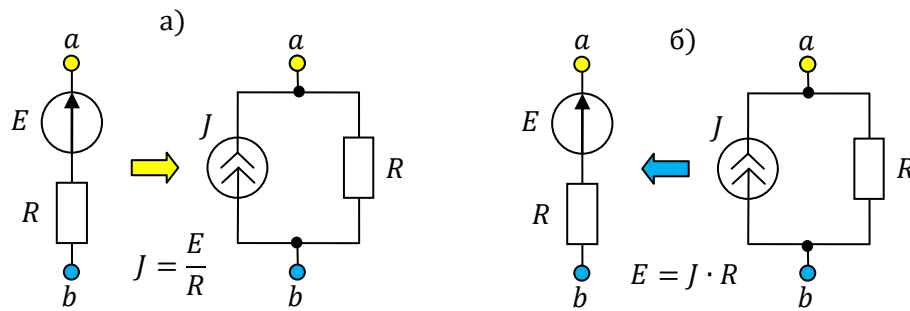


Рисунок 1.47 – Еквівалентні перетворення джерел

Винесення джерела напруги за вузол

Винесення джерела напруги за вузол веде до зменшення кількості вузлів у схемі заміщення кола.

Джерело напруги може бути перенесене із будь-якої гілки схеми у всі інші гілки, приєднані до одного з її вузлів між якими ввімкнене це джерело, без зміни напрямів джерела у схемі.

Для кола, що зображене на рис. 1.48 а винесемо джерело напруги E за вузол a . У результаті одержимо схему, що зображене на рис. 1.48 б.

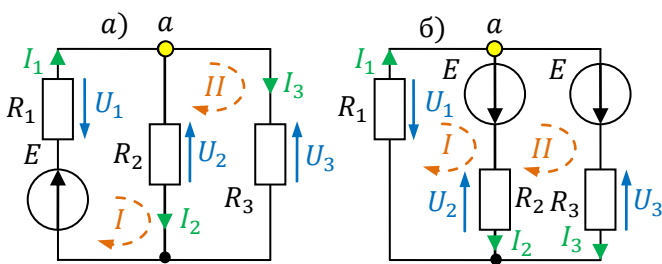


Рисунок 1.48 – Схеми із винесення джерела напруги за вузол

Для кола (рис. 1.48 а) запишемо систему на основі другого закону Кірхгофа

$$\begin{cases} E = U_1 + U_2; \\ 0 = -U_2 + U_3. \end{cases}$$

Для кола (рис. 1.48 б) запишемо систему на основі другого закону Кірхгофа

$$\begin{cases} E = U_1 + U_2; \\ E - E = -U_2 + U_3. \end{cases}$$

Рознесення джерела струму

Перенесення джерела струму до контура веде до зменшення кількості контурів у схемі заміщення кола.

Джерело струму може бути рознесене на кілька джерел струму, увімкненими паралельно всім гілкам, які складають контур.

Із еквівалентності систем рівнянь витікає еквівалентність схем (рис. 1.49).

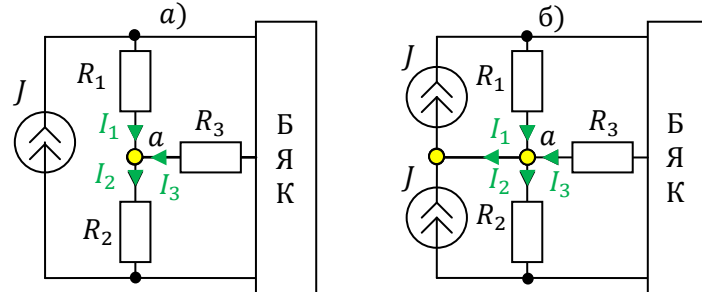


Рисунок 1.49 – Схеми рознесення джерел струму

Для схеми (рис. 1.49 а) напишемо перший закон Кірхгофа для вузла а

$$I_2 = I_1 + I_3.$$

Для схеми (рис. 1.49 б) напишемо перший закон Кірхгофа для вузла а

$$I_2 = I_1 + I_3 + J - J = I_1 + I_3.$$

Як бачимо із одержаного результату перший закон Кірхгофа не змінюється, а отже наведені схеми є еквівалентні.

Приклад 1.4. У колі (рис. 1.50) визначити яку потужність віддає (споживає) джерело напруги E_2 . Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми в мА, напруги в В.

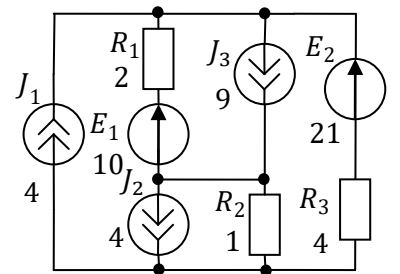


Рисунок 1.50 – Схема

Розв'язання

Рознесемо джерело струму J_1 на дві гілки за допомогою еквівалентного перетворення джерела струму (рис. 1.51 а).

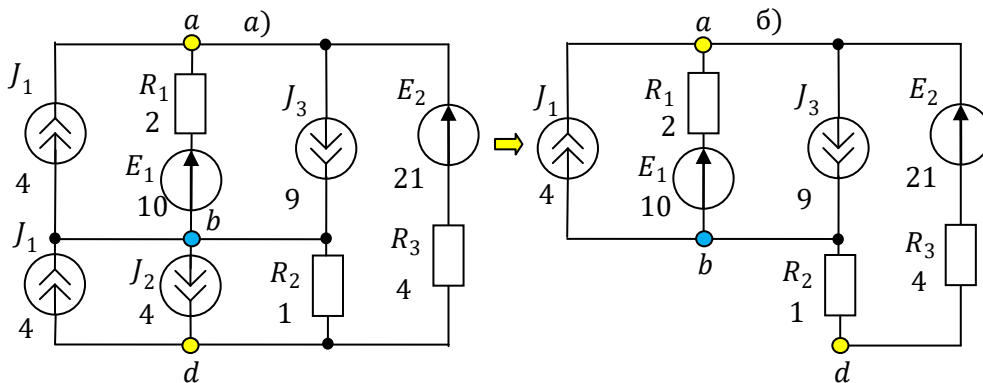


Рисунок 1.51 – Еквівалентні перетворення джерел струму

Джерела струму J_1 та J_2 мають однакові значення, але протилежні напрямки, тому при додаванні вони компенсують один одного.

У колі (рис. 1.52 а) перетворимо джерело напруги E_1 у джерело струму J_{11} (рис. 1.52 б)

$$J_{11} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{10}{2} = 5 \text{ мА.}$$

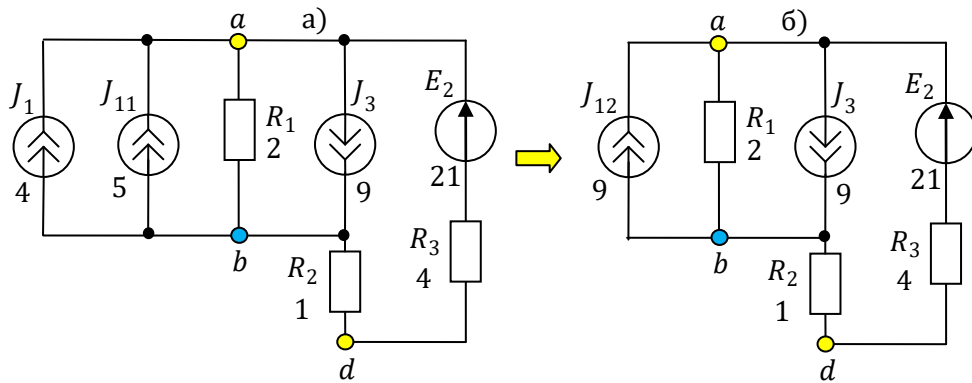


Рисунок 1.52 – Еквівалентні перетворення джерел струму

Еквівалентне значення джерела (рис. 1.52 б)

$$J_{12} = J_1 + J_{11} = 4 + 5 = 9 \text{ мА.}$$

Джерела струму J_{12} та J_3 мають одне значення, але протилежно направлені і з'єднані паралельно, тому вони компенсують один одного (рис. 1.52 б).

Еквівалентний опір кола (1.53 а)

$$R_E = R_1 + R_2 + R_3 = 2 + 1 + 4 = 7 \text{ кОм.}$$

За законом Ома (рис. 1.53 б)

$$I_{E2} = \frac{E_2}{R_E} = \frac{21}{7} = 3 \text{ мА.}$$

Потужність джерела

$$P_{E2} = E_2 \cdot I_{E2} = 21 \cdot 3 = 63 \text{ мВт.}$$

Оскільки $P_{E2} = 63 \text{ мВт} > 0$, то джерело напруги E_2 віддає енергію.

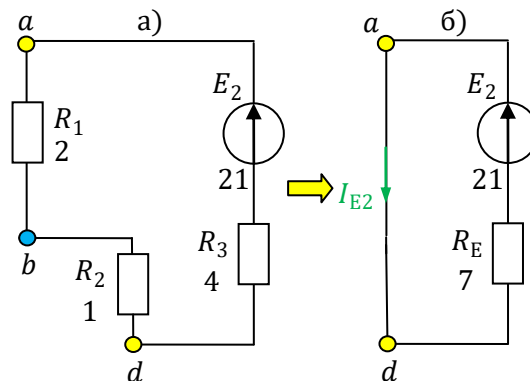


Рисунок 1.53 – Еквівалентні схеми

Відповідь: $P_{E2} = 63 \text{ мВт.}$

1.9. Основні методи розрахунку електричних кіл

До основних методів розрахунку електричних кіл відносять: метод контурних струмів (МКС), метод вузлових напруг (МВН) та принцип суперпозиції.

1.9.1. Метод контурних струмів

Метод контурних струмів (МКС) дозволяє відразу одержати систему рівнянь для визначення всіх струмів відносно струмів схеми (рис. 1.54 а) відносно контурних струмів. Для цього обираємо систему незалежних контурів та кожному із них задаємо додатний напрям обходу контуру. Для кожного із цих контурів записуємо другий закон Кірхгофа. Напруги на опорах виражаємо за законом Ома, як $u_k = I_k \cdot R_k$, а струм у кожному опорі на основі першого закону Кірхгофа виражаємо через струми у головних гілках дерева.

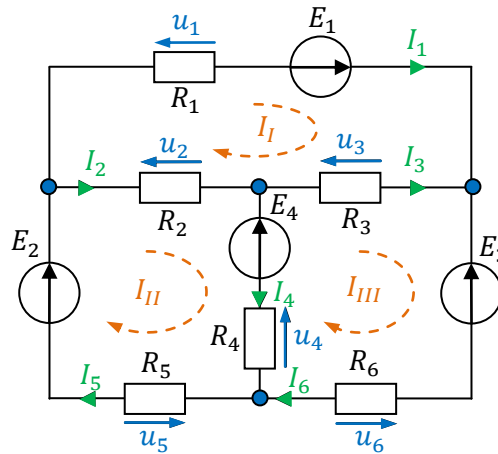


Рисунок 1.54 – Схема до методу контурних струмів

Для кола (рис. 1.54) напишемо на основі другого закону Кірхгофа систему рівнянь

$$\begin{cases} E_1 + u_3 + u_2 - u_1 = 0; \\ E_2 - u_2 - E_4 - u_4 - u_5 = 0; \\ E_4 - u_3 - E_3 - u_6 + u_4 = 0. \end{cases}$$

Залишимо напруги джерел напруги у лівій частині рівняння, а напруги на елементах перенесемо у праву частину рівняння

$$\begin{cases} E_1 = u_1 - u_2 - u_3; \\ E_2 - E_4 = u_2 + u_4 + u_5; \\ E_4 - E_3 = u_3 - u_4 + u_6. \end{cases}$$

Виражаємо напруги на елементах через струми та опори за законом Ома

$$\begin{cases} E_1 = I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_2 R_2; \\ E_2 - E_4 = I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_5 R_5; \\ E_4 - E_3 = I_3 R_3 - I_4 R_4 + I_6 R_6. \end{cases}$$

Виразимо струми у гілках через контурні струми: $I_1 = I_I$, $I_5 = I_{II}$, $I_6 = I_{III}$, $I_2 = I_{II} - I_I$, $I_3 = I_{III} - I_I$, $I_4 = I_{II} - I_{III}$ і в результаті одержимо

$$\begin{cases} E_1 = I_I R_1 - (I_{III} - I_I) R_3 - (I_{II} - I_I) R_2; \\ E_2 - E_4 = (I_{II} - I_I) R_2 + (I_{II} - I_{III}) R_4 + I_{II} R_5; \\ E_4 - E_3 = (I_{III} - I_I) R_3 - (I_{II} - I_{III}) R_4 + I_{III} R_6. \end{cases}$$

Розкриємо дужки та згрупуємо доданки

$$\begin{cases} E_1 = (R_1 + R_2 + R_3) I_I - R_2 I_{II} - R_3 I_{III}; \\ E_2 - E_4 = -R_2 I_I + (R_2 + R_4 + R_5) I_{II} - R_4 I_{III}; \\ E_4 - E_3 = -R_3 I_I - R_4 I_{II} + (R_3 + R_4 + R_6) I_{III}. \end{cases}$$

Система рівнянь у матричній формі

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 - E_4 \\ E_4 - E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & R_3 + R_4 + R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix}.$$

Необхідно звернути увагу на те, що знак «-» перед недиагональними елементами матриці береться тоді, коли напрями контурних струмів, що протікають через один і той же опір протилежні, а у іншому випадку береться знак «+».

Якщо у колі є кероване джерело, наприклад джерело напруги, що керується напругою $E_3 = \mu \cdot u_2$, то його необхідно виразити через контурні струми (тобто змінні, відносно яких складена система рівнянь)

$$E_3 = \mu \cdot I_2 R_2 = (I_{II} - I_I) \cdot \mu R_2,$$

після чого цей вираз для E_3 необхідно перенести із лівої у праву частини рівнянь. У результаті третє рівняння системи набуде вигляду

$$E_4 = -(R_3 + \mu R_2) I_I - (R_4 - \mu \cdot R_2) I_{II} + (R_3 + R_4 + R_6) I_{III}.$$

При використанні матричної форми запису системи рівнянь, необхідно скорегувати матрицю опорів, а саме у перший стовпчик записати доданок $-\mu \cdot R_2$, а у другий стовпчик доданок $\mu \cdot R_2$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 - E_4 \\ E_4 - \mu R_2 I_{II} + \mu R_2 I_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & R_3 + R_4 + R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix}.$$

У результаті одержимо

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 - E_4 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_3 - \mu R_2 & -R_4 + \mu R_2 & R_3 + R_4 + R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix}.$$

Якщо у колі є інший вид керованих джерел, то їх необхідно перетворити в джерела напруги, що керуються струмом або виразити їх через контурні струми та виконати аналогічні дії.

Отриману систему рівнянь можна узагальнити у наступному вигляді

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix},$$

де E_{kk} називають контурною напругою контуру k ; R_{kk} – це власний опір контуру k (діагональний елемент), що дорівнює сумі опорів k -го контуру; R_{ij} –

взаємний опір контурів, що дорівнює сумі опорів, що є спільними для контурів i та j . У разі однакового напрямку протікання контурних струмів через взаємні опори знак R_{ij} береться додатним, інакше – від’ємним.

Система розв’язується через обернену матрицю або методом Крамера

$$I_I = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad I_{III} = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Запишемо вирази визначників

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{bmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{bmatrix}.$$

Спрощена система

$$[E] = [R] \cdot [I],$$

$[E]$ – матриця задаючих змінних, тобто джерел напруги; $[I]$ – матриця шуканих змінних, тобто контурних струмів; $[R]$ – матриця еквівалентних опорів.

Тоді розв’язок через обернену матрицю має вигляд

$$[I] = [R]^{-1} \cdot [E].$$

Алгоритм МКС

1. Джерела струму перетворюємо у джерела напруги (якщо вони є).
2. Обираємо канонічну систему незалежних контурів та додатні напрямки протікання контурних струмів.
3. Записуємо матрицю джерел напруги $[E]$ та матрицю опорів $[R]$.
4. Якщо у колі є керовані джерела, то їх величини необхідно визначити через контурні струми та перенести із матриці джерел напруги у матрицю опорів.
5. Визначають контурні струми із системи рівнянь.
6. Струми у гілках визначають через контурні струми за допомогою першого закону Кірхгофа.

У загальному випадку для фрагменту кола (рис. 1.55 а), що містить кероване джерело $E = \mu U_{ab}$, маємо структуру матриці опорів, що формується таким чином, як показано на рис. 1.55 б, оскільки

$$E = \mu U_{ab} = \mu R(I_a - I_b).$$

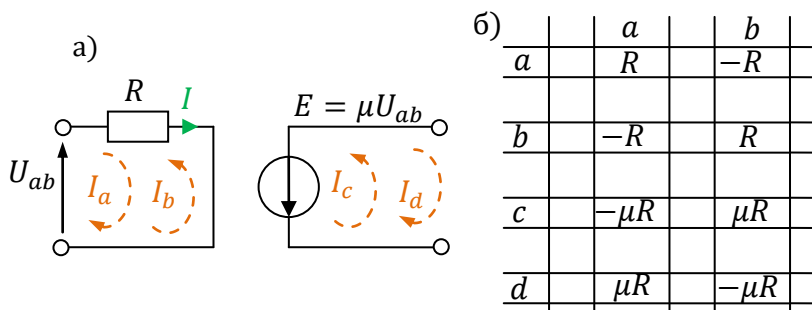


Рисунок 1.55 – Фрагмент схеми із керованими джерелами

Слід звернути увагу, що завдяки вибору контурних струмів, як струмів у головних гілках, кожний опір не може належати більше, ніж двом контурам. Тому опір R може міститися або в одній комірці, або в чотирьох. Така система називається канонічною.

Нижче наведений приклад розрахунків за МКС.

Приклад 1.5. У колі (рис. 1.56) визначити струми у гілках методом контурних струмів. Перевірити виконання закону балансу потужностей. Значення елементів наведені на схемах: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

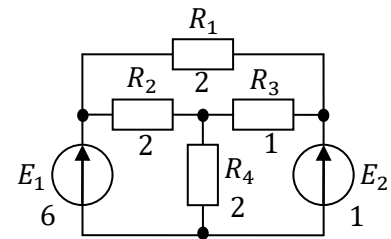


Рисунок 1.56 – Схема

Розв'язання

Якщо напрямки протікання контурних струмів обрати за годинниковою стрілкою сформуємо (рис. 1.57) систему на основі МКС

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)I_I - R_2I_{II} - R_3I_{III} = 0; \\ -R_2I_I + (R_2 + R_4)I_{II} - R_4I_{III} = E_1; \\ -R_3I_I - R_4I_{II} + (R_3 + R_4)I_{III} = -E_2. \end{cases}$$

Підставимо числові значення

$$\begin{cases} 5I_I - 2I_{II} - I_{III} = 0; \\ -2I_I + 4I_{II} - 2I_{III} = 6; \\ -I_I - 2I_{II} + 3I_{III} = -1. \end{cases}$$

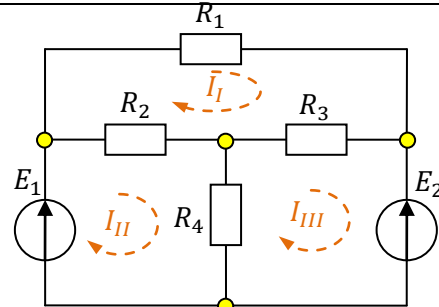


Рисунок 1.57 – Визначення струмів

Визначники системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (12 - 4) + 2(-6 - 2) - (4 + 4) = 40 - 16 - 8 = 16;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 40; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 72;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 56.$$

За методом Крамера контурні струми

$$I_I = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{40}{16} = 2.5 \text{ мА}; \quad I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{72}{16} = 4.5 \text{ мА}; \quad I_{III} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{56}{16} = 3.5 \text{ мА}.$$

Струми у гілках схеми (рис. 1.58) визначаються за першим законом Кірхгофа

$$I_1 = I_I = 2.5 \text{ мА};$$

$$I_5 = I_{II} = 4.5 \text{ мА};$$

$$I_6 = I_{III} = 3.5 \text{ мА};$$

$$I_2 = I_5 - I_1 = 4.5 - 2.5 = 2 \text{ мА};$$

$$I_3 = I_6 - I_1 = 3.5 - 2.5 = 1 \text{ мА};$$

$$I_4 = I_5 - I_6 = 4.5 - 3.5 = 1 \text{ мА}.$$

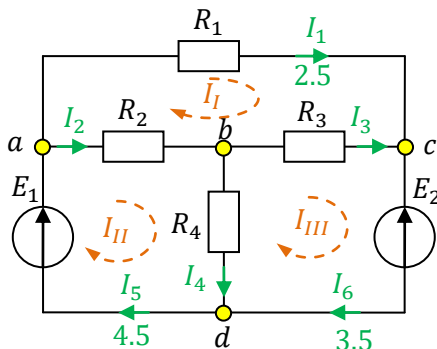


Рисунок 1.58 – Схема

Потужність споживачів

Перевіримо виконання закону балансу потужностей.

$$P_{\text{СП}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 = 2.5^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 2 = 23.5 \text{ мВт.}$$

Потужність джерел

$$P_{\text{ДЖ}} = E_1 I_5 - E_2 I_6 = 6 \cdot 4.5 - 1 \cdot 3.5 = 23.5 \text{ мВт.}$$

Оскільки $P_{\text{СП}} = P_{\text{ДЖ}} = 23.5 \text{ мВ}$, то закон балансу потужностей у колі виконується.

Відповідь: $I_1 = 2.5 \text{ мА}$, $I_2 = 2 \text{ мА}$, $I_3 = 1 \text{ мА}$; $I_4 = 1 \text{ мА}$; $I_5 = 4.5 \text{ мА}$;
 $I_6 = 3.5 \text{ мА}$.

Приклад 1.6. У колі (рис. 1.59) записати матрицю опорів (за МКС), вписати в неї керовані джерела. Джерела напруги $E_2 = \gamma I_3$, $E_2 = \mu u_2$ є керованим. Додатні напрямки протікання контурних струмів обрати за годинниковою стрілкою.

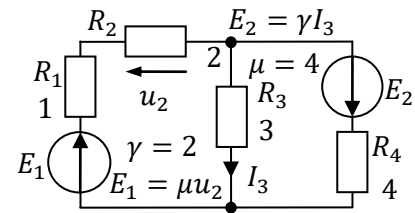


Рисунок 1.59 – Схема

Розв'язання

Запишемо систему рівнянь на основі МКС (обравши напрямки контурних струмів за годинниковою стрілкою)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

Визначимо вирази керованих джерел через контурні струми

$$E_1 = \mu u_2 = \mu R_2 I_I;$$

$$E_2 = \gamma I_3 = \gamma (I_I - I_{II}).$$

Підставимо вираз у матрицю

$$\begin{bmatrix} \mu R_2 I_I \\ \gamma I_I - \gamma I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

Перенесемо коефіцієнти перед контурними струмами через знак дорівнює з лівої у праву частину рівняння змінивши їх знаки на протилежні

$$\begin{bmatrix} \mu R_2 I_I \\ \gamma I_I - \gamma I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

У результаті матриця опорів набуде вигляду

$$R = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 - \mu R_2 & -R_3 \\ -R_3 - \gamma & R_3 + R_4 + \gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 2 + 3 - 4 \cdot 2 & -4 \\ -3 - 2 & 3 + 4 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 9 \end{bmatrix} \text{ кОм.}$$

1.9.2. Метод вузових напруг

Метод вузових напруг (**МВН**) дозволяє безпосередньо за певними правилами отримати систему рівнянь для визначення всіх напруг u_{k0} відносно деякого вузла 0, що називається базисним. Потенціал цього вузла вважається нульовим. МВН можна легко отримати на підставі першого закону Кірхгофа: для кожного вузла, окрім базисного записуємо рівняння за першим законом Кірхгофа, а струми в гілках визначаємо за законом Ома $I_k = g_k \cdot u_k$, де g_k – провідність, що ввімкнена між вузлами a та b , а напруги на цій провідності розписуються як $u_k = u_{ab} = u_{a0} - u_{b0}$, де 0 – це базисний вузол. Ці напруги u_{a0} , u_{b0} називають вузовими напругами. Для зручності, щоб працювати в однорідному координатному базисі, всі джерела напруги бажано перетворити на джерела струму.

Для кола (рис. 1.60 а) перетворимо всі джерела напруги на джерела струму. Запишемо перший закон Кірхгофа для кожного із вузлів, проставивши напрямки протікання струмів у гілках (рис. 1.60):

$$\begin{cases} J_2 - J_1 + I_1 - I_2 - I_5 = 0; \\ I_2 + J_4 - I_3 - I_4 = 0; \\ J_1 + J_3 + I_3 - I_1 - I_6 = 0. \end{cases}$$

Залишимо струми джерел струму у лівій частині рівняння, а струми гілок перенесемо у праву частину рівняння:

$$\begin{cases} J_2 - J_1 = -I_1 + I_2 + I_5; \\ J_4 = -I_2 + I_3 + I_4; \\ J_1 + J_3 = -I_3 + I_1 + I_6. \end{cases}$$

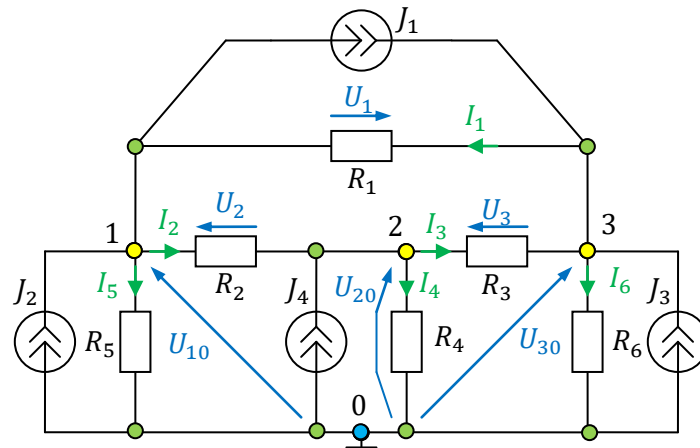


Рисунок 1.60 – Початкова схема для МВН

Виразимо струми гілок через напруги та провідності за законом Ома

$$\begin{cases} J_2 - J_1 = -u_1 g_1 + u_2 g_2 + u_5 g_5; \\ J_4 = -u_2 g_2 + u_3 g_3 + u_4 g_4; \\ J_1 + J_3 = -u_3 g_3 + u_1 g_1 + u_6 g_6. \end{cases}$$

Напругу між вузлами визначають за другим законом Кірхгофа (рис. 1.61)

$$u_{a0} - u_{b0} = u_{ab}.$$

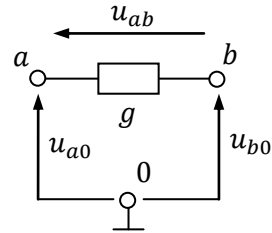


Рисунок 1.61 – Фрагмент схеми

Тоді отримаємо

$$\begin{cases} J_2 - J_1 = -(u_{30} - u_{10})g_1 + (u_{10} - u_{20})g_2 + u_{10}g_5; \\ J_4 = -(u_{10} - u_{20})g_2 + (u_{20} - u_{30})g_3 + u_{20}g_4; \\ J_1 + J_3 = -(u_{20} - u_{30})g_3 + (u_{30} - u_{10})g_1 + u_{30}g_6. \end{cases}$$

Розкриємо дужки та згрупуємо доданки

$$\begin{cases} J_2 - J_1 = (g_1 + g_2 + g_5)u_{10} - g_2u_{20} - g_1u_{30}; \\ J_4 = -g_2u_{10} + (g_2 + g_3 + g_4)u_{20} - g_3u_{30}; \\ J_1 + J_3 = -g_1u_{10} - g_3u_{20} + (g_1 + g_3 + g_6)u_{30}. \end{cases}$$

Система рівнянь у матричній формі

$$\begin{bmatrix} J_2 - J_1 \\ J_4 \\ J_1 + J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 + g_5 & -g_2 & -g_1 \\ -g_2 & g_2 + g_3 + g_4 & -g_3 \\ -g_1 & -g_3 & g_1 + g_3 + g_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{bmatrix}.$$

Треба звернути увагу на те, що знак «-» перед струмом береться тоді, коли струм витікає із вузла, а у протилежному випадку береться знак «+».

Якщо у колі є кероване джерело, наприклад джерело струму, що керується напругою $J_3 = S \cdot u_1$, то його необхідно виразити через вузлові напруги (тобто змінні, відносно яких складена система рівнянь)

$$J_3 = S \cdot u_1 = S \cdot (u_{30} - u_{10}).$$

А потім цей вираз для J_3 необхідно перенести із лівої в праву частину рівняння. У результаті третє рівняння системи набуде вигляду

$$J_1 = -(g_1 - S)u_{10} - g_3u_{20} + (g_1 + g_3 + g_6 - S)u_{30}.$$

При використанні матричної форми запису системи рівнянь, необхідно скорегувати матрицю провідностей, а саме у перший стовпчик записати доданок S , а у другий стовпчик доданок $-S$

$$\begin{bmatrix} J_2 - J_1 \\ J_4 \\ J_1 + S u_{30} - S u_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 + g_5 & -g_2 & -g_1 \\ -g_2 & g_2 + g_3 + g_4 & -g_3 \\ -g_1 & -g_3 & g_1 + g_3 + g_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{bmatrix}.$$

У результаті одержимо

$$\begin{bmatrix} J_2 - J_1 \\ J_4 \\ J_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 + g_5 & -g_2 & -g_1 \\ -g_2 & g_2 + g_3 + g_4 & -g_3 \\ -g_1 + S & -g_3 & g_1 + g_3 + g_6 - S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{bmatrix}.$$

Якщо у колі є інші види керованих джерел, то їх необхідно перетворити в джерела струму, що керуються напругою, або виразити через вузлові напруги та виконати аналогічні дії.

Отриману систему рівнянь можна узагальнити у наступному виді

$$\begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{bmatrix},$$

де J_{kk} називають вузловим струмом вузла k ; g_{kk} – це власна провідність вузла k (діагональний елемент), що дорівнює сумі провідностей, що підключені до k -го вузла; g_{ij} – взаємна провідність, що дорівнює зі знаком мінус сумі провідностей, що ввімкнені напрямку між вузлами i та j .

Система розв'язується через обернену матрицю або методом Крамера

$$U_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad U_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad U_{30} = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Запишемо вирази визначників

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} J_{11} & g_{12} & g_{13} \\ J_{22} & g_{22} & g_{23} \\ J_{33} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} g_{11} & J_{11} & g_{13} \\ g_{21} & J_{22} & g_{23} \\ g_{31} & J_{33} & g_{33} \end{bmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & J_{11} \\ g_{21} & g_{22} & J_{22} \\ g_{31} & g_{32} & J_{33} \end{bmatrix}.$$

Спрощена система

$$[J] = [G] \cdot [U],$$

$[J]$ – матриця задаючих змінних, тобто джерел струму; $[U]$ – матриця шуканих змінних, тобто вузлових напруг; $[G]$ – матриця еквівалентних провідностей.

Тоді розв'язок через обернену матрицю має вигляд

$$[U] = [G]^{-1} \cdot [J].$$

.

Алгоритм МВН

1. Джерела напруги перетворюємо у джерела струму (якщо вони є).
2. Нумеруємо вузли, обираємо базисний вузол та визначаємо додатні напрямки вузлових напруг.
3. Записуємо матрицю джерел струму $[J]$ та матрицю провідностей $[G]$.
4. Якщо у колі є керовані джерела, то їх величини необхідно виражати через вузлові напруги та перенести їх вирази із матриці джерел струму у матрицю провідностей.
5. Визначити вузлові напруги.
6. Визначити струми у гілках через вузлові напруги.

Узагальнений метод вузлових напруг

Цей метод ґрунтується на понятті невизначеної (плаваючої) матриці. У схемі (рис. 1.54) базисний вузол 0 пронумеруємо четвертим. За правилом МВН допишемо ще одне рівняння до вузла 4 і у результаті отримаємо систему у матричному вигляді

$$\begin{array}{|c|} \hline J_2 - J_1 \\ \hline 0 \\ \hline J_1 - J_3 \\ \hline J_3 - J_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline g_1 + g_2 + g_5 & -g_2 \\ \hline -g_2 & g_2 + g_3 + g_4 \\ \hline -g_1 & -g_3 \\ \hline -g_5 & -g_4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline -g_1 & -g_5 \\ \hline -g_3 & -g_4 \\ \hline g_1 + g_3 + g_6 & -g_6 \\ \hline -g_6 & g_4 + g_5 + g_6 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline u_3 \\ \hline u_4 \\ \hline \end{array}$$

У матриці напруг замість u_{10} , u_{20} , u_{30} , u_{40} записали u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , під якими розуміємо потенціали цих вузлів. Для отриманої матриці провідностей розміром 4×4 сума всіх елементів по рядках дорівнює нулю, також сума всіх елементів по стовпчиках дорівнює нулю. А визначник такої матриці дорівнює нулю – система рівнянь невизначена (матрицю провідностей називають невизначеною).

Це сталося так тому, що по суті склали зайве рівняння для четвертого вузла, а кількість незалежних рівнянь за першим законом Кірхгофа повинна бути $(n - 1)$, де n – загальна кількість вузлів. Якщо в невизначеній матриці викреслити, наприклад, рядок та стовпчик з номером 2, то саме вузол 2 стане новим базисним вузлом (з номером 0) і відповідно третій вузол змінить номер на 2, а четвертий – на 3. Таким чином, за допомогою невизначеної матриці можна змінювати базисний вузол (тому іноді невизначену матрицю ще називають плаваючою). Щоб отримати плаваючу матрицю на підставі вже існуючої (без малювання схеми) – треба додати до цієї матриці стовпчик та рядок, елементи яких будуть дорівнювати зі знаком мінус сумі елементів відповідних рядків та стовпчиків початкової матриці. Такий прийом дозволяє об'єднувати матриці багатополосників з різними базисними вузлами.

Метод вузлових напруг, який дозволяє працювати з плаваючою матрицею та багатополосниками називають узагальненим методом вузлових напруг.

Якщо необхідно перерахувати Y -параметри біполярного транзистора у схемі зі спільним емітером (рис. 1.62 а) у систему Y -параметрів зі спільною базою (рис. 1.62 б).

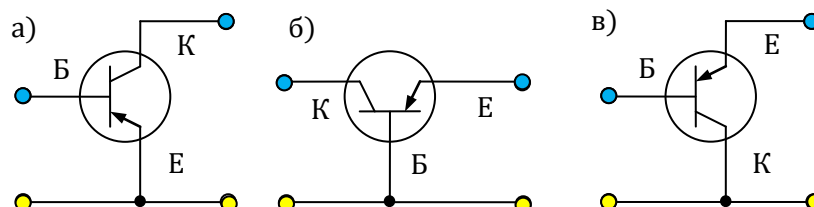


Рисунок 1.62 – Схеми включення біполярного транзистора

Система Y -параметрів зі спільним емітером (рис. 1.62 а)

$$Y_{CE} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$$

Одержуємо невизначену матрицю:

	Б	К	Е
Б	Y_{11}	Y_{12}	$-Y_{11} - Y_{12}$
К	Y_{21}	Y_{22}	$-Y_{21} - Y_{22}$
Е	$-Y_{11} - Y_{21}$	$-Y_{12} - Y_{22}$	$Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22}$

Викреслюємо рядок та стовпець, що відповідають базі

	Б	К	Е
Б	Y_{11}	Y_{12}	$-Y_{11} - Y_{12}$
К	Y_{21}	Y_{22}	$-Y_{21} - Y_{22}$
Е	$-Y_{11} - Y_{21}$	$-Y_{12} - Y_{22}$	$Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22}$

У результаті отримуємо матрицю для спільної бази (рис. 1.62 б)

$$Y_{CB} = \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{21} - Y_{22} \\ -Y_{12} - Y_{22} & Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22} \end{bmatrix}.$$

Аналогічно можна отримати матрицю для схеми зі спільним колектором (рис. 1.62 в)

$$Y_{CK} = \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{11} - Y_{12} \\ -Y_{11} - Y_{21} & Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22} \end{bmatrix}.$$

У загальному випадку для фрагменту кола (рис. 1.63 а), що містить кероване джерело $J = \alpha I$, маємо структуру матриці провідностей, як показано на рис. 1.63 б, оскільки

$$J = \alpha I = \alpha g U_{ab} = \alpha g (U_a - U_b).$$

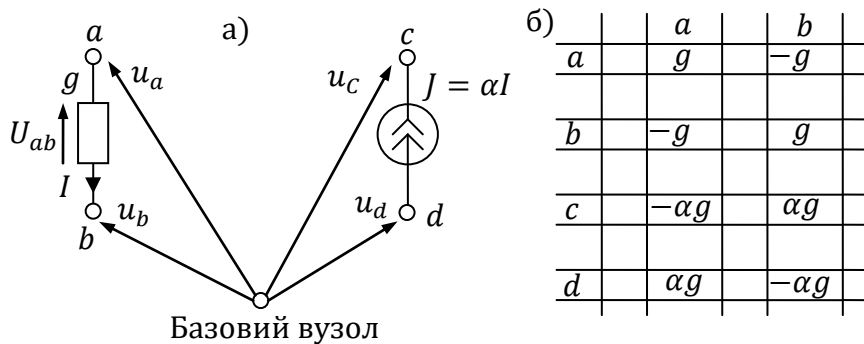


Рисунок 1.63 – Фрагмент схеми із керованими джерелами

Слід зазначити, що завдяки такому вибору вузлових напруг, у нас кожна провідність не може належати більше, ніж двом вузлам. Тому провідність g може міститися або в одній комірці, або в чотирьох. Така система називається канонічною.

Нижче наведений приклад розрахунку за МВН.

Приклад 1.6. У колі (рис. 1.64) визначити струми у гілках методом вузлових напруг. Перевірити виконання балансу потужностей. Значення елементів наведені на схемах: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

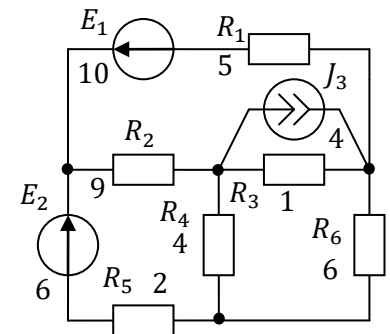


Рисунок 1.64 – Схема

Розв'язання

У колі (рис. 1.64) перетворимо всі джерела напруги на джерела струму (рис. 1.65 а)

$$J_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{10}{5} = 2 \text{ мА}; \quad J_2 = \frac{E_2}{R_5} = \frac{6}{2} = 3 \text{ мА}.$$

Пронумерувавши вузли напишемо систему рівнянь на основі МВН

$$\begin{cases} J_1 + J_2 = (g_1 + g_2 + g_5)U_{10} - g_2U_{20} - g_1U_{30}; \\ -J_3 = -g_2U_{10} + (g_2 + g_3 + g_4)U_{20} - g_3U_{30}; \\ J_3 - J_1 = -g_1U_{10} - g_3U_{20} + (g_1 + g_3 + g_6)U_{30}. \end{cases}$$

Підставимо числові значення

$$\begin{cases} 5 = 0.811U_{10} - 0.111U_{20} - 0.2U_{30}; \\ -4 = -0.111U_{10} + 1.361U_{20} - U_{30}; \\ 2 = -0.2U_{10} - U_{20} + 1.367U_{30}. \end{cases}$$

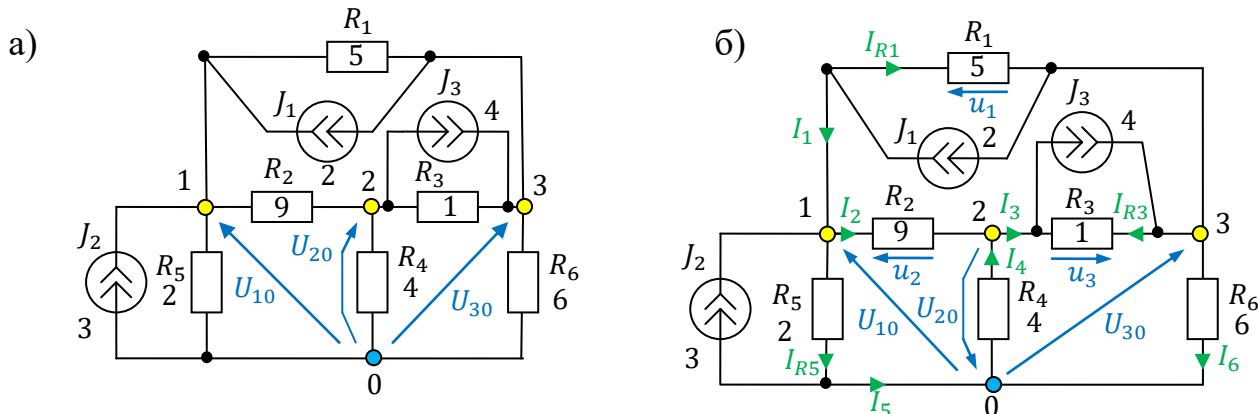


Рисунок 1.65 – Еквівалентні схеми

Система у матричній формі запису

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.811 & -0.111 & -0.2 \\ -0.111 & 1.36 & -1 \\ -0.2 & -1 & 1.367 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{bmatrix}.$$

Визначимо вузлові напруги

$$U = G^{-1} \cdot J = \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.29 \\ -1.457 \\ 1.317 \end{bmatrix}.$$

За другим законом Кірхгофа (рис. 1.65 б)

$$u_1 = U_{10} - U_{30} = 6.29 - 1.317 = 4.97 \text{ В};$$

$$u_2 = U_{10} + U_{20} = 6.29 + 1.457 = 7.75 \text{ В};$$

$$u_3 = U_{20} + U_{30} = 1.457 + 1.317 = 2.77 \text{ В}.$$

За законом Ома (рис. 1.65 б)

$$I_{R1} = \frac{u_1}{R_1} = \frac{4.97}{5} \cong 1 \text{ мА}; \quad I_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{7.75}{9} = 0.861 \text{ мА};$$

$$I_{R3} = \frac{u_3}{R_3} = \frac{2.77}{1} = 2.77 \text{ мА}; \quad I_4 = \frac{U_{20}}{R_4} = \frac{1.457}{4} = 0.364 \text{ мА}.$$

$$I_{R5} = \frac{U_{10}}{R_5} = \frac{6.29}{2} = 3.14 \text{ мА}; \quad I_6 = \frac{U_{30}}{R_6} = \frac{1.317}{6} = 0.22 \text{ мА}.$$

За першим законом Кірхгофа (рис. 1.65 б)

$$I_1 = J_1 - I_{R1} = 2 - 1 = 1 \text{ мА};$$

$$I_3 = J_3 - I_{R3} = 4 - 2.775 = 1.225 \text{ мА}.$$

$$I_5 = I_{R5} - J_2 = 3.14 - 3 = 0.14 \text{ мА}.$$

Повернемося до початкової схеми і проставимо в ній напрями струмів і напруг (рис. 1.66).

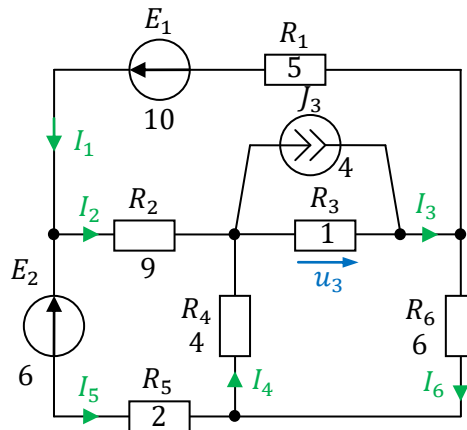


Рисунок 1.66 – Схема із напрямками напруг та струмів

Перевіримо виконання закону балансу потужностей цієї схеми (рис. 1.66).

Потужність споживачів

$$\begin{aligned} P_{\text{СП}} &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_{R3}^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = \\ &= 1^2 \cdot 5 + 0.861^2 \cdot 9 + 2.775^2 \cdot 1 + 0.364^2 \cdot 4 + 0.14^2 \cdot 2 + 0.22^2 \cdot 6 = \\ &= 20.232 \text{ мВт}. \end{aligned}$$

Потужність джерел

$$P_{\text{ДЖ}} = E_1 I_1 - E_2 I_5 + J_3 u_3 = 10 \cdot 1 - 6 \cdot 0.14 + 2.77 \cdot 4 = 20.26 \text{ мВт}.$$

Оскільки $P_{\text{СП}} \cong P_{\text{ДЖ}}$, то закон балансу потужностей виконується.

Відповідь: $I_1 = 1 \text{ мА}, I_2 = 0.861 \text{ мА}, I_3 = 1.225 \text{ мА}, I_4 = 0.364 \text{ мА};$
 $I_5 = 0.14 \text{ мА}, I_6 = 0.22 \text{ мА}.$

Приклад 1.7. У колі (рис. 1.67) навести матрицю провідностей та записати у матрицю керовані джерела. Числові значення подані на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В, S – мА/В.

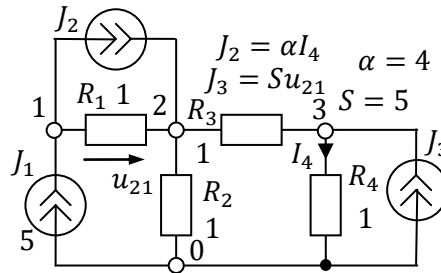


Рисунок 1.67 – Початкова схема

Розв'язання

Складемо систему рівнянь на основі методу вузлових напруг

$$\begin{bmatrix} J_1 - J_2 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 & 0 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 & -g_3 \\ 0 & -g_3 & g_3 + g_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{bmatrix}.$$

Визначимо вирази керованих джерел через вузлові напруги

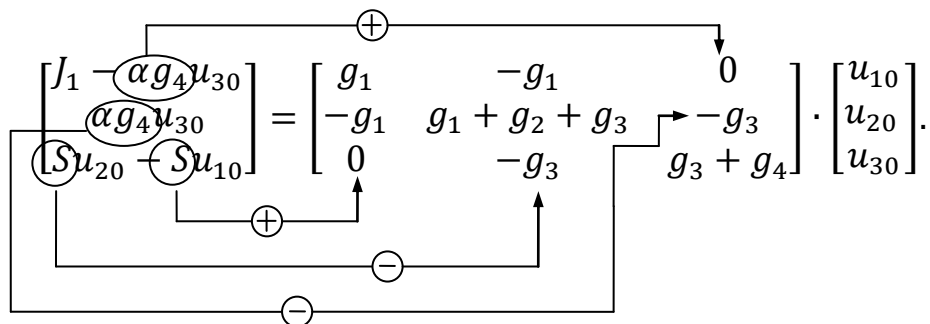
$$J_2 = \alpha I_4 = \alpha g_4 u_{30}.$$

$$J_3 = S u_{21} = S(u_{20} - u_{10}).$$

Підставимо вирази керованих джерел у рівняння

$$\begin{bmatrix} J_1 - \alpha g_4 u_{30} \\ \alpha g_4 u_{30} \\ S u_{20} - S u_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 & 0 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 & -g_3 \\ 0 & -g_3 & g_3 + g_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{bmatrix}.$$

Перенесемо коефіцієнти перед вузловими напругами через знак дорівнює з лівої у праву частину рівняння змінивши їх знаки на протилежні



У результаті матриця провідностей набуде вигляду

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 & \alpha g_4 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 & -g_3 - \alpha g_4 \\ S & -g_3 - S & g_3 + g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 + 1 + 1 & -1 - 4 \\ 5 & -1 - 5 & 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 5 & -6 & 2 \end{bmatrix} \text{ мСім.}$$

1.9.3. Принцип суперпозиції

Іноді буває необхідно визначити струм лише в одній гілці.

Щоб скласти загальний вираз для струму у k -й гілці складної схеми, що містить лише джерела напруги (рис. 1.68), необхідно скласти рівняння по методу контурних струмів, обравши контури таким чином, щоб k -а гілка входила лише в один k -й контур.

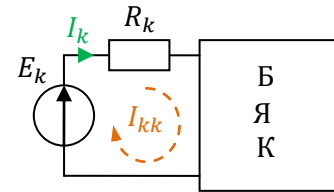


Рисунок 1.68 – Схема

Тоді струм у k -й гілці I_k буде дорівнювати контурному I_{kk} , що входить лише у k -й контур

$$I_k = I_{kk} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n E_{ii} \cdot \Delta_{ik} = E_{11} \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \frac{\Delta_{nk}}{\Delta},$$

де Δ – головний визначник системи, Δ_{nk} – відповідне алгебраїчне доповнення.

Кожен доданок у правій частині можна трактувати як струм, що викликаний у k -му контурі відповідною контурною напругою.

Складова $\frac{\Delta_{nk}}{\Delta} = G_{kn}$ має розмірність провідності (Сім), а кожна складова $E_{nn} \frac{\Delta_{nk}}{\Delta}$ являє собою струм, створений у k -му контурі контурною напругою E_{nn} . Наприклад, $E_{11} \frac{\Delta_{1k}}{\Delta}$ – складова струму в k -й гілці, що створена контурною напругою E_{11} .

Кожну контурну напругу можна виразити через напруги контурів $E_1, E_2, \dots, E_n$, згрупувати коефіцієнти при цих напругах і одержати вираз:

$$I_k = E_{11}G_{k1} + E_{22}G_{k2} + \dots + E_{nn}G_{kn}.$$

Це рівняння виражає принцип суперпозиції (накладання) дії джерел напруги:

Струм у k -гілці лінійного кола дорівнює алгебраїчній сумі струмів, створених у цій гілці окремо кожним джерелом напруги кола.

Принцип дійсний для всіх лінійних електричних кіл. Якщо у схемі діє n джерел, то струм у кожній гілці буде мати n складових (часткових струмів).

Якщо у колі є i джерела струму, i джерела напруги, то струм у будь-якій гілці знаходиться також як сума струмів при дії кожного із джерел окремо.

При розрахунку струмів у гілках кола роблять наступне: по черзі розраховують струми, що виникають від дії кожної джерела напруги, замінюючи інші джерела їх внутрішніми опорами. Струм у гілках знаходять як алгебраїчну суму струмів від кожного джерела.

Аналогічно щоб скласти загальний вираз для напруги у k -й гілці складної схеми, що містить лише джерела струму, необхідно скласти рівняння по методу вузлових напруг, обравши вузли таким чином, щоб k -а гілка знаходилася лише між k -м вузлом та базисним (рис. 1.69).

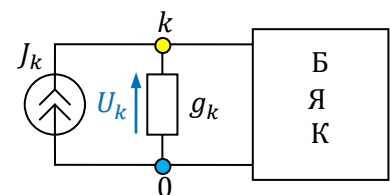


Рисунок 1.69 – Схема

Тоді напруга у k -й гілці u_k буде дорівнювати вузловий u_{kk} , що знаходиться лише між k -м та нульовим вузлом

$$u_k = u_{k0} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n J_{ii} \cdot \Delta_{ik} = J_{11} \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} + J_{22} \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} + \dots + J_{nn} \frac{\Delta_{nk}}{\Delta},$$

Кожен доданок у правій частині можна трактувати як напругу, що викликаний у k -й гілці відповідним вузловим струмом.

Складова $\frac{\Delta_{nk}}{\Delta} = R_{kn}$ має розмірність опору (Ом), тоді кожна складова $J_{nn} \frac{\Delta_{nk}}{\Delta}$ являє собою напругу, що створена у k -у вузлі вузловим струмом J_{nn} . Наприклад, $J_{11} \frac{\Delta_{1k}}{\Delta}$ – складова напруги в k -му вузлі створена, вузловим струмом J_{11} .

Кожний вузловий струм можна виразити через струми гілок $J_1, J_2, \dots, J_n$, згрупувати коефіцієнти при цих струмах і одержати вираз:

$$U_k = J_{11}R_{k1} + J_{22}R_{k2} + \dots + J_{nn}R_{kn}.$$

Це рівняння виражає **принцип суперпозиції** (накладання) дії джерел струму:

Напруга у k -гілці лінійного кола дорівнює алгебраїчній сумі напруг, створених у цій гілці окремо кожним джерелом струму.

Якщо у колі є і джерела струму, і джерела напруги, то напругу у будь-якій гілці знаходиться також як сума напруг при дії кожного із джерел окремо.

Таким чином, сформуємо загальний принцип суперпозиції

Реакція (струм чи напруга) лінійного кола на дію у вигляді кількох джерел дорівнює алгебраїчній сумі реакцій (часткових струмів чи напруг) на кожне джерело окремо.

Принцип суперпозиції лежить в основі більшості часових та частотних методів розрахунку лінійних кіл, що будуть розглянуті далі.

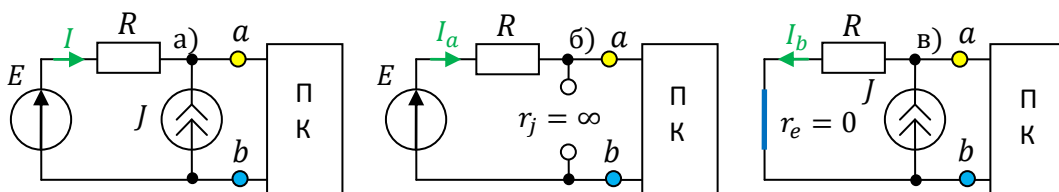


Рисунок 1.70 – Схема до принципу суперпозиції

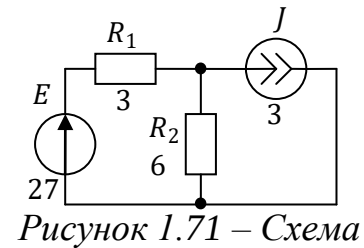
За принципом суперпозиції $I = I_a - I_b$ ($I_a > I_b$).

Необхідно звернути увагу, що принципом суперпозиції не можна користуватися для розрахунку потужностей, що виділяється на опорах, як суму потужностей під дією кожного із джерел окремо, оскільки потужність є квадратичною функцією струму чи напруги

$$P = RI^2 = gU^2.$$

Таким чином, принцип суперпозиції базується на лінійності рівнянь кола та дозволяє звести задачу аналізу кола до розгляду сукупності власних режимів, в кожному з яких враховується лише одне незалежне джерело. Всі керовані джерела, що діють у колі, необхідно враховувати у кожному із власних режимів. Нижче наведений приклад розрахунків.

Приклад 1.8. У колі (рис. 1.71) принципом суперпозиції (накладання) визначити всі струми та напругу кола. Перевірити виконання закону балансу потужностей. Числові значення елементів на схемі: опори в кОм, напруга в В, струм в мА.



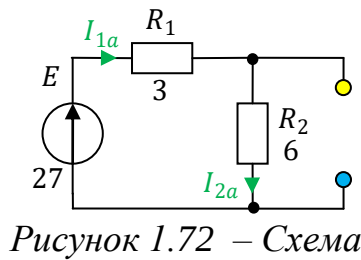
Розв'язання

Нехай у колі є тільки одне джерело напруги E , а джерело струму J замінюємо його внутрішнім опором $r_j = \infty$ (розривом, рис. 1.72).

За законом Ома

$$I_{1a} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{27}{3 + 6} = 3 \text{ мА};$$

$$I_{1a} = I_{2a} = 3 \text{ мА}.$$

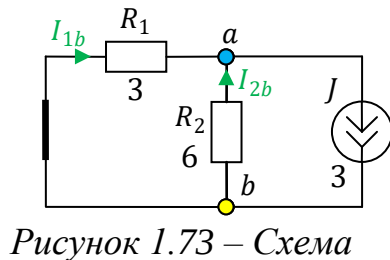


Нехай у колі діє тільки джерело струму J , а джерело напруги E замінимо його внутрішнім опором $r_E = 0$, тобто закороткою (рис. 1.73).

За формулою дільника струму

$$I_{1b} = J \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ мА};$$

$$I_{2b} = J \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 3}{3 + 6} = 1 \text{ мА}.$$



За принципом суперпозиції для початкової схеми (рис. 1.74)

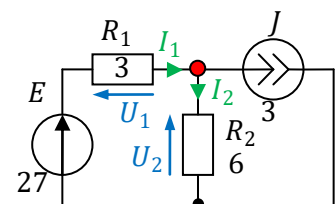
$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} = 3 + 2 = 5 \text{ мА}.$$

$$I_2 = I_{2a} - I_{2b} = 3 - 1 = 2 \text{ мА}.$$

За законом Ома визначимо напруги на елементах кола (рис. 1.74)

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 5 \cdot 3 = 15 \text{ В};$$

$$U_J = U_2 = I_2 \cdot R_2 = 2 \cdot 6 = 12 \text{ В}.$$



Потужність споживачів

$$P_{\text{СП}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 5^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 6 = 75 + 24 = 99 \text{ мВт}.$$

Потужність джерел

$$P_{\text{ДЖ}} = P_E + P_J = E \cdot I_1 - J \cdot U_J = 27 \cdot 5 - 3 \cdot 12 = 135 - 36 = 99 \text{ мВт}.$$

Оскільки $P_{\text{СП}} = P_{\text{ДЖ}} = 99 \text{ мВт}$, то закон балансу потужностей виконується.

Відповідь: $I_1 = 5 \text{ мА}, I_2 = 2 \text{ мА}, U_1 = 15 \text{ В}, U_2 = 12 \text{ В}, P = 99 \text{ мВт}.$

Приклад 1.9. Коло (рис. 1.75) містить тільки одне джерело напруги E і лише одне джерело струму J . Опір кола становить $R = 2$ кОм. Під дією лише джерела напруги потужність на опорі становить $P_{RE} = 18$ мВт. Під дією лише джерела струму потужність на опорі становить $P_{RJ} = 8$ мВт. Визначити потужність на опорі R , коли джерело струму та напруги діють одночасно.

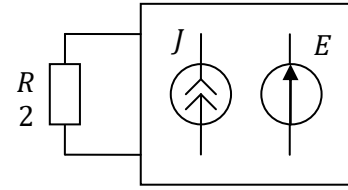


Рисунок 1.75
 $E \rightarrow P_{RE} = 18$ мВт
 $J \rightarrow P_{RJ} = 8$ мВт
 $E, J \rightarrow P_{REJ} - ?$

Розв'язання

Потужність на опорі, коли діє лише джерело напруги (рис. 1.76)

$$P_{RE} = R \cdot I_{RE}^2.$$

Звідси визначимо модуль струм

$$|I_{RE}| = \sqrt{\frac{P_{RE}}{R}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3 \text{ мА.}$$

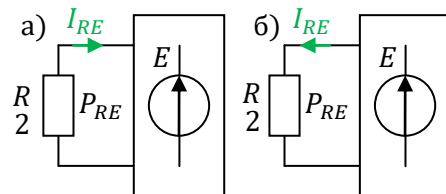


Рисунок 1.76

Потужність на опорі, коли діє лише джерело струму (рис. 1.77)

$$P_{RJ} = R \cdot I_{RJ}^2.$$

Звідси визначимо модуль струм

$$|I_{RJ}| = \sqrt{\frac{P_{RJ}}{R}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2 \text{ мА.}$$

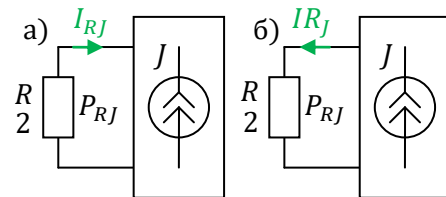


Рисунок 1.77

За принципом суперпозиції для обох напрямків струмів (рис. 1.78)

$$I_{REJ1} = I_{RE} + I_{RJ} = 3 + 2 = 5 \text{ мА;}$$

$$I_{REJ2} = I_{RE} - I_{RJ} = 3 - 2 = 1 \text{ мА.}$$

Потужність, коли джерело струму та напруги діють одночасно

$$P_{RJE1} = R \cdot I_{REJ1}^2 = 2 \cdot 5^2 = 50 \text{ мВт;}$$

$$P_{RJE2} = R \cdot I_{REJ2}^2 = 2 \cdot 1^2 = 2 \text{ мВт.}$$

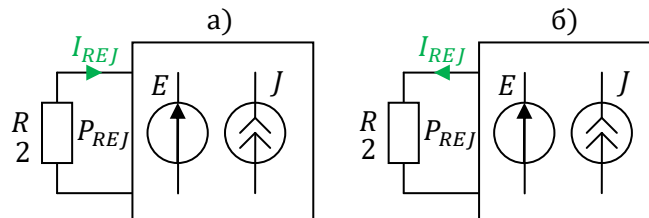


Рисунок 1.78

Відповідь: $P_{REJ} = 50$ мВт або $P_{REJ} = 2$ мВт.

1.9.4. Схемні функції

Аналізуючи розв'язки рівнянь складених за МКС та МВН, можна одержати схемні функції.

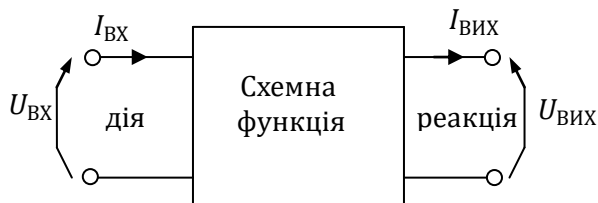


Рисунок 1.79 – Схема

Схемна функція – це відношення реакції до дії (рис. 1.79).

До схемних функцій відносять: коефіцієнти передачі за струмом та напругою, вхідний опір та провідність, передавальні опір та провідність.

Якщо дія та реакція задані на різних входах, то схемна функція називається передавальною. А якщо дія та реакція задані на одному вході, то такі схемні функції називають вхідними.

За матрицею опорів, що складена за МКС, та матрицею провідностей, що складена за МВН, можна визначити схемні функції:

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
Коефіцієнт передачі за струмом	
$K_i = \frac{I_{BHX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$	$K_i = \frac{I_{BHX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot g_H$
Коефіцієнт передачі за напругою	
$K_u = \frac{U_{BHX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot R_H$	$K_u = \frac{U_{BHX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$
Вхідний опір	
$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}$	$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}$
Передавальний опір	
$Z_{ba} = \frac{U_{BHX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot R_H$	$Z_{ba} = \frac{U_{BHX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}$
Передавальна провідність	
$Y_{ba} = \frac{I_{BHX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}$	$Y_{ba} = \frac{I_{BHX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot g_H$
де a – вхідний контур, b – вихідний контур, Δ – визначник матриці опорів;	де a – вхідний вузол, b – вихідний вузол, Δ – визначник матриці провідностей;

Приклад 1.10. У колі (рис. 1.80) визначити напругу u_4 . Числові значення елементів на схемі: опори в кОм, напруга в В.

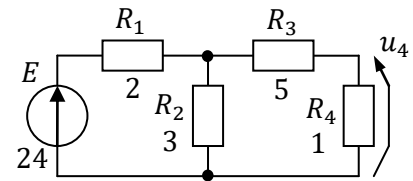


Рисунок 1.80 – Схема

Розв'язання

Обравши напрямки протікання контурних струмів за годинниковою стрілкою (рис. 1.81) сформуємо матрицю опорів

$$R = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \text{ кОм.}$$

Коефіцієнт передачі за напругою

$$K_u = \frac{U_{ВИХ}}{U_{ВХ}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot R_H = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \cdot R_4 = \frac{(-1)^{1+2} \cdot (-3)}{5 \cdot 9 - (-3) \cdot (-3)} \cdot 1 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Звідси визначимо

$$U_{ВИХ} = U_{ВХ} \cdot K_u = E \cdot K_u = 24 \cdot \frac{1}{12} = 2 \text{ В.}$$

Отже,

$$u_4 = U_{ВИХ} = 2 \text{ В.}$$

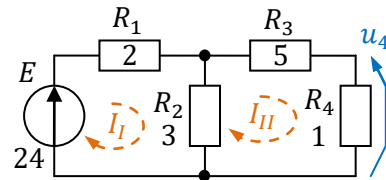


Рисунок 1.81 – Схема

Приклад 1.11. У колі (рис. 1.82) визначити струм I_4 . Числові значення елементів на схемі: опори в кОм, струм в мА.

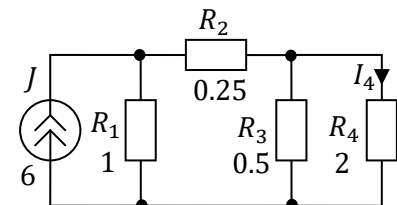


Рисунок 1.82 – Схема

Розв'язання

Пронумерувавши вузли та обравши додатні напрямки вузлових напруг (рис. 1.83) сформуємо матрицю провідностей

$$G = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 \\ -g_2 & g_2 + g_3 + g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \text{ мСім.}$$

Коефіцієнт передачі за струмом

$$K_i = \frac{I_{ВИХ}}{I_{ВХ}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot g_H = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \cdot g_4 = \frac{(-1)^{1+2} \cdot (-4)}{5 \cdot 8 - (-4) \cdot (-4)} \cdot 0.5 = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

Звідси визначимо

$$I_{ВИХ} = I_{ВХ} \cdot K_i = J \cdot K_i = \frac{6}{12} = 0.5 \text{ мА.}$$

Отже,

$$I_4 = I_{ВИХ} = 0.5 \text{ мА.}$$

Відповідь: $I_4 = 0.5 \text{ мА.}$

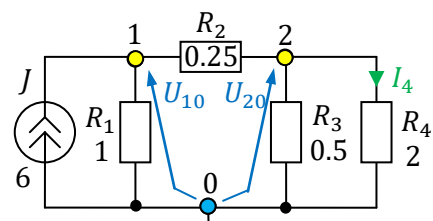


Рисунок 1.83 – Схема

1.10. Основні теореми розрахунку електричних кіл

1.10.1. Теорема про еквівалентний генератор

У теорії кіл теорема про еквівалентний генератор. Існує два варіанти теорем: теорема про еквівалентне джерело напруги (теорема Тевенена) та теорема про еквівалентне джерело струму (теорема Нортон).

Теорема про еквівалентне джерело напруги

Будь-який лінійний активний двополюсник (рис. 1.84 а) по відношенню до вузлів а та б можна замінити джерелом напруги $E_{\text{ЕГ}}$ із внутрішнім опором $R_{\text{ЕГ}}$ (рис. 1.84 б), що увімкнені послідовно, величини яких визначаються як:

а) напруга еквівалентного джерела $E_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ХХ}}$ між вузлами а та б (рис. 1.84, в;

б) опір джерела $R_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ХХ}}/I_{\text{КЗ}}$,

де ХХ – холостой хід, КЗ – коротке замикання.

Опір $R_{\text{ЕГ}}$ також можна розрахувати за схемою двополюсника, якщо вона відома. Тоді, по суті, $R_{\text{ЕГ}}$ є вхідним опором двополюсника за умови видалення з нього всіх незалежних джерел з врахуванням їх внутрішніх опорів (рис. 1.84 д).

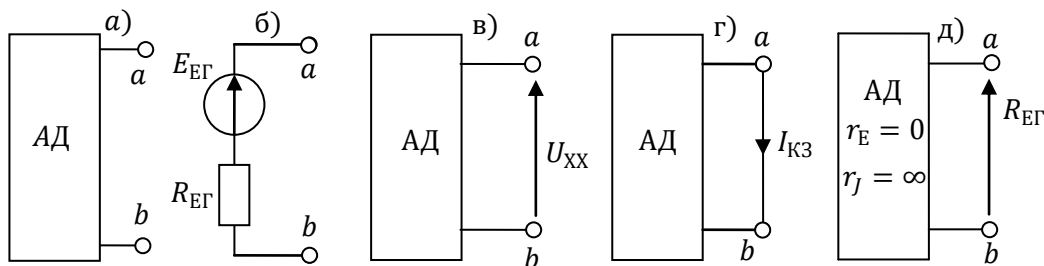


Рисунок 1.84 – Схеми до еквівалентного генератора

Теорема про еквівалентне джерело струму

Будь-який лінійний активний двополюсник (1.85 а) по відношенню до вузлів а та б можна замінити джерелом струму $J_{\text{ЕГ}}$ із внутрішньою провідністю $g_{\text{ЕГ}}$ (рис. 1.85 б), що увімкнені паралельно, величини яких визначаються як:

а) струм еквівалентного джерела $J_{\text{ЕГ}} = I_{\text{КЗ}}$;

б) провідність джерела $g_{\text{ЕГ}} = I_{\text{КЗ}}/U_{\text{ХХ}}$.

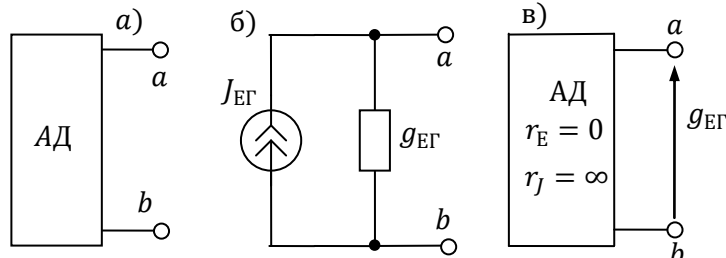


Рисунок 1.85 – Схеми до еквівалентного джерела струму

Провідність $g_{\text{ЕГ}}$ можна розрахувати за схемою двополюсника, якщо вона відома. Тоді, по суті, $g_{\text{ЕГ}}$ є вхідною провідністю двополюсника за умови видалення з нього всіх незалежних джерел з урахуванням їх внутрішніх опорів.

В результаті схему можна представити базовою схемою метода еквівалентного генератора по відношенню до вузлів а та b (рис. 1.86).

Тоді струм у колі визначається

$$I = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R_{\text{Н}}}.$$

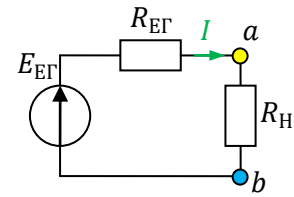


Рисунок 1.86 – Схема

З точки зору математики, теорема про еквівалентний генератор доводиться шляхом зведення системи рівнянь, що описує коло, до одного рівняння. Із схемної точки зору це аналогічно зведенню складної схеми до одноконтурної по відношенню до вузлів ab . Ця теорема відноситься до лінійного двополюсника, тому що у загальному випадку при холостому ході (ХХ) та короткому замиканні (КЗ) струми в самому двополюснику можуть змінюватися.

Пасивний прохідний лінійний чотириполюсник з джерелом струму чи напруги на вході можна також звести до еквівалентного генератора відносно навантаження на виході за допомогою апарату схемних функцій (буде розглянутий нижче).

Якщо на вході чотириполюсника діє джерело напруги (рис. 1.87 а), то

а) опір еквівалентного генератора

$$R_{\text{ЕГ}} = \frac{\Delta_{aa,bb}}{\Delta_{aa}};$$

б) напруга еквівалентного генератора

$$E_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ВХ}} \cdot K_{u.ba} = E \cdot \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}.$$

Якщо на вході чотириполюсника діє джерело струму (рис. 1.87 б), то

а) опір еквівалентного генератора

$$R_{\text{ЕГ}} = \frac{\Delta_{bb}}{\Delta};$$

б) напруга еквівалентного генератора

$$E_{\text{ЕГ}} = J \cdot Z_{ba} = J \cdot \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}.$$

Наведені формули справедливі для матриці провідностей.

Ці співвідношення справедливі, коли чотириполюсник має одну спільну сторону (рис. 1.87), в іншому випадку необхідно використовувати математичний апарат сумарних алгебраїчних доповнень [3].

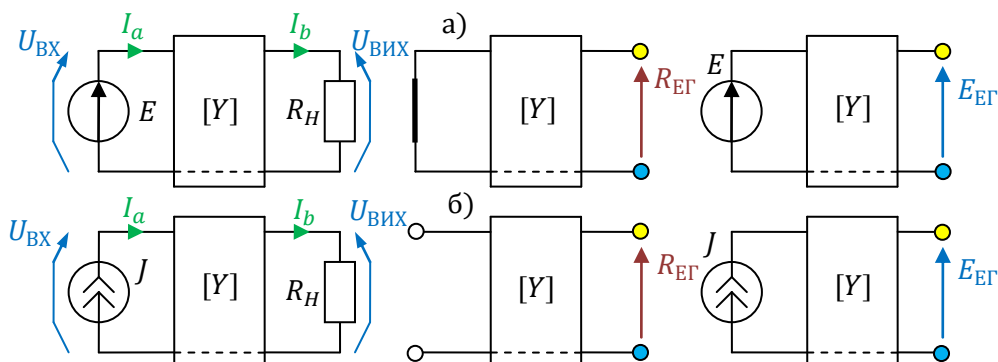


Рисунок 1.87 – Схеми із чотириполюсниками

Тоді для двох випадків згідно **методу еквівалентного генератора** для схеми (рис. 1.88) можна визначити струм

$$I_b = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R_{\text{Н}}}.$$

Нижче наведені приклади розрахунку кіл методом еквівалентного генератора

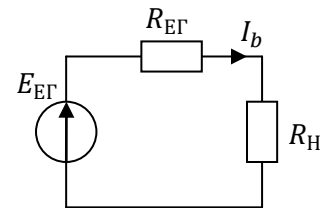
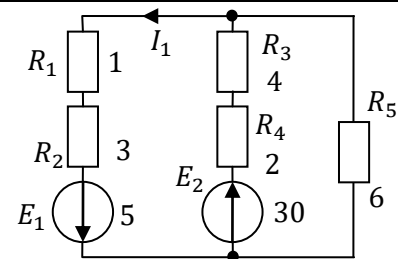


Рисунок 1.88 –
Базова схема МЕГ

Приклад 1.12. У колі (рис. 1.89) визначити струм I_1 у гілці із опором R_1 методом еквівалентного генератора та визначити параметри еквівалентного генератора. Числові значення елементів наведені на схемах: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.



Розв'язання

У колі (рис. 1.89) вилучимо опір R_1 (рис. 1.90 а) та визначимо напругу холостого ходу $U_{\text{ХХ}}$.

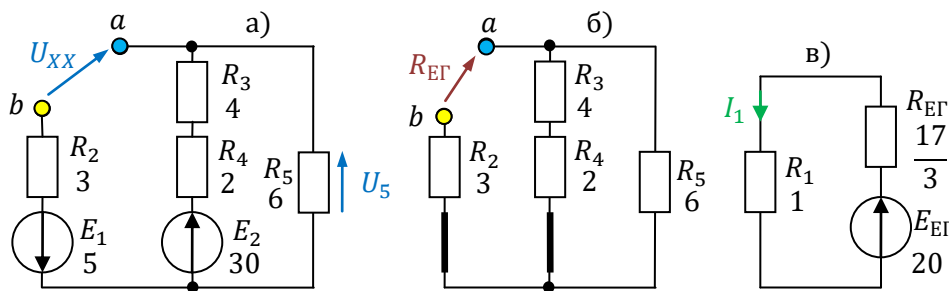


Рисунок 1.90 – Еквівалентні схеми

За формулою дільника напруги

$$U_5 = \frac{E_2 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{30 \cdot 6}{4 + 2 + 6} = 15 \text{ В.}$$

За другим законом Кірхгофа

$$E_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ХХ}} = U_5 + E_1 = 15 + 5 = 20 \text{ В.}$$

За методом еквівалентного генератора $E_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ХХ}} = 20 \text{ В.}$

У колі (рис. 1.90 а) замінимо джерела E_1, E_2 їх внутрішніми опорами, тобто закоротками (рис. 1.90 б) і визначимо опір еквівалентного генератора

$$R_{\text{ЕГ}} = R_2 + \frac{(R_3 + R_4) \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 3 + \frac{(4 + 2) \cdot 4}{4 + 2 + 6} = 3 + \frac{8}{3} = \frac{17}{3} \text{ кОм.}$$

Представимо коло (рис. 1.89) відносно R_1 еквівалентним генератором (рис. 1.90 в) і визначимо струм

$$I_1 = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R_1} = \frac{20}{17/3 + 1} = 3 \text{ мА.}$$

Відповідь: $I_1 = 3 \text{ мА}, E_{\text{ЕГ}} = 20 \text{ В}, R_{\text{ЕГ}} = 17/3 \text{ кОм.}$

Задача 1.13. У колі (рис. 1.91) знайти струм I_2 методом еквівалентного генератора. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

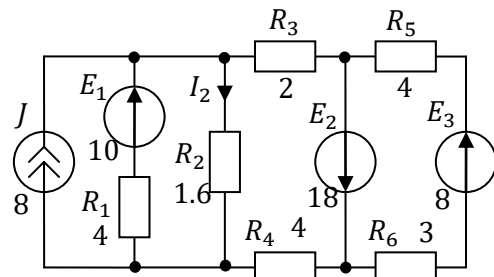


Рисунок 1.91 – Схема

Розв'язання

Для кола (рис. 1.91) джерело E_2 винесемо за вузол (рис. 1.92 а). У результаті гілка ab утворить закоротку, розбивши схему на дві підсхеми, де одна не впливає на іншу. Розглянемо першу підсхему (рис. 1.92), де від'єднаємо опір R_2 і визначимо напругу холостого ходу U_{XX} .

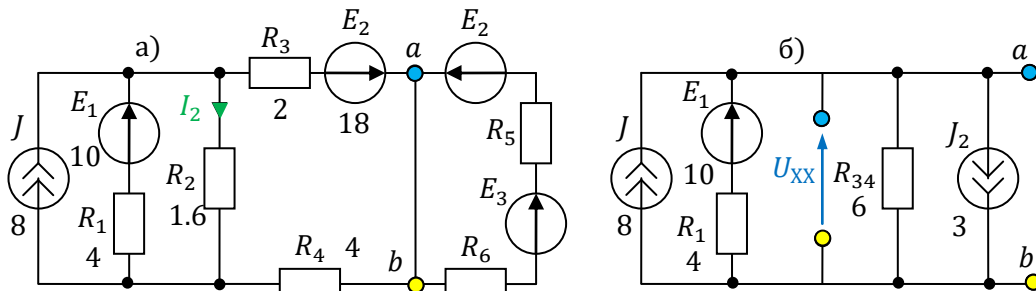


Рисунок 1.92 – Еквівалентні схеми

У першій підсхемі еквівалентні перетворення (рис. 1.92 б, 1.93 а,б)

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 2 + 4 = 6 \text{ кОм};$$

$$J_2 = \frac{E_2}{R_{34}} = \frac{18}{6} = 3 \text{ мА};$$

$$J_3 = J - J_2 = 8 - 3 = 5 \text{ мА};$$

$$E_4 = J_3 \cdot R_{34} = 5 \cdot 6 = 30 \text{ В}.$$

Визначимо струм у колі за законом Ома (рис. 1.93 б)

$$I_4 = \frac{E_4 - E_1}{R_1 + R_{34}} = \frac{30 - 10}{4 + 6} = 2 \text{ мА};$$

$$U_1 = I_4 \cdot R_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ В}; \quad U_{34} = I_4 \cdot R_{34} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ В}.$$

За другим законом Кірхгофа $U_1 = I_4 \cdot R_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ В}$

$$U_{XX} = U_1 + E_1 = 8 + 10 = 18 \text{ В};$$

$$U_{XX} = E_4 - U_{34} = 30 - 12 = 18 \text{ В}.$$

У колі (рис. 1.93 б) замінимо джерела E_1 , E_4 їх внутрішніми опорами, тобто закоротками (рис. 1.93 в) і визначимо опір еквівалентного генератора

$$R_{\text{ЕГ}} = \frac{R_1 \cdot R_{34}}{R_1 + R_{34}} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = 2.4 \text{ кОм}.$$

Параметри еквівалентного генератора (рис. 1.93 г) визначаються такими числовими значеннями $R_{\text{ЕГ}} = 2.4 \text{ кОм}$, $E_{\text{ЕГ}} = U_{XX} = 18 \text{ В}$.

Представимо коло (рис. 1.91) відносно R_2 еквівалентним генератором (рис. 1.92 в) і визначимо струм

$$I_2 = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R_2} = \frac{18}{2.4 + 1.6} = 4.5 \text{ мА.}$$

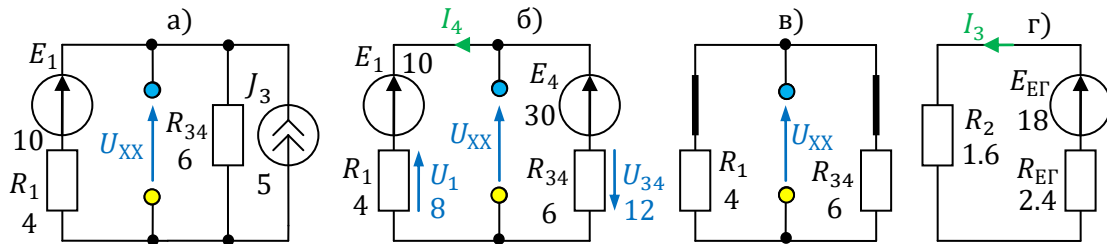


Рисунок 1.92 – Еквівалентні схеми

Параметри еквівалентного генератора (рис. 1.92 г) визначаються такими числовими значеннями $R_{\text{ЕГ}} = 2.4 \text{ кОм}$, $E_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ХХ}} = 18 \text{ В}$.

Представимо коло (рис. 1.91) відносно R_2 еквівалентним генератором (рис. 1.92 в) і визначимо струм

$$I_2 = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R_2} = \frac{18}{2.4 + 1.6} = 4.5 \text{ мА.}$$

Відповідь: $I_2 = 4.5 \text{ мА}$.

Приклад 1.14. У колі (рис. 1.93) визначити параметри еквівалентного генератора відносно опору R_H та струм у навантаженні I_H . Числові значення елементів кіл: опори в кОм, струми в мА, S в мА/В. Джерело струму $J_2 = Su_{20}$ є керованим.

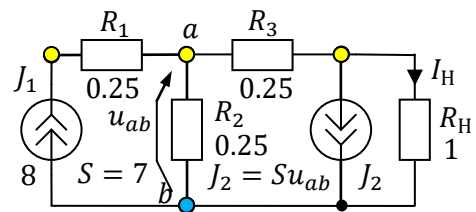


Рисунок 1.93 – Схема

Розв'язання

Всі опори беремо у кОм, струми – мА, напруга – В. Застосуємо апарат схемних функцій.

Від'єднаємо опір R_H та пронумеруємо вузли (рис. 1.94 а).

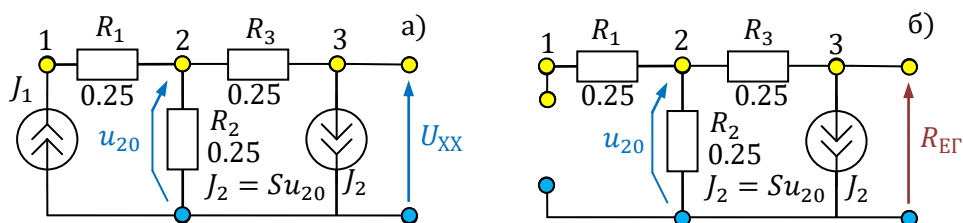


Рисунок 1.94 – Еквівалентні схеми

Матриця провідностей кола (рис. 1.94 а):

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 & 0 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 & -g_3 \\ 0 & -g_3 + S & g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & -4 \\ 0 & -4 + 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Напруга еквівалентного генератора (рис. 1.94 а):

$$E_{\text{ЕГ}} = U_{\text{ХХ}} = J_1 Z_{\text{пер.31}} = J_1 \frac{\Delta_{13}}{\Delta} = 8 \cdot \frac{-12}{176} = -\frac{6}{11} \text{ В},$$

де визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (48 + 12) - 4 \cdot 16 = 240 - 64 = 176;$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -12; \quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 16 = 32.$$

У колі (рис. 1.94 а) замінимо джерело J_1 його внутрішнім опором, тобто розривом (рис. 1.94 б) та визначимо опір еквівалентного генератора (рис. 1.94 б)

$$R_{\text{ЕГ}} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = \frac{32}{176} = \frac{2}{11} \text{ кОм}.$$

Представимо коло (рис. 1.93) відносно R_H еквівалентним генератором (рис. 1.95) і визначимо струм

$$I_H = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R_H} = \frac{6/11}{2/11 + 1} = \frac{6}{13} \text{ мА}.$$

Відповідь: $E_{\text{ЕГ}} = -6/11 \text{ В}$, $R_{\text{ЕГ}} = 2/11 \text{ кОм}$, $I_H = 6/13 \text{ мА}$.

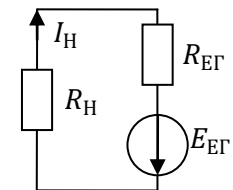


Рисунок 1.95 -
Схема

Приклад 1.15. У колі (рис. 1.96) визначити струми через опір R_4 методом еквівалентного генератора. Значення елементів наведені на схемах: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

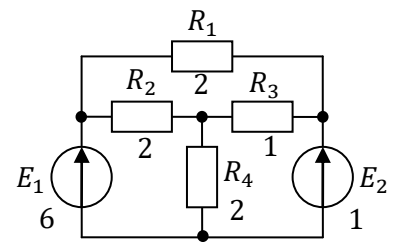


Рисунок 1.96 – Схема

Розв'язання

У колі (рис. 1.96) від'єднаємо опір R_4 (рис. 1.97 а)

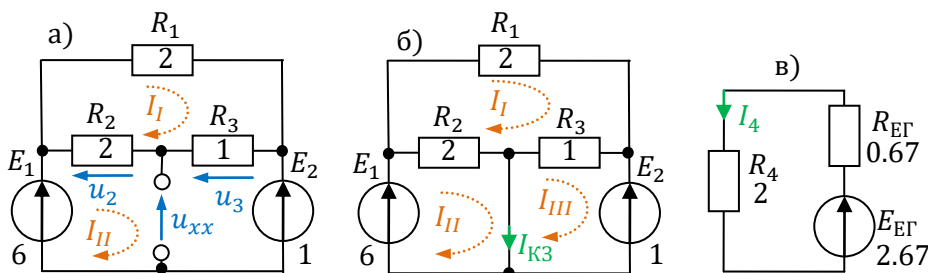


Рисунок 1.97 – Еквівалентні схеми

У колі (рис. 1.97 а) сформуємо систему на основі МКС

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)I_I - (R_2 + R_3)I_{II} = 0; \\ -(R_2 + R_3)I_I + (R_2 + R_3)I_{II} = E_1 - E_2. \end{cases}$$

Підставимо числові значення

$$\begin{cases} 5I_I - 3I_{II} = 0; \\ -3I_I + 3I_{II} = 5. \end{cases}$$

Система у матричній формі запису

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Визначимо контурні струми

$$I = R^{-1} \cdot E = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 4.167 \end{bmatrix}.$$

За першим законом Кірхгофа визначимо

$$I_2 = I_{II} - I_I = 4.167 - 2.5 = 1.667 \text{ мА}.$$

За законом Ома

$$u_2 = I_2 \cdot R_2 = 1.667 \cdot 2 = 3.334 \text{ В};$$

$$u_3 = I_2 \cdot R_3 = 1.667 \cdot 1 = 1.667 \text{ В}.$$

За другим законом Кірхгофа

$$u_{XX} = E_1 - u_2 = 6 - 3.334 = 2.67 \text{ В};$$

$$u_{XX} = E_2 + u_3 = 1 + 1.667 = 2.67 \text{ В}.$$

У колі (рис. 1.97 б) сформуємо систему на основі МКС

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)I_I - R_2I_{II} - R_3I_{III} = 0; \\ -R_2I_I + R_2I_{II} = E_1; \\ -R_3I_I + R_3I_{III} = -E_2. \end{cases}$$

Підставимо числові значення

$$\begin{cases} 5I_I - 2I_{II} - I_{III} = 0; \\ -2I_I + 2I_{II} = 6; \\ -I_I + I_{III} = -1. \end{cases}$$

Система у матричній формі запису

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Визначимо контурні струми

$$I = R^{-1} \cdot E = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 5.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}.$$

За першим законом Кірхгофа визначимо струм короткого замикання

$$I_{КЗ} = I_{II} - I_{III} = 5.5 - 1.5 = 4 \text{ мА}.$$

За законом Ома визначимо опір еквівалентного генератора

$$R_{ЕГ} = \frac{u_{XX}}{I_{КЗ}} = \frac{2.67}{4} = 0.67 \text{ кОм}.$$

Представимо коло (рис. 1.96) відносно R_H еквівалентним генератором (рис. 1.97 в) і визначимо струм

$$I_4 = \frac{E_{ЕГ}}{R_{ЕГ} + R_4} = \frac{2.67}{0.67 + 2} = 1 \text{ мА}.$$

Як бачимо значення струму I_4 , що було розраховане методом еквівалентного генератора збіглося зі значення того ж струму, що був розрахований методом контурних струмів (дивись приклад 1.5, стор. 34).

Відповідь: $I_4 = 1 \text{ мА}.$

1.10.2. Умова передачі максимальної потужності у навантаження

Передача максимальної потужності від генератора у навантаження є однією з актуальних задач у теорії передачі інформації, тому визначимо ці умови.

Визначимо потужність у навантаженні кола (рис. 1.98 а)

$$P_H = I^2 r_H = \frac{E_G^2}{(r_G + r_H)^2} r_H.$$

У випадку коли $r_G = \text{const}$ для визначення значення r_H , що відповідає максимальній потужності визначимо похідну від потужності за опором навантаження r_H та прирівняємо похідну до нуля

$$\frac{dP_H}{dr_H} = \frac{(r_G + r_H)^2 - 2r_H(r_G + r_H)}{(r_G + r_H)^4} E_G^2 = 0.$$

У результаті одержимо

$$\begin{aligned} (r_G + r_H)^2 - 2r_H(r_G + r_H) &= 0; \\ r_G^2 + 2r_G r_H + r_H^2 - 2r_G r_H - 2r_H^2 &= 0. \end{aligned}$$

Спростимо вираз

$$r_G + r_H - 2r_H = 0$$

Звідси одержимо

$$r_G = r_H.$$

У результаті одержимо максимальну потужність (рис. 1.98 б)

$$P_{H.\max} = \left[\frac{E_G}{r_H + r_H} \right]^2 r_H = \frac{E_G^2}{4r_H^2} r_H = \frac{E_G^2}{4r_H}.$$

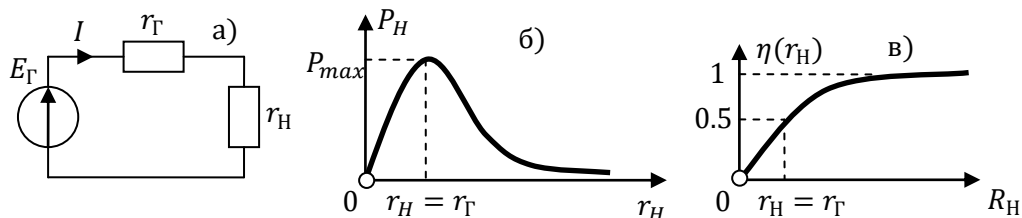


Рисунок 1.98 – Схема генератора та його характеристики

Коефіцієнт корисної дії

$$\eta = \frac{P_H}{P} = \frac{I^2 r_H}{I^2 (r_H + r_G)} = \frac{r_H}{r_H + r_G}.$$

Очевидно, при виділенні у навантаженні максимальної потужності за умови $r_H = r_G$, $\eta = 0.5$. При великих потужностях (електричні мережі), працювати з таким ККД неприпустимо, оскільки половина потужності буде передаватись до навантаження, а інша половина витратиться. Але при малих потужностях (декілька міліват), у різних пристроях радіоелектроніки і автоматики працюють з ККД $\eta = 0.5$ для того, щоб до навантаження надходила максимальна потужність (рис. 1.98 в).

Вибір опору навантаження r_H , що дорівнює вхідному опору r_G активного двополюсника, називають *узгодженням навантаження*. Залежність потужності

на опорі навантаження від значення цього опору $P_H = f(r_H)$ показана на рис. 1.98 б.

Якщо $r_H = \text{const}$, то потужність буде максимальна, якщо $r_T = 0$, тоді потужність визначаємо виразом

$$P_{H.\max} = \frac{E_{\Gamma}^2}{r_H}$$

Це впливає, якщо дослідити функцію потужності на екстремуми при $r_H = \text{const}$ та змінному значенню опору генератора r_T .

Нижче наведені приклади розрахунку.

Приклад 1.16. У колі (рис. 1.99) визначити при якому опорі R_H потужність, що він споживає буде максимальною. Визначити цю потужність. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

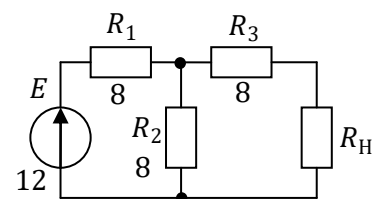


Рисунок 1.99 – Схема

Розв'язання

Представимо коло еквівалентним генератором по відношенню до опору R_H . Визначимо параметри еквівалентного генератора (рис. 1.100 а). Від'єднаємо опір навантаження R_H (рис. 1.100 б) та визначимо напругу холостого ходу за формулою дільника напруги

$$U_2 = U_{XX} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{12 \cdot 8}{8 + 8} = 6 \text{ В};$$

$$E_{\text{ЕГ}} = U_{XX} = 6 \text{ В}.$$

Зобразимо схему (рис. 1.100 в) для розрахунку опору еквівалентного генератора, замінивши джерело напруги E його внутрішнім опором, тобто закороткою у місці його ввімкнення

$$R_{\text{ЕГ}} = R_{\text{ВХ}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} + 8 = 4 + 8 = 12 \text{ кОм}.$$

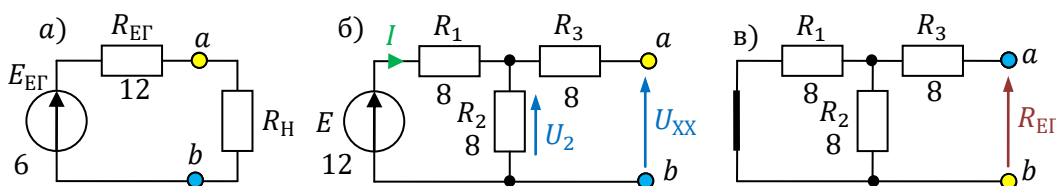


Рисунок 1.100 – Еквівалентні схеми

Умова передачі максимальної потужності у навантаженні при змінному опорі R_H

$$R_H = R_{\text{ЕГ}} = 12 \text{ кОм}.$$

Максимальна потужність у навантаженні

$$P_{H.\max} = \frac{E_{\text{ЕГ}}^2}{4R_H} = \frac{6^2}{4 \cdot 12} = 0.75 \text{ мВт}.$$

Відповідь: $R_H = 12 \text{ кОм}$, $P_{H.\max} = 0.75 \text{ мВт}$.

Приклад 1.17. У колі (рис. 1.101) визначити при якому опорі R_H потужність, що він споживає буде максимальною. Визначити цю потужність. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

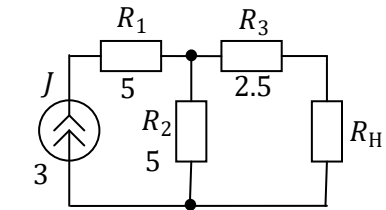


Рисунок 1.101 – Схема

Розв'язання

Представимо коло еквівалентним генератором по відношенню до опору R_H (рис. 1.102 а). Визначимо параметри еквівалентного генератора (рис. 1.102 а). Від'єднаємо опір навантаження R_H (рис. 1.101) та визначимо напругу холостого ходу та еквівалентного генератора

$$U_2 = U_{XX} = J \cdot R_2 = 3 \cdot 5 = 15 \text{ В};$$

$$E_{EG} = U_{XX} = 6 \text{ В}.$$

Зобразимо схему (рис. 1.102 в) для розрахунку опору еквівалентного генератора, замінивши джерело струму J його внутрішнім опором, тобто закороткою у місці його ввімкнення

$$R_{EG} = R_{BX} = R_2 + R_3 = 5 + 2.5 = 7.5 \text{ кОм}.$$

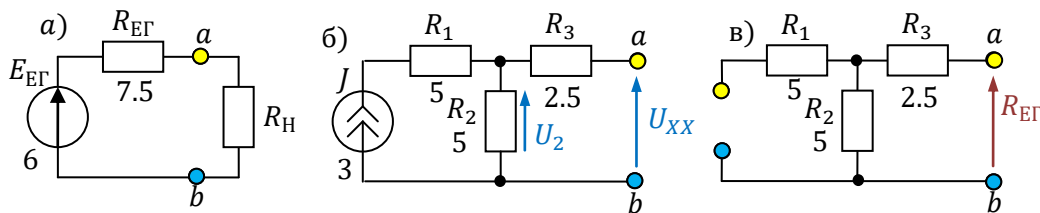


Рисунок 1.102 – Еквівалентні схеми

Умова передачі максимальної потужності у навантаженні при змінному опорі R_H

$$R_H = R_{EG} = 7.5 \text{ кОм}.$$

Максимальна потужність у навантаженні

$$P_{H.max} = \frac{E_{EG}^2}{4R_H} = \frac{15^2}{4 \cdot 7.5} = 7.5 \text{ мВт}.$$

Відповідь: $R_H = 7.5 \text{ кОм}$, $P_{H.max} = 7.5 \text{ мВт}$.

1.10.3. Принцип взаємності

Принцип взаємності визначає зв'язок між струмами та напругами у двох гілках пасивного кола при дії в них джерел.

Лінійні пасивні кола (ПД) мають властивість взаємності.

Принцип взаємності для джерел напруги:

Якщо у k -му контурі деякого пасивного кола ПК увімкнене джерело E_k , що викликає у m -му контурі струм I_m (рис. 1.103 а), то теж джерело, перенесене у m -й контур викличе у k -му контурі струм тієї ж величини та фази (рис. 1.103 б), причому $I_m = I_k$.

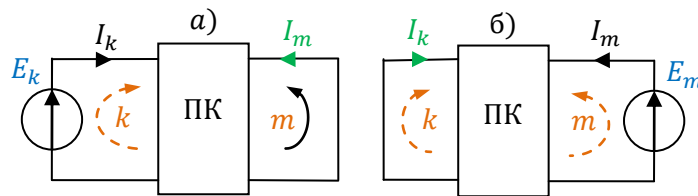


Рисунок 1.103 – Схеми до принципу взаємності для джерел напруги

Отже, під дією джерела E_k у m -му контурі виникає струм I_m . Складемо систему рівнянь за МКС (рис. 1.103 а)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ E_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ I_m \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

За методом Крамера

$$I_m = \frac{\Delta_m}{\Delta},$$

де Δ – це визначник матриці опорів, Δ_m – у матрицю опорів замість m -го стовпчика підставляємо матрицю джерел напруги.

Визначники

$\Delta =$	R_{11}	R_{12}	...	R_{1n}
	R_{21}	R_{22}	...	
			...	
			...	
	R_{1n}	R_{n2}	...	R_{nn}

$\Delta_{km} =$	k	m			
		R_{11}	0		R_{1n}
			0		
			E_k		
			0		
		R_{1n}	0		R_{nn}

Отже, визначимо струм під дією джерела E_k у m -му контурі (рис. 1.103 б)

$$I_m = \frac{\Delta_m}{\Delta} = E_k \frac{\Delta_{km}}{\Delta}.$$

Складемо систему рівнянь за МКС (рис. 1.103 б)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ E_m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ I_k \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

За методом Крамера

$$I_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},$$

де Δ – це визначник матриці опорів, Δ_k – у матрицю опорів замість k -го стовпчика підставляємо матрицю джерел напруги.

Визначники

$\Delta =$	R_{11}	R_{12}	...	R_{1n}
	R_{21}	R_{22}	...	
			...	
			...	
	R_{1n}	R_{n2}	...	R_{nn}

$\Delta_{mk} =$	m	k			
		R_{11}	0		R_{1n}
			0		
			E_m		
			0		
		R_{1n}	0		R_{nn}

Отже, визначимо струм під дією джерела E_m у k -му контурі (рис. 1.103 б)

$$I_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} = E_m \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}.$$

Розділимо один вираз на інший

$$\frac{I_m}{I_k} = \frac{E_k \cdot \Delta_{km}}{E_m \cdot \Delta_{mk}}.$$

Якщо матриця опорів, що складена по МКС, симетрична відносно головної діагоналі, то $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$, тоді одержимо

$$\frac{I_m}{I_k} = \frac{E_k}{E_m}.$$

Якщо прийняти, що $E_k = E_m$, то $I_k = I_m$, що і є принципом взаємності.

Цей принцип справедливий і для струмів у гілках.

Принцип взаємності для джерел струму:

Якщо між вузлами a та b деякого пасивного кола ПК увімкнене джерело J_k , що викликає на іншій ділянці km напругу u_{km} (рис. 1.104 а), то теж джерело, перенесене на ділянку km викличе між вузлами a та b напругу тієї же величини та фази (рис. 1.104 б), причому $u_{km} = u_{ab}$.

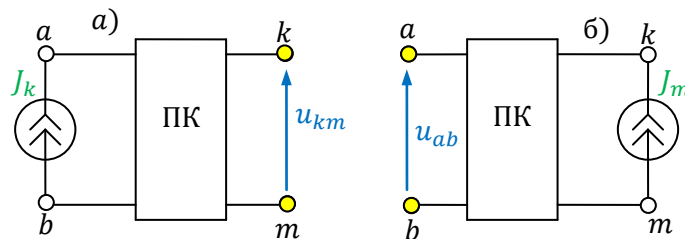


Рисунок 1.104 – Схеми до принципу взаємності для джерел струму

Отже, під дією джерела J_k на іншій ділянці km виникає напруга u_{km} . Складемо систему рівнянь за МВН (рис. 1.104 а)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ J_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdots \\ u_{km} \\ \cdots \end{bmatrix}.$$

За методом Крамера

$$u_{km} = \frac{\Delta_m}{\Delta},$$

де Δ – це визначник матриці провідностей, Δ_m – у матрицю провідностей замість m -го стовпчика підставляємо матрицю джерел струму.

Визначники

$\Delta =$	g_{11}	g_{12}	...	g_{1n}
	g_{21}	g_{22}	...	
			...	
			...	
	g_{1n}	g_{n2}	...	g_{nn}

$\Delta_{km} =$	k	m		
		g_{11}	0	g_{1n}
			0	
			J_k	
			0	
		g_{1n}	0	g_{nn}

Отже, визначимо напругу

$$u_{km} = \frac{\Delta_m}{\Delta} = J_k \frac{\Delta_{km}}{\Delta}.$$

Складемо систему рівнянь за МКС (рис. 1.104 б)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ J_m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots \\ u_{ab} \\ \ddots \end{bmatrix}.$$

За методом Крамера

$$u_{ab} = \frac{\Delta_k}{\Delta},$$

де Δ – це визначник матриці провідностей, Δ_k – у матрицю провідностей замість k -го стовпчика підставляємо матрицю джерел струму.

Визначники

$\Delta =$	g_{11}	g_{12}	...	g_{1n}
	g_{21}	g_{22}	...	
			...	
			...	
	g_{1n}	g_{n2}	...	g_{nn}

$\Delta_{mk} =$	m	k		
		g_{11}	0	g_{1n}
			0	
			J_m	
			0	
		g_{1n}	0	g_{nn}

Тоді під дією джерела J_m між вузлами a та b (рис. 1.104 б) виникає напруга

$$u_{ab} = \frac{\Delta_k}{\Delta} = J_m \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}.$$

Розділимо один вираз на інший

$$\frac{u_{km}}{u_{ab}} = \frac{J_k \cdot \Delta_{km}}{J_m \cdot \Delta_{mk}}.$$

Якщо матриця провідностей, що складена за МВН, симетрична відносно головної діагоналі, то $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$, тоді одержимо

$$\frac{u_{km}}{u_{ab}} = \frac{J_k}{J_m}.$$

Якщо прийняти, що $J_k = J_m$, то $u_{km} = u_{ab}$, що і є принципом взаємності.

Кола, у яких виконується принцип взаємності називається взаємними.

Таким чином, принцип взаємності виражає певну симетрію між величинами на вході кола, до якого прикладається дія, та реакцією на цю дію на виході кола. Цей принцип діє лише у пасивних колах (не містять керованих джерел), оскільки ці джерела вносять не симетрію у матрицю вузлових провідностей чи контурних опорів.

Нижче наведений приклад розрахунків

Задача 1.18. У пасивному колі ПК (рис. 1.105) матриця опорів, що сформована на основі методу контурних струмів, симетрична відносно головної діагоналі.

Якщо $E_1 = 3 \text{ В}$, $E_2 = 0$, то $I_2 = 4 \text{ мА}$. Чому буде дорівнювати I_1 , якщо $E_1 = 0$, $E_2 = 6 \text{ В}$?

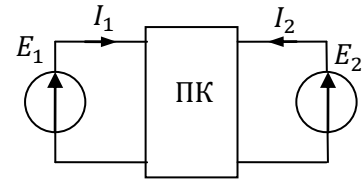


Рисунок 1.105 – Схема

Розв'язання

В умові задачі задано, що: $E_1 = 3 \text{ В}$, $E_2 = 0$, то $I_2 = 4 \text{ мА}$. Зобразимо схему, що відповідає цим даним (рис. 1.106).

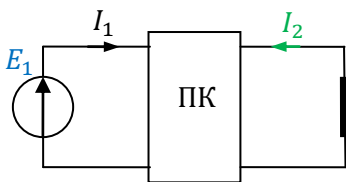


Рисунок 1.106 –
Еквівалентна схема

Під дією джерела напруги E_1 виникає струм I_2 . Визначимо цей струм за МКС:

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = E_1 \cdot \frac{\Delta_{12}}{\Delta};$$

$$I_2 = 3 \cdot \frac{\Delta_{12}}{\Delta}.$$

В умові задачі задано, що: $E_1 = 0$, $E_2 = 6 \text{ В}$. Зобразимо схему, що відповідає цим даним (рис. 1.107).

Під дією джерела напруги E_2 виникає струм I_1 . Визначимо цей струм за МКС:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = E_2 \cdot \frac{\Delta_{21}}{\Delta};$$

$$I_1 = 6 \cdot \frac{\Delta_{12}}{\Delta}.$$

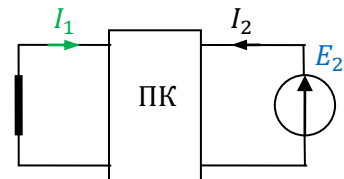


Рисунок 1.107 –
Еквівалентна схема

Оскільки матриця опорів ПК для МКС цієї схеми симетрична відносно головної діагоналі, то $\Delta_{12} = \Delta_{21}$. Отже, розділимо перший вираз на другий

$\frac{I_2}{I_1} = \frac{E_1}{E_2}.$	$=>>$	$I_1 = I_2 \cdot \frac{E_2}{E_1} = 4 \cdot \frac{6}{3} = 8 \text{ мА}.$

Відповідь: $I_1 = 8 \text{ мА}.$

1.10.4. Теорема компенсації

Теорема компенсації дає можливість заміни будь-яку гілку електричного кола джерелом напруги чи джерелом струму.

Теорема компенсації для джерела напруги

Струм I , що протікає через опір R у колі (рис. 1.108 а), не зміниться, якщо цей опір замінити джерелом E_E , що спрямоване назустріч струму (рис. 1.108 б), причому $E_E = u_{ab}$.

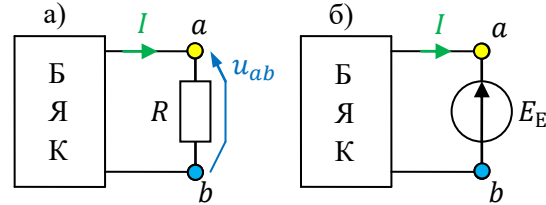


Рисунок 1.108 – Схема із джерелом E

Доводиться теорема за допомогою другого закону Кірхгофа та закону Ома. Величина джерела напруги E_E залежить від струму, отже є залежним джерелом, тобто джерелом напруги, що керується струмом, оскільки $E_E = u_{ab} = RI$.

Отже, джерело напруги, що керується струмом $E = \gamma I$ (рис. 1.110 а), що через нього протікає можна замінити опором (рис. 1.110 б), причому $R_E = \gamma$.

Справедливе і обернене твердження

Теорема компенсації для джерела струму

Струм I , що протікає через опір R у колі (рис. 1.109 а), не зміниться, якщо цей опір замінити джерелом J_E , що спрямоване за напрямком струму (1.109 б), причому $J_E = I$.

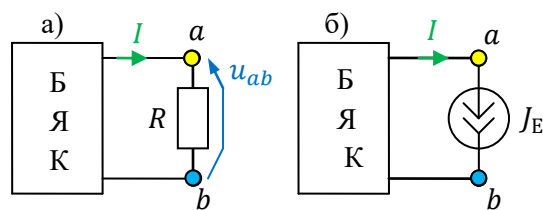


Рисунок 1.109 – Схема із джерелом J

Доводиться теорема за допомогою першого закону Кірхгофа та закону Ома. Величина джерела струму J_E залежить від напруги, отже є залежним джерелом, тобто джерелом струму, що керується напругою, оскільки $J_E = I = gu_{ab}$.

Таким чином, джерело струму, що керується напругою, що до нього прикладена $J = Su_{ba}$ (рис. 1.110 в), можна замінити провідністю (рис. 1.110 г), причому $g_E = S$.

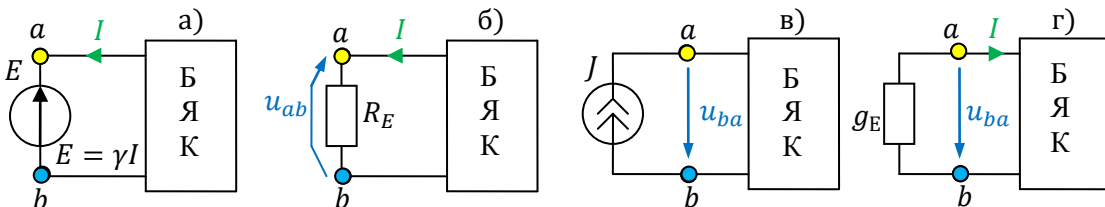


Рисунок 1.110 – Приклад використання теореми компенсації

Нижче наведений приклад розрахунків

Приклад 1.19. Знайти вхідний опір кола (рис. 1.111). Джерело напруги $E = \mu u_2$ є керованим, де $\mu = 0.5$. Числові значення елементів наведені на схемі: опори – кОм, струми – мА, напруги – В.

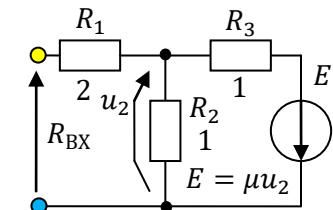


Рисунок 1.111 – Схема

Розв'язання

У колі (рис. 1.111) перетворимо джерело напруги на джерело струму (рис. 1.112 а)

$$J = \frac{E}{R_3} = \frac{\mu u_2}{R_3} = \mu g_3 u_2.$$

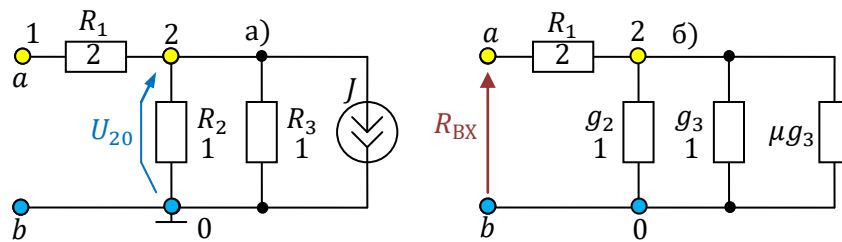


Рисунок 1.112 – Еквівалентні схеми

1 спосіб

Одержали джерело струму кероване напругою на самому собі. Таке джерело згідно теореми компенсації можна замінити резистивною гілкою із еквівалентною провідністю $g_E = \mu g_3$ (рис. 1.99 б).

Провідність паралельних гілок

$$g_{20} = g_2 + g_3 + \mu g_3 = 1 + 1 + 0.5 \cdot 1 = 2.5 \text{ мСім.}$$

Вхідний опір кола (рис. 1.99 б)

$$R_{BX} = R_1 + \frac{1}{g_{20}} = 2 + \frac{1}{2.5} = 2 + 0.4 = 2.4 \text{ кОм.}$$

2 спосіб

Для кола (рис. 1.99 а) складемо систему рівнянь на основі МВН

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\mu g_3 U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

Перенесемо вираз із матриці струмів у матрицю провідностей

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 + \mu g_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 + 1 + 1 + 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 3 \end{bmatrix} \text{ мСім.} \end{aligned}$$

Із матриці визначимо вхідний опір

$$R_{BX} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{3}{1.5 - 0.25} = \frac{3}{1.25} = 2.4 \text{ кОм.}$$

Відповідь: $R_{BX} = 2.4 \text{ кОм.}$

1.11. Розрахунок складних кіл різними методами

Приклад 1.20. У колі (рис. 1.113) знайти всі струми у гілках МКС чи МВН, перевірити виконання закону балансу потужностей. Струм I_2 визначити МЕГ та принципом суперпозиції. Числові значення елементів наведені на схемі: опори – кОм, струми – мА, напруги – В.

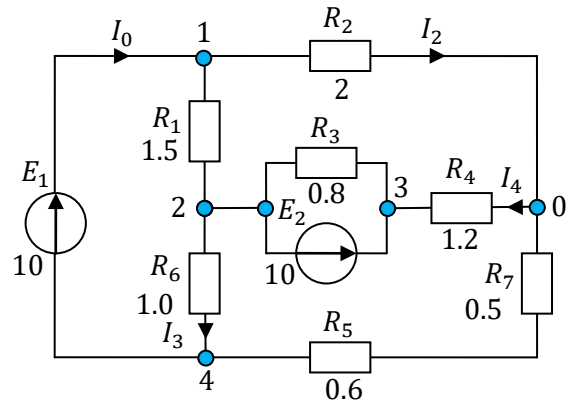


Рисунок 1.113 – Схема

Розв'язання

Розрахунок всіх струмів методом контурних струмів

Оскільки опір R_3 та джерело напруги E_2 ввімкнені паралельно, то напруга на них однакова, тому відкинемо опір R_3 і розрахунки будемо вести для спрощеної схеми (рис. 1.114 а).

Для даної схеми (рис. 1.114) раціональніше використати МКС. У колі (рис. 1.114) оберемо додатні напрямки протікання контурних струмів за годинниковою стрілкою

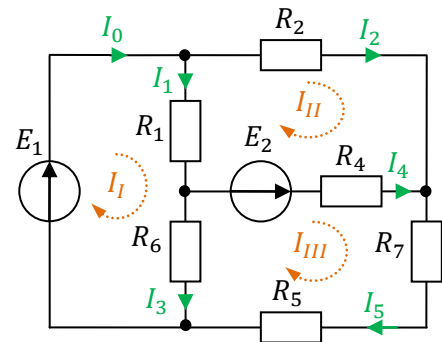


Рисунок 1.114 – Схема до МКС

Складемо систему рівнянь за МКС

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ -E_2 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_6 & -R_1 & -R_6 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_4 & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix}.$$

Нижче наведений скрін розрахунків у програмі MathCAD (рис. 1.115).

Сформуємо матрицю опорів за МКС (напрямки обходу контурів обидвома стрілками)

$$\underline{R} := \begin{pmatrix} R_1 + R_6 & -R_1 & -R_6 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_4 & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & -1.5 & -1 \\ -1.5 & 4.7 & -1.2 \\ -1 & -1.2 & 3.3 \end{pmatrix}$$

Сформуємо матрицю джерел

Контурні струми за МКС

$$\underline{E} := \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_2 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{I} := \underline{R}^{-1} \cdot \underline{E} = \begin{pmatrix} 7.414 \\ 1.748 \\ 5.913 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1.115 – Скрін розрахунків у програмі MathCAD

Визначимо контурні струми через обернену матрицю

$$I = R^{-1} \cdot E = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.414 \\ 1.748 \\ 5.913 \end{bmatrix}.$$

За першим законом Кірхгофа визначимо струми у гілках

$$I_0 = I_I = 7.414 \text{ мА}; \quad I_2 = I_{II} = 1.748 \text{ мА}; \quad I_5 = I_{III} = 5.913 \text{ мА}.$$

Тепер повернемося для початкової схеми (рис. 1.116) і визначимо струми у гілках за першим законом Кірхгофа та законом Ома

$$I_1 = I_0 - I_2 = 7.414 - 1.748 = 5.666 \text{ мА};$$

$$I_3 = I_0 - I_5 = 7.414 - 5.913 = 1.501 \text{ мА};$$

$$I_4 = I_5 - I_2 = 5.913 - 1.748 = 4.165 \text{ мА};$$

$$I_{R3} = \frac{E_2}{R_3} = \frac{10}{0.8} = 12.5 \text{ мА};$$

$$I_{E2} = I_{R3} + I_4 = 12.5 + 4.165 = 16.665 \text{ мА}.$$

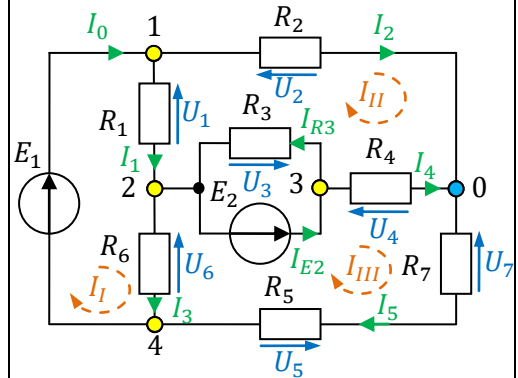


Рисунок 1.116 – Схема до МКС із струмами

Визначимо напруги за законом Ома

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 8.499 \text{ В};$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = 3.496 \text{ В};$$

$$U_3 = I_{R3} \cdot R_3 = 10 \text{ В};$$

$$U_4 = I_4 \cdot R_4 = 4.997 \text{ В};$$

$$U_5 = I_5 \cdot R_5 = 3.548 \text{ В};$$

$$U_6 = I_3 \cdot R_6 = 1.501 \text{ В};$$

$$U_7 = I_5 \cdot R_7 = 2.956 \text{ В}.$$

Перевіримо виконання другого закону Кірхгофа

а) контур I:

$$\begin{aligned} U_1 + U_6 &= E_1, \\ 8.499 + 1.501 &= 10, \\ 10 &= 10; \end{aligned}$$

б) контур II:

$$\begin{aligned} U_4 + U_5 + U_7 &= U_6 + E_2, \\ 4.997 + 3.548 + 2.956 &= 1.501 + 10, \\ 11.501 &= 11.501; \end{aligned}$$

в) контур III:

$$\begin{aligned} U_1 + U_4 &= U_2 + U_3, \\ 8.499 + 4.997 &= 3.496 + 10, \\ 13.496 &= 13.496; \end{aligned}$$

Потужність споживачів

$$\begin{aligned} P_{\text{СП}} &= I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_6 + I_4^2 \cdot R_4 + I_{R3}^2 \cdot R_3 + I_5^2 \cdot (R_5 + R_7) = \\ &= 240.784 \text{ мВт}. \end{aligned}$$

Потужність джерел

$$P_{\text{ДЖ}} = E_1 \cdot I_0 + E_2 \cdot I_{E2} = 10 \cdot 7.414 + 10 \cdot 16.665 = 240.784 \text{ мВт}.$$

Оскільки $P_{\text{СП}} = P_{\text{ДЖ}}$, то закон балансу потужностей виконується.

Нижче наведений скрін розрахунків у програмі MathCAD (рис. 1.117).

Визначимо струми у гілках

$$I_0 := I_0 = 7.414 \quad I_2 := I_1 = 1.748 \quad I_5 := I_2 = 5.913$$

$$I_1 := I_0 - I_2 = 5.666 \quad I_3 := I_0 - I_5 = 1.501 \quad I_4 := I_5 - I_2 = 4.165$$

$$I_{r3} := \frac{E_2}{R_3} = 12.5 \quad I_{e2} := I_4 + I_{r3} = 16.665 \quad +$$

За законом Ома визначимо напруги на елементах

$$U_1 := I_1 \cdot R_1 = 8.499 \quad U_2 := I_2 \cdot R_2 = 3.496 \quad U_3 := I_{r3} \cdot R_3 = 10 \quad U_4 := I_4 \cdot R_4 = 4.997$$

$$U_5 := I_5 \cdot R_5 = 3.548 \quad U_6 := I_3 \cdot R_6 = 1.501 \quad U_7 := I_5 \cdot R_7 = 2.956$$

Перевіримо другий закон Кірхгофа

$$U_1 + U_6 = 10 \quad U_6 + E_2 = 11.501 \quad U_1 + U_4 = 13.496$$

$$E_1 = 10 \quad U_4 + U_7 + U_5 = 11.501 \quad U_2 + U_3 = 13.496$$

Розрахуємо закон балансу потужностей

$$Pr := I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_{r3}^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot (R_5 + R_7) + I_3^2 \cdot R_6 = 240.784$$

$$Pe := E_1 \cdot I_0 + E_2 \cdot I_{e2} = 240.784$$

Рисунок 1.117 – Скрін розрахунків у програмі MathCAD

Розрахунок струму I_2 принципом суперпозиції

У колі (рис. 1.113) нехай діє лише джерело E_1 , а джерело E_2 замінимо внутрішнім опором, тобто закороткою. Оберемо додатні напрямки протікання контурних струмів (рис. 1.118) та складемо систему рівнянь за МКС

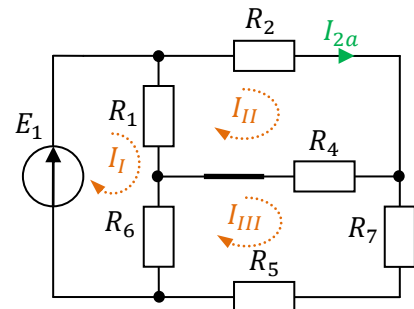


Рисунок 1.118 – Схема без джерела E_2

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_6 & -R_1 & -R_6 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_4 & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix}.$$

Нижче наведений скрін розрахунків у програмі MathCAD (рис. 1.119).

Розрахуємо струм I_2 принципом суперпозиції

Нехай у колі діє лише одне джерело напруги E_1

Сформуємо матрицю джерел

Контурні струми за МКС

$$E := \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I := R^{-1} \cdot E = \begin{pmatrix} 7.234 \\ 3.162 \\ 3.342 \end{pmatrix}$$

Струм через опір R_1 під дією лише E_1

$$I_{2a} := I_I = 3.162$$

Рисунок 1.119 – Скрін розрахунків у програмі MathCAD

Визначимо вузлові напруги через обернену матрицю

$$I = R^{-1} \cdot E = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.234 \\ 3.162 \\ 3.342 \end{bmatrix}.$$

За першим законом Кірхгофа

$$I_{2a} = I_{II} = 3.162 \text{ мА.}$$

У колі (рис. 1.113) нехай діє лише джерело E_2 , а джерело E_1 замінимо внутрішнім опором, тобто закороткою. Оберемо додатні напрямки протікання контурних струмів (рис. 1.120) та складемо систему рівнянь за МКС

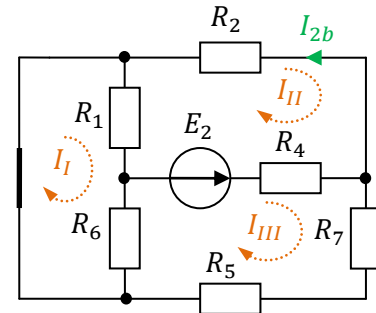


Рисунок 1.120 – Схема без джерела E_1

У колі (рис. 1.120) нехай діє лише джерело E_2 , а джерело E_1 замінимо внутрішнім опором, тобто закороткою. Оберемо додатні напрямки протікання контурних струмів (рис. 1.116 б) та складемо систему рівнянь за МВН

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -E_2 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_6 & -R_1 & -R_6 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_4 & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix}.$$

Нижче наведений скрін розрахунків у програмі MathCAD (рис. 1.121).

Нехай у колі діє лише одне джерело напруги E_2

Сформуємо матрицю джерел

Контурні струми за МКС

$$E := \begin{pmatrix} 0 \\ -E_2 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad I := R^{-1} \cdot E = \begin{pmatrix} 0.18 \\ -1.414 \\ 2.571 \end{pmatrix}$$

Струм через опір R_1 під дією лише E_1

$$I_{2b} := -I_I = 1.414$$

За принципом суперпозиції

$$I_2 := I_{2a} - I_{2b} = 1.748$$

Рисунок 1.121 – Скрін розрахунків у програмі MathCAD

Визначимо контурні струми через обернену матрицю

$$I = R^{-1} \cdot E = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.18 \\ -1.414 \\ 2.571 \end{bmatrix}.$$

Звідси за першим законом Кірхгофа $I_{2b} = -I_{II} = 1.414$ мА.

За принципом суперпозиції

$$I_2 = I_{2a} - I_{2b} = 3.162 - 1.414 = 1.748 \text{ мА.}$$

Розрахунок струму I_2 методом еквівалентного генератора

У колі (рис. 1.113) від'єднаємо гілку із опором R_2 оберемо додатні напрямки контурних струмів (рис. 1.122) та складемо систему рівнянь за МКС

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_6 & -R_6 \\ -R_6 & R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

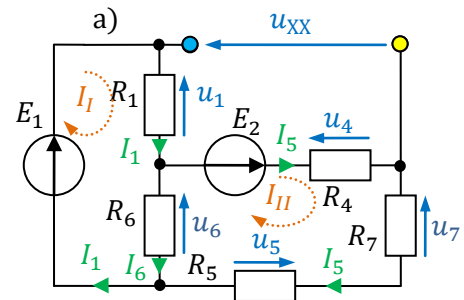


Рисунок 1.122 – Схема для визначення напруги U_{XX}

Нижче наведений скрін розрахунків у програмі MathCAD (рис. 1.123).

Визначимо напруги холостого ходу U_{xx}

Сформуємо матрицю опорів за МКС (напрямки обходу контурів оберемо за годинниковою стрілкою)

$$R := \begin{pmatrix} R_1 + R_6 & -R_6 \\ -R_6 & R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & -1 \\ -1 & 3.3 \end{pmatrix}$$

Сформуємо матрицю джерел

Контурні струми за МКС

$$E := \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$I := R^{-1} \cdot E = \begin{pmatrix} 5.931 \\ 4.828 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1.123 – Скрін розрахунків у програмі MathCAD

Визначимо контурні струми через обернену матрицю

$$I = R^{-1} \cdot E = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.931 \\ 4.828 \end{bmatrix}.$$

За першим законом Кірхгофа визначимо струми у гілках

$$I_1 = I_I = 5.931 \text{ мА}; \quad I_5 = I_{II} = 4.828 \text{ мА}; \quad I_6 = I_1 - I_5 = 1.103 \text{ мА}.$$

За законом Ома

$$u_1 = I_1 \cdot R_1 = 5.931 \cdot 1.5 = 8.897 \text{ В};$$

$$u_4 = I_5 \cdot R_4 = 4.8274 \cdot 1.2 = 5.793 \text{ В};$$

$$u_5 = I_5 \cdot R_5 = 4.8274 \cdot 0.6 = 2.897 \text{ В};$$

$$u_6 = I_6 \cdot R_6 = 1.103 \cdot 1.0 = 1.103 \text{ В};$$

$$u_7 = I_5 \cdot R_7 = 4.8274 \cdot 0.5 = 2.414 \text{ В}.$$

За другим законом Кірхгофа (рис. 1.115 а)

$$u_{XX} = u_1 + u_4 - E_2 = 8.897 + 5.793 - 10 = 4.69 \text{ В};$$

$$u_{XX2} = E_1 - u_5 - u_7 = 10 - 2.897 - 2.414 = 4.69 \text{ В}.$$

$$u_{XX3} = u_1 + u_6 - u_5 - u_7 = 8.897 + 1.103 - 2.897 - 2.414 = 4.69 \text{ В}.$$

Отже, напруга еквівалентного генератора $u_{XX} = E_{EG} = 4.69 \text{ В}.$

У колі (рис. 1.113) замкнемо гілку із опором R_2 та оберемо додатні напрямки контурних струмів (рис. 1.124).

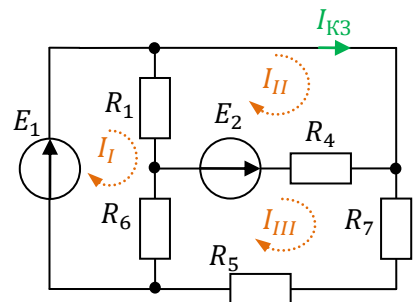


Рисунок 1.124 – Схема для визначення напруги U_{XX}

Складемо систему рівнянь за МКС

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ -E_2 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_6 & -R_1 & -R_6 \\ -R_1 & R_1 + 0 + R_4 & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix}.$$

Нижче наведений скрін розрахунків у програмі MathCAD (рис. 1.125).

Визначимо струм короткого замикання

Сформуємо матрицю опорів за МКС (напрямки обходу контурів оберемо за годинниковою стрілкою)

$$R := \begin{pmatrix} R_1 + R_6 & -R_1 & -R_6 \\ -R_1 & R_1 + 0 + R_4 & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & -1.5 & -1 \\ -1.5 & 2.7 & -1.2 \\ -1 & -1.2 & 3.3 \end{pmatrix}$$

Сформуємо матрицю джерел

Контурні струми за МКС

$$E := \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_2 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad I := R^{-1} \cdot E = \begin{pmatrix} 11.758 \\ 6.869 \\ 9.091 \end{pmatrix}$$

Визначимо струм короткого замикання $I_{K3} := I_I = 6.869$

Рисунок 1.125 – Скрін розрахунків у програмі MathCAD

Визначимо контурні струми

$$I = R^{-1} \cdot E = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.758 \\ 6.869 \\ 9.091 \end{bmatrix}.$$

Визначимо струм короткого замикання (рис. 1.124)

$$I_{K3} = I_{II} = 6.869 \text{ мА.}$$

За законом Ома

$$R_{\text{ЕГ}} = \frac{u_{XX}}{I_{K3}} = \frac{4.69}{6.869} = 0.683 \text{ кОм.}$$

Представимо коло (рис. 1.113) еквівалентним генератором відносно опору R_2 (рис. 1.126) та визначимо струм

$$I_2 = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R_2} = \frac{4.69}{0.683 + 2} = 1.748 \text{ мА.}$$

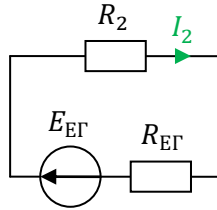


Рисунок 1.126 – Базова схема для методу еквівалентного генератора

2. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ

2.1. Періодичний змінний струм

На практиці найчастіше використовують змінний струм.

Змінний струм – струм, який змінюється у часі за величиною та напрямком.

Змінний струм вважається визначеним, якщо відома його залежність від часу.

Існує середнє значення змінного струму

$$I_{\text{СЕР}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} i(t) dt}{t_2 - t_1}.$$

Струми, миттєві значення яких повторюються через рівні проміжки часу у тій самій послідовності, називаються **періодичними** (рис. 2.1).

Енергія, що виділиться на активному опорі за постійного струму

$$W_{\sim} = I^2 RT.$$

Енергія, що виділиться на активному опорі за періодичного змінного струму

$$W_{\sim} = \int_0^T i^2(t) R dt.$$

Прирівняємо останні два вирази

$$I^2 RT = \int_0^T i^2(t) R dt.$$

Звідси визначимо діюче значення струму

$$I_D = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}.$$

Під **діючим значенням періодичного струму** розуміється таке значення постійного струму, при якому за один і той самий час на опорі R виділяється одна і та сама енергія, як і за змінного струму на тому ж опорі R , а найменші проміжки часу, через які ці повторення спостерігаються, – періодом T .

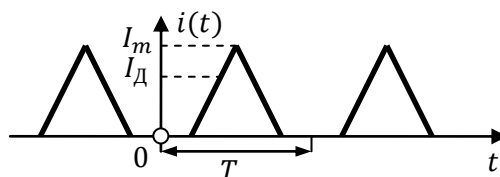
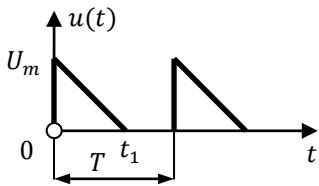


Рисунок 2.1 – Вигляд періодичного струму трикутної форми

Нижче наведений приклад розрахунку діючого значення.

Приклад 2.1. Визначити діюче значення періодичної негармонічної напруги U_D, щоб амплітуда імпульсів напруги $U_m = 8$ В. Періодична напруга $u(t)$ має вигляд трикутних імпульсів (рис. 2.2) тривалістю $t_1 = 3$ мкс та періодом $T = 16$ мкс.	 Рисунок 2.2 – Графік напруги

Розв'язання

Діюче значення негармонічної періодичної напруги визначається

$$U_D = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}.$$

Із аналітичної геометрії визначимо рівняння прямої

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow (x_1, y_1) \text{ та } (x_2, y_2).$$

Звідси напишемо

$$\frac{t - 0}{t_1 - 0} = \frac{u(t) - U_m}{0 - U_m} \rightarrow (0, U_m) \text{ та } (t_1, 0).$$

Отже, рівняння прямої напруги буде

$$u(t) = U_m - \frac{U_m}{t_1} t.$$

Підставимо рівняння прямої до формули діючого значення

$$\begin{aligned} U_D &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_1} u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_1} \left(U_m - \frac{U_m}{t_1} t \right)^2 dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_1} \left(U_m^2 - 2 \frac{U_m^2}{t_1} t + \frac{U_m^2}{t_1^2} t^2 \right) dt} = \\ &= \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \cdot \left(t - \frac{t^2}{t_1} + \frac{t^3}{3t_1^2} \right) \Big|_0^{t_1}} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \cdot \left(t_1 - \frac{t_1^2}{t_1} + \frac{t_1^3}{3t_1^2} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \cdot \left(t_1 - t_1 + \frac{t_1}{3} \right)} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \cdot \left(\frac{t_1}{3} \right)} = U_m \sqrt{\frac{t_1}{3T}} = 8 \sqrt{\frac{3}{3 \cdot 16}} = 2 \text{ В.} \end{aligned}$$

Відповідь: $U_D = 2$ В.

2.2. Основні поняття у колах гармонічного струму

Відомо, що найбільш економічною формою змінного струму при виробництві, передачі, розподіленні та використанні електричної енергії є найпростіша форма змінного струму – гармонічна (рис. 2.3).

Гармонічний струм – це періодичний струм, що є гармонічною функцією часу.

Закон зміни струму та напруги можна подати виразами:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i), \quad u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u).$$

де I_m – амплітуда струму; U_m – амплітуда напруги; ω – кутова частота; φ_i – початкова фаза струму; φ_u – початкова фаза напруги

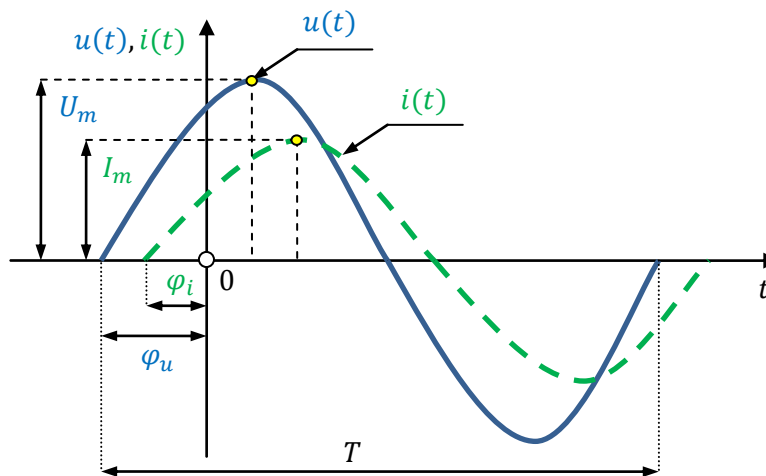


Рисунок 2.3 – Вигляд гармонічного струму

Ще існує поняття миттєвого значення струму.

Миттєве значення струму (напруги) – це значення струму (напруги) у даний момент часу.

Кожному моменту часу відповідає певне за величиною і напрямом значення змінного струму.

Амплітуда – це найбільше за абсолютною величиною значення гармонічної величини (струму, напруги).

Кутова частота обчислюється за формулою

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Кутова частота ω вимірюється у рад/с, а лінійна частота f – у герцах (Гц).

Електрична енергія гармонічного струму виробляється на електричних станціях синхронними генераторами частотою $f = 50$ Гц в країнах Європи та з частотою $f = 60$ Гц в країнах Америки.

Частота струму f пов'язана з періодом T залежністю $f = 1/T$.

Період – найменший проміжок часу, через який значення струму повторюється, а величина, обернена до періоду, називається **частотою**.

Величина $(\omega t + \varphi)$ – це аргумент косінуса, який називається фазою гармонічної величини, що визначає її значення у даний момент часу, а φ – початкова фаза, що визначає значення гармонічної величини у нульовий момент часу.

Якщо необхідно знайти різницю фаз між двома гармонічними струмами (напругами), то користуються поняттям зсув фази

$$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

Зсув фази – це різниця між фазами двох гармонічних величин.

Таким чином, якщо дві гармонічні величини мають різні початкові фази, то між ними існує зсув фази. Постійний струм можна розглядати як частковий випадок змінного струму (частота дорівнює нулю).

Гармонічні струми є наслідком дії гармонічних ЕРС. Для гармонічного струму вводять поняття середнього та діючого значення.

У випадку гармонічного коливання середнє значення за період дорівнює нулю, оскільки площа додатної напівхвилі компенсується площею від'ємної напівхвилі. Таким чином під середнім значенням гармонічної функції розуміють середнє значення за напівперіод.

Середнє значення струму за напівперіод

$$\begin{aligned} I_{\text{СЕР}} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} i(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} I_m \cos(\omega t) dt = \frac{2I_m}{T} \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \\ &= \frac{2I_m}{T} \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{4}\right)}{\omega} - \frac{\sin\left(-\frac{\omega T}{4}\right)}{\omega} \right] = \frac{2I_m}{T} \cdot \frac{2 \sin\left(\frac{\omega \frac{T}{4}}{\omega}\right)}{\omega} = \\ &= \frac{2I_m}{T} \cdot \frac{2}{\omega} = \frac{2I_m}{T} \cdot \frac{2}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{2I_m}{\pi} = 0.637I_m. \end{aligned}$$

Діюче значення гармонічного струму характеризує енергію, що поглинається в опорі при проходженні цього струму протягом інтервалів часу, кратних періоду

$$\begin{aligned} I_D &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t) dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt} = \\ &= \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} \left(t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) \Big|_0^T} = \sqrt{\frac{I_m^2 T}{2T}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Діюче значення періодичного струму дорівнює значенню постійного струму, під час проходження якого через опір за період T виділяється така ж сама кількість енергії, як і при проходженні змінного

$$U_D = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I_D = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Отже, діюче значення струму чи напруги менше відповідного амплітудного у $\sqrt{2}$ разів.

2.3. Подання гармонічних коливань векторами, що обертаються

У колах гармонічного струму всі струми та напруги мають форму гармонічних коливань, тому задача розрахунку таких кіл зводиться до знаходження амплітуд та початкових фаз цих коливань.

Часове подання гармонічних коливань наглядно, але використання його в задачах аналізу кіл ускладнено, оскільки вимагає здійснення громіздких тригонометричних перетворень. Більш зручніше векторне подання гармонічних коливань, за якого кожному коливанню ставиться у відповідність вектор, що обертається визначеної довжини з заданою початковою фазою.

Таким чином, для спрощення задач розрахунку таких кіл, гармонічні функції можна представити у вигляді проекцій обертаючих векторів з постійною швидкістю обертання.

Проекція вектору на дійсну та уявну вісі являє собою миттєве значення, що виражене гармонічними функціями (рис. 2.4)

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi), \quad f(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi).$$

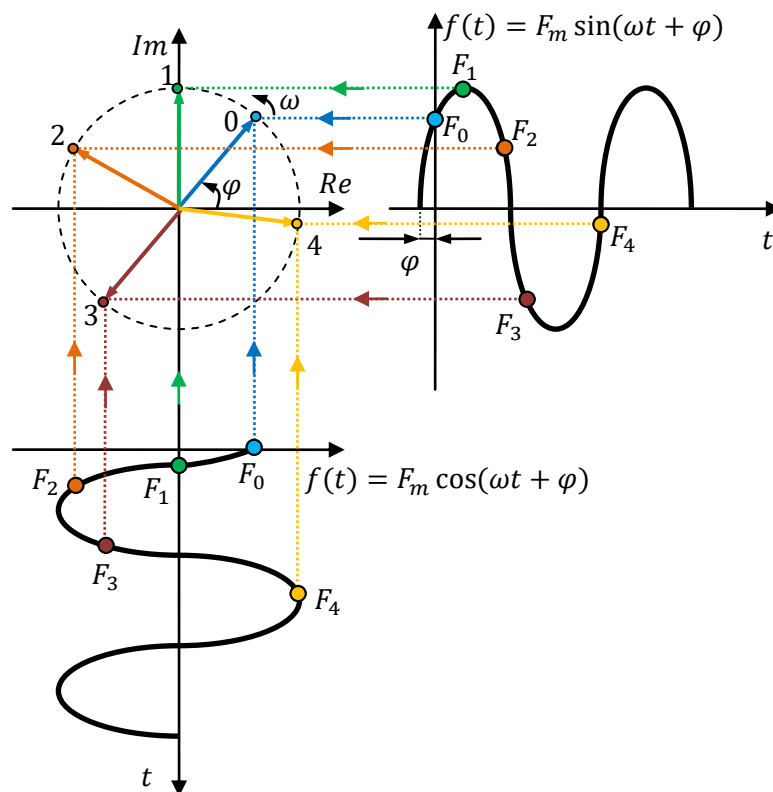


Рисунок 2.4 – Проекція вектору на дійсну та уявну вісі

Гармонічні коливання $f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi)$ можна подати на площині у вигляді радіус-вектора $\vec{F}_m$, довжина якого дорівнює амплітуді F_m , а кут нахилу до горизонтальної осі визначається початковою фазою φ . Цей радіус-вектор обертається проти годинникової стрілки з постійною кутовою частотою ω . Такий відрізок, що обертається, умовимося називати **вектором**.

За деякий час t_1 кут нахилу вектора до горизонтальної осі зміниться на величину ωt_1 відносно початкового положення і буде становити $(\omega t_1 + \varphi)$. Проекція цього вектора на горизонтальну та вертикальну осі будуть відповідно функціями $F_m \cos(\omega t_1 + \varphi)$ та $F_m \sin(\omega t_1 + \varphi)$, чому відповідає точка F_1 . У результаті подальшого обертання вектора отримаємо точки F_2, F_3 і т.д., кожна з яких відповідає миттєвим значенням $F_m \cos(\omega t_k + \varphi)$ та $F_m \sin(\omega t_k + \varphi)$, що відповідає гармонічним функціям. Отже, такий вектор, що обертається однозначно відповідає гармонічним функціям.

Використання для зображення гармонічних сигналів векторів, що обертаються, дає змогу компактно подавати на площині інформацію про гармонічні сигнали з однаковою частотою, але з різними амплітудами та початковими фазами.

Крім того, при такому зображенні певні операції над гармонічними сигналами можна виконувати як операції з векторами, що значно спрощує аналіз усталених гармонічних режимів навіть у досить складних колах. Тому задачу додавання гармонічних струмів можна звести до додавання векторів, що зображують ці струми. Такий спосіб демонструє наочну візуальність методу.

Сукупність векторів, які зображають на площині для одного і того самого моменту часу миттєві значення гармонічних сигналів однакової частоти, але різних амплітуд та початкових фаз, називають **векторною діаграмою**.

Векторні діаграми зазвичай будують для діючих значень струмів та напруг, тому довжину векторів, що зображають такі сигнали беруть такою, що дорівнює діючим значенням, а не амплітудним.

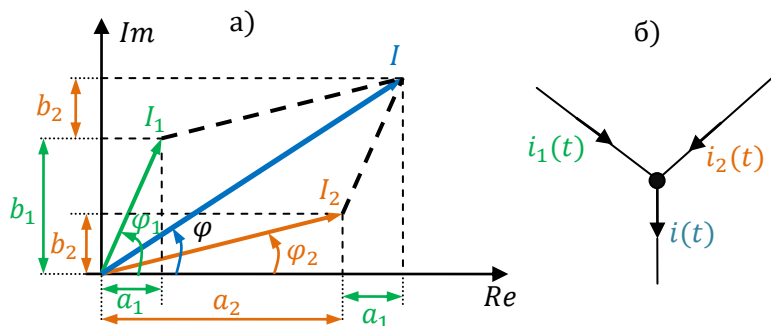


Рисунок 2.5 – Ілюстрація векторного додавання струмів

Якщо є два гармонічні струми (рис. 2.5 б) $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ та $i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, що втікають в один вузол. За першим законом Кірхгофа загальний струм визначається

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + I_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Ці струми можна зобразити векторами на комплексній площині та додати їх за правилом паралелограма (рис. 2.5 а)

$$i(t) = I \cos(\omega t + \varphi).$$

Із діаграми бачимо, що

$$I = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2};$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}\right).$$

У випадку рівності початкових фаз, вектори спрямовані в один бік, тобто співпадають по фазі. При фазовому зсуві 180° вектори спрямовані в діаметрально протилежні боки, тобто знаходяться у протифазі.

2.4. Комплексне подання гармонічних коливань

2.4.1 Метод комплексних амплітуд

Для спрощення розрахунків дії з гармонічними функціями або дії з векторами можна замінити діями з комплексними числами.

Відомо, що кожна точка на комплексній площині визначається радіус-вектором цієї точки, тобто вектором, початок якого співпадає з початком координат, а кінець знаходиться в точці, що відповідає заданому комплексному числу.

Вектор, що обертається в додатному напрямку (рис. 2.6), тобто проти ходу годинникової стрілки, з кутовою швидкістю ω може бути представлений комплексною функцією

$$\dot{F}(t) = F e^{j(\varphi + \omega t)} = F e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \dot{F} e^{j\omega t}.$$

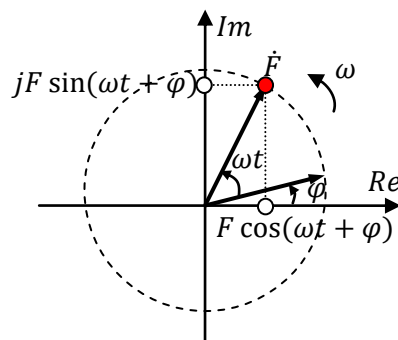


Рисунок 2.6 – Схема вектора, що обертається

Фактично вираз $\dot{F}(t)$ можна розглядати як результат повороту навколо початку координат на кут ωt в додатному напрямку, протилежно до напрямку обертання годинникової стрілки вектора $\dot{F} = F e^{j\varphi}$.

Вектор $\dot{F} = F e^{j\varphi}$ називають комплексною амплітудою, що дорівнює значенню комплексної функції у момент часу $t = 0$.

Комплексна амплітуда – це комплексна величина, що не залежить від часу, модуль та аргумент якої відповідають амплітуді та початковій фазі заданої гармонічної функції.

Таким чином, множник $e^{j\omega t}$ є оператором обертання, тому множення комплексної амплітуди $F e^{j\varphi}$ на множник $e^{j\omega t}$ означає поворот вектора $\vec{F}$ на кут ωt в додатному напрямку, проти годинникової стрілки.

За формулою Ейлера

$$F e^{j(\varphi + \omega t)} = F \cos(\omega t + \varphi) + jF \sin(\omega t + \varphi).$$

Тоді

$$F \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[\vec{F} e^{j\omega t}], \quad F \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Im}[\vec{F} e^{j\omega t}].$$

У виразі символ Re означає, що береться дійсна частина комплексної функції, а символ Im – уявна частина комплексної функції.

Інший спосіб представлення гармонічних функцій за допомогою комплексних величин заснований на використанні іншого подання формули Ейлера.

Гармонічні коливання $F \cos(\omega t + \varphi)$ та $F \sin(\omega t + \varphi)$ можна представити

$$f(t) = F \cos(\omega t + \varphi) = F \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} = \frac{\vec{F}}{2} e^{j\omega t} + \frac{\vec{F}^*}{2} e^{-j\omega t};$$

$$f(t) = F \sin(\omega t + \varphi) = F \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2j} = \frac{\vec{F}}{2j} e^{j\omega t} - \frac{\vec{F}^*}{2j} e^{-j\omega t},$$

де $\vec{F} = F e^{j\varphi}$ – комплексна амплітуда; $\vec{F}^* = F e^{-j\varphi}$ – комплексно-спряжена величина.

В результаті додавання таких векторів на комплексній площині у першому випадку одержимо вектор, що розміщений на дійсній осі (рис. 2.7 а), а у другому випадку вектор розміщений на уявній осі (рис. 2.7 б).

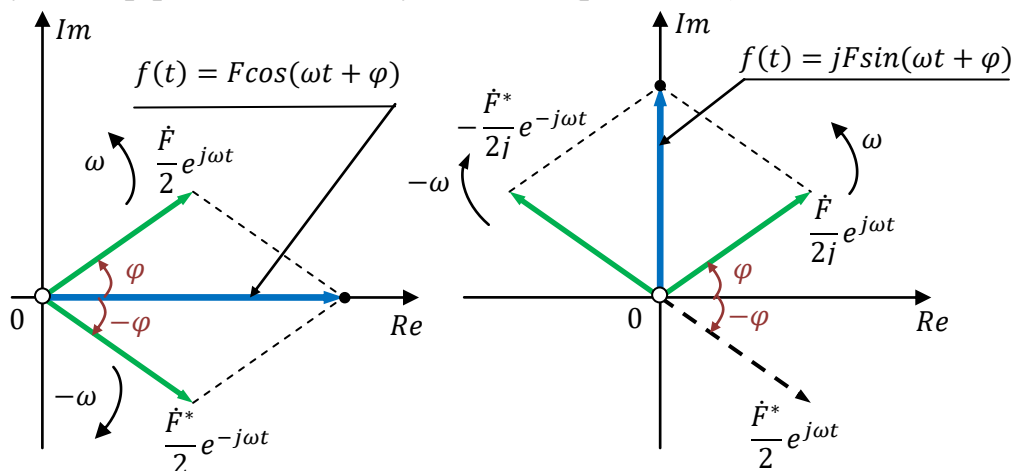


Рисунок 2.7 – Результат додавання векторів

Метод комплексних амплітуд – це символічний метод аналізу кіл гармонічного струму з використанням комплексних чисел.

Метод комплексних амплітуд є символічним методом розрахунку кіл в усталеному гармонічному режимі запропонований Штейнметцем Кенеллі у 1893 – 1894 роках, де дії з векторами замінюються діями з комплексними числами.

Отже, від гармонічних коливань можна перейти до комплексних амплітуд

$$f(t) = F \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \vec{F} = F e^{j\varphi}.$$

Слід зазначити, що комплексна амплітуда містить тільки два із трьох необхідних параметрів гармонічного коливання. Але якщо система лінійна, то частота усталеної гармонічної реакції дорівнює частоті усталеної гармонічної дії, тобто є відомою. У результаті необхідно визначити тільки амплітуду та початкову фазу гармонічної функції.

2.4.2. Операції з комплексними числами та комплексними функціями

Комплексні числа

При розрахунку кіл методом комплексних амплітуд оперують із комплексними числами $\dot{Z} = |Z|e^{j\varphi}$.

Будь-яке комплексне число можна записати у показниковій, тригонометричній та алгебраїчній формах.

Показникова форма запису комплексного числа

$$Z = |Z|e^{j\varphi},$$

де $|Z|$ – модуль комплексного числа, φ – аргумент чи фаза комплексного числа, що може бути представлена у градусах чи радіанах.

Використавши формулу Ейлера $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ можна одержати тригонометричну та алгебраїчну форму запису комплексного числа

$$Z = |Z|e^{j\varphi} = |Z| \cos \varphi + j|Z| \sin \varphi = a + jb, \quad j = \sqrt{-1}$$

де j – уявна одиниця.

Комплексне число можна подати у вигляді вектора (рис. 2.8). Зв'язок між показниковою, алгебраїчною та тригонометричною формами впливає із графічного подання комплексного числа (рис. 2.8)

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = |Z| \cos \varphi, \quad b = |Z| \sin \varphi,$$

$$\varphi = \arg(Z) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{b}{a}\right), & a > 0; \\ \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi, & a < 0. \end{cases}$$

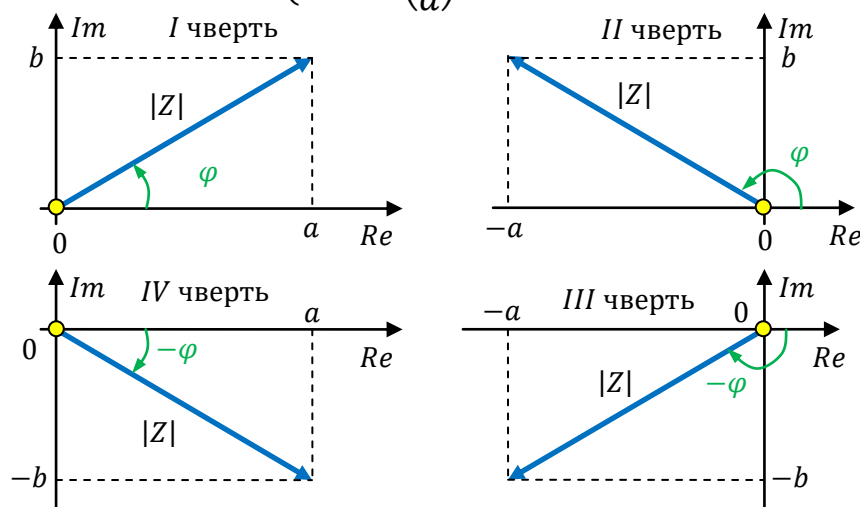


Рисунок 2.8 – Комплексне число

Нехай є два комплексних числа подані у вигляді $Z_1 = a_1 + jb_1 = |Z_1|e^{j\varphi_1}$ та $Z_2 = a_2 + jb_2 = |Z_2|e^{j\varphi_2}$.

Дії над комплексними числами

1. Додавання комплексних чисел

$$Z_3 = Z_1 + Z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

2. Множення комплексних чисел

$$Z_4 = Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1|e^{j\varphi_1} \cdot |Z_2|e^{j\varphi_2} = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

3. Ділення комплексних чисел

$$Z_5 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|e^{j\varphi_1}}{|Z_2|e^{j\varphi_2}} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

4. Піднесення до степені та здобуття кореня

$$Z_1^n = |Z_1|^n \cdot e^{j\varphi_1 \cdot n}; \quad \sqrt[n]{Z_2} = \sqrt[n]{|Z_2|} \cdot e^{j\varphi_2/n}.$$

5. Добуток спряжених комплексних чисел

$$Z_1 \cdot Z_1^* = |Z_1|e^{j\varphi_1} \cdot |Z_1|e^{-j\varphi_1} = |Z_1|^2.$$

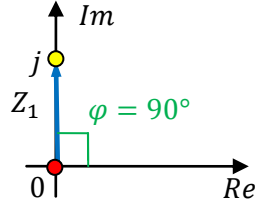
6. Корисні співвідношення математичні

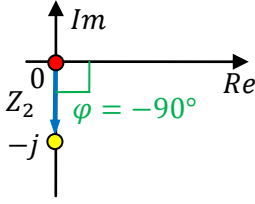
$$j = e^{j90^\circ}; \quad -j = e^{-j90^\circ}; \quad -1 = e^{j180^\circ},$$

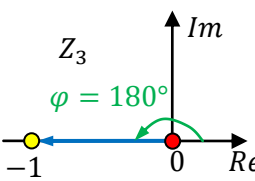
$$\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = \cos 45^\circ + j \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\ln(j) = \ln(e^{j90^\circ}) = j90^\circ \ln(e) = j90^\circ.$$

Відкладемо деякі із корисних співвідношень на комплексній площині

Комплексне число $Z_1 = j = 1e^{j90^\circ}.$ Аргумент комплексного числа $\varphi = \arctg\left(\frac{1}{0}\right) = 90^\circ.$ На рис. 2.9 зобразимо на комплексній площині комплексне число Z_1.	 Рисунок 2.9 – Подання вектора

Комплексне число $Z_2 = -j = 1e^{-j90^\circ}.$ Аргумент комплексного числа $\varphi = \arctg\left(\frac{-1}{0}\right) = -90^\circ.$ На рис. 2.10 зобразимо на комплексній площині комплексне число Z_2.	 Рисунок 2.10 – Подання вектора

Комплексне число $Z_3 = -1 = 1e^{j180^\circ}.$ Аргумент комплексного числа $\varphi = \arctg\left(\frac{0}{-1}\right) = 180^\circ.$ На рис. 2.11 зобразимо на комплексній площині комплексне число Z_3.	 Рисунок 2.11 – Подання вектора

Комплексна функція

Комплексна функція визначається

$$\dot{A}(t) = A e^{j(\varphi + \omega t)} = A e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \dot{A} e^{j\omega t},$$

де $\dot{A}$ – комплексна амплітуда.

Дії з комплексними функціями

1. Є дві комплексні функції $\dot{A}_1(t)$ та $\dot{A}_2(t)$, якщо $\text{Re}[\dot{A}_1(t)] = \text{Re}[\dot{A}_2(t)]$ виконується у будь-який момент часу, то $\dot{A}_1(t) = \dot{A}_2(t)$.
2. Якщо $u_3(t) = U_3 \cos(\omega t + \varphi_3) = u_1(t) + u_2(t) = U_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + U_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$,

та

$$\text{Re}[U_3 e^{j(\omega t + \varphi_3)}] = \text{Re}[U_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}] + \text{Re}[U_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}]$$

то для будь-якого моменту часу можна записати

$$U_3 e^{j\varphi_3} e^{j\omega t} = U_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} + U_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}.$$

Спростимо вираз, скоротивши його на $e^{j\omega t}$

$$U_3 e^{j\varphi_3} = U_1 e^{j\varphi_1} + U_2 e^{j\varphi_2}.$$

У результаті одержимо

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_1 + \dot{U}_2.$$

Отже, сумі гармонічних коливань відповідає сума комплексних амплітуд

$$\sum u_i(t) \div \sum \dot{U}_i.$$

3. Множення комплексної функції на число та фазу

$$\dot{A}(t) \cdot C \cdot e^{j\psi} = A \cdot C \cdot e^{j(\omega t + \varphi + \psi)} = A_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)}.$$

4. Операції диференціювання та інтегрування

Нехай є гармонічна напруга $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$, якій відповідає комплексна функція напруги $\dot{U}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi)}$.

Продиференціюємо комплексну функцію напруги

$$\frac{d\dot{U}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [U e^{j(\omega t + \varphi)}] = j\omega U e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \cdot \dot{U}(t).$$

Таким чином, одержали що операції диференціювання відповідає множення на $j\omega$.

Проінтегруємо комплексну функцію напруги

$$\int \dot{U}(t) dt = \int U e^{j(\omega t + \varphi)} dt = \frac{U}{j\omega} e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{\dot{U}(t)}{j\omega}.$$

Таким чином, одержали що операції інтегрування відповідає діленням на $j\omega$.

Приклад 2.2. Представити комплексне число в показниковій формі:

$$Z_1 = 5 + 5j; \quad Z_2 = 4 - 4j; \quad Z_3 = 4 + 3j; \quad Z_4 = 4 - 3j.$$

Розв'язання

а) $Z_1 = 5 + 5j = |Z_1|e^{j\varphi} = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ},$

Модуль комплексного числа

$$|Z_1| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$$

Аргумент комплексного числа

$$\varphi = \arctg\left(\frac{5}{5}\right) = 45^\circ.$$

На рис. 2.12 зобразимо на комплексній площині комплексне число Z_1 .

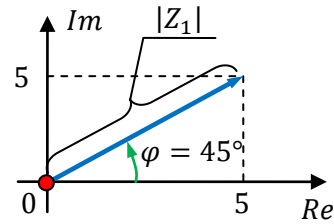


Рисунок 2.12 – Подання вектора

б) $Z_2 = 4 - 4j = |Z_2|e^{j\varphi} = 4\sqrt{2}e^{-j45^\circ},$

Модуль комплексного числа

$$|Z_2| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}.$$

Аргумент комплексного числа

$$\varphi = \arctg\left(\frac{-4}{4}\right) = -45^\circ;$$

На рис. 2.13 зобразимо на комплексній площині комплексне число Z_2 .

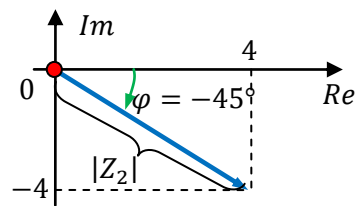


Рисунок 2.13 – Подання вектора

в) $Z_3 = 4 + 3j = |Z_3|e^{j\varphi} = 5e^{j36.87^\circ},$

Модуль комплексного числа

$$|Z_3| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Аргумент комплексного числа

$$\varphi = \arctg\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87^\circ.$$

На рис. 2.14 зобразимо на комплексній площині комплексне число Z_3 .

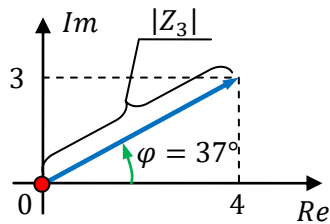


Рисунок 2.14 – Подання вектора

г) $Z_4 = 4 - 3j = |Z_4|e^{j\varphi} = 5e^{-j36.87^\circ},$

Модуль комплексного числа

$$|Z_4| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

Аргумент комплексного числа

$$\varphi = \arctg\left(\frac{-3}{4}\right) = -36.87^\circ.$$

На рис. 2.15 зобразимо на комплексній площині комплексне число Z_4 .

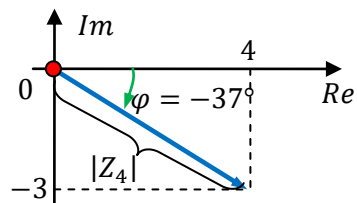


Рисунок 2.15 – Подання вектора

2.5. Пасивні елементи у колах гармонічного струму

2.5.1 Опір у колі гармонічного струму

Розглянемо активний опір (рис. 2.16), через який протікає гармонічний струм

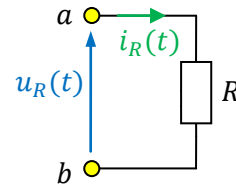
$$i_R(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i).$$


Рисунок 2.16 – Опір під дією гармонічного струму

Напруга на опорі за законом Ома визначається

$$u_R(t) = i_R(t) \cdot R = R \cdot I_{mR} \cos(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} \cos(\omega t + \varphi_u),$$

де $U_{mR} = R \cdot I_{mR}$ – амплітуда напруги на опорі.

На рис. 2.17 а представлені графіки зміни струму та напруги в опорі у часі, а на рис. 2.17 б представлені струм та напруга на опорі у вигляді комплексних амплітуд.

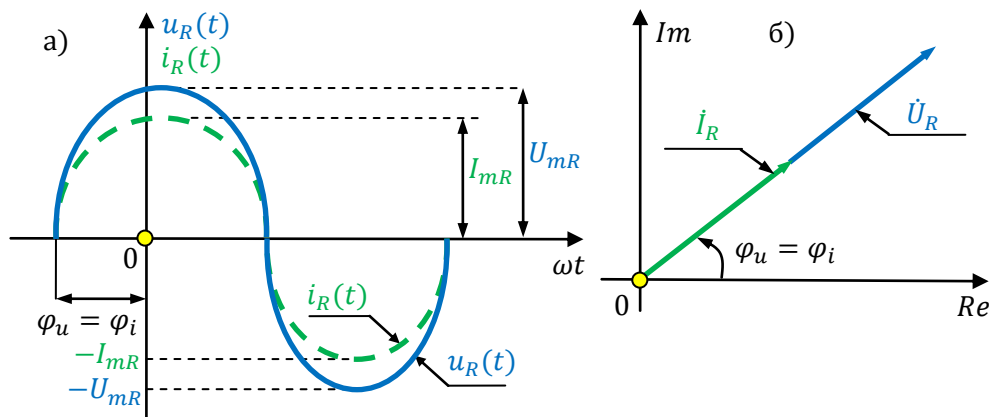


Рисунок 2.17 – Гармонічні струм та напруга в опорі:
а) у часовій формі; б) у комплексній формі

Із виразу напруги $u_R(t)$ видно, що $\varphi_u = \varphi_i$.

Отже, зсув фаз між напругою та струмом дорівнює нулю (рис. 2.17 б)

$$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0.$$

Відповідно напруга на опорі R співпадає по фазі зі струмом, що протікає через неї.

Таким чином, як видно із рис. 2.17, напруга на опорі та струм, що протікає через цей опір мають однакову початкову фазу, тобто співпадають по фазі.

Миттєва потужність на опорі (рис. 2.16)

$$p_R(t) = i_R(t) \cdot u_R(t) = i_R^2(t)R = I_{mR}^2 R \cos^2(\omega t + \varphi) = \\ = \frac{I_{mR}^2 R}{2} [1 + \cos(2(\omega t + \varphi))].$$

Таким чином, потужність завжди додатна та змінюється з подвійною частотою (рис. 2.18) по відношенню до частоти струму та напруги. Це означає безперервне поглинання енергії.

Середня потужність за період

$$P_{R.сep} = \frac{1}{T} \int_0^T p_R(t) dt = \frac{I_{mR}^2 R}{2T} \int_0^T [1 + \cos(2(\omega t + \varphi))] dt = \\ = \frac{I_{mR}^2 R}{2T} \left(t + \frac{\sin(2(\omega t + \varphi))}{2\omega} \right) \Big|_0^T = \frac{I_{mR}^2 R}{2}.$$

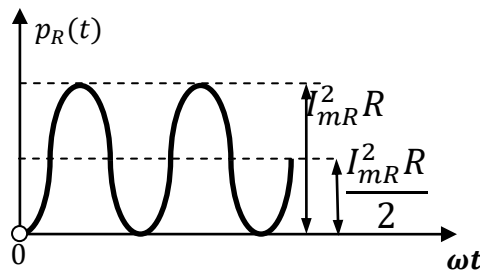


Рисунок 2.18 – Зміна потужності на опорі

Середнє за період значення миттєвої потужності називають активною потужністю, що вимірюється у ватах.

Енергія на опорі

$$W_R(t) = \int_0^T p_R(t) dt = \frac{I_{mR}^2 R}{2} \int_0^T [1 + \cos(2(\omega t + \varphi))] dt = \\ = \frac{I_{mR}^2 R}{2} \left(t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) \Big|_0^t = \frac{I_{mR}^2 R}{2} \left(t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right).$$

Вся енергія, що надходить в активний опір, перетворюється на тепло. Миттєва потужність коливається у межах від 0 до $I_{mR}^2 R$ та не буває від'ємною. Активна потужність дорівнює повній потужності, а реактивна потужність дорівнює нулю.

2.5.2 Індуктивність у колі гармонічного струму

Розглянемо індуктивність (рис. 2.19), через яку протікає гармонічний струм
 $i_L(t) = I_{mL} \cos(\omega t + \varphi_i)$.

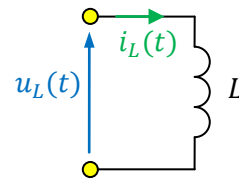


Рисунок 2.19 – Індуктивність під дією гармонічного струму

Напруги на індуктивності визначається

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -L\omega \cdot I_{mL} \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mL} \cos(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) = U_{mL} \cos(\omega t + \varphi_u),$$

де $U_{mL} = L\omega \cdot I_{mL}$ – амплітуда напруги на індуктивності.

Звідси визначимо

$$\frac{U_{mL}}{I_{mL}} = \omega L = X_L.$$

Величина X_L називається реактивним опором індуктивності, обернена величина, називається індуктивною провідністю

$$b_L = \frac{I_{mL}}{U_{mL}} = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}.$$

Реактивний опір індуктивності – це відношення амплітуди (діючого значення) гармонічної напруги до амплітуди (діючого значення) гармонічного струму в індуктивності.

На рис. 2.20 а представлені графіки зміни струму та напруги в індуктивності у часі, а на рис. 2.20 б представлені струм та напруга на індуктивності у вигляді комплексних амплітуд.

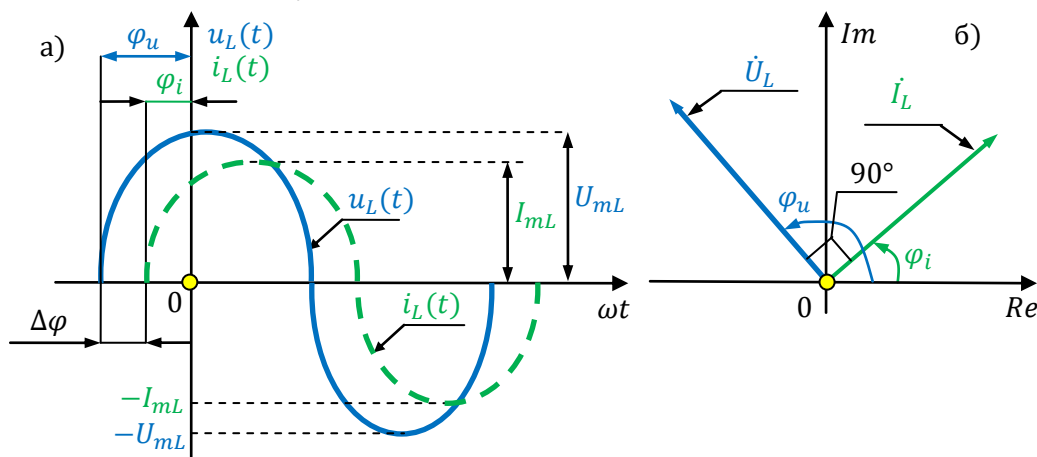


Рисунок 2.20 – Гармонічні струм та напруга в індуктивності:
 а) у часовій формі; б) у комплексній формі

Із виразу напруги $u_L(t)$ видно, що $\varphi_u = \varphi_i + 90^\circ$.

Відповідно напруга на індуктивності L випереджає струм, що протікає через неї на 90° .

Отже, зсув фаз між напругою та струмом на індуктивності становить (рис. 2.20)

$$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ.$$

Комплексний опір індуктивності – це відношення комплексної амплітуди гармонічної напруги до комплексної амплітуди гармонічного струму в індуктивності.

Комплексні опір та провідність в індуктивності визначаються

$$Z_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} = \frac{U_{mL}e^{j\varphi_u}}{I_{mL}e^{j\varphi_i}} = \frac{U_{mL}e^{j(\varphi_i+90^\circ)}}{I_{mL}e^{j\varphi_i}} = \omega L e^{j90^\circ} = j\omega L = jX_L;$$

$$Y_L = \frac{\dot{I}_L}{\dot{U}_L} = \frac{I_{mL}e^{j\varphi_i}}{U_{mL}e^{j\varphi_u}} = \frac{I_{mL}e^{j\varphi_i}}{U_{mL}e^{j(\varphi_i+90^\circ)}} = \frac{1}{\omega L e^{j90^\circ}} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = -jb_L.$$

Таким чином, отримали, що

$$Z_L = j\omega L = jX_L > 0,$$

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -jb_L < 0.$$

Миттєва потужність на індуктивності (рис. 2.19)

$$p_L(t) = i_L(t) \cdot u_L(t) = -I_{mL} \cos(\omega t + \varphi_i) \cdot U_{mL} \sin(\omega t + \varphi_i) =$$

$$= -\frac{I_{mL} \cdot U_{mL}}{2} [2 \cos(\omega t + \varphi_i) \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)] = -\frac{I_{mL} \cdot U_{mL}}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_i).$$

Таким чином, потужність в індуктивності знакозмінна величина. Коли $p_L(t) > 0$ індуктивність накопичує енергію, а коли $p_L(t) < 0$ віддає енергію. Оскільки миттєва потужність в індуктивності коливається з подвійною частотою (рис. 2.21 а), відбувається безперервний обмін енергією між джерелом та індуктивністю, причому середня потужність, що поступає в індуктивність за період дорівнює нулю.

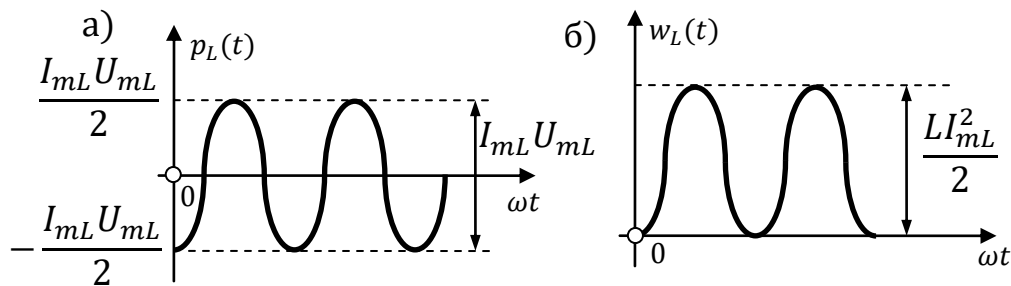


Рисунок 2.21 – Зміна потужності (а) та енергії (б) на індуктивності

Енергія в індуктивності (рис. 2.19)

$$W_L(t) = \frac{Li_L^2(t)}{2} = \frac{LI_{mL}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i)}{2} =$$

$$= \frac{LI_{mL}^2}{4} (1 + \cos(2(\omega t + \varphi_i))) = \frac{LI_A^2}{2} (1 + \cos(2(\omega t + \varphi_i))).$$

Енергія, що надходить із джерела, спочатку накопичується в магнітному полі індуктивності, а потім ця енергія повертається джерелу при зникненні магнітного поля (рис. 2.21 б). Енергія магнітного поля досягає максимуму у момент переходу струму в індуктивності через амплітудне значення, а потім вона зменшується та обертається в нуль за струму, що дорівнює нулю.

Оскільки максимальне значення енергії, що накопичена в магнітному полі індуктивності становить

$$W_{L.max} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

то індуктивний опір може бути визначений таким чином

$$X_L = \omega L = \frac{2\omega W_{L.max}}{I_m^2}, \quad L = \frac{2W_{L.max}}{I_m^2}.$$

2.5.3 Ємність у колі гармонічного струму

Розглянемо ємність (рис. 2.22), через яку протікає гармонічний струм

$$i_c(t) = I_{mc} \cos(\omega t + \varphi_i).$$

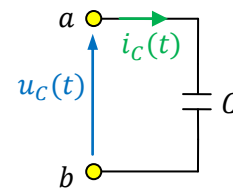


Рисунок 2.22 – Ємність під дією гармонічного струму

Напруги на ємності визначається

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \frac{1}{C} \int i_c(t) dt = \frac{1}{\omega C} I_{mc} \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mc} \cos(\omega t + \varphi_i - 90^\circ) = \\ &= U_{mc} \cos(\omega t + \varphi_i - 90^\circ) = U_{mc} \cos(\omega t + \varphi_u), \end{aligned}$$

де $U_{mc} = I_{mc}/(\omega C)$ – амплітуда напруги на ємності.

Звідси визначимо

$$\frac{U_{mc}}{I_{mc}} = \frac{1}{\omega C} = X_C.$$

Величина X_C називається реактивним опором ємності, а величина обернена до неї, називається реактивною провідністю ємності

$$\frac{I_{mc}}{U_{mc}} = \frac{1}{X_C} = \omega C = b_C.$$

Реактивний опір ємності – це відношення амплітуди (діючого значення) гармонічної напруги до амплітуди (діючого значення) гармонічного струму в ємності.

На рис. 2.23 а представлені графіки зміни струму та напруги в ємності у часі, а на рис. 2.23 б представлені струм та напруга на ємності у вигляді комплексних амплітуд.

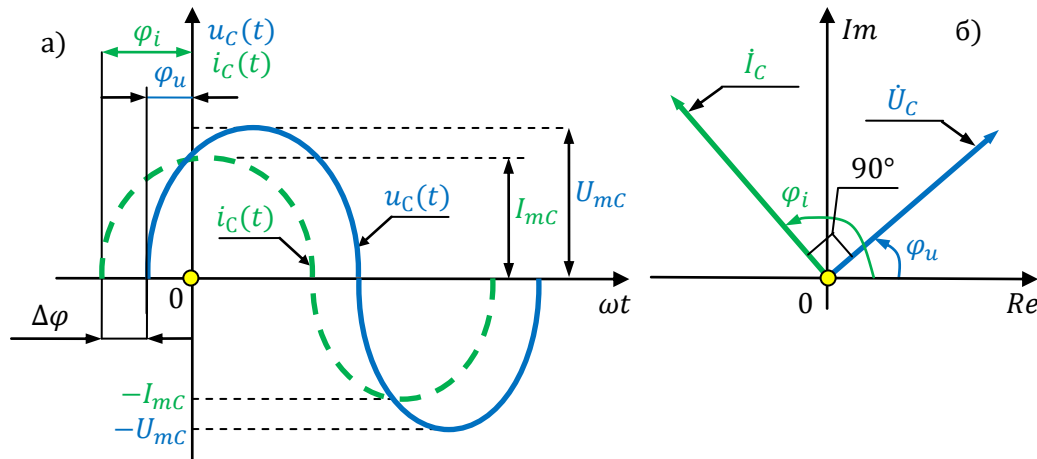


Рисунок 2.23 – Гармонічні струм та напруга в ємності:
а) у часовій формі; б) у комплексній формі

Із виразу $u_C(t)$ видно, що $\varphi_u = \varphi_i - 90^\circ$.

Відповідно напруга на ємності C відстає від струму, що протікає через неї на 90° .

Отже, зсув фази між напругою та струмом на ємності (рис. 2.23)

$$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ.$$

Комплексний ємнісний опір – це відношення комплексних амплітуд гармонічних напруг і струму в ємності.

Комплексні опір та провідність ємності визначаються

$$Z_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \frac{U_{mC} e^{j\varphi_u}}{I_{mC} e^{j\varphi_i}} = \frac{U_{mC} e^{j(\varphi_i - 90^\circ)}}{I_{mC} e^{j\varphi_i}} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C;$$

$$Y_C = \frac{\dot{I}_C}{\dot{U}_C} = \frac{I_{mC} e^{j\varphi_i}}{U_{mC} e^{j\varphi_u}} = \frac{I_{mC} e^{j\varphi_i}}{U_{mC} e^{j(\varphi_i - 90^\circ)}} = \omega C e^{j90^\circ} = j\omega C = jb_C.$$

Таким чином, отримали, що

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C < 0,$$

$$Y_C = j\omega C = jb_C > 0.$$

Миттєва потужність на ємності (рис. 2.22)

$$\begin{aligned} p_C(t) &= i_C(t) \cdot u_C(t) = I_{mC} \cos(\omega t + \varphi_i) \cdot U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_i) = \\ &= \frac{I_{mC} \cdot U_{mC}}{2} [2 \cos(\omega t + \varphi_i) \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)] = \frac{I_{mC} \cdot U_{mC}}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_i). \end{aligned}$$

Таким чином, потужність в ємності знакозмінна величина. Коли $p_C(t) > 0$ ємність накопичує енергію, а коли $p_C(t) < 0$ віддає енергію. Оскільки миттєва потужність в ємності коливається з подвійною частотою (рис. 2.24 а), відбувається безперервний обмін енергією між джерелом та ємністю, причому середня потужність, що поступає в ємність за період дорівнює нулю.

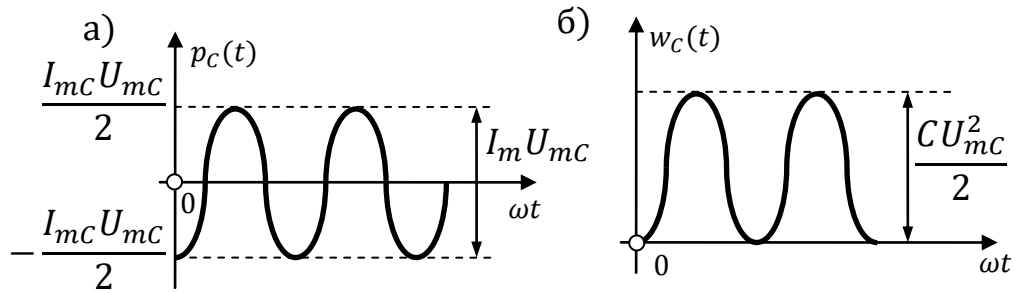


Рисунок 2.24 – Зміна потужності (а) та енергії (б) на ємності

Енергія на ємності (рис. 2.24 б)

$$\begin{aligned}
 W_C(t) &= \frac{C u_C^2(t)}{2} = \frac{C U_{mC}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_u)}{2} = \\
 &= \frac{C U_{mC}^2}{4} (1 + \cos(2(\omega t + \varphi_u))) = \frac{C U_D^2}{2} (1 + \cos(2(\omega t + \varphi_u))).
 \end{aligned}$$

Енергія, що надходить із джерела, спочатку накопичується в електричному полі ємності, а потім ця енергія повертається джерелу при зникненні електричного поля (рис. 2.24 б). Енергія електричного поля досягає максимуму у момент переходу напруги на ємності через амплітудне значення, а потім вона зменшується та обертається в нуль за напруги, що дорівнює нулю.

Оскільки максимальне значення енергії, що накопичена в електричному полі ємності, становить

$$W_{C.max} = \frac{C U_{mC}^2}{2},$$

то ємнісний опір може бути визначений таким чином

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U_m^2}{2\omega W_{C.max}}, \quad C = \frac{2W_{C.max}}{U_m^2}.$$

2.6. Послідовне з'єднання елементів у колах гармонічного струму

У колі (рис. 2.25) діє гармонічний струм $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$.

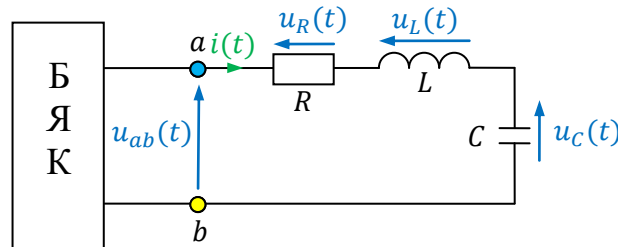


Рисунок 2.25 – Схема послідовного з'єднання елементів

За другим законом Кірхгофа для кола (рис. 2.25)

$$u_{ab}(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt.$$

Підставимо у одержаний вираз гармонічний струм

$$\begin{aligned} u_{ab} &= RI_m \cos(\omega t + \varphi_i) + \omega LI_m \cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{\omega C} \cos\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= U_{mR} \cos(\omega t + \varphi_i) + U_{mL} \cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) + U_{mC} \cos\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Одержали тригонометричну форму запису другого закону Кірхгофа для миттєвих значень напруги.

Подальші розрахунки у такій формі є громіздкими, тому скористаємося векторною формою

$$\bar{U}_{ab} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C.$$

Зобразимо вектори на векторній діаграмі (рис. 2.26), причому кут φ є фазовим зсувом струму по відношенню до напруги, тобто $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Для спрощення будемо вважати, що початкова фаза струму $\varphi_i = 0$.

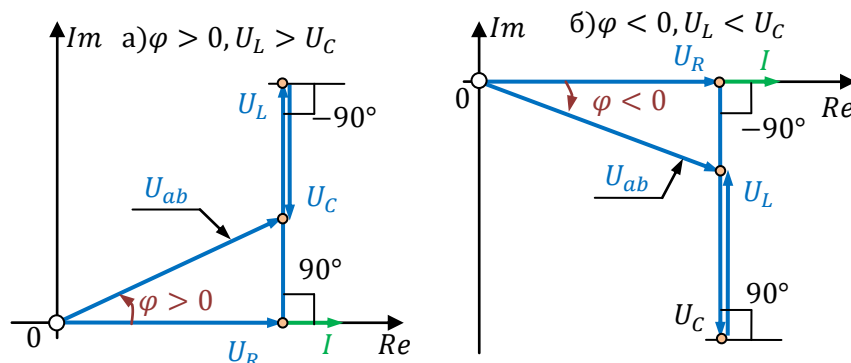


Рисунок 2.26 – Векторні діаграми напруг

Побудову векторних діаграм слід починати із комплексного струму, а потім відкладати комплексні амплітуди напруг на елементах, що будуть вектора-

ми орієнтованими відносно вектора струму. Результатом такого векторного додавання буде вектор напруги U_{ab} .

Із векторної діаграми за теоремою Піфагора знаходимо амплітуду напруги

$$U_{tab} = \sqrt{U_{mR}^2 + (U_{mL} - U_{mC})^2}.$$

Аналогічно для діючих значень напруг

$$U_{ab} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}.$$

У результаті одержимо трикутник напруг прямокутної форми, що складається із активної, реактивної та повної складових напруг (рис. 2.27 а, в).

Із трикутника визначимо

$$U_{ab} = \sqrt{U_A^2 + U_P^2}, \quad U_A = U_R; \quad U_P = U_L - U_C.$$

де U_A – активна складова напруги, U_P – реактивна складова напруги.

Визначимо напруги через опори за законом Ома

$$\begin{aligned} U_{ab} &= \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{I^2 R^2 + (IX_L - IX_C)^2} = \\ &= I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I|Z|. \end{aligned}$$

Модуль повного опору кола

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad X = X_L - X_C.$$

де R – активна складова опору, X – реактивна складова опору.

Напругу та повний опір кола можна зобразити на комплексній площині (рис. 2.27) за допомогою трикутників напруги та опорів.

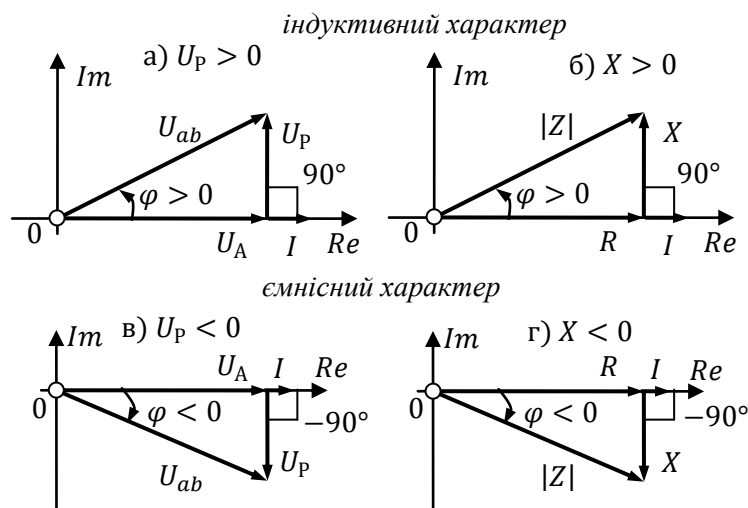


Рисунок 2.27 – Трикутники напруг та опорів

Трикутник, що утворений напругами U_{ab} , U_P та U_A називають трикутником напруг. Якщо $U_L > U_C$ ($X_L > X_C$), то коло має індуктивний характер (прикладена напруга випереджає струм), що відповідає рис. 2.27 а. Якщо $U_L < U_C$ ($X_L < X_C$), то коло має ємнісний характер (прикладена напруга відстає від стру-

му), що відповідає рис. 2.27 в. Трикутник, що утворений опорами $|Z|$, X та R називають трикутником опорів, що є подібним до трикутника напруг.

Комплексний опір кола

$$Z(\omega) = R + Z_L + Z_C = R + jX_L - jX_C = R + jX = |Z|e^{j\varphi_Z},$$

де $|Z|$ модуль комплексного опору, φ_Z – аргумент комплексного опору.

Модуль $|Z|$ та аргумент φ_Z комплексного опору визначаються із трикутника опорів

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}; \quad \varphi_Z = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

Крім того, опір $Z(\omega)$, називають імпедансом

Імпеданс – повний комплексний опір кола.

Розглянемо деякі приклади

Приклад 2.4. У колі (рис. 2.28) визначити показання вольтметра E та значення C . Показання інших двох вольтметрів становлять: $U_R = 4$ В, $U_C = 3$ В. Числові значення: $R = 2$ кОм, $f = 50$ Гц.

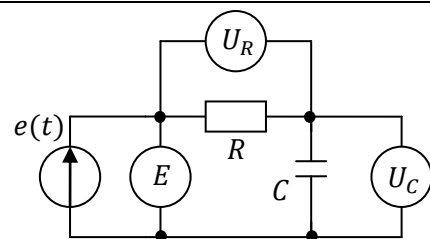


Рисунок 2.28 – Схема

Розв'язання

Із трикутника напруг (рис. 2.29) визначимо показання вольтметра за теоремою Піфагора

$$E = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ В.}$$

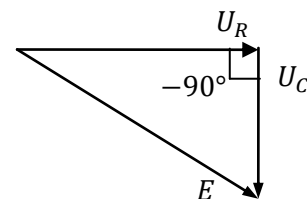


Рисунок 2.29 – Трикутник напруг

Модуль струму у колі

$$|I| = \frac{U_R}{R} = \frac{4}{2} = 2 \text{ мА.}$$

Із закону Ома визначимо реактивний опір ємності

$$X_C = \frac{U_C}{|I|} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ кОм.}$$

З іншого боку реактивний опір ємності

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}.$$

Звідси визначимо величину ємності

$$C = \frac{1}{2\pi f \cdot X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 1.5 \cdot 10^3} \cong 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 2 \text{ мкФ.}$$

Відповідь: $E = 5$ В; $C = 2$ мкФ.

Приклад 2.5. У колі (рис. 2.30) визначити величину індуктивності L та напругу на ній. Показання трьох вольтметрів: $U_V = 12$ В, $U_{V1} = 8$ В, $U_{V2} = 5$ В. Опір $R_1 = 5$ Ом, частота $f = 50$ Гц.

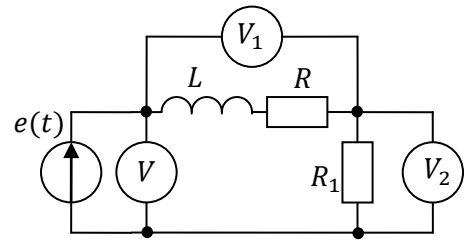


Рисунок 2.30 – Схема

Розв'язання

Побудуємо трикутник напруг (рис. 2.31).

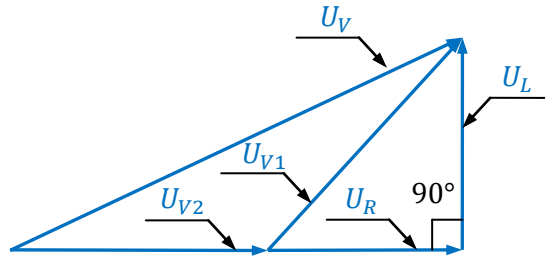


Рисунок 2.31 – Трикутник напруг

Для трикутника напруг одержимо систему рівнянь (рис. 2.31):

$$\begin{cases} U_V^2 = U_L^2 + (U_{V2} + U_R)^2; \\ U_{V1}^2 = U_L^2 + U_R^2. \end{cases}$$

Віднімемо від першого друге рівняння

$$U_V^2 - U_{V1}^2 - U_{V2}^2 = 2U_{V2}U_R.$$

Звідси визначимо напругу

$$U_R = \frac{U_V^2 - U_{V1}^2 - U_{V2}^2}{2U_{V2}} = \frac{12^2 - 8^2 - 5^2}{2 \cdot 5} = 5.5 \text{ В.}$$

З другого рівняння системи визначимо

$$U_L = \sqrt{U_{V1}^2 - U_R^2} = \sqrt{8^2 - 5.5^2} \cong 5.8 \text{ В.}$$

За законом Ома модуль струму та реактивний опір індуктивності

$$|I| = \frac{U_{V2}}{R_1} = \frac{5}{5} = 1 \text{ А;}$$

$$X_L = \frac{U_L}{|I|} = \frac{5.8}{1} = 5.8 \text{ Ом.}$$

З іншого боку реактивний опір індуктивності

$$X_L = \omega L = 2\pi f L.$$

Звідси визначимо величину індуктивності

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{5.8}{2\pi \cdot 50} = 0.018 \text{ Гн} = 18 \text{ мГн.}$$

Відповідь: $U_L = 5.8$ В; $L = 18$ мГн.

2.7. Паралельне з'єднання елементів у колах гармонічного струму

У колі (рис. 2.32) діє гармонічна напруга $u_{ab}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$.

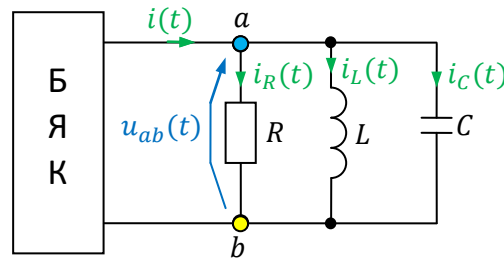


Рисунок 2.32 – Схема паралельного з'єднання елементів

За першим законом Кірхгофа

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = \frac{u_{ab}(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t u_{ab}(t) dt + C \frac{du_{ab}(t)}{dt}.$$

Підставимо у одержаний вираз гармонічну напругу

$$\begin{aligned} i &= gU_m \cos(\omega t + \varphi_u) + \frac{U_m}{\omega L} \cos\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right) + U_m \omega C \cos\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= I_{mg} \cos(\omega t + \varphi_u) + I_{mL} \cos\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right) + I_{mC} \cos\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Одержане рівняння є тригонометричною формою запису першого закону Кірхгофа для миттєвих значень струмів.

Подальші розрахунки у такій формі є громіздкими, тому скористаємося векторною формою

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C.$$

Зобразимо вектори на векторній діаграмі (рис. 2.33). Для спрощення будемо вважати, що початкова фаза напруги $\varphi_u = 0$. Векторну діаграму побудуємо для двох випадків: а) $\varphi > 0$; б) $\varphi < 0$.

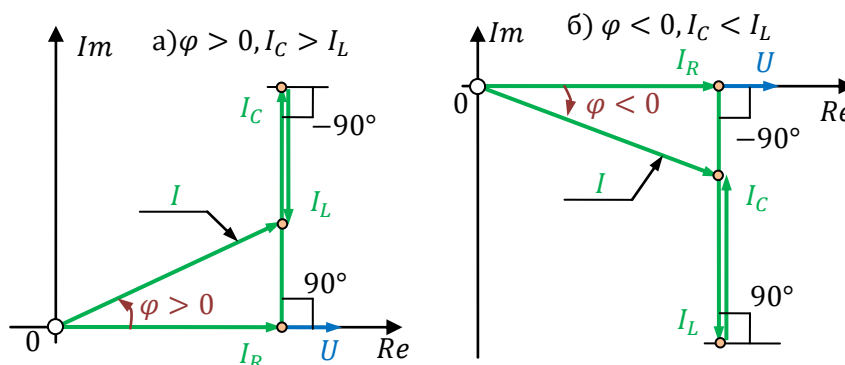


Рисунок 2.33 – Векторні діаграми

Із векторної діаграми за теоремою Піфагора знаходимо амплітуду струму

$$I_m = \sqrt{I_{mR}^2 + (I_{mC} - I_{mL})^2}.$$

Також можна записати і для діючих значень

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}.$$

У результаті одержимо трикутник струмів прямокутної форми, що складається із активної, реактивної та повної складових струму (рис. 2.34).

Із трикутника визначимо

$$I = \sqrt{I_A^2 + I_P^2}, \quad I_A = I_R; \quad I_P = I_L - I_C.$$

де I_A – активна складова струму, I_P – реактивна складова струму.

Визначимо струми через провідності за законом Ома:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{U_{ab}^2 g^2 + (U_{ab} b_C - U_{ab} b_L)^2} = \\ &= U_{ab} \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2} = U_{ab} |Y|. \end{aligned}$$

Модуль повної провідності кола

$$|Y| = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2} = \sqrt{g^2 + b^2}, \quad b = b_C - b_L.$$

де g – активна складова провідності, b – реактивна складова провідності.

Струм та повна провідність кола можна зобразити на комплексній площині (рис. 2.34) за допомогою трикутників струмів та провідностей.

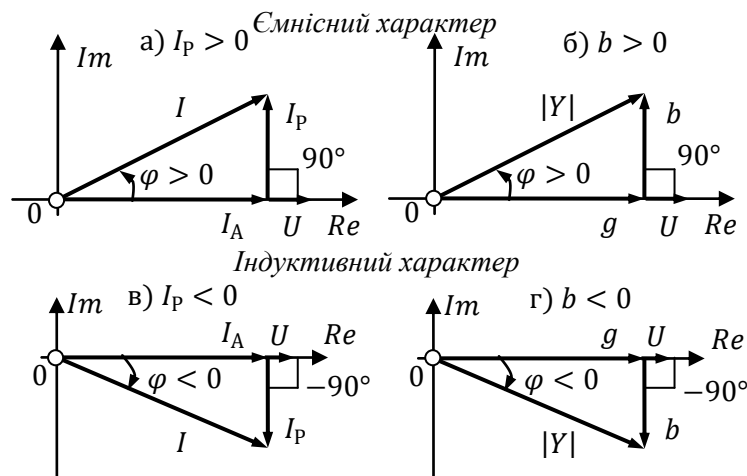


Рисунок 2.34 – Трикутники струмів та провідностей

Трикутник, що утворений струмами I , I_P та I_A називають трикутником струмів. Якщо $I_C > I_L$ ($b_C > b_L$), то провідність кола має ємнісний характер (прикладений струм випереджає напругу), що відповідає рис. 2.34 а. Якщо $I_C < I_L$ ($b_C < b_L$), то провідність кола має індуктивний характер (прикладений струм відстає від напруги), що відповідає рис. 2.34 в. Трикутник, що утворений провідностями $|Y|$, b та g називають трикутником провідностей, що є подібним до трикутника струмів.

Комплексна провідність кола

$$Y(\omega) = g + Y_C + Y_L = g + jb_C - jb_L = g + jb = |Y|e^{j\varphi},$$

де $|Y|$ модуль комплексної провідності, φ – аргумент комплексної провідності.

Модуль $|Y|$ та аргумент φ комплексної провідності визначаються із трикутника провідностей:

$$|Y| = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{b_C - b_L}{g}\right).$$

Адмітанс – повна комплексна провідність кола.

Імітанс – це узагальнене поняття імпеданса та адмітанса, з яким не пов'язані одиниці виміру.

Кондуктанс – це дійсна частина адмітанса, **сусцептанс** – це уявна частина адмітанса.

Приклад 2.6. У колі (рис. 2.35) визначити показання амперметра A_1 та значення C . Показання інших двох амперметрів становлять: $I_A = 10$ мА, $I_{A2} = 8$ мА. Числові значення $R = 4$ кОм, $f = 50$ Гц.

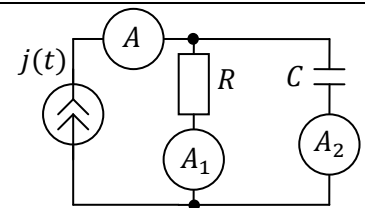


Рисунок 2.35 – Схема

Розв'язання

Розрахунки здійснюємо в одиницях: опори – кОм, струм – мА, напруга – В, ємність – мкФ, частота – Гц

Побудуємо трикутника струмів (рис. 2.36) та визначимо показання амперметра

$$I_{A1} = I_R = \sqrt{I_A^2 - I_C^2} = \sqrt{I_A^2 - I_{A2}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ мА}.$$

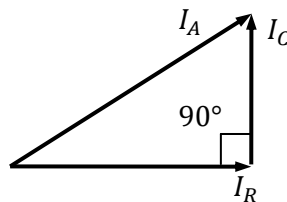


Рисунок 2.36 – Трикутник струмів

Із закону Ома визначимо модуль напругу та реактивну провідність ємності

$$|U_R| = I_{A1} \cdot R = 6 \cdot 4 = 24 \text{ В} = |U_C|;$$

$$b_C = \frac{I_{A2}}{|U_C|} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \text{ мСім}.$$

З іншого боку реактивна провідність ємності

$$b_C = \omega C = 2\pi f C.$$

Звідси визначимо величину ємності

$$C = \frac{b_C}{2\pi f} = \frac{10^{-3}}{2\pi \cdot 50 \cdot 3} \cong 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 1.1 \text{ мкФ}.$$

Відповідь: $I_{A1} = 6$ мА; $C = 1.1$ мкФ.

Приклад 2.7. У колі (рис. 2.37) визначити величину індуктивності L та струм в ній. Показання трьох амперметрів складають $I = 6.71$ мА, $I_1 = 5$ мА, $I_2 = 2$ мА. Опір становить $R = 6$ Ом, частота $f = 50$ Гц.

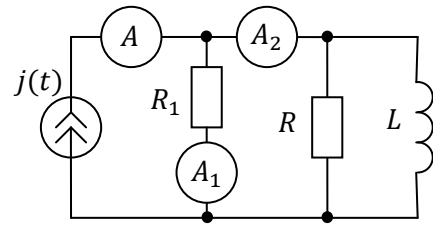


Рисунок 2.37 – Схема

Розв'язання

Розрахунки здійснюємо в одиницях: опори – Ом, струм – мА, напруга – В, індуктивність – мГн, частота – Гц.

Побудуємо трикутник струмів (рис. 2.38).

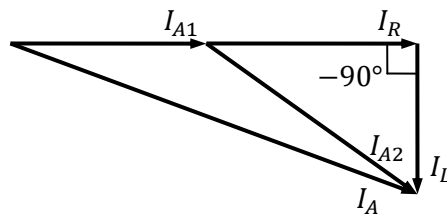


Рисунок 2.38 – Векторна діаграма струмів

Для трикутника струмів одержимо систему рівнянь (рис. 2.38):

$$\begin{cases} I^2 = I_L^2 + (I_2 + I_R)^2; \\ I_1^2 = I_L^2 + I_R^2. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге

$$I^2 - I_1^2 - I_2^2 = 2I_2I_R.$$

Звідси визначимо струм

$$I_R = \frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2I_2} = \frac{6.71^2 - 5^2 - 2^2}{2 \cdot 2} = 4 \text{ мА.}$$

З другого рівняння системи визначимо

$$I_L = \sqrt{I_1^2 - I_R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ мА.}$$

За законом Ома модуль напруги та реактивний опір індуктивності

$$U_R = I_R \cdot R = 4 \cdot 6 = 24 \text{ В;}$$

$$X_L = \frac{U_R}{I_L} = \frac{24}{3} = 8 \text{ Ом.}$$

З іншого боку реактивний опір індуктивності

$$X_L = \omega L = 2\pi f L.$$

Звідси визначимо величину індуктивності

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{8}{2\pi \cdot 50} = 0.025 \text{ Гн} = 25 \text{ мГн.}$$

Відповідь: $I_L = 3$ мА; $L = 25$ мГн.

2.8. Закони Ома та Кірхгофа у комплексній формі

Закон Ома у комплексній формі (рис. 2.39)

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \cdot Z(\omega),$$

Звідси визначимо імпеданс

$$Z(\omega) = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} \text{ або } Y(\omega) = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m}.$$

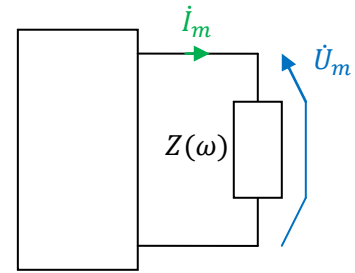


Рисунок 2.39 – Схема

Отже, комплексний опір електричного кола дорівнює відношенню комплексної напруги до комплексного струму цього кола.

Перший закон Кірхгофа

За першим законом Кірхгофа у режимі гармонічних коливань: алгебраїчна сума гармонічних струмів у вузлу дорівнює нулю

$$\sum_k I_k \cos(\omega t + \varphi_k) = 0.$$

Визначимо струми через дійсні частини комплексних функцій

$$\sum_k I_k \cos(\omega t + \varphi_k) = \sum_k \operatorname{Re}[I_k e^{j(\omega t + \varphi_k)}] = \sum_k \operatorname{Re}[\dot{I}_{km} e^{j\omega t}] = 0,$$

де

$$\dot{I}_{km} = I_k e^{j\varphi_k}.$$

Скоротимо одержаний вираз на величину $e^{j\omega t}$, замінивши операції над дійсними частинами комплексних функцій операціями над самими комплексними функціями

$$\sum_k \dot{I}_{km} e^{j\varphi_k} = 0.$$

В результаті одержимо перший закон Кірхгофа у комплексній формі

$$\sum_k \dot{I}_k = 0.$$

Отже, алгебраїчна сума комплексних амплітуд струмів (чи комплексних струмів) у вузлі дорівнює нулю.

Другий закон Кірхгофа

За другим законом Кірхгофа у режимі гармонічних коливань: алгебраїчна сума гармонічних напруг по контуру обходу дорівнює нулю

$$\sum_k U_k \cos(\omega t + \varphi_k) = 0.$$

Визначимо напруги через дійсні частини комплексних функцій

$$\sum_k U_k \cos(\omega t + \varphi_k) = \sum_k \operatorname{Re}[U_k e^{j(\omega t + \varphi_k)}] = \sum_k \operatorname{Re}[\dot{U}_{km} e^{j\omega t}] = 0,$$

де

$$\dot{U}_{km} = U_k e^{j\varphi_k}.$$

Скоротимо одержаний вираз на величину $e^{j\omega t}$, замінивши операції над дійсними частинами комплексних функцій операціями над самими комплексними функціями

$$\sum_k U_{km} e^{j\varphi_k} = 0.$$

В результаті одержимо другий закон Кірхгофа у комплексній формі

$$\sum_k \dot{U}_k = 0.$$

Отже, алгебраїчна сума комплексних амплітуд напруг (чи комплексних напруг) по контуру обходу дорівнює нулю.

Доведемо ці закони. Розглянемо коло (рис. 2.40). Нехай у колі діє гармонічний струм $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$.

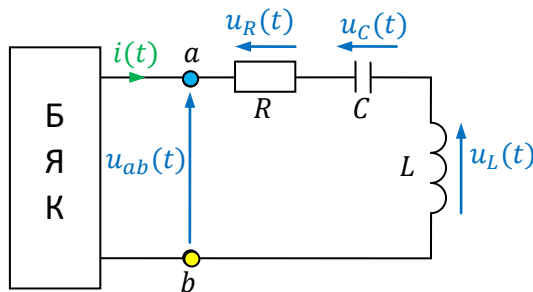


Рисунок 2.40 – Схема послідовного з'єднання елементів

Напруга за другим законом Кірхгофа

$$u_{ab}(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t).$$

Напруги на елементах кола

$$u_R(t) = Ri(t); \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}; \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt.$$

У результаті отримаємо

$$u_{ab}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt.$$

Заданий гармонічний струм та напругу можна представити комплексними функціями

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \dot{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{та} \quad u_{ab}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U) \rightarrow \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Операції над гармонічними величинами замінемо операціями над дійсними частинами комплексних функцій

$$\operatorname{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = R \cdot \operatorname{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] + L \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] + \frac{1}{C} \int \operatorname{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] dt.$$

Операції над дійсними частинами комплексних функцій замінюються операціями над самими комплексними функціями. Пояснюється це комутативністю операцій додавання, диференціювання та інтегрування відносно символічної

операції Re . Це рівняння виконується для будь-якого моменту часу. У результаті одержимо

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = R \dot{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{\dot{I}_m e^{j\omega t}}{j\omega C}.$$

Спростимо вираз, скоротивши його на $e^{j\omega t}$

$$\dot{U}_m = R \dot{I}_m + j\omega L \dot{I}_m + \frac{\dot{I}_m}{j\omega C} = \dot{I}_m \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{I}_m Z.$$

В результаті одержали закон Ома для комплексних амплітуд

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m Z.$$

Комплексний опір

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + j(X_L - X_C) = R + jX.$$

Комплексний опір кола – це відношення комплексної амплітуди напруги до комплексної амплітуди струму

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{|\dot{U}_m| e^{j\varphi_U}}{|\dot{I}_m| e^{j\varphi_I}} = \frac{|\dot{U}_m|}{|\dot{I}_m|} e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} = |Z| e^{j\varphi_Z} = R + jX.$$

На рис. 2.41 подана геометрична інтерпретація на комплексній площині другого закону Кірхгофа у колі (рис. 2.41). Коли $U_L > U_C$ реактивна напруга кола має індуктивний характер (рис. 2.41 а), а коли $U_L < U_C$ реактивна напруга кола має ємнісний характер (рис. 2.41 б).

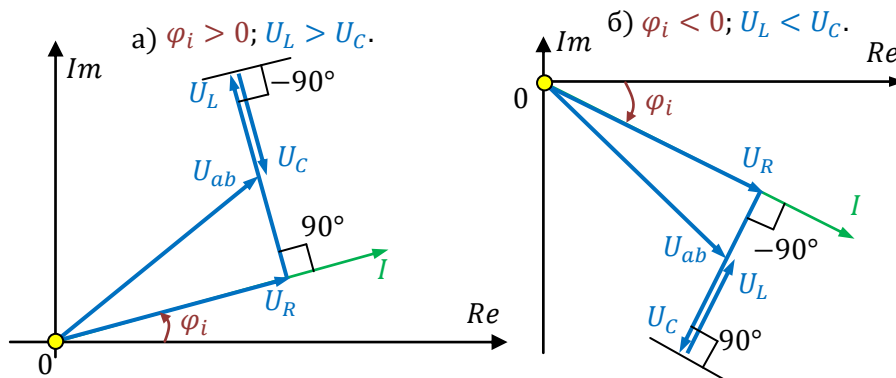


Рисунок 2.41 – Векторні діаграми

Розглянемо коло, що містить паралельне з'єднання елементів (рис. 2.42), причому напруга на вході змінюється за законом $u_{ab}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$.

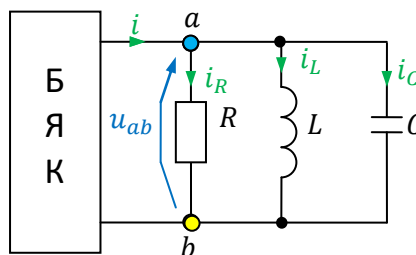


Рисунок 2.42 – Схема паралельного з'єднання елементів

Запишемо перший закон Кірхгофа

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = u_{ab}(t) \cdot g + \frac{1}{L} \int u_{ab}(t) dt + C \frac{du_{ab}(t)}{dt}.$$

Струми у колі

$$i_R(t) = g \cdot i(t); \quad i_C(t) = C \frac{di(t)}{dt}; \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int i(t) dt.$$

Операції над гармонічними величинами замінимо операціями над дійсними частинами комплексних функцій

$$\operatorname{Re}[i_m e^{j\omega t}] = g \cdot \operatorname{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] + \frac{1}{L} \int \operatorname{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] dt + C \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}].$$

Операції над дійсними частинами комплексних функцій замінюються операціями над самими комплексними функціями

$$i_m e^{j\omega t} = g \cdot \dot{U}_m e^{j\omega t} + \frac{\dot{U}_m e^{j\omega t}}{j\omega L} + \dot{U}_m j\omega C \cdot e^{j\omega t}.$$

Спростимо вираз, скоротивши його на $e^{j\omega t}$

$$i_m = g \dot{U}_m + \frac{1}{j\omega L} \dot{U}_m + j\omega C \dot{U}_m = \dot{U}_m \left(g + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) = \dot{U}_m \cdot Y.$$

В результаті одержали закон Ома для комплексних амплітуд

$$i = \dot{U}_m \cdot Y.$$

Комплексна провідність кола

$$Y = g + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = g + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = g + j(b_C - b_L) = g + jb.$$

Комплексна провідність кола – це відношення комплексної амплітуди струму до комплексної амплітуди напруги

$$Y = \frac{i}{\dot{U}_{ab}} = \frac{|i| e^{j\varphi_I}}{|\dot{U}_{ab}| e^{j\varphi_U}} = \frac{|i|}{|\dot{U}_{ab}|} e^{j(\varphi_I - \varphi_U)} = |Y| e^{j\varphi_Y} = g + jb.$$

На рис. 2.43 подана геометрична інтерпретація на комплексній площині першого закону Кірхгофа. Коли $I_C > I_L$ реактивний струм кола має ємнісний характер (рис. 2.43 а), а коли $I_C < I_L$ реактивний струм кола має індуктивний характер (рис. 2.43 б).

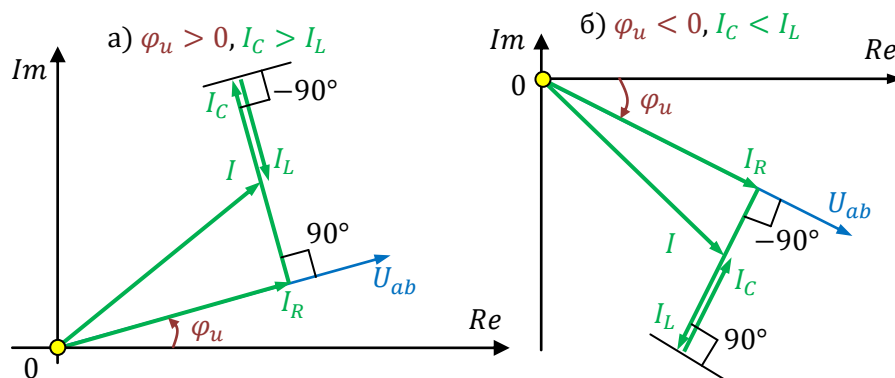


Рисунок 2.43 – Векторні діаграми

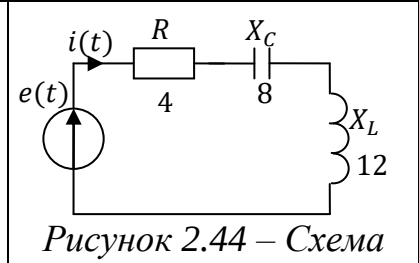
Отже, гармонічні функції умовно можна замінити комплексними амплітудами. Для комплексних амплітуд виконуються закони Ома та Кірхгофа. Також

для комплексних амплітуд виконуються всі еквівалентні перетворення, а також всі методи розрахунку електричних кіл.

На основі законів Кірхгофа та компонентних рівнянь можна скласти систему рівнянь, що дозволить визначити струми та напруги у колі, що називають систему рівнянь електричної рівноваги.

Нижче наведені приклади розрахунку за методом комплексних амплітуд.

Приклад 2.8. У колі (рис. 2.44) визначити вираз струму $i(t)$. Якісно побудувати векторну діаграму струмів та напруг. Відомо, напруга джерела змінюється за гармонічним законом $e(t) = 12\sqrt{2} \cos(\omega t + 30^\circ)$ В. Числові значення елементів кола на деякій частоті ω задані на схемі у вигляді опорів елементів в кОм.



Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опори – кОм, індуктивності – мГн, ємність – нФ, струм – мА, напруга – В.

Комплексні опори індуктивності та ємнісні

$$Z_L = jX_L = 12j \text{ кОм}; \quad Z_C = -jX_C = -8j \text{ кОм}.$$

Загальний опір кола (рис. 2.36 а)

$$Z = R + Z_L + Z_C = 4 + 12j - 8j = 4 + 4j = |Z|e^{j\varphi_Z} = 4\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ кОм},$$

де $|Z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$; $\varphi_Z = \arctg(4/4) = \arctg(1) = 45^\circ$.

Комплексна амплітуда напруги

$$\dot{E} = 12\sqrt{2}e^{j30^\circ} \text{ В}.$$

Закон Ома для комплексних амплітуд (рис. 2.45)

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{12\sqrt{2}e^{j30^\circ}}{4\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 3e^{-j15^\circ} \text{ мА}.$$

Гармонічний струм

$$i(t) = 3 \cos(\omega t - 15^\circ) \text{ мА}.$$

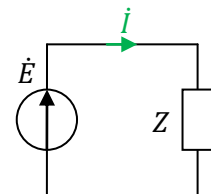


Рисунок 2.45 – Схема

Якісно побудуємо векторну діаграму струмів та напруг (рис. 2.46).

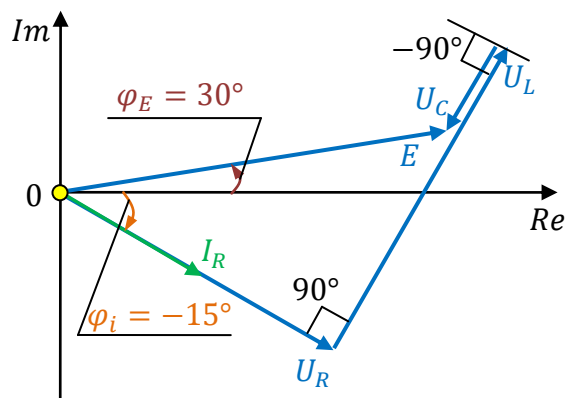


Рисунок 2.46 – Векторна діаграма

Відповідь: $i(t) = 3 \cos(\omega t - 15^\circ) \text{ мА}.$

Приклад 2.9. У колі (рис. 2.47) визначити напругу $u_j(t)$. Якісно побудувати векторну діаграму струмів та напруг. Відомо, що струм джерела змінюється за законом $j(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 15^\circ)$ мА. Числові значення елементів кола на деякій частоті ω задані на схемі: опори в кОм, провідності b_L , b_C в мСім.

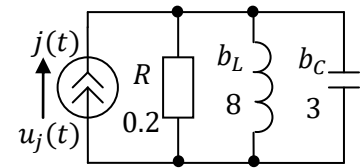


Рисунок 2.47 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: провідності – мСім, струм – мА, напруга – В, частота – рад/мкс.

Комплексні провідності ємності та індуктивності

$$Y_C = jb_C = 3j \text{ мСім}; Y_L = -jb_L = -8j \text{ мСім}.$$

Загальна провідність кола

$$Y = g + Y_C + Y_L = 5 + 3j - 8j = 5 - 5j = |Y|e^{j\varphi_Y} = 5\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ мСім}.$$

де $|Y| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; $\varphi_Y = \arctg(-5/5) = \arctg(-1) = -45^\circ$.

Комплексна амплітуда струму (рис. 2.48)

$$j = 10\sqrt{2}e^{j15^\circ} \text{ мА}.$$

Закон Ома для комплексних амплітуд

$$\dot{U}_j = \frac{j}{Y} = \frac{10\sqrt{2}e^{j15^\circ}}{5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = 2e^{j60^\circ} \text{ В}.$$

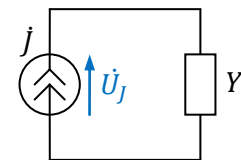


Рисунок 2.48 – Схема

Гармонічна напруга

$$u_j(t) = 2 \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ В}.$$

Якісно побудуємо векторну діаграму струмів та напруг (рис. 2.49).

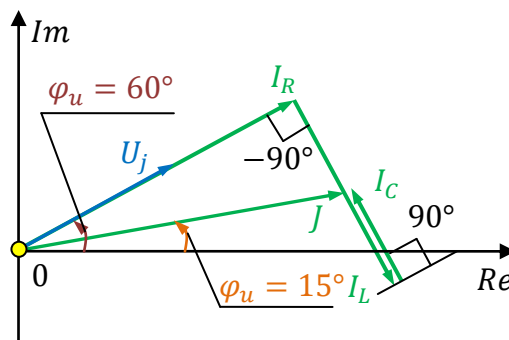
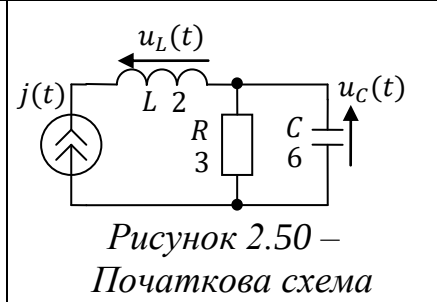


Рисунок 2.49 – Векторна діаграма

Відповідь: $u_j(t) = 2 \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ В}.$

Приклад 2.10. У колі (рис. 2.50) в усталеному гармонічному режимі визначити гармонічні напруги на реактивних елементах: $u_L(t)$ та $u_C(t)$. Джерело струму змінюється за таким законом $j(t) = 10 \cos(\omega t - 80^\circ)$ мА. Абсолютні значення опорів елементів нанесені на схемі в кОм на деякій частоті ω .



Розв'язання

Розрахунки здійснюватимемо у одиницях: опір – кОм, струм – мА, напруга – В.

Комплексні індуктивні та ємнісні опори

$$Z_L = jX_L = 2j = 2e^{j90^\circ} \text{ кОм};$$

$$Z_C = -jX_C = -6j = 6e^{-j90^\circ} \text{ кОм}.$$

Комплексна амплітуда струму

$$\dot{j} = 10e^{-j80^\circ}.$$

За формулою дільника струму (рис. 2.51)

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{j} \cdot R}{R + Z_C} = \frac{10e^{-j80^\circ} \cdot 3}{3 - 6j} = \frac{10e^{-j80^\circ}}{1 - 2j} = \frac{10e^{-j80^\circ}}{\sqrt{5}e^{-j63.5^\circ}} = 2\sqrt{5}e^{-j16.5^\circ} \text{ мА}.$$

Представимо знаменник у показниковій формі

$$Z_a = 1 - 2j = |Z_a|e^{j\varphi_z},$$

$$|Z_a| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}, \quad \varphi_z = \arctg(-2/1) = -63.5^\circ.$$

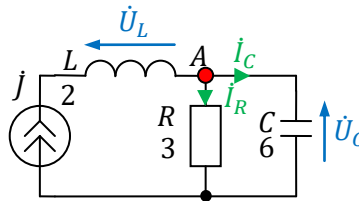


Рисунок 2.51 – Схема із напрямками струмів та напруг

За законом Ома

$$\dot{U}_L = \dot{j} \cdot Z_L = 10e^{-j80^\circ} \cdot 2e^{j90^\circ} = 20e^{j10^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C \cdot Z_C = 2\sqrt{5}e^{-j16.5^\circ} \cdot 6e^{-j90^\circ} = 12\sqrt{5}e^{-j106.5^\circ} \text{ В}.$$

Гармонічні напруги

$$u_L(t) = 20 \cos(\omega t + 10^\circ) \text{ В};$$

$$u_C(t) = 12\sqrt{5} \cos(\omega t - 106.5^\circ) \text{ В}.$$

Відповідь: $u_L(t) = 20 \cos(\omega t + 10^\circ) \text{ В}; u_C(t) = 12\sqrt{5} \cos(\omega t - 106.5^\circ) \text{ В}.$

2.9. Пасивний двополюсник в колах гармонічного струму

2.9.1. Перерахунок паралельної гілки у послідовну

Розглянемо пасивний двополюсник у колах гармонічного струму (рис. 2.52 а).

Пасивний двополюсник – це коло, що складається з пасивних елементів.

На вході двополюсника діють гармонічний струм та напруга

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i); \quad u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u).$$

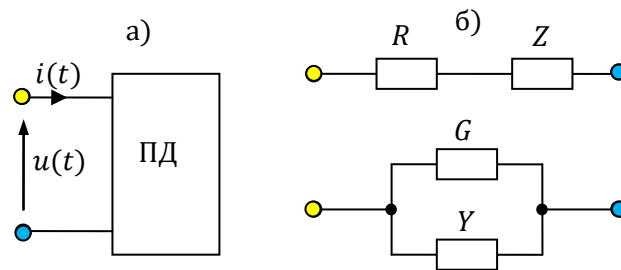


Рисунок 2.52 – Пасивний двополюсник та його схеми заміщення

Пасивний двополюсник ПД можна представити послідовною (рис. 2.52 б) та паралельною (рис. 2.52 в) схемами заміщення.

Щоб побудувати послідовну схему заміщення необхідно визначити вхідний опір кола

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi} = R \pm jX.$$

Знак реактивного опору X визначається знаком φ . Якщо $\varphi > 0$, коли напруга випереджає струм (рис. 2.53 а), $X > 0$, то опір двополюсника ПД має індуктивний характер. В цьому випадку пасивний двополюсник ПД можна при даній частоті можна замінити простою двоелементною схемою із послідовним з'єднанням активного опору та індуктивності (рис. 2.53 в). Якщо $\varphi < 0$, напруга відстає від струму (рис. 2.53 б), $X < 0$, опір ПД має ємнісний характер та зводиться до схеми заміщення іншим з'єднанням активного опору та ємності (рис. 2.53 г).

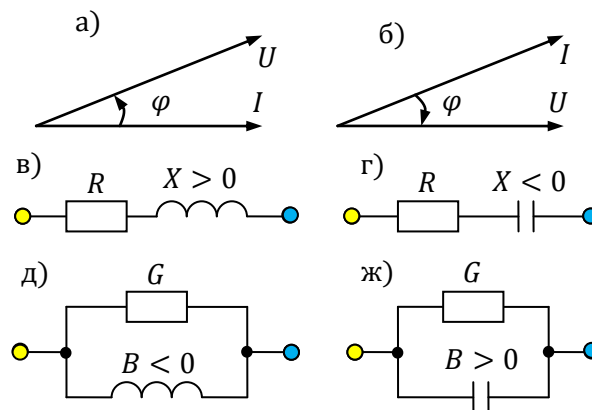


Рисунок 2.53 – Схеми заміщення пасивних двополюсників

Аналогічно, щоб побудувати паралельну схему заміщення необхідно визначити вхідну провідність кола

$$Y_{\text{BX}} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I_m e^{j\varphi_i}}{U_m e^{j\varphi_u}} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} = Y e^{j\varphi} = G \pm jB.$$

Знак реактивної провідності B визначається знаком φ . Якщо $\varphi > 0$ та $B < 0$, то провідність має індуктивний характер (рис. 2.53 д), а при $\varphi < 0$ та $B > 0$ провідність має ємнісний характер (рис. 2.53 ж).

Повний опір кола (рис. 2.54 а)

$$Z = Z_{\text{BX}} = R + jX.$$

Виразимо повну провідність кола (рис. 2.54 б) через повний опір

$$Y = Y_{\text{BX}} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB.$$

Отже,

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{|Z|^2}; \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{|Z|^2}.$$

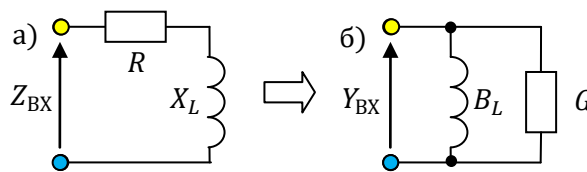


Рисунок 2.54 – Схеми заміщення пасивного двополюсника

Виразимо повний опір кола (рис. 2.54 б) через провідність $Y = G - jB$

$$Z = Z_{\text{BX}} = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G - jB} = \frac{G + jB}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{B}{G^2 + B^2} = R + jX.$$

Отже, отримаємо послідовну схему (рис. 2.54 а)

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{|Y|^2}; \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{|Y|^2}.$$

Одержані вирази показують, що резистивні складові комплексного вхідного опору та комплексної вхідної провідності мають однакові знаки, реактивні складові – протилежні.

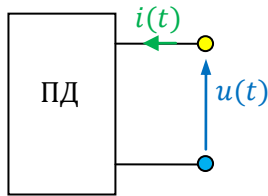
Отже, паралельна та послідовна схеми заміщення пасивного двополюсника мають одну і ту ж реактивність: індуктивного або ємнісного характеру.

Відзначимо, що кожний доданок комплексного опору (R та X) залежить як від резистивної складової G , так і від реактивної B складової комплексної провідності, а кожна із складових комплексної провідності (G та B) в свою чергу залежить від R та X .

Особливо зазначимо, що еквівалентні параметри для довільного двополюсника за гармонічного струму R та G не є оберненими величинами. Те ж саме справедливе і у відношенні реактивних параметрів X та B .

2.9.2. Активна та реактивна складові струму та напруги

Про активні та реактивні складові струму та напруги йде мова, тільки коли є проекція вектора напруги на вектор струму або навпаки.



Розглянемо пасивний двополюсник ПД (ри. 2.55). На вході цього двополюсника діють гармонічний струм та напруга

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \varphi_i); \\ u(t) &= U_m \cos(\omega t + \varphi_u). \end{aligned}$$

Рисунок 2.55 – Схема пасивного двополюсника

Відкладемо струм та напругу на комплексній площині.

Складову напруги, яка за фазою збігається зі струмом називається **активною складовою напруги**, а та складова напруги, вектор якої перпендикулярний до вектора струму, називається **реактивною складовою напруги** (рис. 2.56 а).

Активна та реактивна складові напруги

$$U_a = |\dot{U}| \cos \varphi; \quad U_p = |\dot{U}| \sin \varphi, \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

Миттєві значення активної та реактивної складових напруги

$$u_a(t) = U_{ma} \cos(\omega t + \varphi); \quad u_p(t) = U_{mp} \cos(\omega t + \varphi + 90^\circ).$$

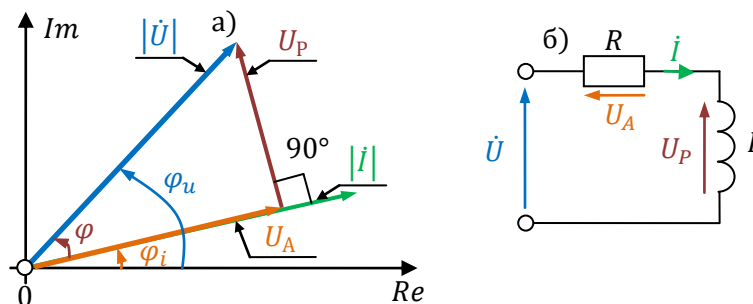


Рисунок 2.56 – Визначення реактивної та активної напруги та відповідна схема

Трикутник напруг (рис. 2.56 а) схематично можна трактувати, як послідовне з'єднання активного опору та індуктивності (рис. 2.56 б). Оскільки активна складова напруги U_a співпадає зі струмом I , то схемотехнічно це можна трактувати як активний опір. Оскільки реактивна складова напруги U_p перпендикулярна струму I , то схемотехнічно це можна трактувати як індуктивний опір, тому що напруга U_p випереджає струм на 90° .

Аналогічно складову струму, яка за фазою збігається з напругою будемо називати **активною складовою струму**, а ту складову струму, вектор якої перпендикулярний до вектора напруги, будемо називати **реактивною складовою струму**.

Активна та реактивна складові струму

$$I_a = |I| \cos \varphi; \quad I_p = |I| \sin \varphi, \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

Миттєві значення активної та реактивної складових струму

$$i_a(t) = I_{ma} \cos(\omega t + \varphi); \quad i_p(t) = I_{mp} \cos(\omega t + \varphi + 90^\circ).$$

Трикутник струмів (рис. 2.57 а) схематично можна трактувати, як паралельне з'єднання активного опору та ємності (рис. 2.57 б). Оскільки активна складова струму I_a співпадає з напругою U , то схемотехнічно це можна трактувати як активний опір. Оскільки реактивна складова струму I_p перпендикулярна до напруги U , то схемотехнічно це можна трактувати як індуктивну провідність, тому що напруга U_p відстає від струму на 90° .

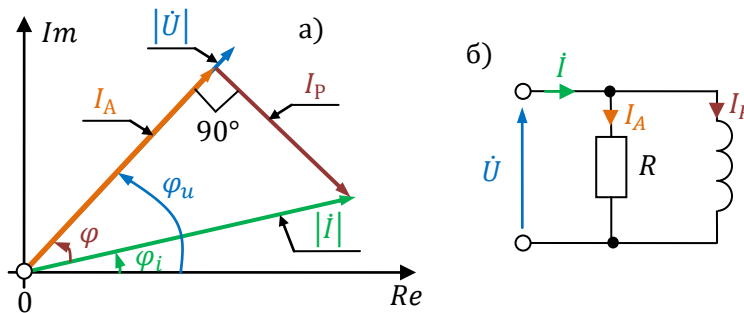
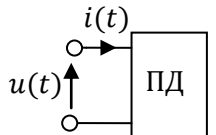


Рисунок 2.57 – Визначення реактивного та активного струму та відповідна схема

Приклад 2.11. У пасивному двополюснику ПД (рис. 2.58) накреслити послідовну та паралельну схеми заміщення на частоті $\omega = 2 \cdot 10^6$ рад/с, вказати значення елементів. Визначити активну та реактивну складові напруги на вході. На вході напруга та струм на цій частоті є $u(t) = 6\sqrt{2} \cos(\omega t + 65^\circ)$ В, $i(t) = 2 \cos(\omega t + 20^\circ)$ мА.	 Рисунок 2.58 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, частота – рад/мкс.

Представимо струм та напругу у вигляді комплексних амплітуд

$$\dot{I} = 2 \cdot e^{j20^\circ}, \dot{U} = 6\sqrt{2} \cdot e^{j65^\circ}.$$

Для побудови послідовної схеми заміщення визначимо вхідний опір пасивного двополюсника (рис. 2.59 а)

$$\begin{aligned} Z_{BX} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} &= \frac{6\sqrt{2} \cdot e^{j65^\circ}}{2 \cdot e^{j20^\circ}} = 3\sqrt{2}e^{j45^\circ} = 3\sqrt{2}(\cos(45^\circ) + j \sin(45^\circ)) = \\ &= 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3 + j3 \text{ кОм.} \end{aligned}$$

Звідси визначимо, що $R = 3$ кОм, тоді $X_L = 3$ кОм.

З іншого боку реактивний опір індуктивності та індуктивність

$$X_L = \omega L, \rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ мГн.}$$

Для побудови паралельної схеми заміщення визначимо вхідну провідність пасивного двополюсника (рис. 2.59 б)

$$\begin{aligned} Y_{BX} = \frac{1}{Z_{BX}} &= \frac{1}{3\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{-j45^\circ} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)) = \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{6} - j \frac{1}{6} \text{ мСім.} \end{aligned}$$

Звідси визначимо, що $R = 1/g = 6$ кОм, тоді $b_L = 1/6$ мСім.

З іншого боку реактивна провідність індуктивності та індуктивність

$$b_L = \frac{1}{\omega L}, \rightarrow L = \frac{1}{\omega b_L} = \frac{6}{2} = 3 \text{ мГн.}$$

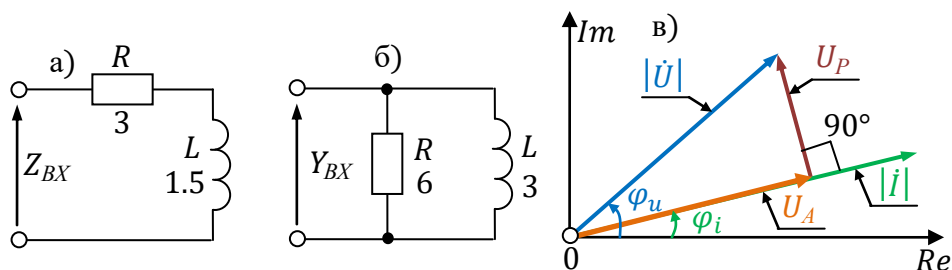


Рисунок 2.59 – Схеми заміщення та вектори напруг

Активна та реактивна складові напруги (рис. 2.59 в)

$$U_A = |\dot{U}| \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I) = 6\sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ) = 6 \text{ В;}$$

$$U_P = |\dot{U}| \cdot \sin(\varphi_U - \varphi_I) = 6\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ) = 6 \text{ В.}$$

2.10. Частотні характеристики кіл

Поняття частотних характеристик є фундаментальними для спеціалістів які проектують технічні пристрої та системи. Вимоги до частотних характеристик електричних кіл зумовлені, з одного боку, енергетичними властивостями сигналів, а з іншого – особливостями електричних кіл.

Аналізуючи характер рівнянь вхідного опору, напруги та струмів в контурі, фазових зсувів між ними у випадку гармонічної дії легко побачити, що вони залежать від частоти. Ця залежність впливає безпосередньо із залежності опорів реактивних елементів X_L та X_C від частоти.

Частотні характеристики кола – це залежності величин від частоти

$$\dot{F}(\omega) = |\dot{F}(\omega)|e^{j\varphi(\omega)},$$

де $|\dot{F}(\omega)|$ - модуль величини, $\varphi(\omega)$ – фаза величини.

Дослідження частотних властивостей кіл ґрунтується на символічному методі аналізу усталених гармонічних режимів.

Під час дослідження частотних властивостей електричних кіл найчастіше оперують амплітудно-частотними та фазочастотними характеристиками. Перша з них характеризується модулем, а друга аргументом.

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) – це залежність амплітуди від частоти

$$|\dot{F}(\omega)| = \sqrt{F_{Re}^2 + F_{Im}^2}.$$

Фазо-частотна характеристика (ФЧХ) – це залежність фази від частоти.

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{F_{Im}}{F_{Re}}\right), & F_{Re} > 0; \\ \arctg\left(\frac{F_{Im}}{F_{Re}}\right) \pm \pi, & F_{Re} < 0. \end{cases}$$

ФЧХ виражається в градусах або радіанах.

Дійсна та уявна частотні характеристики – це залежність від частоти відповідно дійсної та уявної складових

$$F_{Re}(\omega) = \text{Re}[\dot{F}(\omega)]; \quad F_{Im}(\omega) = \text{Im}[\dot{F}(\omega)].$$

Амплітудно-фазова характеристика (АФХ) – це залежність амплітуди та фази від частоти, що зображені на комплексній площині.

Значенню частоти ω відповідає певне значення $\dot{F}(\omega)$, що на комплексній площині можна задати вектором або точкою. Довжина такого вектору дорівнює АЧХ $|\dot{F}(\omega)|$, а кут нахилу до дійсної осі – ФЧХ $\varphi(\omega)$ на частоті ω . Абсциса зображувальної точки визначається значенням дійсної складової $F_{Re}(\omega)$, а ординати – уявної $F_{Im}(\omega)$ частотних характеристик на цій самій частоті. Таким чином, при зміні частоти від $\omega = 0$ до $\omega = \infty$ змінюватимуться довжина та кут нахилу до дійсної осі радіус-вектора.

АФХ дає змогу одночасно про АЧХ, ФЧХ, дійсну та уявну частоті характеристики.

Логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ) – це залежність відношення величин від частоти виражене в логарифмічних одиницях.

Оскільки логарифмічна шкала є нерівномірною, то це дає змогу оцінювати частотні властивості з більшою точністю для малих і з меншою точністю для великих значень. Крім того, використання логарифмічних одиниць для частоти дає змогу досліджувати частотні властивості у дуже великому частотному діапазоні. Але через логарифмічну частотну шкалу не можна будувати графіки ЛЧХ, починаючи з $\omega = 0$.

Залежно від виду логарифмічної функції використовують різні логарифмічні одиниці, а отже й ЛЧХ. Найпоширенішими логарифмічними одиницями є непер і децибел.

ЛЧХ, що виражена у неперах, визначається натуральним логарифмом

$$F_{\text{Нп}}(\omega) = \ln[F(\omega)], \quad F(\omega) = e^{F_{\text{Нп}}(\omega)}.$$

Отже, 1 Нп відповідає значення, яке дорівнює $e \approx 2.71$, тобто амплітуда на частоті ω в e разів більша від амплітуди вхідного сигналу.

ЛЧХ, що виражена в децибелах, визначається десятковим логарифмом

$$F_{\text{дБ}}(\omega) = 20 \lg[F(\omega)], \quad F(\omega) = 10^{F_{\text{Нп}}(\omega)/20}.$$

Отже, 1 дБ відповідає значення, яке дорівнює $10^{1/20} \approx 1.122$, тобто амплітуда на частоті ω в 1.122 разів більша від амплітуди вхідного сигналу.

У таблиці 2.1 наведені значення у звичайних одиницях і децибелах.

Таблиця 2.1

$F(\omega)$	1	1,12	1,26	1,41	1,775	2	3,16	10	10^2
$F_{\text{дБ}}(\omega)$	0	1	2	3	5	6	10	20	40

Для відображення дуже великих частотних діапазонів при побудові ЛЧХ доцільно оцінювати відносні значення частоти: октавами або декадами.

Октава – це частотний діапазон, обмежений частотами, значення яких відрізняються вдвічі.

Декада – це частотний інтервал із крайніми частотами, значення яких відрізняються вдесятеро.

Приклад 2.12. У колі (рис. 2.60) визначити вхідний опір, побудувати частотні характеристики його в лінійному та логарифмічному масштабі. На схемі: опори в кОм, ємності в нФ.

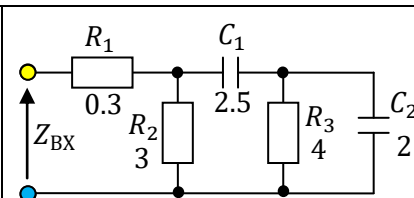


Рисунок 2.60 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: ємність – нФ, опір – кОм, частота – рад/мкс.

Реактивні опори

$$Z_{C1}(p) = \frac{1}{p \cdot C_1} = \frac{1}{p \cdot 2.5} = \frac{0.4}{p};$$

$$Z_{C2}(p) = \frac{1}{p \cdot C_2} = \frac{1}{p \cdot 2} = \frac{0.5}{p}.$$

Еквівалентні та вхідний опір кола

$$Z_1(p) = \frac{R_3 \cdot Z_{C2}(p)}{R_3 + Z_{C2}(p)} = \frac{4 \cdot \frac{0.5}{p}}{4 + \frac{0.5}{p}} = \frac{2}{4p + 0.5};$$

$$Z_2(p) = Z_{C1}(p) + Z_1(p) = \frac{0.4}{p} + \frac{2}{4p + 0.5};$$

$$Z_{BX}(p) = R_1 + \frac{R_2 \cdot Z_2(p)}{R_2 + Z_2(p)} = 0.3 + \frac{3 \cdot Z_2(p)}{3 + Z_2(p)} = \frac{45 \cdot p^2 + 136.5p + 6.6}{150 \cdot p^2 + 55p + 2}.$$

$$Z_{BX}(\omega) = \frac{45 \cdot (j\omega)^2 + 136.5 \cdot j\omega + 6.6}{150 \cdot (j\omega)^2 + 55 \cdot j\omega + 2}.$$

Визначимо значення вхідного опору у контрольних точках

$$Z_{BX}(\omega = 0) = 3.3 \text{ кОм}, \quad Z_{BX}(\omega = \infty) = 0.3 \text{ кОм}.$$

На рис. 2.61 наведене модуль у лінійному та логарифмічному масштабі.

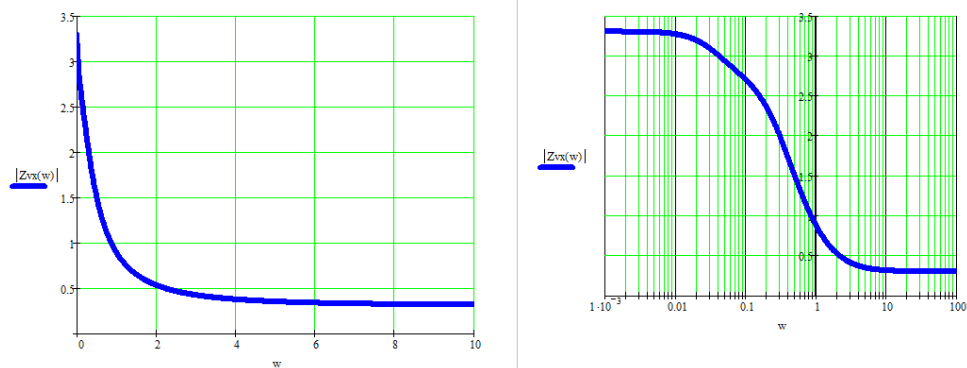


Рисунок 2.61 – Модуль вхідного опору у лінійному та логарифмічному масштабі

На рис. 2.62 наведений аргумент у лінійному та логарифмічному масштабі.

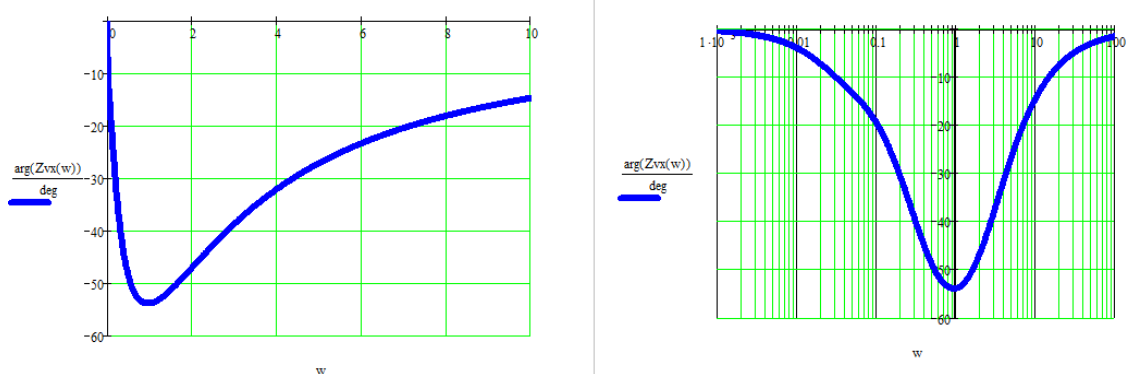


Рисунок 2.62 – Аргумент вхідного опору у лінійному та логарифмічному масштабі

Пронумеруємо вузли (рис. 2.63).

Сформуємо матрицю провідностей

$$Y = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 & 0 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + pC_1 & -pC_1 \\ 0 & -pC_1 & g_3 + pC_1 + pC_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.333 & -3.333 & 0 \\ -3.333 & 2.5p + 3.666 & -2.5p \\ 0 & -2.5p & 4.5p + 0.25 \end{bmatrix}.$$

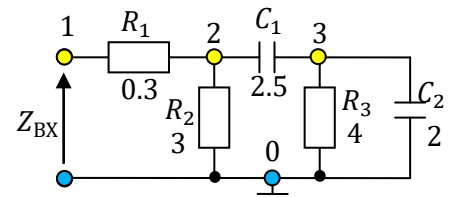


Рисунок 2.63 – Схема із нумерацією вузлів

Обчислимо визначники

$$\Delta = |Y| = 16.666p^2 + 7.0833p + 0.2777;$$

$$\Delta_{11} = |Y_{11}| = 5.0p^2 + 17.125p + 0.9166.$$

Визначимо вхідний опір за матрицею провідностей

$$Z_{BX} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{5.0p^2 + 17.125p + 0.9166}{16.666p^2 + 7.0833p + 0.2777}.$$

Запишемо частотну залежність

$$Z_{BX}(\omega) = \frac{-5.0\omega^2 + 17.125j\omega + 0.9166}{-16.666\omega^2 + 7.0833j\omega + 0.2777}.$$

Частотні залежності модуля та аргументу вхідного опору на рис. 2.64.

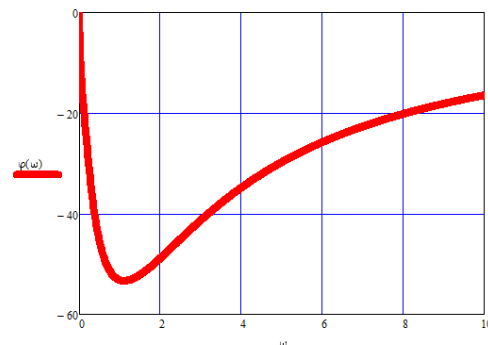
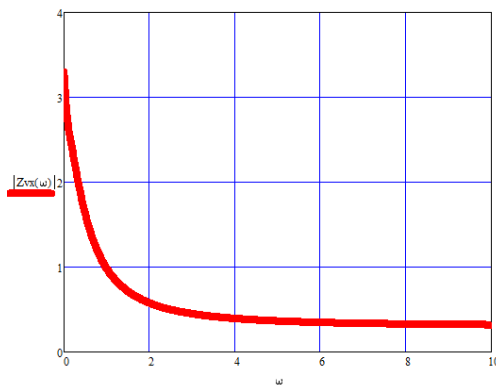


Рисунок 2.64 – Модуль та аргумент вхідного опору у лінійному масштабі

На рис. 2.65 схема на постійному струмі. Визначимо для неї вхідний опір

$$Z_{BX}(0) = R_1 + R_2 = 3.3 \text{ кОм}.$$

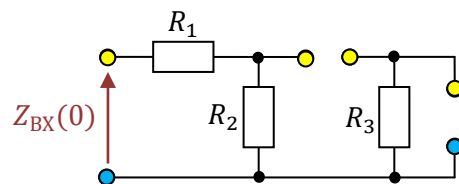


Рисунок 2.65 – Еквівалентна схема при $\omega=0$

На рис. 2.66 схема при $\omega=\infty$. Визначимо для неї вхідний опір

$$Z_{BX}(\infty) = R_1 = 0.3 \text{ кОм}.$$

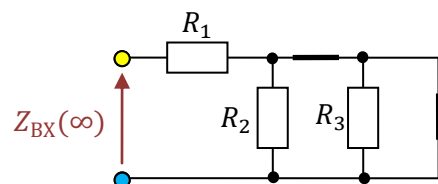


Рисунок 2.66 – Еквівалентна схема при $\omega=\infty$

Скрін розрахунків у математичному пакеті MathCAD представлений на рис. 2.67.

$R1 := 0.3 \quad R2 := 3 \quad R3 := 4 \quad C1 := 2.5 \quad C2 := 2$
 Визначимо провідності
 $g1 := \frac{1}{R1} = 3.333 \quad g2 := \frac{1}{R2} = 0.333 \quad g3 := \frac{1}{R3} = 0.25$
 Сформуємо матрицю провідностей

$$Y(p) := \begin{pmatrix} g1 & -g1 & 0 \\ -g1 & g1 + g2 + p \cdot C1 & -p \cdot C1 \\ 0 & -p \cdot C1 & g3 + p \cdot C1 + p \cdot C2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3.333333333333335 & -3.333333333333335 & 0 \\ -3.333333333333335 & 2.5 \cdot p + 3.6666666666666681 & -2.5 \cdot p \\ 0 & -2.5 \cdot p & 4.5 \cdot p + 0.25 \end{pmatrix}$$

 Обчислимо визначники
 $|Y(p)| \rightarrow 16.66666666666675 \cdot p^2 + 7.0833333333333375 \cdot p + 0.27777777777777222$
 $Y11(p) := \text{submatrix}(Y(p), 1, 2, 1, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 2.5 \cdot p + 3.6666666666666681 & -2.5 \cdot p \\ -2.5 \cdot p & 4.5 \cdot p + 0.25 \end{pmatrix}$
 $|Y11(p)| \rightarrow 5.0 \cdot p^2 + 17.12500000000000645 \cdot p + 0.916666666666667025$
 Вихідний опір
 $Z_{vx}(p) := \frac{|Y11(p)|}{|Y(p)|} \rightarrow \frac{5.0 \cdot p^2 + 17.12500000000000645 \cdot p + 0.916666666666667025}{16.66666666666675 \cdot p^2 + 7.0833333333333375 \cdot p + 0.27777777777777222}$
 Частотні залежності
 $Z_{vx}(\omega) := \frac{5.0 \cdot (\omega - i)^2 + 17.12500000000000645 \cdot (\omega - i) + 0.916666666666667025}{16.66666666666675 \cdot (\omega - i)^2 + 7.0833333333333375 \cdot (\omega - i) + 0.27777777777777222}$
 $\varphi(\omega) := \frac{\arg(Z_{vx}(\omega))}{\deg}$

Рисунок 2.67 – Скрін розрахунків у програмі MathCAD

2.11. Основні методи розрахунку кіл гармонічного струму

2.11.1. Закони Кірхгофа

Приклад 2.13. У колі (рис. 2.68) знайти показання приладів. Джерело $j(t) = 2 \cos(\omega t - 10^\circ)$ мА. Абсолютні значення опорів всіх активних та реактивних елементів подані на схемі в кОм.

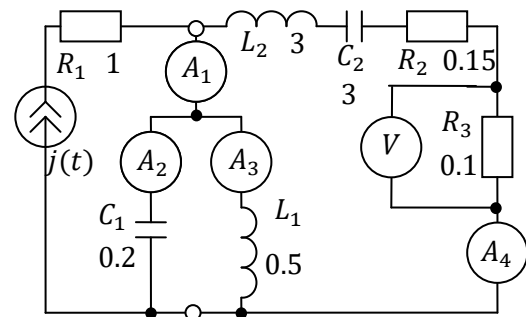


Рисунок 2.68 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, частота – МГц.

Опір гілки

$$Z_{ab} = Z_{L2} + Z_{C2} + R_2 + R_3 = 3j - 3j + 0.1 + 0.15 = 0.25 \text{ кОм.}$$

Комплексні провідності паралельних гілок

$$Y_{L1} = \frac{1}{Z_{L1}} = \frac{1}{jX_{L1}} = \frac{1}{0.5j} = -2j \text{ мСім;}$$

$$Y_{C1} = \frac{1}{Z_{C1}} = \frac{1}{-jX_{C1}} = \frac{j}{0.2} = 5j \text{ мСім;}$$

$$g_{23} = \frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ мСім.}$$

Загальна провідність паралельних гілок (рис. 2.69 а)

$$Y_{ab} = Y_{L2} + Y_{C2} + g_2 = -2j + 5j + 4 = 4 + 3j \text{ мСім.}$$

Звідси модуль провідності $|Y_{ab}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ мСім.}$

Модуль напруги за законом Ома (рис. 2.69 б)

$$|U_{ab}| = |I_m| \cdot |Y_{ab}| = 2 \cdot 5 = 10 \text{ В.}$$

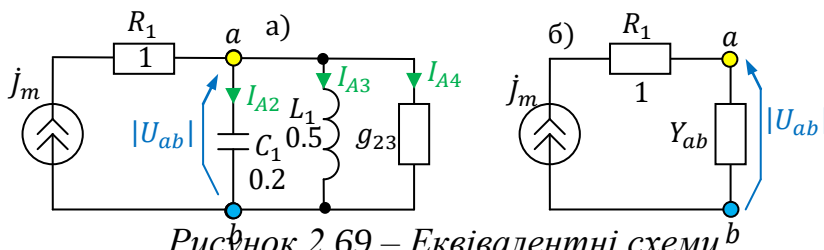


Рисунок 2.69 – Еквівалентні схеми

Визначимо струми та напругу за законом Ома

$$I_{A4} = |U_{ab}| \cdot g_{23} = 10 \cdot 4 = 40 \text{ мА;}$$

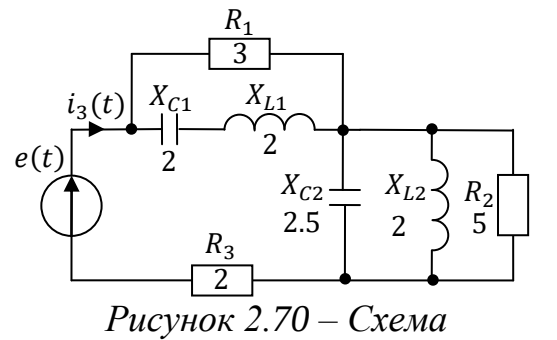
$$U_V = I_{A4} \cdot R_3 = 40 \cdot 0.1 = 4 \text{ В;}$$

$$I_{A3} = |U_{ab}| \cdot b_{L1} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ мА;}$$

$$I_{A2} = |U_{ab}| \cdot b_{C1} = 10 \cdot 5 = 50 \text{ мА.}$$

За першим законом Кірхгофа $I_{A1} = I_{A2} - I_{A3} = 50 - 20 = 30 \text{ мА.}$

Приклад 2.14. У колі (рис. 2.81) розрахувати струм $i_3(t)$. Гармонічна напруга джерела $e(t) = 20 \cos(\omega t + 20^\circ)$ В. Числові значення опорів на схемі задані в кОм



Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, провідність – мСім, частота – МГц.

Оскільки $X_{L1} = X_{C1} = 2$ кОм, то ця гілка налаштована у резонанс і її опір дорівнює нулю. Отже опір R_1 буде закорочений і таким чином не буде впливати на схему.

Комплексні провідності паралельних гілок

$$Y_{L2} = \frac{1}{Z_{L2}} = \frac{1}{jX_{L2}} = \frac{1}{2.5j} = -0.4j \text{ мСім};$$

$$Y_{C2} = \frac{1}{Z_{C2}} = \frac{1}{-jX_{C2}} = \frac{j}{2} = 0.5j \text{ мСім};$$

$$g_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ мСім}.$$

Комплексна провідність паралельних гілок (рис. 2.71а)

$$Y_{ab} = Y_{L2} + Y_{C2} + g_2 = -0.4j + 0.5j + 0.2 = 0.2 + 0.1j \text{ мСім}.$$

Опір паралельних гілок (рис. 2.71 б)

$$Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}} = \frac{1}{0.2 + 0.1j} = \frac{0.2 - 0.1j}{0.04 + 0.01} = \frac{0.2 - 0.1j}{0.05} = 4 - 2j \text{ кОм}.$$

Еквівалентний опір кола

$$Z_E = R_3 + Z_{ab} = 2 + 4 - 2j = 6 - 2j = \sqrt{40}e^{-j18.4^\circ} = 2\sqrt{10}e^{-j18.4^\circ}.$$

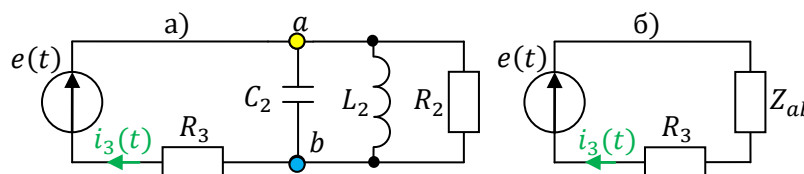


Рисунок 2.71 – Еквівалентні схеми

Комплексний струм за законом Ома (рис. 2.67 б)

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}}{Z_E} = \frac{20e^{j10.6^\circ}}{2\sqrt{10}e^{-j18.4^\circ}} = \sqrt{10}e^{j29^\circ} \text{ мА}.$$

Вираз струму

$$i_3(t) = \sqrt{10} \cos(\omega t + 29^\circ) \text{ мА}.$$

Відповідь: $i_3(t) = \sqrt{10} \cos(\omega t + 29^\circ) \text{ мА}.$

2.11.2. Метод контурних струмів

Приклад 2.15. У колі (рис. 2.72) визначити всі струми у гілках в комплексній формі МКС. Числові значення елементів подані на схемі: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивність в мГн. Струм джерела струму на частоті $\omega = 10^6$ рад/с визначається $j(t) = 2 \cos(\omega t + 15^\circ)$ мА.

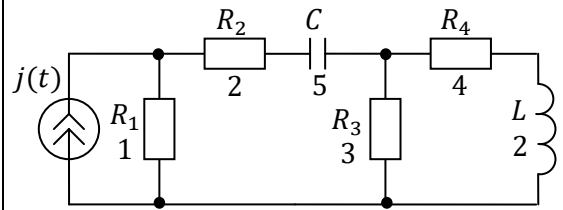


Рисунок 2.72 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, частота – рад/мкс, струм – мА.

Перетворимо джерело струму в джерело напруги (рис. 2.73 а)

$$\dot{E} = j \cdot R_1 = 2e^{j15^\circ} = 1.932 + 0.518j \text{ В.}$$

Еквівалентний опір (рис. 2.73 а)

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 1 + 2 = 3 \text{ кОм.}$$

Комплексні опори індуктивності та ємності

$$Z_L = j\omega L = 2j \text{ кОм}; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 5} = -j0.2 \text{ кОм.}$$

Складемо систему рівнянь за МКС у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \dot{E} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{12} + Z_C + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + Z_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

Підставимо числові значення

$$\begin{bmatrix} 1.932 + 0.518j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 0.2j & -3 \\ -3 & 7 + 2j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

Визначимо контурні струми через обернену матрицю

$$\dot{I} = Z^{-1} \cdot \dot{E} = \begin{bmatrix} \dot{I}_I \\ \dot{I}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.415 - 0.012j \\ 0.163 - 0.052j \end{bmatrix} \text{ мА.}$$

Визначимо струми у гілках (рис. 2.73 б)

$$\dot{I}_C = \dot{I}_I = 0.415 - 0.012j = 0.171 \cdot e^{-j17.6^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_L = \dot{I}_{II} = 0.163 - 0.052j = 0.171 \cdot e^{-j17.7^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_C - \dot{I}_L = 0.252 + 0.04j = 0.255 \cdot e^{j9^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_1 = j - \dot{I}_C = 1.585 + 0.012j = 1.585 \cdot e^{j0.4^\circ} \text{ мА.}$$

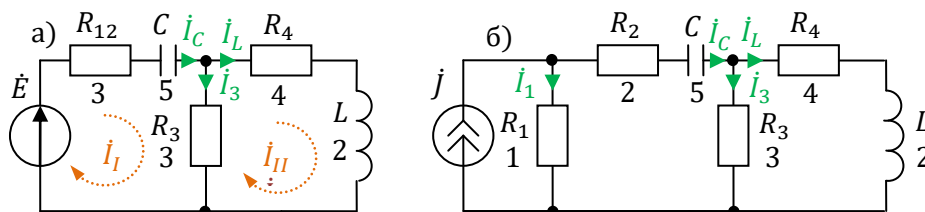


Рисунок 2.73 – Еквівалентні схеми

Відповідь: $\dot{I}_L = 0.416 \cdot e^{-j1.7^\circ}$ мА, $\dot{I}_C = 0.171 \cdot e^{-j17.6^\circ}$ мА,
 $\dot{I}_3 = 0.255 \cdot e^{j9^\circ}$ мА, $\dot{I}_1 = 1.585 \cdot e^{j0.4^\circ}$ мА.

2.11.3. Метод вузлових напруг

Приклад 2.16. У колі (рис. 2.74) визначити всі струми у гілках в комплексній формі МВН. Числові значення елементів на схемі: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивність в мГн. Напруга джерела на частоті $\omega = 10^6$ рад/с є $e(t) = 12 \cos(\omega t - 55^\circ)$ В.

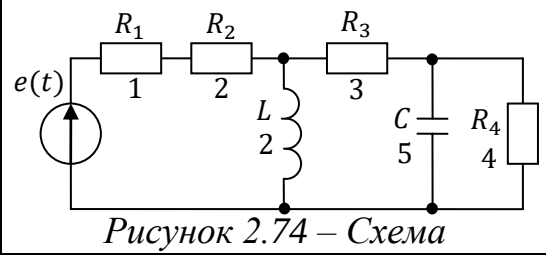


Рисунок 2.74 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, частота – рад/мкс, провідність – мСім.

Еквівалентний опір (рис. 2.70)

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 1 + 2 = 3 \text{ кОм.}$$

Перетворимо джерело напруги в джерело струму (рис. 2.75 а)

$$j = \frac{\dot{E}}{R_{12}} = 4e^{-j55^\circ} = 2.3 - 3.3j \text{ мА.}$$

Комплексні індуктивні та ємнісні провідності

$$Y_C = j\omega C = 5j \text{ мСім; } Y_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 2} = -j0.5 \text{ мСім.}$$

Складемо систему рівнянь за МВН для кола (рис. 2.75 а)

$$\begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{12} + Y_L + g_3 & -g_3 \\ -g_3 & g_3 + g_4 + Y_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

Підставимо числові значення

$$\begin{bmatrix} 2.3 - 3.3j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.667 - 0.5j & -0.33 \\ -0.33 & 0.583 + 5j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

Вузлові напруги через обернену матрицю

$$\dot{U} = Y^{-1} \cdot j = \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.615 - 1.612j \\ -0.071 - 0.316j \end{bmatrix} \text{ В.}$$

Струми у гілках кола (рис. 2.75)

$$\dot{I}_L = \dot{U}_{10} \cdot Y_L = -0.806 - 2.307j = 2.444 \cdot e^{-j109.25^\circ} \text{ мА;}$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_{20} \cdot Y_C = 1.579 - 0.353j = 1.618 \cdot e^{-j12.6^\circ} \text{ мА;}$$

$$\dot{I}_4 = \dot{U}_{20} \cdot g_4 = -0.018 - 0.079j = 0.081 \cdot e^{-j102.6^\circ} \text{ мА;}$$

$$\dot{I}_3 = (\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}) \cdot g_3 = 1.562 - 0.432j = 1.62 \cdot e^{-j15.46^\circ} \text{ мА.}$$

$$\dot{I}_E = \dot{I}_3 + \dot{I}_L = 0.756 - j2.739 = 2.842e^{-j74.6^\circ} \text{ мА.}$$

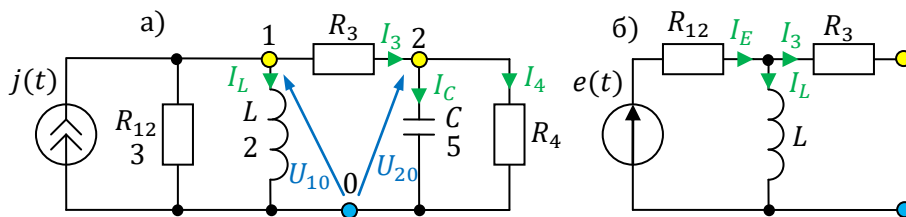
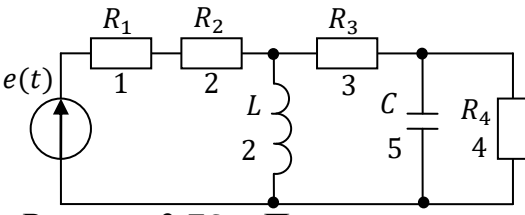


Рисунок 2.75 – Еквівалентні схеми

Відповідь: $\dot{I}_C = 1.618 \cdot e^{-j12.6^\circ}$ мА, $\dot{I}_L = 2.444 \cdot e^{-j109.25^\circ}$ мА,
 $\dot{I}_E = 2.842 \cdot e^{-j74.6^\circ}$ мА, $\dot{I}_4 = 0.081 \cdot e^{-j102.6^\circ}$ мА.

2.11.4. Метод еквівалентного генератора

Приклад 2.17. У колі (рис. 2.76) визначити струми через опір R_1 та R_4 методом еквівалентного генератора. Числові значення елементів на схемі: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивність в мГн. Напруга джерела на частоті $\omega = 10^6$ рад/с становить $e(t) = 12 \cos(\omega t - 55^\circ)$ В.	 Рисунок 2.76 – Початкова схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, частота – рад/мкс, провідність – мСім.

Опори реактивних елемент

$$Z_L = j\omega L = j \cdot 1 \cdot 2 = 2j \text{ кОм}; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 5} = -j0.2 \text{ кОм}.$$

Еквівалентні опори (рис. 2.77 а)

$$Z_1 = \frac{Z_C \cdot R_4}{Z_C + R_4} = \frac{-0.2j \cdot 4}{-0.2j + 4} = 0.01 - 0.2j;$$

$$Z_2 = R_3 + Z_1 = 3 + (0.01 - 0.2j) = 3.01 - 0.2j \text{ кОм};$$

$$Z_3 = \frac{Z_L \cdot Z_2}{Z_L + Z_2} = \frac{2j \cdot (3.01 - 0.2j)}{2j + (3.01 - 0.2j)} = 0.979 + 1.415j;$$

Вхідний опір кола

$$Z_{BX} = R_2 + Z_L = 2 + (0.979 + 1.415j) = 2.979 + 1.415j = 3.298e^{j25.4^\circ}.$$

Отже, опір еквівалентного генератора становить

$$Z_{BX} = Z_{EG} = 2.979 + 1.415j = 3.298e^{j25.4^\circ}$$

Комплексна амплітуда напруги

$$\dot{E} = 12e^{-j55^\circ} = 6.883 - 9.83j \text{ В}.$$

За законом Ома у колі (рис. 2.77 б)

$$\dot{I}_E = \frac{\dot{E}}{R_1 + Z_{EG}} = \frac{\dot{E}}{1 + (2.979 + 1.415j)} = \frac{\dot{E}}{3.979 + 1.415j} =$$

$$= \frac{12e^{-j55^\circ}}{4.223e^{-j19.6^\circ}} = 2.842e^{-j74.6^\circ} = 0.756 - 2.739j \text{ мА}.$$

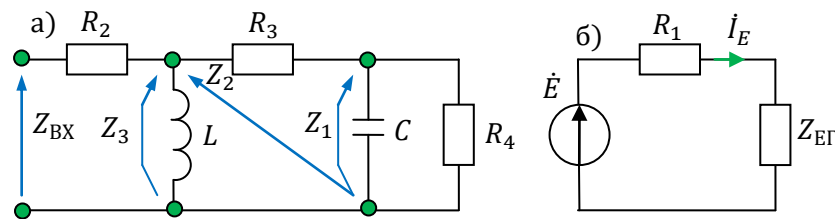


Рисунок 2.77 – Еквівалентні схеми

Відповідь: $\dot{I}_E = 2.842 \cdot e^{-j74.6^\circ}$ мА.

2.12. Потужність у колах гармонічного струму

2.12.1. Гармонічна форма потужності

Гармонічні напруга $u(t)$ та струм $i(t)$ на вході пасивного двополюсника (рис. 2.78) у загальному випадку зсунуті за фазою на кут $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Прийнемо початкову фазу напруги $\varphi_u = 0$, тоді початкова фаза струму $\varphi_i = -\varphi$. За такою умовою значення напруги та струму

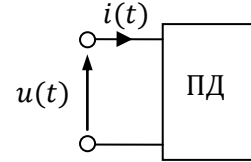


Рисунок 2.78 – Схема

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = U_m \cos(\omega t);$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Миттєва потужність у колі (рис. 2.54)

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \cos(\omega t) \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi)] =$$

$$= \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(\varphi) + \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi) = P_A + P_{\text{ГАРМ}}.$$

Аналіз виразу показує, що миттєва потужність двополюсника через діючі значення містить постійну складову

$$P_A = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(\varphi) = UI \cos(\varphi).$$

та змінну гармонічну складову

$$P_{\text{ГАРМ}} = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi) = UI \cos(2\omega t - \varphi).$$

Звідси випливає, що активна потужність, що споживається двополюсником при гармонічному струмі, також залежить від кута фазового зсуву φ між напругою та струмом. Очевидно, що для індуктивного та ємнісного елементів при $\varphi = 90^\circ$ активна потужність дорівнює нулю. Це зрозуміло, оскільки індуктивність та ємність на протязі окремої частин періоду лише накопичують енергію і лише потім видають її іншим елементам.

Змінна гармонічна складова $P_{\text{ГАРМ}}$ миттєвої потужності має частоту вдвічі більшу за гармонічних напруг та струму (рис. 2.79).

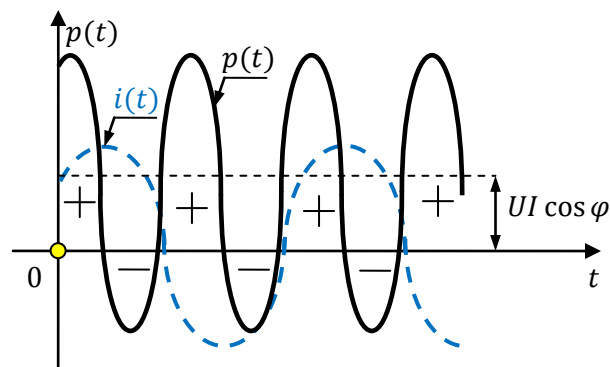


Рисунок 2.79 – Зміна потужності у часі

Зміна миттєвої потужності, що споживається довільним двополюсником, подана на рис. 2.64. Миттєва потужність може набувати від'ємних та додатних значень. На якихось інтервалах часу $p(t) > 0$, енергія джерела надходить у двополюсник, а на якихось інтервалах часу $p(t) < 0$ двополюсник повертає енергію до джерела за рахунок накопичення її у електричному та магнітному полях ємності та індуктивності.

Середня потужність за період є середньою швидкістю передачі енергії

$$P_T = P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{W_T}{T},$$

W_T – енергія за період.

Таким чином, середня потужність за період визначається

$$\begin{aligned} P_{\text{СЕР}} &= \frac{U_m \cdot I_m}{2T} \left[\int_0^T \cos(\varphi) dt + \int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt \right] = \\ &= \frac{U_m \cdot I_m}{2T} \left[\int_0^T \cos(\varphi) dt + 0 \right] = \frac{U_m \cdot I_m}{2T} \cdot \cos(\varphi) \int_0^T dt = \frac{U_m \cdot I_m \cdot T}{2T} \cos(\varphi) = \\ &= \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(\varphi) = UI \cos(\varphi). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що середнє за період значення миттєвої потужності двополюсника в режимі гармонічних коливань є її постійною складовою, що залежить від амплітудних значень струму та напруги а також від зсуву фаз між ними.

Активна потужність P – це середнє значення миттєвої потужності за період

$$P = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}U \cdot \sqrt{2}I}{2} \cdot \cos(\varphi) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi).$$

Активна потужність вимірюється в ватах (Вт).

Доданок $\cos \varphi$ називають коефіцієнтом потужності

$$k_P = \cos \varphi.$$

Чим ближче кут φ до нуля, тим ближче вираз $\cos \varphi$ до одиниці, відповідно тим більша потужність буде передана від джерела до навантаження.

Коефіцієнт потужності – величина, що характеризує степінь наближення активної потужності до максимальної потужності.

Для резистивних елементів середня за період потужність визначає втрати енергії на розсіювання і є активною потужністю.

Вираз активної потужності можна записати у інший спосіб

$$\begin{aligned} P &= U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = RI \cdot I \cos(\varphi) = I^2 \cdot R \cos(\varphi) = I^2 \cdot R \cos(0^\circ) = |I|^2 \cdot R; \\ P &= U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = U \cdot gU \cos(\varphi) = U^2 \cdot g \cos(\varphi) = U^2 \cdot g \cos(0^\circ) = |U|^2 \cdot g. \end{aligned}$$

Для пасивного двополюсника середня потужність не може бути від'ємною, оскільки тоді за означенням він був би генератором енергії, а не її споживачем.

Активну потужність вимірюють **ватметром**. Конструктивно такий прилад містить два вимірювальних кола, одне з яких (обмотка струму) підключається до двополюсника послідовно, а інше (обмотка напруги) – паралельно (рис. 2.80).

Якщо ці кола підключені до двополюсника згідно з додатними напрямками струму та напруги на його виводах, то ватметр враховує дійсний знак кута φ . Для правильного підключення приладу до двополюсника, один із полюсів кожного вимірювального кола маркується певною позначкою, наприклад зірочкою.

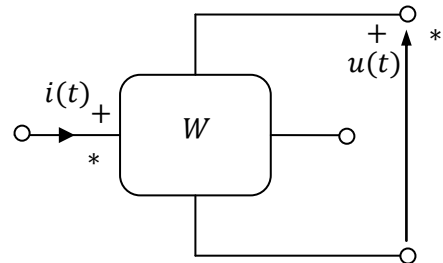


Рисунок 2.80 – Ватметр

Показання ватметр визначається

$$P_W = U \cdot I \cdot \cos \varphi = \operatorname{Re}[\dot{U} \cdot \dot{I}^*].$$

Енергетичні процеси у двополюснику в режимі гармонічних коливань характеризуються також реактивною потужністю.

Реактивна потужність – це міра споживання реактивного струму

$$Q = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin(\varphi) = U \cdot I \cdot \sin(\varphi).$$

Одиницею вимірювання реактивної потужності називається вольт-ампер реактивний (вар). Знак реактивної потужності свідчить про характер енергії, що накопичується елементами кола. Якщо $Q > 0$ (реактивний опір є індуктивного характеру), то енергія накопичується в магнітному полі, а якщо $Q < 0$ (реактивний опір є ємнісного характеру), енергія накопичується в електричному полі.

Вираз реактивної потужності можна записати у інший спосіб

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = XI \cdot I \sin(\varphi) = I^2 \cdot X \sin(\varphi) = I^2 \cdot X \sin(90^\circ) = |I|^2 \cdot X;$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = U \cdot bU \sin(\varphi) = U^2 \cdot b \sin(\varphi) = U^2 \cdot b \sin(90^\circ) = |U|^2 \cdot b.$$

Представимо миттєву потужність у іншому вигляді:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = U_m \cos(\omega t) \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi) = \\ &= U_m \cdot I_m \cos(\omega t) [\cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi)] = \\ &= \frac{U_m \cdot I_m}{2} [1 + \cos(2\omega t)] \cdot \cos(\varphi) + \frac{U_m \cdot I_m}{2} \sin(2\omega t) \cdot \sin(\varphi) = \\ &= U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\omega t) = \\ &= P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t) = p_R(t) + p_X(t). \end{aligned}$$

Перший доданок $p_R(t)$ визначає швидкість споживання енергії, тобто миттєва швидкість відбору енергії, а її максимальне значення є активною потужністю. Другий доданок $p_X(t)$ визначає швидкість обміну енергією між джерелом та електричними та магнітними полями і називається миттєвою реактивною потужністю, а її максимальне значення є реактивною потужністю.

Отже **активну потужність** можна трактувати як миттєва швидкість відбору енергії, а **реактивну потужність** – миттєва швидкість запасання енергії.

Для більш повного опису енергетичних процесів у колах гармонічного струму вводять поняття повної потужності.

Повна потужність – це добуток діючих значень струму та напруги на вході двополюсника

$$S = \frac{\dot{U}_m \cdot I_m^*}{2} = \dot{U} \cdot I^*.$$

Повна потужність виражається у вольт-амперах (В·А). Слід зазначити, що амплітуда гармонічної складової миттєвої потужності чисельно дорівнює повній потужності.

2.12.2. Комплексна форма потужності

Трикутник потужностей

Якщо взяти трикутник напруг і кожен з його сторін помножити на струм, то одержимо трикутник потужностей (рис. 2.81 а)

$$U_A \cdot I = U \cos(\varphi) \cdot I = UI \cos(\varphi) = P;$$

$$U_P \cdot I = U \sin(\varphi) \cdot I = UI \sin(\varphi) = Q.$$

Аналогічно, якщо взяти трикутник струмів і кожен з його сторін помножити на напругу, то теж одержимо трикутник потужностей (рис. 2.81 б)

$$I_A \cdot U = I \cos(\varphi) \cdot U = UI \cos(\varphi) = P;$$

$$I_P \cdot U = I \sin(\varphi) \cdot U = UI \sin(\varphi) = Q.$$

В обох випадках

$$U \cdot I = S.$$

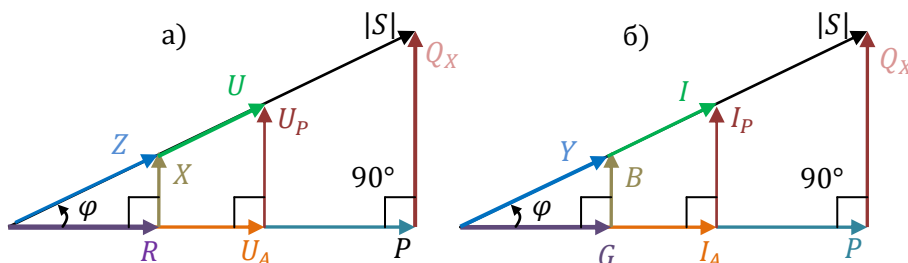


Рисунок 2.81 – Трикутники опорів, струмів, напруг та потужностей

У результаті утворився так званий трикутник потужностей (рис. 2.82), що пов'язує між собою повну $|S|$, активну P та реактивну потужності Q .

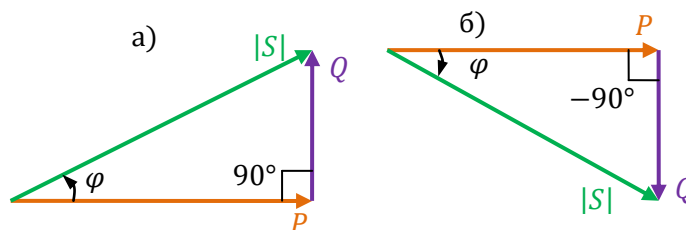


Рисунок 2.82 – Трикутники потужностей

Для двополюсника, у якого опір має індуктивний характер трикутник потужностей зображений на рис. 2.82 а. Для двополюсника, у якого опір має ємнісний характер трикутник потужностей зображений на рис. 2.82 б.

Трикутник потужностей – зображення на комплексній площині активною P , реактивною Q та комплексною S потужностей.

Зв'язок між модулем повної, активною та реактивною потужностями:

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Потужність як амплітуда змінної складової миттєвої потужності є **повною потужністю** S і визначається за формулою $S = \dot{U} \cdot \dot{I}^*$.

Із трикутника потужностей коефіцієнти потужності визначаються як

$$\cos \varphi = \frac{P}{|S|} = k_P.$$

Коефіцієнт потужності – величина, що характеризує степінь наближення активної потужності до максимальної потужності.

Коефіцієнт потужності є важливим показником в енергетиці, оскільки характеризує міру використання енергії в лінії передачі. Чим більший K_P , тим менша різниця між активною та повною потужностями і тим менше інтервали часу, протягом яких миттєва потужність $p(t) < 0$ та накопичена в реактивних елементах кола енергія повертається до джерела. Отже, чим ближчий кут φ до нуля, тим ближчий $\cos \varphi$ до одиниці, тим більша активна потужність буде передаватися від джерела до навантаження за заданої напруги.

Комплексна потужність

На вході пасивного двополюсника ПД (рис. 2.83 а) діють комплексні струми та напруги $\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}$, $\dot{I} = Ie^{j\varphi_i}$, фазовий зсув між напругою та струмом становить $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ (рис. 2.79 б).

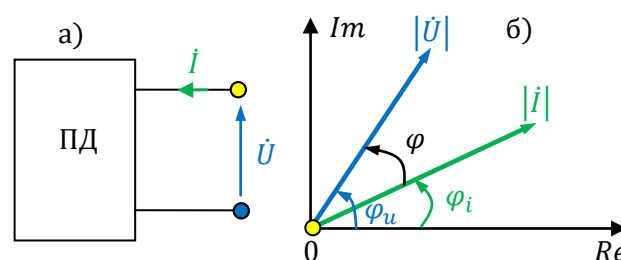


Рисунок 2.83 – Пасивний двополюсник (а) та комплексні струми і напруги (б)

Щоб одержати такий фазовий зсув необхідно

$$\begin{aligned} \dot{U} \cdot \dot{I}^* &= Ue^{j\varphi_u} Ie^{-j\varphi_i} = IUe^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = IU \cos(\varphi_u - \varphi_i) + jIU \sin(\varphi_u - \varphi_i) = \\ &= IU \cos \varphi + jIU \sin \varphi = P + jQ, \end{aligned}$$

де $\dot{I}^* = Ie^{-j\varphi_i}$ – комплексно-спряжений струм.

Комплексна потужність визначається як добуток комплексної напруги на комплексно-спряжений струм

$$S = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = \frac{\dot{U}_m \cdot \dot{I}_m^*}{2} = P + jQ,$$

де U_m та I_m є амплітудні значення напруги та струму, U та I є діючі значення.

Комплексна потужність S містить інформацію про активну P , реактивну Q та повну потужності одночасно.

Таким чином, комплексна потужність визначає дійсною частиною активну потужність, а уявною частиною реактивну потужність в пасивному двополіуснику.

На комплексній площині S зображає гіпотенузу прямокутного трикутника, катетами якого є P та Q_L (рис. 2.84 а), а на рис. 2.84 б катетами є P та Q_C .

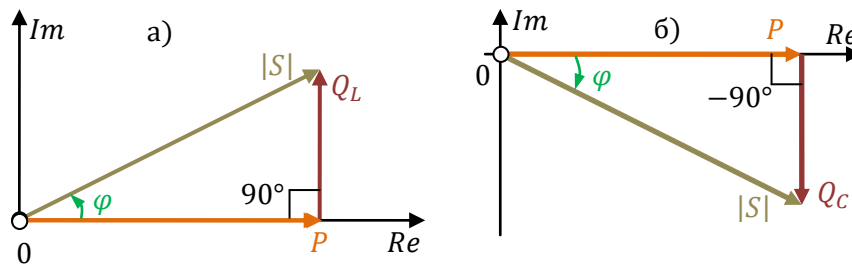


Рисунок 2.84 – Трикутники потужностей

Комплексна потужність джерел визначається (рис. 2.85 а, б).

$$S_E = \dot{E} \cdot \dot{I}^*; \quad S_J = \dot{U}_J \cdot \dot{j}^*.$$

Якщо напрямки струму та напруги співпадають, то знак перед комплексною потужністю джерела буде додатнім, а коли протилежні – від'ємним.

Комплексна потужність на комплексному опорі (рис. 2.85 в)

$$S = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = \dot{I}Z \cdot \dot{I}^* = |\dot{I}|^2 \cdot Z = |\dot{U}|^2 \cdot Y.$$

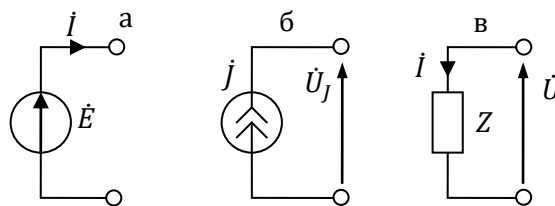


Рисунок 2.85 – Вигляд джерела напруги (а), струму (б) та опору (в)

Тоді запишемо активну та реактивну потужності

$$P = |I|^2 \cdot R = |U|^2 \cdot G;$$

$$Q = |I|^2 \cdot X = |U|^2 \cdot B.$$

Нижче наведений приклад розрахунку

Приклад 2.18. У колі (рис. 2.86) визначити потужності всіх елементів. Відомо, що напруга джерела є $e(t) = 8\sqrt{2}\cos(\omega t + 100^\circ)$ В. Числові значення елементів на деякій частоті ω є: $R = 4$ кОм, $X_L = 12$ кОм, $X_C = 16$ кОм.

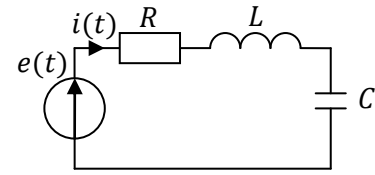


Рисунок 2.86 – Схема

Розв'язання

Розрахунки здійснюватимемо у одиницях: опір – кОм, активна потужність – мВт, реактивна потужність – мВар, комплексна потужність – мВА.

Загальний опір кола

$$Z = R + Z_L + Z_C = R + jX_L - jX_C = 4 + 12j - 16j = 4 - 4j = 4\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ}$$

Комплексна амплітуда напруги

$$e(t) = 8\sqrt{2}\cos(\omega t + 100^\circ) \rightarrow \dot{E} = E_m e^{j\varphi_E} = 8\sqrt{2} \cdot e^{j100^\circ} \text{ В.}$$

Комплексний струм за законом Ома

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{8\sqrt{2} \cdot e^{j100^\circ}}{4\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ}} = 2e^{j145^\circ} \text{ мА.}$$

Повна потужність джерела

$$S = \frac{\dot{E} \cdot \dot{I}^*}{2} = \frac{8\sqrt{2}e^{j100^\circ} \cdot 2e^{-j145^\circ}}{2} = 8\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} = 8 - j8.$$

Отже, активна потужність $P = 8$ мВт,

реактивна потужність $Q = 8$ мВар.

модуль повної потужності $|S| = 8\sqrt{2}$ мВА.

Потужності на елементах

$$P = \frac{|\dot{I}|^2 \cdot R}{2} = \frac{2^2 \cdot 4}{2} = 8 \text{ мВт};$$

$$Q_L = \frac{|\dot{I}|^2 \cdot X_L}{2} = \frac{2^2 \cdot 12}{2} = 24 \text{ мВар};$$

$$Q_C = -\frac{|\dot{I}|^2 \cdot X_C}{2} = -\frac{2^2 \cdot 16}{2} = -32 \text{ мВар.}$$

Комплексна потужність кола

$$S = P + Q_L + Q_C = 8 + 24j - 32j = 8 - 8j = P + jQ.$$

Відповідь: $P = 8$ мВт, $Q_L = 24$ мВар, $Q_C = -32$ мВар.

2.12.3. Добротність гілки

Реактивні потужності, що підводяться до індуктивності та ємності

$$Q_L = UI \sin \frac{\pi}{2} = UI = IX_L \cdot I = \omega LI^2 = \omega \frac{LI_m^2}{2} = \omega W_{L.max};$$

$$Q_C = UI \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -UI = -U \cdot Ub_C = -\omega CU^2 = -\omega \frac{CU_m^2}{2} = -\omega W_{C.max};$$

Тут у виразах $W_{L.max}$ є максимальне значення енергії, що періодично накопичується в індуктивності, а $W_{C.max}$ є максимальне значення енергії, що періодично накопичується в ємності.

Таким чином, реактивна потужність двополюсника, що містить індуктивність та ємність

$$Q = Q_L + Q_C = \omega W_{L.max} - \omega W_{C.max} = \omega [W_{L.max} - W_{C.max}] = \omega W_{max}.$$

Відповідно реактивна потужність пропорційна різниці максимальних значень енергії, що накопичується в електричному та магнітному полях.

Введемо поняття добротності гілки (рис. 2.87).

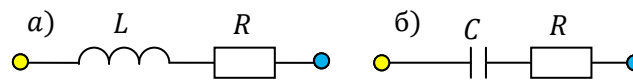


Рисунок 2.87 – Реактивні гілки

Із трикутника потужностей

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{Q}{P} = Q_x.$$

Раніше було одержане

$$Q_C = \omega W_{C.max}; \quad Q_L = \omega W_{L.max}$$

Звідси одержимо

$$Q = \omega W_{max}.$$

Підставимо одержані результати

$$Q_x = \frac{Q}{P} = \frac{\omega W_{max}}{P} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{W_{max}}{P} = 2\pi \cdot \frac{W_{max}}{W_{RT}}$$

Добротність гілки – це відношення із точністю до коефіцієнту 2π максимально запасеної енергії до енергії, що витрачається за період

$$Q_x = 2\pi \frac{W_{max}}{W_{RT}}.$$

Таким чином, добротність гілки визначається

$$Q_x = \frac{Q}{P} = \frac{|I|^2 X}{|I|^2 R} = \frac{X}{R}.$$

Нижче наведений приклад розрахунку

Приклад 2.19. У колі (рис. 2.88) на відомій частоті f знайти опори R та X_L , коефіцієнт потужності k_P . Добротність гілки на цій частоті дорівнює $\sqrt{7}$. Показання вольтметра та амперметра є $U_V = 40$ В та $I_A = 5$ мА.

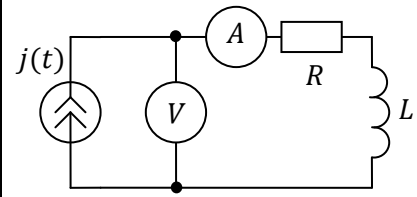


Рисунок 2.88 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, опір – кОм, потужність $[P]$ – мВт, потужність $[Q]$ – мВар.

Добротність гілки

$$Q_X = \frac{X_L}{R}.$$

Звідси визначимо реактивний опір індуктивності

$$X_L = R \cdot Q_X = \sqrt{7}R.$$

Модуль вхідного опору за законом Ома

$$|Z| = \frac{U_V}{I_A} = \frac{40}{5} = 8 \text{ кОм}.$$

Опір гілки та її модуль

$$Z = R + Z_L = R + jX_L, \rightarrow |Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2}.$$

Модуль опора гілки

$$8 = \sqrt{R^2 + (\sqrt{7}R)^2} = \sqrt{8R^2} = 2R\sqrt{2}.$$

Звідси визначимо активний опір

$$R = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ кОм}.$$

Реактивний опір індуктивності

$$X_L = \sqrt{7}R = 2\sqrt{14} \text{ кОм}.$$

Активна та модуль комплексної потужності

$$P = I_A^2 \cdot R = 5^2 \cdot 2\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \text{ мВт};$$

$$|S| = I_A \cdot U_V = 5 \cdot 40 = 200 \text{ мВА};$$

Коефіцієнт потужності із трикутника потужностей (рис. 2.89)

$$k_P = \cos \varphi = \frac{P}{|S|} = \frac{50\sqrt{2}}{200} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.354.$$

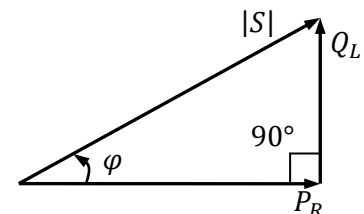


Рисунок 2.89 – Трикутник потужностей

Відповідь: $R = 2\sqrt{2} \text{ кОм}$, $X_L = 2\sqrt{14} \text{ кОм}$, $k_P = 0.354$.

2.12.4. Закон балансу потужностей

Із закону збереження енергії випливає, що для будь-якого електричного кола виконується закон балансу миттєвих потужностей:

Миттєва потужність, що генерується джерелами дорівнює миттєвій потужності, що споживається всіма приймачами

$$\sum p_{\text{дж}}(t) = \sum p_{\text{спож}}(t),$$

$$\sum p_{\text{дж}}(t) = \sum p_E(t) + \sum p_J(t).$$

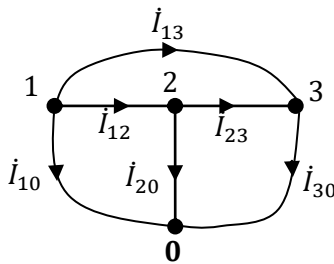


Рисунок 2.90 – Дерево схеми

Розглянемо фрагмент дерева кола (рис. 2.90).

Запишемо для кожного із вузлів перший закон

Кірхгофа для комплексних амплітуд:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{10} + \dot{I}_{12} + \dot{I}_{13} &= 0; \\ \dot{I}_{20} + \dot{I}_{23} - \dot{I}_{12} &= 0; \\ \dot{I}_{30} - \dot{I}_{23} - \dot{I}_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Помножимо перше рівняння на $\dot{U}_{10}$, друге на $\dot{U}_{20}$, третє на $\dot{U}_{30}$ та додамо три рівняння:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{10} \cdot \dot{U}_{10} + \dot{I}_{12}(\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}) + \dot{I}_{13}(\dot{U}_{10} - \dot{U}_{30}) + \\ + \dot{I}_{23}(\dot{U}_{20} - \dot{U}_{30}) + \dot{I}_{20} \cdot \dot{U}_{20} + \dot{I}_{30} \cdot \dot{U}_{30} = 0. \end{aligned}$$

Оскільки $\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20} = \dot{U}_{12}$, $\dot{U}_{20} - \dot{U}_{30} = \dot{U}_{23}$, $\dot{U}_{10} - \dot{U}_{30} = \dot{U}_{13}$, то одержимо

$$\dot{I}_{10} \cdot \dot{U}_{10} + \dot{I}_{12} \dot{U}_{12} + \dot{I}_{13} \dot{U}_{13} + \dot{I}_{23} \dot{U}_{23} + \dot{I}_{20} \cdot \dot{U}_{20} + \dot{I}_{30} \cdot \dot{U}_{30} = 0.$$

Одержана рівність виражає баланс комплексних потужностей. З нього слідує рівність нулю окремо суми споживаних активних потужностей та суми споживаних реактивних потужностей. Оскільки від'ємні споживані потужності являють собою потужності, що віддаються, то суми всіх віддаючих та всіх споживаних реактивних потужностей дорівнюють одна одному. Якщо в останньому рівнянні групувати члени, що відповідають активним та пасивним елементам, то отримаємо баланс комплексних потужностей.

Закон балансу комплексних потужностей

Алгебраїчна сума комплексних потужностей, що відається всіма джерелами дорівнює сумі комплексних потужностей всіх пасивних елементів

$$\sum S_{\text{дж}} = \sum S_{\text{спож}},$$

$$\sum S_{\text{дж}} = \sum S_E + \sum S_J, \quad \sum S_{\text{спож}} = \sum P_{\text{спож}} + j \sum Q_{\text{спож}}.$$

Споживана реактивна потужність на вході будь-якого пасивного двополюсника повинна дорівнювати сумі реактивних потужностей, що споживаються індуктивностями та ємностями.

Із закону балансу комплексної потужності слідує умови балансу активних та реактивних потужностей

$$P_{\text{СПОЖ}} = P = \sum P_R = \sum P_{\text{ДЖ}};$$

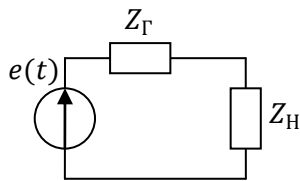
$$Q_{\text{СПОЖ}} = Q = \sum Q_L + \sum Q_C = \sum Q_{\text{ДЖ}}.$$

Для практичних розрахунків електричних кіл рівняння балансу комплексних потужностей зручно подати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{N_E} \dot{E}_k \dot{I}_k^* + \sum_{t=1}^{N_J} \dot{U}_t \dot{J}_t^* = \sum_{a=1}^{N_R} |\dot{I}_a|^2 R_a + j \left(\sum_{b=1}^{N_L} |\dot{I}_b|^2 X_{L.b} - \sum_{d=1}^{N_C} |\dot{I}_d|^2 X_{C.d} \right).$$

2.12.5. Передача максимальної потужності у навантаження

На практиці часто виникає необхідність передати максимальну активну потужність від генератора у навантаження.



У колі (рис. 2.91) комплексні опори генератора Z_G та навантаження Z_H визначаються відповідно як: $Z_G = R_G + jx_G$, $Z_H = R_H + jx_H$. На вході кола діє гармонічна напруга $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Рисунок 2.91 – Схема

Активна потужність у навантаженні:

$$P_H = |\dot{I}|^2 R_H = \frac{E_D^2}{|Z_G + Z_H|^2} R_H = \left(\frac{E_D}{\sqrt{(R_G + R_H)^2 + (x_G + x_H)^2}} \right)^2 R_H =$$

$$= \frac{E_D^2}{(R_G + R_H)^2 + (x_G + x_H)^2} R_H.$$

Розглянемо випадок, коли $R_G = \text{const}$. Із виразу бачимо, що за будь-якого значення активного опору активна потужність досягає максимального значення, коли $x_G = -x_H$, тобто повинна бути відсутня реактивна складова.

У результаті одержуємо

$$P_H = \frac{E_D^2}{(R_G + R_H)^2} R_H, \quad E_D = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Для визначення максимальної потужності, що виділиться у навантаженні необхідно дослідити знайдений вираз потужності P_H на екстремуми

$$\frac{dP_H}{dR_H} = 0.$$

Звідси визначається, що $R_H = R_G$ (рис. 2.92 а)

Отже, умовою максимальної активної потужності у навантаження є умова

$$Z_H = R_H + jX_H = Z_G^* = \begin{cases} R_G = R_H; \\ X_G = -X_H, \end{cases}$$

де Z_G^* – це комплексний опір, що є спряженим із опором Z_H .

При виконанні цієї умови виділяється максимальна активна потужність у навантаженні:

$$P_{H.max} = \frac{E_D^2}{4R_H}.$$

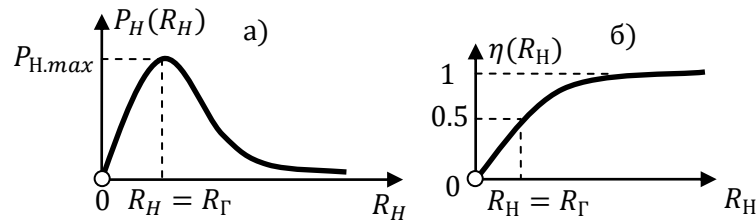


Рисунок 2.92 – Залежності потужності (а) та коефіцієнта корисної дії від опору навантаження

При цьому ККД (відношення середньої потужності, що споживається опором навантаження до сумарної потужності, що поглинається опорами навантаження та генератором) становить (рис. 2.92 б)

$$\eta = \frac{P_H}{P_H + P_G} = \frac{|I|^2 R_H}{|I|^2 R_H + |I|^2 R_G} = \frac{R_H}{R_H + R_G} \Big|_{R_H=R_G} = 0.5.$$

Оскільки ККД становить лише 0.5, то у режимі узгодженого навантаження ($R_H = R_G$) потужність максимальна, і виходить, що всередині генератора витрачається така ж сама потужність, що і виділяється у навантаженні, а потужність, що віддається генератором, вдвічі перевищує корисну. У випадку $R_H > R_G$ при збільшенні опору R_H ККД збільшується.

Якщо $R_H = const$, то досліджуючи функцію $P_H(R_H)$ на екстремуми одержуємо, що потужність буде максимальна, якщо $R_G = 0$, а $X_H = -X_G$. Тоді максимальна активна потужність у навантаженні буде визначатися

$$P_{H.max} = \frac{E^2}{R_H}.$$

Нижче наведений приклад розрахунку.

Приклад 2.20. У колі (рис. 2.93) визначити при яких значеннях опора генератора Z_{Γ} він буде віддавати максимальну активну потужність? Знайти цю потужність. Відомо, що опори $X_L = X_C = R = 6 \text{ кОм}$, напруга джерела $e(t) = 9\sqrt{2} \cos(\omega t + 15^\circ) \text{ В}$.

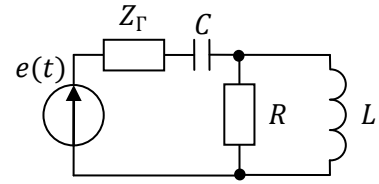


Рисунок 2.93 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: струм – мА, потужність – мВт, опір – кОм.

Опір навантаження (рис. 2.93)

$$\begin{aligned} Z_H &= Z_C + \frac{R \cdot Z_L}{R + Z_L} = -jX_C + \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = -6j + \frac{6 \cdot 6j}{6 + 6j} = \\ &= -6j + \frac{6j}{1 + j} = -6j + \frac{6e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = -6j + 3\sqrt{2}e^{j45^\circ} = \\ &= -6j + 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -6j + 3 + 3j = 3 - 3j \text{ кОм.} \end{aligned}$$

Активна потужність у навантаженні

$$\begin{aligned} P_H &= |I|^2 R_H = \frac{E_D^2}{(R_H + R_{\Gamma})^2 + (X_H + X_{\Gamma})^2} R_H, \\ I &= \frac{E_D e^{j\varphi}}{(R_H + R_{\Gamma}) + j(X_H + X_{\Gamma})}. \end{aligned}$$

Функція $P_H(R_H)$ буде максимальною, коли знаменник її буде мінімальним, а для цього необхідно $R_{\Gamma} = 0$, а $X_H = -X_{\Gamma}$. Отже, $Z_{\Gamma} = 0 + 3j$

Максимальна активна потужність (рис. 2.94)

$$P_{H.max} = \frac{E_D^2}{R_H} = \frac{9^2}{3} = 27 \text{ мВт.}$$

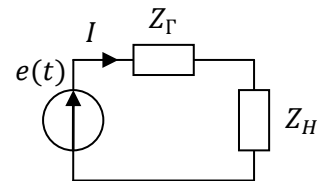


Рисунок 2.94 – Еквівалентна Схема

Відповідь: $Z_{\Gamma} = 0 + 3j \text{ кОм}$, $P_{H.max} = 27 \text{ мВт}$;

Приклад 2.21. У колі (рис. 2.95) визначити при яких значеннях елементів R та C буде отримана максимальна активна потужність у навантаження? Знайти цю потужність. Відомо, що: $Z_{\Gamma} = 6 - 2j$ кОм, робоча частота $\omega = 0.25 \cdot 10^6$ рад/с, вираз джерела напруги $e(t) = 8\sqrt{2} \cos(\omega t + 15^\circ)$ В.

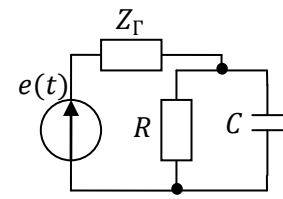


Рисунок 2.95 –
Схема

Розв'язання

Умова передачі максимальної потужності у навантаження

$$Z_H = Z_{\Gamma}^* = R_H - jX_H = 6 - 2j;$$

Перерахуємо паралельну гілку у послідовну

$$Z_H = \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C} = \frac{-jX_C R (R + jX_C)}{R^2 + X_C^2} = \frac{X_C^2 R}{R^2 + X_C^2} - j \frac{X_C R^2}{R^2 + X_C^2}.$$

За умовою

$$\frac{X_C^2 R}{R^2 + X_C^2} = 6; \quad \frac{X_C R^2}{R^2 + X_C^2} = 2.$$

Розділимо перший вираз на другий

$$\frac{X_C}{R} = 3.$$

Звідси визначимо $X_C = 3R$.

Підставимо у вираз

$$\frac{X_C R^2}{R^2 + X_C^2} = \frac{3R \cdot R^2}{R^2 + (3R)^2} = \frac{3R^3}{10R^2} = \frac{3}{10} R = 2.$$

Звідси активний опір

$$R = \frac{20}{3} \cong 6,7 \text{ кОм.}$$

Тоді ємнісний опір $X_C = 3 \cdot R = 3 \cdot \frac{20}{3} = 20 \text{ кОм.}$

Звідси значення ємності

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{0.25 \cdot 20} = 0.2 \text{ нФ.}$$

Максимальна активна потужність

$$P_{H.max} = \frac{E_D^2}{4R_H} = \frac{8^2}{4 \cdot 20/3} = 2.4 \text{ мВт.}$$

Відповідь: $R = 6,7 \text{ кОм, } C = 0.2 \text{ нФ, } P_{H.max} = 2.4 \text{ мВт.}$

2.13. Побудова векторних діаграм

У колах гармонічного струму струми та напруги можна представити часовими діаграмами або проекціями обертаючих векторів. Якщо для будь-якої схеми всі струми та напруги представити векторами, то одержимо векторну діаграму, якщо ці вектори відобразити на комплексній площині.

Векторна діаграма – це зображення струмів та напруг кола у вигляді векторів на комплексній площині.

За звичай векторні діаграми будуються коли відомі всі струми та напруги у колі або відомі співвідношення між опорами у колі. Вони можуть бути побудовані якісно для вивчення будь-якого процесу у колі.

У теорії кіл прийнято будувати векторно-потенціальну діаграму напруг, на яку наносяться вектори струмів.

Векторно-потенціальна діаграма – це векторна діаграма, що показує виконання другого закону Кірхгофа за допомогою векторів напруг на комплексній площині.

Ця діаграма, де кінець вектора напруги на кожному наступному елементі примикає до початку вектора напруги попереднього елемента, а початок та кінець векторів напруг повинні відповідати точкам на схемі, при цьому один із вузлів схеми вважається базисним, тобто нульовим.

Векторно-потенціальна діаграма дозволяє просто знаходити напругу між будь-якими точками кола: діюче значення та фаза шуканої напруги визначаються прямою, що з'єднує відповідні точки потенційної діаграми.

Для кола (рис. 2.96 а) побудуємо потенціальну векторну діаграму напруг та векторну діаграму струмів якісно із урахуванням деяких співвідношень між опорами (рис. 2.96 б).

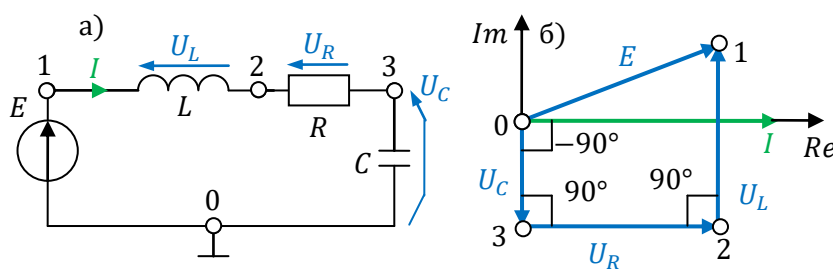


Рисунок 2.96 – Схема (а) та її потенційна діаграма (б)

Напруги у колі через потенціали:

$$\begin{aligned} U_L &= U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2; \\ U_R &= U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3; \\ U_C &= U_{30} = \varphi_3 - \varphi_0; \\ E &= U_{10} = \varphi_1 - \varphi_0. \end{aligned}$$

У колі (рис. 2.96 а) задамося довільним значенням струму $\dot{I}_3$, поклавши, що його початкова фаза дорівнює нулю, тоді цей вектор співпадає з дійсною віссю комплексної площини (рис. 2.96 б).

Напруги та струми у колі (рис. 2.97) пов'язані законами Ома та Кірхгофа такими.

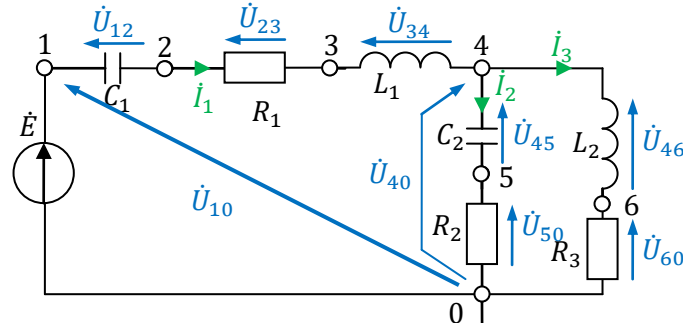


Рисунок 2.97 – Схема із напрямками напруг

Згідно закону Ома визначимо

$$\begin{aligned}\dot{U}_{60} &= \dot{U}_{R3} = \dot{I}_3 \cdot R_3; \\ \dot{U}_{46} &= \dot{U}_{L2} = \dot{I}_3 \cdot jX_{L2}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{U}_{40}}{R_2 - jX_{C2}}.\end{aligned}$$

За першим законом Кірхгофа для вузла 4

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3.$$

За законом Ома сформуємо рівняння

$$\begin{aligned}\dot{U}_{34} &= \dot{U}_{L1} = \dot{I}_1 \cdot jX_{L1}; \\ \dot{U}_{23} &= \dot{U}_{R1} = \dot{I}_1 \cdot R_1; \\ \dot{U}_{12} &= \dot{U}_{C1} = \dot{I}_1 \cdot (-jX_{C1}).\end{aligned}$$

Побудуємо векторно-потенціальну діаграму кола (рис. 2.98).

Спочатку відкладаємо вектор струму $\dot{I}_3$, що співпадає із дійсною віссю, оскільки ми припустили, що його початкова фаза дорівнює нулю. Потім на вектор струму $\dot{I}_3$, відкладаємо вектор напруги $\dot{U}_{60}$, оскільки струм та напруга на опорі співпадають за фазою. Далі від кінця вектора $\dot{U}_{60}$ відкладаємо вектор $\dot{U}_{46}$ під кутом 90° . З'єднавши точки 0 та 4 одержимо напругу $\dot{U}_{40}$.

Відкладаємо струм $\dot{I}_2$ таким чином, щоб він випереджав напругу $\dot{U}_{40}$, а далі за правилом паралелограма одержуємо вектор струму $\dot{I}_1$. На вектор струму $\dot{I}_2$ відкладаємо аналогічно напругу $\dot{U}_{50}$, далі перпендикулярно до цього вектора від кінця вектора $\dot{U}_{50}$ відкладаємо вектор $\dot{U}_{45}$. Потім відкладаємо вектор $\dot{U}_{34}$ таким чином, щоб він був перпендикулярний вектору струму $\dot{I}_1$. Далі відкладаємо напругу $\dot{U}_{23}$ перпендикулярну до напруги $\dot{U}_{34}$ на кут 90° , а далі відкладаємо напругу $\dot{U}_{12}$ перпендикулярний напрузі $\dot{U}_{23}$ на кут -90° . Далі з'єднавши точки 1 та 0 отримаємо вектор $\dot{U}_{10} = \dot{E}$.

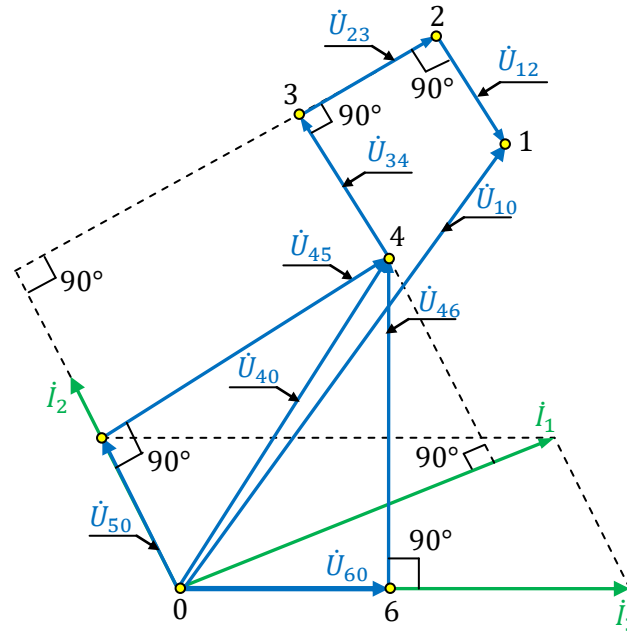


Рисунок 2.98 – Векторна діаграма

Такий метод називається умовно методом пропорційних величин, оскільки величину струму $\dot{I}_3$ взяли довільно і відклали всі інші струми та напруги на векторно-потенціальній діаграмі (рис. 2.98). Із векторної діаграми визначили величину вектора $\dot{E}_3$. Справжньому струму $\dot{I}_{3.\text{ш}}$ відповідає напруга $\dot{E}_{3.\text{ш}}$. В силу лінійності згідно методу пропорційних величин одержимо пропорцію

$$\frac{\dot{I}_3}{\dot{E}_3} = \frac{\dot{I}_{3.\text{ш}}}{\dot{E}_{3.\text{ш}}}.$$

Звідси визначимо шуканий струм

$$\dot{I}_{3.\text{ш}} = \frac{\dot{E}_{3.\text{ш}}}{\dot{E}_3} \dot{I}_3, \quad \text{де} \quad \frac{\dot{E}_{3.\text{ш}}}{\dot{E}_3} = \dot{K} = |K|e^{j\varphi_k}.$$

Якщо необхідно побудувати векторну діаграму, що відповідає шуканому значенню, то одержану векторну діаграму необхідно поділити на $|K|$ та повернути на кут φ_k .

Приклад 2.22. У колі (рис. 2.99) визначити струми у гілках та напруги на її елементах. Побудувати векторно-потенційну діаграму струмів та напруг. Перевірити виконання закону балансу потужностей. Відомо, що робоча частота $\omega = 2 \cdot 10^6$ рад/с, вираз джерела напруги $e(t) = 20 \cos(\omega t + 15^\circ)$ В. Числові значення елементів: опори в кОм, індуктивності в мГн, ємності в нФ, напруга в В.

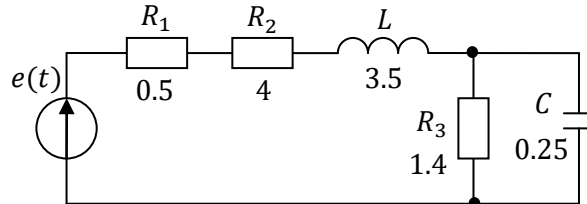


Рисунок 2.99 – Початкова схема

Розв'язання

Комплексна амплітуда напруги джерела

$$\dot{E} = 20e^{j15^\circ} = 19.319 + 5.176j \text{ В.}$$

Комплексні опори

$$Z_L = j\omega L = j \cdot 2 \cdot 3.5 = 7j \text{ кОм;}$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot 0.25} = -2j \text{ кОм.}$$

Складемо систему рівнянь на основі МКС (рис. 2.100)

$$[\dot{E}] = [Z] \cdot [I];$$

$$\begin{bmatrix} \dot{E} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + Z_L & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + Z_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

Підставимо числові значення

$$\begin{bmatrix} 19.319 + 5.176j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.9 + 7j & -1.4 \\ -1.4 & 1.4 - 2j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

Визначимо контурні струми через обернену матрицю

$$[I] = [Z]^{-1} \cdot [\dot{E}] = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.975 - 1.352j \\ 1.285 + 0.484j \end{bmatrix} \text{ мА.}$$

Струми у гілках кола (рис. 2.100) за першим законом Кірхгофа

$$\dot{I}_L = \dot{I}_I = 1.975 - 1.352j = 2.394 \cdot e^{-j34.381^\circ} \text{ мА;}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{II} = 1.285 + 0.484j = 1.373 \cdot e^{j20.627^\circ} \text{ мА;}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_L - \dot{I}_C = 0.697 - 1.835j = 1.961 \cdot e^{-j69.373^\circ} \text{ мА.}$$

Потужність джерела

$$S = \dot{E} \cdot \dot{I}_L^* = 20e^{j15^\circ} \cdot 2.394 \cdot e^{j34.381^\circ} = 31.166 + 36.338j.$$

Потужності споживачів

$$P = |\dot{I}_L|^2 \cdot (R_1 + R_2) + |\dot{I}_3|^2 \cdot R_3 = 2.394^2 \cdot (0.5 + 4) - 1.961^2 \cdot 1.4 = 31.166 \text{ мВт;}$$

$$Q = |\dot{I}_L|^2 \cdot X_L - |\dot{I}_C|^2 \cdot X_C = 2.394^2 \cdot 7 - 1.373^2 \cdot 2 = 36.338 \text{ мВар.}$$

Оскільки $Re[S] = P$ та $Im[S] = Q$, то закон балансу комплексних потужностей виконується.

За законом Ома напруги на елементах

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{I}_L \cdot R_1 = 0.988 - 0.676j = 1.197e^{-34.4^\circ j}; \\ \dot{U}_2 &= \dot{I}_L \cdot R_2 = 7.902 - 5.407j = 9.575e^{-34.4^\circ j}; \\ \dot{U}_L &= \dot{I}_L \cdot Z_L = 9.462 + 13.828j = 16.756e^{55.6^\circ j}; \\ \dot{U}_C &= \dot{I}_C \cdot Z_C = 0.967 - 2.569j = 2.745e^{-69.4^\circ j}; \\ \dot{U}_3 &= \dot{I}_3 \cdot R_3 = 0.967 - 2.569j = 2.745e^{-69.4^\circ j}.\end{aligned}$$

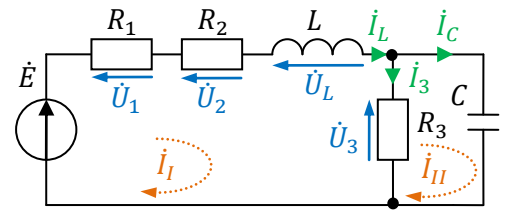


Рисунок 2.100 – Схема із напрямками напруг та струмів

Векторно-потенційна діаграма напруг побудована за допомогою MathCAD зображена на рис. 2.101.

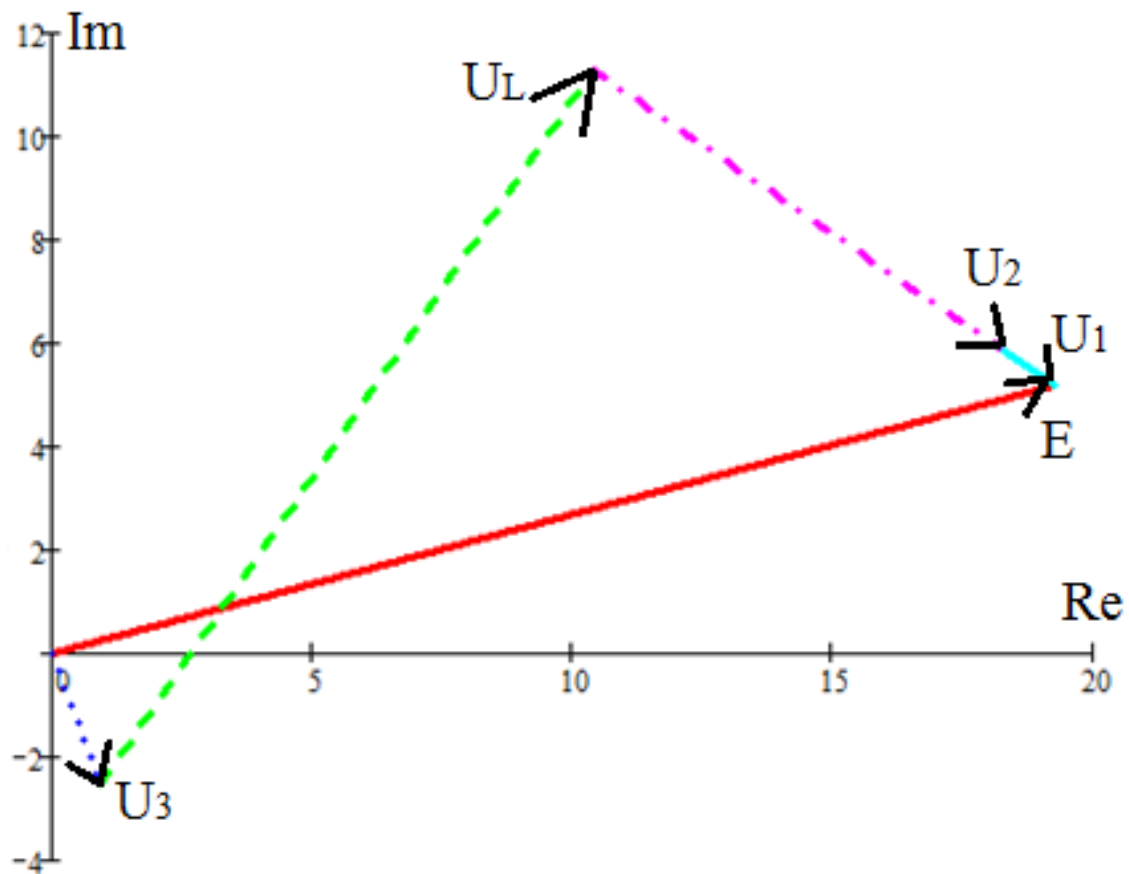


Рисунок 2.101 – Векторна діаграма

2.14. Кола з індуктивно зв'язаними елементами

2.14.1. Явище самоіндукції та взаємоіндукції

Елементи реальних електричних кіл, по яким протікають струми, часто знаходяться у загальному магнітному полі. При зміні у часі струмів індуктивні елементи здійснюють один на одного взаємний вплив. Таке явище має місце в колах із індуктивними зв'язками.

Кола із індуктивно зв'язаними елементами – це кола, в яких при зміні у часі струмів індуктивних елементів, вони здійснюють взаємний вплив один на одного.

Індуктивні зв'язки між елементами створюються спеціально або небажано.

Тому у будь-яких випадках магнітні зв'язки необхідно враховувати в задачах аналізу кіл.

Явище самоіндукції полягає у наведенні ЕРС у колі при зміні потокозчеплення взаємної індукції, що обумовлений струмом в іншому колі

$$E = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt},$$

де $L = \psi/i$, E – ЕРС самоіндукції, ψ – потокозчеплення (якщо витки однакові та ω – число витків котушки, то $\Psi = \Phi\omega$, Φ – магнітний потік і L пропорційна квадрату числа витків).

Взаємна індукція – це явище наведення ЕРС у будь-якій частині схеми, обумовлене зміною магнітного потоку, що створений струмом в іншій частині схеми.

На рис. 2.102 представлені витки індуктивностей L_1 та L_2 (число цих витків відповідно ω_1 і ω_2), струми в цих витках i_1 , i_2 і магнітні потоки, що ним створюються Φ_1 і Φ_2 .

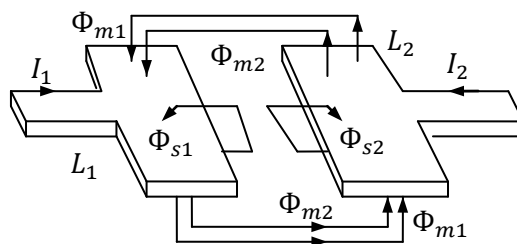


Рисунок 2.102

Умовно можна вважати, що потік

$$\Phi_1 = \Phi_{m1} + \Phi_{s1},$$

де Φ_{m1} – потік взаємної індукції, частина потоку Φ_1 , що пронизує витки L_2 , Φ_{s1} – потік розсіювання, частина потоку Φ_1 , що пронизує витки L_1 .

Аналогічно можна записати для потоку

$$\Phi_2 = \Phi_{m2} + \Phi_{s2},$$

де Φ_{m2} – потік взаємної індукції, тобто частина потоку Φ_2 , що пронизує витки L_1 , Φ_{s2} – потік розсіювання, тобто частина потоку Φ_2 , що пронизує витки L_2 .

За аналогією із самоіндукцією, потокозчеплення взаємної індукції ψ_{m1} і ψ_{m2} можуть бути визначені:

$$\psi_{m1} = \Phi_{m1} \cdot \omega_2, \quad \psi_{m2} = \Phi_{m2} \cdot \omega_1.$$

Потокозчеплення взаємної індукції ψ_{m1} і ψ_{m2} створюється струмом i_1 та i_2 відповідно.

Індуктивність визначалася відношенням потокозчеплення самоіндукції до струму, який його створив $L = \psi/i$. Виходить, за аналогією із самоіндукцією, для взаємної індуктивності одержимо:

$$M_{12} = \frac{\psi_{m2}}{i_2} = \frac{\omega_1 \Phi_{m2}}{i_2}, \quad M_{21} = \frac{\psi_{m1}}{i_1} = \frac{\omega_2 \Phi_{m1}}{i_1}.$$

Величини M_{12} і M_{21} називаються взаємними індуктивностями. Із цих співвідношень одержимо вирази для Φ_{m1} і Φ_{m2} :

$$\Phi_{m1} = \frac{M_{21} i_1}{\omega_2}, \quad \Phi_{m2} = \frac{M_{12} i_2}{\omega_1}.$$

Далі, за аналогією із самоіндукцією, у першій та другій котушках наводиться ЕРС взаємної індукції:

$$E_{1m} = \pm \frac{d\psi_{m2}}{dt} = \pm \frac{dM_{12} i_2}{dt} = \pm M_{12} \frac{di_2}{dt};$$

$$E_{2m} = \pm \frac{d\psi_{m1}}{dt} = \pm \frac{dM_{21} i_1}{dt} = \pm M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Для лінійного кола M константа і її виносимо за похідну. Вибір знаку "+" або "-" визначається тим, як співвідносяться магнітні потоки самоіндукції та взаємоіндукції.

Звідси випливає, що якщо струм, що проходить у першому колі, зумовлює у другому колі потокозчеплення взаємної індукції $\omega_2 \Phi_{m1}$, то такий же струм, що проходить у другому колі, обумовлює у першому колі потокозчеплення взаємної індукції $\omega_1 \Phi_{m2}$ тієї ж величини.

2.14.2. Коефіцієнт зв'язку та індуктивність розсіювання

Лінійні кола, у яких $M_{12} = M_{21} = M$, будемо називати взаємними, і будемо розглядати тільки їх (однорідні середовища). Взаємна індуктивність, що вимірюється у Генрі (Гн), є кількісною характеристикою явища взаємної індукції. Для кількісної оцінки ступеня зв'язку індуктивно зв'язаних котушок вводиться поняття коефіцієнт зв'язку k :

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{m1}}{\Phi_1} \cdot \frac{\Phi_{m2}}{\Phi_2}} \leq 1.$$

Коефіцієнт зв'язку – величина, що характеризує степінь магнітного зв'язку між індуктивностями.

Якщо немає розсіювання, то $k=1$, $L_{S1} = L_{S2} = 0$ (немає розсіювання).

Оскільки

$$\Phi_1 = \frac{\psi_1}{\omega_1} = \frac{L_1 \cdot i_1}{\omega_1}; \quad \Phi_2 = \frac{\psi_2}{\omega_2} = \frac{L_2 \cdot i_2}{\omega_2}; \quad \Phi_{m1} = \frac{M_{21} \cdot i_1}{\omega_2}; \quad \Phi_{m2} = \frac{M_{12} \cdot i_2}{\omega_1}$$

Одержимо вираз для коефіцієнта зв'язку

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{m1}}{\Phi_1} \cdot \frac{\Phi_{m2}}{\Phi_2}} = \sqrt{\frac{\frac{M_{21} \cdot i_1}{\omega_2}}{\frac{L_1 \cdot i_1}{\omega_1}} \cdot \frac{\frac{M_{12} \cdot i_2}{\omega_1}}{\frac{L_2 \cdot i_2}{\omega_2}}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Отже, якщо є дві індуктивно зв'язані котушки, тоді одночасно у кожній із них наводяться ЕРС самоіндукції та взаємоіндукції.

У результаті напишемо індуктивність:

$$L_1 = \frac{\psi_1}{i_1} = \frac{\omega_1 \Phi_1}{i_1} = \frac{\omega_1}{i_1} (\Phi_{m1} + \Phi_{s1}) = \frac{\omega_1}{i_1} \Phi_{m1} + \frac{\omega_1}{i_1} \Phi_{s1} = \acute{L}_1 + L_{1S}.$$

Другий доданок цього виразу пов'язаний з потоком розсіювання, і тому називається індуктивністю розсіювання:

$$L_{1S} = \frac{\omega_1 \Phi_{s1}}{i_1}$$

Із останнього співвідношення визначимо

$$L_{1S} = L_1 - \acute{L}_1 = L_1 - \frac{\omega_1}{i_1} \Phi_{m1} = L_1 - \frac{\omega_1}{i_1} \frac{M_{21} \cdot i_1}{\omega_2} = L_1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} M_{21}.$$

Отже, звідси одержимо

$$\acute{L}_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} M_{21}.$$

Аналогічно визначимо

$$L_2 = \frac{\psi_2}{i_2} = \frac{\omega_2 \Phi_2}{i_2} = \frac{\omega_2}{i_2} (\Phi_{m2} + \Phi_{s2}) = \frac{\omega_2}{i_2} \Phi_{m2} + \frac{\omega_2}{i_2} \Phi_{s2} = \acute{L}_2 + L_{2S}.$$

Із виразу визначимо

$$L_{2S} = \frac{\omega_2 \Phi_{s2}}{i_2}, \quad \acute{L}_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} M_{12}.$$

2.14.3. Полярність котушок з індуктивними зв'язками

Потік самоіндукції в одній котушці може співпадати або неспівпадати по напрямку з потоком взаємної індукції у другій котушці. Якщо при додатних напрямках струмів в обох взаємопов'язаних котушках додатний напрямок самоіндукції та взаємної індукції співпадають, то кажуть, що ці струми спрямовані *узгоджено*, а у протилежному випадку – *зустрічно*. Для того щоб кожного разу не перевіряти напрями обвиток та не знаходити напрями магнітних потоків запроваджують умовне позначення індуктивного зв'язку: точками чи зірочками позначають однойменні затискачі в обох котушках.

На схемах заміщення напрям струмів відносно однополярних затискачів визначає тип увімкнення магнітозв'язних котушок.

Якщо струми в обох індуктивно зв'язаних котушках спрямовані однаково відносно однополярних затискачів, то котушки ввімкнені *узгоджено*. Якщо струми спрямовані по-різному відносно однополярних затискачів, то котушки ввімкнені *зустрічно*.

Однополярні затискачі мають таку особливість, що підведення до одного з них струму, що зростає, то він викличе підвищення потенціала на однополярному затискачі іншої котушки.

Цю властивість використовують для експериментального знаходження однополярних зажимів індуктивно зв'язаних котушок (рис. 2.103). Один з них вмикається у коло постійної напруги, а в іншу вмикають вольтметр, що вимірює постійну напругу.

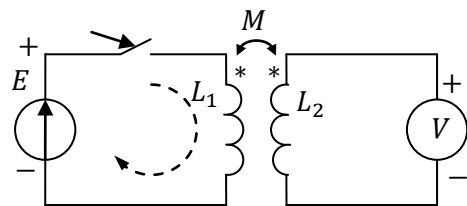


Рисунок 2.103

Якщо у момент замикання ключа вольтметр показує додатне значення напруги, то затискачі індуктивно зв'язаних котушок, що підключені до додатного полюса джерела напруги та до додатного полюса вольтметра, є однополярними.

Напруги на індуктивностях у випадку узгоджено ввімкнення визначаються

$$u_{L1} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + u_{M1};$$

$$u_{L2} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + u_{M2},$$

де u_{M1} та u_{M2} – напруги взаємоіндукції.

Напруги у випадку зустрічно ввімкнення для комплексних амплітуд

$$\dot{U}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = Z_{L1} \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_{L2} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = Z_{L2} \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1,$$

де $X_M = \omega M$ та $Z_M = j\omega M$ – опір взаємоіндукції та комплексний опір взаємоіндукції, що ще називають опором зв'язку.

2.14.4. Послідовне з'єднання котушок з індуктивними зв'язками

Узгоджене ввімкнення котушок

Якщо струми спрямувати однаково відносно однополярних затискачів, то їх напрям буде узгодженим, і тоді котушки вважаються ввімкненими узгоджено (рис. 2.104 а).

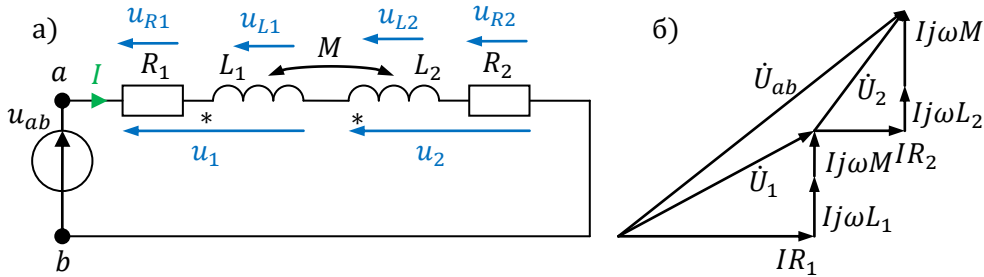


Рисунок 2.104 – Схема із магнітними зв'язками (а) та її векторна діаграма (б)

Напруга у диференціальній формі

$$u_{ab} = u_{L1} + u_{R1} + u_{L2} + u_{R2} = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + iR_1 + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + iR_2 =$$

$$= (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i.$$

та у комплексній

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + iR_1 + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + iR_2 =$$

$$= j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I} + (R_1 + R_2)\dot{I} = [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)]\dot{I}.$$

Опір при узгодженому ввімкненні

$$Z_{уз} = j(X_{L1} + X_{L2} + 2X_M) = j\omega(L_1 + L_2 + 2M).$$

Векторна діаграма подана на рис. 2.104 б.

Таким чином, наявність взаємної індуктивності при узгодженому ввімкненні котушок, що з'єднання послідовно, збільшує загальну індуктивність кола.

Зустрічне ввімкнення котушок

Якщо струми спрямувати у різні боки по відношенню до однополярних затискачів, то їх напрям буде неузгодженим і тоді котушки вважаються ввімкненими зустрічно (рис. 2.105 а).

Напруга у диференціальній формі

$$u_{ab} = u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + iR_1 + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + iR_2 =$$

$$= (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i.$$

та у комплексній

$$\dot{U}_{ab} = j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + iR_1 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + iR_2 =$$

$$= j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I} + (R_1 + R_2)\dot{I} = [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)]\dot{I}.$$

Опір при неузгодженому ввімкненні

$$Z_{зустр} = j(X_{L1} + X_{L2} - 2X_M) = j\omega(L_1 + L_2 - 2M).$$

Векторна діаграма подана на рис. 2.105 б.

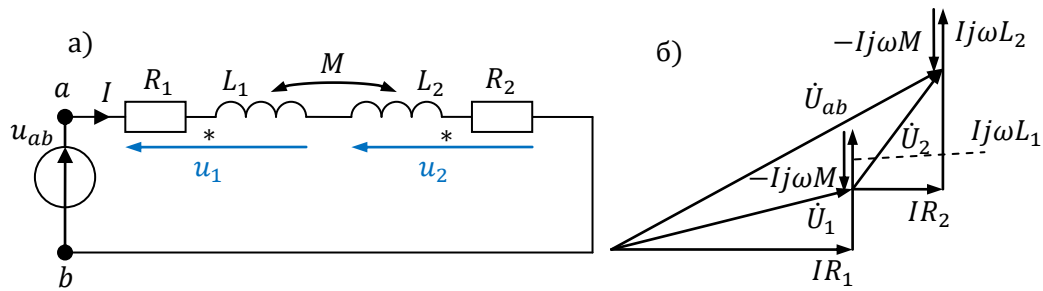


Рисунок 2.105 – Схема із магнітними зв'язками (а) та її векторна діаграма (б) для зустрічного включення індуктивностей

Таким чином, наявність взаємної індуктивності при зустрічному ввімкненні котушок, що з'єднанні послідовно, зменшує загальну індуктивність кола.

Струм при зустрічному зв'язку буде більшим, ніж при узгодженому, оскільки опір при неузгодженому зв'язку менший за законом Ома.

Розглянемо експериментальне визначення взаємної індукції M . Якщо позначити через $X_{уз}$ індуктивний опір кола при узгодженому ввімкненні для послідовно з'єднаних котушок, а через $X_{зустр}$ – індуктивний опір при зустрічному напрямку, тобто

$$X_{уз} = \omega(L_1 + L_2 + 2M);$$

$$X_{зустр} = \omega(L_1 + L_2 - 2M).$$

Тоді внаслідок віднімання другого рівняння із першого одержимо

$$M = \frac{X_{уз} - X_{зустр}}{4\omega}.$$

Нижче, розглянемо приклад розрахунку.

Приклад 2.23. Знайти зсув фаз між напругою та струмом у колі (рис. 2.106) на відомій частоті $\omega_0 = 2 \cdot 10^6$ рад/с. Числові значення елементів на схемі такі: опори в кОм, індуктивності та взаємна індуктивність в мГн, ємність в нФ.

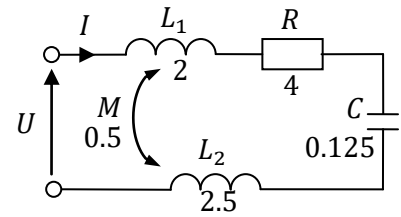


Рисунок 2.106 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн, взаємна індуктивність в мГн, ємність – нФ, частоти в рад/мкс. Оскільки струм I через котушки індуктивності L_1 та L_2 протікає узгоджено, то запишемо вхідний опір кола

$$Z = Z_{L1} + Z_M + R + Z_C + Z_{L2} + Z_M = Z_{L1} + R + Z_C + Z_{L2} + 2Z_M$$

Комплексні опори елементів

$$Z_{L1} = j\omega L_1 = j \cdot 2 \cdot 2 = 4j \text{ кОм},$$

$$Z_{L2} = j\omega L_2 = j \cdot 2 \cdot 2.5 = 5j \text{ кОм},$$

$$Z_M = j\omega M = j \cdot 2 \cdot 0.5 = j \text{ кОм},$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot 0.125} = -4j \text{ кОм},$$

Підставимо числові значення у вираз для вхідного опору кола

$$\begin{aligned} Z &= Z_{L1} + R + Z_C + Z_{L2} + 2Z_M = \\ &= 4j + 1 - 4j + 5j - 2j = 4 + 3j = 5e^{j37^\circ}. \end{aligned}$$

Оскільки вхідний опір кола визначається

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_U}}{Ie^{j\varphi_I}} = \frac{U}{I} e^{j[\varphi_U - \varphi_I]} = |Z|e^{j\varphi_Z}.$$

то зсув фаз між напругою та струмом буде не що інше як аргумент виразу вхідного опору φ_Z . Отже, зсув фаз між напругою та струмом прийме значення

$$\varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I = 37^\circ.$$

Відповідь: $\varphi_Z = 37^\circ$.

2.14.5. Розв'язання індуктивного зв'язку

З метою спрощення розрахунків кіл із магнітними зв'язками здійснюють еквівалентні перетворення кола. Заміняючи індуктивно зв'язані елементи ділянками без індуктивного зв'язку. Такі перетворення називають розв'язанням індуктивного зв'язку, і після їх застосування без обмежень можна використовувати будь-які методи аналізу кіл гармонічного струму.

Розглянемо коло (рис. 2.107), обравши додатні напрямки обходу контурів за годинниковою стрілкою напишемо систему рівнянь за другим законом Кірхгофа (коло має узгоджене ввімкнення)

$$\begin{cases} \dot{E} = R\dot{I}_0 + Z_1\dot{I}_1 + Z_M\dot{I}_2; \\ \dot{E} = R\dot{I}_0 + Z_2\dot{I}_2 + Z_M\dot{I}_1. \end{cases}$$

Вирази, що містять доданки із Z_M перенесемо із правої частини у ліву

$$\begin{cases} \dot{E} - Z_M\dot{I}_2 = R\dot{I}_0 + Z_1\dot{I}_1; \\ \dot{E} - Z_M\dot{I}_1 = R\dot{I}_0 + Z_2\dot{I}_2. \end{cases}$$

Одержані доданки можна трактувати як джерела напруги, що керуються струмами з іншої гілки, тобто $\dot{E}_1 = Z_M\dot{I}_2$ та $\dot{E}_2 = Z_M\dot{I}_1$.

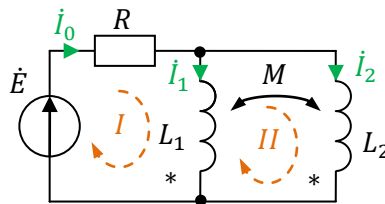


Рисунок 2.107 – Схема із магнітними зв'язками

У результаті магнітні зв'язки можна замінити керованими джерелами (рис. 2.108 а). Напрямки цих джерел є протилежними до додатного напрямку обходу контурів, оскільки вирази джерел у лівій частині рівняння мали від'ємні знаки.

За першим законом Кірхгофа

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2.$$

Виразимо звідси струми $\dot{I}_2 = \dot{I}_0 - \dot{I}_1$ та $\dot{I}_1 = \dot{I}_0 - \dot{I}_2$ підставимо у систему

$$\begin{cases} \dot{E} = R\dot{I}_0 + Z_1\dot{I}_1 + Z_M\dot{I}_2 = R\dot{I}_0 + Z_1\dot{I}_1 + Z_M(\dot{I}_0 - \dot{I}_1); \\ \dot{E} = R\dot{I}_0 + Z_2\dot{I}_2 + Z_M\dot{I}_1 = R\dot{I}_0 + Z_2\dot{I}_2 + Z_M(\dot{I}_0 - \dot{I}_2). \end{cases}$$

Згрупуємо доданки у інший спосіб

$$\begin{cases} \dot{E} = (R + Z_M)\dot{I}_0 + (Z_1 - Z_M)\dot{I}_1; \\ \dot{E} = (R + Z_M)\dot{I}_0 + (Z_2 - Z_M)\dot{I}_2. \end{cases}$$

У результаті магнітні зв'язки можемо замінити схемою, що відповідає отриманій системі рівнянь (рис. 2.108 б).

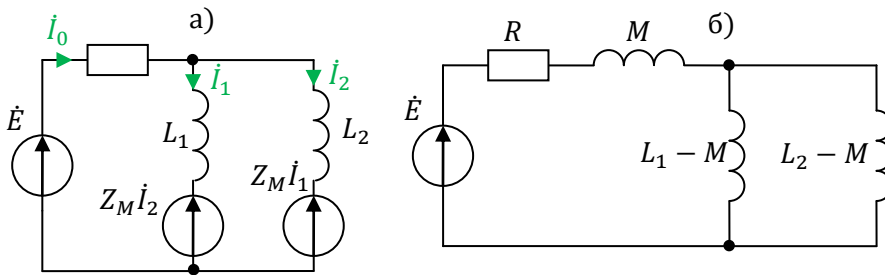


Рисунок 2.108 – Еквівалентні схемі у випадку незустрічного ввімкнення

У випадку зустрічного ввімкнення можна зробити аналогічні заміни (рис. 3.109).

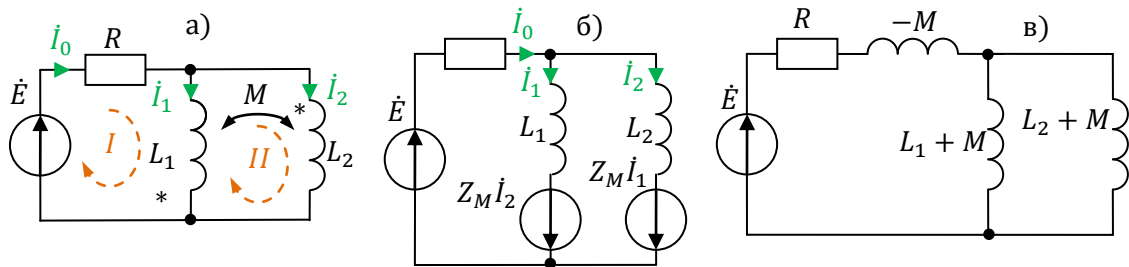


Рисунок 2.109 – Еквівалентні схемі у випадку зустрічного ввімкнення

Виконаємо розв'язку для визначення еквівалентної індуктивності двох індуктивностей із магнітними зв'язками, що ввімкнені паралельно у випадку зустрічного (рис. 2.106) та узгодженого (рис. 2.105) ввімкнення.

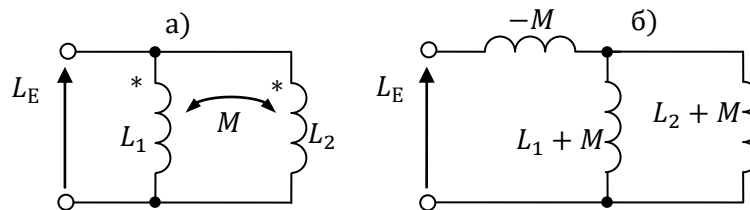


Рисунок 2.110 – Магнітні зв'язок (а) та його розв'язка (б) для узгодженого ввімкнення

У результаті еквівалентна індуктивність за узгодженого ввімкнення (рис. 2.110) визначається

$$L_{\text{Е.узг.}} = M + \frac{(L_1 - M) \cdot (L_2 - M)}{(L_1 - M) + (L_2 - M)} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

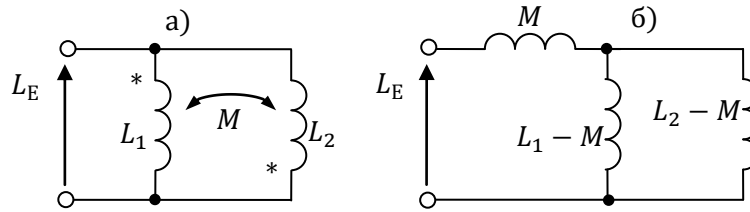


Рисунок 2.111 – Магнітні зв'язок (а) та його розв'язка (б) для зустрічного включення

У результаті еквівалентна індуктивність за зустрічного ввімкнення (рис 2.111) визначається

$$L_{E.ЗУСТР} = -M + \frac{(L_1 + M) \cdot (L_2 + M)}{(L_1 + M) + (L_2 + M)} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}.$$

Система рівнянь для кола, що має трансформаторне ввімкнення (рис. 2.112 а), для узгодженого ввімкнення

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1; \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_2. \end{cases}$$

Згрупуємо вираз у такий спосіб

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (j\omega L_1 - j\omega M) \dot{I}_1 + j\omega M (\dot{I}_2 + \dot{I}_1); \\ \dot{U}_2 = (j\omega L_2 - j\omega M) \dot{I}_2 + j\omega M (\dot{I}_2 + \dot{I}_1). \end{cases}$$

У результаті одержимо схему (рис. 2.112 б).

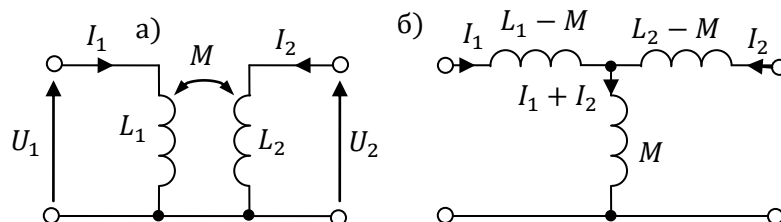


Рисунок 2.112 – Схема із трансформаторним зв'язком (а) та схема його розв'язки (б)

Використання схем заміщення з керованими джерелами дозволяє при аналізі кіл ефективно застосовувати метод контурних струмів та метод вузлових напруг.

Отже для розв'язання індуктивного зв'язку до індуктивних елементів у кожному гілку додається реактивний елемент, комплексний опір якого становить $\pm Z_M$ і у спільний вузол теж додається елемент $\mp Z_M$. Такий висновок може бути доведений для будь-якого довільного обраного напрямку струмів у гілках. Для двох індуктивно зв'язаних гілок, не приєднаних до спільного вузла, також можна зробити розв'язування магнітного зв'язку, але у цьому випадку еквівалентна схема буде досить складна.

2.14.6. Особливості розрахунку складних кіл із магнітними зв'язками

Опори послідовно чи паралельно з'єднаних індуктивностей не підкоряються правилам додавання опорів.

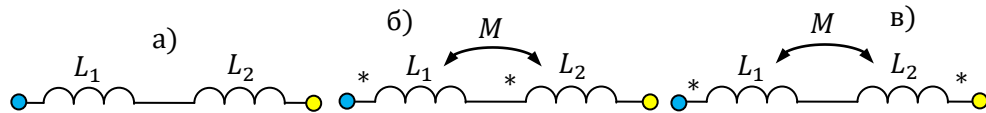


Рисунок 2.113 – Схеми індуктивностей із магнітними зв'язками

Еквівалентна індуктивність для кола (рис. 2.113 а) $L_E = L_1 + L_2$, для кола (рис. 2.113 б) $L_E = L_1 + L_2 + 2M$, для кола (рис. 2.113 в) $L_E = L_1 + L_2 - 2M$.

Методи еквівалентного генератора та вузлових напруг для кіл із індуктивними зв'язками використовувати складно, тому використовують закони Кірхгофа. У випадку якщо гілка в якій шукається струм має індуктивні зв'язки, то використовувати у цьому випадку метод еквівалентного генератора неможливо.

Магнітні зв'язки можна замінити керованими джерелами напруги (рис. 2.114).

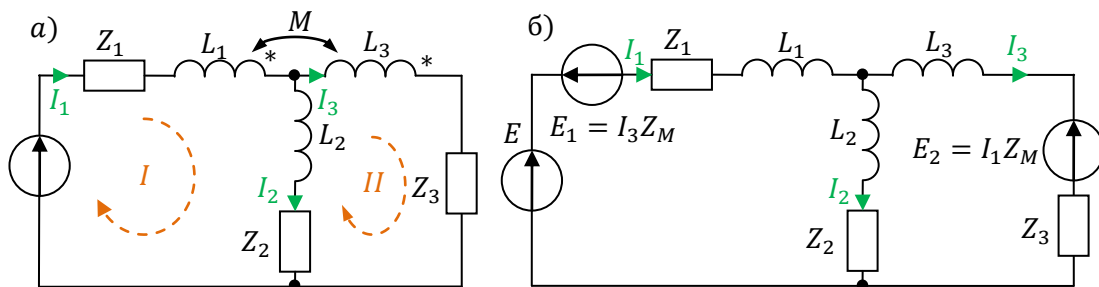


Рисунок 2.114 – Схеми із магнітними зв'язками

Знак «+» перед Z_M береться, якщо напрям обходу контуру на однойменних затискачах збігаються, в іншому разі – знак «-».

За другим законом Кірхгофа

$$\begin{cases} \dot{I}_1(Z_1 + Z_{L1}) + \dot{I}_3 Z_M + \dot{I}_2(Z_2 + Z_{L2}) = \dot{E}; \\ \dot{I}_3(Z_3 + Z_{L3}) + \dot{I}_1 Z_M - \dot{I}_2(Z_2 + Z_{L2}) = 0. \end{cases}$$

Перенесемо вирази із доданком Z_M у праву частину рівняння

$$\begin{cases} \dot{I}_1(Z_1 + Z_{L1}) + \dot{I}_2(Z_2 + Z_{L2}) = -\dot{I}_3 Z_M + \dot{E}; \\ \dot{I}_3(Z_3 + Z_{L3}) - \dot{I}_2(Z_2 + Z_{L2}) = -\dot{I}_1 Z_M. \end{cases}$$

У результаті одержимо два керованих джерела напруги, що мають напрям, протилежний до напрямку обходу: $\dot{E}_1 = \dot{I}_3 Z_M$, $\dot{E}_2 = \dot{I}_1 Z_M$.

Тоді система набуде вигляду

$$\begin{cases} \dot{I}_1(Z_1 + Z_{L1}) + \dot{I}_2(Z_2 + Z_{L2}) = -\dot{E}_1 + \dot{E}; \\ \dot{I}_3(Z_3 + Z_{L3}) - \dot{I}_2(Z_2 + Z_{L2}) = -\dot{E}_2. \end{cases}$$

Використання схем заміщення з керованими джерелами дозволяє при аналізі кіл ефективно застосовувати метод контурних струмів.

Тепер розглянемо загальний випадок (рис. 2.115).

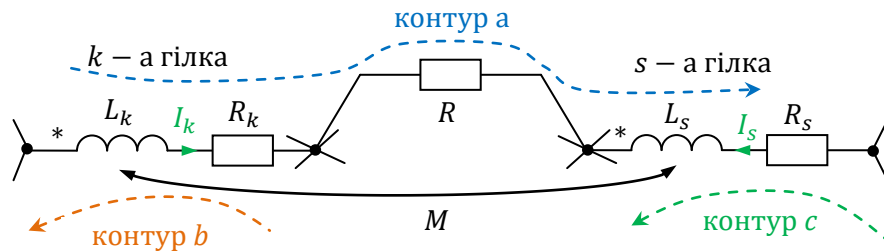


Рисунок 2.115 – Загальний фрагмент

Опір взаємоіндукції вписується у клітинки, розміщені на перетині рядків та стовпців, номери яких відповідають всім можливим комбінаціям контурів, що проходять через k-у гілку з контурами, що проходять через s-ту гілку. Опір Z_M береться зі знаком «+», якщо напрями обходу контурів на однойменних зажимах співпадають, у протилежному випадку береться знак «-». Запишемо опори взаємоіндукції у матрицю опорів (рис. 2.116).

	a	b	c
a	$2Z_M$	$-Z_M$	$-Z_M$
b	Z_M		$-Z_M$
c	$-Z_M$	Z_M	

Рисунок 2.116 – Матриця опорів

Математично проаналізуємо, в які комірки матриці із яким знаком буде враховано взаємоіндукція

$$\begin{aligned} i_k &= i_a - i_b; & i_s &= i_c - i_a; \\ \dot{U}_k &= i_k Z_{Lk} - i_s Z_M; & \dot{U}_s &= i_s Z_{Ls} - i_k Z_M. \end{aligned}$$

Для контуру a

$$\dot{U}_k - \dot{U}_s = i_k Z_{Lk} - i_s Z_M - i_s Z_{Ls} + i_k Z_M.$$

Виділимо складові із Z_M

$$i_k Z_M - i_s Z_M = (i_a - i_b) Z_M - (i_c - i_a) Z_M = 2Z_M i_a - Z_M i_b - Z_M i_c.$$

Для контуру b

$$-i_s Z_M = -(i_c - i_a) Z_M = -i_c Z_M + i_a Z_M;$$

Для контуру c

$$-i_k Z_M = -(i_a - i_b) Z_M = -i_a Z_M + i_b Z_M.$$

2.15. Трансформатор у колах гармонічного струму

2.15.1. Двоконтурна трансформаторна схема

Двоконтурна схема за гармонічної дії подана на рис. 2.117 а.

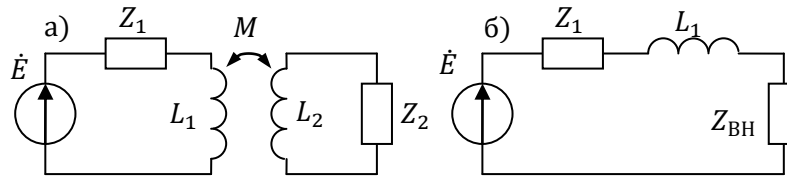


Рисунок 2.117 – Схема трансформатора

За другим законом Кірхгофа, якщо напрямки за годинниковою стрілкою

$$\begin{cases} \dot{E} = Z_1 \dot{I}_1 + jX_{L1} \dot{I}_1 \pm jX_{3B} \dot{I}_2, \\ 0 = Z_2 \dot{I}_2 + jX_{L2} \dot{I}_2 \pm jX_{3B} \dot{I}_1. \end{cases}$$

Введемо позначення

$$Z_{11} = Z_1 + jX_{L1}, \quad Z_{22} = Z_2 + jX_{L2}$$

В результаті одержимо систему

$$\begin{cases} \dot{E} = Z_{11} \dot{I}_1 \pm jX_{3B} \dot{I}_2, \\ 0 = \pm jX_{3B} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2. \end{cases}$$

Із другого рівняння виразимо

$$\dot{I}_2 = \mp j \frac{X_{3B}}{Z_{22}} \dot{I}_1.$$

Підставимо одержаний вираз у перше рівняння

$$\dot{E} = Z_{11} \dot{I}_1 \pm jX_{3B} \dot{I}_2 = Z_{11} \dot{I}_1 + \frac{X_{3B}^2}{Z_{22}} \dot{I}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{BH} \dot{I}_1.$$

В результаті одержимо внесений опір із другого контуру у перший (рис. 2.99 б)

$$Z_{BH} = \frac{X_{3B}^2}{Z_{22}} = \frac{X_{3B}^2}{R_2 + jX_2} = \frac{X_{3B}^2}{R_2^2 + X_2^2} R_2 - j \frac{X_{3B}^2}{R_2^2 + X_2^2} X_2 = \frac{X_{3B}^2}{|Z_{22}|^2} R_2 - j \frac{X_{3B}^2}{|Z_{22}|^2} X_2.$$

Внесений опір – це опір, що вноситься в контур з боку іншого контуру.

Внесений опір кола (рис. 2.118)

$$Z_{BH} = \frac{X_{3B}^2}{Z_{22}} = R_{BH} - jX_{BH},$$

де

$$R_{BH} = \frac{X_{3B}^2}{R_2^2 + X_2^2} R_2 = \frac{X_{3B}^2}{|Z_{22}|^2} R_2;$$

$$X_{BH} = \frac{X_{3B}^2}{R_2^2 + X_2^2} X_2 = \frac{X_{3B}^2}{|Z_{22}|^2} X_2.$$

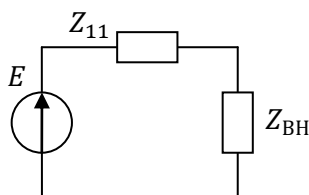


Рисунок 2.118 – Еквівалентна схема

2.15.2. Ідеальний трансформатор

Трансформатор – прилад, що призначений для передачі енергії із однієї частини схеми у іншу через взаємодукцію.

Найчастіше він застосовується для перетворення змінних величин напруг і струмів та опору. Трансформатор складається із двох або декількох обмоток, насаджених на загальне осердя.

На рис. 2.119 а подана двоконтурна схема заміщення трансформатора без феромагнітного осердя (так званий повітряний трансформатор, що є лінійним елементом, параметри якого не залежать від рівня дії).

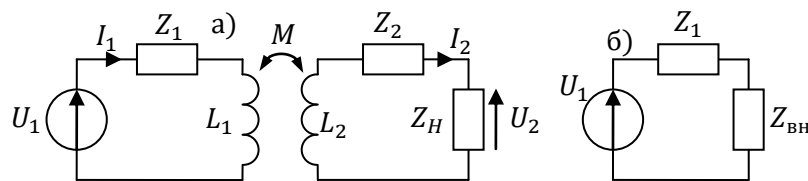


Рисунок 2.119 – Схема трансформатора

Обмотка, що підключається до джерела називається первинною, а інша – вторинною.

Ідеальний трансформатор – це такий трансформатор, у якого коефіцієнт трансформації дійсне додатне число.

Коефіцієнт трансформації ідеального трансформатора

$$n = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}.$$

Якщо $n > 1$, то трансформатор підвищувальний, та коли $n < 1$ – понижувальний. Якщо $n = 1$ то він використовується для розв'язки за постійним струмом.

Напруги та струми у вторинній та первинній обвитках знаходяться у прямій і зворотній пропорційній залежностях від n відповідно:

$$\dot{I}_1 = n \cdot \dot{I}_2, \quad \dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_2}{n}.$$

Вхідний опір зворотно пропорційний n та прямо пропорційний опору навантаження:

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2/n}{I_2 n} = \frac{Z_H}{n^2}.$$

Тобто його можна використовувати при узгодженні навантаження та генератора для одержання максимальної активної потужності у навантаженні.

Ідеальний трансформатор енергію не споживає і його ККД=1. Для доведення записуємо комплексні потужності вхідних та вихідних струмів і напруг і показуємо їх рівність:

$$S_1 = \dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1^*; \quad S_2 = \dot{U}_2 \cdot \dot{I}_2^* = \dot{U}_1 n \frac{\dot{I}_1^*}{n} = S_1;$$

Покажемо, що трансформатор буде ідеальним, якщо у нього відсутні втрати в обмотках ($R_1 = R_2 = 0$), немає потоку розсіювання ($k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$), а індуктивності обмоток нескінченно великі. Для доведення цих тверджень напишемо вираз для вхідного опору трансформатора і будемо його спрощувати, використовуючи наведені співвідношення для R_1, R_2, L_1, L_2, k .

$$Z_{BH} = \frac{X_{3B}^2}{Z_{22}}, \quad X_{3B} = \omega M.$$

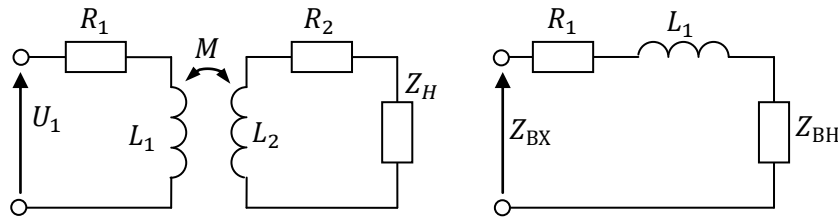


Рисунок 2.120 – Еквівалентні схеми

Вхідний опір трансформатора (рис. 2.120)

$$\begin{aligned} Z_{BX} &= R_1 + j\omega L_1 + \frac{X_{3B}^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_H} \Big|_{R_2=0} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_H} = \\ &= \frac{-\omega^2 L_1 L_2 + j\omega L_1 Z_H + \omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_H} \Big|_{L_1 L_2 = M^2} = \frac{j\omega L_1 Z_H}{j\omega L_2 + Z_H} \Big|_{\omega L_2 \gg Z_H} = \frac{j\omega L_1}{j\omega L_2} Z_H = \frac{L_1}{L_2} Z_H \end{aligned}$$

Якщо вважати, що індуктивності конструктивно виконані однаково, то їх відношення можна замінити відношенням квадратів числа витків:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Отже, одержали вхідний опір ідеального трансформатор

$$Z_{BX} = \frac{Z_H}{n^2}.$$

2.16. Розрахунок складних кіл гармонічного струму

Приклад 2.24. У колі (рис. 2.102) розрахувати всі струми та напруги. Перевірити виконання закону балансу потужностей. Джерела змінюються за гармонічними законами $e(t) = 30 \cos(\omega t + 45^\circ)$ В, $j(t) = 20 \cos(\omega t + 45^\circ)$ мА. На схемі задані: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн.

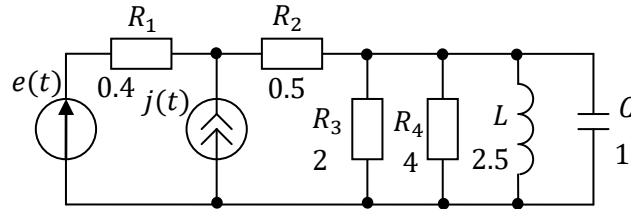


Рисунок 2.102 – Початкова схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати в одиницях: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн, струм в мА, напруга в В.

Провідності елементів

$$Y_C = j\omega C = j \cdot 1 \cdot 1 = j \text{ мСім}; \quad Y_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 2.5} = -0.4j \text{ мСім}.$$

Провідності активних елементів визначимо за формулою $g = 1/R$ приймуть значення: $g_1 = 2.5$ мСім; $g_2 = 2$ мСім; $g_3 = 0.5$ мСім; $g_4 = 0.25$ мСім.

Комплексні амплітуди джерел:

$$\dot{E} = E_m e^{j\varphi} = 30 e^{j45^\circ} = 21.213 + 21.213j;$$

$$\dot{J} = J_m e^{j\varphi} = 20 e^{j45^\circ} = 14.142 + 14.142j.$$

У колі (рис. 2.102) перетворимо джерело напруги у джерело струму та об'єднаємо з джерелом струму (рис. 2.103).

$$\dot{J}_1 = \frac{\dot{E}}{R_1} + \dot{J} = 67.175 + 67.175j.$$

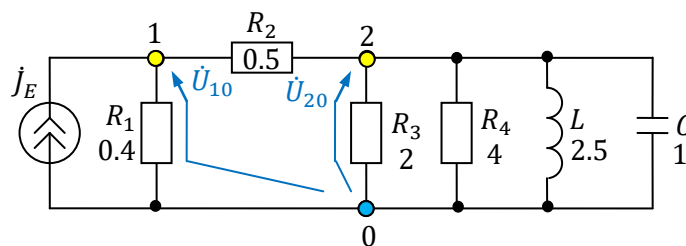


Рисунок 2.103 – Нумерація вузлів схеми

За методом вузлових напруг

$$[J] = [Y] \cdot [U];$$

$$\begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 \\ -g_2 & g_2 + g_3 + g_4 + Y_C + Y_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 67.175 + 67.175j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 & -2 \\ -2 & 2.75 + 0.6j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

Звідси визначимо вузлові напруги

$$[U] = [Y]^{-1} \cdot [J] = \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.468 + 19.304j \\ 19.216 + 9.847j \end{bmatrix}.$$

За другим законом Кірхгофа напруги на елементах кола (рис. 2.100)

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{10} - \dot{U}_{20} = 4.252 + 9.457j = 10.37e^{65.8^\circ j};$$

$$\dot{U}_J = \dot{U}_2 + \dot{U}_{20} = 23.468 + 19.304j = 30.39e^{39.44^\circ j}.$$

Струми у гілках за законом Ома (рис. 2.104)

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_2 \cdot g_2 = 8.504 + 18.915j = 20.74e^{65.8^\circ j};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{U}_{20} \cdot g_3 = 9.608 + 4.923j = 10.78e^{27.13^\circ j};$$

$$\dot{I}_4 = \dot{U}_{20} \cdot g_4 = 4.804 + 2.462j = 5.4e^{27.13^\circ j};$$

$$\dot{I}_L = \dot{U}_{20} \cdot Y_L = 3.939 - 7.687j = 8.63e^{-62.87^\circ j};$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_{20} \cdot Y_C = -9.847 + 19.216j = 21.56e^{117.13^\circ j}.$$

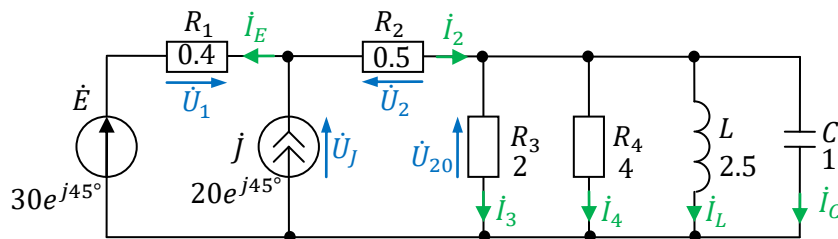


Рисунок 2.104 – Еквівалентна схема

За першим законом Кірхгофа

$$\dot{I}_E = \dot{J} - \dot{I}_2 = 5.638 - 4.773j = 7.39e^{-40.25^\circ j}.$$

За законом Ома

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_E \cdot R_1 = 2.255 - 1.909j = 2.95e^{-40.25^\circ j}.$$

Потужність джерел

$$S = S_E + S_J = -\dot{E} \cdot \dot{I}_E^* + \dot{U}_J \cdot \dot{J}^* = 586.54 - 279.734j \text{ мВА}$$

Потужність реактивних елементів

$$Q = |\dot{I}_L|^2 \cdot \frac{1}{Y_L} + |\dot{I}_C|^2 \cdot \frac{1}{Y_C} = -279.734j \text{ мВар}.$$

Потужність активних елементів

$$P = |\dot{I}_E|^2 \cdot R_1 + |\dot{I}_2|^2 \cdot R_2 + |\dot{I}_3|^2 \cdot R_3 + |\dot{I}_4|^2 \cdot R_4 = 586.54j \text{ мВт}.$$

Отже, закон балансу потужностей виконується.

Побудуємо векторну діаграму напруг (рис. 2.105).

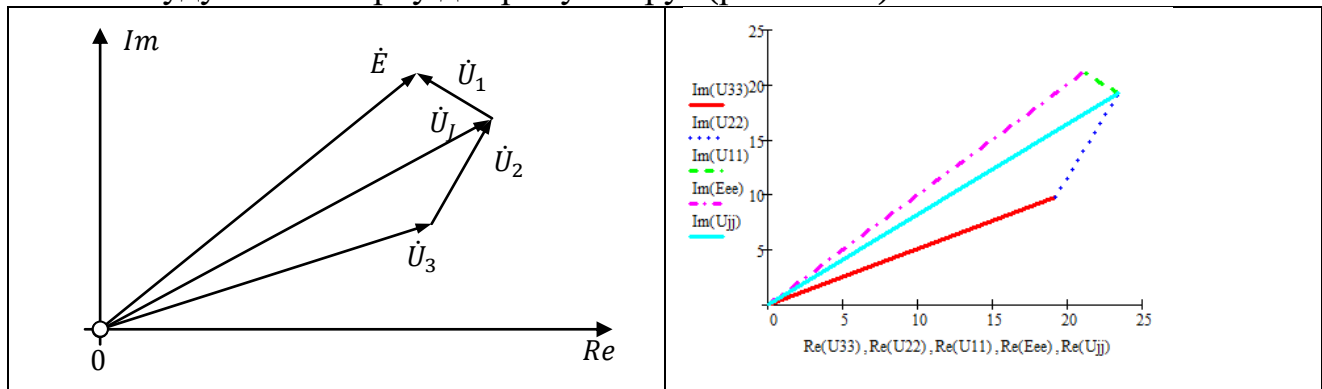


Рисунок 2.105 – Векторна діаграма

Визначимо струм $\dot{I}_E$ методом еквівалентного генератора
Для цього визначимо еквівалентний опір кола (рис. 2.106 а)

$$Z_{ab} = R_2 + \frac{1}{g_3 + g_4 + g_5 + Y_C + Y_L} = 1.313 - 0.65j.$$

Тоді опір еквівалентного генератора

$$Z_{EG} = Z_{ab} = 1.313 - 0.65j, \text{ кОм.}$$

Напруга еквівалентного генератора

$$\dot{E}_{EG} = J \cdot R_{EG} - \dot{E} = 6.554 - 11.843j \text{ В.}$$

За теоремою про еквівалентного генератора (рис. 2.106 б)

$$\dot{I}_E = \frac{\dot{E}_{EG}}{Z_{EG} + R_1} = 5.638 - 4.773j = 7.39e^{-40.25^\circ j} \text{ мА.}$$

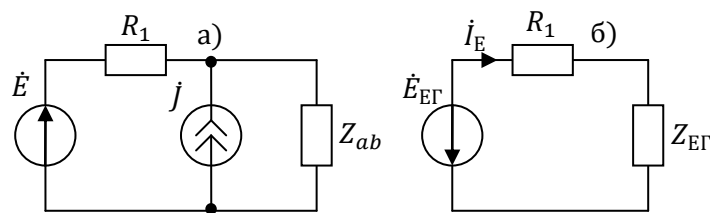


Рисунок 2.106 – Еквівалентні схеми

Отже, струм $\dot{I}_E$, що розрахований МКС та МЕГ однакові.

Визначимо струми методом контурних струмів.

У колі (рис. 2.106) перетворимо джерело струму в джерело напруги

$$\dot{E}_e = J_1 \cdot R_1 = 26.87 + 26.87j \text{ В.}$$

Реактивні опори

$$Z_L = j\omega L = j \cdot 1 \cdot 2.5 = 2.5j \text{ кОм; } Y_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 1} = -j \text{ кОм.}$$

За методом контурних струмів (рис. 2.107 а)

$$[E] = [Z] \cdot [I];$$

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_{34} & -R_{23} & 0 \\ -R_{23} & R_{23} + Z_L & -Z_L \\ 0 & -Z_L & Z_L + Z_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_I \\ \dot{I}_{II} \\ \dot{I}_{III} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 26.87 + 26.87j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.233 & -1.233 & 0 \\ -1.233 & 1.233 + 2.5j & -2.5j \\ 0 & -2.5j & 1.5j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_I \\ \dot{I}_{II} \\ \dot{I}_{III} \end{bmatrix}.$$

Звідси визначимо контурні струми

$$[I] = [Z]^{-1} \cdot [E] = \begin{bmatrix} \dot{I}_I \\ \dot{I}_{II} \\ \dot{I}_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.504 + 18.915j \\ -5.908 + 11.53j \\ -9.847 + 19.216j \end{bmatrix}.$$

За першим законом Кірхгофа (рис. 2.107 б)

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{III} = -9.847 + 19.216j;$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_I = 8.504 + 18.915j;$$

$$\dot{I}_L = \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 3.939 - 7.678j;$$

$$\dot{I}_{34} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 14.412 + 7.385j.$$

За законом Ома

$$\dot{U}_{34} = \dot{I}_{34} \cdot R_{34} = 19.216 + 9.847j;$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{34}}{R_3} = 4.804 + 2.462j;$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{34}}{R_2} = 9.608 + 4.923j.$$

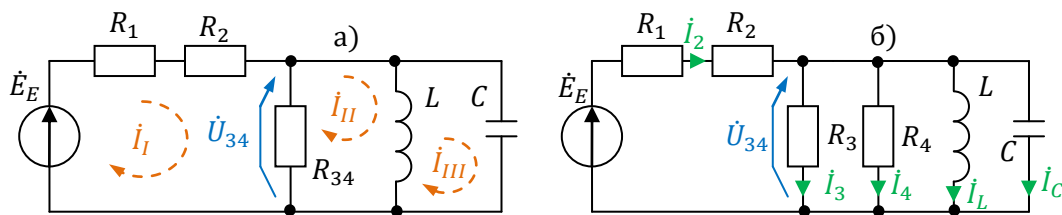


Рисунок 2.107 – Еквівалентні схеми

У початковій схемі (рис. 2.107) визначаємо інші струми

За першим законом Кірхгофа

$$\dot{I}_E = \dot{I} - \dot{I}_2 = 5.638 - 4.773j = 7.39e^{-40.25^\circ}j;$$

За законом Ома

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_E \cdot R_1 = 2.255 - 1.909j.$$

За другим законом Кірхгофа напруги на елементах кола (рис. 2.108)

$$\dot{U}_J = \dot{E} + \dot{U}_1 = 23.468 + 19.304j.$$

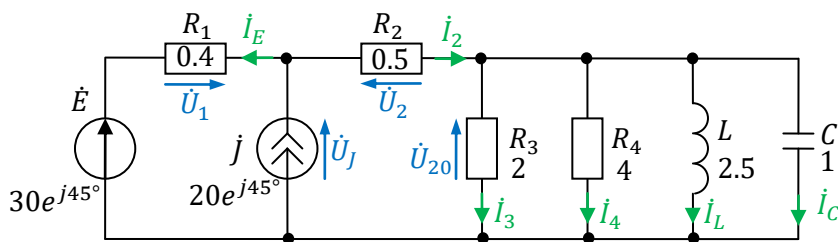


Рисунок 2.108 – Еквівалентна схема

Як бачимо, що струми пораховані МВН та МКС співпадають.

3. ПООДИНОКИЙ КОЛИВАЛЬНИЙ КОНТУР

3.1. Поняття про селективність

Одним із найважливіших завдань радіоелектроніки є здійснення частотної селекції або фільтрації.

Селективність або вибірність – це властивість кола з набору коливань різних частот виділяти одні частоти і не пропускати інші.

Припустимо, що на деяку електричну схему впливають кілька джерел коливань різних частот $U(f)$ (рис. 3.1). Кожне із джерел створює або коливання однієї частоти ($f_1, f_2, \dots, f_n$), або одночасно декількох частот, що лежать поблизу від цієї частоти. Необхідно, щоб приймальний пристрій на частоті ω_0 мав незмінну величину частотної характеристики, а поза цією смугою дорівнював нулю.

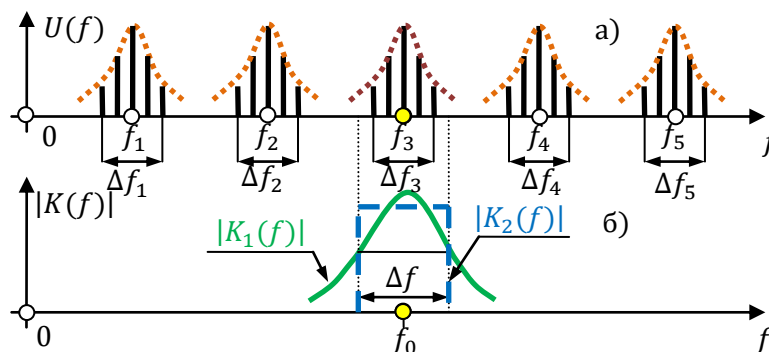


Рисунок 3.1 – Демонстрація селективності

На рис. 3.1 а зображені джерела сигналу, амплітуда яких може змінюватися, а кожне джерело сигналу має свою частоту. На рис. 3.1 б подана частотна характеристика, щоб можна було виділити один із цих сигналів: $|K_2(f)|$ – частотна характеристика прямокутної форми, $|K_1(f)|$ – реальна частотна характеристика. Якщо смуга частот Δf співпадає або трохи більше з Δf_3 , то приймач виділить із всіх наявних коливань лише коливання третього джерела.

Створити кола, які б мали частотну характеристику прямокутної форми, фізично неможливо. Однак вдається, певною мірою, наблизитися до подібного вигляду характеристики, якщо використати коливальні контури. Застосування їх дозволяє одержувати частотно-селективні кола, смуги пропускання яких досить вузькі. Ці смуги за допомогою простих технічних засобів можуть "перемішуватись" уздовж шкали частот. У цьому полягає одна із причин винятково широкого поширення коливальних кіл у радіоелектроніці.

Коливальний контур або резонансне коло – це коло, в якому виникає явище резонансу.

Резонансні явища за певних умов спостерігаються в електричних колах із різнохарактерними реактивними елементами (індуктивностями та ємностями)

$$Z_C = -jX_C = -j \frac{1}{\omega C}; \quad Z_L = j\omega L = jX_L.$$

Оскільки комплексні реактивні опори індуктивностей та ємностей мають різні знаки, то на певній частоті можлива їх компенсація

$$Z = Z_L + Z_C = jX_L - jX_C = 0, \quad X_L = X_C.$$

Тоді незважаючи на наявність реактивних елементів коло буде мати активний вхідний опір, що означає збіг за фазою вхідної напруги та вхідного струму.

Резонанс – це явище багатократного збільшення амплітуди власних коливань кола, коли частота дії наближається до частоти власних коливань контуру.

У контурах можуть виникати резонанс напруг та резонанс струмів.

3.2. Послідовний контур канонічного виду

3.2.1. Основні параметри контуру

Послідовним коливальним контуром називається коло, що складається із котушки індуктивності та конденсатора, з'єднаних послідовно відносно вхідних вузлів, до яких можуть бути підключені генератор або інші елементи кола.

У радіотехніці таке коло називають коливальним контуром послідовного живлення або скорочено послідовним коливальним контуром.

Якщо врахувати власні втрати елементів кола, то канонічна еквівалентна схема послідовного коливального контуру має вигляд кола, що зображено на рис. 3.2.

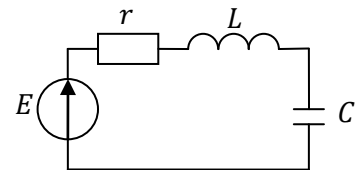


Рисунок 3.2 – Послідовний контур

У послідовному коливальному контурі виникає резонанс напруг. У фізиці під резонансом розуміють явище, коли частота дії наближається до частоти власних коливань.

Резонанс напруг – це режим кола, коли реактивний опір кола дорівнює нулю при рівності частоти зовнішньої дії та внутрішньої частоти контуру.

У результаті опір кола є активний, отже напруга на вході кола та струм у колі збігаються за фазою. Частота зовнішньої дії визначається частотою генератора або джерела, а внутрішня частота контуру визначається реактивними елементами кола.

Якщо струм та напруга змінюються за гармонічними законами

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \text{ та } i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i), \text{ тоді } \varphi_u = \varphi_i, \\ \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0.$$

Настроїти систему на частоту резонансу можна двома основними способами:

- 1) змінюючи частоту джерела при незмінних параметрах контуру так, щоб вона виявилась рівною резонансній частоті контуру;
- 2) змінюючи параметри контуру L та C при незмінній частоті джерела так, щоб частота джерела стала рівною частоті контура.

Із умови рівності $\Delta\varphi = 0$ можна знайти резонансну частоту. При резонансі вхідний опір контуру чисто дійсний. Із цього випливає, що для знаходження резонансної частоти ω_0 необхідно написати вираз для вхідного опору, прирівняти до нуля його уявну частину та розв'язати одержане рівняння відносно ω .

Запишемо вхідний опір контуру (рис. 3.2)

$$Z_{\text{ВХ}}(\omega) = r + Z_L + Z_C = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \\ = r + j(X_L - X_C) = r + jX.$$

Прирівнюємо уявну частину до нуля

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Звідси визначимо резонансну частоту

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Резонансна частота – це частота, на якій спостерігається явище резонансу.

На резонансній частоті опори індуктивності та ємності рівні

$$X_L = X_C = \frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L = \rho,$$

де ρ – характеристичний опір контуру.

Характеристичний опір ρ – це опір ємності або індуктивності на резонансній частоті.

Характеристичний опір визначається виразами

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{X_L \cdot X_C}.$$

Характеристичний опір має розмірність Ом.

На резонансній частоті опір контуру (рис. 3.2) є чисто активним і визначається виразом $Z_{\text{ВХ}}(\omega_0) = r$. Тоді струм у контурі на резонансній частоті досягає свого максимального значення $I = E/r$.

Отже, із одержаного результату випливає, що струм та напруга на вході контуру збігаються за фазою. А оскільки опір контуру на резонансній частоті активний, тому і потужність на цій частоті буде активною.

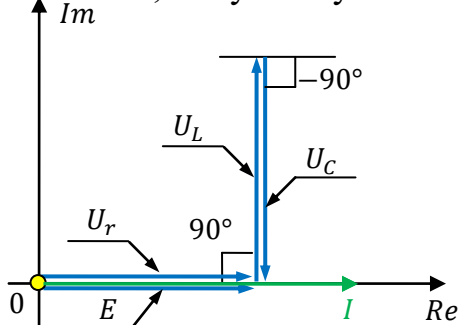


Рисунок 3.3 - Діаграма

За резонансу напруги на реактивних елементах однакові, але мають зсув фаз 180° , тобто протифазні $U_L = U_C = I\rho$.

На рис. 3.3 зображена векторна діаграма послідовного контуру на резонансній частоті.

Із рис. 3.3 випливає, що напруга на ємності і індуктивності у протифазі, струм у колі співпадає по фазі із вхідною напругою, а напруги на вході і на активному опорі рівні.

Будь-який коливальний контур можна охарактеризувати добротністю.

Добротність послідовного контуру – це відношення напруги на індуктивності чи ємності до вхідної напруги на резонансній частоті

$$Q = \frac{|U_L|}{U_r} = \frac{|U_C|}{U_r} = \frac{|U_L|}{E} = \frac{|U_C|}{E} = \frac{I \cdot \rho}{I \cdot r} = \frac{\rho}{r}.$$

В реальних колах напруга на реактивних елементах може бути набагато більше напруги на вході, що сприяє частотній селекції.

Таким чином, добротність Q показує у скільки разів напруга на реактивностях більше ніж на вході при резонансі

$$|U_C| = |U_L| = Q \cdot E.$$

На резонансній частоті відбувається взаємна компенсація реактивних опорів та відповідна компенсація напруг на них. Тому резонанс у послідовному контурі можна називати **резонансом напруг**.

У сучасній радіотехніці характеристичний опір контуру складає в середньому декілька сотень Ом, а активний опір контуру – декілька Ом, тому добротність змінюється у межах від 10 до 300.

Таким чином, резонансний режим у випадку малих струмів можна використовувати, наприклад, для підсилення вхідних сигналів. У випадку великих струмів резонансний режим є аварійним режимом, що спричиняє ушкодження ізоляції, тому його треба враховувати.

До первинних параметрів контуру належать такі величини: опір, індуктивність та ємність. Вторинними параметрами контуру є: резонансна частота, характеристичний опір, добротність, смуга пропускання.

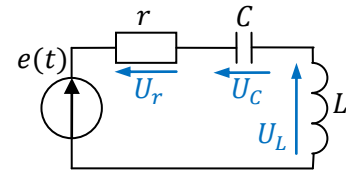


Рисунок 3.4 – Напряжки напруг на контурі

3.2.2. Енергетичні процеси у контурі

Розглянемо особливості енергетичних процесів за резонансу напруг у контурі на резонансній частоті. Покладемо, що $\varphi_u = \varphi_i = 0$, тоді

$$e(t) = E_m \cos(\omega_0 t), \quad i(t) = I_m \cos(\omega_0 t),$$

$$u_C(t) = U_{C.m} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = U_{C.m} \sin(\omega_0 t).$$

Миттєві значення енергії магнітного та електричного полів на реактивних елементах контуру (рис. 3.4)

$$w_L(t) = \frac{LI_m^2}{2} \cos^2(\omega_0 t) = W_{L.max} \cos^2(\omega_0 t),$$

$$w_C(t) = \frac{CU_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t) = W_{C.max} \sin^2(\omega_0 t).$$

У виразах вважаємо, що

$$W_{L.max} = \frac{LI_m^2}{2}; \quad W_{C.max} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Максимуми енергії в індуктивності та ємності на резонансі

$$W_{C.max} = \frac{CU_m^2}{2} \Big|_{U_m=I_m \cdot \rho} = \frac{C}{2} \cdot (I_m \cdot \rho)^2 \Big|_{\rho=\sqrt{L/C}} = \frac{C}{2} \cdot \frac{L}{C} I_m^2 = \frac{LI_m^2}{2} = W_{L.max}.$$

Отже, максимальні енергії в індуктивності та ємності рівні між собою.

Визначимо сумарну енергію, що виділяється у контурі (рис. 3.5)

$$w_L(t) + w_C(t) = W_{L.max} \cos^2(\omega_0 t) + W_{C.max} \sin^2(\omega_0 t) = \\ = W_{L.max} = W_{C.max} = const.$$

Звідси можна зробити висновок, що сума енергій на ємності та індуктивності є сталою величиною, що не змінюється у часі. Зменшення енергії магнітного поля супроводжується збільшенням енергії електричного поля та навпаки. Таким чином, при резонансі відбувається коливальний процес обміну енергією між індуктивністю та ємністю без участі джерела. Звідси й пішла назва коливального контуру. Отже, енергія джерела витрачається лише на покриття теплових втрат на активному опорі, при цьому реактивна потужність при резонансі не споживається.

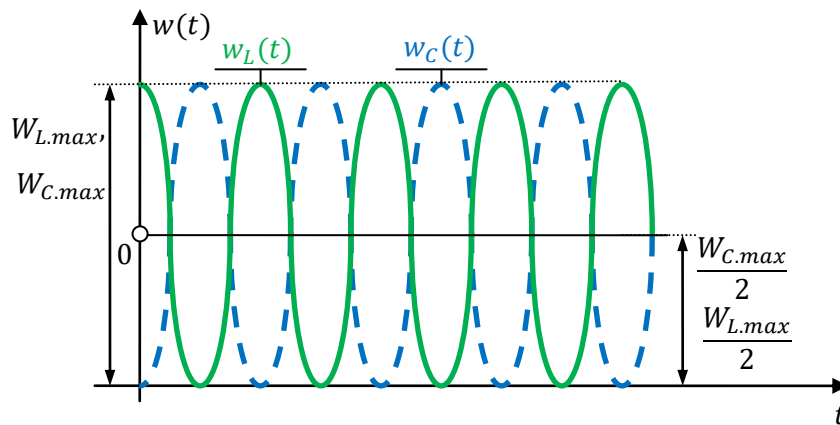


Рисунок 3.5 – Зміна енергії у контурі

Знайдемо відношення максимальної енергії, що запасена у реактивних елементах на резонансній частоті, до енергії, що витрачається на опорі за один період

$$\frac{W_{L.max}}{W_{rT}} = \frac{\frac{LI_m^2}{2}}{T \frac{I_m^2}{2} r} = \frac{L}{Tr} = \frac{L}{r} \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\omega_0 L}{r} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\rho}{r} = \frac{1}{2\pi} Q.$$

Із цього співвідношення й випливає загальне визначення добротності.

Добротність – це відношення з точністю до коефіцієнта 2π на резонансній частоті максимальної енергії, що була накопичена в реактивному елементі, до енергії, що поглинається на активному елементі за один період.

$$Q = 2\pi \frac{W_{L.max}}{W_{rT}} = 2\pi \frac{W_{C.max}}{W_{rT}}.$$

Величина, обернена до добротності контуру, називається загасанням контуру

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{r}{\rho}.$$

3.2.3. Точне значення резонансної частоти контуру

Для того, щоб визначити резонансну частоту неканонічного контуру необхідно одержати вираз відносно уявної частини вхідного опору, прирівняти його до нуля і розв'язати одержане рівняння відносно частоти ω . Знайдемо точну резонансну частоту для неканонічного контуру (рис. 3.6) із умови рівності уявної складової вхідного опору нулю, тобто $X_L - X_C = 0$.

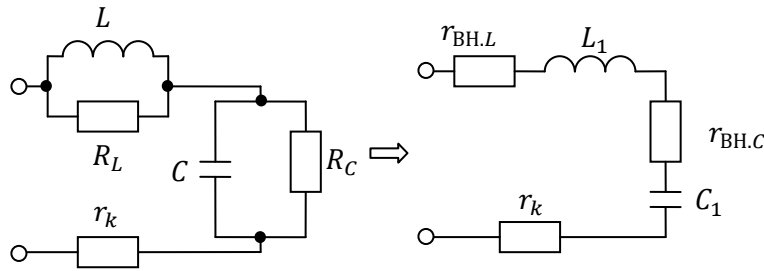


Рисунок 3.6 – Еквівалентні схеми

Провідності елементів неканонічної схеми:

$$b_L = \frac{1}{\omega L}, \quad b_C = \omega C, \quad g_L = \frac{1}{R_L}, \quad g_C = \frac{1}{R_C}.$$

Перерахуємо паралельні гілки у послідовні

$$r + jX = \frac{1}{g - jb} = \frac{g + jb}{(g - jb) \cdot (g + jb)} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2}.$$

Умова резонансу є

$$X_C = X_L.$$

Підставимо одержані вирази реактивних опорів в умову резонансу

$$\frac{b_C}{g_C^2 + b_C^2} = \frac{b_L}{g_L^2 + b_L^2}.$$

Підставимо замість реактивних провідностей b_L та b_C їх значення

$$\frac{\omega C}{g_C^2 + (\omega C)^2} = \frac{\frac{1}{\omega L}}{g_L^2 + \frac{1}{(\omega L)^2}} = \frac{\omega L}{1 + g_L^2 (\omega L)^2}.$$

Скоротимо на ω та спростимо одержаний вираз:

$$C + g_L^2 (\omega L)^2 C = L(\omega C)^2 + L g_C^2.$$

Перенесемо доданки із ω у праву частину, а інші – у ліву

$$C - L g_C^2 = L(\omega C)^2 - g_L^2 (\omega L)^2 C = \omega^2 LC [C - g_L^2 L].$$

Звідси визначимо точне значення резонансної частоти:

$$\omega_{OT} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{C - L g_C^2}{C - L g_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1 - g_C^2 \cdot \frac{L}{C}}{1 - g_L^2 \frac{L}{C}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1 - \rho^2 g_C^2}{1 - g_L^2 \rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot k_{\Pi},$$

де k_{Π} – поправочний коефіцієнт, який дуже близький до одиниці.

Отже, поправочний коефіцієнт визначається виразом

$$k_{\Pi} = \sqrt{\frac{1 - \rho^2 g_C^2}{1 - g_L^2 \rho^2}}$$

Якщо у контурі немає опору втрат у гілці із ємністю ($g_C = 0$) або у гілці із індуктивністю ($g_L = 0$), то його просто потрібно прибрати із формули.

У випадку, коли відсутній опір у гілці із індуктивністю (рис. 3.7 а), тобто $R_L = \infty$ ($g_L = 0$), поправочний коефіцієнт та точне значення резонансної частоти визначаються

$$k_{\Pi} = \sqrt{\frac{1 - \rho^2 g_C^2}{1}} = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_C^2}} = \sqrt{\frac{R_C^2 - \rho^2}{R_C^2}};$$

$$\omega_{\text{от}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot k_{\Pi} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{\sqrt{R_C^2 - \rho^2}}{R_C}.$$

У випадку, коли відсутній опір у гілці із ємністю (рис. 3.7 б), тобто $R_C = \infty$ ($g_C = 0$), поправочний коефіцієнт та точне значення резонансної частоти визначаються

$$k_{\Pi} = \sqrt{\frac{1}{1 - \rho^2 g_L^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{R_L^2}}} = \sqrt{\frac{R_L^2}{R_L^2 - \rho^2}};$$

$$\omega_{\text{от}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot k_{\Pi} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{R_L}{\sqrt{R_L^2 - \rho^2}}.$$

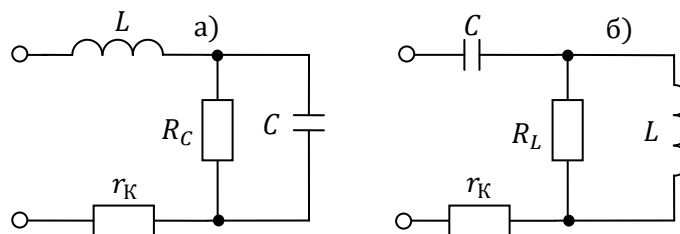


Рисунок 3.7 – Еквівалентні схеми

Як видно із рис. 3.6 схема, яка була утворена в результаті перерахунку паралельних гілок у послідовні має елементи, що різняться, оскільки їх опори різні.

3.3. Частотні характеристики послідовного контуру

3.3.1. Графічний аналіз частотних характеристик

Аналізуючи характер рівнянь вхідного опору, напруги та струмів в контурі, фазових зсувів між ними у випадку гармонічної дії легко побачити, що вони залежать від частоти. Ця залежність впливає безпосередньо із залежності опорів реактивних елементів X_L та X_C від частоти.

Частотні характеристики – це залежність від частоти параметрів кола.

Частотні характеристики діляться на амплітудно-частотні (АЧХ) – це залежність амплітуди від частоти та фазо-частотні (ФЧХ) – це залежність фази від частоти.

Як відомо, індуктивний та ємнісний опори визначаються

$$X_L = X_L(\omega) = \omega L, \quad X_C = X_C(\omega) = -\frac{1}{\omega C}.$$

При побудові частотної характеристики вхідного опору $|Z_{BX}(\omega)|$ скористаємося графо-аналітичним підходом. Спочатку будуюмо активний опір r , реактивні індуктивний X_L та ємнісний X_C опори, потім загальний реактивний опір $X(\omega) = X_L - X_C$. У результаті додавання опорів r та X одержимо загальний опір контура $Z_{BX}(\omega)$, модуль якого і будуюмо $|Z_{BX}(\omega)|$ на рис. 3.7.

$$|Z_{BX}(\omega)| = \sqrt{r^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

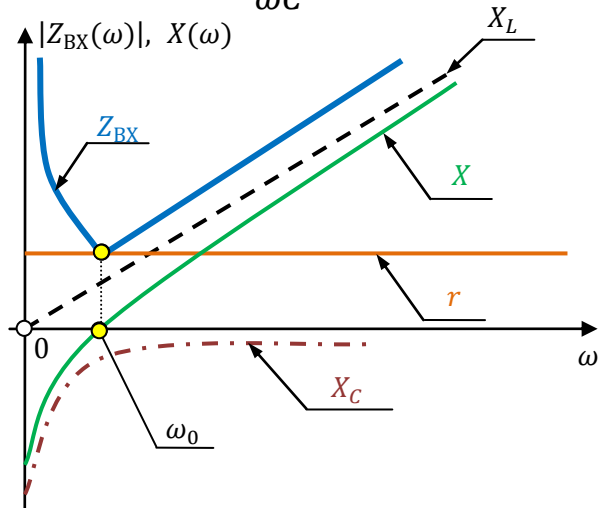


Рисунок 3.8 - Залежності вхідного опору контуру від частоти

На резонансній частоті ω_0 реактивний індуктивний та ємнісний опори співпадають, кожен з них дорівнює характеристичному опору контуру ρ , реактивний опір послідовного контуру $X = 0$, тому його комплексний опір є суто активний $Z_{BX}(\omega) = r$, що є причиною резонансу.

На нульовій частоті (випадок постійного струму) опір контуру визначається опором ємнісного елементу X_C а на частоті $\omega = \infty$ – індуктивним опором X_L , тому на цих частотах він нескінченно великий.

При збільшенні частоти від нуля до ω_0 індуктивна складова опору X_L лінійно зростає, а ємнісна складова опору X_C спадає за гіперболічним законом. При цьому на частотах $\omega < \omega_0$ реактивний опір контуру X має ємнісний характер, тому зменшується як і повний опір контуру. На частотах $\omega > \omega_0$ реактивний опір контуру має індуктивний характер. При збільшенні частоти він монотонно зростає, що є причиною збільшення повного опору контуру.

Отже вхідний опір кола

$$Z_{BX}(\omega) = r + j(X_L - X_C) = |Z_{BX}(\omega)|e^{j\varphi_Z(\omega)},$$

де $|Z_{BX}(\omega)|$ – модуль вхідного опору контуру; $\varphi_Z(\omega)$ – аргумент або фаза вхідного опору контуру.

У результаті одержимо модуль $|Z_{BX}(\omega)|$ та аргумент $\varphi_Z(\omega)$, що зобразимо на графіках у вигляді АЧХ (рис. 3.9а) та ФЧХ (рис. 3.9 б)

$$|Z_{BX}(\omega)| = \sqrt{r^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad \varphi_Z(\omega) = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{r}\right).$$

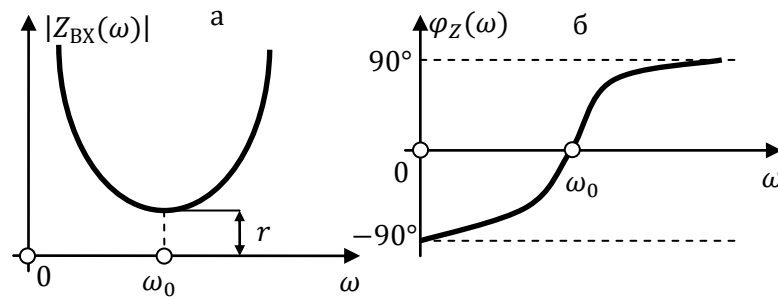


Рисунок 3.9 – Модуль та аргумент вхідного опору контуру

Резонансні криві – це залежність струмів та напруги у контурі від частоти.

Струм у контурі (рис. 3.9) за законом Ома

$$I(\omega) = \frac{E}{Z_{BX}(\omega)} = \frac{E}{r + j(X_L - X_C)} = \frac{E}{|Z_{BX}(\omega)|e^{j\varphi_Z(\omega)}} = |I(\omega)| \cdot e^{j\varphi_I(\omega)}.$$

Модуль $|I(\omega)|$ та аргумент $\varphi_I(\omega)$ струму зображені на рис. 3.10. Як бачимо із графіку, що модуль струму досягає свого максимального значення на резонансній частоті

$$I_{max} = \frac{E}{r}.$$

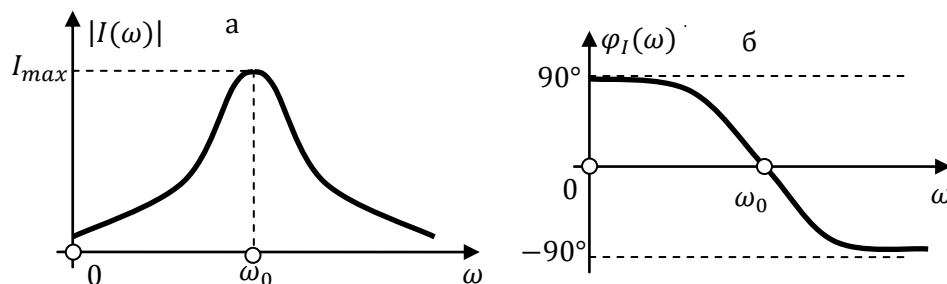


Рисунок 3.10 – Залежності модуля вхідного струму та його фази від частоти

Модулі напруг на реактивних елементах визначаються законом Ома

$$|U_L(\omega)| = |I(\omega)| \cdot X_L = |I(\omega)| \cdot \omega L;$$

$$|U_C(\omega)| = |I(\omega)| \cdot X_C = |I(\omega)| \cdot \frac{1}{\omega C}.$$

На рис. 3.11 наведені залежностей модулів напруг на індуктивності та ємності від частоти.

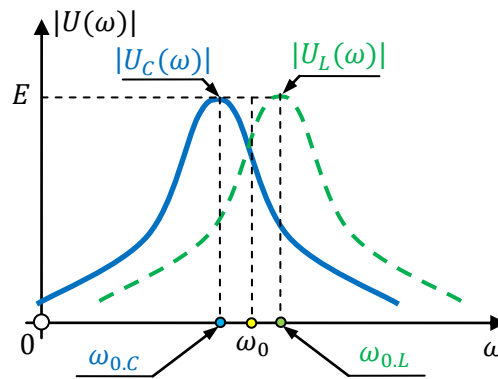


Рисунок 3.11 – Залежності модулів напруг на контурі від частоти

Максимальні значення модулів напруг $|U_L(\omega)|$ та $|U_C(\omega)|$ по осі частот є зсунутими за рахунок різних залежностей реактивних опорів індуктивності X_L та ємності X_C . На практиці цієї різниці майже не видно. Тому прийнято вважати, що в околі резонансної частоти ω_0 модулі напруг на реактивних елементах контуру та модуль струму у контурі майже однакові за формою і відмінні лише за масштабом.

3.3.2. Математичний аналіз частотних характеристик

Відхилення від резонансного режиму може відбуватися за рахунок зміни частоти задаючого генератора чи зміни параметрів контуру. Якісно оцінку відхилення визначають розстройкою.

Розстройка контуру – це степінь відхилення частоти від резонансної частоти контуру.

Степінь відхилення від резонансного режиму прийнято оцінювати абсолютною, відносною та узагальненою розстройками.

Абсолютна розстройка – це різниця між частотою дії та резонансною частотою контуру

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

Відносна розстройка – це відношення абсолютної розстройки до резонансної частоти контуру

$$\eta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Узагальнена розстройка – це відношення реактивного опору до опору втрат контуру

$$\xi = \frac{x}{r}.$$

Більш широко у теоретичних дослідженнях використовується узагальнена розстройка ξ , оскільки її використання значно спрощує розрахунки.

Визначимо інші аналітичні вирази для узагальненої розстройки

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{X}{r} = \frac{X_L - X_C}{r} = \frac{1}{r} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{1}{r} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cdot \frac{\omega_0 L}{\omega_0 L} = \\ &= \frac{\omega_0 L}{r} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 \omega C L} \right) \Big|_{CL = \frac{1}{\omega_0^2}} = \frac{\rho}{r} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \\ &= Q \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} \right) = Q \frac{(\omega - \omega_0) \cdot (\omega + \omega_0)}{\omega_0 \omega} \Big|_{\omega \approx \omega_0} \approx Q \frac{(\Delta\omega) \cdot (2\omega)}{\omega_0 \omega} = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.\end{aligned}$$

Вважаємо, що працюємо у вузькому діапазоні частот в околі резонансної частоти, тому $\omega + \omega_0 \approx 2\omega$.

Отже,

$$\xi = \frac{x}{r} = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Таким чином, узагальнена розстройка $\xi(\omega)$ є лінійною функцією від частоти ω в околі резонансної частоти. Отже, графіки АЧХ та ФЧХ можна будувати від ξ , а потім перейти до абсолютної розстройки за виразами

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q} \xi, \quad \Delta f = \frac{f_0}{2Q} \xi.$$

Це можна здійснити, якщо накреслити внизу під віссю ξ іншу вісь - $\Delta\omega$. Так простіше, ніж відразу будувати частотні характеристики від частоти ω .

Повний опір контуру від узагальненої розстройки

$$Z_{BX}(\xi) = r + jX = r \left(1 + j \frac{X}{r} \right) = r(1 + j\xi) = |Z_{BX}(\xi)| e^{j\varphi_Z(\xi)},$$

де $|Z_{BX}(\xi)| = r\sqrt{1 + \xi^2}$, $\varphi_Z(\xi) = \arctg(\xi)$.

АЧХ та ФЧХ опору показані на рис. 3.12.

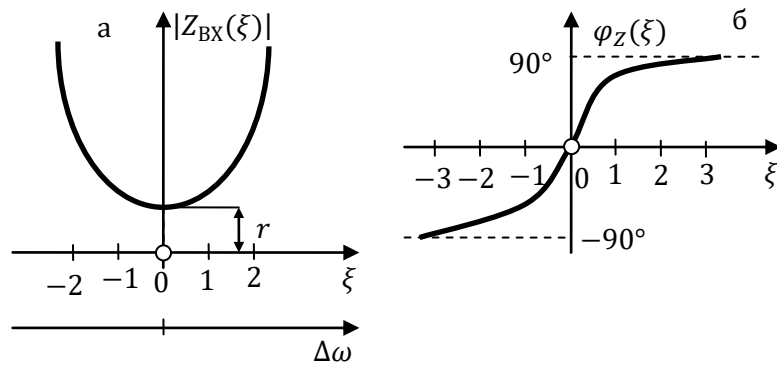


Рисунок 3.12 – Модуль та аргумент вхідного опору

Струму у контурі визначається

$$\dot{I}(\xi) = \frac{E}{Z_{BX}(\xi)} = \frac{E}{r} \cdot \frac{1}{1 + j\xi} = \frac{I_0}{1 + j\xi}$$

де $I_0 = E/r$ – значення струму на резонансній частоті.

При значних змінах добротності ординати графіків АЧХ можуть суттєво відрізнятися, що незручно для побудови та аналізу резонансних кривих. Тому для зручності часто будують нормовану резонансну криву.

Нормована резонансна характеристика – це характеристика, що одержується шляхом ділення всіх її значень за віссю ординат на максимальне значення.

Вираз нормованої резонансної характеристики

$$\dot{\eta}(\xi) = \frac{\dot{I}(\xi)}{I_0} = \frac{1}{1 + j\xi} = |\dot{\eta}(\xi)| e^{j\varphi_{\eta}(\xi)},$$

$$|\eta(\xi)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \varphi_{\eta}(\xi) = -\arctg(\xi).$$

Модуль та аргумент нормованої резонансної характеристики поданий на рис. 3.13.

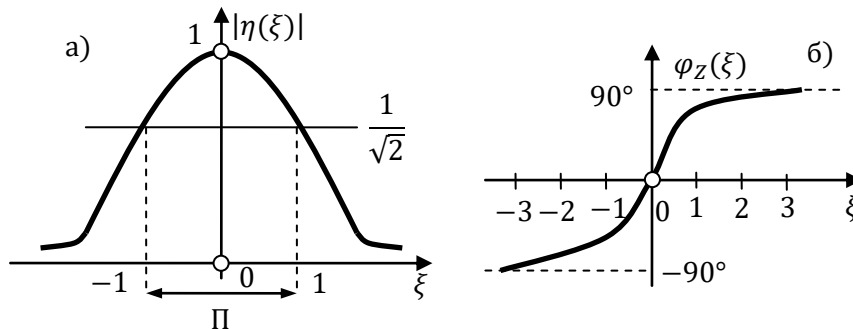


Рисунок 3.13 – Модуль (а) та аргумент нормованої резонансної характеристики (б)

Модуль нормованої резонансної характеристики можна побудувати і від узагальненої розстройки ξ (рис. 3.14 а) та від частоти ω (рис. 3.14 б).

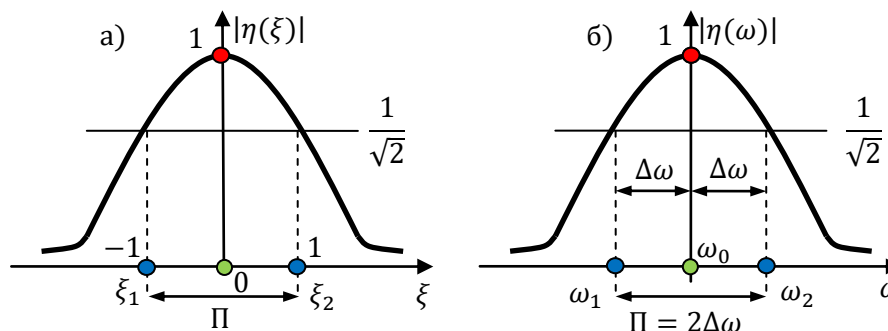


Рисунок 3.14 – Модуль (а) та аргумент нормованої резонансної характеристики (б)

Із рис. б видно, що смуга пропускання визначається $\Pi = 2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

Смуга пропускання – це діапазон зміни частот, у межах якого АЧХ резонансної кривої струму або напруги не опускається нижче максимального значення, поділеного на $\sqrt{2}$ (рис. 3.14).

Для знаходження смуги пропускання необхідно модуль нормованої резонансної кривої $|\eta(\xi)|$ прирівняти до $1/\sqrt{2}$, знайти ξ_{Π} на границях смуги та від ξ_{Π} перейти до $\Delta\omega$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\Pi}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Звідси $\xi_{\Pi} = \xi_{0.7} = \pm 1$.

Підставимо $\xi_{\Pi} = 1$ у вираз для узагальненої розстройки

$$\xi \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = |\xi_{\Pi}| = 1.$$

Оскільки $\Pi = 2\Delta\omega$, то одержимо

$$Q \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = Q \frac{\Pi}{\omega_0} = 1.$$

Звідси визначимо смугу пропускання

$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right].$$

Отже видно, що чим більша добротність, тим менша смуга пропускання.

Не дивлячись на те, що ми використали наближене співвідношення між ξ і $\Delta\omega$, ця формула для смуги пропускання Π точна.

Також смугу пропускання можна визначити через лінійну частоту

$$\Pi = \frac{f_0}{Q} [\text{Гц}].$$

Відносна смуга пропускання визначається

$$\Pi_{\text{в}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{0,5(\omega_2 + \omega_1)}.$$

Смугу пропускання можна визначати і із залежності модуля потужності на контурі від частоти (рис. 3.15).

Із рис. 14 бачимо, що смуга пропускання визначається

$$\Pi = 2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1.$$

Крім того, смугу пропускання можна визначити і у інший спосіб

$$\Pi = 2\Delta f = f_2 - f_1.$$

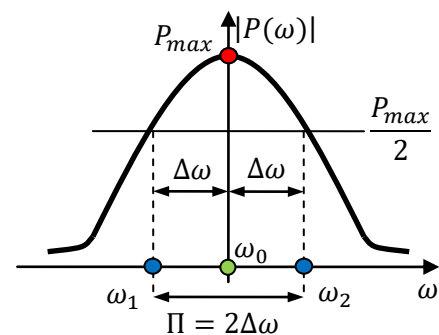


Рисунок 3.15 – Смуга пропускання

Смуга пропускання за залежністю потужності – це діапазон зміни частот, у межах якого АЧХ резонансної кривої потужності не опускається нижче максимального значення, поділеного на 2 (рис. 3.15, б).

Смугу пропускання можна визначати і із залежності модуля коефіцієнта передачі за напругою чи струмом контура від частоти, що визначена в децибелах (рис. 3.16).

Значення коефіцієнта передачі на границях смуги пропускання

$$K_{\Pi} = 20 \cdot \log \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] = -3 \text{ дБ.}$$

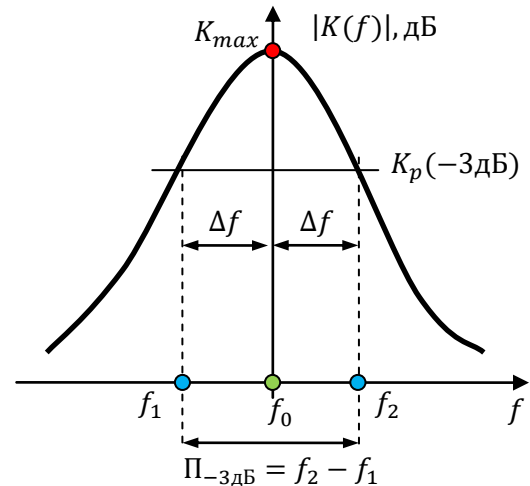


Рисунок 3.16 – Смуга пропускання

На рис. 3.16 видно, що смуга пропускання у децибелах визначається

$$\Pi_{-3 \text{ дБ}} = f_2 - f_1 = 2\Delta f.$$

Крім того, смугу пропускання можна визначити і у інший спосіб

$$\Pi_{-3 \text{ дБ}} = \omega_2 - \omega_1 = 2\Delta\omega.$$

Смуга пропускання у децибелах – це діапазон зміни частот, у межах якого АЧХ резонансної кривої коефіцієнта передачі не опускається нижче максимального значення на 3 дБ.

Практичне визначення смуги пропускання за залежністю коефіцієнту передачі за напругою у дБ здійснюється таким чином (рис. 3.17). Спочатку визначаємо резонансну частоту (точка 1). Потім визначаємо точку перетину прямої на рівні -3 Б праворуч від резонансної частоти (2), а далі опускаємо перпендикуляр на вісь частот і визначаємо верхню граничну частоту f_2 (точка 3). Потім визначаємо точку перетину прямої на рівні -3 Б (4) ліворуч від резонансної частоти, а далі опускаємо перпендикуляр на вісь частот і визначаємо нижню граничну частоту f_1 (точка 5). А далі визначаємо смугу пропускання

$$\Pi_{-3 \text{ дБ}} = f_2 - f_1.$$

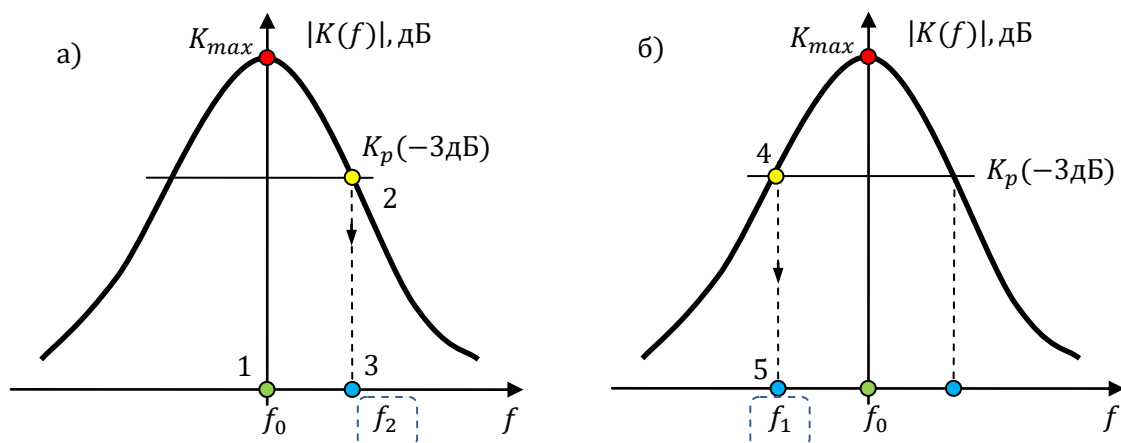


Рисунок 3.17 – Визначення смуги пропускання в дБ

Порівняємо як співвідносяться смуги пропускання для струму, напруги та потужності. Для цього побудуємо нормовані характеристики для цих величин (рис. 3.18).

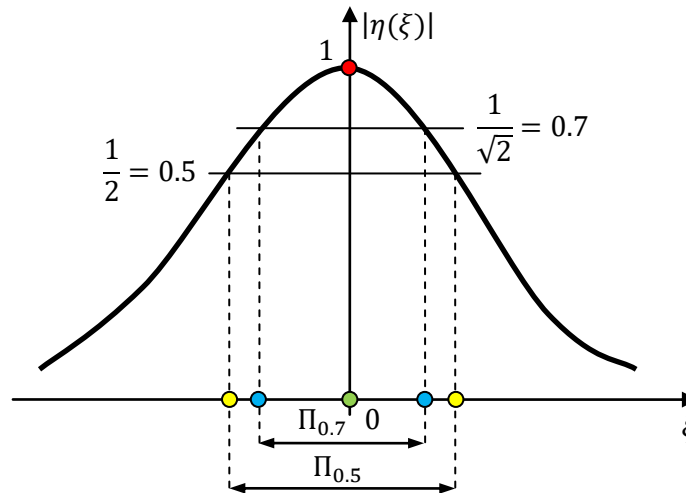


Рисунок 3.18 – Визначення смуги пропускання за нормованою характеристикою

Для знаходження смуги пропускання модуль нормованої резонансної характеристики $|\eta(\xi)|$ прирівняти до $1/2$, знайти ξ_{Π} на границях смуги та від ξ_{Π} перейти до $\Delta\omega$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\Pi}^2}} = \frac{1}{2}.$$

Звідси $\xi_{\Pi} = \pm\sqrt{3}$.

Оскільки вище було визначено, що

$$\xi \approx Q \frac{\Pi}{\omega_0}$$

Звідси визначимо

$$\Pi = \frac{\xi \cdot \omega_0}{Q}.$$

Визначимо відношення смуг пропускання за рівнем 0.5 та 0.7

$$\frac{\Pi_{0.5}}{\Pi_{0.7}} = \frac{\frac{\xi_{0.5} \cdot \omega_0}{Q}}{\frac{\xi_{0.7} \cdot \omega_0}{Q}} = \frac{\xi_{0.5}}{\xi_{0.7}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

У виразі $\Pi_{0.5}$ та $\xi_{0.5}$ – це смуга пропускання та розстройка за рівнем 0.5, що відповідає нормованій резонансній характеристиці потужності, $\Pi_{0.7}$ та $\xi_{0.7}$ – це смуга пропускання та розстройка за рівнем 0.7, що відповідає нормованій резонансній характеристиці струму чи напруги.

Якщо виразити ξ через абсолютну розстройку та добротність Q , то одержимо вираз вхідного опору контуру

$$|Z_{\text{вх}}(\Delta f)| = \sqrt{1 + (2Q \frac{\Delta f}{f_0})^2}, \quad \varphi_Z = \arg(Z_{\text{вх}}) = \arctg\left(2Q \frac{\Delta f}{f_0}\right).$$

Модуль струму та напруги визначається

$$|I(\Delta f)| = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\Delta f}{f_0})^2}}; \quad |U(\Delta f)| = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\Delta f}{f_0})^2}}.$$

Можемо сформулювати нормовану резонансну криву для модуля

$$|A(\Delta f)| = \frac{A_{\text{max}}}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\Delta f}{f_0})^2}}.$$

Звідси бачимо, що чим більше добротність Q , тим більше коефіцієнт при $\Delta f/f_0$, а значить при тих самих Δf значення кореня буде більше. Нижче наведено сімейство нормованих кривих АЧХ струму та напруги для різних значень добротності $Q_3 < Q_2 < Q_1$ (рис. 3.19). Тоді смуги, що відповідають цим добротностям будуть такі $\Pi_1 < \Pi_2 < \Pi_3$.

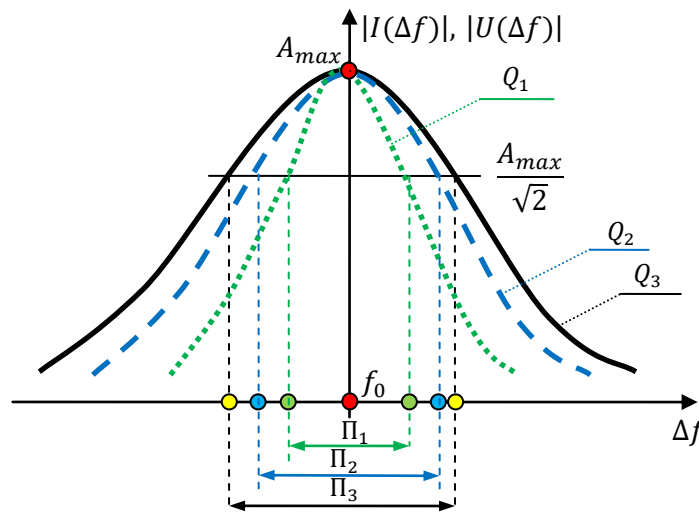


Рисунок 3.19 – Порівняння смуг пропускання

Отже, чим більше добротність, тим менша смуга пропускання, а отже вужче резонансна крива, тим краще фільтруючі властивості контуру.

3.3.3. Передавальні характеристики

Розглянемо коефіцієнти передачі за напругою контуру (рис. 3.20).

$$\dot{K}_r = \frac{\dot{U}_r}{\dot{E}}, \quad \dot{K}_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{E}}, \quad \dot{K}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{E}}.$$

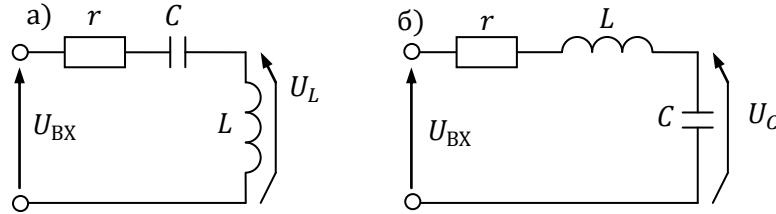


Рисунок 3.20 – Еквівалентні схеми

Визначимо коефіцієнти передачі:

$$\begin{aligned} \dot{K}_r &= \frac{\dot{U}_r}{\dot{U}_{BX}} = \frac{r}{Z_{BX}} = \frac{r}{r(1+j\xi)} = \frac{e^{-j\arctg(\xi)}}{\sqrt{1+\xi^2}} = \dot{\eta}(\xi); \\ \dot{K}_L &= \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}_{BX}} = \frac{j\omega L}{Z_{BX}} = \frac{j\omega L}{r(1+j\xi)} = \frac{j\omega L}{r(1+j\xi)} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0} = \left[\frac{L\omega_0 = \rho}{\rho/r = Q} \right] = \\ &= jQ \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1+j\xi} = jQ \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \dot{\eta}(\xi) = Q \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{j[90^\circ - \arctg(\xi)]}; \\ \dot{K}_C &= \frac{\dot{U}_C}{\dot{U}_{BX}} = \frac{j\omega C}{Z_{BX}} = \frac{j\omega C}{r(1+j\xi)} = \frac{j\omega C}{r(1+j\xi)} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0} = \left[\frac{1/C\omega_0 = \rho}{\rho/r = Q} \right] = \\ &= -jQ \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{1}{1+j\xi} = -jQ \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \dot{\eta}(\xi) = Q \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{j[-90^\circ - \arctg(\xi)]}. \end{aligned}$$

На резонансній частоті маємо

$$\begin{aligned} \dot{K}_r(\omega_0) &= \dot{\eta}(0) = 1; \\ \dot{K}_L(\omega_0) &= jQ; \quad \dot{K}_C(\omega_0) = -jQ. \end{aligned}$$

Із виразів для коефіцієнтів передачі випливає, що напруга на реактивних елементах на резонансній частоті у Q раз більше, ніж на вході.

Для побудови графіків будемо враховувати, що $|K(\omega)|$ – АЧХ (рис. 3.21 а), а $\varphi(\omega)$ – ФЧХ (рис. 3.21 б).

Із модулів виразів $\dot{K}_C(\xi)$ та $\dot{K}_L(\xi)$ бачимо, що їх максимуми не співпадають з резонансною частотою ω_0 , а зсунуті по осі частоту на величини

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}; \quad \omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}.$$

Якщо добротність $Q > 10$, то модулі $\dot{K}_C(\xi)$ та $\dot{K}_L(\xi)$ практично співпадають і їх максимальне значення становить Q .

Якщо всі криві побудувати нормованими, то можна вважати, що це буде одна й та сама резонансна крива. Отже, для експериментального визначення добротності не потрібно знімати експериментальну криву струму, а визначати добротність на будь-якій реактивності.

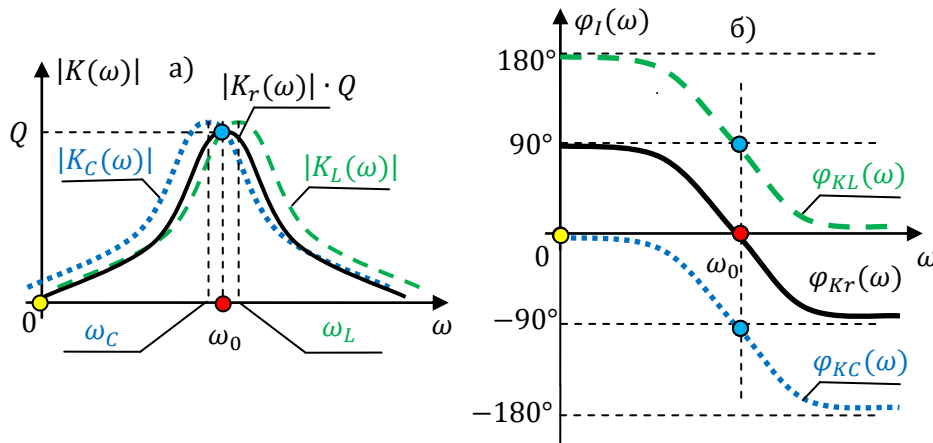


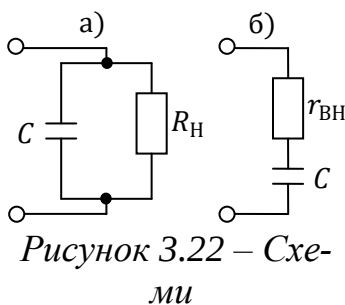
Рисунок 3.21 – Модулі та аргументи коефіцієнтів передачі за напругою

3.4. Вплив опорів генератора та навантаження на вибірність контуру

Щоб оцінити ступінь впливу на контур активного опору, що підключається паралельно до контуру, вводиться поняття внесеного опору.

3.4.1. Внесений опір

Внесений опір – це той опір, що вноситься у контур з боку навантаження або з боку генератора, що підключається паралельно до контуру.



Розглянемо паралельне з'єднання активного опору R_H та ємності Z_C (рис. 3.22 а).

Вхідний опір такого з'єднання

$$Z = \frac{R_H Z_C}{R_H + Z_C} = \frac{R_H \cdot (-jX_C)}{R_H - jX_C}.$$

Помножимо чисельник та знаменник вхідного опору на комплексно-спряжений вираз знаменника, виділимо активну та реактивну складові:

$$Z = \frac{R_H \cdot (-jX_C) \cdot (R_H + jX_C)}{(R_H - jX_C) \cdot (R_H + jX_C)} = \frac{R_H \cdot X_C^2}{R_H^2 + X_C^2} - j \frac{X_C \cdot R_H^2}{R_H^2 + X_C^2} = r_{BH} - j x_{BH},$$

де

$$r_{BH} = \frac{R_H \cdot X_C^2}{R_H^2 + X_C^2}, \quad x_{BH} = \frac{X_C \cdot R_H^2}{R_H^2 + X_C^2}.$$

Отже, отримали послідовну гілку із опорами r_{BH} та x_{BH} , що увімкнені послідовно (рис. 3.22 б).

Помножимо чисельник та знаменника вхідного опору на комплексно-спряжений вираз знаменника, виділимо активну та реактивну складові помножимо чисельник та знаменника вхідного опору на комплексно-спряжений вираз знаменника, виділимо активну та реактивну складові

Якщо $R_H \gg X_C$, тоді реактивним опором у знаменнику X_C можна знехтувати і одержуємо такі вирази внесеного опору:

$$r_{BH} \cong \frac{R_H \cdot X_C^2}{R_H^2} = \frac{X_C^2}{R_H}, \quad x_{BH} \cong \frac{X_C \cdot R_H^2}{R_H^2} = X_C.$$

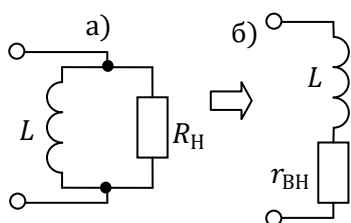


Рисунок 3.23 – Схеми

За паралельного з'єднання активного опору та індуктивності (рис. 3.19) одержимо аналогічні формули

$$r_{BH} \cong \frac{X_L^2}{R_H}, \quad x_{BH} \cong X_L.$$

В околі резонансу ($X_C = X_L = \rho$) внесений опір визначається

$$r_{BH} = \frac{\rho^2}{R_H} \Big|_{R_H \gg \rho}.$$

Реактивні складові опору генератора та навантаження можуть розстроїти контур. Їх вплив усувається підстроюванням контуру.

У колі (рис. 3.24) активні опори генератора та навантаження (R_Γ і R_H) утворюють еквівалентні сумарні втрати, що погіршують вибіркові властивості контуру (зменшення добротності, розширення смуги пропускання).

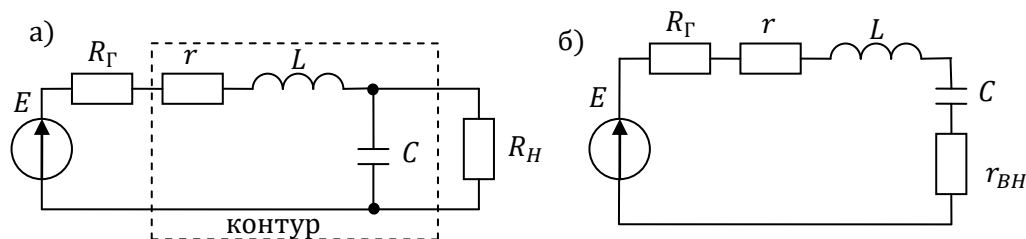


Рисунок 3.24 – Еквівалентні схеми

Добротність та смуга пропускання контуру (рис. 3.20 а)

$$Q_1 = \frac{\rho}{r}, \quad \Pi_1 = \frac{\omega_0}{Q_1}.$$

Добротність контуру із врахуванням опору генератора

$$Q_2 = \frac{\rho}{r + R_\Gamma}.$$

Отже, наявність опору генератора R_Γ зменшує добротність ($Q_2 < Q_1$) та знижує його вибірність, оскільки розширюється смуга пропускання ($\Pi_2 > \Pi_1$). Тому для підвищення вибірних властивостей, необхідно щоб опір генератора R_Γ був невеликим.

Внесемо опір навантаження R_H в контур, тоді схема перетвориться у коло, що подано на рис. 3.20 б, і визначимо його

$$r_{BH} = \frac{\rho^2}{R_H}.$$

Добротність контуру із врахування внесеного опору та опору генератора

$$Q_3 = \frac{\rho}{r + r_{BH} + R_\Gamma}.$$

Отже, при збільшенні загального активного опору контуру зменшується добротність контуру ($Q_1 > Q_2 > Q_3$) і ще більше погіршуються селективні властивості контуру.

У цьому випадку, щоб покращити селективні властивості контуру, окрім зменшення опору генератора, необхідно збільшувати опір навантаження R_H , що вмикається паралельно до реактивності (рис. 3.24 а).

Якщо до індуктивності L теж підключити активний опір навантаження R_L , то одержимо схему, що зображена на рис. 3.25.

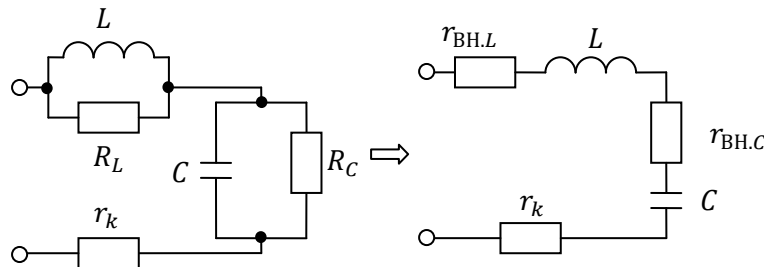


Рисунок 3.25 – Еквівалентні схеми

Навантаження теоретично також впливає на резонансну частоту, тому що елементи еквівалентного послідовного кола є частотно-залежними.

Після внесення активного опору навантаження R_H у контур, контур зводиться до канонічної форми або вигляду.

Якщо контур (рис. 3.26) живити джерелом живлення у вигляді джерела струму, то $I_m = \text{const}$, оскільки струм джерела струму визначається виразом $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I)$.

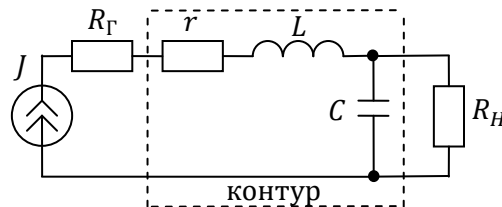


Рисунок 3.26 – Контур із живленням від джерела струму

Внутрішній опір джерела струму $r_J = \infty$, тоді добротність

$$Q_3 = \frac{\rho}{r_J + r_k + r_{BH}} = \frac{\rho}{\infty} = 0.$$

Отже, у такому випадку опір генератора на контур не впливає.

3.4.2. Способи зменшення впливу на характеристики контуру

Способи зменшення впливу опору генератора та навантаження на вибірність контуру.

1. Реактивний опір навантаження та генератора можна компенсувати настроюванням контуру $x_{\Gamma} + x_H + x_K = 0$.

2. Вплив генератора на вибірні властивості (добротність) контуру можна зменшити, якщо живити контур за допомогою трансформатора (рис. 3.27 а).

За допомогою еквівалентних перетворень двоконтурну схему (рис. 3.27 а) можна перетворити до одно контурної відносно другого контуру (рис. 3.27 б).

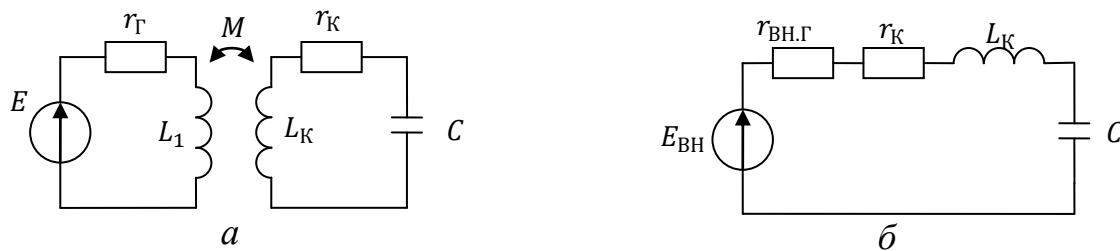


Рисунок 3.27 – Еквівалентні схеми

Внесений активний опір з боку генератора можна знайти зі співвідношення

$$r_{\text{ВН.Г}} = \frac{X_{3\text{В}}^2}{|Z_{11}|^2} \cdot r_{\Gamma} = \frac{(\omega M)^2}{r_{\Gamma}^2 + X_{L1}^2} r_{\Gamma}, \quad X_{3\text{В}} = \omega M.$$

У цьому випадку необхідно підібрати таку величину магнітного зв'язку M , щоб $r_{\text{ВН.Г}} \ll r_{\Gamma}$.

3. Зменшити вплив навантаження можна, підключивши його частково до реактивності.

Для інженерних розрахунків ($R_H \gg \rho$) вводять поняття коефіцієнт включення.

Коефіцієнт включення – це величина, що показує до якої частини реактивності підключений опір навантаження або генератора на резонансній частоті.

Розглянемо часткове включення активного навантаження до ємності (рис. 3.28). Загальний ємнісний опір без врахування опору навантаження

$$X_{C.K} = X_{C.1} + X_{C.2}.$$

Загальна ємність

$$\frac{1}{C_K} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Звідси визначимо еквівалентну ємність

$$C_K = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

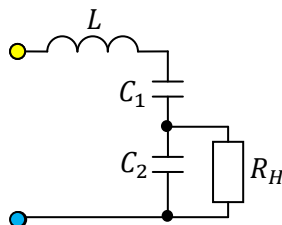


Рисунок 3.28 – Схема

Коефіцієнт включення по навантаженню:

$$p = \frac{X_{C2}}{X_C} = \frac{X_{C2}}{X_{C1} + X_{C2}} = \frac{\frac{1}{\omega C_2}}{\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{\frac{1}{C_2}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{C_2} \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

З іншого боку

$$p = \frac{X_{C2}}{X_C} = \frac{X_{C2}}{\rho}.$$

Звідси визначимо $X_{C2} = p\rho$

Підставимо цей вираз у формулу для внесеного опору

$$r_{BH} = \frac{X_{C2}^2}{R_H} = p^2 \frac{\rho^2}{R_H}$$

Внесений опір менше у порівнянні із безпосереднім підключенням до ємності C_K , оскільки $p < 1$.

Розглянемо часткове включення активного навантаження до індуктивності (рис. 3.29). Загальний індуктивний опір без врахування опору навантаження

$$X_{L,K} = X_{L,1} + X_{L,2}.$$

Загальна індуктивність контуру

$$L_K = L_1 + L_2.$$

Коефіцієнт включення за навантаженням:

$$p = \frac{X_{L2}}{X_L} = \frac{X_{L2}}{X_{L1} + X_{L2}} = \frac{\omega L_2}{\omega L_1 + \omega L_2} = \frac{L_2}{L_1 + L_2}.$$

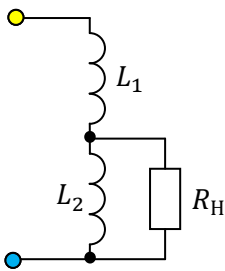


Рисунок 3.29 – Схема

З іншого боку

$$p = \frac{X_{L2}}{X_L} = \frac{X_{L2}}{\rho}.$$

Звідси визначимо

$$X_{L2} = p\rho$$

Підставимо цей вираз у формулу для внесеного опору

$$r_{BH} = \frac{X_{L2}^2}{R_H} = p^2 \frac{\rho^2}{R_H}$$

Внесений опір менше у порівнянні із безпосереднім підключенням до індуктивності L_K , оскільки $p < 1$.

3.4.3. Аналіз напруги на контурі

Розглянемо послідовний контур, до якого підключений генератор із внутрішнім опором r_Γ (рис. 3.30 а).

Визначимо опір контуру через узагальнену розстрочку (рис. 3.30 б)

$$Z_K = r_K(1 + j\xi).$$

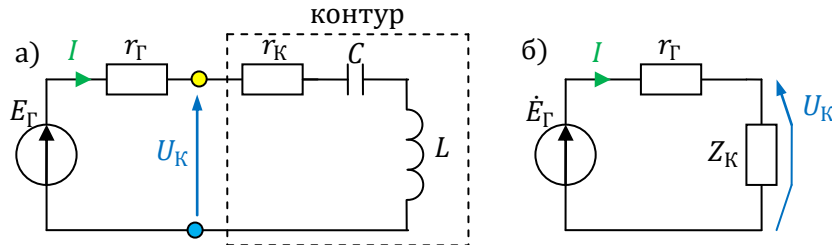
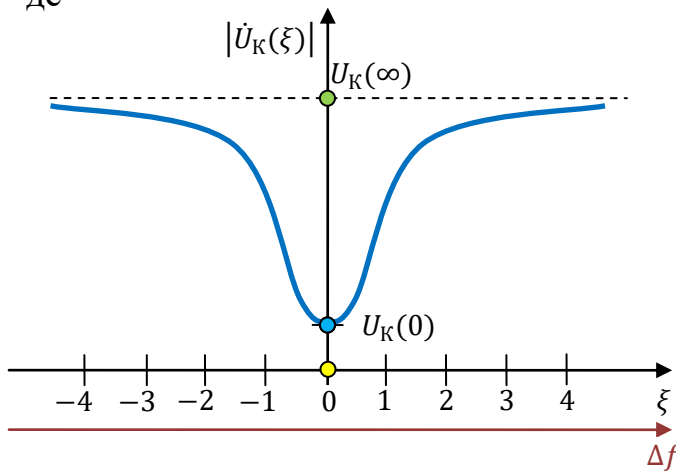


Рисунок 3.30 – Еквівалентні схеми

Напругу на контурі (рис. 2.30 б) визначимо за формулою дільника напруги

$$\dot{U}_K(\xi) = \frac{\dot{E}_\Gamma \cdot Z_K}{r_\Gamma + Z_K} = \frac{\dot{E}_\Gamma \cdot r_K(1 + j\xi)}{r_\Gamma + r_K + j\xi r_K} = \dot{E}_\Gamma \frac{r_K}{r_\Gamma + r_K} \cdot \frac{1 + j\xi}{1 + j \frac{r_K}{r_\Gamma + r_K} \xi} = \dot{E}_\Gamma a \cdot \frac{1 + j\xi}{1 + ja\xi},$$

де



$$\frac{r_K}{r_\Gamma + r_K} = a.$$

Виділимо модуль напруги на контурі (рис. 3.31)

$$|\dot{U}_K(\xi)| = |\dot{E}_\Gamma| a \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\sqrt{1 + (a\xi)^2}}$$

Перерахунок осі

$$\xi = 2Q \frac{\Delta f}{f_0} \rightarrow \Delta f = \frac{\xi \cdot f_0}{2Q}.$$

Рисунок 3.31 – Модуль напруги на контурі

Обчислимо значення напруги на резонансній частоті ($\xi = 0$) та нескінченній частоті ($\xi = \infty$)

$$U_K(0) = |\dot{E}_\Gamma| \cdot a = \frac{E_\Gamma \cdot r_K}{r_\Gamma + r_K}; \quad U_K(\infty) = |\dot{E}_\Gamma| \cdot a \cdot \frac{1}{a} = |\dot{E}_\Gamma|.$$

При переході від ξ до $\Delta\omega$, необхідно пам'ятати, що у виразі для ξ потрібно підставляти добротність Q самого контуру без врахування опору генератора.

3.5. Розрахунок послідовних контурів

Приклад 3.1. У послідовному контурі (рис. 3.32) знайти опір контуру на резонансній частоті, добротність та смугу пропускання контуру. Числові значення елементів кола такі: ємність в нФ, індуктивність в мГн, опір r в Ом, опір R в кОм.

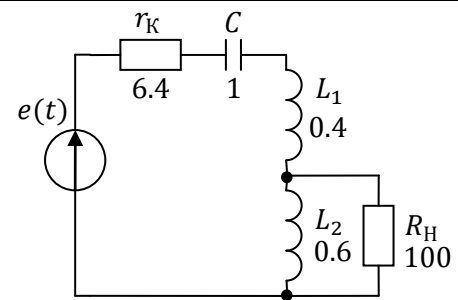


Рисунок 3.32 – Контур

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн, ємність – нФ, частота – рад/мкс.

Еквівалентна індуктивність контуру

$$L_E = L_1 + L_2 = 0.4 + 0.6 = 1 \text{ мГн.}$$

Резонансна частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_E \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 1}} = 1 \frac{\text{рад}}{\text{мкс}} = 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{10^6}{2\pi} = 159.2 \text{ кГц.}$$

Характеристичний опір

$$\rho = \sqrt{\frac{L_E}{C}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \text{ кОм.}$$

Коефіцієнт включення p по навантаженню

$$p = \frac{X_{L2}}{X_{L1} + X_{L2}} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{0.6}{0.4 + 0.6} = 0.6.$$

Еквівалентний опір навантаження, що внесений в контур (рис. 3.33)

$$r_{BH} = p^2 \frac{\rho^2}{R_H} = 0.6^2 \frac{(1 \cdot 10^3)^2}{100 \cdot 10^3} = 3.6 \text{ Ом.}$$

Добротність контуру із урахуванням всіх опорів

$$Q = \frac{\rho}{r_K + r_{BH}} = \frac{1000}{6.4 + 3.6} = \frac{1000}{10} = 100.$$

Опір контуру на резонансній частоті (рис. 3.29)

$$r_{BX} = r_K + r_{BH} = 6.4 + 3.6 = 10 \text{ Ом.}$$

Смуга пропускання контуру

$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{10^6}{100} = 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\Pi_{\text{Гц}} = \frac{f_0}{Q} = \frac{159.2 \cdot 10^3}{100} = 1.59 \text{ кГц.}$$

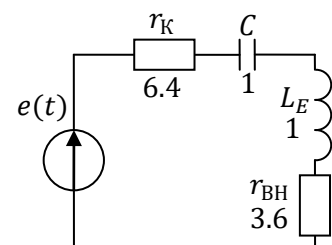


Рисунок 3.33 – Схема контура

Відповідь: $r_{BX} = 10 \text{ Ом}$, $Q = 100$, $\Pi = 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\Pi_{\text{Гц}} = 1.59 \text{ кГц}$.

Приклад 3.2. У контурі (рис. 3.34) знайти значення ємностей C_1 та C_2 . Вхідний опір на резонансній частоті $Z_{BX}(\omega_0) = 40$ Ом. Характеристичний опір $\rho = 2$ кОм. Числові значення елементів такі: r_{Γ} , r_K в Ом, R_H в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн.

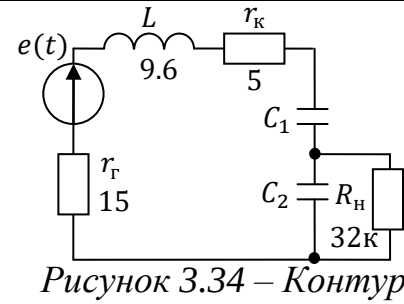


Рисунок 3.34 – Контур

Розв'язання

Вхідний опір контуру на резонансній частоті (рис. 3.35)

$$Z_{BX}(\omega_0) = r_{\Gamma} + r_K + r_{BH}$$

Звідси визначимо

$$r_{BH} = Z_{BX}(\omega_0) - r_{\Gamma} - r_K = 40 - 15 - 5 = 20 \text{ Ом.}$$

З іншого боку

$$r_{BH} = \frac{p^2 \rho^2}{R_H}.$$

Звідси визначимо коефіцієнт включення

$$p = \frac{\sqrt{r_{BH} \cdot R_H}}{\rho} = \frac{\sqrt{20 \cdot 32000}}{2000} = 0.4.$$

Отже,

$$p = \frac{X_{C2}}{X_{C1} + X_{C2}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 0.4$$

Характеристичний опір

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C_E}}.$$

Звідси визначимо

$$C_E = \frac{L}{\rho^2} = \frac{9.6}{2^2} = 2.4 \text{ нФ.}$$

З іншого боку

$$C_E = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot C_2 = 0.4 C_2 = 2.4.$$

Звідси визначимо

$$C_2 = \frac{2.4}{0.4} = 6 \text{ нФ.}$$

Тоді

$$\frac{C_1}{C_1 + 6} = 0.4.$$

Звідси визначимо

$$C_1 = 4 \text{ нФ.}$$

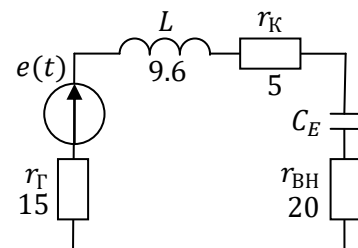


Рисунок 3.35 – Схема контура

Відповідь: $C_1 = 4$ нФ, $C_2 = 6$ нФ.

Приклад 3.3. У контурі (рис. 3.36) на резонансній частоті $f_0 = 160$ кГц визначити напругу U_H . Амплітуда струму у антені на цій частоті є $I_A = 6$ мкА. Числові значення елементів наступні: ємності в нФ, взаємна індуктивність в мкГн, опори r в Ом, опори R в кОм, $L_1 = L_2$.

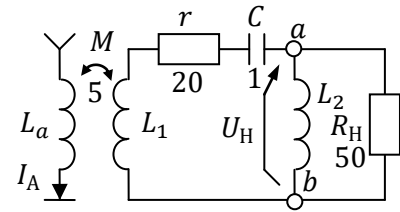


Рисунок 3.36 – Схема

Розв'язання

Знаходимо ЕРС взаємоіндукції, що вноситься в контур (рис. 3.33 а)

$$E_{B3} = I_A X_{3B} = 2\pi f_0 M I_A = 2\pi \cdot 1.6 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ В} = 30 \text{ мкВ}.$$

У результаті схема набуває вигляду (рис. 3.37 а).

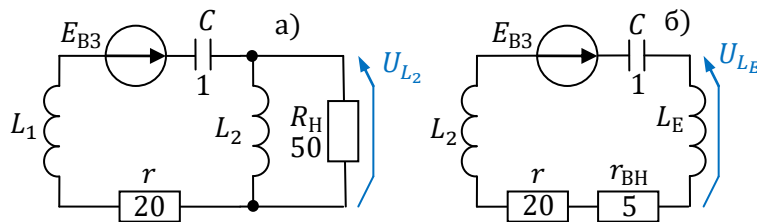


Рисунок 3.37 – Еквівалентні схеми

Характеристичний опір

$$\rho = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{160 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9}} = 10^3 \text{ Ом} = 1 \text{ кОм}.$$

Коефіцієнт включення

$$p = \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{L}{2L} = 0.5.$$

Внесений опір (рис. 3.37 б)

$$r_{BH} = \frac{p^2 \rho^2}{R_H} = \frac{0.5 \cdot 1000^2}{50 \cdot 10^3} = 5 \text{ Ом}.$$

Добротність контуру

$$Q = \frac{\rho}{r + r_{BH}} = \frac{1000}{20 + 5} = 40.$$

З іншого боку добротність для послідовного контуру

$$Q = \frac{U_{LE}}{E_{B3}}.$$

Звідси визначимо напругу на ємності

$$U_{LE} = Q \cdot E_{B3} = 40 \cdot 30 \cdot 10^{-6} = 1.2 \cdot 10^{-3} = 1.2 \text{ мВ}.$$

Напруга на сітці лампи

$$U_H = U_{L_2} = U_{LE} / 2 = 1.2 / 2 = 0.6 \text{ мВ}.$$

Відповідь: $U_H = 0.6$ мВ.

3.6. Паралельний контур канонічного виду

3.6.1. Основні параметри контуру

Паралельний коливальний контур складається із паралельного з'єднання котушки індуктивності та ємності, що підключені паралельно до джерела живлення.

У радіотехніці таке коло називають коливальним контуром паралельного живлення або скорочено паралельним коливальним контуром.

Якщо врахувати власні втрати елементів кола, то еквівалентна схема має вигляд кола, що зображене на рис. 3.38. Таку схему називають канонічною. У такому колі має місце резонанс струмів.

Резонанс струмів – це режим кола (рис. 3.38), коли реактивна провідність кола дорівнює нулю при рівності частоти зовнішньої дії та внутрішньої частоти контуру.

У результаті провідність кола є активна, отже струм на вході та напруга у колі збігаються за фазою. Частота зовнішньої дії визначається частотою генератора або джерела, а внутрішня частота контуру визначається реактивними елементами кола.

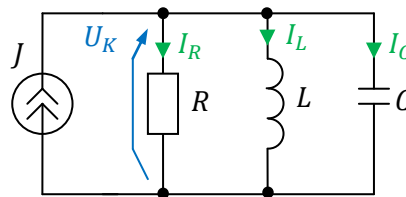


Рисунок 3.38 – Схема канонічного паралельного контуру

Із умови рівності $\Delta\varphi = \varphi_I - \varphi_U = 0$ можна знайти резонансну частоту. При резонансі вхідна провідність контуру чисто дійсна. Із цього випливає, що для знаходження резонансної частоти ω_0 необхідно написати вираз для вхідної провідності, прирівняти до нуля її уявну частину та розв'язати одержане рівняння відносно ω .

Вхідна провідність контуру (рис. 3.38)

$$Y_{\text{ВХ}} = g + Y_L + Y_C = g - jb_L + jb_C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = g + jb$$

Резонанс має місце, коли $b = 0$. Отже, прирівняємо до нуля реактивну вхідну провідність

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0.$$

Звідси визначимо резонансну частоту

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

На резонансній частоті провідність контуру (рис. 3.38) є чисто активна і визначається виразом $Y_{BX}(\omega_0) = g$. Тоді напруга у контурі на резонансній частоті досягає свого максимального значення, оскільки обмежується тільки активною провідністю

$$U_K(0) = J \cdot R = U_K = U_{max}.$$

Отже, із одержаного результату випливає, що напруга та струм на вході контуру збігаються за фазою. А оскільки провідність контуру на резонансній частоті активна, тому і потужність на цій частоті буде активною.

За резонансу струми на реактивних елементах однакові, але мають зсув фаз 180° , тобто протифазні

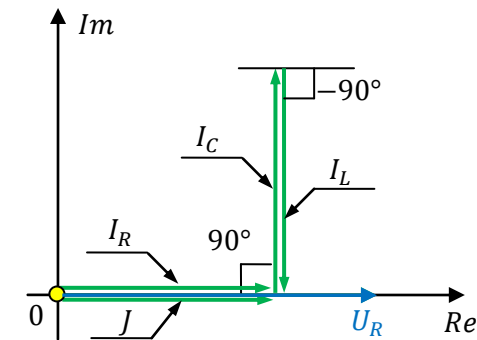


Рисунок 3.39 – Векторна діаграма контуру

За резонансу струми на реактивних елементах однакові, але мають зсув фаз 180° , тобто протифазі

$$|I_L| = |I_C| = U_K b_L = U_K b_C = \frac{U_K}{\rho}.$$

На рис. 3.39 зображена векторна діаграма паралельного контуру на резонансній частоті.

Із рис. 3.39 випливає, що струми на ємності та індуктивності у протифазі, напруга у колі співпадає по фазі із вхідним струмом, а струми на вході і на активному опорі рівні.

Будь-який коливальний контур можна охарактеризувати добротністю.

Добротність паралельного контуру – це відношення струму на індуктивності чи ємності до вхідного струму на резонансній частоті

$$Q = \frac{|I_L|}{I_R} = \frac{|I_C|}{I_R} = \frac{|I_L|}{J} = \frac{|I_C|}{J} = \frac{U_K/\rho}{U_K/R} = \frac{R}{\rho}.$$

Звідси зв'язок між опором та добротністю

$$R = Q \cdot \rho.$$

В реальних колах струм на реактивних елементах може бути набагато більше вхідного струму, що сприяє частотній селекції.

Таким чином, добротність Q показує у скільки разів струм на індуктивності або ємності більше ніж на вході при резонансі

$$|I_C| = |I_L| = Q \cdot J.$$

На резонансній частоті відбувається взаємна компенсація реактивних провідностей та відповідна компенсація струмів у них. Тому резонанс у паралельному контурі можна називати **резонансом струмів**.

У сучасній радіотехніці характеристичний опір контуру складає в середньому декілька сотень Ом, а активний опір паралельного контуру – змінюється від декількох десятків кОм до одиниць МОм.

До первинних параметрів контуру належать такі величини: опір, індуктивність та ємність. Вторинними параметрами контуру є: резонансна частота, характеристичний опір, добротність, смуга пропускання.

Характеристичний опір та смуга пропускання розраховуються аналогічно як і у послідовному контурі.

3.6.2. Графічний аналіз частотних характеристик

Аналізуючи характер рівнянь вхідної провідності, напруги та струмів в контурі, фазових зсувів між ними у випадку гармонічної дії легко побачити, що вони теж залежать від частоти. Ця залежність впливає безпосередньо із залежності провідностей реактивних елементів b_L та b_C від частоти.

Як відомо, ємнісна та індуктивна провідності визначаються

$$b_C = b_C(\omega) = \omega C, \quad b_L = b_L(\omega) = -\frac{1}{\omega L}.$$

При побудові частотної характеристики вхідної провідності $|Y_{BX}(\omega)|$ скористаємося графоаналітичним підходом аналогічно до побудови вхідного опору послідовного контуру. Спочатку будуюмо активну провідність g , реактивну індуктивну b_L та ємнісну b_C провідності, потім загальну реактивну провідність $b = b_L - b_C$. У результаті додавання провідностей g та b одержимо загальну провідність контуру $Y_{BX}(\omega)$, модуль якого і будуюмо $|Y_{BX}(\omega)|$ на рис. 3.40.

$$|Y_{BX}(\omega)| = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2}.$$

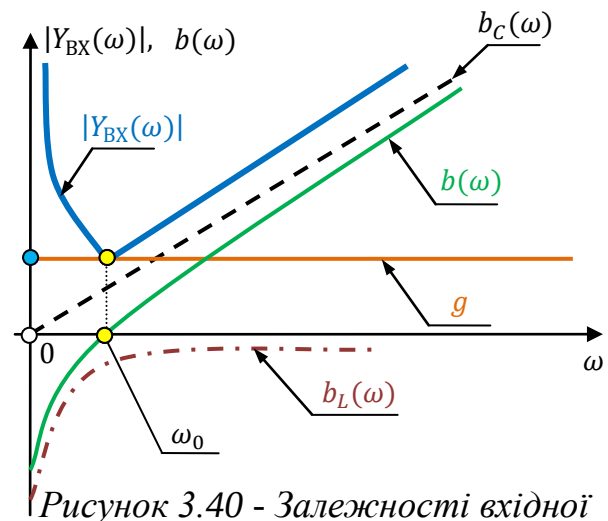


Рисунок 3.40 - Залежності вхідної провідності від частоти

На резонансній частоті ω_0 реактивна індуктивна b_L та ємнісна b_C провідності співпадають, кожна з них дорівнює величині, оберненій до характеристичного опору контуру $1/\rho$, реактивна провідність паралельного контуру $b = 0$, тому його комплексна провідність є суто активною $Y_{BX}(\omega) = g$, що є причиною резонансу.

На нульовій частоті (випадок постійного струму) провідність контуру визначається провідністю індуктивного елементу b_L а на частоті $\omega = \infty$ – провідністю ємнісного елементу b_C , тому на цих частотах вона нескінченно велика.

При збільшенні частоти від нуля до ω_0 ємнісна складова провідності b_C лінійно зростає, а індуктивна складова провідності b_L спадає за гіперболічним законом. При цьому реактивна провідність контуру b має індуктивний характер, тому зменшується як і повна провідність контуру. На частотах $\omega > \omega_0$ реактивна провідність контуру має ємнісний характер. При збільшенні частоти вона монотонно зростає, що є причиною збільшення повної провідності контуру.

Отже вхідна провідність кола

$$Y_{BX}(\omega) = g + j(b_C - b_L) = |Y_{BX}(\omega)|e^{j\varphi_Y(\omega)},$$

$$|Y_{BX}(\omega)| = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2}, \quad \varphi_Y(\omega) = \arctg\left(\frac{b_C - b_L}{g}\right).$$

У результаті одержані модуль $|Y_{BX}(\omega)|$ та аргумент $\varphi_Y(\omega)$ зобразимо їх окремо у вигляді АЧХ (рис. 3.41 а) та ФЧХ (рис. 3.41 б).

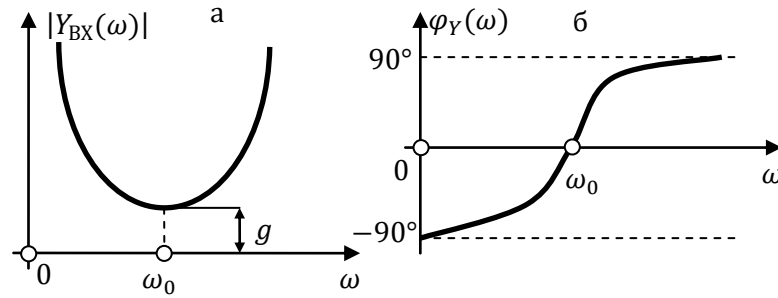


Рисунок 3.41 – Модуль та аргумент вхідного опору

Напряга у контурі (рис. 3.34) за законом Ома

$$U_K(\omega) = \frac{J}{Y_{BX}(\omega)} = \frac{J}{g + j(b_C - b_L)} = \frac{J}{|Y_{BX}(\omega)| e^{j\varphi_Y(\omega)}} = |U_K(\omega)| \cdot e^{j\varphi_U(\omega)}.$$

Модуль $|U_K(\omega)|$ та аргумент $\varphi_U(\omega)$ напруги зображені на рис. 3.42. Як бачимо із графіку, що модуль напруги досягає свого максимального значення на резонансній частоті

$$U_{max} = \frac{J}{g} = J \cdot R.$$

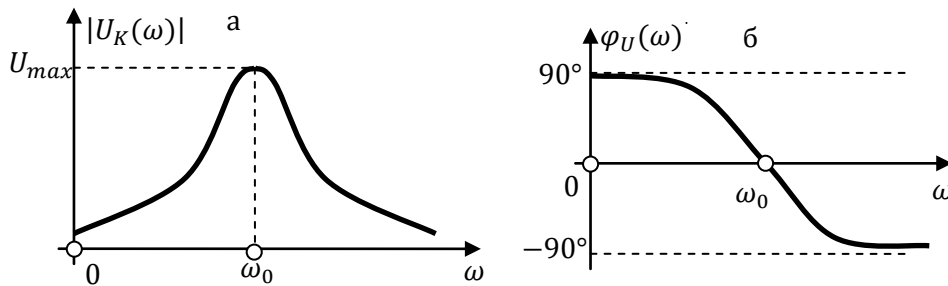


Рисунок 3.42 – Модуль та аргумент напруги на контурі

Модулі струмів на реактивних елементах визначаються законом Ома

$$|I_C(\omega)| = |U_K(\omega)| \cdot b_C = \omega C \cdot |U_K(\omega)|;$$

$$|I_L(\omega)| = |U_K(\omega)| \cdot b_L = \frac{1}{\omega L} \cdot |U_K(\omega)|.$$

На рис. 3.43 наведені залежності модулів струмів в індуктивності та ємності від частоти.

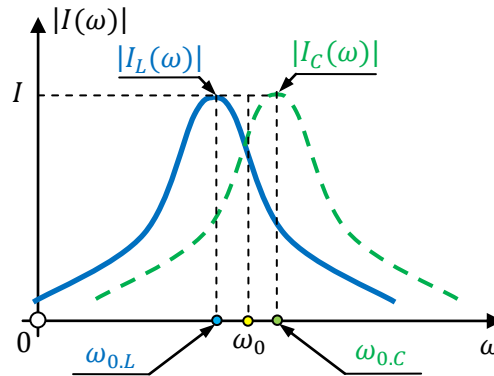


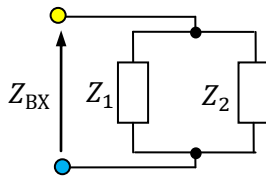
Рисунок 3.43 – Залежності модулів струмів від частоти

Максимальні значення модулів струмів $|I_C(\omega)|$ та $|I_L(\omega)|$ по осі частот є зсунутими за рахунок різних залежностей реактивних провідностей індуктивності b_L та ємності b_C . На практиці цієї різниці майже не видно. Тому прийнято вважати, що в околі резонансної частоти ω_0 модулі струмів на реактивних елементах контуру та модуль напруги у контурі майже однакові за формою і відмінні лише за масштабом.

3.6.3. Вхідний опір та види паралельного контуру

Розглянемо узагальнений випадок паралельного з'єднання гілок (рис. 3.44). Нехай опори гілок визначаються співвідношеннями

$$Z_1 = r_1 + jX_1, Z_2 = r_2 + jX_2.$$



Вхідний опір кола (рис. 3.34)

$$Z_{BX} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(r_1 + jX_1) \cdot (r_2 + jX_2)}{r_1 + jX_1 + r_2 + jX_2}.$$

Рисунок 3.44 – Ко-
нтур

В радіоелектроніці використовують високочастотні контури, тому для інженерних розрахунків виконується умова $X \gg r$. У результаті вираз вхідного опору спроститься:

$$Z_{BX} = \frac{jX_1 \cdot (-jX_2)}{r_1 + jX_1 + r_2 - jX_2} \bigg|_{r_{\Sigma}=r_1+r_2} = \frac{X_1 \cdot X_2}{r_{\Sigma} + j(X_1 - X_2)} = \frac{X_1 \cdot X_2}{r_{\Sigma} + jX}.$$

Для того, щоб у контурі був резонанс потрібно, щоб реактивні опори були різних знаків, тобто один із них буде ємнісним, а інший індуктивним

$$Z_{BX} = \frac{\omega L \cdot \frac{1}{\omega C}}{r_{\Sigma} + jX} = \frac{\frac{L}{C}}{r_{\Sigma}(1 + j\frac{X}{r_{\Sigma}})} = \frac{\rho^2}{r_{\Sigma}(1 + j\xi)} \Big|_{\rho/r_{\Sigma}=Q} = \frac{Q\rho}{1 + j\xi} = \frac{R_E}{1 + j\xi}.$$

Раніше було визначено, що $R_E = Q \cdot \rho$, де R_E – це активний еквівалентний опір паралельного контуру на резонансній частоті.

Вираз у знаменнику можна трактувати як опір послідовного контуру

$$Z_{BX.ПОСЛ} = r_{\Sigma}(1 + j\xi).$$

Отже, остаточно одержимо вираз вхідного опору паралельного контуру:

$$Z_{BX.ПАР}(\xi) = \frac{R_E}{1 + j\xi} = \frac{R_E}{Z_{BX.ПОСЛ}} = |Z_{BX.ПАР}(\xi)| \cdot e^{j\varphi_Z(\xi)}.$$

Виділимо модуль та аргумент вхідного опору (рис. 3.41)

$$|Z_{BX.ПАР}(\xi)| = \frac{R_E}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \varphi_Z(\xi) = -\arctg(\xi).$$

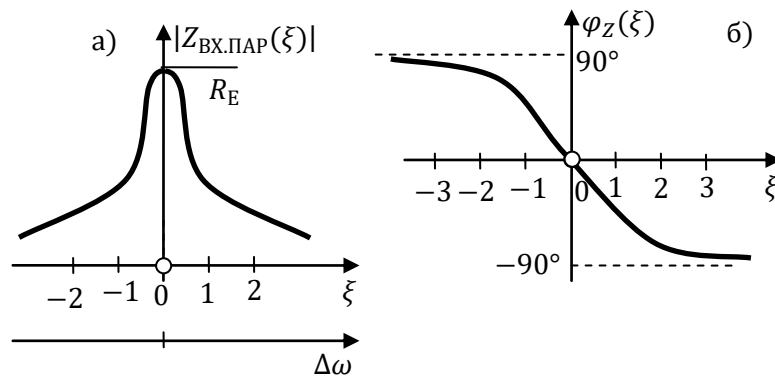


Рисунок 3.45 – Модуль та аргумент вхідного опору паралельного контуру

Із графіків (рис. 3.45) бачимо, що на резонансній частоті вхідний опір паралельного контуру має чисто активний характер і на резонансній частоті АЧХ досягає свого максимального значення R_E при $\xi = 0$, тобто на резонансній частоті, фаза при цьому дорівнює нулю. Крива АЧХ вхідного опору зменшується від свого максимального значення до значень, які обмежуються активними опорами гілок.

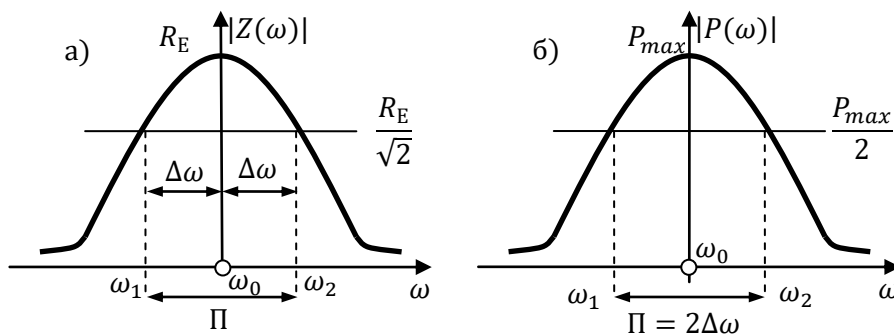


Рисунок 3.46 – Визначення смуги пропускання

За АЧХ вхідного опору можна визначити смугу пропускання, якщо паралельно осі ξ провести пряму за рівнем $\frac{R_E}{\sqrt{2}}$ на графіку АЧХ (рис. 3.46)

$$\Pi = \omega_2 - \omega_1 = 2\Delta\omega.$$

Аналогічно можна перейти від осі ξ до осі $\Delta\omega$ або Δf за формулами

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q}\xi, \quad \Delta f = \frac{f_0}{2Q}\xi.$$

Визначимо частотні залежності активної і реактивної складових вхідного опору паралельного контуру

$$Z_{\text{ВХ.ПАР}}(\xi) = \frac{R_E}{1 + j\xi} = \frac{R_E}{1 + j\xi} \cdot \frac{1 - j\xi}{1 - j\xi} = \frac{R_E}{1 + \xi^2} - j \frac{R_E \cdot \xi}{1 + \xi^2} = R_{\text{ВХ}}(\xi) - jX_{\text{ВХ}}(\xi),$$

де

$$R_{\text{ВХ}}(\xi) = \frac{R_E}{1 + \xi^2}; \quad X_{\text{ВХ}}(\xi) = -\frac{R_E \cdot \xi}{1 + \xi^2}.$$

Графіки залежностей $|Z_{\text{ВХ.ПАР}}(\xi)|$, $R_{\text{ВХ}}(\xi)$, $X_{\text{ВХ}}(\xi)$ зображені на рис. 3.47.

Визначимо екстремуми функції реактивної складової вхідного опору

$$\frac{dX_{\text{ВХ}}(\xi)}{d\xi} = \frac{-R_E \cdot (1 + \xi^2) + R_E \xi (2\xi)}{(1 + \xi^2)^2} = R_E \frac{\xi^2 - 1}{(1 + \xi^2)^2} = 0.$$

Звідси визначимо, що $\xi = \pm 1$, тоді максимальне значення функції буде визначатися

$$X_{\text{ВХ.мах}} = X_{\text{ВХ}}(\xi = \pm 1) = -\frac{R_E \cdot (\pm 1)}{1 + (\pm 1)^2} = \mp 0.5R_E.$$

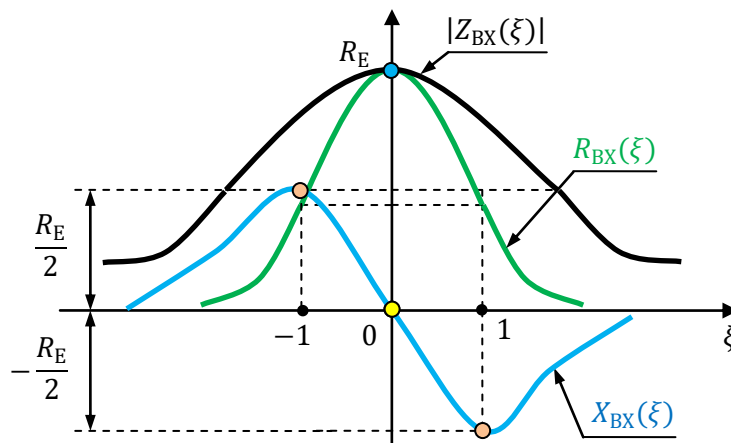


Рисунок 3.47 – Залежності модуля вхідного опору, його дійсної та уявної складової від узагальненої розстройки

Із графіка реактивної складової вхідного опору (рис. 3.47) бачимо, що при $\xi < 0$ опір $X_{\text{ВХ}} > 0$, а отже його характер визначає індуктивна гілка; при $\xi > 0$ опір $X_{\text{ВХ}} < 0$, а отже його характер визначає ємнісна гілка.

3.6.4. Види паралельних контурів

Залежно від характеру реактивних опорів X_1 та X_2 розрізняють три основних види паралельного коливального контуру (рис. 3.48).

Контур першого виду – це контур, у якого ємність та індуктивність знаходяться в різних гілках (рис. 3.48 а)

Контур другого виду – це контур, у якого індуктивність розподілена між двома гілками (рис. 3.48 б).

Контур третього виду – це контур, у якого ємність розподілена між двома гілками (рис. 3.48 в).

Паралельні коливальні контури бувають трьох видів (рис. 3.48).

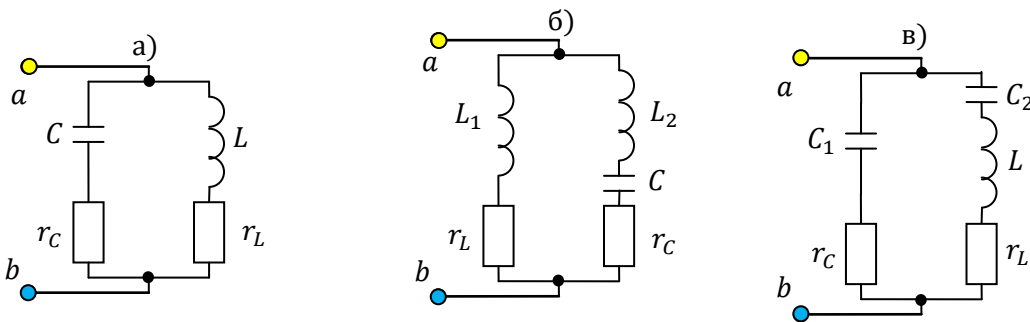


Рисунок 3.48 – Види паралельних контурів

Контури другого та третього виду використовують, щоб зменшити вплив генератора на параметри контуру (смугу пропускання, добротність).

3.7. Паралельний контур першого виду

3.7.1. Точне значення резонансної частоти

Зазвичай ідеальних L та C немає, тому завжди є опір втрату гілках r_L, r_C (рис. 3.49).

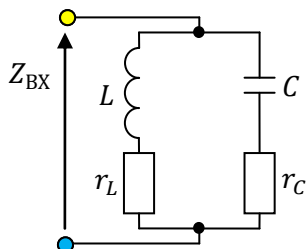


Рисунок 3.49 – Кон-
тур

Перерахуємо послідовну гілку в паралельну:

$$Y_{BX} = \frac{1}{R \pm jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} \pm j \frac{X}{R^2 + X^2} = g + jb,$$

$$g = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad b = \frac{X}{R^2 + X^2}.$$

Умовою резонансу є $b_L = b_C$,

$$\frac{X_L}{r_L^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{r_C^2 + X_C^2}.$$

Підставимо замість реактивних провідностей їх значення та спростимо

$$\frac{\omega L}{r_L^2 + (\omega L)^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{r_C^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} = \frac{\omega C}{r_C^2 (\omega C)^2 + 1}.$$

Далі перемножимо та згрупуємо вирази:

$$L + Lr_C^2 (\omega C)^2 = Cr_L^2 + C(\omega L)^2,$$

$$L - Cr_L^2 = \omega^2 CL(L - Cr_C^2).$$

Визначимо резонансну частоту:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} \sqrt{\frac{L - Cr_L^2}{L - Cr_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{CL}} \sqrt{\frac{C(\frac{L}{C} - r_L^2)}{C(\frac{L}{C} - r_C^2)}} = \frac{1}{\sqrt{CL}} \sqrt{\frac{\rho^2 - r_L^2}{\rho^2 - r_C^2}}.$$

Остаточне одержимо точну формулу для розрахунку резонансної частоти

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \sqrt{\frac{\rho^2 - r_L^2}{\rho^2 - r_C^2}}.$$

Проаналізуємо одержану формулу. Із формули випливає, що якщо $\rho < r_C$ або $\rho < r_L$, то під коренем одержимо комплексне число, а отже контур у резонанс налаштувати неможливо. Якщо $r_C = r_L = \rho$, то резонанс буде спостерігатися на всіх частотах.

При $r_C = r_L$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$
При $r_L = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - r_C^2}}.$
При $r_C = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \frac{\sqrt{\rho^2 - r_L^2}}{\rho}.$

3.7.2. Передавальні характеристики

Оскільки у паралельному коливальному контурі має місце резонанс струмів, то у якості передавальних характеристик розглянемо коефіцієнт передачі за струмом. У загальному випадку коефіцієнт передачі показує яка частина сигналу пройшла з однієї частини схеми у іншу.

Для схеми паралельного контуру (рис. 3.50) можна виділити коефіцієнти передачі у гілках із індуктивністю $\dot{K}_{I_L}$ та ємністю $\dot{K}_{I_C}$.

Напруга на контурі через узагальнену розстройку

$$\dot{U}_K(\xi) = \dot{I}_K \cdot Z_K = \frac{\dot{I}_K \cdot R_E}{1 + j\xi} = \frac{\dot{I}_K \cdot Q\rho}{1 + j\xi}.$$

Для інженерних розрахунків завжди виконується співвідношення $X_L \gg r_L$ та $X_C \gg r_C$, тоді вираз для струмів спрощується.

Струми у колі

$$\begin{aligned} \dot{I}_L &= \frac{\dot{U}_K}{r_L + jX_L} \Big|_{X_L \gg r_L} \cong \frac{\dot{U}_K}{jX_L} = \frac{\dot{I}_K \cdot Q\rho}{1 + j\xi} \cdot \frac{1}{j\omega L} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{\dot{I}_K \cdot Q\rho}{1 + j\xi} \cdot \frac{1}{j\omega_0 L} \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \Big|_{\omega_0 L = \rho} = \\ &= -j \frac{\dot{I}_K \cdot Q\rho}{1 + j\xi} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\omega_0}{\omega} = -j \dot{I}_K Q \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{1}{1 + j\xi} = -j \dot{I}_K Q \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \dot{\eta}(\xi); \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_K}{r_C - jX_C} \Big|_{X_C \gg r_C} \cong \frac{\dot{U}_K}{-jX_C} = j \frac{\dot{I}_K \cdot Q\rho}{1 + j\xi} \cdot \omega C \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0} = j \frac{\dot{I}_K \cdot Q\rho}{1 + j\xi} \cdot \omega_0 C \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \Big|_{\frac{1}{\omega_0 C} = \rho} = \\ &= j \frac{\dot{I}_K \cdot Q\rho}{1 + j\xi} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = j \dot{I}_K Q \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 + j\xi} = j \dot{I}_K Q \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \dot{\eta}(\xi); \\ \dot{\eta}(\xi) &= \frac{1}{1 + j\xi}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти передачі за струмом

$$\begin{aligned} \dot{K}_{I_L} &= \frac{\dot{I}_L}{\dot{I}_K} = -jQ \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \dot{\eta}(\xi); \\ \dot{K}_{I_C} &= \frac{\dot{I}_C}{\dot{I}_K} = jQ \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \dot{\eta}(\xi). \end{aligned}$$

Із виразів одержаних для коефіцієнтів передачі за струмом бачимо, що амплітуда струму у гілках в Q раз більше, ніж амплітуда струму, що входить у контур.

Струми у гілках практично протифазні, тому резонанс у такому колі називають **резонансом струмів**.

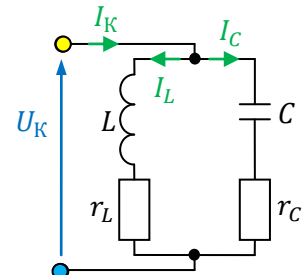


Рисунок 3.50 –
Струми у контурі

Для побудови векторної діаграми струмів та напруг визначимо напруги на елементах за законом Ома

$$\begin{aligned}\dot{U}_L &= \dot{I}_L \cdot jX_L = \dot{I}_L \cdot j\rho = \dot{I}_L \cdot \rho \cdot e^{j90^\circ}; \\ \dot{U}_C &= \dot{I}_C \cdot (-jX_C) = \dot{I}_C \cdot (-j\rho) = \dot{I}_C \cdot \rho \cdot e^{-j90^\circ}; \\ \dot{U}_{r_L} &= \dot{I}_L \cdot r_L; \quad \dot{U}_{r_C} = \dot{I}_C \cdot r_C; \quad \dot{U}_K = \dot{I}_K \cdot R_E.\end{aligned}$$

Струм в контурі за першим законом Кірхгофа

$$\dot{I}_K = \dot{I}_L + \dot{I}_C.$$

Для побудови векторної діаграми будемо вважати, що початкова фаза напруги на контурі $\dot{U}_K$ дорівнює нулю (рис. 3.51).

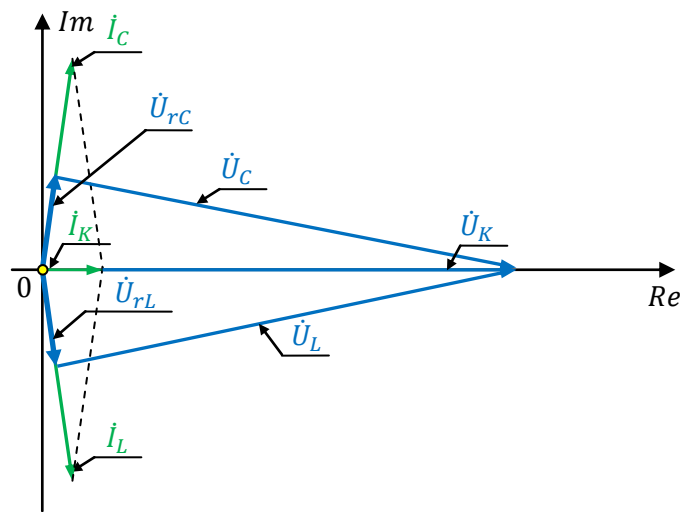


Рисунок 3.51 – Векторна діаграма струмів та напруг паралельного контуру першого виду

Діаграма побудована для випадку, коли у контурі є втрати ($r_L \neq 0, r_C \neq 0$). При цьому кути векторів струмів $\dot{I}_L$ та $\dot{I}_C$ наближаються до значення 90° , але не дорівнюють йому. Загальний струм $\dot{I}_K$ малий за величиною і співпадає за фазою з прикладеною до контура напругою $\dot{U}_K$, причому початкова фаза струму обернена нульовою. Оскільки зсув фази між напругою та струмом на вході кола дорівнює нулю, то еквівалентний опір контура має активний характер.

На резонансній частоті $|\dot{I}_L| \approx |\dot{I}_C|$, $\dot{I}_K = Q \cdot \dot{I}_L = Q \cdot \dot{I}_C$. Отже, на резонансній частоті струм у гілці перевищує вхідний струм у Q разів.

При резонансі струмів за фазою збігаються струм загальної гілки та напруга на паралельній ділянці. А це можливе, коли реактивний вхідний опір, або реактивна вхідна провідність дорівнює нулю.

3.7.3. Живлення контуру

Для живлення паралельного коливального контуру паралельно до контуру включають джерело струму (рис. 3.52 а) або генератор у вигляді джерела напруги із внутрішнім опором (рис. 3.52 б).

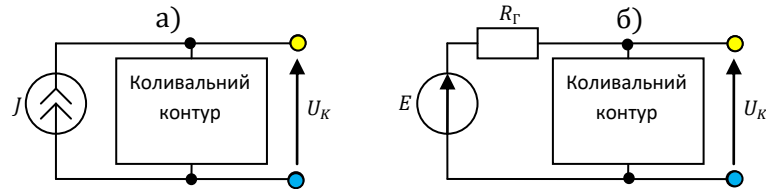


Рисунок 3.52 – Схеми живлення контуру

Напруга на контурі визначається виразом

$$\dot{U}_K = \dot{I}_K \cdot Z_K = \frac{E}{R_\Gamma} \cdot \frac{Q\rho}{1 + j\xi} = \frac{JQ\rho}{1 + j\xi}.$$

У контурі (рис. 3.53) врахуємо вплив генератора на коливальний контур.

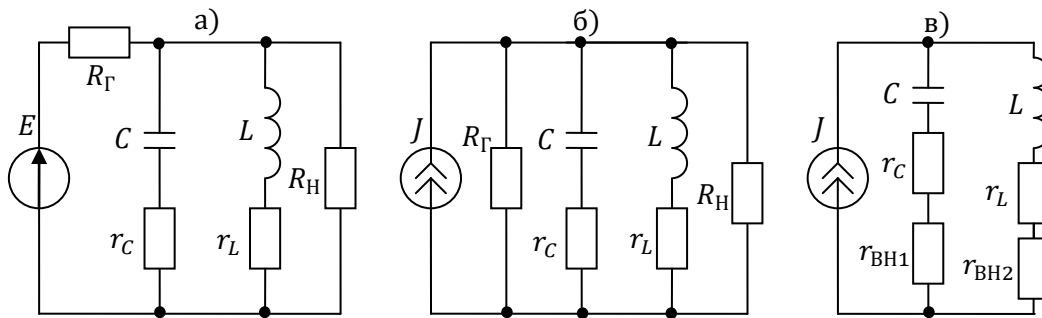


Рисунок 3.53 – Еквівалентні схеми

Добротність контуру без урахування внесених опорів (рис. 3.52 а)

$$Q_1 = \frac{\rho}{r_L + r_C}.$$

У колі (рис. 3.53 а) перетворимо джерело напруги на джерело струму (рис. 3.53 б). У результаті одержимо, що опір R_Γ підключений паралельно до схеми. Внесемо цей опір у коло та визначимо внесений опір:

$$r_{BH1} = \frac{\rho^2}{R_\Gamma} = \frac{X_L^2}{R_\Gamma} = \frac{X_C^2}{R_\Gamma}.$$

Добротність контуру із урахуванням внесеного опору з боку генератора:

$$Q_2 = \frac{\rho}{r_L + r_C + r_{BH1}}.$$

Із виразів видно, що $Q_1 > Q_2$.

Смуга пропускання визначається виразом

$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Отже, опір генератора зменшує добротність контуру, і тим самим розширює смугу пропускання контуру.

Внесений опір з боку навантаження

$$r_{\text{ВН.2}} = \frac{\rho^2}{R_H}$$

Добротність контуру із урахуванням внесених опорів з боку генератора та навантаження

$$Q_3 = \frac{\rho}{r_L + r_C + r_{\text{ВН.1}} + r_{\text{ВН.2}}}.$$

Як бачимо із виразів для добротності, то добротність Q_3 найменша, а смуга пропускання у цьому випадку найбільша. Зобразимо резонансні криві напруги на контурі для трьох добротностей Q_1, Q_2, Q_3 (рис. 3.54).

Із графіку бачимо, що $Q_1 > Q_2 > Q_3$, відповідно $\Pi_3 > \Pi_2 > \Pi_1$. Проаналізувавши графік можна зробити висновок, що найбільша смуга Π_3 для найменшої добротності Q_3 , тобто коли коливальний контур має опір навантаження.

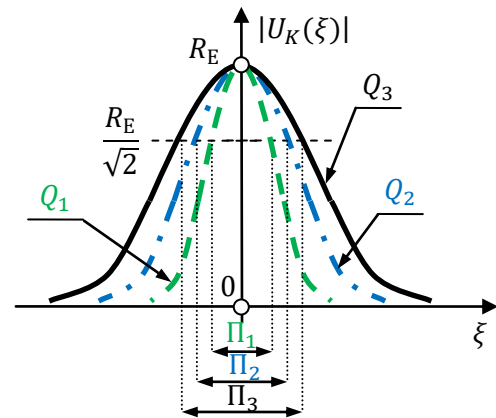


Рисунок 3.54 – Порівняння смуг

Якщо опір джерела буде підключений послідовно із джерелом струму (рис. 3.55), то його враховувати непотрібно, оскільки внутрішній опір джерела струму є нескінченність, і у такому разі внесений опір буде

$$r_{\text{ВН}} = \frac{\rho^2}{r_i + R_\Gamma} = \frac{\rho^2}{\infty + R_\Gamma} = \frac{\rho^2}{\infty} = 0.$$

Із виразу бачимо, що такий опір не впливає на контур, оскільки дорівнює нулю.

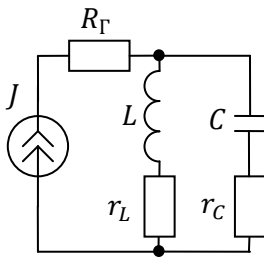


Рисунок 3.55 – Схема контуру першого виду

3.7.4. Напруги на контурі

Розглянемо паралельний контур, до якого підключений генератор із внутрішнім опором R_Γ (рис. 3.56 а).

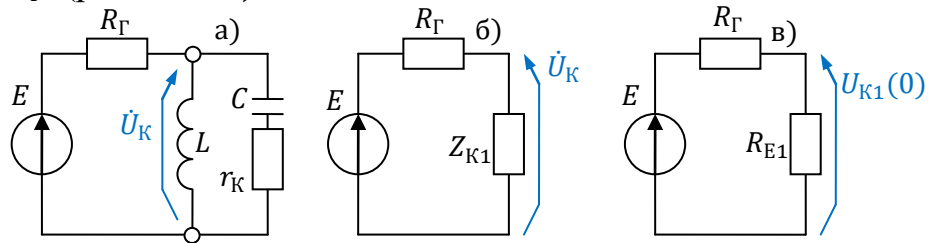


Рисунок 3.56 – Еквівалентні схеми

Напруга на контурі (рис. 3.53 б) за формулою дільника напруги

$$\dot{U}_K(\xi) = \frac{E \cdot Z_{K1}(\xi)}{R_\Gamma + Z_{K1}(\xi)}.$$

Опір контуру через узагальнену розстройку

$$Z_{K1}(\xi) = \frac{R_{E1}}{1 + j\xi}, \quad R_{E1} = \rho \cdot Q_1 = \frac{\rho^2}{r_K}.$$

Оскільки опір контуру на резонансній частоті активний, то зобразивши коло (рис. 3.53 б) на резонансній частоті (рис. 3.53 в), визначимо напругу контуру на резонансній частоті за формулою дільника напруги

$$U_{K1}(0) = \frac{E \cdot R_{E1}}{R_\Gamma + R_{E1}} = \frac{E \cdot \frac{\rho^2}{r_K}}{R_\Gamma + \frac{\rho^2}{r_K}} = \frac{E \cdot \rho^2}{R_\Gamma r_K + \rho^2}.$$

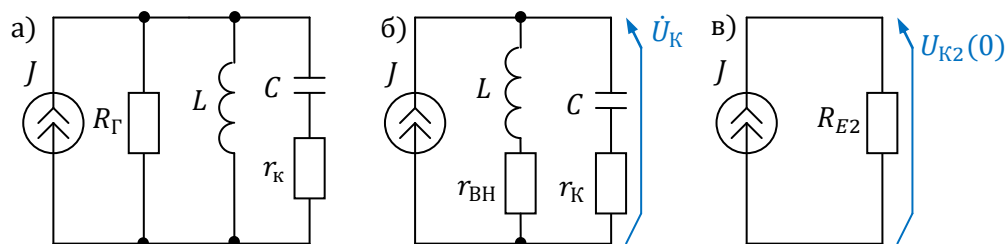


Рисунок 3.57 – Еквівалентні схеми

У колі (рис. 3.58 а) перетворимо джерело напруги в джерело струму (рис. 3.54 а)

$$J = \frac{E}{R_\Gamma}.$$

У колі (рис. 3.54 а) опір генератора внесемо в контур (рис. 3.54 б)

$$r_{\text{BH}} = \frac{\rho^2}{R_{\Gamma}}.$$

У колі (рис. 3.54 б) за законом Ома

$$\dot{U}_K(\xi) = J \cdot Z_{K2} = \frac{J \cdot R_{E2}}{1 + j\xi} = \frac{U_{K2}}{1 + j\xi},$$

$$R_{E2} = \rho \cdot Q_2 = \frac{\rho^2}{r_K + r_{\text{BH}}}.$$

Модуль (амплітуда) напруги на контурі (рис. 3.58)

$$|\dot{U}_K(\xi)| = \frac{U_{K2}}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

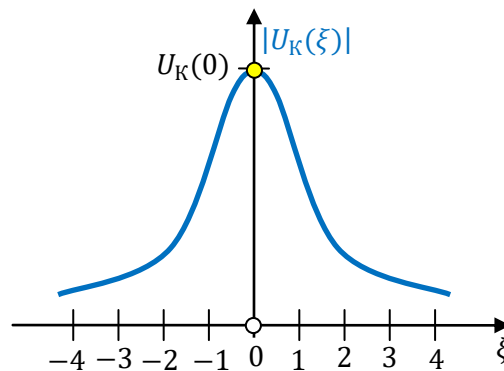


Рисунок 3.58 – Залежність модуля напруги на контурі

При переході від ξ до $\Delta\omega$, необхідно пам'ятати, що у виразі для ξ потрібно підставляти добротність Q самого контуру без врахування опору генератора.

Максимальне значення напруги на контурі (рис. 3.54 в) за законом Ома

$$\begin{aligned} U_{K2}(0) = J \cdot R_{E2} &= \frac{E}{R_{\Gamma}} \cdot \frac{\rho^2}{r_K + r_{\text{BH}}} \bigg|_{r_{\text{BH}} = \frac{\rho^2}{R_{\Gamma}}} = \frac{E}{R_{\Gamma}} \cdot \frac{\rho^2}{r_K + \frac{\rho^2}{R_{\Gamma}}} = \\ &= \frac{E \cdot \rho^2}{R_{\Gamma} r_K + \rho^2}. \end{aligned}$$

Як ми бачимо, то $U_{K1}(0) = U_{K2}(0) = U_K(0)$.

3.8. Паралельний контур другого виду

3.8.1. Вхідний опір контуру

Розглянемо паралельний коливальний контур другого виду, тобто коли генератор підключений до частини індуктивності (рис. 3.59).

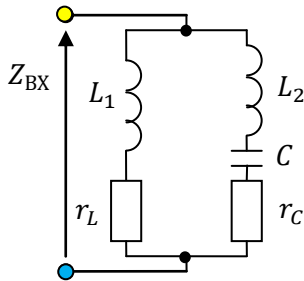


Рисунок 3.59 – Контур 2-го виду

Оскільки вхідні клеми розбивають індуктивність на дві частини, то тут справа йде про часткове включення з боку генератора.

Коефіцієнт включення для цієї схеми

$$p = \frac{X_{L_1}}{X_{L_1} + X_{L_2}} = \frac{\omega L_1}{\omega L_1 + \omega L_2} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

Характеристичний опір контуру

$$\rho = \omega_0 L = \omega_0 (L_1 + L_2) = X_{L_1} + X_{L_2} = X_L.$$

Отже, з іншого боку коефіцієнт включення

$$p = \frac{X_{L_1}}{X_{L_1} + X_{L_2}} = \frac{X_{L_1}}{X_L} = \frac{X_{L_1}}{\rho}.$$

Виразимо із одержаного виразу індуктивний опір

$$X_{L_1} = p\rho.$$

Коефіцієнт включення p показує у якій пропорції розділили індуктивності на частини між гілками.

У паралельному коливальному контурі другого виду окрім резонансу відносно зовнішніх затисків $\omega_{\text{ПАР}}$ може виникнути резонанс у другій гілці $\omega_{\text{ПОС}}$, де послідовно з'єднані індуктивність L_2 та ємність C . Резонансні частоти при цьому визначаються

$$\omega_{\text{ПАР}} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) \cdot C}}, \quad \omega_{\text{ПОС}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 \cdot C}}.$$

На резонансній частоті

$$X_1 = X_2 \approx X_{L_1} = p\rho.$$

Вхідний опір такого кола

$$Z_{\text{ВХ.ПАР.2}} = \frac{X_1 \cdot X_2}{r_{\Sigma}(1 + j\xi)} \Big|_{X_1=X_2} = \frac{p\rho \cdot p\rho}{r_{\Sigma}(1 + j\xi)} = \frac{\rho}{r_{\Sigma}} \frac{p^2 \cdot \rho}{(1 + j\xi)} \Big|_{Q=\frac{\rho}{r_{\Sigma}}} = \frac{p^2 Q \cdot \rho}{(1 + j\xi)},$$

де $r_{\Sigma} = r_L + r_C$ є сумарний опір втрат контуру.

Раніше було визначено, що $R_E = Q \cdot \rho$, що R_E – це активний еквівалентний опір паралельного коливального контура на резонансній частоті.

У результаті вхідний опір паралельного контуру

$$Z_{\text{ВХ.ПАР.2}} = \frac{p^2 Q \cdot \rho}{(1 + j\xi)} = \frac{p^2 R_E}{(1 + j\xi)} = \frac{R_{E2}}{(1 + j\xi)} = p^2 \cdot Z_{\text{ВХ.ПАР.1}}.$$

де R_{E2} – це активний еквівалентний опір паралельного контура другого виду на резонансній частоті.

Оскільки $p < 1$ завжди, то $Z_{\text{ВХ.ПАР.2}} < Z_{\text{ВХ.ПАР.1}}$ на резонансній частоті. Побудуємо АЧХ та ФЧХ вхідного опору.

Побудуємо АЧХ та ФЧХ вхідного опору (рис. 3.60).

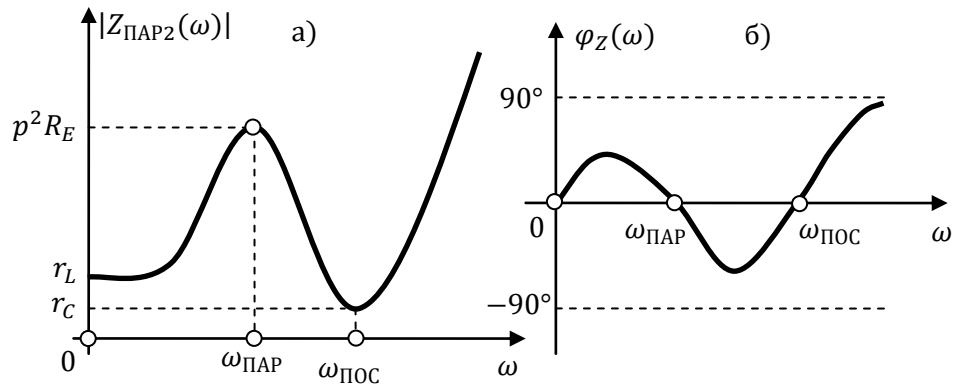


Рисунок 3.60 – Модуль та аргумент вхідного опору

Якщо контур без втрат, тобто $r_L = 0$, $r_C = 0$, то зобразимо АЧХ та ФЧХ вхідного опору (рис. 3.61).

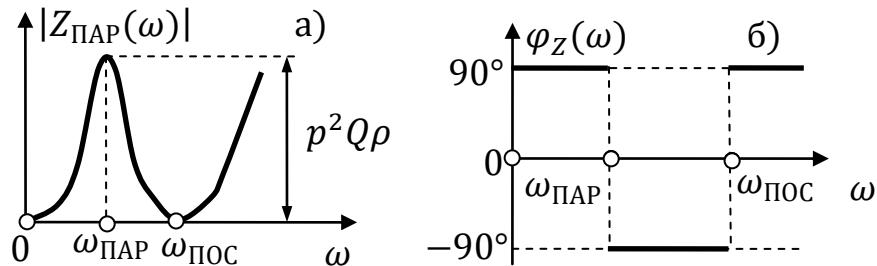


Рисунок 3.61 – Модуль та аргумент вхідного опору контура без втрат

При побудові у MathCAD модуля та аргументу вхідного опору контуру другого вигляду із параметрами елементів кола: $L_1 = 0.2$ мГн, $C = 1$ нФ, $L_2 = 0.8$ мГн, $r_C = 10$ Ом, $r_L = 40$ Ом, $p = 0.2$ одержимо графіки, що зображені на рис. 3.59.

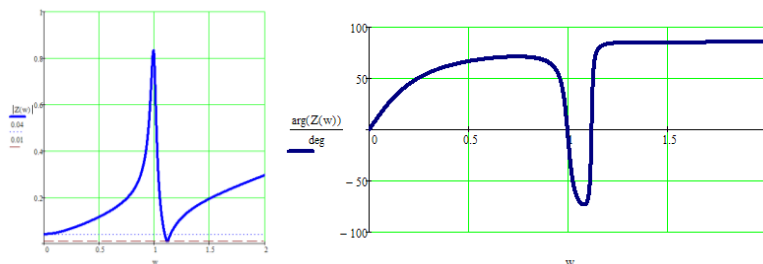
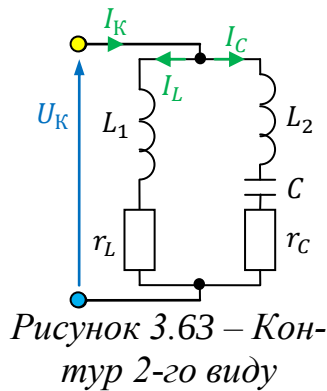


Рисунок 3.62 – Модуль та аргумент контуру

На постійному струмі вхідний опір кола (рис. 3.59) еквівалентний опору r_L , з якого і починається модуль вхідного опору (рис. 3.61), на частоті $\omega_{\text{ПАР}}$ опір наближається до вхідного опору паралельного контуру $p^2 Q_X \cdot \rho$, а на частоті $\omega_{\text{ПОС}}$ має місце резонанс у другій гілці кола, тому опір дорівнює r_C .

3.8.2. Струми у контурі



Напруга на контурі (рис. 3.63) за законом Ома

$$\dot{U}_K = \dot{I}_K \cdot Z_K = \dot{I}_K \cdot \frac{p^2 Q \rho}{1 + j\xi}.$$

Для інженерних розрахунків радіотехнічних кіл завжди виконується співвідношення $x_L \gg r_L$, $x_C \gg r_C$.

У такому випадку $X_{L1} \approx X_2 = p\rho$

Реактивний опір другої гілки повинен бути від'ємним, оскільки для резонансу він має бути ємнісного характеру

$$X_2 = X_{L2} - X_C < 0.$$

Струми у гілках

$$\dot{I}_L(\xi) = \frac{\dot{U}_K}{r_L + jX_{L1}} \Big|_{x_{L1} \gg r_L} \cong \frac{\dot{U}_K}{jX_{L1}} = \dot{I}_K \cdot \frac{p^2 Q \rho}{1 + j\xi} \cdot \frac{1}{jp\rho} = -j\dot{I}_K \cdot \frac{pQ}{1 + j\xi};$$

$$\dot{I}_C(\xi) = \frac{\dot{U}_K}{r_C + jX_2} \Big|_{x_2 \gg r_C} \cong \frac{\dot{U}_K}{-jX_2} = j\dot{I}_K \cdot \frac{p^2 Q \rho}{1 + j\xi} \cdot \frac{1}{p\rho} = j\dot{I}_K \cdot \frac{pQ}{1 + j\xi}.$$

Тоді струми у гілках на резонансній частоті, де $\xi = 0$ прийме значення:

$$\dot{I}_L(\xi = 0) = -j\dot{I}_K \cdot pQ; \quad \dot{I}_C(\xi = 0) = j\dot{I}_K \cdot pQ.$$

Отже, амплітуда струму у гілках в pQ разів більше амплітуди на індуктивності та ємності на резонансній частоті

$$|\dot{I}_L| = |\dot{I}_C| = \dot{I}_K \cdot pQ.$$

Побудуємо векторну діаграму (рис. 3.64). При побудові необхідно враховувати таке. Якщо поворот кута визначається проти годинникової стрілки, то $\varphi > 0$ (струм відстає від напруги), інакше – $\varphi < 0$ (струм випереджає напругу). А якщо поворот визначається за годинником стрілкою, то все визначається навпаки. При побудові векторної діаграми вважаємо, що $\varphi_{UK} = 0$.

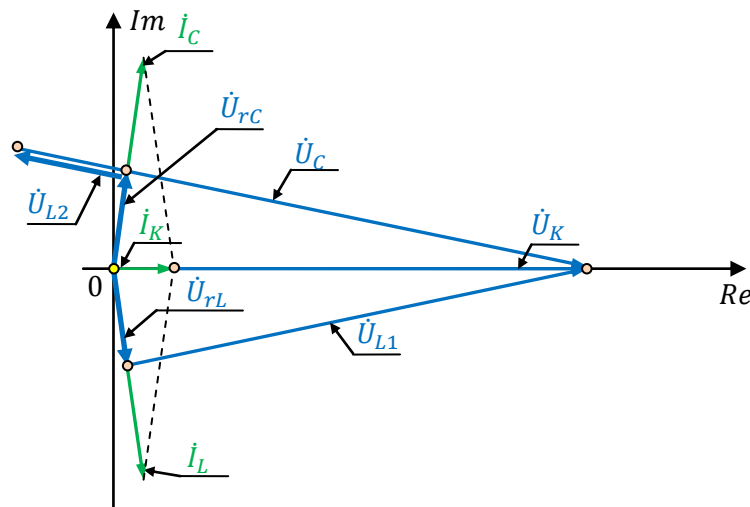


Рисунок 3.64 – Векторна діаграма

Спочатку будуюмо вектори напруги $\dot{U}_K$, $\dot{U}_{r_L}$ та $\dot{U}_{r_C}$. Після відкладаємо напруги на реактивних елементах, які відповідно опережають та відстають від струмів гілок в залежності від значення індуктивного та ємнісного опорів. Далі на вектори напруг гілок $\dot{U}_{r_L}$ та $\dot{U}_{r_C}$ відкладаємо відповідні вектори струмів $\dot{I}_L$ та $\dot{I}_C$, оскільки вони співпадають за фазами з відповідними напругами гілок.

Із векторної діаграми бачимо, що напруга на індуктивностях практично у протифазі, як і струми. Амплітуда різниці комплексів напруг на індуктивних елементах $\dot{U}_{L_1} - \dot{U}_{L_2}$ буде дорівнювати сумі реальних фізичних амплітуд. Цю властивість використовують при експериментальному визначенні коефіцієнту включення.

Схема для експериментального визначення коефіцієнту включення у паралельному контурі другого виду наведена на рис. 3.65.

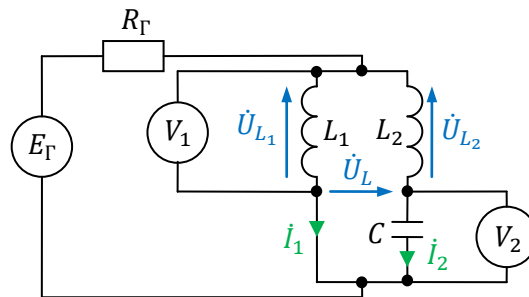


Рисунок 3.65 – Схема для експериментального визначення коефіцієнта включення у контурі другого виду

Коефіцієнт включення дорівнює відношенню амплітуди напруги відокремленої амплітуди індуктивності до амплітуди напруги на всій індуктивності на резонансній частоті

$$p = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{U_{L1}}{U_L} \Big|_{\omega=\omega_0}.$$

Якщо напруги $\dot{U}_{L_1}$ та $\dot{U}_{L_2}$ вимірювати по черзі одним вольтметром, то треба враховувати, що він має вхідну ємність, що буде розстроювати контур, тому при підключенні слід налаштовувати контур на резонанс.

Доведемо формулу для експериментального визначення коефіцієнта передачі. Запишемо напруги на індуктивностях:

$$\dot{U}_{L_1} = \dot{I}_1 \cdot Z_{L_1} = \dot{I}_1 \cdot jX_{L_1} = -j\dot{I}_{KpQ} \cdot jX_{L_1},$$

$$\dot{U}_L = \dot{U}_{L_1} - \dot{U}_{L_2} = \dot{I}_1 \cdot jX_{L_1} - \dot{I}_2 \cdot jX_{C_2} = -j\dot{I}_{KpQ} \cdot jX_{L_1} - j\dot{I}_{KpQ} \cdot jX_{L_2}.$$

Підставимо одержані вирази у формулу для коефіцієнта включення

$$p = \frac{\dot{U}_{L_1}}{\dot{U}_L} = \frac{-j\dot{I}_{KpQ} \cdot jX_{L_1}}{-j\dot{I}_{KpQ} \cdot j(X_{L_1} + X_{L_2})} = \frac{X_{L_1}}{X_{L_1} + X_{L_2}} = \frac{\omega L_1}{\omega L_1 + \omega L_2} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

Паралельний контур другого виду використовується для того, щоб за допомогою часткового включення генератора до контуру зменшити вплив опору генератора на смугу пропускання та добротність контуру (рис. 3.66).

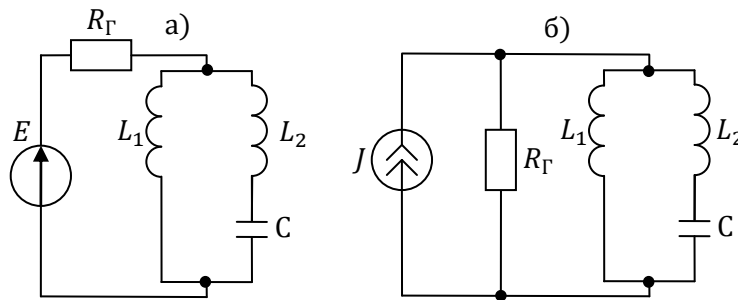


Рисунок 3.66 – Еквівалентні схеми

У колі (рис. 3.66 а) джерело напруги E перетворюють у джерело струму (рис. 3.66 б).

Далі опір генератора R_G вносимо опір генератора у контур (рис. 3.66 в). Тоді внесений опір визначається за формулою

$$r_{\text{вн}} = \frac{X_{L_1}^2}{R_G} = \frac{p^2 \rho^2}{R_G}.$$

Таким чином, аналізуючи останню формулу одержимо, що внесений опір $r_{\text{вн}}$ зменшився у p^2 разів у порівнянні із повним увімкненням опору генератору до контуру, оскільки $p < 1$.

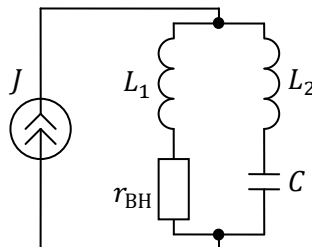


Рисунок 3.66 – Еквівалентна схема

3.9. Паралельний контур третього виду

3.9.1. Вхідний опір контуру

Розглянемо паралельний коливальний контур третього виду, тобто коли генератор підключений до частини ємності (рис. 3.67). Оскільки вхідні клеми розбивають ємність на дві частини, то тут справа йде про часткове включення з боку генератора.

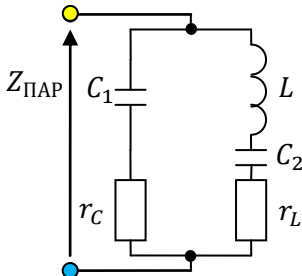


Рисунок 3.67 –
контур 3-го виду

Коефіцієнт включення для цієї схеми:

$$p = \frac{X_{C_1}}{X_{C_1} + X_{C_2}} = \frac{\frac{1}{\omega C_1}}{\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}} = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Характеристичний опір контуру та еквівалентна ємність:

$$\rho = \frac{1}{\omega_0 C_E}, \quad C_E = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Отже, з іншого боку коефіцієнт включення:

$$p = \frac{X_{C_1}}{X_{C_1} + X_{C_2}} = \frac{X_{C_1}}{X_C} = \frac{X_{C_1}}{\rho}.$$

Виразимо із одержаного виразу ємнісний опір $X_{C_1} = p\rho$.

На резонансній частоті $X_1 = X_2 \approx X_{C_1} = p\rho$.

Вхідний опір контуру:

$$Z_{\text{ВХ.ПАРЗ}} = \frac{X_1 X_2}{r_{\Sigma}(1 + j\xi)} \Big|_{X_1 = X_2} = \frac{p\rho \cdot p\rho}{r_{\Sigma}(1 + j\xi)} = \frac{\rho}{r_{\Sigma}} \cdot \frac{p^2 \rho}{1 + j\xi} \Big|_{Q=\rho/r_{\Sigma}} = \frac{p^2 Q \rho}{1 + j\xi},$$

де $r_{\Sigma} = r_C + r_L$ є сумарний опір втрат контуру.

Оскільки еквівалентний опір контуру на резонансній частоті є $R_E = Q\rho$, тоді вхідний опір паралельного контуру третього виду визначається виразом

$$Z_{\text{ВХ.ПАРЗ}} = \frac{p^2 Q \rho}{1 + j\xi} = \frac{p^2 R_E}{1 + j\xi} = \frac{R_{E3}}{1 + j\xi}, \quad R_{E3} = p^2 R_E.$$

У колі спостерігається два резонанси. Один резонанс спостерігається у гілці із L та C_2 із частотою $\omega_{\text{ПОС}}$. Інший резонанс спостерігається у колі відносно зовнішніх затискачів, у випадку паралельного з'єднання гілок із частотою $\omega_{\text{ПАР}}$. Резонансні частоти визначаються:

$$\omega_{\text{ПОС}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C_2}}, \quad \omega_{\text{ПАР}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C_E}}.$$

Для виникнення резонансу із частотою $\omega_{\text{ПАР}}$ необхідно, щоб ємнісний опір X_{C_2} був менше від індуктивного X_L для того, щоб реактивний опір був індуктивного характеру, оскільки у першій гілці реактивність ємнісного характеру.

Побудуємо частотні характеристики контуру (рис. 3.68).

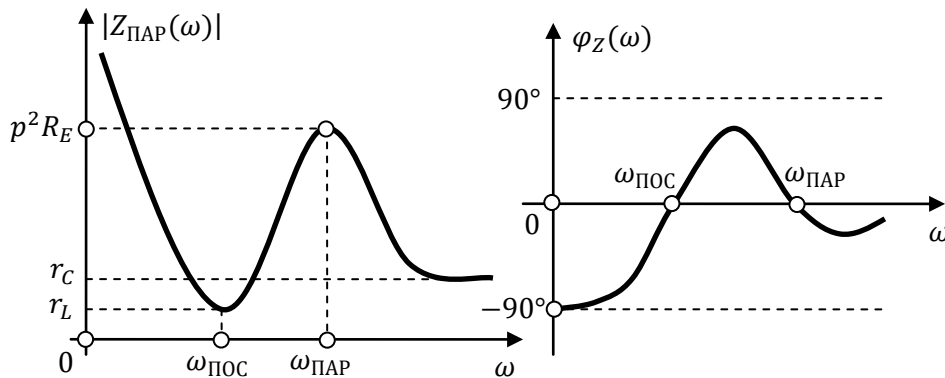


Рисунок 3.68 – Модуль та аргумент вхідного опору

Як бачимо, із графіку, на резонансній частоті $\omega_{\text{ПОС}}$ фаза дорівнює нулю, і вхідний опір є активним та дорівнює r_L , а на частоті $\omega_{\text{ПАР}}$ фаза дорівнює нулю, а вхідний опір визначається виразом $p^2 R_E$. Якщо втрати у контурі не буде, тобто $r_L = 0$, $r_C = 0$, то ФЧХ зображена на рис. 3.69.

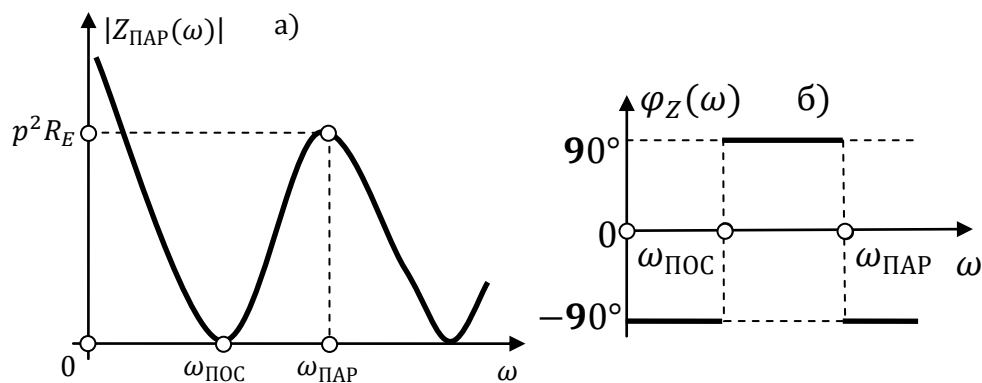


Рисунок 3.69 – Модуль та аргумент вхідного опору контура без втрат

На постійному струмі вхідний опір кола (рис. 3.67) еквівалентний ∞ , з якої і починається модуль вхідного опору (рис. 3.69), на частоті $\omega_{\text{ПОС}}$ має місце резонанс у другій гілці кола, тому опір дорівнює r_L , а на частоті $\omega_{\text{ПАР}}$ опір наближається до вхідного опору паралельного контуру $p^2 R_E$, а на нескінченній частоті опір першої гілки становить r_C .

3.9.2. Струми у контурі

Напруга на контурі (рис. 3.70):

$$\dot{U}_K(\xi) = \dot{I}_K \cdot Z_K = \dot{I}_K \cdot \frac{p^2 Q \rho}{1 + j\xi}.$$

Для інженерних розрахунків радіотехнічних кіл завжди виконується $x_L \gg r_L$, $x_C \gg r_C$.

У такому випадку $X_{C1} \approx X_2 = p\rho$:

У другій гілці опір повинен бути додатнім, оскільки повинен переважати індуктивний характер для резонансу

$$X_2 = X_L - X_{C2} > 0.$$

Струми у гілках

$$\dot{I}_C(\xi) = \frac{\dot{U}_K}{r_C - jX_{C1}} \Big|_{x_C \gg r_C} \cong \frac{\dot{U}_K}{-jX_{C1}} = \frac{\dot{I}_K}{-jp\rho} \cdot \frac{p^2 Q \rho}{1 + j\xi} = j\dot{I}_K \cdot \frac{pQ}{1 + j\xi};$$

$$\dot{I}_L(\xi) = \frac{\dot{U}_K}{r_L + jX_2} \Big|_{x_2 \gg r_L} \cong \frac{\dot{U}_K}{jX_2} = \dot{I}_K \cdot \frac{p^2 Q \rho}{1 + j\xi} \cdot \frac{1}{jp\rho} = -j\dot{I}_K \cdot \frac{pQ}{1 + j\xi}.$$

Тоді струми у гілках на резонансній частоті, де $\xi = 0$ приймає значення:

$$\dot{I}_L(\xi = 0) = -j\dot{I}_K \cdot pQ; \quad \dot{I}_C(\xi = 0) = j\dot{I}_K \cdot pQ.$$

Отже, амплітуда струму у гілках в pQ разів більше амплітуди на індуктивності та ємності на резонансній частоті

$$|\dot{I}_L| = |\dot{I}_C| = \dot{I}_K \cdot pQ.$$

Таким чином, струми протифазні, а амплітуди практично рівні.

Побудуємо векторну діаграму (рис. 3.71). Побудова здійснюється аналогічно попередньому випадку.

При побудові векторної діаграми вважаємо, що $\varphi_{UK} = 0$.

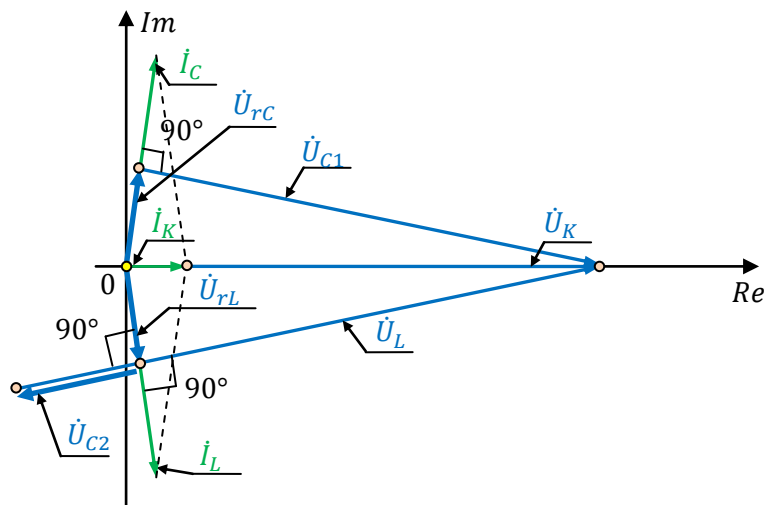


Рисунок 3.71 – Векторна діаграма

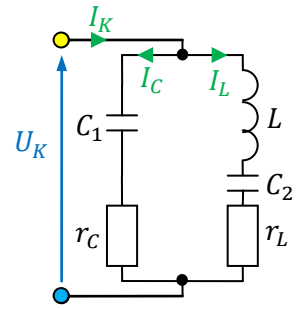


Рисунок 3.70 -
Схема контура

Спочатку будуються вектори струмів $\dot{I}_L$, $\dot{I}_C$, $\dot{I}_K$. Далі на вектори струмів гілок $\dot{I}_L$ та $\dot{I}_C$ відкладаємо відповідні вектори напруг $\dot{U}_{r_L}$ та $\dot{U}_{r_C}$, оскільки вони співпадають за фазами з відповідними струмами гілок. Після відкладаємо напруги на реактивних елементах, які відповідно опередають та відстають від струмів гілок в залежності від значення індуктивного та ємнісного опорів.

Із векторної діаграми бачимо, що напруга на ємностях практично у протифазі, як і струми. Амплітуда різниці комплексів напруг на ємнісних елементах $\dot{U}_{C_1} - \dot{U}_{C_2}$ буде дорівнювати сумі реальних фізичних амплітуд. Цю властивість використовують при експериментальному визначенні коефіцієнту включення.

Із векторної діаграми бачимо, що струми на реактивних елементах протифазні і практично рівні.

Схема для експериментального визначення коефіцієнту включення у паралельному контурі третього виду наведена на рис. 3.72.

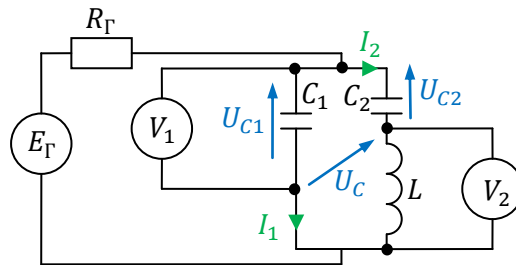


Рисунок 3.72 – Схема для експериментального визначення коефіцієнта включення у контурі третього виду

Коефіцієнт включення дорівнює відношенню амплітуди напруги відокремленої амплітуди ємності до амплітуди напруги на всій ємності на резонансній частоті

$$p = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{U_{C1}}{U_C} \Big|_{\omega=\omega_0}.$$

Якщо напруги $\dot{U}_{C_1}$ та $\dot{U}_{C_2}$ вимірювати по черзі одним вольтметром, то необхідно враховувати, що він має вхідну ємність, що буде розстроювати контур, тому при підключенні слід налаштовувати контур на резонанс.

Доведемо формулу для експериментального визначення коефіцієнта передачі. Запишемо напруги на ємностях:

$$\dot{U}_{C_1} = \dot{I}_1 \cdot Z_{C_1} = \dot{I}_1 \cdot jX_{C_1} = -j\dot{I}_K p Q \cdot jX_{C_1},$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_{C_1} - \dot{U}_{C_2} = \dot{I}_1 \cdot jX_{C_1} - \dot{I}_2 \cdot jX_{C_2} = -j\dot{I}_K p Q \cdot jX_{C_1} - j\dot{I}_K p Q \cdot jX_{L_2}.$$

Підставимо одержані вирази у формулу для коефіцієнта включення

$$p = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\dot{U}_{C_1}}{\dot{U}_C} = \frac{-j\dot{I}_K p Q \cdot jX_{C_1}}{-j\dot{I}_K p Q \cdot j(X_{C_1} + X_{C_2})} = \frac{X_{C_1}}{X_{C_1} + X_{C_2}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Паралельний контур третього виду використовується для того, щоб за допомогою часткового включення генератора до контуру зменшити вплив опору генератора на смугу пропускання та добротність контуру (рис. 3.73).

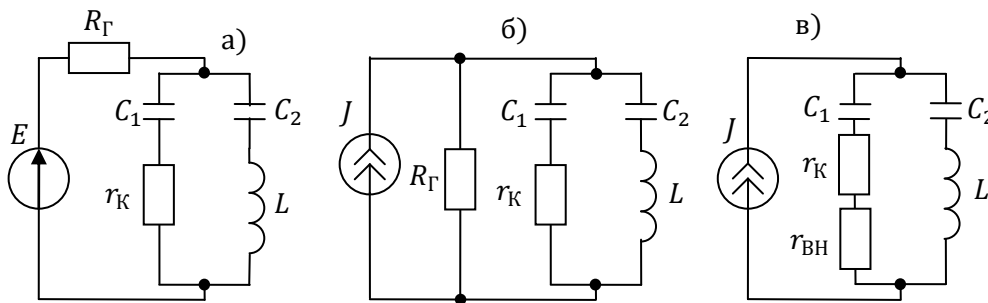


Рисунок 3.73 – Еквівалентні схеми

У контурі (рис. 3.73 а) джерело напруги E (рис. 3.73 а) перетворюють у джерело струму (рис. 3.73б). Далі у контурі (рис. 3.73б) вносять опір генератора $R_Г$ до контуру (рис. 3.73 в).

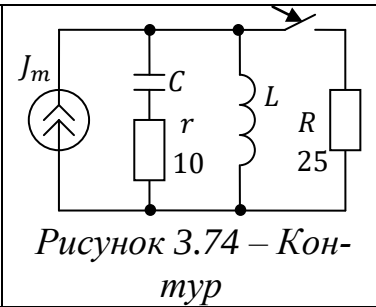
Внесений опір визначається за формулою

$$r_{вн} = \frac{X_{L_1}^2}{R_Г} = \frac{p^2 \rho^2}{R_Г}.$$

Таким чином отримали, що внесений опір з боку генератора $r_{вн}$ зменшився у p^2 разів, оскільки $p < 1$ у порівнянні із повним включенням до контуру.

3.10. Розрахунок паралельних контурів

Приклад 3.3. У контурі (рис. 3.74) визначити як зміниться смуга пропускання, якщо паралельно до контуру підключити опір $R = 25$ кОм. Добротність контур без врахування опору R є $Q_1 = 70$. Опір втрат контура $r = 10$ Ом.



Розв'язання

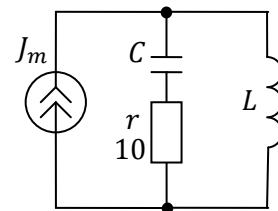
Добротність контуру без опору R
(рис. 3.75)

$$Q_1 = \frac{\rho}{r}.$$

Звідси визначимо характеристичний опір

$$\rho = Q_1 \cdot r = 70 \cdot 10 = 700 \text{ Ом.}$$

Рисунок 3.75 – Контур без R



Розглянемо контур з опором R (рис. 3.76 а)

Внесений опір у контур (рис. 3.76 б)

$$r_{BH} = \frac{\rho^2}{R} = \frac{700^2}{25000} = 19.6 \text{ Ом.}$$

Добротність із урахуванням внесеного опору (рис. 3.76 б)

$$Q_2 = \frac{\rho}{r + r_{BH}} = \frac{700}{10 + 19.6} = 23.64 \approx 24.$$

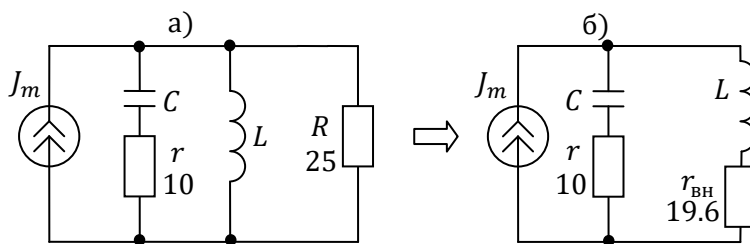


Рисунок 3.76 – Еквівалентні схеми

Смуга пропускання контуру

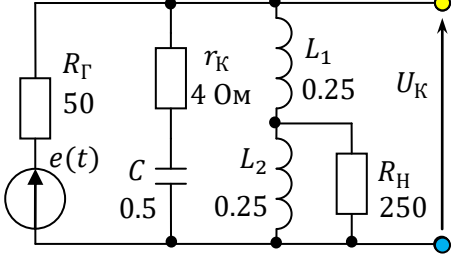
$$\Pi = \frac{f_0}{Q}.$$

Відношення смуг пропускання

$$\frac{\Pi_2}{\Pi_1} = \frac{\frac{f_0}{Q_2}}{\frac{f_0}{Q_1}} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{70}{24} \approx 2.9 \text{ рази}$$

Отже, смуга збільшиться в 2.9 рази.

Відповідь: $\Pi_2/\Pi_1 = 2.9$.

Задача 3.4. У контурі (рис. 3.77) визначити резонансну частоту, смугу пропускання в кГц, добротність всієї схеми із урахуванням опорів, що внесені у контур. Побудувати графік (за віссю абсид ξ та Δf). Вхідна напруга визначається виразом $e(t) = 2\cos(\omega t)$, В. Числові значення елементів: опори – кОм, індуктивність – мГн, ємність – нФ.	 Рисунок 3.77 – Схема

Розв'язання

Еквівалентна індуктивність при послідовному з'єднанні

$$L_E = L_1 + L_2 = 0.25 + 0.25 = 0.5 \text{ мГн.}$$

Резонансна частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_E C}} = \frac{1}{\sqrt{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.5 \cdot 10^{-9}}} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2 \cdot 10^6}{2\pi} = 318.3 \text{ кГц.}$$

Характеристичний опір кола

$$\rho = \omega_0 L_E = 2 \cdot 10^6 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = 1 \text{ кОм.}$$

Внесений опір збоку генератора

$$r_{BH.1} = \frac{\rho^2}{R_\Gamma} = \frac{(1 \cdot 10^3)^2}{50 \cdot 10^3} = 20 \text{ Ом.}$$

Коефіцієнт включення з боку навантаження

$$p = \frac{X_{L2}}{X_{L1} + X_{L2}} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{0.25}{0.25 + 0.25} = 0.5.$$

Внесений опір з боку опору навантаження

$$r_{BH.2} = p^2 \frac{\rho^2}{R_H} = 0.5^2 \frac{(1 \cdot 10^3)^2}{250 \cdot 10^3} = 1 \text{ Ом.}$$

У результаті одержимо контур, що зображений на рис. 3.78 а.

Добротність контуру (рис. 3.78 а) із урахуванням внесених опорів

$$Q = \frac{\rho}{r_K + r_{BH.1} + r_{BH.2}} = \frac{1000}{4 + 20 + 1} = \frac{1000}{25} = 40.$$

Смуга пропускання контуру

$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2 \cdot 10^6}{40} = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\Pi_{Гц} = \frac{f_0}{2\pi} = \frac{318.3 \cdot 10^3}{2\pi} = 50.66 \text{ кГц.}$$

У колі (рис. 3.77) перетворимо джерело напруги у джерело струму (рис. 3.78 а) та визначимо амплітуду струму, що втікає у паралельний контур

$$J_m = \frac{E}{R_\Gamma} = \frac{2}{50 \cdot 10^3} = 0.04 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 0.04 \text{ мА.}$$

Модуль повного опору паралельного контуру першого виду

$$|Z_K(\xi)| = \frac{R_E}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{Q\rho}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{40}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \text{ кОм.}$$

Модуль напруги на контурі за законом Ома

$$U_K = J_m \cdot Z_K.$$

Модуль напруги на контурі (рис. 3.78 б)

$$|U_K(\xi)| = J_m \cdot |Z_K(\xi)| = 0.04 \cdot \frac{40}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1.6}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \text{ В.}$$

Узагальнена розстройка

$$\xi = 2Q \frac{\Delta f}{f_0}.$$

Звідси визначимо

$$\Delta f = \frac{\xi \cdot f_0}{2Q} = \frac{1 \cdot 318.3}{2 \cdot 40} = 3.979 \text{ кГц.}$$

На границях смуги пропускання $\xi = \pm 1$. Модуль напруги на контурі $|U_K(\xi)|$ та $|U_K(\Delta f)|$ поданий на рис. 3.78 б.

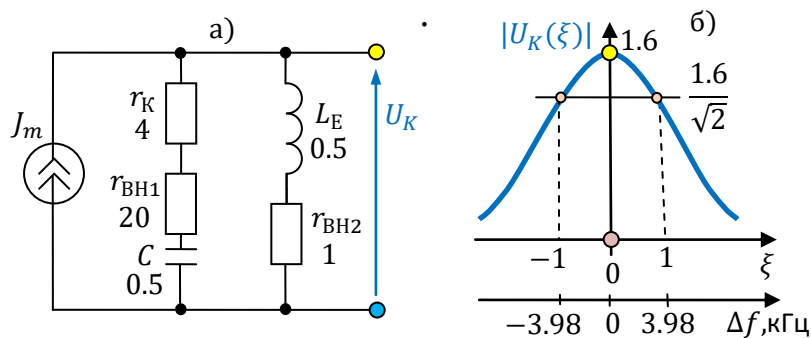


Рисунок 3.78 – Контур та напруга на ньому

Відповідь: $f_0 = 318.3 \text{ кГц}$, $Q = 40$; $|U_K(\xi)| = 1.6 / \sqrt{1 + \xi^2}$.

Приклад 3.5. У контурі (рис. 3.79) визначити величини індуктивностей L_1 та L_2 . Потужність, що споживається контуром на резонансній частоті становить $P(\omega_0) = 54$ мВт. Добротність контура $Q = 81$, характеристичний опір контуру $\rho = 3$ кОм. Числові значення елементів на схемі: ємності в нФ, напруга в В.

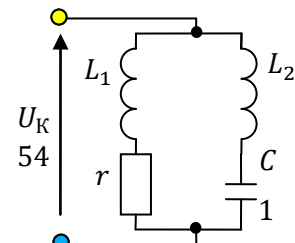


Рисунок 3.79 –
Початкова схема

Розв'язання

Розрахунки здійснюватимемо в одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн, ємність – нФ, потужність – мВт.

Оскільки на резонансній частоті опір контуру є активним (рис. 3.80), то і потужність на цій частоті буде активною.

Потужність контуру на резонансній частоті

$$P(\omega_0) = \frac{U_K^2}{2R_{E2}}.$$

Звідси визначимо

$$R_{E2} = \frac{U_K^2}{P(\omega_0)} = \frac{54^2}{2 \cdot 54} = 27 \text{ кОм}.$$

Еквівалентний опір контуру на резонансній частоті

$$R_{E2} = p^2 Q \rho.$$

Звідси визначимо

$$p = \sqrt{\frac{R_{E2}}{Q \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{27}{81 \cdot 3}} = \frac{1}{3}.$$

З іншого боку

$$p = \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{1}{3}.$$

Характеристичний опір контуру

$$\rho = \sqrt{\frac{L_E}{C}}.$$

Звідси визначимо

$$L_E = \rho^2 \cdot C = 3^2 \cdot 1 = 9 \text{ мГн}.$$

З іншого боку

$$L_E = L_1 + L_2 = 9$$

У результаті одержимо

$$\frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{L_1}{L_E} = \frac{L_1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Звідси визначимо $L_1 = 3$ мГн, тоді $L_2 = L_E - L_1 = 9 - 3 = 6$ мГн.

Відповідь: $L_1 = 3$ мГн, $L_2 = 6$ мГн.

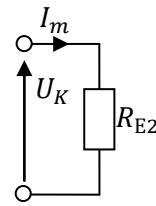


Рисунок 3.80 –
Еквівалентна схема на
резонансній частоті

Приклад 3.6. Знайти опір Z_{ab} кола (рис. 3.81). Абсолютні значення опорів елементів схеми для заданої частоти наведені на схемі в Ом.

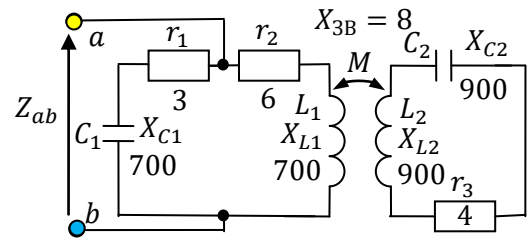


Рисунок 3.81 – Початкова схема

Розв'язання

Оскільки $X_{L1} = X_{C1} = 700$ Ом, то в другому контурі має місце резонанс, тому $\rho_2 = 900$ Ом. Таким чином, опір другого контуру на резонансній частоті буде активним, тобто $Z_2(\omega_0) = r_3$.

Внесемо опір r_3 у перший контур, оскільки $r_3 \gg \rho$ (рис. 3.82 а)

$$r_{BH} = \frac{X_{3B}^2}{r_3} = \frac{8^2}{4} = 16 \text{ Ом.}$$

Модуль вхідного опору паралельного контуру першого виду

$$|Z_{BX.ПАРЛ}(\xi)| = \frac{R_E}{\sqrt{1 + \xi^2}}$$

Оскільки $X_{L2} = X_{C2} = 900$ Ом, то в контурі (рис. 3.82 а) має місце резонанс, тому $\rho_1 = 700$ Ом. Таким чином, контур на резонансній частоті буде активним.

На резонансній частоті вхідний опір такого контуру (рис. 3.82 б)

$$R_E = \rho_1 Q.$$

Добротність контуру з урахуванням внесеного опору

$$Q = \frac{\rho_1}{r_1 + r_2 + r_{BH}} = \frac{700}{3 + 6 + 16} = \frac{700}{25} = 28.$$

Отже, еквівалентний опір паралельного контуру на резонансній частоті (рис. 3.82 б)

$$R_E = \rho_1 Q = 700 \cdot 28 = 19.6 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 19.6 \text{ кОм.}$$

Таким чином ,

$$Z_{ab} = R_E = 19.6 \text{ кОм.}$$

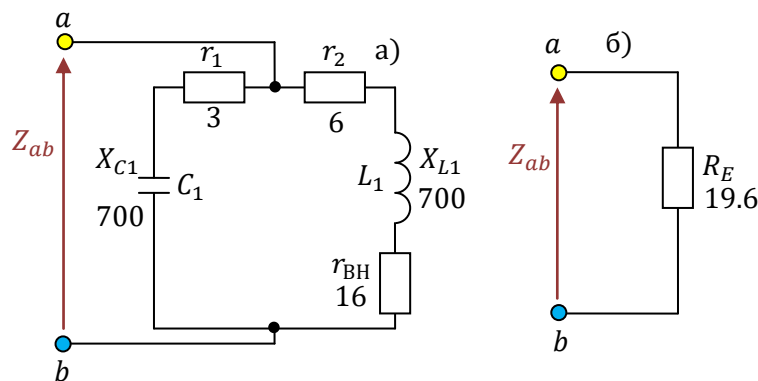


Рисунок 3.82 – Еквівалентні схеми

Відповідь: $Z_{ab} = 19.6 \text{ кОм.}$

4. ОСНОВИ СХЕМНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЧОТИРИПОЛЮСНИКІВ

4.1. Поняття про схемні функції та їх види

4.1.1. Поняття про схемні функції

Для формування схемних функцій використовують операторний метод, що базується на перетворенні Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{pt} dt = L^{-1}\{f(t)\}.$$

У операторному численні $f(t) \rightarrow F(p)$.

Перехід у операторну область дає змогу позбутися від операції інтегрування та диференціювання. Отже, замість диференціювання та інтегрування

$$\frac{df(t)}{dt} \rightarrow pF(p), \quad \int_0^t f(t) dt \rightarrow \frac{1}{p}F(p).$$

Отже, $F(p)$ – це зображення, $f(t)$ – оригінал функції.

Для розрахунку схемних функцій частіше використовують операторні опори та провідності індуктивностей та ємностей (таблиця 4.1).

Введемо операторні опори індуктивності та ємності

$$Z_L = j\omega L|_{j\omega=p} = pL;$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}|_{j\omega=p} = \frac{1}{pC}.$$

Введемо операторні провідності індуктивності та ємності

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L}|_{j\omega=p} = \frac{1}{pL};$$

$$Y_C = j\omega C|_{j\omega=p} = pC.$$

Зведемо ці величини у таблицю 4.1.

Таблиця 4.1. Операторні величини

Елемент	Опори	Провідності
Індуктивність	$Z_L(p) = pL$	$Y_L(p) = \frac{1}{pL}$
Ємність	$Z_C(p) = \frac{1}{pC}$	$Y_C(p) = pC$

Введемо поняття схемної функції.

Схемна функція – це відношення зображення струму чи напруги реакції до зображення струму чи напруги дії (рис. 4.1).

У загальному випадку під схемною функцією (СФ) розуміють

$$\text{СФ} = \frac{\text{Реакція}}{\text{Дія}}.$$

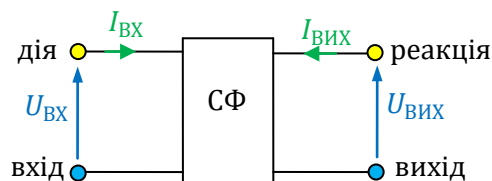


Рисунок 4.1 – Схема

Поняття схемних функцій використовують для лінійних кіл, параметри яких не залежать від дії.

Схемні функції діляться на вхідні та передавальні.

Вхідна схемна функція – це така схемна функція, де змінні дії та реакції визначаються на одному вході

$$F_{aa} = \frac{X_a}{Q_a}.$$

Передавальна схемна функція – це така схемна функція, де змінні дії та реакції визначаються на різних входах

$$F_{ab} = \frac{X_a}{Q_b}.$$

Схемні функції

	Назва СФ	Формула
1	Коефіцієнт передачі за напругою	$K_U = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$
2	Коефіцієнт передачі за струмом	$K_I = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$
3	Вхідний опір	$Z_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$
4	Вхідна провідність	$Y_{\text{ВХ}} = \frac{I_{\text{ВХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$
5	Передавальний опір	$Z_{\text{ПЕР}} = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$
6	Передавальна провідність	$Y_{\text{ПЕР}} = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$

Схемні функції діляться на вхідні та передавальні.

Вхідна схемна функція	Передавальна схемна функція
$Z_{\text{ВХ}}, Z_{\text{ВИХ}}, Y_{\text{ВХ}}, Y_{\text{ВИХ}}$	$K_U, K_I, Z_{\text{ПЕР}}, Y_{\text{ПЕР}}$

4.1.2. Визначення коефіцієнта передачі

Розглянемо розрахунок схемних функцій у простому колі на прикладі коефіцієнтів передачі.

Коефіцієнти передачі за напругою (рис. 4.2)

$$K_U = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{I \cdot Z_2}{I \cdot (Z_1 + Z_2)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{Y_2}}{\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2}} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}.$$

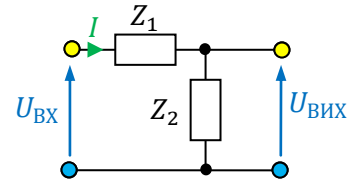


Рисунок 4.2 – Схема послідовного з'єднання

Коефіцієнти передачі за струмом (рис.4.3)

$$K_I = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{U_{ab} \cdot Y_2}{U_{ab} \cdot (Y_1 + Y_2)} = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

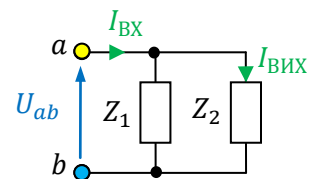


Рисунок 4.3 – Схема

Форму розрахунку обирають з огляду на те, що простіше розрахувати. Наприклад, розглянемо розрахунок коефіцієнта передачі за напругою кола (рис. 4.3 та рис. 4.4) через опори та через провідності.

Коефіцієнти передачі за напругою через опори

$$K_U = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{\frac{1}{pC} + R} = \frac{pCR}{1 + pCR}.$$

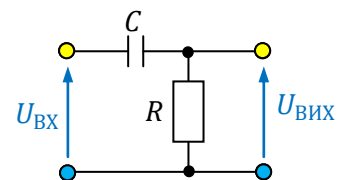


Рисунок 4.3 – Схема

Коефіцієнти передачі за напругою через провідності

$$K_U = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} = \frac{pC}{pC + g}.$$

Розглянемо коло, що зображене на рис. 4.4.

Коефіцієнти передачі за напругою через опори

$$K_U = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{pL + R}.$$

Коефіцієнти передачі за напругою через провідності

$$K_U = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} = \frac{\frac{1}{pL}}{\frac{1}{pL} + g} = \frac{1}{1 + pLg}.$$

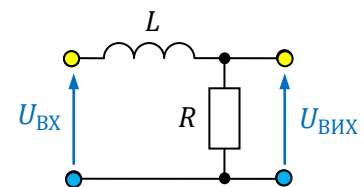


Рисунок 4.4 – Схема

Розглянемо розрахунок коефіцієнта передачі за струмом кола (рис. 4.5 та рис. 4.6) через опори та через провідності.

Коефіцієнти передачі за струмом через опори

$$K_I = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{pCR}{pCR + 1}.$$

Коефіцієнти передачі за струмом через провідності

$$K_I = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{pC}{g + pC}.$$

Розглянемо коло, що зображене на рис. 4.6.

Коефіцієнти передачі за струмом через опори

$$K_I = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{R + pL}.$$

Коефіцієнти передачі за струмом через провідності

$$K_I = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{\frac{1}{pL}}{g + \frac{1}{pL}} = \frac{1}{pLg + 1}.$$

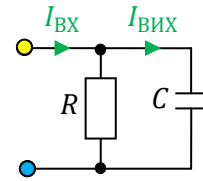


Рисунок 4.5 – Схема

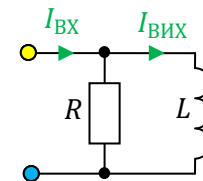


Рисунок 4.6 – Схема

Порівнявши отримані результати, можна зробити висновок, що для кіл із індуктивностями простіше шукати коефіцієнти передачі через опори, а для кіл із ємностями простіше шукати коефіцієнти передачі через провідності.

Розглянемо приклади розрахунку схемних функцій простих кіл

Приклад 4.1. У колі (рис. 4.7) одержати вираз коефіцієнту передачі за напругою, побудувати його модуль та аргумент. Числові значення елементів кола наведені на схемі: опори в кОм, ємності в нФ.

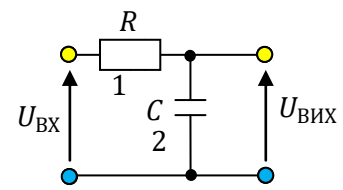


Рисунок 4.7 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, ємність – нФ, частота – рад/мкс.

Коефіцієнт передачі за напругою через провідності

$$K_U(p) = \frac{U_{\text{ВИХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} = \frac{g}{g + pC} = \frac{1}{1 + 2p} = \frac{0.5}{0.5 + p}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою через частоту

$$K_U(\omega) = \frac{0.5}{0.5 + j\omega} = |K_U(\omega)|e^{-j\varphi_K(\omega)}.$$

Модуль коефіцієнта передачі за напругою (рис. 4.8 а)

$$|K_U(\omega)| = \frac{0.5}{\sqrt{0.25 + \omega^2}}.$$

Аргумент коефіцієнта передачі за напругою (рис. 4.8 б)

$$\varphi_K(\omega) = -\arctg(2\omega).$$

Допоміжні формули

$$Z = a + jb = |Z|e^{j\varphi}, \quad |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg(b/a).$$

Граничні точки

$$|K_U(\omega = 0)| = \frac{0.5}{\sqrt{0.25}} = 1; \quad |K_U(\omega = \infty)| = \frac{0.5}{\infty} = 0;$$

$$\varphi_K(\omega = 0) = 0; \quad \varphi_K(\omega = \infty) = -90^\circ.$$

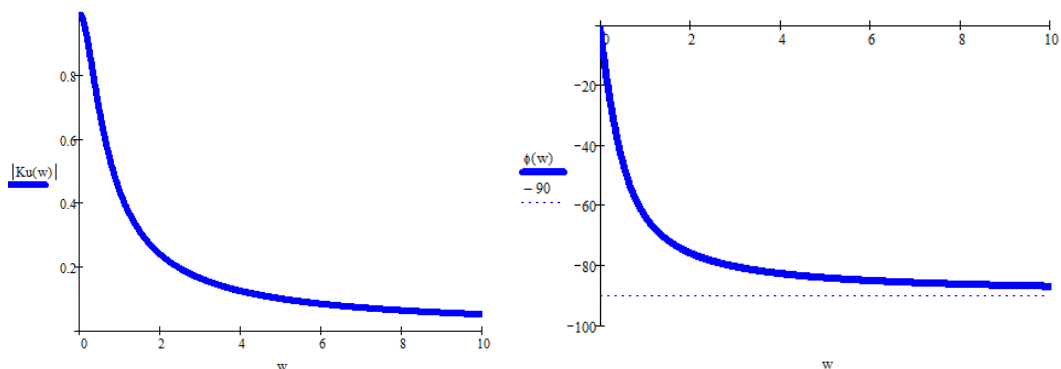
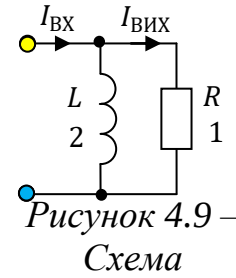


Рисунок 4.8 – Модуль та аргумент коефіцієнта передачі за напругою

Відповідь: $K_U(\omega) = 0.5/(0.5 + j\omega)$.

Приклад 4.2. У колі (рис. 4.9) знайти коефіцієнт передачі за струмом, побудувати його модуль та аргумент. На графіку вказати початкові значення та асимптоти. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, індуктивності в мГн.



Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн, частота – рад/мкс.

Коефіцієнт передачі за струмом через опори

$$K_I = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{pL}{R + pL} = \frac{2p}{1 + 2p} = \frac{p}{0.5 + p}.$$

Залежність коефіцієнта передачі за напругою від частоти

$$K_I(\omega) = \frac{j\omega}{0.5 + j\omega} = |K_I(\omega)|e^{j\varphi_K(\omega)}.$$

Модуль коефіцієнта передачі за напругою (рис. 4.10 а)

$$|K_I(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{0.25 + \omega^2}}.$$

Аргумент коефіцієнта передачі за напругою (рис. 4.10 б)

$$\varphi_K(\omega) = 90^\circ - \arctg(0.5\omega).$$

Допоміжні формули

$$Z = a + jb = |Z|e^{j\varphi}, \quad |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg(b/a).$$

Граничні точки

$$|K_I(\omega = 0)| = \frac{0}{\sqrt{0.25}} = 0; \quad |K_I(\omega = \infty)| = \frac{\infty}{\infty} = 1;$$

$$\varphi_K(\omega = 0) = 90^\circ; \quad \varphi_K(\omega = \infty) = 0.$$

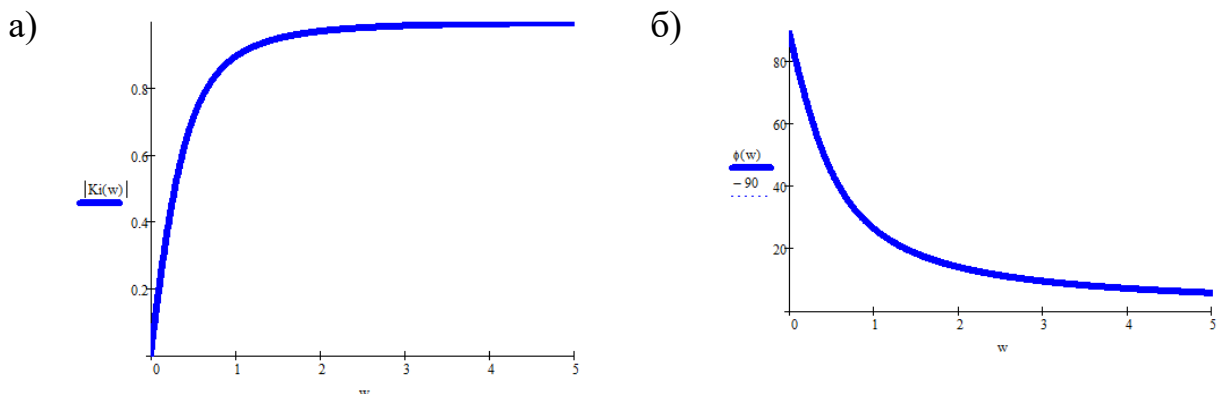


Рисунок 4.10 – Модуль та аргумент коефіцієнта передачі за струмом

Відповідь: $K_I(\omega) = j\omega/(0.5 + j\omega)$.

4.1.3. Види схемних функцій

Усі викладення будемо робити для зображень змінних за Лапласом, які на відміну від комплексних амплітуд будемо записувати без крапок..

Припустимо, що є лінійне коло, яке описується системою рівнянь

$$[Q] = [W] \cdot [X],$$

де Q – вектор задаючих змінних; X – вектор шуканих змінних; W – матриця еквівалентних параметрів.

Для методів контурних струмів і вузлових напруг ці рівняння відповідно мають вигляд

$$[E] = [Z] \cdot [I], \quad [I] = [Y] \cdot [U].$$

Тоді $[X] = [W]^{-1} \cdot [Q]$.

Розпишемо це співвідношення докладніше й знайдемо елементи матриці $[X]$:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \dots & \Delta_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix}.$$

Для будь-якої шуканої a -ї змінної справедливо

$$X_a = \frac{\Delta_{1a}}{\Delta} \cdot Q_1 + \dots + \frac{\Delta_{aa}}{\Delta} \cdot Q_a + \dots + \frac{\Delta_{ba}}{\Delta} \cdot Q_b + \dots + \frac{\Delta_{na}}{\Delta} \cdot Q_n.$$

Такий запис розв'язання для змінної X_a представляє принцип суперпозиції. Коли говоримо про схемну функцію, то думаємо, що дія тільки одна. Тоді коефіцієнт, що стоїть перед Q_i , є схемна функція. У загальному вигляді схемна функція має вигляд $\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$. Схемні функції поділяють на вхідні та передаточні.

$$\frac{X_a}{Q_a} = F_{aa} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}.$$

Наприклад, якщо $W=Y$, $X=U$, $Q=I$, тоді

$$F_{aa} = \frac{U_a}{I_a} = Z_a.$$

Тут Z_a – вхідний опір щодо входу «а».

Передаточна схемна функція

$$\frac{X_a}{Q_b} = F_{ab} = \frac{\Delta_{ba}}{\Delta}.$$

Наприклад, якщо $W=Y$, $X=U$, $Q=I$ тоді

$$F_{ab} = \frac{U_a}{I_b} = Z_{ab}.$$

Тут Z_{ab} – передаточний опір.

Якщо змінні одного типу (наприклад, напруги) виражати на підставі закону Ома через змінні іншого типу (наприклад, струми), то всього можна одержати шість різновидів схемних функцій. Далі їх одержимо за матрицями Y та Z .

4.2. Визначення схемних функцій

Схемні функції внаслідок лінійності кола від дії не залежать, а визначаються тільки параметрами схеми.

4.2.1. Визначення схемних функцій за матрицею опорів

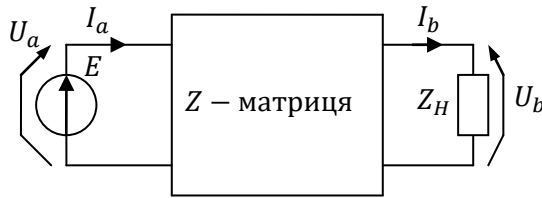


Рисунок 4.11 - Схема

Система за МКС (рис. 4.11):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ E \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = [Z] \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_a \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix}.$$

Визначимо струм у гілках методом Крамера:

$$I_a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{E \cdot \Delta_{aa}}{\Delta}; \quad I_b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{E \cdot \Delta_{ab}}{\Delta},$$

де

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots \\ \dots & E & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = E \cdot \Delta_{aa}; \quad \Delta_b = \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots \\ \dots & E & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = E \cdot \Delta_{ab}.$$

Коефіцієнт передачі за струмом:

$$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{I_b}{I_a} = \frac{\frac{E \cdot \Delta_{ab}}{\Delta}}{\frac{E \cdot \Delta_{aa}}{\Delta}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою:

$$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{U_b}{U_a} = \frac{I_b \cdot Z_H}{E} = \frac{\frac{E \cdot \Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Z_H}{E} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Z_H.$$

Перехідна провідність:

$$Y_{ba} = \frac{I_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{I_b}{U_a} = \frac{\frac{E \cdot \Delta_{ab}}{\Delta}}{E} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}.$$

Перехідний опір:

$$Z_{ba} = \frac{U_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{U_b}{I_a} = \frac{I_b \cdot Z_H}{I_a} = \frac{\frac{E \cdot \Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Z_H}{\frac{E \cdot \Delta_{aa}}{\Delta}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Z_H.$$

Вхідний опір:

$$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{E}{\frac{E \cdot \Delta_{aa}}{\Delta}} = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}.$$

4.2.2. Визначення схемних функцій за матрицею провідностей

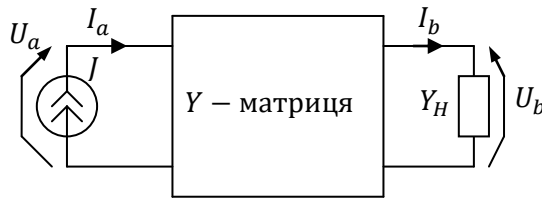


Рисунок 4.12 – Схема

Рівняння за МВН (рис. 4.12):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ J \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = [Y] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_a \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix}.$$

Визначимо вузлові напруги за методом Крамера:

$$U_a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{J \cdot \Delta_{aa}}{\Delta}; \quad U_b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{J \cdot \Delta_{ab}}{\Delta}.$$

де

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots \\ \dots & J & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = J \cdot \Delta_{aa}; \quad \Delta_b = \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots \\ \dots & J & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = J \cdot \Delta_{ab}.$$

Коефіцієнт передачі за струмом:

$$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{U_b \cdot Y_H}{I_a} = \frac{\frac{J \cdot \Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Y_H}{J} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Y_H.$$

Коефіцієнт передачі за напругою:

$$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{U_b}{U_a} = \frac{\frac{J \cdot \Delta_{ab}}{\Delta}}{\frac{J \cdot \Delta_{aa}}{\Delta}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}.$$

Перехідна провідність:

$$Y_{ba} = \frac{I_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{I_b}{U_a} = \frac{U_b \cdot Y_H}{U_a} = \frac{\frac{J \cdot \Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Y_H}{\frac{J \cdot \Delta_{aa}}{\Delta}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Y_H.$$

Перехідний опір:

$$Z_{ba} = \frac{U_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{U_b}{I_a} = \frac{\frac{J \cdot \Delta_{ab}}{\Delta}}{J} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}.$$

Вхідний опір:

$$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{\frac{J \cdot \Delta_{aa}}{\Delta}}{J} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}.$$

Нижче наведені приклади розрахунку.

Приклад 4.3. У колі (рис. 4.13) знайти коефіцієнт передачі за напругою, побудувати його модуль та аргумент. На графіку зазначити асимптоти та побудувати початкові значення. Числові значення елементів наведені на схемі: опори – кОм, ємності – нФ, напруги – В.

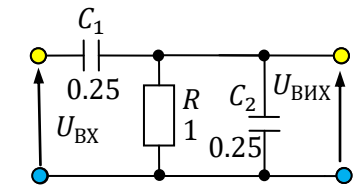


Рисунок 4.13 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, провідність – мСім, ємність – нФ. У схемі (рис. 4.14) пронумеруємо вузли та сформуємо матрицю провідностей згідно методу вузлових напруг.

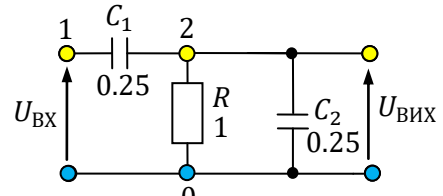


Рисунок 4.14 – Схема

Матриця провідностей кола (рис. 4.14)

$$Y = \begin{bmatrix} pC_1 & -pC_1 \\ -pC_1 & pC_1 + pC_2 + g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25p & -0.25p \\ -0.25p & 0.5p + 1 \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U(p) = \frac{U_{ВИХ}}{U_{ВХ}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2}(-0.25p)}{(-1)^{1+1}(0.5p + 1)} = \frac{0.25p}{1 + 0.5p}.$$

Коефіцієнт передачі від частоти

$$K_U(\omega) = \frac{0.5j\omega}{2 + j\omega} = |K_U(\omega)| \cdot e^{j\varphi_{Ku}}.$$

Вирази модуля та аргументу коефіцієнта передачі за напругою

$$|K_U(\omega)| = \frac{0.5\omega}{\sqrt{4 + \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = \varphi_{\text{ч}} - \varphi_{\text{зн}} = 90^\circ - \arctg(0.5\omega).$$

Побудуємо графіки модуль та аргумент коефіцієнта передачі (рис. 4.15).

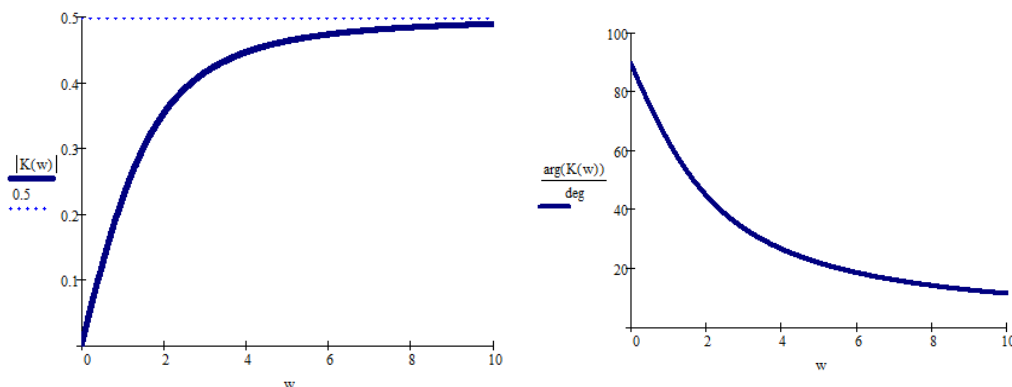


Рисунок 4.15 – Модуль та аргумент коефіцієнта передачі

Граничні точки:

$$|K_U(\omega = 0)| = \frac{0}{\sqrt{4}} = 0; \quad |K_U(\omega = \infty)| = \frac{0.5 \cdot \infty}{\infty} = 0.5;$$

$$\varphi_K(\omega = 0) = 90^\circ; \quad \varphi_K(\omega = \infty) = 0.$$

Відповідь: $K_U(\omega) = 0.5j\omega/(2 + j\omega)$.

Приклад 4.4. У колі (рис. 4.16) знайти коефіцієнт передачі за напругою, побудувати його модуль та аргумент. Джерело напруги $E = \mu U_{20}$, $\mu=8$ є керованим. Опори в кОм, індуктивності в мГн, напруга в В.

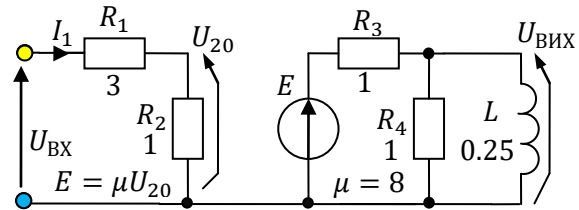


Рисунок 4.16 – Схема

Розв'язання

Розіб'ємо нашу схему на три підсхеми (рис. 4.17) і визначимо коефіцієнти передачі за напругою кожної із підсхем окремо. Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн.

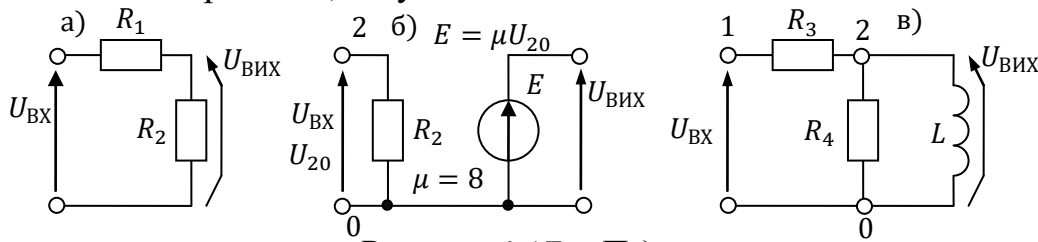


Рисунок 4.17 – Підсхеми

Коефіцієнт передачі за напругою першої підсхеми (рис. 4.17 а)

$$K_{U1} = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_{20}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3 + 1} = 0.25.$$

Коефіцієнт передачі за напругою другої підсхеми (рис. 4.17 б)

$$K_{U2} = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{E}{U_{20}} = \frac{\mu U_{20}}{U_{20}} = \mu = 8.$$

Матриця провідностей третьої підсхеми (рис. 4.17 в)

$$Y = \begin{bmatrix} g_3 & -g_3 \\ -g_3 & g_3 + g_4 + 1/pL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + 1 + 4/p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 + 4/p \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою

$$K_{U3}(p) = K_{U3} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2}(-1)}{(-1)^{1+1}(2 + 4/p)} = \frac{0.5p}{p + 2}.$$

Загальний коефіцієнт передачі за напругою (рис. 4.18)

$$K = K_{U1} \cdot K_{U2} \cdot K_{U3} = \frac{p}{2 + p} \Big|_{p=j\omega} = \frac{j\omega}{2 + j\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{4 + \omega^2}} e^{j[90^\circ - \arctg(0.5\omega)]}.$$

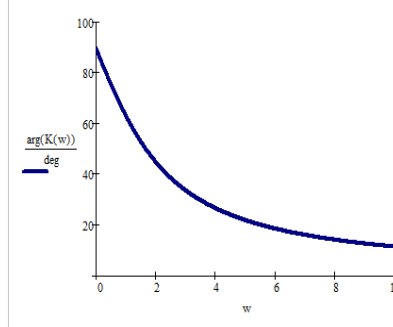
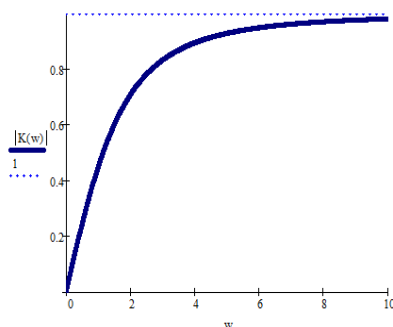


Рисунок 4.18 – Модуль та аргумент коефіцієнта передачі

Відповідь: $K_U(\omega) = j\omega/(2 + j\omega)$.

4.3. Побудова частотних характеристик за картою нулів та полюсів

Відомо, що будь-яка схемна функція є дробово-раціональною функцією комплексної змінної p

$$F(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}.$$

На підставі теореми Вієта схемну функцію можна представити у такому вигляді

$$F(p) = \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_{\Pi 1})(p - p_{\Pi 2}) \dots (p - p_{\Pi m})},$$

де $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}$ – корені чисельника; $p_{\Pi 1}, p_{\Pi 2}, \dots, p_{\Pi m}$ – корені знаменника

Нулями називаються корені поліному чисельника, а **полюсами** називаються корені поліному знаменника.

Якщо корені поліному чисельника та знаменника відобразити на комплексній площині, то отримаємо, так звану, **карту нулів і полюсів**.

Карта нулів та полюсів – зображення на комплексній площині нулів та полюсів.

На карті нулі зображуються кружками, а полюси хрестиками. Коефіцієнт $F_0 = a_n/b_n$ указується де-небудь з боку (рис. 4.19). Часто карту нулів та полюсів дають нормованою. Карта нулів та полюсів використовується в теорії фільтрів.

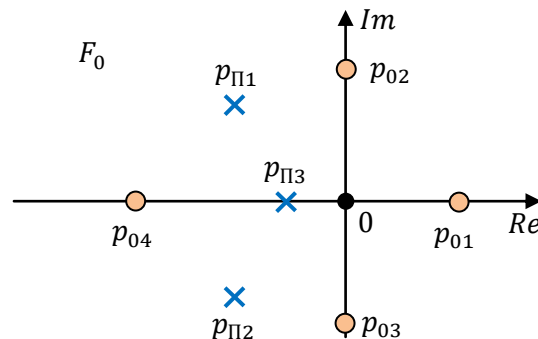


Рисунок 4.19 – Карта нулів та полюсів

За картою нулів та полюсів можна якісно аналізувати вигляд графіків АЧХ та ФЧХ схемних функцій.

Нулі і полюси можуть бути комплексними $p_k = \alpha + j\omega$. При побудові частотної характеристики $p = j\omega$.

При цьому $p = j\omega$ підставляємо у вираз для комплексного коефіцієнта передачі

$$F(\omega) = F_0 \cdot \frac{(j\omega - p_{01})(j\omega - p_{02}) \dots (j\omega - p_{0n})}{(j\omega - p_{\Pi 1})(j\omega - p_{\Pi 2}) \dots (j\omega - p_{\Pi m})} = F_0 \cdot \frac{A_1 e^{j\varphi_1} \dots A_n e^{j\varphi_n}}{B_1 e^{j\psi_1} \dots B_m e^{j\psi_m}}.$$

У кожному дужку треба підставити значення частоти ω , для якої розраховуємо функцію $F(\omega)$. У виразі співмножники представлені в алгебраїчній та показниковій формах.

Останній вираз можна представити у дещо іншому вигляді

$$F(\omega) = F_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^n A_i \cdot e^{j \sum_{i=1}^n \varphi_i}}{\prod_{t=1}^m B_t \cdot e^{j \sum_{t=1}^m \psi_t}}.$$

Дамо геометричну інтерпретацію останньому виразу. Спочатку покажемо, чим є кожна дужка на конкретній частоті. Значення кожного кореня чисельника чи знаменника на комплексній площині можуть бути зображені векторами (показникова форма запису комплексних чисел). Для конкретної i -ої точки частотної характеристики змінна ω – конкретне число ω_i . Величина $j\omega_i$ чисто уявне число і на комплексній площині зображується вектором, що прямує з початку координат, перпендикулярно дійсній вісі. Тоді різниця кореня p_{0i} (або $p_{\Pi k}$) і конкретної $j\omega_i$ також може бути зображена вектором, що виходить з координати кореня p_{0i} (або $p_{\Pi k}$) і заходить в точку $j\omega_i$ (рис. 4.20).

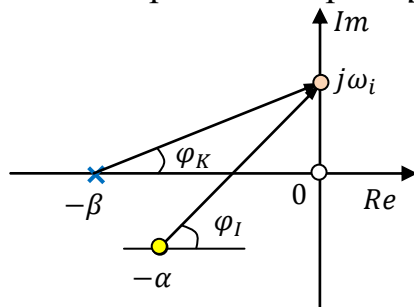


Рисунок 4.20 – Вектори

Якщо змінювати частоту від нуля до нескінченності, тоді кінці векторів, які відповідають кожній дужці чисельника і знаменника, "ковзатимуть" по уявній вісі. І від того, як швидко змінюються довжини векторів і їх кути, можна буде судити про хід АЧХ і ФЧХ. АЧХ знаходиться як добуток довжин векторів чисельника, діленого на

добуток довжин векторів знаменника. ФЧХ визначається як сума кутів векторів чисельника мінус сума кутів векторів знаменника

Приклад 4.5. У колі (рис. 4.21) якісно побудувати модуль та аргумент коефіцієнта передачі, використовуючи карту нулів та полюсів. Пояснити порядок побудови.

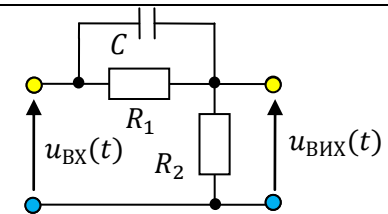


Рисунок 4.21 – Коло

Розв'язання

Матриця провідностей кола (рис. 4.21)

$$Y(p) = \begin{bmatrix} g_1 + pC & -g_1 - pC \\ -g_1 - pC & g_1 + g_2 + pC \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою кола із матриці

$$\begin{aligned} K_U(p) &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2}(-g_1 - pC)}{(-1)^{1+1}(g_1 + g_2 + pC)} = \frac{g_1 + pC}{g_1 + g_2 + pC} = \\ &= \frac{p + \frac{g_1}{C}}{p + \frac{g_1 + g_2}{C}} = \frac{p + \alpha}{p + \beta}, \quad \beta > \alpha. \end{aligned}$$

Корені чисельника та знаменника $p_{01} = -\alpha$ та $p_{\Pi 1} = -\beta$. Побудуємо карту нулів та полюсів кола (рис. 4.22).

На постійному струмі $\omega = 0$ вектори чисельника і знаменника (A_1 і B_1 відповідно) направлені у початок координат (рис. 4.22). Тому запишемо вираз коефіцієнта передачі

$$K(0) = \frac{A_1}{B_1} e^{j0^\circ} = \frac{g_1}{g_1 + g_2} < 1.$$

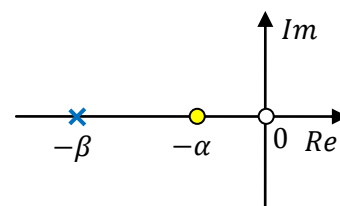


Рисунок 4.22

При невеликих частотах зі збільшенням частоти ω швидкість росту довжини і величини кута вектору A_1 більша, ніж B_1 . Через це АЧХ і ФЧХ спочатку зростають (рис. 4.23 а). Далі ці швидкості вирівнюються (рис. 4.23 б): відношення довжини A_1 до B_1 прямує до константи, різниця їх кутів прямує до нуля.

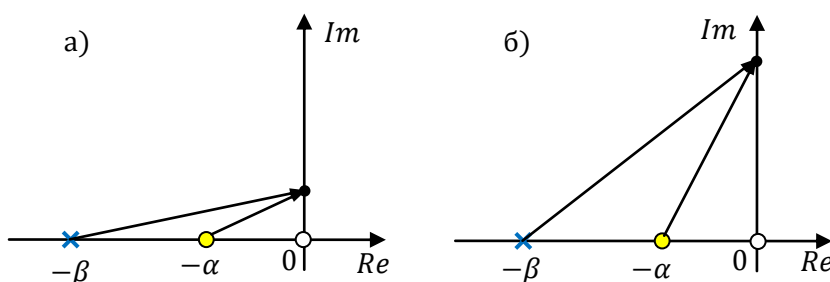


Рисунок 4.23 – Корені на карти нулів та полюсів

Рис. 4.23 а та рис. 4.23 б спеціально наведені у різних масштабах, щоб більш наочно були видні різні швидкості зростання довжин векторів та їх кутів при різних частотах. Графіки модуля та аргумента коефіцієнта передачі за напругою наведені на рис. 4.24.

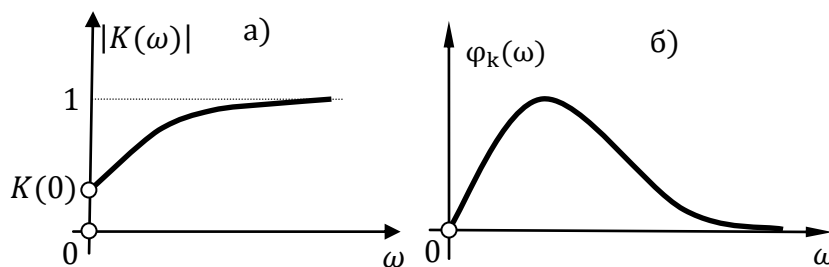


Рисунок 4.24 – Графіки модуля та аргумента коефіцієнта передачі за напругою

Наведений спосіб побудови зручний для якісної побудови.

АЧХ та ФЧХ коефіцієнта передачі за напругою ($R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1$ кОм, $C = 1$ нФ) подане на рис. 4.25.

$$K_U(\omega) = \frac{g_1 + j\omega C}{g_1 + g_2 + j\omega C} = \frac{1 + j\omega}{2 + j\omega}.$$

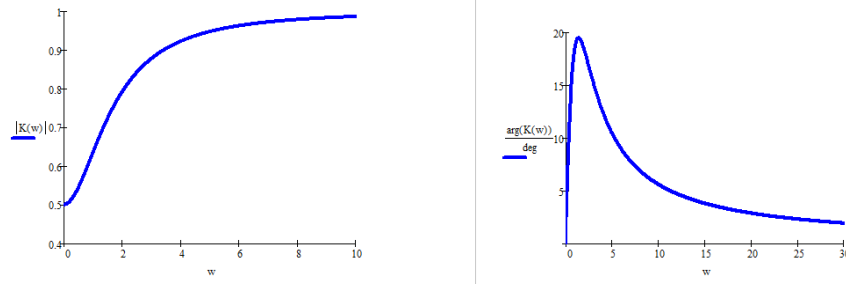


Рисунок 4.25 – Модуль та аргумент коефіцієнта передачі

Приклад 4.6. Якісно побудувати модуль та аргумент коефіцієнта передачі $K(p)$, використовуючи карту нулів та полюсів (рис. 4.26). Пояснити порядок побудови у випадку $K_0 > 0$

$$K(p) = K_0 \frac{p^2 + \omega_0^2}{(p + a)(p + b)}, \quad b > a.$$

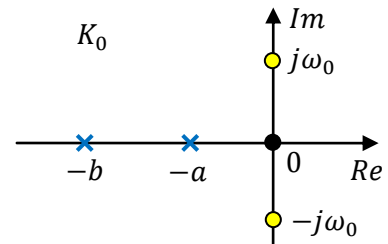


Рисунок 4.26 – Карта нулів та полюсів

Розв'язання

За теоремою Вієта

$$K(p) = K_0 \frac{(p + p_{01})(p + p_{02})}{(p + p_{\Pi 1})(p + p_{\Pi 2})}, \quad K_0 = K(0) = \frac{\omega_0^2}{a \cdot b}.$$

Нулі та полюси: $p_{01} = j\omega_0$, $p_{02} = -j\omega_0$, $p_{\Pi 1} = -a$, $p_{\Pi 2} = -b$. Побудуємо карту нулів та полюсів (рис. 4.27 а).

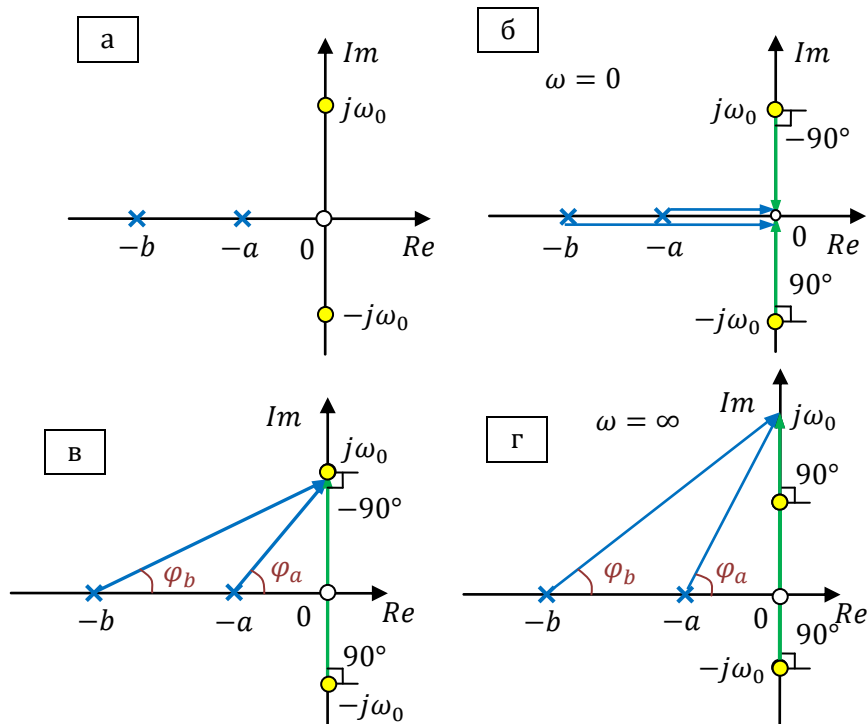


Рисунок 4.27 – Карта нулів та полюсів

Спочатку при частоті $\omega = 0$ довжини векторів чисельника та знаменника визначаються значенням нулів та полюсів схемної функції. В результаті модуль коефіцієнта передачі становить $K_0 = \omega_0^2 / (a \cdot b)$, а початковий аргумент становить $\varphi_0 = 0^\circ$, що показана на рис. 4.26 б. Далі довжини векторів починають рухатися по уявній осі, і доки вектори не перетнули значення $p = j\omega_0$, довжини трьох векторів будуть збільшуватися, а довжина вектор $p = j\omega_0$ зменшиться до нуля (рис. 4.27 в), причому аргумент буде мати стрибок фази на 180° , а модуль $|K(\omega)|$ зменшиться в нуль (рис. 4.28). Після перетину цієї точки модуль $|K(\omega)|$ буде збільшуватися до значення K_0 , аргумент зменшуватися до нуля (рис. 4.27 г).

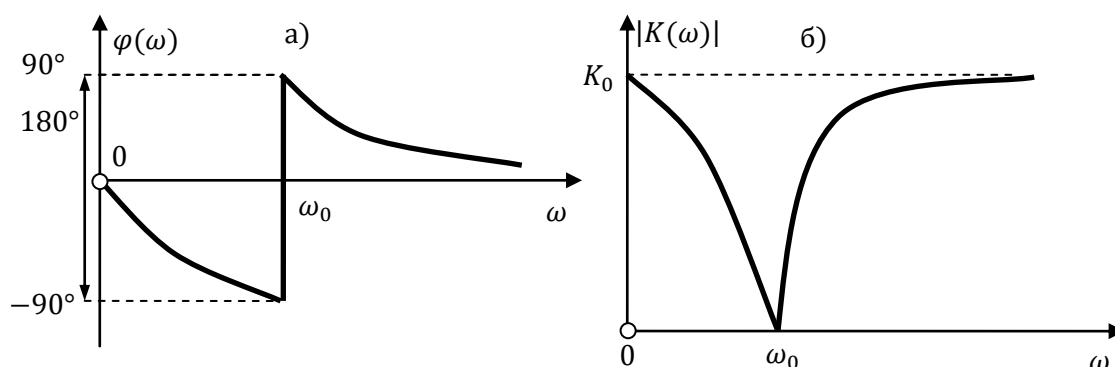
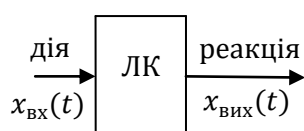


Рисунок 4.28 – Аргумент (а) та модуль коефіцієнта передачі

Якщо частота змінюється в широких межах від 0 до МГц, ГГц, то на осі абсцис зазвичай відкладають не ω , а її десятиковий логарифм $\lg [\omega]$ і одержують логарифмічну шкалу.

4.4. Знаходження реакції на довільну дію

Припустимо, що є лінійне коло (рис. 4.29).



Є дія $x_{BX}(t)$ і реакція $x_{VIX}(t)$ на неї. Дія і реакція зв'язані між собою схемною функцією

$$F(\omega) = \begin{Bmatrix} K_U, & K_I \\ Z_{BX}, & Z_{\text{ПЕР}} \\ Y_{BX}, & Y_{\text{ПЕР}} \end{Bmatrix}.$$

Рисунок 4.29 - Схема

Нехай дія у колі буде періодична $x_{BX}(t) = x_{BX}(t + T)$, що описується рядом Фур'є

$$x_{BX}(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n).$$

Визначимо реакцію $x_{VIX}(t)$ цього кола через схемну функцію $F(\omega)$, коли на вході діє $x_{BX}(t)$ за допомогою принципу суперпозиції. Для кожної гармонічної складової записуємо її комплексну амплітуду на даній частоті

$$A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \rightarrow A_n e^{j\varphi_n}.$$

При цьому модулі комплексних чисел перемножуються, а аргументи додаються на відповідних частотах

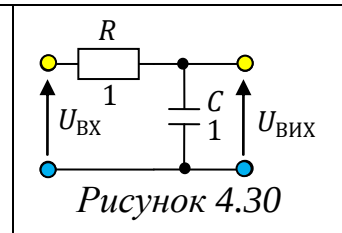
$$x_{\text{вих}}(t) = A_0 K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n K(n\Omega) \cos(n\Omega t + \varphi_n + \varphi_K(n\Omega)),$$

де $K(n\Omega)$ – амплітуда коефіцієнта передачі; $\varphi_K(n\Omega)$ – аргумент коефіцієнта передачі.

Для того, щоб вхідний сигнал не був спотворений необхідно, щоб комплексні амплітуди всіх гармонійних складових на вході множились на одно й те саме число.

Розглянемо приклад.

Приклад 4.7. У колі (рис. 4.30) знайти вихідну напругу $u_{\text{вих}}(t)$. Вхідна напруга на частоті $\omega = 10^6$ рад/с $u_{\text{вх}}(t) = 8 + 2 \cos(\omega t + 50^\circ) + 5 \cos(2\omega t + 60^\circ)$ В. Опори в кОм, ємності в нФ.



Розв'язання

Коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U(p) = \frac{u_{\text{вих}}}{u_{\text{вх}}} = \frac{g}{g + pC} = \frac{1}{1 + p}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою через частоту

$$K_U(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} e^{-j \arctg(\omega)}.$$

Комплексні амплітуди напруг на частотах 0, $\omega = 1$ та $\omega = 2$ рад/мкс

$$\dot{U}_{\text{вх}}(0) = 8, \quad \dot{U}_{\text{вх}}(1) = 2e^{j50^\circ}; \quad \dot{U}_{\text{вх}}(2) = 5e^{j60^\circ}.$$

Значення коефіцієнту передачі на частотах 0, $\omega = 1$ та $\omega = 2$ рад/мкс

$$K_U(\omega = 0) = \frac{1}{1} = 1;$$

$$K_U(\omega = 1) = \frac{1}{1 + j} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ};$$

$$K_U(\omega = 2) = \frac{1}{1 + 2j} = \frac{1}{\sqrt{5}e^{j63.5^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-j63.5^\circ}.$$

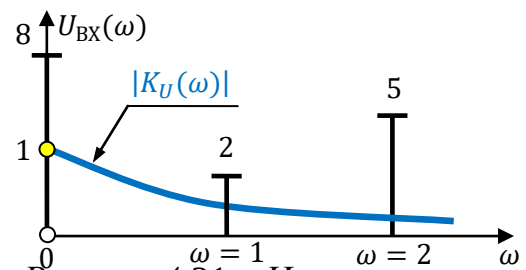


Рисунок 4.31 – Напруга на виході

Тоді визначимо комплексні вихідні напруги

$$\dot{U}_{\text{вих}}(0) = \dot{U}_{\text{вх}}(0) \cdot K_U(\omega = 0) = 8,$$

$$\dot{U}_{\text{вих}}(1) = \dot{U}_{\text{вх}}(1) \cdot K_U(\omega = 1) = 2e^{j50^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} = \sqrt{2} e^{j5^\circ};$$

$$\dot{U}_{\text{вих}}(2) = \dot{U}_{\text{вх}}(2) \cdot K_U(\omega = 2) = 5e^{j60^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-j63.5^\circ} = \sqrt{5} e^{-3.5^\circ j}.$$

У результаті вихідна напруга у гармонічній формі (рис. 4.30)

$$u_{\text{вих}}(t) = 8 + \sqrt{2} \cos(\omega t + 5^\circ) + \sqrt{5} \cos(2\omega t - 3.5^\circ) \text{ В.}$$

Відповідь: $u_{\text{вих}}(t) = 8 + \sqrt{2} \cos(\omega t + 5^\circ) + \sqrt{5} \cos(2\omega t - 3.5^\circ) \text{ В.}$

4.5. Поняття про чотириполюсники

4.5.1. Визначення та класифікація чотириполюсників

У радіоелектроніці розрахунок режиму роботи складного електричного кола часто зводиться у визначенні зв'язку між струмами та напругами різних її ділянок чи гілок. При цьому режим іншої частини кола може залишатися не відомим, хоча всі її параметри враховуються при розв'язанні задачі.

В таких умовах коло, що розглядається, може визначатися узагальненими параметрами на відповідних затискачах, відносно яких параметри задані чи можуть бути знайдені.

У якості таких елементів використовують чотириполюсники (ЧТП). Чотириполюсниками є фільтри, трансформатори, підсилювачі, каскади радіоприймачів та радіопередавачів, лінії зв'язку і т.д.

Надалі більш докладно розглянемо теорію прохідні чотириполюсників.

Прохідний чотириполюсник – це чотириполюсник, у якого два вхідних полюси та два вихідних, що мають спільний вузол.

Умовне зображення чотириполюсників подана на рис. 4.32. На схемі його позначають прямокутником чи колом із чотирма затискачами, всередині якого стоїть аббревіатура ЧТП. Це пряме ввімкнення чотириполюсника

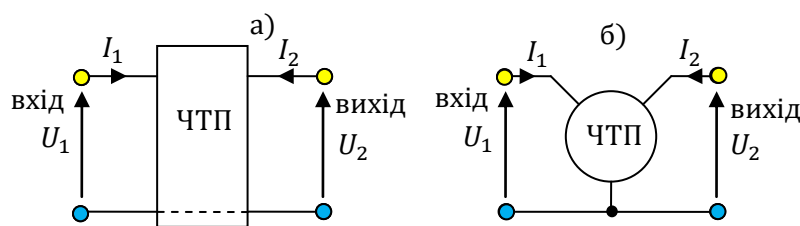


Рисунок 4.32 – Схеми зображення чотириполюсників

Пару полюсів, до яких вмикають джерело живлення, називають вхідними затискачами (входом). Пару полюсів, до яких вмикають навантаження, називають вихідними затискачами (виходом).

Чотириполюсник є передавальною ланкою між джерелом та навантаженням. При цьому важливо знати струми та напруги на виводах чотириполюсника, а не в середині його.

Чотириполюсники класифікують:

1. *За наявністю нелінійних елементів* – лінійні або нелінійні.

Лінійним називається чотириполюсник, який складається лише з лінійних елементів, а нелінійним – якщо чотириполюсник містить хоча б один нелінійний елемент

2. *За наявністю джерел* – активні та пасивні.

Активний ЧТП містить хоча б одне джерело, а пасивний ЧТП не містить жодних джерел.

3. За схемою внутрішніх з'єднань чотириполюсники можуть бути Г-подібні (рис. 4.33 а), П-подібні (рис. 4.33 б), Т-подібні (рис. 4.33 в), мостові (рис. 4.33 г) та Т-подібні мостові (рис. 4.33 д).

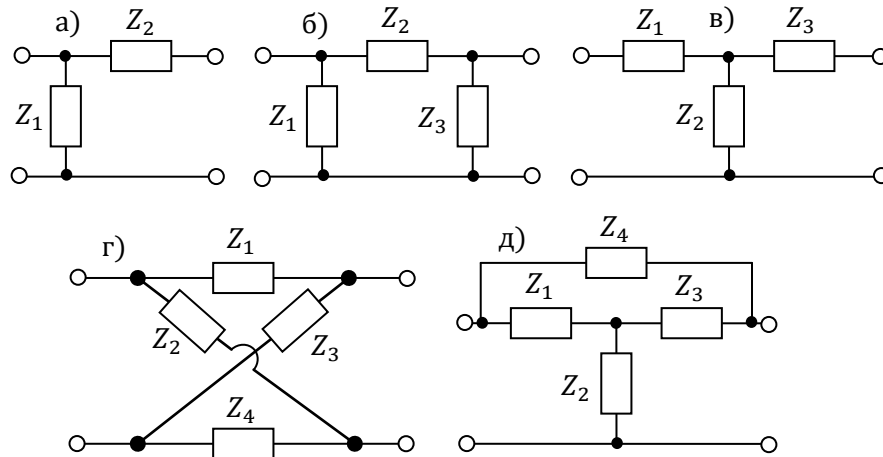


Рисунок 4.33 – Схеми з'єднання елементів чотириполюсників

4. За режимно-параметричними властивостями ЧТП бувають симетричними та несиметричними.

Чотириполюсник вважають симетричним, якщо зміна місць його входу та виходу не призводить до зміни струмів та напруг у частинах кола, ввімкнених до первинних та вторинних полюсів, а у несиметричному – зміна місць його входу та виходу призводить до зміни струмів та напруг у частинах кола.

5. За кількістю елементів ЧТП бувають одно-, дво-, три-, чотири- та багатоеlementні. Одноелементні чотириполюсники зображено на рис. 4.34. Г-подібний чотириполюсник (рис. 4.33 а) є двоелементним, а Т-подібний (рис. 4.33 б) та П-подібний (рис. 4.33 в) є триелементними.

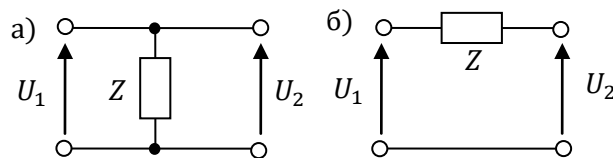


Рисунок 4.34 – Однополюсні чотириполюсники

6. За режимом роботи чотириполюсники бувають автономними та неавтономними. Якщо первинні параметри чотириполюсника не залежать від параметрів схеми, що під'єднана до його зовнішніх полюсів, то такий чотириполюсник називається автономним, а якщо залежать – неавтономним.

Два ЧТП називаються **еквівалентними**, якщо заміна одного ЧТП на інший не призведе до зміни зовнішніх струмів та напруг.

4.5.2. Режими роботи чотириполіусників

Розглянемо режими роботи чотириполіусника. Чотириполіусник може працювати у нормальному режимі роботи (режим робіт із опором навантаження), у режимі короткого замикання та у режимі холостого ходу.

У нормальному режимі роботи для чотириполіусника, що зображений на рис. 4.35, до входу підключається джерело, а до виходу навантаження. Струм у навантаженні визначається із закону Ома

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_H}.$$

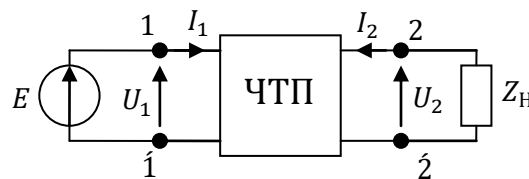


Рисунок 4.35 – Схема чотириполіусника у нормальному режимі

У режимі короткого замикання (рис. 4.36) опір навантаження дорівнює нулю, тобто $Z_H = 0$. Отже, на виході утворюється коротке замикання. Тоді напруга у навантаженні визначається

$$U_2 = I_2 \cdot Z_H = I_2 \cdot 0 = 0.$$

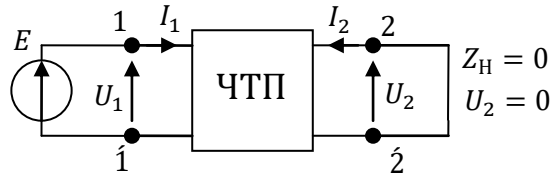


Рисунок 4.36 – Схема чотириполіусника у режимі КЗ

У режимі холостого ходу (рис. 4.37), коли клема на виході розірвані (опір $Z_H = \infty$), струм дорівнює нулю $I_2 = 0$.

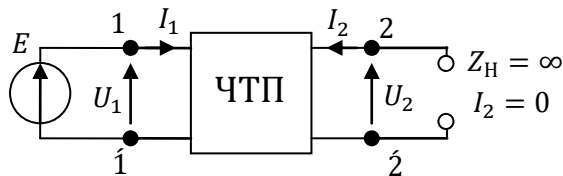


Рисунок 4.37 – Схема чотириполіусника у режимі ХХ

4.5.3. Системи параметрів чотириполюсників

Режим чотириполюсника характеризується вхідними і вихідними напругами і струмами.

Математична модель чотириполюсника являє собою два рівняння, які записані відносно вхідних та вихідних струмів та напруг, і має назву **основних рівнянь чотириполюсника**.

Рівняння зв'язують між собою два струми та дві напруги. Дві із цих чотирьох величин вважаються заданими і враховуються як дія на коло. А дві інші величини визначаються із системи основних рівнянь. Їх називають відгуком кола. Будь-які із цих чотирьох величин можуть бути як збудженням, так і відгуком. Отже, для кожного чотириполюсника можна записати шість основних систем рівнянь: Y , Z , H , A , F , B .

Внаслідок лінійності можна написати шість систем рівнянь, що зв'язують між собою струми та напруги на вході та виході чотириполюсника (рис. 4.38).

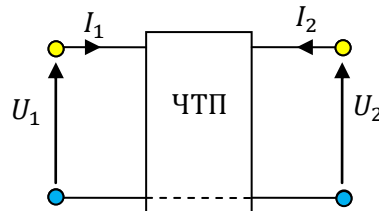


Рисунок 4.38 – Схема чотириполюсника

Система Z -параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Система Y -параметрів чотириполюсників:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Система h -параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Система A -параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_1 = A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot I_2, \\ I_1 = A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Коли розглядаються A -параметри, вихідний I_2 струм направляють назовні.

Система B – параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} U_2 = B_{11} \cdot U_1 + B_{12} \cdot I_1, \\ I_2 = B_{21} \cdot U_1 + B_{22} \cdot I_1; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}.$$

Система F -параметрів чотириполюсника

$$\begin{cases} I_1 = F_{11} \cdot U_1 + F_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = F_{21} \cdot U_1 + F_{22} \cdot I_2; \end{cases} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти при збудженнях в основних системах рівнянь називаються первинними параметрами чотириполюсника. Якщо відомі первинні параметри однієї з основних систем чотириполюсника, то завжди можливий перехід до будь-якої іншої системи. Для цього застосовують форми перерахунку, які наведені в багатьох посібниках та довідниках.

Кожному параметру можна надати фізичного змісту.

Наприклад,

$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right _{I_2=0} = Z_{\text{ВХ}}$	– вхідний опір у режимі холостого ходу на виході (рис. 4.39 а);
$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right _{U_2=0} = Y_{\text{ВХ}}$	– вхідна провідність у режимі короткого замикання на виході (рис. 4.39 б);
$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right _{U_2=0} = K_i$	– коефіцієнт передачі за струмом у режимі короткого замикання на виході (рис. 4.39 в);
$F_{21} = \left. \frac{U_2}{U_1} \right _{I_2=0} = K_u$	– коефіцієнт передачі за напругою у режимі холостого ходу на виході (рис. 4.39 г).

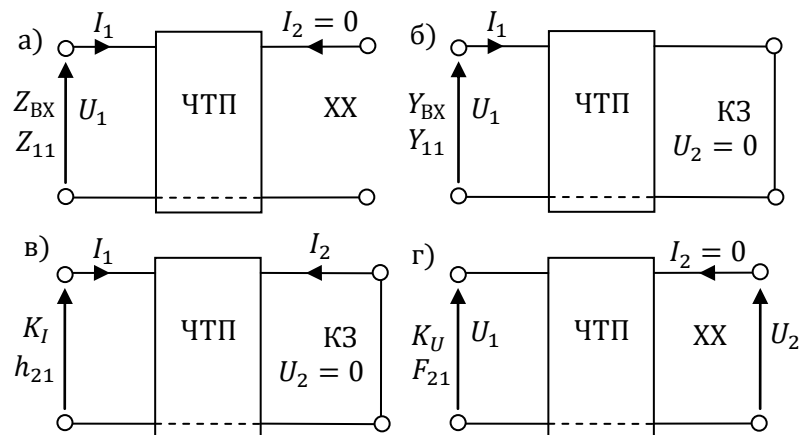


Рисунок 4.39 – Схеми до фізичного змісту параметрів чотириполюсника

4.6. Схеми заміщення чотириполіусників

4.6.1. Схема заміщення Z-параметрів

Система Z-параметрів чотириполіусника:

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2. \end{cases}$$

Фізичний зміст параметрів

$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right _{I_2=0} = Z_{\text{ВХ}}$	– вхідний опір у режимі холостого ходу на виході (рис. 4.40 а);
$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right _{I_1=0} = Z_{\text{ПЕРЕХ.12}}$	– зворотний перехідний опір у режимі холостого ходу на вході (рис. 4.40 б);
$Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right _{I_2=0} = Z_{\text{ПЕРЕХ.21}}$	– прямий перехідний опір у режимі холостого ходу на виході (рис. 4.40 в);
$Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right _{I_1=0} = Z_{\text{ВИХ}}$	– вихідний опір у режимі холостого ходу на вході (рис. 4.40 г).

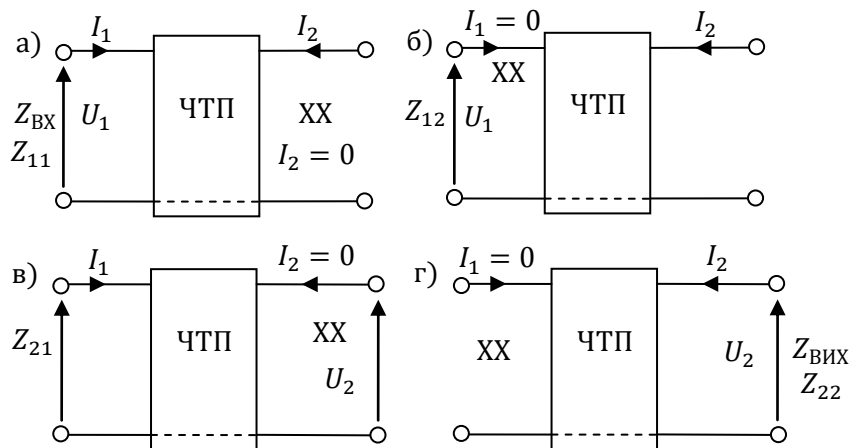


Рисунок 4.40 – Схеми до фізичного змісту Z-параметрів чотириполіусника

Здійснимо трактовку параметрів

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 = U_{1a} + U_{1b}, \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 = U_{2a} + U_{2b}. \end{cases}$$

Надамо трактовку доданкам. Доданок $U_{1a} = Z_{11} \cdot I_1$ можна трактувати як вхідний опір $Z_{11} = Z_{\text{ВХ}}$ через який протікає вхідний струм I_1 та прикладена напруга U_{1a} . Доданок $U_{1b} = Z_{12} \cdot I_2$ можна трактувати як джерело вхідної напруги, що керується вихідним струмом I_2 . Доданок $U_{2a} = Z_{21} \cdot I_1$ можна трактувати як джерело вихідної напруги, що керується вхідним струмом I_1 . Доданок $U_{2b} = Z_{22} \cdot I_2$ можна трактувати як вхідний опір $Z_{22} = Z_{\text{ВИХ}}$ через який протікає вихідний струм I_2 та прикладена напруга U_{2b} .

В результаті еквівалентна схема заміщення Z -параметрів чотириполюсника представлена на рис. 4.41.

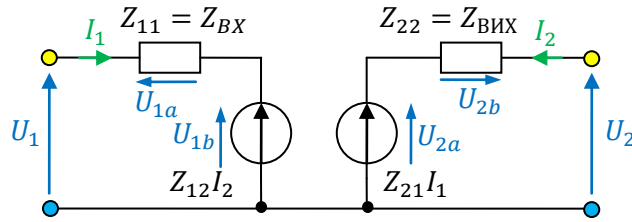


Рисунок 4.41 – Схема заміщення Z -параметрів

Для пасивних чотириполюсників, щоб одержати схему заміщення Z -параметрів чотириполюсника доцільно використовувати Т-подібну схему заміщення (рис. 4.42).

Рисунок 4.42 – Т-подібна схема заміщення чотириполюсника	Для кола (рис. 4.42) запишемо матрицю опорів $[Z] = \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b \\ Z_b & Z_b + Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}.$ Звідси бачимо, що $Z_b = Z_{12} = Z_{21},$ $Z_{11} = Z_a + Z_b \rightarrow Z_a = Z_{11} - Z_b = Z_{11} - Z_{12},$ $Z_{22} = Z_b + Z_c \rightarrow Z_c = Z_{22} - Z_b = Z_{22} - Z_{21}.$

Якщо $Z_{12} \neq Z_{21}$, то можливі два варіанти.

Припустимо, що $Z_{21} = Z_{12} + Z_i$, $Z_i = Z_{21} - Z_{12}$, тоді запишемо матрицю опорів:

$$[Z_N] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} + Z_i & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Z_i & 0 \end{bmatrix},$$

де перша матриця буде симетрична головній діагоналі.

Записаній матриці $[Z_N]$ відповідає Т-подібна схема заміщення, що містить джерело напруги, що керується струмом I_1 . Тоді зобразимо схему заміщення для всієї системи рівнянь (рис. 4.43 а).

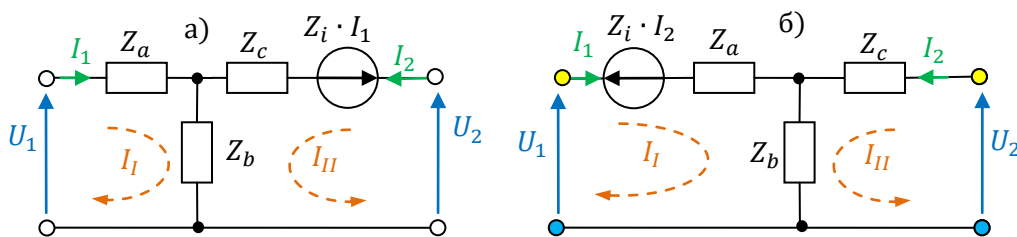


Рисунок 4.43 – Еквівалентні схеми

Припустимо, що $Z_{12} = Z_{21} + Z_i$, $Z_i = Z_{12} - Z_{21}$, тоді запишемо матрицю опорів:

$$[Z_N] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{21} + Z_i \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Z_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де перша матриця буде симетрична головній діагоналі.

Записаній матриці $[Z_N]$ відповідає Т-подібна схема заміщення, що містить джерело напруги, що керується струмом I_2 . Тоді зобразимо схему заміщення для всієї системи рівнянь (рис. 4.43 б).

4.6.2. Схема заміщення Y-параметрів

Система Y-параметрів чотириполісника:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2. \end{cases}$$

Фізичний зміст параметрів

$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right _{U_2=0} = Y_{\text{ВХ}}$	– вхідна провідність у режимі короткого замикання на виході (рис. 4.44 а);
$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right _{U_1=0} = Y_{\text{ПЕРЕД.12}}$	– зворотна передатна провідність у режимі короткого замикання на вході (рис. 4.44 б);
$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right _{U_2=0} = Y_{\text{ПЕРЕД.21}}$	– пряма передатна провідність у режимі короткого замикання на виході (рис. 4.44 в);
$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right _{U_1=0} = Y_{\text{ВИХ}}$	– вихідна провідність у режимі короткого замикання на вході (рис. 4.44 г).

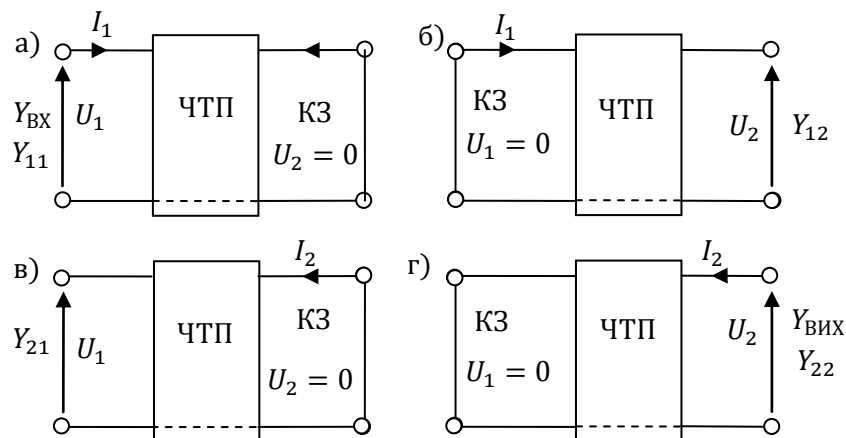


Рисунок 4.44 – Схеми до фізичного змісту Y-параметрів чотириполісника

Здійснимо трактовку параметрів

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2 = I_{1a} + I_{1b}, \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2 = I_{2a} + I_{2b}. \end{cases}$$

Надамо трактовку доданкам. Доданок $I_{1a} = Y_{11} \cdot U_1$ можна трактувати як вхідну провідність $Y_{11} = Y_{\text{ВХ}}$ через яку протікає струм I_{1a} та прикладена напруга U_1 . Доданок $I_{1b} = Y_{12} \cdot U_2$ можна трактувати як джерело струму на вході, що керується вихідною напругою U_2 . Доданок $I_{2a} = Y_{21} \cdot U_1$ можна трактувати як джерело струму на виході, що керується вхідною напругою U_1 . Доданок $I_{2b} = Y_{22} \cdot U_2$ можна трактувати як вихідну провідність $Y_{22} = Y_{\text{ВИХ}}$ через яку протікає струм I_{2a} та прикладена напруга U_2 .

В результаті еквівалентна схема заміщення Z-параметрів чотирьохполюсника представлена на рис. 4.45.

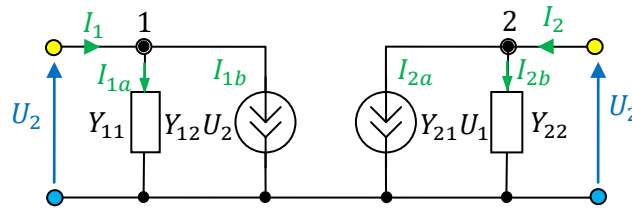


Рисунок 4.45 – Схема заміщення Z- параметрів

Для пасивних чотирьохполюсників, щоб одержати схему заміщення Y-параметрів чотирьохполюсника доцільно використовувати П-подібну схему заміщення (рис. 4.46).

Рисунок 4.46 – П-подібна схема заміщення чотирьохполюсника	Для кола (рис. 4.46) запишемо матрицю провідностей $[Y] = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b & -Y_b \\ -Y_b & Y_b + Y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$ Звідси бачимо, що $Y_b = -Y_{12} = -Y_{21},$ $Y_{11} = Y_a + Y_b \rightarrow Y_a = Y_{11} - Y_b = Y_{11} + Y_{12},$ $Y_{22} = Y_b + Y_c \rightarrow Y_c = Y_{22} - Y_b = Y_{22} + Y_{21}.$

Якщо $Y_{12} \neq Y_{21}$, то можливі два варіанти.

Припустимо, що $Y_{21} = Y_{12} + S$, $S = Y_{21} - Y_{12}$, тоді запишемо матрицю провідностей:

$$[Y_N] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} + S & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & 0 \end{bmatrix},$$

де перша матриця буде симетрична головній діагоналі.

Записаній матриці $[Y_N]$ відповідає П-подібна схема заміщення, що містить джерело струму, кероване напругою U_1 . Тоді зобразимо схему заміщення для всієї системи рівнянь (рис. 4.47 а).

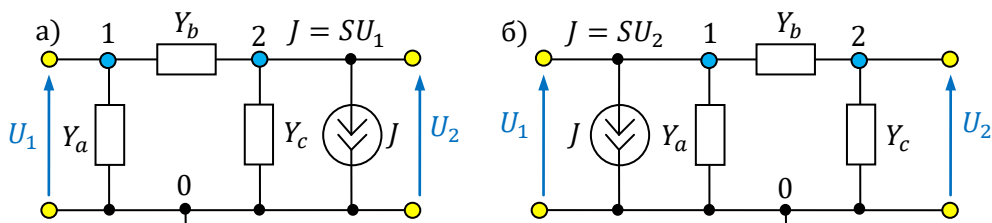


Рисунок 4.47 – Еквівалентні схеми

Припустимо, що $Y_{12} = Y_{21} + S$, $S = Y_{12} - Y_{21}$, тоді запишемо матрицю провідностей:

$$[Y_N] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} + S \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де перша матриця буде симетрична головній діагоналі.

Записаній матриці $[Y_N]$ відповідає П-подібна схема заміщення, що містить джерело струму, кероване напругою U_2 . Тоді зобразимо схему заміщення для всієї системи рівнянь (рис. 4.47 б).

4.6.3. Схема заміщення h-параметрів

Система h-параметрів чотириполюсника:

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2. \end{cases}$$

Фізичний зміст h-параметрів

$h_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right _{U_2=0} = Z_{\text{ВХ}}$	– вхідний опір у режимі короткого замикання на виході (рис. 4.48 а);
$h_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right _{I_1=0} = \frac{1}{K_U}$	– величина обернена до коефіцієнта передачі за напругою у режимі холостого ходу на вході (рис. 4.48 б);
$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right _{U_2=0} = K_I$	– коефіцієнт передачі за струмом у режимі короткого замикання на виході (рис. 4.48 в);
$h_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right _{I_1=0} = Y_{\text{ВІХ}}$	– вихідна провідність у режимі холостого ходу на вході (рис. 4.48 г).

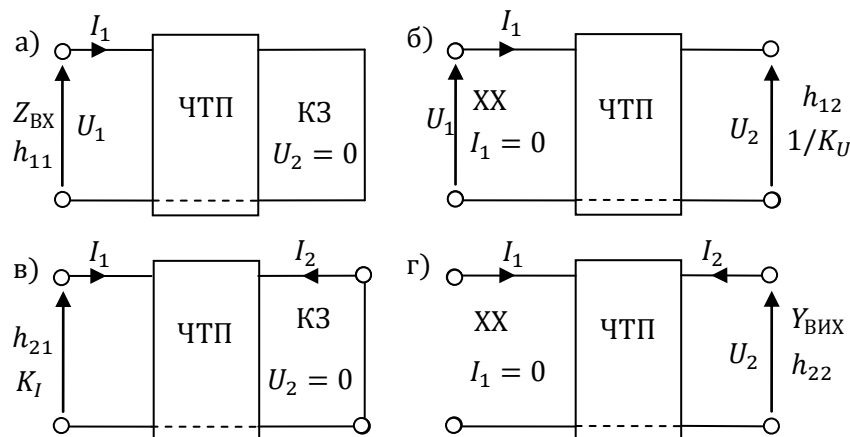
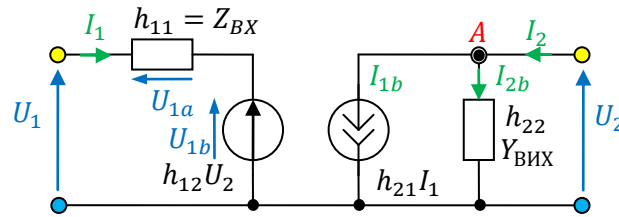


Рисунок 4.48 – Схеми до фізичного змісту h-параметрів чотириполюсника

Здійснимо трактовку параметрів

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2 = U_{1a} + U_{1b}, \\ I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2 = I_{2a} + I_{2b}. \end{cases}$$

Надамо трактовку доданкам. Доданок $U_{1a} = h_{11} \cdot I_1$ можна трактувати як вхідний опір $h_{11} = Z_{\text{ВХ}}$, через який протікає вхідний струм I_1 та прикладена напруга U_{1a} . Доданок $U_{1b} = h_{12} \cdot U_2$ можна трактувати як джерело вхідної напруги, що керується вихідною напругою U_2 . Доданок $I_{2a} = h_{21} \cdot I_1$ можна трактувати як джерело вихідного струму, що керується вхідним струмом I_1 . Доданок $I_{2b} = h_{22} \cdot U_2$ можна трактувати як вихідний опір $h_{22} = Y_{\text{ВІХ}}$, через який протікає вихідний струм I_{2b} та прикладена напруга U_2 . В результаті отримаємо схему (рис. 4.49).

Рисунок 4.49 – Схема заміщення h - параметрів

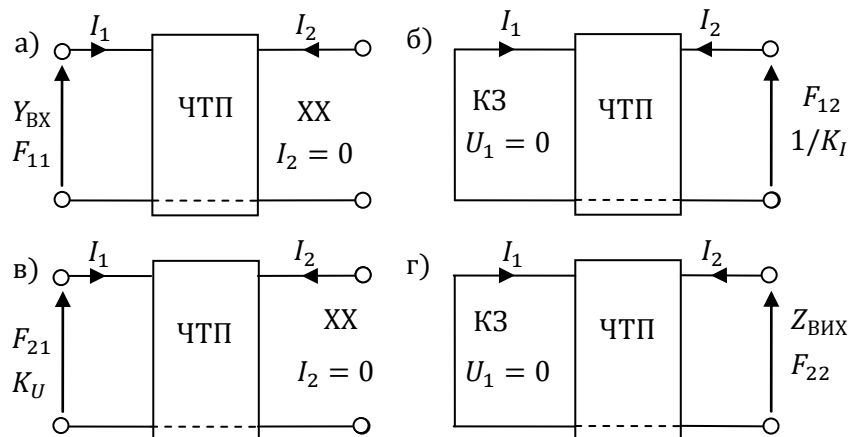
4.6.4. Схема заміщення F -параметрів

Система F -параметрів чотирьохполюсника:

$$\begin{cases} I_1 = F_{11} \cdot U_1 + F_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = F_{21} \cdot U_1 + F_{22} \cdot I_2. \end{cases}$$

Фізичний зміст F -параметрів

$F_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right _{I_2=0} = Y_{BX}$	– вхідна провідність у режимі холостого ходу на виході (рис. 4.50 а);
$F_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right _{U_1=0} = \frac{1}{K_I}$	– величина обернена до коефіцієнта передачі за струмом у короткого замикання на вході (рис. 4.50 б);
$F_{21} = \left. \frac{U_2}{U_1} \right _{I_2=0} = K_U$	– коефіцієнт передачі за напругою у режимі холостого ходу на виході (рис. 4.50 в);
$F_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right _{U_1=0} = Z_{VIX}$	– вихідний опір у режимі короткого замикання на вході (рис. 4.50 г).

Рисунок 4.50 – Схеми до фізичного змісту F -параметрів чотирьохполюсника

Здійснимо трактовку параметрів

$$\begin{cases} I_1 = F_{11} \cdot U_1 + F_{12} \cdot I_2 = I_{1a} + I_{1b}, \\ U_2 = F_{21} \cdot U_1 + F_{22} \cdot I_2 = U_{2a} + U_{2b}. \end{cases}$$

Надамо трактовку доданкам. Доданок $I_{1a} = F_{11} \cdot U_1$ можна трактувати як вхідну провідність $F_{11} = Y_{\text{ВХ}}$, через яку протікає вхідний струм I_{1a} та прикладена вхідна напруга U_1 . Доданок $I_{1b} = F_{12} \cdot I_2$ можна трактувати як джерело струму, що керується вихідним струмом I_2 . Доданок $U_{2a} = F_{21} \cdot U_1$ можна трактувати як джерело вихідної напруги, що керується вхідною напругою U_1 . Доданок $U_{2b} = F_{22} \cdot I_2$ можна трактувати як вихідний опір $F_{22} = Z_{\text{ВІХ}}$, через яку протікає вихідний струм I_2 та прикладена вихідна напруга U_{2b} .

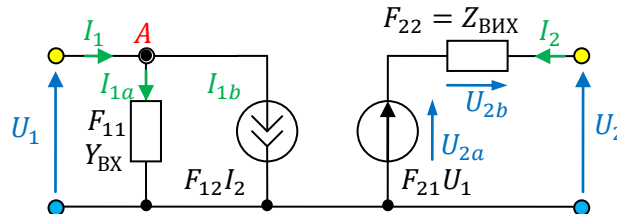


Рисунок 4.51 – Схема заміщення F - параметрів

4.6.5. Схема заміщення A -параметрів

A -параметри ще називають $ABCD$ -параметрами.

Система рівнянь для $ABCD$ -параметрів:

$$\begin{cases} U_1 = A \cdot U_2 + B \cdot I_2, \\ I_1 = C \cdot U_2 + D \cdot I_2. \end{cases}$$

Визначимо фізичний зміст кожного з $ABCD$ -параметрів:

Фізичний зміст параметрів

$A = \left. \frac{U_1}{U_2} \right _{I_2=0} = \frac{1}{K_u}$	– величина обернена до коефіцієнта передачі за напругою у режимі холостого ходу на виході (рис. 4.52 а);
$B = \left. \frac{U_1}{I_2} \right _{U_2=0} = Z_{12}$	– передавальний опір у режимі короткого замикання на виході (рис. 4.52 б);
$C = \left. \frac{I_1}{U_2} \right _{I_2=0} = Y_{12}$	– передавальна провідність у режимі холостого ходу на виході (рис. 4.52 в);
$D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right _{U_2=0} = \frac{1}{K_I}$	– величина обернена до коефіцієнта передачі за струмом у режимі короткого замикання на виході (рис. 4.52 г).

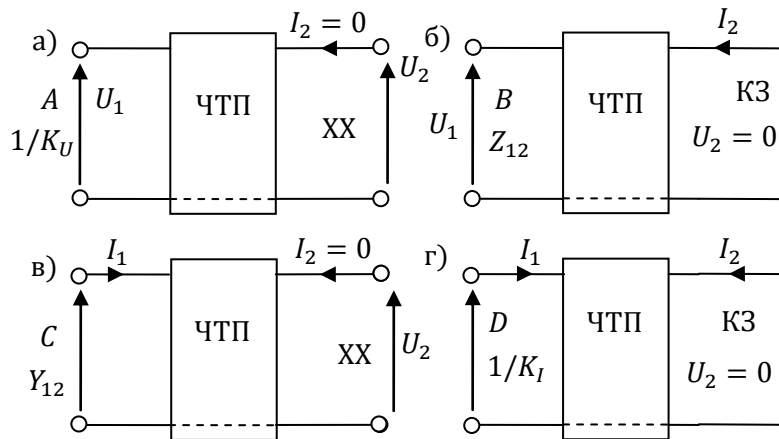


Рисунок 4.52 – Схеми до фізичного змісту А-параметрів чотиріполюсника

Здійснимо трактовку параметрів

$$\begin{cases} U_1 = A \cdot U_2 + B \cdot I_2 = U_{1a} + U_{1b}, \\ I_1 = C \cdot U_2 + D \cdot I_2 = I_{1a} + I_{1b}. \end{cases}$$

У першому рівнянні доданок $U_{1a} = A \cdot U_2$ можна трактувати як джерело напруги, що керується напругою U_2 ; а доданок $U_{1b} = B \cdot I_2$ можна трактувати як джерело напруги, що керується струмом I_2 . У другому рівнянні доданок $I_{1a} = C \cdot U_2$ можна трактувати як джерело струму, що керується напругою U_2 ; а доданок $I_{1b} = D \cdot I_2$ можна трактувати як джерело струму, що керується струмом I_2 .

У результаті зобразимо еквівалентні схеми заміщення для кожного із рівнянь окремо (рис. 4.53). Отже, виходячи із цього бачимо, що однозначно побудувати схему не можливо.

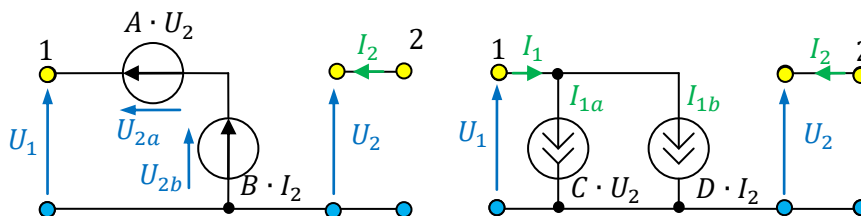


Рисунок 4.53 – Схеми заміщення А-параметрів

4.6.6. Приклад розв'язку задач

Приклад 4.6. У колі (рис. 4.54) знайти h -параметри чотириполосника на частоті $\omega = 10^6$ рад/с. Результати представити у показниковій формі. Числові значення елементів кола: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн.

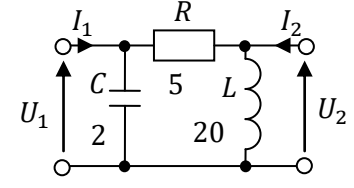


Рисунок 4.54 – Схема

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, провідність – мСім, частота – рад/мкс.

Системи рівнянь чотириполосника для h -параметрів

$$\begin{cases} U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2; \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2. \end{cases}$$

Визначимо частоту $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 16 \cdot 10^3 = 10^5$ рад/с = 0.1 рад/мкс

Комплексні опори реактивних елементів

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 0.1 \cdot 2} = -5j \text{ кОм}; \quad Z_L = j\omega L = 0.1 \cdot 20 \cdot j = 2j \text{ кОм}$$

За формулою дільника струму (рис. 4.54 а)

$$I_2 = -\frac{I_1 \cdot Z_C}{R + Z_C}.$$

За формулою дільника напруги та вхідний опір (рис. 4.54 б)

$$U_2 = \frac{U_1 \cdot Z_L}{R + Z_L}; \quad Z_{\text{ВІХ}} = \frac{Z_L(Z_C + R)}{Z_L + Z_C + R}.$$

Фізичний зміст

$$h_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = Z_{\text{ВХ}} = \frac{R \cdot Z_C}{R + Z_C} = \frac{5 \cdot (-5j)}{5 - 5j} = 2.5 - 2.5j = 2.5\sqrt{2}e^{-j45^\circ};$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0} = K_I = -\frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{5j}{5 - 5j} = -0.5 + 0.5j = 0.5\sqrt{2}e^{j135^\circ};$$

$$h_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{K_U} = \frac{R + Z_L}{Z_L} = \frac{5 + 2j}{2j} = 1 - 2.5j = 2.7e^{-j68.2^\circ};$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0} = Y_{\text{ВІХ}} = \frac{Z_L + Z_C + R}{Z_L(R + Z_C)} = \frac{2j - 5j + 5}{2j(5 - 5j)} = 0.1 - 0.4j = 0.4e^{-j76^\circ}.$$

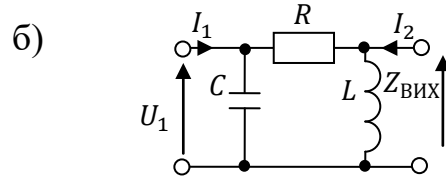
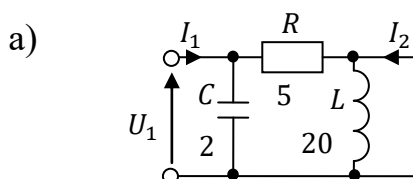


Рисунок 4.54 – Еквівалентні схеми

Відповідь: $h_{11} = 2.5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}$; $h_{12} = 2.7e^{-j68.2^\circ}$; $h_{21} = 0.5\sqrt{2}e^{j135^\circ}$,
 $h_{22} = 0.4e^{-j76^\circ}$.

4.7. Приклади еквівалентності

4.7.1. Зв'язок між параметрами чотириполісників

Знаючи одні параметри чотириполісника, можна перейти до інших. Наприклад, шляхом перетворення Z -матриці можна одержати Y -матрицю.

Система рівнянь чотириполісника для Y -параметрів:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Із системи рівнянь визначимо напруги за методом Крамера:

$$U_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_Y} = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & Y_{12} \\ I_2 & Y_{22} \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{I_1 Y_{22} - I_2 Y_{12}}{\Delta_Y} = I_1 \frac{Y_{22}}{\Delta_Y} - I_2 \frac{Y_{12}}{\Delta_Y};$$

$$U_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_Y} = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & I_1 \\ Y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{I_2 Y_{11} - I_1 Y_{21}}{\Delta_Y} = I_2 \frac{Y_{11}}{\Delta_Y} - I_1 \frac{Y_{21}}{\Delta_Y}.$$

де $\Delta_Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}$

Система рівнянь чотириполісника для Z -параметрів:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Тепер запишемо, як визначаються Z -параметри через Y :

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta_Y}, \quad Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{\Delta_Y}, \quad Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{\Delta_Y}, \quad Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\Delta_Y}.$$

Остаточно запишемо

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{22}}{\Delta_Y} & -\frac{Y_{12}}{\Delta_Y} \\ -\frac{Y_{21}}{\Delta_Y} & \frac{Y_{11}}{\Delta_Y} \end{bmatrix}.$$

Таким чином, щоб перейти від Y -параметрів до Z -параметрів необхідно визначити зворотну матрицю Y -параметрів:

$$[Z] = [Y]^{-1}.$$

А щоб перейти від Z -параметрів до Y -параметрів необхідно визначити зворотну матрицю Z -параметрів:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = [Z]^{-1} = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\Delta_Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z} \\ -\frac{Z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta_Z} \end{bmatrix}.$$

Якщо виразити струми через h -параметри, то коефіцієнти біля напруг i будуть Y -параметрами. Запишемо системи рівнянь для h - та Y -параметрів:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2; \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2. \end{cases}$$

Проаналізувавши два вирази виразимо із системи для h -параметрів із першого рівняння струм I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{h_{11}} U_1 - \frac{h_{12}}{h_{11}} U_2.$$

Підставимо вираз струму у друге рівняння для системи h -параметрів:

$$\begin{aligned} I_2 &= h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2 = h_{21} \cdot \left(\frac{1}{h_{11}} U_1 - \frac{h_{12}}{h_{11}} U_2 \right) + h_{22} \cdot U_2 = \\ &= \frac{h_{21}}{h_{11}} U_1 + \left(h_{22} - \frac{h_{21} h_{12}}{h_{11}} \right) U_2 = \frac{h_{21}}{h_{11}} U_1 + \left(\frac{h_{22} h_{11} - h_{21} h_{12}}{h_{11}} \right) U_2. \end{aligned}$$

Таким чином, запишемо

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \Delta_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{h_{22} h_{11} - h_{21} h_{12}}{h_{11}} \end{bmatrix}.$$

Якщо виразити струми через A -параметри, то коефіцієнти біля напруг i будуть Z -параметрами. Запишемо системи рівнянь для Z - та A -параметрів:

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2. \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 = A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot I_2, \\ I_1 = A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot I_2; \end{cases}$$

Проаналізувавши два вирази виразимо із системи для A -параметрів із другого рівняння напругу U_2 :

$$U_2 = \frac{1}{A_{21}} I_1 - \frac{A_{22}}{A_{21}} I_2.$$

Підставимо вираз напруги у перше рівняння для системи A -параметрів:

$$\begin{aligned} U_1 &= A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot I_2 = A_{11} \cdot \left(\frac{1}{A_{21}} I_1 - \frac{A_{22}}{A_{21}} I_2 \right) + A_{12} \cdot I_2 = \\ &= \frac{A_{11}}{A_{21}} I_1 + \left(A_{12} - \frac{A_{11} A_{22}}{A_{21}} \right) I_2 = \frac{A_{11}}{A_{21}} I_1 - \left(\frac{A_{22} A_{11} - A_{21} A_{12}}{A_{21}} \right) I_2. \end{aligned}$$

Таким чином, запишемо

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{A_{21}} \begin{bmatrix} A_{11} & -\Delta_A \\ 1 & -A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & -\frac{A_{22} A_{11} - A_{21} A_{12}}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & -\frac{A_{22}}{A_{21}} \end{bmatrix}.$$

Але при переході від одних параметрів до інших потрібно пам'ятати, що знаки всіх параметрів чітко прив'язані до напрямку струмів і напруг.

4.7.2. Перетворення трикутник-зірка

Доведемо перетворення «трикутник» – «зірка» за допомогою теорії ЧТП. Розглянемо Т- та П-подібної схеми чотириполюсника (рис. 4.55).

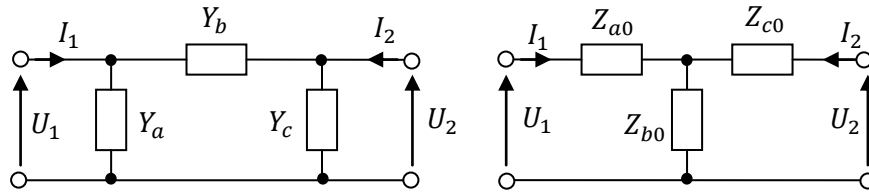


Рисунок 4.55 – Еквівалентні схеми

1. Зв'язок між Y- та Z-параметрами (вони зв'язані через зворотні матриці):

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{a0} + Z_{b0} & Z_{b0} \\ Z_{b0} & Z_{b0} + Z_{c0} \end{bmatrix}; \quad [Y] = \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}.$$

Запишемо обернені матриці:

$$[Z] = [Y]^{-1} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}; \quad [Y] = [Z]^{-1} = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix},$$

де Δ_Z та Δ_Y – визначники Z- та Y-матриць відповідно.

2. Параметри ЧТП виражаємо через елементи схем заміщення.

Визначимо Z_b через провідність:

$$\begin{aligned} Z_b &= \frac{1}{Y_b} = -\frac{1}{Y_{12}} = \frac{\Delta_Z}{Z_{12}} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{12}} = \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{12}} - Z_{21} = \\ &= \frac{(Z_{a0} + Z_{b0})(Z_{b0} + Z_{c0})}{Z_{b0}} - Z_{b0} = \\ &= \frac{Z_{a0}Z_{b0} + Z_{b0}^2 + Z_{a0}Z_{c0} + Z_{b0}Z_{c0}}{Z_{b0}} - Z_{b0} = Z_{a0} + Z_{c0} + \frac{Z_{a0}Z_{c0}}{Z_{b0}}. \end{aligned}$$

3. Визначимо опір Z_a через провідність.

Опір Z_a через провідність:

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{1}{Y_a} = \frac{1}{Y_{11} + Y_{12}} = \frac{1}{\frac{Z_{22}}{\Delta_Z} - \frac{Z_{12}}{\Delta_Z}} = \frac{\Delta_Z}{Z_{22} - Z_{12}} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} - Z_{12}} = \\ &= \frac{(Z_{a0} + Z_{b0})(Z_{b0} + Z_{c0}) - Z_{b0}^2}{Z_{b0} + Z_{c0} - Z_{b0}} = \frac{Z_{a0}Z_{b0} + Z_{a0}Z_{c0} + Z_{c0}Z_{b0}}{Z_{c0}} = \\ &= Z_{a0} + Z_{b0} + \frac{Z_{a0}Z_{b0}}{Z_{c0}}. \end{aligned}$$

4. Визначимо опір Z_c через провідність:

$$\begin{aligned} Z_c &= \frac{1}{Y_c} = \frac{1}{Y_{22} + Y_{21}} = \frac{1}{\frac{Z_{11}}{\Delta_Z} - \frac{Z_{21}}{\Delta_Z}} = \frac{\Delta_Z}{Z_{11} - Z_{21}} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} - Z_{21}} = \\ &= \frac{(Z_{a0} + Z_{b0})(Z_{b0} + Z_{c0}) - Z_{b0}^2}{Z_{a0} + Z_{b0} - Z_{b0}} = \frac{Z_{a0}Z_{b0} + Z_{a0}Z_{c0} + Z_{c0}Z_{b0}}{Z_{a0}} = \\ &= Z_{b0} + Z_{c0} + \frac{Z_{b0}Z_{c0}}{Z_{a0}}. \end{aligned}$$

4.7.3. Приклад розв'язку задачі

Приклад 4.7. У колі (рис. 4.56) для заданих напрямів струмів та напруг на частоті $f = 160$ кГц визначити А-параметри. Коефіцієнт зв'язку є $k = 1/3$. Відповідь надати в показниковій формі. Числові значення елементів кола наведені на схемі: опори в Ом, індуктивності в мкГн.

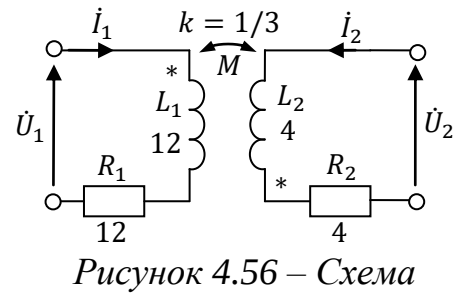


Рисунок 4.56 – Схема

Розв'язання

Коефіцієнт зв'язку

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Звідси визначимо взаємну індуктивність

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{12 \cdot 4} = 2 \text{ мкГн.}$$

Визначимо частоту

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 160 \cdot 10^3 = 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 1 \frac{\text{рад}}{\text{мкс}}$$

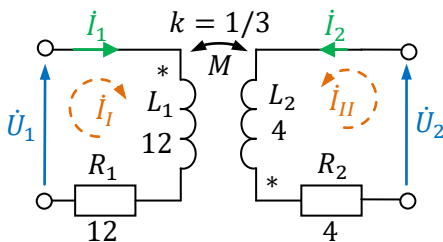


Рисунок 4.57 – Схема

Матриця опорів кола при обранні напрямів обходу контурів за напрямками струмів у гілках (рис. 4.57)

$$Z = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + j12 & -j2 \\ -j2 & 4 + j4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}.$$

Зв'язок між А та Z-параметрами

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{11} & -\Delta_Z \\ 1 & -Z_{22} \end{bmatrix},$$

де $\Delta_Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ – визначник матриці опорів

Звідси визначаємо

$$A_{11} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{12 + j12}{-2j} = -6 + 6j = 6\sqrt{2}e^{j135^\circ};$$

$$A_{12} = Z_{12} - \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} = -2j - \frac{(12 + j12)(4 + j4)}{-2j} = 48 - 2j = 48.042e^{-j2.4^\circ};$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_{21}} = \frac{1}{-2j} = 0.5j = 0.5e^{j90^\circ};$$

$$A_{22} = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}} = -\frac{4 + j4}{-2j} = -2j + 2 = 2\sqrt{2}e^{-j45^\circ}.$$

Відповідь: $A_{11} = 6\sqrt{2}e^{j135^\circ}$; $A_{12} = 48e^{-j2.4^\circ}$; $A_{21} = 0.5e^{j90^\circ}$, $A_{22} = 2\sqrt{2}e^{-j45^\circ}$.

4.8. Схеми з'єднання чотириполіусників

Чотириполіусники можуть з'єднуватися між собою певним чином. Наявність у чотириполіусників двох пар незалежних полюсів дозволяє здійснити п'ять можливих схем з'єднань: паралельна, послідовна, паралельно-послідовна, послідовно-паралельна та каскадна. Виконуючи операції еквівалентного перетворення, два чи кілька з'єднаних між собою чотириполіусники можна замінити одним еквівалентним і отримати для нього відповідну систему рівнянь. Коротко розглянемо способи сполучення чотириполіусників.

Послідовне сполучення передбачає, що вхідні та вихідні струми чотириполіусників є однаковими.

4.8.1. Послідовне з'єднання чотириполіусників

Послідовне з'єднання двох чотириполіусників зображене на рис. 4.58. Для такого виду з'єднання справедливі співвідношення

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b}, \quad I_2 = I_{2a} = I_{2b}, \quad U_1 = U_{1a} + U_{1b}, \quad U_2 = U_{2a} + U_{2b}.$$

Для знаходження U_{1a} , U_{2a} , U_{1b} , U_{2b} доцільно скористатися Z -параметрами пасивного чотириполіусника:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{U}_{2a} \end{bmatrix} = [Z_a] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{bmatrix}, \quad \text{де } [Z_a] = \begin{bmatrix} Z_{11a} & Z_{12a} \\ Z_{21a} & Z_{22a} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{U}_{2b} \end{bmatrix} = [Z_b] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{bmatrix}, \quad \text{де } [Z_b] = \begin{bmatrix} Z_{11b} & Z_{12b} \\ Z_{21b} & Z_{22b} \end{bmatrix}.$$

На основі одержаних співвідношень маємо

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = ([Z_a] + [Z_b]) \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [Z_E] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}.$$

У цьому виразі матриця еквівалентного чотириполіусника $[Z_E]$ дорівнює сумі матриць окремих чотириполіусників, з'єднаних послідовно. Таким чином, цю матрицю можна представити як параметри деякого одного еквівалентного чотириполіусника, одержаного послідовним з'єднанням двох вихідних.

При послідовному з'єднанні чотириполіусників додаються їх Z -параметри.

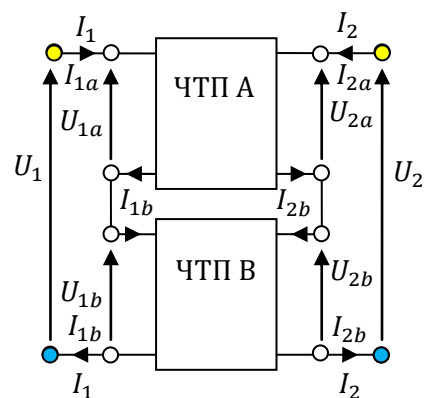


Рисунок 4.58 – Схема послідовного з'єднання чотириполіусників

4.8.2. Паралельне з'єднання чотириполіусників

Паралельне з'єднання двох чотириполіусників зображено на рис. 4.59. З рисунка видно, що

$$U_1 = U_{1a} = U_{1b}, U_2 = U_{2a} = U_{2b}, I_1 = I_{1a} + I_{1b}, I_2 = I_{2a} + I_{2b}.$$

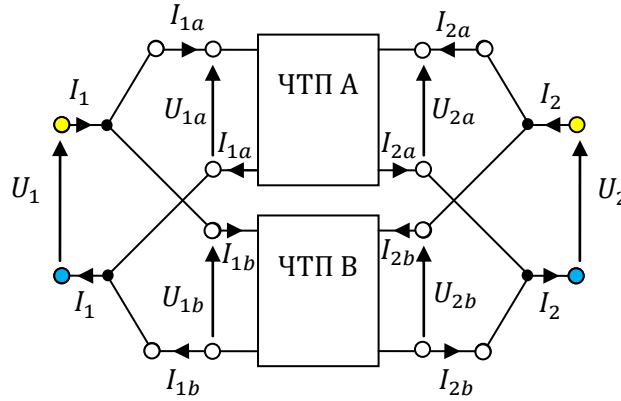


Рисунок 4.59 – Схема паралельного з'єднання чотириполіусників

У такому випадку скористуємося рівнянням чотириполіусника в Y -формі:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{bmatrix} = [Y_a] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{U}_{2a} \end{bmatrix}, \quad \text{де } [Y_a] = \begin{bmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} \\ Y_{21a} & Y_{22a} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{bmatrix} = [Y_b] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{U}_{2b} \end{bmatrix}, \quad \text{де } [Y_b] = \begin{bmatrix} Y_{11b} & Y_{12b} \\ Y_{21b} & Y_{22b} \end{bmatrix}.$$

На основі одержаних співвідношень запишемо

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = ([Y_a] + [Y_b]) \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [Y_E] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}.$$

В останній формулі вираз еквівалентної матриці $[Y_E]$ є параметрами одного еквівалентного чотириполіусника, що одержаний паралельним з'єднанням двох чотириполіусників А та В. Отже, при паралельному з'єднанні чотириполіусників додаються Y -параметри.

4.8.3. Послідовно-паралельне з'єднання чотириполіусників

Послідовно-паралельне з'єднання чотириполіусників зображене на рис. 4.60.

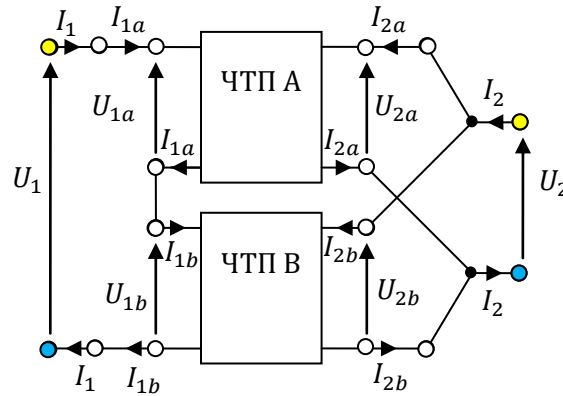


Рисунок 4.60 – Схема послідовно-паралельне з'єднання чотириполіусників

При такому способі з'єднання з боку первинних затискачів чотириполіусники з'єднані послідовно, а з боку вторинних – паралельно. Для такого з'єднання виконуються співвідношення

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b}, U_1 = U_{1a} + U_{1b}, U_2 = U_{2a} = U_{2b}, I_2 = I_{2a} + I_{2b}.$$

Ця умова свідчить про доцільність використання h -параметрів для того, щоб виразити U_{1a} , I_{2a} ; U_{1b} , I_{2b} через h -параметри та U_{2a} , I_{1a} ; U_{2b} , I_{1b} відповідних чотириполіусників

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{bmatrix} = [h_a] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{U}_{2a} \end{bmatrix}, \quad \text{де } [h_a] = \begin{bmatrix} h_{11a} & h_{12a} \\ h_{21a} & h_{22a} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{bmatrix} = [h_b] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{U}_{2b} \end{bmatrix}, \quad \text{де } [h_b] = \begin{bmatrix} h_{11b} & h_{12b} \\ h_{21b} & h_{22b} \end{bmatrix}.$$

Відповідно до одержаних співвідношень одержуємо

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = ([h_a] + [h_b]) \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [h_E] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}.$$

У цьому виразі $[h_E]$ можна розглядати як параметри деякого одного еквівалентного чотириполіусника, одержаного послідовно-паралельним з'єднанням двох вхідних. Отже, для аналізу такого виду з'єднання чотириполіусників додаються h -параметри.

4.8.4. Паралельно-послідовне з'єднання чотириполіусників

На рис. 4.61 зображена паралельно-послідовна схема з'єднання двох чотириполіусників.

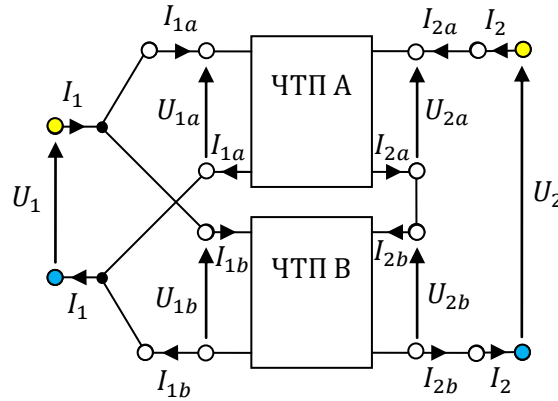


Рисунок 4.61 – Схема паралельно-послідовного з'єднання чотириполіусників

При такому способі з'єднання чотириполіусників виходить, що з боку первинних затискачів чотириполіусники з'єднані паралельно, а з боку вторинних – послідовно. Для такого з'єднання виконуються такі співвідношення

$$U_1 = U_{1a} = U_{1b},$$

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b},$$

$$I_2 = I_{2a}, \quad U_2 = U_{2a} + U_{2b}.$$

Ця умова вказує про доцільність використання F-параметрів для того, щоб виразити I_{1a} , U_{2a} , I_{1b} , U_{2b} через F-параметри та I_{2a} , U_{1a} , I_{2b} , U_{1b} відповідних чотириполіусників

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} = [F_a] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{bmatrix}, \quad \text{де } [F_a] = \begin{bmatrix} F_{11a} & F_{12a} \\ F_{21a} & F_{22a} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix} = [F_b] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{bmatrix}, \quad \text{де } [F_b] = \begin{bmatrix} F_{11b} & F_{12b} \\ F_{21b} & F_{22b} \end{bmatrix}.$$

Відповідно до одержаних співвідношень одержуємо

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = ([F_a] + [F_b]) \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [F_E] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}.$$

У цьому виразі $[F_E]$ можна розглядати як параметри деякого одного еквівалентного чотириполіусника, одержаного паралельно-послідовним з'єднанням двох вхідних. Отже, для аналізу такого виду з'єднання чотириполіусників додаються F-параметри.

4.8.5. Каскадне з'єднання чотириполіусників

Каскадне з'єднання чотириполіусників зображене на рис. 4.62.

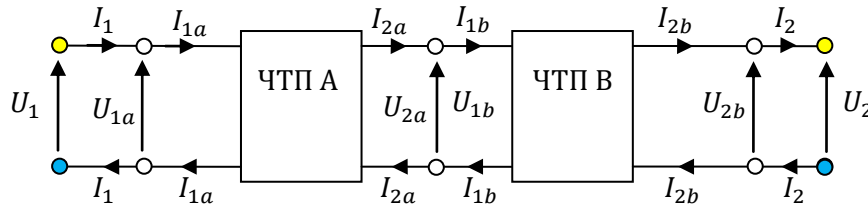


Рисунок 4.62 – Схема каскадного з'єднання чотириполіусників

Каскадне з'єднання чотириполіусника – це таке з'єднання, за якого вихідні затискачі попереднього чотириполіусника з'єднуються з вхідними затискачами наступного. Для такого виду з'єднання справедливі співвідношення:

$$I_1 = I_{1a}, I_{2a} = I_{1b}, U_1 = U_{1a}, U_{2a} = U_{1b}, U_2 = U_{2b}, I_2 = I_{2b}.$$

Для каскадного виду з'єднання доцільно використовувати А-параметри чотириполіусника. Виразимо вхідну напругу та вхідний струм кожного чотириполіусника через А-параметри:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} = [A_a] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ \dot{I}_{2a} \end{bmatrix}, \quad \text{де } [A_a] = \begin{bmatrix} A_{11a} & A_{12a} \\ A_{21a} & A_{22a} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix} = [A_b] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ \dot{I}_{2b} \end{bmatrix}, \quad \text{де } [A_b] = \begin{bmatrix} A_{11b} & A_{12b} \\ A_{21b} & A_{22b} \end{bmatrix}.$$

На основі одержаних співвідношень запишемо

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = ([A_a] \cdot [A_b]) \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [A_E] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Отже, при каскадному з'єднанні параметри еквівалентного чотириполіусника знаходяться перемноженням матриць А-параметрів чотириполіусника, що утворюють цю схему. Порядок перемноження повинен відповідати порядку включення чотириполіусників.

Таким чином, якщо два або кілька чотириполіусників з'єднані між собою, то коефіцієнти еквівалентного чотириполіусника можуть бути визначені через коефіцієнти складових чотириполіусників за формулами, які залежать від їх з'єднанням.

Коефіцієнт передачі за напругою підсхем

$$K_{U1} = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_{2a}}{U_{1a}}; \quad K_{U2} = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_{2b}}{U_{1b}}.$$

Звідси визначимо

$$U_{2b} = U_{1b} \cdot K_{U2}.$$

Тоді

$$K_U = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_{2b}}{U_{1a}} = \frac{U_{1b} \cdot K_{U2}}{U_{1a}} = \frac{U_{2a} \cdot K_{U2}}{U_{1a}} = K_{U1} \cdot K_{U2}.$$

4.9. Приклади розрахунків чотиріполюсників

Приклад 4.7. У схемі (рис. 4.63) визначити струм $I_{\text{ВІХ}}$. Y-параметри ЧТП при наведених напрямках струмів

$$Y = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ мСім.}$$

Всі опори в кОм, струми – мА, напруги – В.

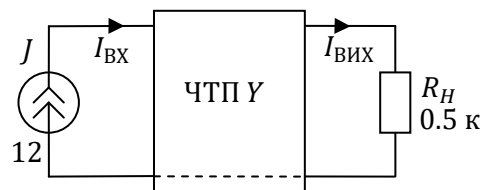


Рисунок 4.63 – Схема

Розв'язання

Замінімо чотиріполюсник ЧТП П-подібною схемою заміщення (рис. 4.64)

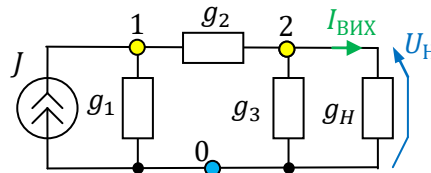


Рисунок 4.64 – Еквівалентна схема

Складемо матрицю провідностей кола (рис. 4.64) за МВН

$$G = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} + g_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 36 - 4 = 32;$$

Коефіцієнт передачі за струмом

$$K_I = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \cdot g_H = \frac{(-1)^{1+2} \cdot (-2)}{32} \cdot 2 = \frac{1}{8} = 0.125.$$

Звідси визначимо

$$I_{\text{ВІХ}} = I_{\text{ВХ}} \cdot K_I = 12 \cdot 0.125 = 1.5 \text{ мА.}$$

2 спосіб

За МВН (рис. 4.64)

$$\begin{bmatrix} J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & g_2 \\ g_2 & g_2 + g_3 + g_H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 + 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}.$$

Визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 36 - 4 = 32;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \cdot 6 = 72; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 = 24.$$

За методом Крамера

$$U_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{72}{32} = 2.25 \text{ В}; \quad U_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{32} = 0.75 \text{ В.}$$

За законом Ома $I_{\text{ВІХ}} = U_H \cdot g_H = 0.75 \cdot 2 = 1.5 \text{ мА.}$

Відповідь: $I_{\text{ВІХ}} = 1.5 \text{ мА.}$

Приклад 4.8. У схемі (рис. 4.65) при замкненому ключі визначити струм джерела J . Коло споживає потужність 3 мВт. Y - параметри ЧТП:

$$Y = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} \text{ мСім.}$$

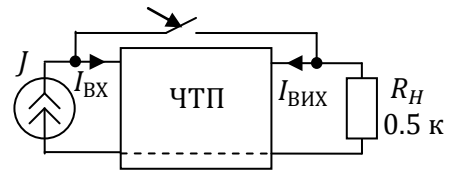


Рисунок 4.65 – Схема

Розв'язання

1 спосіб

Зобразимо схему заміщення ЧТП у вигляді П-подібної схеми (рис. 4.66 а)

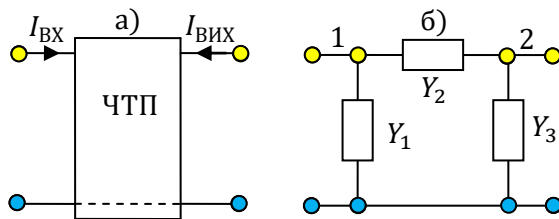


Рисунок 4.66 – Схеми заміщення

Замінімо чотирьохполюсник ЧТП (рис. 4.66 а) П-подібною схемою заміщення (рис. 4.66 б). Матриця провідностей П-подібної схеми (рис. 4.66 б)

$$Y = \begin{vmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_3 + Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} \text{ мСім.}$$

Параметри елементів схеми заміщення П-подібного ЧТП

$$Y_2 = 3 \text{ мСім;}$$

$$Y_1 + Y_2 = 9, Y_1 = 9 - Y_2 = 9 - 3 = 6 \text{ мСім;}$$

$$Y_3 + Y_2 = 7, Y_3 = 7 - Y_2 = 7 - 3 = 4 \text{ мСім.}$$

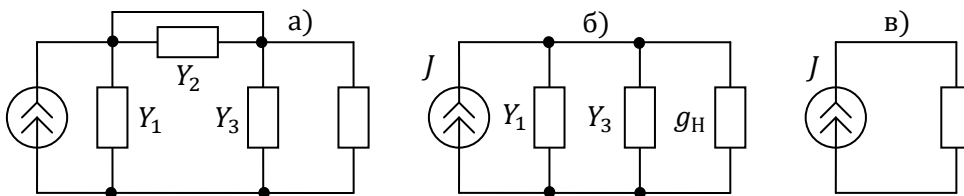


Рисунок 4.67 – Еквівалентні схеми

У загальній схемі (рис. 4.67) після замикання ключа (рис. 4.67 б) еквівалентна провідність схеми

$$Y_E = Y_1 + Y_3 + g_H = 6 + 4 + 2 = 12 \text{ мСім.}$$

Потужність джерела у схемі (рис. 4.67 в)

$$P_{ДЖ} = \frac{J^2}{Y_E}.$$

Із закону балансу потужностей

$$P_{СП} = P_{ДЖ}$$

Звідси визначимо струм

$$J = \sqrt{P_{СП} \cdot Y_E} = \sqrt{12 \cdot 3} = 6 \text{ мА.}$$

2 спосіб

Система рівнянь чотириполосника для Y -параметрів

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2. \end{cases}$$

Зобразимо схему заміщення (рис. 4.68), що відповідає цій системі після замикання ключа.

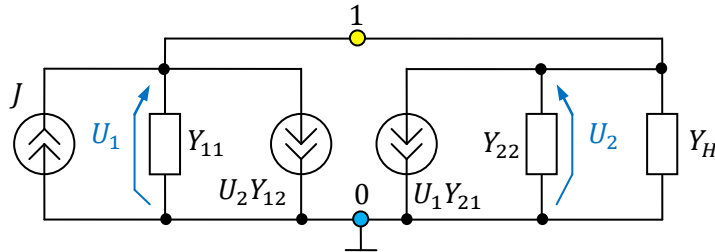


Рисунок 4.68 – Схема заміщення Y -параметрів

Після замикання ключа $U_1 = U_2 = U_{10}$.

За методом вузлових напруг

$$J - U_{10}Y_{12} - U_{10}Y_{21} = U_{10}(Y_{11} + Y_{22} + Y_H).$$

Перенесемо вирази керованих джерел

$$J = U_{10}(Y_{11} + Y_{22} + Y_H + Y_{12} + Y_{21}),$$

Підставимо числові значення

$$J = U_{10}(9 + 7 + 2 - 3 - 3) = 12U_{10}.$$

Звідси визначимо

$$U_{10} = \frac{J}{12}.$$

Із закону балансу потужностей

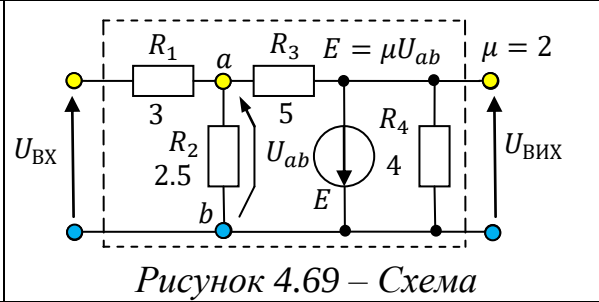
$$P_{дж} = P_{сп} = JU_{10} = \frac{J}{12} \cdot J = \frac{J^2}{12}.$$

Звідси визначимо струм

$$J = \sqrt{12 \cdot P_{сп}} = \sqrt{12 \cdot 3} = 6 \text{ мА}.$$

Відповідь: $J = 6 \text{ мА}$.

Приклад 4.9. У колі (рис. 4.69) визначити параметра Z_{11} ЧТП виділеної частини схеми. Числові значення елементів кола наведені на схемі: опори в кОм. Відповідь надати в кОм.



Розв'язання

Розрахунки здійснюємо у одиницях: опір – кОм, напруга – В, струм – мА. Фізичний зміст параметра Z_{11}

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} - \text{вхідний опір у режимі холостого ходу на виході.}$$

Таким чином, необхідно визначити вхідний опір кола $Z_{ВХ} = Z_{11}$.

У колі (рис. 4.69) винесемо кероване джерело напруги за вузол (рис. 4.70).

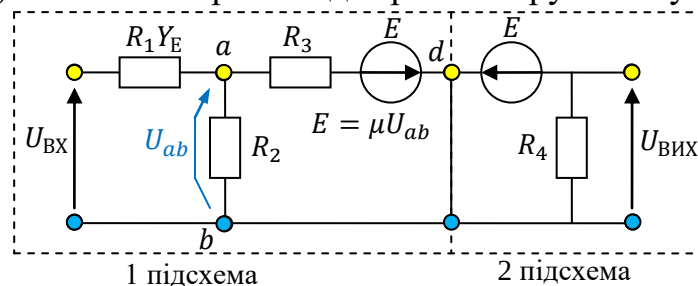


Рисунок 4.70 – Еквівалентна схема

У першій підсхемі (рис. 4.70) перетворимо джерело напруги на джерело струму (рис. 4.71 а)

$$J = \frac{\mu U_{20}}{R_3} = \mu g_3 U_{20}.$$

Оскільки кероване джерело струму $J = S \cdot U_{20}$ підключене до тих же вузлів, що і напруга U_{20} , то згідно наслідку із теореми компенсації замінимо джерело провідністю величиною $g_E = \mu g_2$ (рис. 4.71 б).

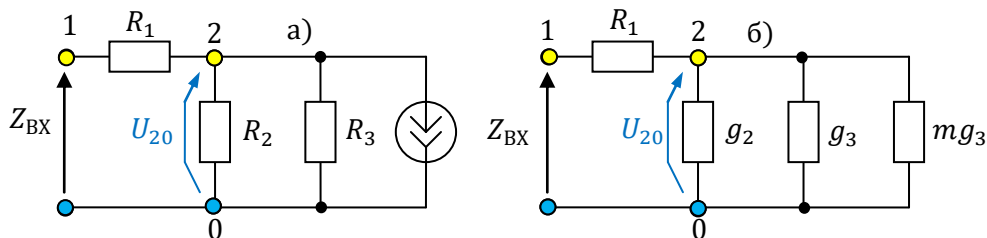


Рисунок 4.71 – Еквівалентні схеми

Вхідний опір кола (рис. 4.71 б)

$$Z_{ВХ} = R_1 + \frac{1}{g_2 + g_3 + \mu g_3} = 3 + \frac{1}{0.4 + 0.2 + 2 \cdot 0.2} = 3 + 1 = 4 \text{ кОм.}$$

Відповідь: $Z_{11} = 4 \text{ кОм.}$

Приклад 4.10. Знайти вхідний опір кола (рис. 4.72), що складається із двох однакових касадно-з'єднаних чотириполіусників ЧТП 1 та ЧТП 2, якщо Z -параметри кожного чотириполіусника становлять

$$Z = \begin{bmatrix} j & -2 \\ 3 & 5 + 4j \end{bmatrix}, \text{кОм.}$$

Режим роботи – гармонічний, параметри виміряні на робочій частоті.

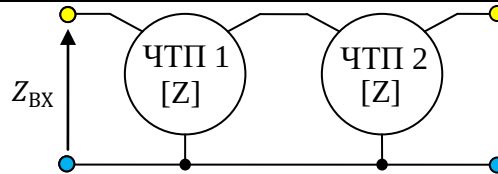


Рисунок 4.72 – Схема з'єднання чотириполіусників

Розв'язання

Систему рівнянь Z – параметрів чотириполіусника

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2; \\ U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2. \end{cases}$$

Фізичний зміст параметра (рис. 4.73 а)

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} - \text{вхідний опір у режимі ХХ виходу};$$

Отже, другий чотириполіусник ЧТП2 замінимо опором навантаження до першого чотириполіусника ЧТП1 (рис. 4.73 б).

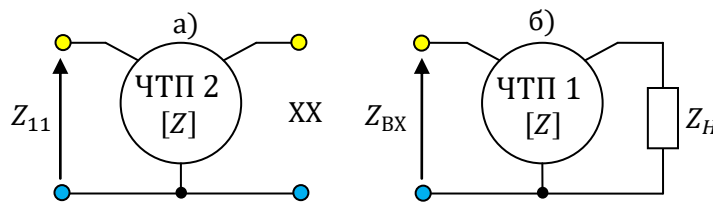


Рисунок 4.73 – Еквівалентні схеми

Величина опору навантаження

$$Z_H = Z_{11} = j \text{ кОм.}$$

Таким чином, загальна матриця опорів кола (рис. 4.73 б)

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} + Z_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j & -2 \\ 3 & 5 + 4j + j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j & -2 \\ 3 & 5 + 5j \end{bmatrix}.$$

Вхідний опір такого кола

$$\begin{aligned} Z_{BX} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} &= \frac{j(5 + 5j) + 6}{5 + 5j} = \frac{-5 + 5j + 6}{5 + 5j} = \frac{1 + 5j}{5 + 5j} = \frac{\sqrt{26}e^{j78.7^\circ}}{5\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \\ &= 0.72e^{j33.7^\circ} \text{ кОм.} \end{aligned}$$

Використали формули представлення комплексних чисел

$$|Z_E| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26},$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) = \arctg\left(\frac{5}{1}\right) = 78.7^\circ.$$

Відповідь: $Z_{BX} = 0.72e^{j33.7^\circ} \text{ кОм.}$

5. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ КОЛАХ

5.1. Перехідний процес та закони комутації

5.1.1. Поняття про комутації та перехідний процес

У колі можуть відбуватися комутації.

Під **комутацією** будемо розуміти будь-які миттєві перемикання.

Наприклад, підключення одного елементу, блоку елементів або частини кола, зміна стрибком якогось із параметрів кола або блоку параметрів таких як амплітуда, початкова фаза джерел, номінали елементів або цілих гілок. За наявності реактивних елементів у колах можуть виникати перехідні процеси.

Характер комутації на схемі вказується за допомогою ключа зі стрілкою (рис. 5.1).

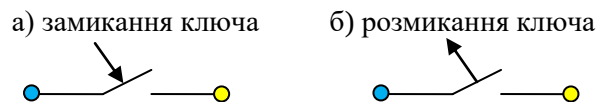


Рисунок 5.1 – Умовне зображення комутації

Перехідним процесом називають процес, що виникає у електричному колі під час переходу від одного усталеного режиму до іншого.

Під **усталеним режимом** розуміють режим постійного струму, режим гармонічного струму або режим, коли струми та напруги є періодичними функціями, що забезпечуються дією джерел періодичних струмів та напруг. Періодичний струм та напругу можна розкласти у ряд Фур'є на суму гармонік та для знаходження реакції на таку дію використати метод комплексних амплітуд та метод накладання.

Усталений режим визначається дією джерела енергії та обумовлений енергетичним станом кола.

За наявності реактивних елементів (індуктивностей та ємностей) перехід від одного усталеного режиму до іншого миттєво не відбувається. Це пов'язане із тим, що неможна розвинути нескінчену потужність. Якщо припустити, що стрибком можуть змінитися струми у індуктивностях і напруги на ємностях, то енергія, що запасається у них теж повинна змінитися стрибком. При цьому потужність буде прямувати в нескінченність (потужність є похідна від енергії), а це фізично неможливо, оскільки суперечить закону збереження енергії. Отже, перехідний процес у колі триває певний час, що називається часом перехідного процесу.

Під час перехідного процесу струми у електричному колі та напруги на її ділянках визначаються не тільки джерелами енергії, але й накопиченою енергією безпосередньо перед перехідним процесом (в індуктивностях та ємностях).

Початком відліку для перехідного процесу вважають момент комутації та позначають його $t = 0$. Введемо наступні позначення: $i(0-)$, $u(0-)$ – це значення струму та напруги до комутації; $i(0)$, $u(0)$ – значення струму та напруги у момент комутації; $i(0+)$, $u(0+)$ – значення струму та напруги після комутації.

5.1.2. Закони комутації

При аналізі перехідних процесів використовують вирази для струмів та напруг в індуктивності і ємності.

Заряд ємності $q(t) = Cu_c(t)$.

Струм в ємності (за умови $C = \text{const}$)

$$i_c(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_c(t))}{dt} = C \frac{du_c(t)}{dt}.$$

Напруга на ємності

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_c(t) dt + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt.$$

Потокозчеплення індуктивності без сталевго осердя $\psi(t) = Li_L(t)$.

Згідно із законом електромагнітної індукції (за умови $L = \text{const}$)

$$u_L(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d(Li_L(t))}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Звідси можна одержати струм в індуктивності

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt.$$

Напруга на ємності $u_c(0)$ та струм в індуктивності $i_L(0)$ називають незалежними початковими умовами, оскільки вони стрибком не змінюються.

Закони комутації випливають із законів збереження енергії для магнітного та електричного полів

$$W_M(0-) = W_M(0) = W_M(0+), \quad W_E(0-) = W_E(0) = W_E(0+).$$

Ця енергія стрибком змінитися не може, як було зазначено вище.

Вирази для енергії електричного та магнітного полів

$$W_M(t) = \frac{Li^2}{2}, \quad W_E(t) = \frac{Cu^2}{2}.$$

Дійсно, одержимо

$$\frac{Li^2(0-)}{2} = \frac{Li^2(0)}{2} = \frac{Li^2(0+)}{2}, \quad \frac{Cu^2(0-)}{2} = \frac{Cu^2(0)}{2} = \frac{Cu^2(0+)}{2},$$

то після скорочення на величини $L/2$ та $C/2$ одержимо закони комутації.

Перший закон комутації. Струм і магнітне потокозчеплення в індуктивності у момент комутації стрибком змінитися не можуть

$$i_L(0-) = i_L(0) = i_L(0+).$$

У колі (рис. 5.2 а) після комутації (рис. 5.2 б) за другим законом Кірхгофа

$$E = u_R + u_L.$$

Підставимо замість напруги u_L її значення

$$E = i_L R + L \frac{di_L}{dt}.$$

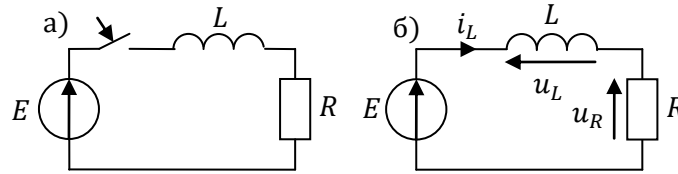


Рисунок 5.2 – Схема із комутацією

Якщо припустити, що струм у колі зміниться стрибком, то напруга на індуктивності u_L буде нескінченно великою, оскільки похідна від стрибка є нескінченність. Але це суперечить другому закону Кірхгофа. Отже, припущення хибне.

Оскільки потокозчеплення визначається $\psi(t) = Li_L(t)$, то

$$\psi_L(0-) = \psi_L(0) = \psi_L(0+),$$

де $\psi_L(0-)$ – магнітне потокозчеплення в індуктивності до комутації, $\psi_L(0)$ – магнітне потокозчеплення в індуктивності у момент комутації, $\psi_L(0+)$ – магнітне потокозчеплення в індуктивності після комутації.

Другий закон комутації. Напруга і заряд на ємності у момент комутації стрибком змінитися не можуть

$$u_C(0-) = u_C(0) = u_C(0+).$$

Покажемо це на прикладі послідовного RC-кола (рис. 5.3 а).

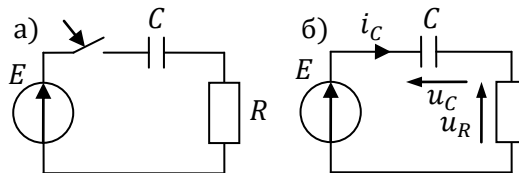


Рисунок 5.3 – Схема із комутацією

У колі (рис. 5.3 б) другий закон Кірхгофа

$$E = u_R + u_C.$$

Напругу на опорі R представимо через струм у колі i_C , а цей струм визначимо через напругу u_C

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Якщо припустити, що напруга u_C зміниться стрибком, то її похідна du_C/dt буде прямувати у нескінченність, що буде суперечити другому закону Кірхгофа, оскільки напруга джерела E має скінченне значення, а отже напруга u_C не може змінитися стрибком.

Оскільки заряд визначається $q(t) = Cu_C(t)$, то

$$q_C(0-) = q_C(0) = q_C(0+),$$

де $q_C(0-)$ – електричний заряд на ємності до комутації, $q_C(0)$ – електричний заряд на ємності у момент комутації, $q_C(0+)$ – електричний заряд на ємності після комутації

Наслідки із законів комутації:

1. У момент комутації індуктивність із нульовим струмом $i_L(0)$ еквівалентна джерелу струму величиною $i_L(0)$, а без нього – розриву кола (рис. 5.4).

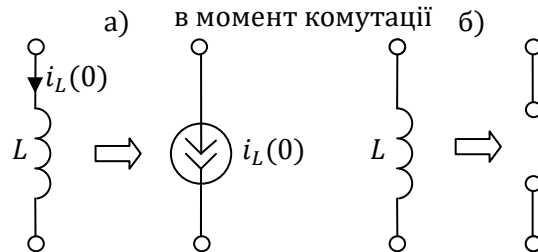


Рисунок 5.4 – Схема індуктивності в момент комутації

2. У момент комутації ємність при наявності початкового заряду еквівалентна джерелу напруги величиною $E = u_C(0)$, а без нього – замиканню кола у місці її включення (рис. 5.5).

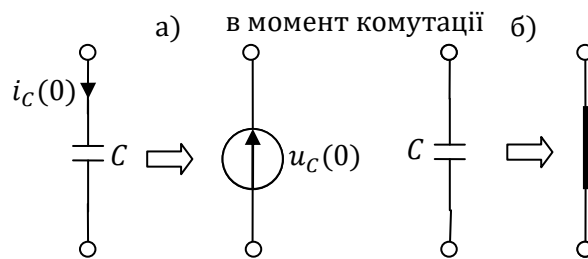


Рисунок 5.5 – Схема ємності в момент комутації

5.2. Функції Хевісайда та Дірака

Для математичного опису перехідних процесів використовують функції Хевісайда та Дірака.

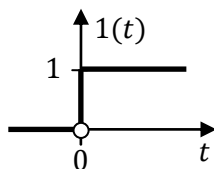


Рисунок 5.6 – Функція Хевісайда

Функцію Хевісайда $\mathbf{1(t)}$ по-іншому називають функцією одиничної сходинок (рис. 5.6)

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

При дослідженні перехідних процесів будемо вважати, що $1(0) = 0$. Іноді вважають, що $1(0) = 1/2$. Це можна пояснити способом одержання функції Хевісайда. Для цього розглянемо функцію $f(t)$ (рис. 5.7).

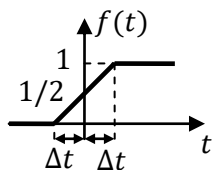


Рисунок 5.7

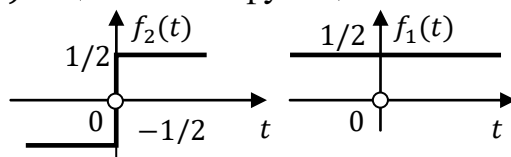
Отже, для знаходження функції Хевісайда необхідно інтервал Δt спрямувати до нуля

$$1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t).$$

Функцію Хевісайда можна представити у вигляді суми функцій (рис. 5.8)

$$1(t) = 1/2 + 1/2 \text{sign}(t).$$

Функція $\text{sign}(t)$ – це знакова функція.

Рисунок 5.8 – Функція $\text{sign}(t)$

Властивості функції Хевісайда

1. Множення на константу та зсув у часі (рис. 5.9).

$$A \cdot 1(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ A \cdot 1(t - t_0), & t \geq t_0. \end{cases}$$

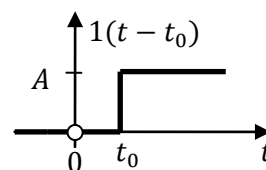


Рисунок 5.9 – Зсув функції Хевісайда

2. Інтегрування функції (рис. 5.10)

$$\int_{-\infty}^{t_1} A \cdot 1(t - t_0) dt = \begin{cases} 0, & t_1 < t_0, \\ A \cdot 1(t - t_0), & t_1 > t_0. \end{cases}$$

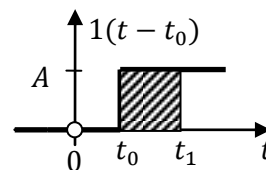


Рисунок 5.10 – Інтегрування функції Хевісайда

3. Диференціювання одиничної функції (рис. 5.11)

$$\frac{d}{dt} 1(t - t_0) = \delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0, \\ \infty, & t = t_0. \end{cases}$$

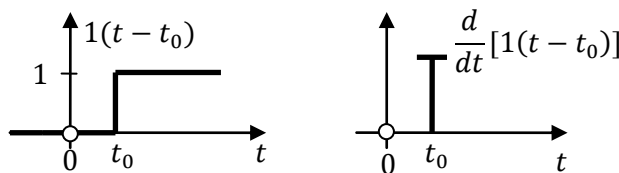


Рисунок 5.11 – Функція Хевісайда та її похідна

4. Зображення за Лапласом

$$1(t) \rightarrow \frac{1}{p}, \quad A \cdot 1(t - t_0) \rightarrow \frac{A}{p} \cdot e^{-pt}.$$

Застосування функції Хевісайда

1. Функцію одиничної сходинок $1(t)$ називають функцією включення, таким чином, вона замінює ключ (рис. 5.12).

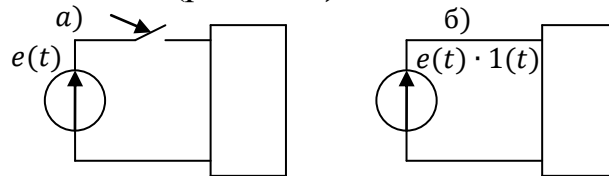


Рисунок 5.12 – Заміна ключа

2. Одиничний прямокутний імпульс можна представити суперпозицією (накладенням) зсунутих у часі функцій Хевісайда (рис. 5.13).

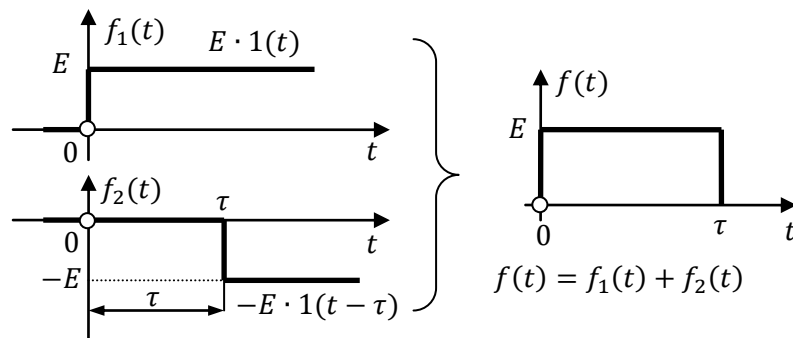


Рисунок 5.13 – Заміна прямокутного імпульсу

Функція Дірака – це імпульс нескінченно малої тривалості з нескінченно великою амплітудою (рис. 5.14). Площа, обмежена цим імпульсом, дорівнює одиниці. Тому цей імпульс ще називають одиничним імпульсом.

Функція Дірака визначається

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

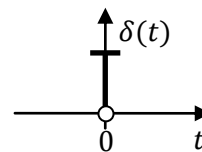


Рисунок 5.14 – Функція Дірака

Візьмемо прямокутний імпульс $f(t)$, з амплітудою $1/\tau$, тоді $S = 1$ (рис. 5.15 а). Для того щоб площа під ним залишалася незмінною при зменшенні тривалості імпульсу τ необхідно пропорційно збільшувати його амплітуду (рис. 5.15 б).

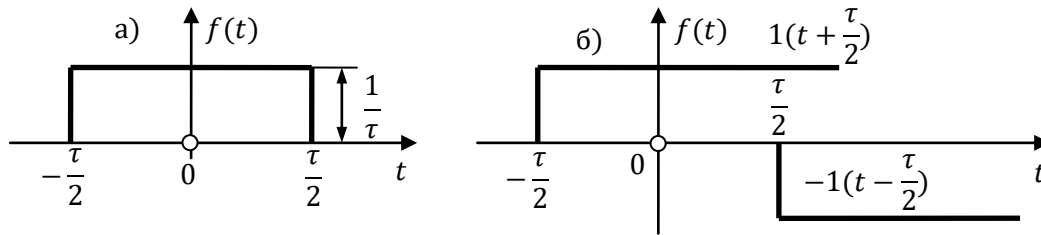


Рисунок 5.15 – Розкладання прямокутного імпульсу

Функцію $f(t)$ можна представити сумою функцій Хевісайда (рис. 5.15)

$$f(t) = \frac{1}{\tau} \left[1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 1\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right].$$

Функцію Дірака можна одержати граничним переходом

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [f(t)].$$

Властивості функції Дірака

1. Зсув у часі та множення на константу (рис. 5.16)

$$A \cdot \delta(t - t_0) = \begin{cases} A \cdot \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases}$$

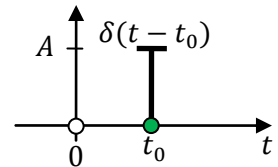


Рисунок 5.16 – Зсув функції Дірака

2. Множення на функцію

$$f(t) \cdot \delta(t - t_0) = \begin{cases} f(t_0) \cdot \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases}$$

3. Інтегрування

$$\int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} A \cdot \delta(t - t_0) dt = A \cdot 1 = A, \quad \delta - \text{околиця точки } t_0.$$

4. Фільтруюча властивість

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0).$$

5. Згортка

Оскільки $\delta(t) * f(t) = f(t)$, то

$$\int f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = f(t).$$

6. Зв'язок із функцією Хевісайда

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \{1(t)\}.$$

7. Зображення за Лапласом $\delta(p) = 1$.

8. Розмірність $\delta(t)$ [1/c].

5.3. Перетворення Лапласа та його властивості

5.3.1. Пряме та зворотне перетворення Лапласа

Сутність операторного методу розрахунку полягає у тому, що використовується перетворення Лапласа, що дозволяє перенести розв'язання із області функції дійсної змінної t у область функції комплексної змінної p

$$p = s + j\omega$$

Пряме перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = L\{f(t)\}.$$

Зворотне перетворення Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p) e^{pt} dp = L^{-1}\{F(p)\}.$$

Функцію $F(p)$ називають зображенням за Лапласом, а функцію $f(t)$ – оригіналом. Отже, оригінал і зображення являють собою пари функцій $f(t)$ і $F(p)$ дійсної та комплексної змінної, зв'язаних між собою парою перетворень Лапласа.

За такого перетворення операція диференціювання функції дійсної змінної $f(t)$, замінюється операцією множення на оператор p функції комплексної змінної $F(p)$. У свою чергу, операція інтегрування замінюється операцією ділення на оператор p . Ці властивості будуть доведені далі.

5.3.2. Основні властивості перетворення Лапласа

Математичним операціям над оригіналами відповідають відповідні операції над зображенням та навпаки. Ці операції називають властивостями перетворення Лапласа. Знання цих властивостей полегшує знаходження зображень.

1. Властивість лінійності

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k F_k(p),$$

де a_k – постійні коефіцієнти.

2. Диференціювання оригіналу

При ненульових початкових умовах, коли $f(0) \neq 0$, диференціюванню оригіналу відповідає наступне співвідношення

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow pF(p) - f(0).$$

У випадку нульових початкових умов

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow p^n F(p).$$

3. Інтегрування оригіналу

Інтегруванню оригіналу при ненульових початкових умовах відповідає ділення на змінну p

$$\int_0^t f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p} + \frac{f(0)}{p}.$$

У випадку багаторазового інтегрування

$$\int_0^t \dots \int_0^t f(t) d^n t \leftrightarrow \frac{F(p)}{p^n}.$$

4. Зміна масштабу (теорема подоби)

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right),$$

де a – постійний дійсний коефіцієнт.

5. Зсув в області дійсної змінної (теорема запізнювання)

$$f(t \pm t_0) \div e^{\pm p t_0} F(p).$$

Бачимо, що зсув оригіналу у часі на величину t_0 відповідає множенню зображення на $e^{\pm p t_0}$. Це доводиться заміною змінної.

6. Зсув в області комплексній змінній (теорема зсуву)

$$F(p \mp \lambda) \div e^{\pm \lambda t} f(t).$$

Ця теорема доводиться безпосередньо із прямого перетворення Лапласа, якщо в ньому замість $f(t)$ підставити $e^{\pm \lambda t} f(t)$. Причому λ може бути як дійсною так і комплексною

7. Теорема згортки

Згортка двох функцій відповідає добутку зображення

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^\infty f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^\infty f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau \leftrightarrow F_1(p) \cdot F_2(p).$$

8. Диференціювання зображення

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} \leftrightarrow (-t)^n f(t).$$

9. Інтегрування зображення

$$\int_0^\infty F(p) dp \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}.$$

10. Згортка зображення

$$F_1(p) * F_2(p) \leftrightarrow 2\pi \cdot f_1(t) \cdot f_2(t).$$

За такого перетворення операція диференціювання функції дійсної змінної $f(t)$, замінюється операцією множення на оператор p функції комплексної змінної $F(p)$. У свою чергу, операція інтегрування замінюється операцією ділення на оператор p .

5.4. Закони Ома та Кірхгофа у операторній формі

5.4.1. Операторні схеми заміщення

Операторна схема заміщення опора

За законом Ома для опора у часовій області (рис. 5.17 а)

$$u(t) = R \cdot i(t).$$

Напруга на опорі у операторній області за законом Ома (рис. 5.17 б)

$$U(p) = R \cdot I(p).$$

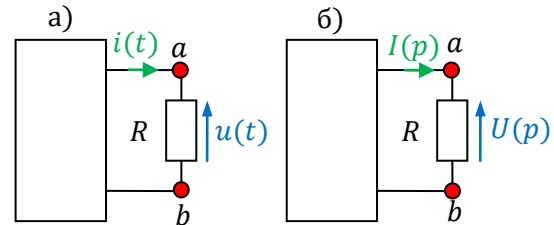


Рисунок 5.17 – Опір

Операторна схема заміщення індуктивності

Напруга на індуктивності у часовій області визначається (рис. 5.18 а)

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Напруга на індуктивності у операторній області (рис. 5.18 б) за властивістю диференціювання оригіналу

$$U_L(p) = pL \cdot I_L(p) - Li(0) = U_{L1}(p) - E_0(p).$$

Відповідно це рівняння відповідає другому закону Кірхгофа. Цьому рівнянню відповідає схема, що зображена на рис. 5.18 б.

Виразимо з рівняння струм

$$I_L(p) = \frac{U_L(p)}{pL} + \frac{i(0)}{p} = I_{L1}(p) + J_0(p).$$

Відповідно це рівняння відповідає першому закону Кірхгофа.

Цьому рівнянню відповідає схема, що зображена на рис. 5.18 в.

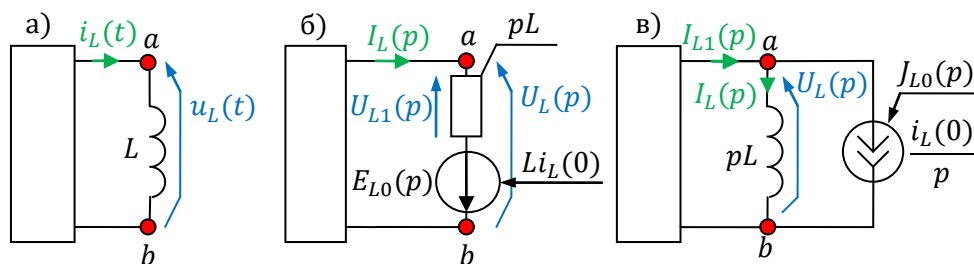


Рисунок 5.18 – Операторна схема заміщення індуктивності

Як, бачимо із рис. 5.18 б у операторній області індуктивність еквівалентна індуктивному опору зі значенням pL та джерелу напруги зі значенням $Li_L(0)$, що увімкнені послідовно. А як, бачимо із рис. 5.18 в у операторній області індуктивність еквівалентна індуктивному опору зі значенням pL та джерелу струму зі значенням $i_L(0)/p$, що увімкнені паралельно.

Операторна схема заміщення ємності

Напруга на ємності у часовій області визначається (рис. 5.19 а)

$$u_c(t) = U_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt.$$

Напруга на ємності у операторній області (рис. 5.19 б) за властивістю інтегрування оригіналу

$$U_c(p) = \frac{I_c(p)}{pC} + \frac{u_c(0)}{p} = U_{c1}(p) + E_0(p).$$

Відповідно це рівняння відповідає другому закону Кірхгофа. Цьому рівнянню відповідає схема, що зображена на ри. 5.19 б.

Виразимо з рівняння струм

$$I_c(p) = pC \cdot U_c(p) - C \cdot u_c(0) = I_{c1}(p) - J_0(p).$$

Відповідно це рівняння відповідає першому закону Кірхгофа. Цьому рівнянню відповідає схема, що зображена на ри. 5.19 в.

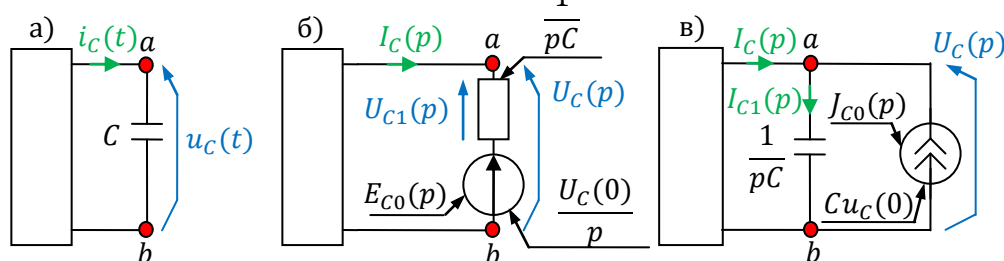


Рисунок 5.19 – Операторна схема заміщення ємності

Як, бачимо із рис. 5.19 у операторній області ємність еквівалентна ємнісному опору зі значенням $1/pC$ та джерелу напруги зі значенням $u_c(0)/p$, що увімкнені послідовно.

Операторні схеми заміщення джерел

На рис. 5.20 а представлена схема джерела напруги у часовій області. Визначимо величину джерела напруги у операторній області (рис. 5.20 б) через пряме перетворення Лапласа

$$E(p) = \int_0^{\infty} e(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} E e^{-pt} dt = \frac{E}{p}.$$

На рис. 5.20 в представлена схема джерела струму у часовій області. Величина джерела струму у операторній області (рис. 5.20 г) по аналогії буде така

$$J(p) = \frac{J}{p}.$$

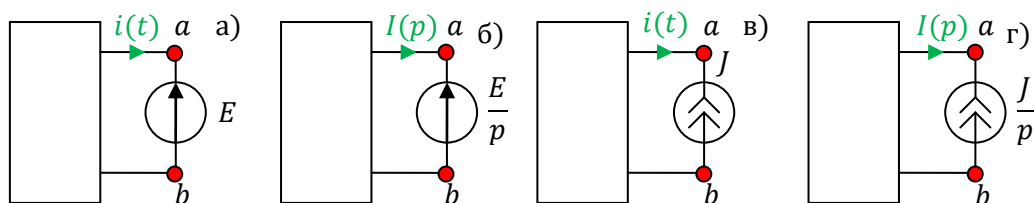


Рисунок 5.20 – Операторні схеми заміщення джерел

Крім того, для індуктивності у часовій області вираз струму

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t) dt = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt.$$

За перетворенням Лапласа запишемо струм в індуктивності в операторній області (рис. 5.21 а)

$$I_L(p) = \frac{i_L(0)}{p} + \frac{U_L(p)}{pL} = I_{L1}(p) + J_{L0}(p).$$

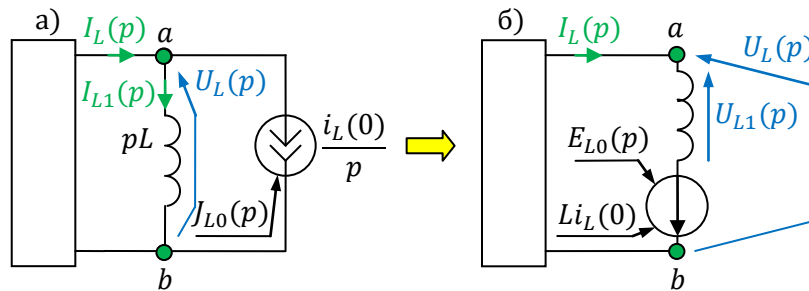


Рисунок 5.21 – Схеми заміщення індуктивності(а) та її перетворення (б)

На рис. 5.21 (а, б) проілюстроване перетворення джерела струму в джерело напруги зі значенням

$$E_{L0}(p) = \frac{i_L(0)}{p} \cdot pL = L \cdot i_L(0).$$

Можливе і обернене перетворення.

Крім того, можна записати для ємності

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} - C \cdot u_C(0).$$

За перетворенням Лапласа запишемо струм в ємності в операторній формі (рис. 5.22 а)

$$I_C(p) = Cp \cdot U_C(p) - C \cdot u_C(0) = I_{C1}(p) - J_{C0}(p).$$

Таким чином, отримали паралельні схеми заміщення індуктивності та ємності у операторній області (рис. 5.22).

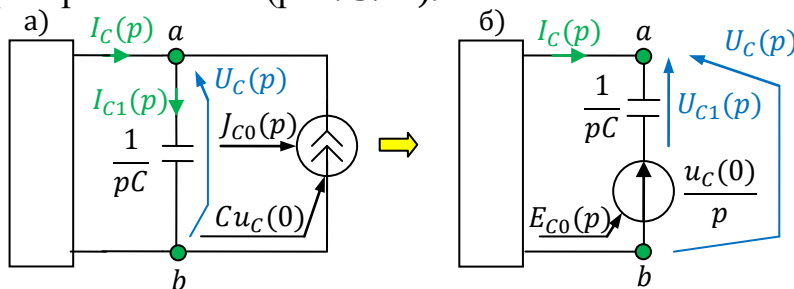


Рисунок 5.22 – Схеми заміщення ємності(а) та її перетворення (б)

На рис. 5.22 (а, б) проілюстроване перетворення джерела струму в джерело напруги зі значенням

$$E_{C0}(p) = C u_C(0) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{u_C(0)}{p}.$$

5.4.2. Операторний закони Ома та Кірхгофа

Користуючись основними властивостями перетворення Лапласа можна одержати основні закони теорії кіл у операторній формі.

Напруга у колі (рис. 5.23 а)

$$E = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t);$$

$$E = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt.$$

Застосувавши пряме перетворення Лапласа, і беручи до уваги властивість лінійності, диференціювання і інтегрування оригіналу одержимо

$$E(p) = RI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} + \frac{I(p)}{pC}.$$

Звідси одержуємо **закон Ома** у операторній формі

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - u_C(0)/p}{R + pL + 1/pC} = \frac{U_0(p)}{Z(p)},$$

де $U_0(p)$ – операторна напруга, $Z(p)$ – операторний опір кола.

У результаті одержимо операторну схему (рис. 5.23 б), що відповідає останньому рівнянню та її спрощену схему (рис. 5.24).

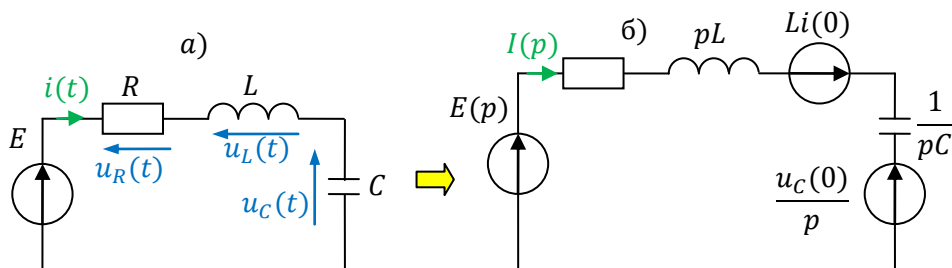


Рисунок 5.23 – Схема у часовій області (а) та у операторній (б)

Закон Ома у операторній формі

Операторний струм прямо пропорційний операторній напрузі і обернено пропорційний операторному опору

$$I(p) = \frac{U_0(p)}{Z(p)}.$$

Операторні зображення величини струму $I(p)$, напруги $U_0(p)$ та опору $Z(p)$ у теорії позначаються великими літерами.

Величини $Li(0)$ та $u_C(0)/p$ представляють початкові умови. Вони характеризують енергію електричних і магнітних полів, що запасється в L і C до моменту комутації. Ці величини схемотехнічно можуть бути представлені як джерела напруги.

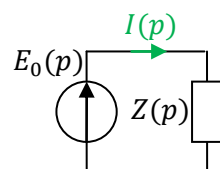


Рисунок 5.24 – Схема

Величина зворотна $Z(p)$ називається операторною провідністю кола

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}.$$

Аналогічним чином можна одержати закони Кірхгофа у операторній формі.

Перший закон Кірхгофа у операторній формі

Алгебраїчна сума операторних струмів у вузлі дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) = 0.$$

Другий закон Кірхгофа у операторній формі

Алгебраїчна сума операторних напруг по контуру обходу дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^m U_k(p) = 0.$$

Таким чином, закон Ома та закони Кірхгофа у операторній формі аналогічні цим же законам для постійного струму та гармонічного струму у комплексній формі із тією лише різницею, що у кожній із n гілок за наявності ненульових початкових умов діють додаткові джерела напруги $Li(0)$ та $u_c(0)/p$ (напрямок $Li(0)$ збігається із напрямом струму, а напрям $u_c(0)/p$ – протилежний), які можна перетворити у джерело струму.

5.5. Приклади зображення функцій

Розглянемо приклади знаходження зображення функцій за їх оригіналом.

Нехай $f(t) = \alpha \cdot 1(t)$, тоді

$$F(p) = \int_0^{\infty} \alpha \cdot 1(t) \cdot e^{-pt} dt = -\frac{\alpha}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = 0 + \frac{\alpha}{p} e^{-p \cdot 0} = \frac{\alpha}{p}.$$

$$\alpha \cdot 1(t) \leftrightarrow \frac{\alpha}{p}.$$

Нехай $f(t) = \beta e^{-\alpha t}$, тоді

$$F(p) = \int_0^{\infty} \beta e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \beta \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} dt = -\frac{\beta}{p+\alpha} e^{-(p+\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{\beta}{p+\alpha}.$$

Таким чином, одержуємо

$$\beta e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{\beta}{p+\alpha}.$$

Нехай $f(t) = e^{j(\omega t + \psi)}$, тоді

$$e^{j(\omega t + \psi)} = e^{j\psi} e^{j\omega t} \leftrightarrow \frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}.$$

Відповідно,

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \leftrightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Аналогічно

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Якщо $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$.

За формулою зведення

$$f(t) = \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi).$$

Тоді одержимо

$$f(t) \rightarrow \frac{p \cos(\varphi)}{p^2 + \omega^2} + \frac{\omega \sin(\varphi)}{p^2 + \omega^2} = \frac{p \cos(\varphi) + \omega \sin(\varphi)}{p^2 + \omega^2}.$$

Нехай $f(t) = t$,

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^\infty t \cdot e^{-pt} dt = \left[\begin{array}{l} u = t \quad e^{-pt} dt = dv \\ du = dt \quad v = -\frac{e^{-pt}}{p} \end{array} \right] = u \cdot v \Big|_0^\infty - \int_0^\infty v du = \\ &= -\frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) dt = -\frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p^2}. \end{aligned}$$

На основі цих результатів складають таблицю відповідностей деяких функцій та їх зображень (таблиця 5.1).

Більш детальніші таблиці відповідності оригіналів та їх зображень наведені у спеціальних довідниках.

Таблиця 5.1 - Зображення та оригінал деяких функцій

Оригінал	Зображення	Оригінал	Зображення
$\alpha \cdot 1(t)$	$\frac{\alpha}{p}$	$\alpha \cdot \delta(t)$	α
$\beta \cdot t$	$\frac{\beta}{p^2}$	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\beta e^{\pm \alpha t}$	$\frac{\beta}{p \mp \alpha}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$\beta t e^{-\alpha t}$	$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cdot \sin(\psi) - \omega_0 \cdot \cos(\psi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j(\omega_0 t + \varphi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p \mp j\omega_0}$	$\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \cdot \cos(\varphi) + \omega_0 \cdot \sin(\varphi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$\frac{1}{\alpha - \beta} (e^{\beta t} - e^{\alpha t})$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$
$(1 - \alpha t) e^{\pm \alpha t}$	$\frac{p}{(p \mp \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$

5.6. Знаходження оригіналу

5.6.1. Теорема розкладання

Після одержання операторного розв'язання необхідно знайти оригінал, що відповідає цьому розв'язанню. Існує два шляхи визначення оригіналів. У першому випадку можна скористатися таблицею Б.1 відповідності оригіналів і зображень, або більше повною, наведеною в будь-якому довіднику по вищій математиці. У другому випадку перехід до оригіналу можна здійснити за допомогою теореми розкладання, що застосовна тільки при дотриманні певних умов. Найчастіше операторне розв'язання $F(p)$ має вигляд дроби. Під $F(p)$ розуміють $I(p)$ або $U(p)$

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}.$$

Оригінал знаходять за зворотним перетворенням Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p) e^{pt} dp = L^{-1}\{F(p)\}.$$

Інтеграл можна замінити розрахунком лишків:

а) для простих коренів

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{p_k} [F(p_k)] = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{\dot{F}_2(p_k)} e^{p_k t};$$

б) для кратних коренів кратністю m

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{p_k} [F(p_k)] = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \cdot \frac{F_1(p) e^{pt}}{F_2(p)} \right]_{p=p_k};$$

У виразах m – число коренів знаменника, p_k – k -й корень знаменника, $\dot{F}_2(p)$ – похідна від полінома знаменника. Вираз, що стоїть у знаменнику, необхідно спочатку скоротити на $(p - p_k)^{m_k}$ та лише після цього диференціювати.

в) для комплексно-спряжених коренів

$$f(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_k)}{\dot{F}_2(p_k)} e^{p_k t} \right].$$

Розглянемо іншу форму теорему розкладання у випадку простих коренів

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{p - p_k} \rightarrow \sum_{k=1}^m A_k e^{p_k t},$$

$$\text{де } A_k = \left. \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k) \right|_{p=p_k} = \left. \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} \right|_{p=p_k}, \quad \dot{F}_2(p) = \frac{dF_2(p)}{dp}.$$

Отже, запишемо

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_m}{p - p_m} + A_0,$$

де A_0 - це відношення коефіцієнтів при старших степенях.

Помножимо операторний вираз на доданок $(p - p_k)$

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k) = \frac{A_1}{p - p_1} (p - p_k) + \dots + A_k + \dots + \frac{A_m}{p - p_m} (p - p_k) + A_0 (p - p_k).$$

Якщо спрямувати $p \rightarrow p_k$, то всі доданки у правій частині обертається в нуль, окрім A_k , і у результаті одержимо

$$A_k = \left. \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k) \right|_{p=p_k} = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k) =$$

$$= \left. \frac{F_1(p) + \dot{F}_1(p)(p - p_k)}{\dot{F}_2(p)} \right|_{p=p_k} = \left. \frac{F_1(p)}{\dot{F}_2(p)} \right|_{p=p_k}, \quad \dot{F}_2(p) = \frac{dF_2(p)}{dp}.$$

Таким чином, вираз $F(p)$ у часовій області відповідає

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + \dots + A_k e^{p_k t} + \dots + A_m e^{p_m t} + A_0 \delta(t).$$

Приклад 5.1. Знайти та побудувати оригінал $f(t)$ для наведеної операторної функції за теоремою розкладання

$$F(p) = \frac{(p + 5)(p + 2)}{p(p + 4)}.$$

Розв'язання

Корені знаменника становлять: $p_1 = 0$; $p_2 = -4$.

За теоремою розкладання

$$F(p) = \frac{(p + 5)(p + 2)}{p(p + 4)} = A_0 + \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 4}$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках

$$A_0 = \frac{1}{1} = 1;$$

$$A_1 = \left. \frac{(p + 5)(p + 2)}{p + 4} \right|_{p=0} = \frac{5 \cdot 2}{4} = 2.5;$$

$$A_2 = \left. \frac{(p + 5)(p + 2)}{p} \right|_{p=-4} = \frac{-2}{-4} = 0.5.$$

У результаті одержимо

$$F(p) = 1 + \frac{2.5}{p} + \frac{0.5}{p+4}.$$

Оригінал функції (рис. 5.23)

$$f(t) = \delta(t) + 2.5 + 0.5e^{-4t}.$$

Скористалися формулами

$$\frac{\beta}{p+\alpha} \rightarrow \beta e^{-\alpha t};$$

$$\alpha \cdot \delta(t) \rightarrow \alpha.$$

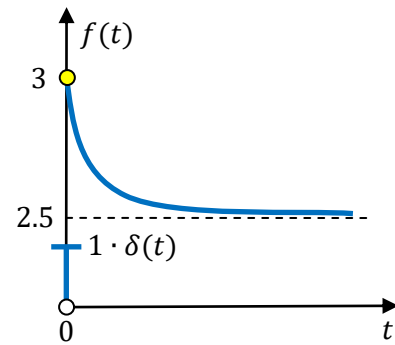


Рисунок 5.23 – Функція $f(t)$

Якщо серед m коренів рівняння $F_2(p) = 0$ є пара комплексних коренів $p_k = -\alpha_k + j\omega_k$, $p_{k+1} = -\alpha_k - j\omega_k$, то теорема розкладання може бути представлена в наступний вигляді

$$f(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_k)}{\dot{F}_2(p_k)} e^{p_k t} \right].$$

Доведемо це співвідношення. Запишемо вираз для шуканого операторного струму, одержаний раніше для пари комплексно-спряжених коренів

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{\dot{A}_k}{p - p_k} + \frac{\dot{A}_{k+1}}{p - p_{k+1}}.$$

У часовій області цей вираз відповідає наступному

$$f(t) = \dot{A}_k e^{p_k t} + \dot{A}_{k+1} e^{p_{k+1} t}.$$

Представимо пару комплексно спряжених коренів у показниковій формі

$$\dot{A}_k = \left. \frac{F_1(p_k)}{\dot{F}_2(p_k)} \right|_{p=p_k} = a + jb = |A_i| e^{j\varphi_k};$$

$$\dot{A}_{k+1} = \left. \frac{F_1(p_k)}{\dot{F}_2(p_k)} \right|_{p=p_{k+1}} = a - jb = \dot{A}_k^* = |A_i| e^{-j\varphi_k},$$

де $|A_i| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi_k = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$, $\varphi_{k+1} = \arctg\left(\frac{-b}{a}\right) = -\arctg\left(\frac{b}{a}\right) = -\varphi_k$.

У струм у показники експоненти підставимо вирази коренів у алгебраїчній формі запису, а замість коефіцієнтів $\dot{A}_k$ та $\dot{A}_{k+1}$ їх показникові вирази (рис. 5.24)

$$\begin{aligned} f(t) &= \dot{A}_k e^{p_k t} + \dot{A}_{k+1} e^{p_{k+1} t} = |A_i| e^{j\varphi_k} e^{(-\alpha_k + j\omega_k)t} + |A_i| e^{-j\varphi_k} e^{(-\alpha_k - j\omega_k)t} = \\ &= |A_i| e^{-\alpha_k t} [e^{j(\omega_k t + \varphi_k)} + e^{-j(\omega_k t + \varphi_k)}] = 2|A_i| e^{-\alpha_k t} \left[\frac{e^{j(\omega_k t + \varphi_k)} + e^{-j(\omega_k t + \varphi_k)}}{2} \right] = \\ &= 2|A_i| e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_k) = 2|A_i| e^{\operatorname{Re}(p_k)t} \cos[\operatorname{Im}(p_k)t + \arg(A_i)]. \end{aligned}$$

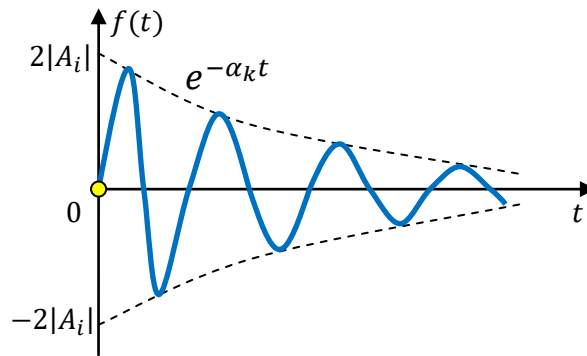


Рисунок 5.24 – Графічна інтерпретація комплексних коренів

Приклад 5.2. Знайти та побудувати оригінал $f(t)$ для наведеної операторної функції за теоремою розкладання

$$F(p) = \frac{1}{10p^2 + p + 1}.$$

Розв'язання

Корені знаменника становлять $p_1 = -0.05 - j0.312$; $p_2 = -0.05 + j0.312$.

За теоремою розкладання

$$F(p) = \frac{1}{10p^2 + p + 1} = \frac{1}{(p - (-0.05 - j0.312))(p - (-0.05 + j0.312))} =$$

$$= \frac{A_1}{p + 0.05 + 0.312j} + \frac{A_2}{p + 0.05 - 0.312j}.$$

Знаменник виразу

$$F_2(p) = 10p^2 + p + 1.$$

Похідна знаменника

$$F_3(p) = \frac{dF_2(p)}{dp} = 20p + 1.$$

Коефіцієнти при лишках функції в особливих точках

$$A_1 = \left. \frac{F_1(p)}{F_3(p)} \right|_{p=p_1} = \left. \frac{1}{20p + 1} \right|_{p=-0.05-j0.312} = j0.16 = 0.16e^{j90^\circ};$$

$$A_2 = \left. \frac{F_1(p)}{F_3(p)} \right|_{p=p_2} = \left. \frac{1}{20p + 1} \right|_{p=-0.05+j0.312} = -j0.16 = 0.16e^{-j90^\circ}.$$

Причому беремо аргумент того коефіцієнта, який відповідає кореню із додатною уявною частиною.

У результаті запишемо оригінал (рис. 5.25)

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = 2 \cdot |A_2| e^{\operatorname{Re}[p_2]t} \cos(\operatorname{Im}[p_2]t + \arg(A_2)) =$$

$$= 0.32e^{-0.05t} \cos(0.312t - 90^\circ).$$

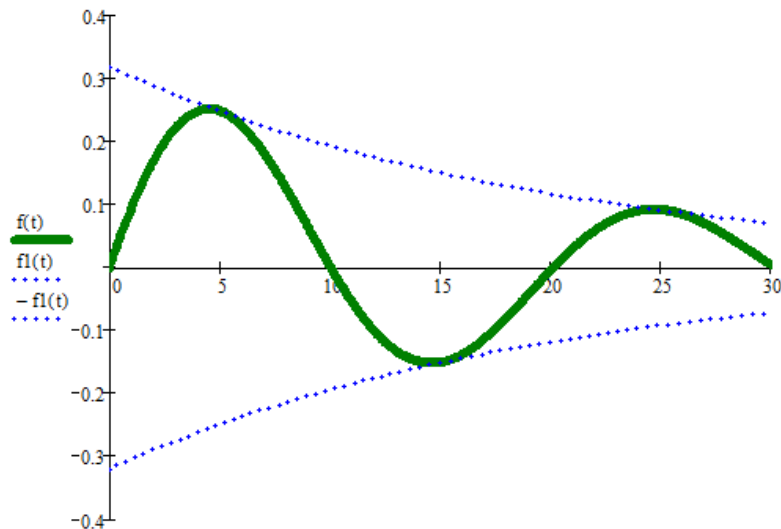


Рисунок 5.25 – Графічна інтерпретація комплексних коренів

5.6.2. Загальна методика

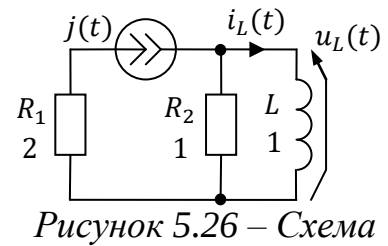
При розв'язанні задач із комутаціями операторним методом розв'язання розбивається на п'ять етапів.

1. Розраховуються незалежних початкові умови $i_L(0)$ та $u_C(0)$.
2. Зображується операторна схема заміщення для кола, отриманого після комутації
3. Складається система рівнянь на підставі операторних законів Кірхгофа або за допомогою операторного методу контурних струмів, вузлових напруг.
4. Із системи визначаються операторні зображення струмів і напруг.
5. Знаходяться оригінали, по отриманих зображеннях за допомогою теореми розкладання.

Перед складанням схеми заміщення кола у операторній формі необхідно знайти значення струму $i_L(0-)$ в індуктивності та напруги $u_C(0-)$ на ємності до комутації. Оскільки коло до комутації знаходиться у сталому режимі, то визначення значень $i_L(0-)$ і $u_C(0-)$ можна зробити, застосувавши будь-який метод розрахунку. Якщо значення $i_L(0-)$ і $u_C(0-)$ відмінні від нуля, то при складанні схеми заміщення необхідно послідовно із реактивними елементами включити додаткові джерела енергії.

5.7. Приклади розрахунку кіл операторним методом

Приклад 5.3. У колі (рис. 5.26) операторним методом знайти напругу $u_L(t)$ та струм $i_L(t)$ на індуктивності, побудувати їх графіки. Струм джерела струму $j(t) = 10 \cdot e^{-2t}$ мА, $t \geq 0$. Числові значення елементів: опори – кОм, індуктивності – мГн.



Розв'язання

Струм джерела струму у операторній формі

$$j(t) = 10 \cdot e^{-2t} \rightarrow J(p) = \frac{10}{p+2} \left[\beta \cdot e^{-\alpha t} \rightarrow \frac{\beta}{p+\alpha} \right].$$

За формулою дільника струму

$$I_L(p) = J(p) \cdot \frac{R_2}{R_2 + pL} = \frac{10}{p+2} \cdot \frac{1}{1+p} = \frac{10}{(p+1)(p+2)}.$$

Операторний струм на індуктивності за теоремою розкладання

$$I_L(p) = \frac{10}{(p+1)(p+2)} = \frac{A_1}{p+1} + \frac{A_2}{p+2}.$$

Згідно теореми розкладання коефіцієнти визначаються

$$A_1 = \left. \frac{10}{(p+2)} \right|_{p=-1} = \frac{10}{(-1+2)} = \frac{10}{1} = 10;$$

$$A_2 = \left. \frac{10}{(p+1)} \right|_{p=-2} = \frac{10}{(-2+1)} = \frac{10}{-1} = -10.$$

Тоді маємо

$$I_L(p) = \frac{10}{p+1} - \frac{10}{p+2}.$$

Скористалися формулою

$$\frac{\beta}{p+\alpha} \rightarrow \beta e^{-\alpha t}.$$

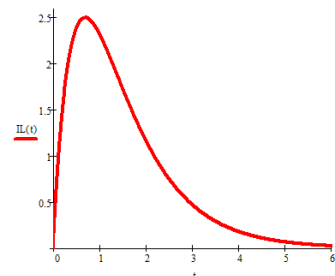


Рисунок 5.27 – Струм

Оригінал такого зображення є струм (рис. 5.27)

$$i_L(t) = 10e^{-t} - 10e^{-2t}.$$

Напруга на індуктивності (рис. 5.28)

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 20e^{-2t} - 10e^{-t}.$$

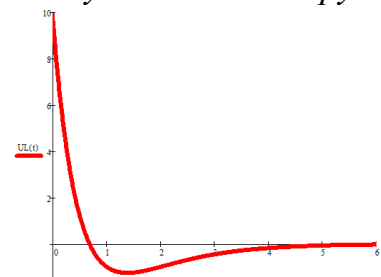


Рисунок 5.28 – Напруга

Відповідь: $i_L(t) = 10e^{-t} - 10e^{-2t}$, $u_L(t) = 20e^{-2t} - 10e^{-t}$.

Приклад 5.4. У колі (рис. 5.29) операторним методом знайти напругу $u_c(t)$ та струм $i_c(t)$ на ємності, побудувати їх графік. Напруга джерела $e(t) = 12 \cdot e^{-3t} \text{ В}$, $t \geq 0$. Числові значення елементів кола: опори – кОм, ємності – нФ.

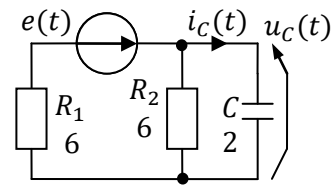


Рисунок 5.29 – Схема

Розв'язання

Операторна вхідна напруга

$$e(t) = 12 \cdot e^{-3t} \rightarrow E(p) = \frac{12}{p+3} \left[\beta \cdot e^{-\alpha t} \rightarrow \frac{\beta}{p+\alpha} \right].$$

У колі (рис. 5.29) перетворимо джерело напруги у джерело струму (рис. 5.30 а) та визначимо еквівалентні параметри

$$J(p) = \frac{E(p)}{R_1} = \frac{2}{p+3}; \quad R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 6}{6 + 6} = 3 \text{ кОм}.$$

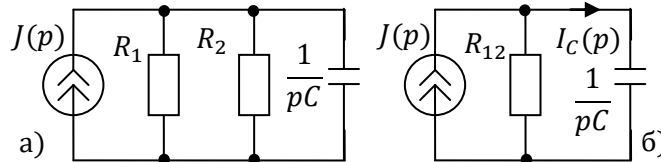


Рисунок 5.30 – Еквівалентні схеми

За формулою дільника струму (рис. 5.30 б)

$$I_c(p) = J(p) \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + \frac{1}{pC}} = \frac{2}{p+3} \cdot \frac{6p}{3+2p} = \frac{6p}{(p+3)(p+1.5)}.$$

Операторна напруга на ємності за законом Ома та теоремою розкладання

$$U_c(p) = I_c(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{6p}{(p+3)(p+1.5)} \cdot \frac{1}{2p} = \frac{3}{(p+3)(p+1.5)} = \frac{B_1}{p+1.5} + \frac{B_2}{p+3}.$$

Коефіцієнти згідно теореми розкладання

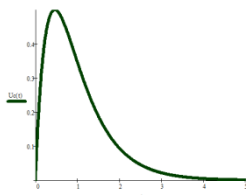
$$B_1 = \frac{3}{(p+3)} \Big|_{p=-1.5} = \frac{3}{(-1.5+3)} = 2; \quad B_2 = \frac{3}{(p+1.5)} \Big|_{p=-3} = \frac{3}{(-3+1.5)} = -2.$$

У результаті одержимо напругу (рис. 5.31 а)

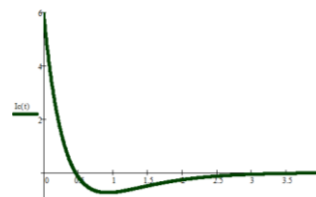
$$U_c(p) = \frac{2}{p+1.5} - \frac{2}{p+3} \rightarrow u_c(t) = 2e^{-1.5t} - 2e^{-3t}.$$

Струм в ємності (рис. 5.31 б)

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = -6e^{-1.5t} + 12e^{-3t}.$$



а



б

Рисунок 5.31 – Напруга (а) та струм у колі (б)

Відповідь: $i_c(t) = 12e^{-3t} - 6e^{-1.5t}$, $u_c(t) = 2e^{-1.5t} - 2e^{-3t}$.

Задача 5.5. У колі (рис. 5.32) до та після комутації визначити струм $i_C(t)$ та напругу на ємності $u_C(t)$ операторними методами. Побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі: напруга – В, опори – кОм, ємності – нФ.

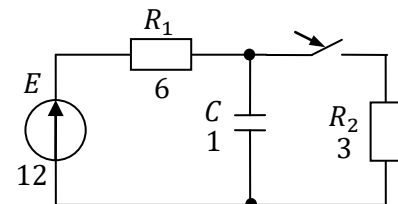


Рисунок 5.32 – Схема

Розв'язання

Зобразимо коло (рис. 5.32) до комутації на постійному струмі, щоб визначити нульові початкові умови. У колі (рис. 5.33) за другим законом Кірхгофа

$$U_C(0-) = E = 12 \text{ В.}$$

За другим законом комутації

$$U_C(0-) = U_C(0) = 12 \text{ В.}$$

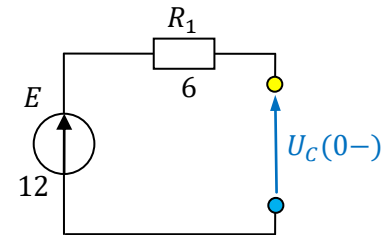


Рисунок 5.33 – Схема до комутації на постійному струмі

Зобразимо операторну схему заміщення кола після комутації (рис. 5.34).

Операторні напруги джерел

$$E_{C0}(p) = \frac{U_C(0)}{p} = \frac{12}{p};$$

$$E(p) = \frac{E}{p} = \frac{12}{p}.$$

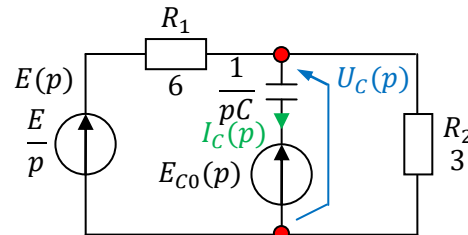


Рисунок 5.34 – Схема до комутації на постійному струмі

У колі (рис. 5.34) перетворимо джерело напруги $E(p)$ на джерело струму у операторному колі після комутації (рис. 5.35 а)

$$J(p) = \frac{E(p)}{R_1} = \frac{12/p}{6} = \frac{2}{p}.$$

Еквівалентний опір (рис. 5.35 б)

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2 \text{ кОм.}$$

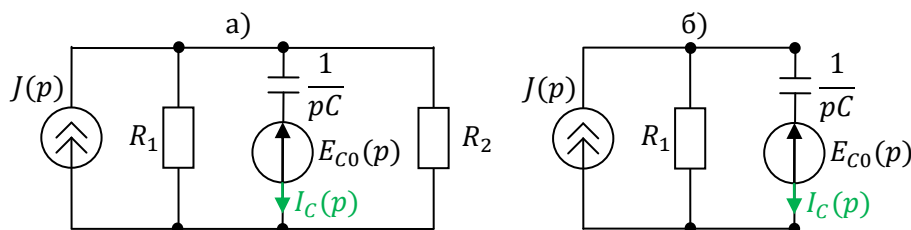


Рисунок 5.35 – Еквівалентні схеми

Перетворимо джерело струму у джерело напруги (рис. 3.36)

$$E_2(p) = J(p) \cdot R_{12} = \frac{2}{p} \cdot 2 = \frac{4}{p}.$$

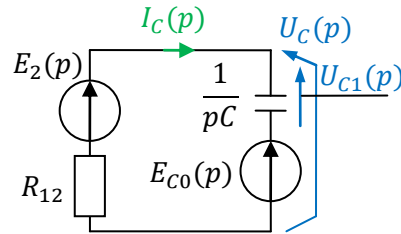


Рисунок 5.36 – Еквівалентна схема

За операторним законом Ома

$$I_C(p) = \frac{E_{C0}(p) - E_2(p)}{R_{12} + \frac{1}{pC}} = \frac{\frac{12}{p} - \frac{4}{p}}{2 + \frac{2}{p}} = \frac{\frac{8}{p}}{\frac{2p+2}{p}} = \frac{4}{p+1}.$$

За таблицею Лапласа

$$i_C(t) = 4e^{-t}.$$

Скористалися формулою

$$\left[\frac{\beta}{p + \alpha} \rightarrow \beta \cdot e^{-\alpha t} \right].$$

Струм в ємності до та після комутації (рис. 5.37 а)

$$i_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 4e^{-t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ мА}$$

Операторна напруга на ємності (рис. 5.36) за другим законом Кірхгофа

$$\begin{aligned} U_C(p) &= E_{C0}(p) + U_{C1}(p) = E_{C0}(p) + I_C(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{12}{p} + \frac{4}{p(p+1)} = \\ &= E_{C0}(p) + U_{C1}(p). \end{aligned}$$

За теоремою розкладання

$$U_{C1}(p) = \frac{4}{p(p+1)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p+1}.$$

Визначимо коефіцієнти при лишках функції в особливих точках

$$A_1 = \frac{4}{p+1} \Big|_{p=0} = 4;$$

$$A_2 = \frac{4}{p} \Big|_{p=-1} = -4.$$

Отже, запишемо

$$U_{C1}(p) = \frac{4}{p} - \frac{4}{p+1}.$$

Тоді загальна напруга на ємності

$$U_C(p) = E_{C0}(p) + U_{C1}(p) = \frac{12}{p} + \left[\frac{4}{p} - \frac{4}{p+1} \right] = \frac{16}{p} - \frac{4}{p+1}.$$

Отже, запишемо

$$U_C(p) = \frac{16}{p} - \frac{4}{p+1}.$$

Скористалися формулою

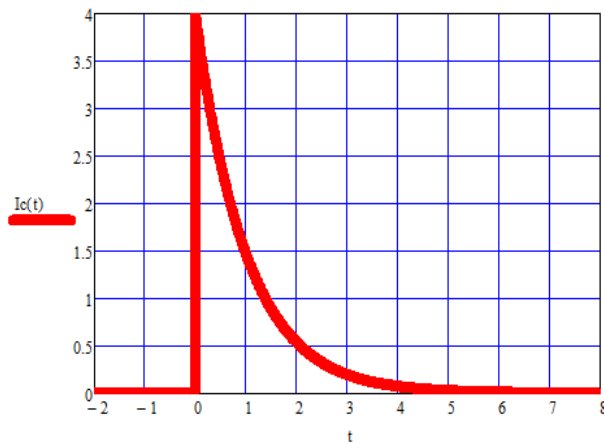
$$\left[\frac{\beta}{p + \alpha} \rightarrow \beta \cdot e^{-\alpha t} \right].$$

В результаті отримаємо

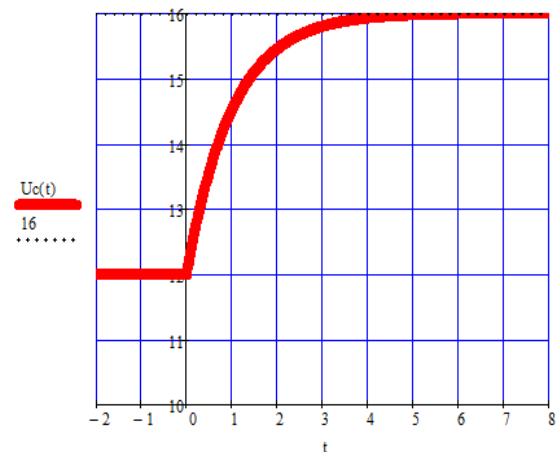
$$u_C(t) = 16 - 4e^{-t}.$$

Напруга на ємності до та після комутації (рис. 5.37 б)

$$u_C(t) = \begin{cases} 12, & t < 0; \\ 16 - 4e^{-t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ В.}$$



а)



б)

Рисунок 5.37 – Зміна напруги у часі

Відповідь:

$$i_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 4e^{-t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ мА; } u_C(t) = \begin{cases} 12, & t < 0; \\ 16 - 4e^{-t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ В.}$$

5.8. Часовий метод аналізу кіл

5.8.1. Часові характеристики

Імпульсною характеристикою називається реакція кола (напруга або струм) на виході при дії на вході кола дельта-функції $\delta(t)$ (струму або напруги) у вигляді функції Дірака.

Розмірність $g(t)$ дорівнює розмірності реакції, діленої на розмірність дії (рис. 5.38).

Якщо не враховувати розмірність, то імпульсною характеристикою можна вважати реакцію кола на функцію Дірака.

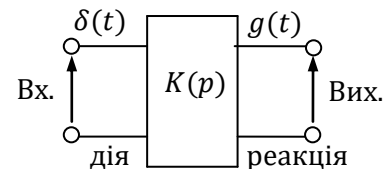


Рисунок 5.38 – Схема

Імпульсна характеристика характеризує вільний процес. Інакше кажучи, якщо моментально збудили коло нескінченно вузьким імпульсом із нескінченною амплітудою та відразу дію забрати, то коло повинне повернутися у вихідний стан (якщо воно стійке). Цей процес і буде за формою збігатися із імпульсною характеристикою $g(t)$. Щоб побачити даний процес на осцилографі необхідно на вхід лінійного кола подати періодичну послідовність імпульсів тривалістю τ , із періодом T , щоб $\tau \ll t_{пп}$ та $T \gg t_{пп}$, $t_{пп}$ – час згасання вільної складової перехідного процесу або час перехідного процесу.

Коефіцієнт передачі кола

$$K(p) = \frac{G(p)}{\delta(p)}.$$

Оскільки зображення за Лапласом $\delta(p) = 1$, то реакція в операторному вигляді $\delta(p)$ буде чисельно дорівнює передавальній функції $K(p)$

$$G(p) = \delta(p)K(p) = K(p).$$

Оригінал імпульсної характеристики $g(p)$ знаходимо за допомогою зворотного перетворення Лапласа

$$g(t) = L^{-1}\{K(p)\} = L^{-1}\{G(p)\}.$$

Перехідною характеристикою називається реакція кола (струм або напруга) на виході, якщо на вхід діє одиничний східчастий імпульс $1(t)$ (струму або напруги) у вигляді функції Хевісайда (рис. 5.39).

Перехідна характеристика $h(t)$ чисельно дорівнює реакції кола на дію у вигляді функції Хевісайда, а її розмірність – це відношення розмірності реакції до розмірності дії.

При включенні кола до джерела одиничної напруги перехідна характеристика струму називається перехідною провідністю, а при підключенні кола до джерела одиничного струму перехідна характеристика напруги називається перехідним опором.

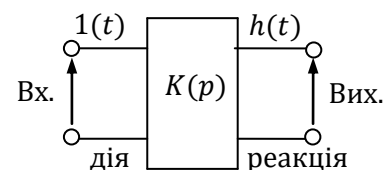


Рисунок 5.39 – Схема

Якщо на вхід кола подати одиничний східчастий імпульс (струму або напруги), то відбувається перехід від одного усталеного режиму до іншого.

Коефіцієнт передачі кола

$$K(p) = \frac{H(p)}{1(p)}.$$

Перехідну характеристику можна визначити операторним методом із урахуванням зображення функції Хевісайда $1(t) \rightarrow \frac{1}{p}$.

$$H(p) = K(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{K(p)}{p}.$$

Для знаходження оригіналу $h(t)$ необхідно виконати зворотне перетворення Лапласа

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K(p)}{p} \right\} = L^{-1} \{ H(p) \},$$

$$H(p) = \frac{K(p)}{p}.$$

Розмірність $h(t)$ вказуємо для того, щоб при знаходженні реакції кола на дію довільної форми одержували необхідну розмірність.

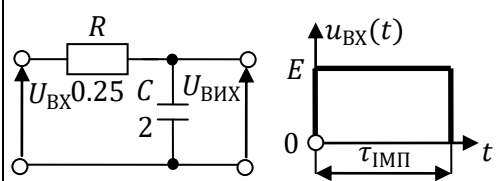
Перехідну характеристику можна також одержати класичним методом. Для цього необхідно розрахувати перехідний процес щодо шуканої реакції при включенні кола на постійну дію.

Для одержання стійкого зображення перехідної характеристики на осцилографі необхідно подати на вхід кола періодичну послідовність прямокутних імпульсів із періодом, що на багато перевищує час тривалості перехідного процесу. Це необхідно для того, щоб перехідний процес реакції кола на зникнення імпульсу закінчився до приходу наступного імпульсу. Тривалість імпульсу так само повинна перевищувати час, необхідний для закінчення перехідного процесу. Тоді реакція на передній фронт імпульсу за формою збігається із перехідною характеристикою.

Зв'язок імпульсною та перехідною характеристиками

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t), \quad h(t) = \int_0^t g(t) dt.$$

Нижче наведені приклади розрахунку.

Приклад 5.6. У колі (рис. 5.40) визначити $u_{\text{ВІХ}}(t)$ та часові характеристики коефіцієнта передачі за напругою, побудувати їх. Вхідна напруга тривалістю $\tau_{\text{ІМП}} = 5$ мкс, амплітудою $E = 2$ В. Опори в кОм, ємності в нФ, напруга в В.	 Рисунок 5.40 – Схема та вхідна напруга

Розв'язання

Операторний коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U(p) = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{g}{g + pC} = \frac{4}{4 + 2p} = \frac{2}{2 + p}.$$

Імпульсна характеристика (рис. 5.41 а)

$$g(t) = L^{-1}\{K_U(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{2 + p}\right\} = 2e^{-2t} \quad \left[\frac{\beta}{p + \alpha} \rightarrow \beta e^{-\alpha t}\right].$$

Перехідна характеристика (рис. 5.41 б)

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K_U(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{(2 + p)p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2 + p - p}{(2 + p)p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 2}\right\} = 1 - 1e^{-2t}.$$

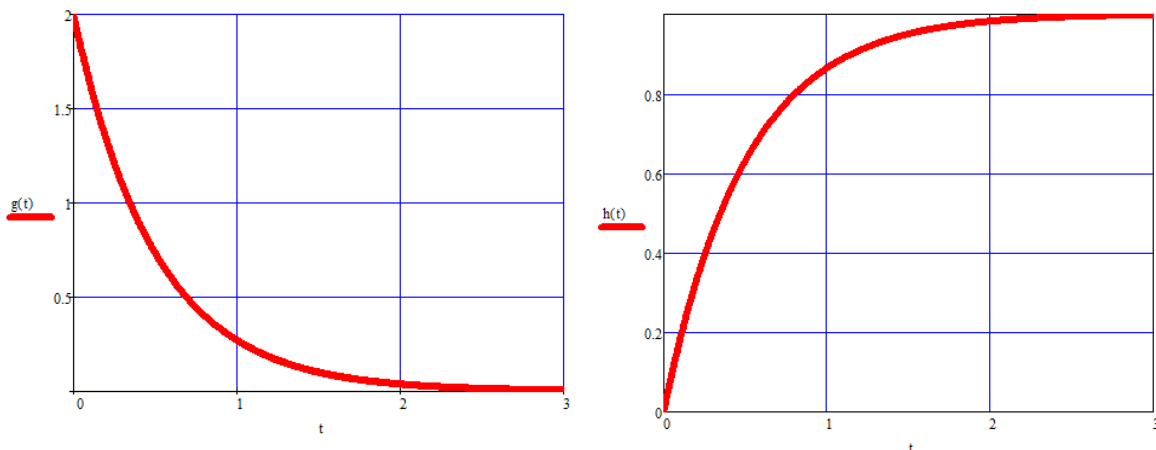


Рисунок 5.41 – Часові характеристик кола

Вхідна напруга прямокутної форми є різниця двох функцій Хевісайда (рис. 5.42 а).

$$u_{\text{ВХ}}(t) = E[1(t) - 1(t - \tau_{\text{ІМП}})].$$

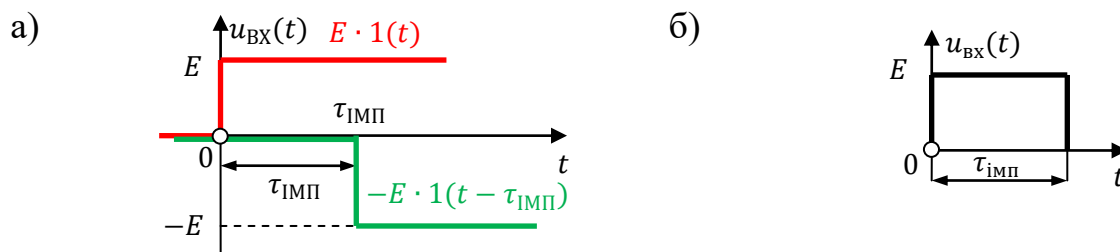


Рисунок 5.42 – Розкладання вхідної напруги

Оскільки реакція кола на функцію Хевісайда є перехідна характеристика, тоді напруга на виході (рис. 5.43 б) визначається у такий спосіб

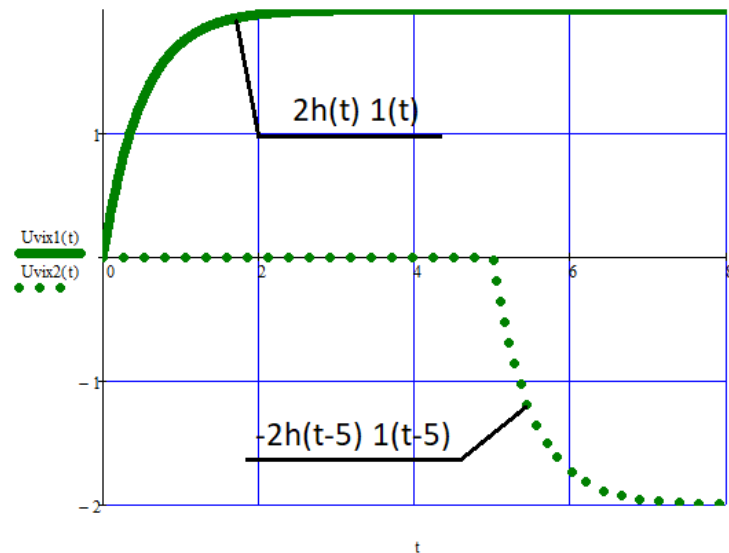
$$u_{\text{ВІХ}}(t) = E[h(t) \cdot 1(t) - h(t - 5) \cdot 1(t - 5)].$$

На рис. 5.43 а напруга на виході представлена у вигляді окремих складових

$$u_{\text{ВІХ}}(t) = u_{\text{ВІХ}1}(t) + u_{\text{ВІХ}2}(t),$$

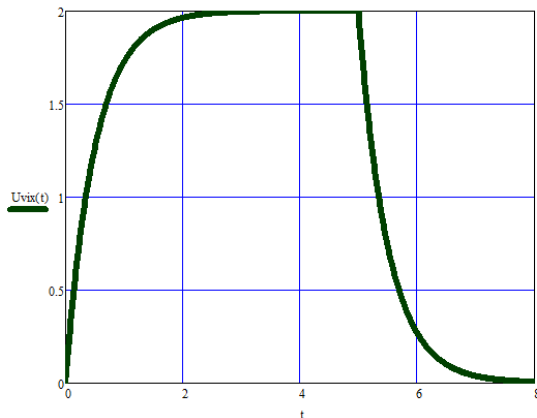
$$u_{\text{ВІХ}1}(t) = E \cdot h(t) \cdot 1(t); \quad u_{\text{ВІХ}2}(t) = E \cdot h(t - 5) \cdot 1(t - 5).$$

На рис. 5.43 б представлена напруга на виході, а на рис. 5.43 в представлена вхідна та вихідна напруги на виході.



а)

б)



в)

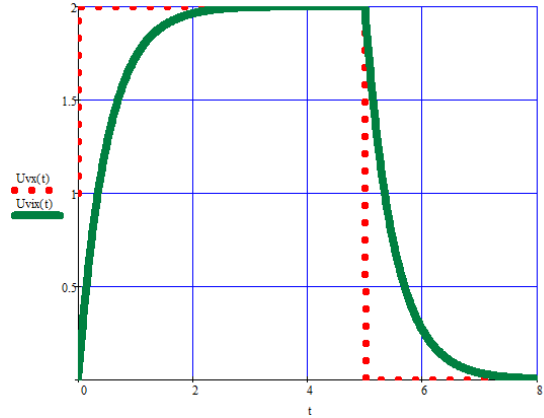


Рисунок 5.43 – Вихідна напруга

Відповідь: $g(t) = 2e^{-2t}$; $h(t) = 1 - e^{-2t}$; $u_{\text{ВІХ}}(t) = h(t) \cdot 1(t) - h(t - 5) \cdot 1(t - 5)$.

Приклад 5.7. У колі (рис. 5.44) визначити $i_{\text{ВІХ}}(t)$ та часові характеристики коефіцієнта передачі за струмом. Побудувати їх графіки. Вхідний струм має тривалість $\tau_{\text{ІМП}} = 4$ мкс та амплітудою $I_m = 3$ мА. Числові значення: опори в кОм, індуктивність в мГн, струм в мА.

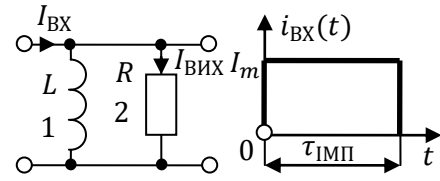


Рисунок 5.44 – Схема

Розв'язання

Операторний коефіцієнт передачі за струмом

$$K_I(p) = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{pL}{R + pL} = \frac{p}{2 + p}.$$

Часові характеристики (рис. 5.45)

$$g(t) = L^{-1}\{K_I(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{p}{p+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{p+2-2}{p+2}\right\} = L^{-1}\left\{1 - \frac{2}{p+2}\right\} = \delta(t) - e^{-2t};$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K_I(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{2+p}\right\} = 2e^{-2t}.$$

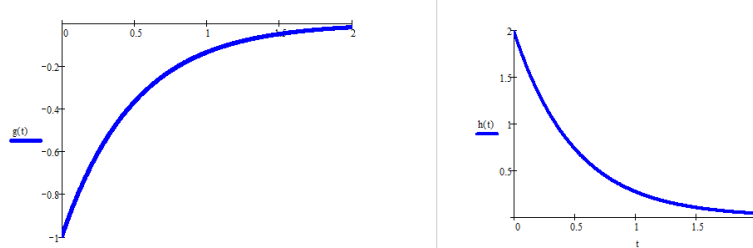


Рисунок 5.45 – Часові характеристики

Струм прямокутної форми можна одержати у вигляді різниці двох функцій Хевісайда (рис. 5.46 а).

$$I_{\text{ВХ}}(t) = I_m[1(t) - 1(t - \tau_{\text{ІМП}})].$$

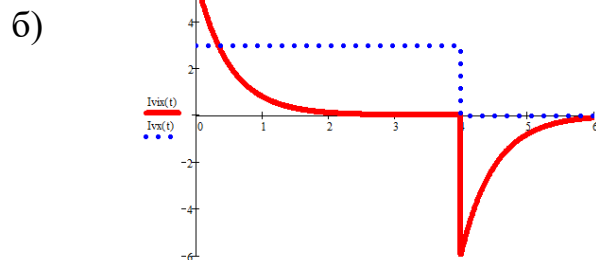
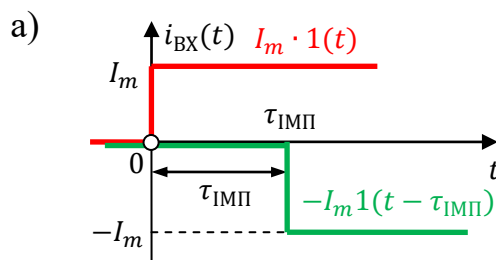


Рисунок 5.46 – Вхідна (а) та вихідна (б) напруги

Струм на виході (рис. 5.46 б)

$$I_{\text{ВІХ}}(t) = I_m[h(t) \cdot 1(t) - h(t - 4) \cdot 1(t - 4)] \text{ мА.}$$

Відповідь: $g(t) = \delta(t) - e^{-2t}$; $h(t) = 2e^{-2t}$;

$$i_{\text{ВІХ}}(t) = 3h(t) \cdot 1(t) - 3h(t - 4) \cdot 1(t - 4) \text{ мА.}$$

5.8.2. Визначення дії часовим методом

Часовий метод знаходження реакції кола на вхідний сигнал, ще називають інтеграл Дюамеля або інтегралом суперпозиції, що ґрунтується на згортці двох функцій. Покажемо фізичний зміст згортки двох функцій

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau.$$

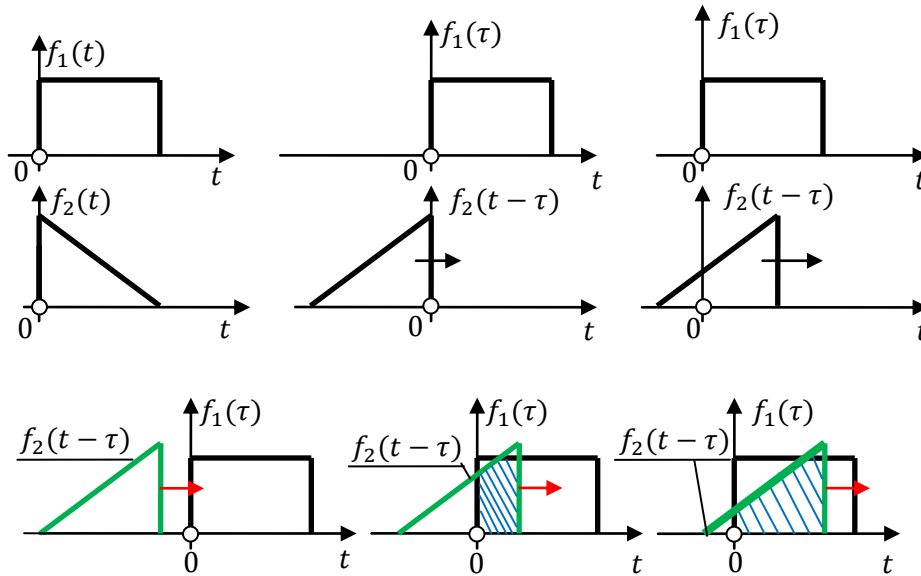


Рисунок 5.47 - Геометрична інтерпретація згортки двох функцій

Фізично згортка двох функцій означає, що ми беремо одну із двох функцій (можна будь-яку) і перевертаємо (відображаємо) її щодо осі ординат (вона виявиться у від'ємній області) і потім пересуваємо цю функцію праворуч (рис. 5.47). Як тільки функція $f_2(t - \tau)$ почне перетинати нуль вона почне перекриватися із функцією $f_1(\tau)$. Оскільки інтеграл від функції це площа під графіком цієї функції, то згортка двох функцій – це площа області перетину функцій.

Реакція кола через імпульсну та перехідну характеристики

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \dot{h}(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot \dot{h}(\tau) d\tau, \\ \dot{h}(\tau) &= \frac{d}{dt} g(\tau). \end{aligned}$$

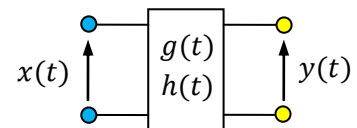


Рисунок 5.47 – Схема

Диференціювати можна і вхідну функцію, тому що в операторному вигляді функція реакції має вигляд

$$Y(p) = X(p) \cdot K(p) = pX(p) \cdot \frac{K(p)}{p} = pX(p) \cdot H(p) \rightarrow y(t) = \dot{x}(t) \cdot h(t).$$

Тому інтеграл згортки можна записати по-іншому

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau.$$

Припустимо, що є лінійне коло із передавальною функцією $K(p)$, імпульсною $g(t)$ та перехідною $h(t)$ характеристиками (рис. 5.48).

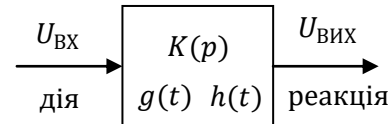


Рисунок 5.48 – Схема

Вихідна напруга за допомогою інтеграла Дюамеля визначається

$$u_{\text{ВІХ}}(t) = \begin{cases} \int_0^t u_{\text{ВІХ}}(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t u_{\text{ВІХ}}(t - \tau) g(\tau) d\tau, \\ \int_0^t \dot{u}_{\text{ВІХ}}(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^t \dot{u}_{\text{ВІХ}}(t - \tau) h(\tau) d\tau. \end{cases}$$

При обчисленні реакції кола на дію, яка починається із якогось рівня $U_0 = u_{\text{ВІХ}}(0)$ (рис. 5.49), вхідна напруга буде визначатися у такий спосіб

$$u_{\text{ВІХ}}(t) = U_0 + u_{\text{ВІХ}1}(t).$$

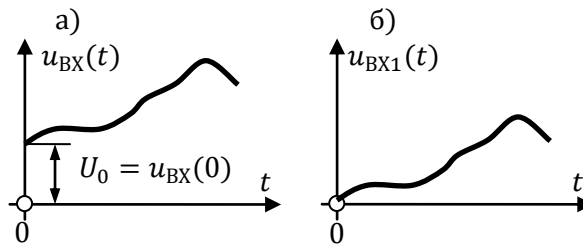


Рисунок 5.49 – Вхідна напруга

Похідна від вхідного сигналу буде мати стрибок

$$\frac{du_{\text{ВІХ}}(t)}{dt} = \dot{u}_{\text{ВІХ}}(t) = U_0 \delta(t) + \dot{u}_{\text{ВІХ}1}(t) = u_{\text{ВІХ}}(0) \delta(t) + \dot{u}_{\text{ВІХ}1}(t).$$

Визначимо вихідну напругу через інтеграл Дюамеля

$$\begin{aligned} U_{\text{ВІХ}}(t) &= \int_0^t [U_{\text{ВІХ}}(0) \delta(\tau) + U'_{\text{ВІХ}}(\tau)] h(t - \tau) d\tau = U_{\text{ВІХ}}(0) \int_0^t \delta(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_0^t U'_{\text{ВІХ}}(\tau) h(t - \tau) d\tau = \\ &= U_0 h(t) + \int_0^t U'_{\text{ВІХ}}(\tau) h(t - \tau) d\tau = U_0 h(t) + \int_0^t U'_{\text{ВІХ}}(t - \tau) h(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Аналогічно запишемо для імпульсної характеристики, що починається не з нуля, а з якогось початкового значення $H_0 = h(0)$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = h(0)\delta(t) + \dot{h}(t).$$

Розрахуємо напругу на виході

$$\begin{aligned} u_{\text{ВІХ}}(t) &= \int_0^t u_{\text{ВІХ}}(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau = \int_0^t u_{\text{ВІХ}}(t-\tau) \cdot [h(0) \cdot \delta(\tau) + \dot{h}(\tau)] d\tau = \\ &= h(0) \int_0^t u_{\text{ВІХ}}(t-\tau) \cdot \delta(\tau) d\tau + \int_0^t u_{\text{ВІХ}}(t-\tau) \cdot \dot{h}(\tau) d\tau = \\ &= h(0) \cdot u_{\text{ВІХ}}(t) + \int_0^t u_{\text{ВІХ}}(t-\tau) \cdot \dot{h}(\tau) d\tau = h(0) \cdot u_{\text{ВІХ}}(t) + \int_0^t u_{\text{ВІХ}}(\tau) \cdot \dot{h}(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Приклад розрахунку поданий нижче.

Приклад 5.8. У колі (рис. 5.50) знайти часові характеристики та напругу на виході. Вхідна напруга $u_{\text{ВІХ}}(t) = 20e^{-2.5t}$ В, $t \geq 0$. На схемі: опори в кОм, ємності в нФ.

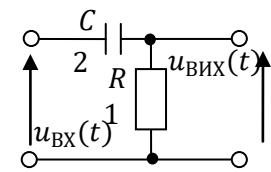


Рисунок 5.50 – Схема

Розв'язання

Коефіцієнт передачі кола у операторній формі

$$K(p) = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{U_{\text{ВІ}}} = \frac{pC}{pC + g} = \frac{2p}{1 + 2p} = \frac{p}{0.5 + p}.$$

Імпульсна характеристика (рис. 5.51 а)

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}\{K(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{p}{0.5 + p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{p + 0.5 - 0.5}{0.5 + p}\right\} = L^{-1}\left\{1 - \frac{0.5}{0.5 + p}\right\} = \\ &= \delta(t) - 0.5e^{-0.5t}; \end{aligned}$$

Перехідна характеристики (рис. 5.51 б)

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{0.5 + p}\right\} = 1e^{-0.5t} \left[\frac{\beta}{p + \alpha} \rightarrow \beta e^{-\alpha t} \right].$$

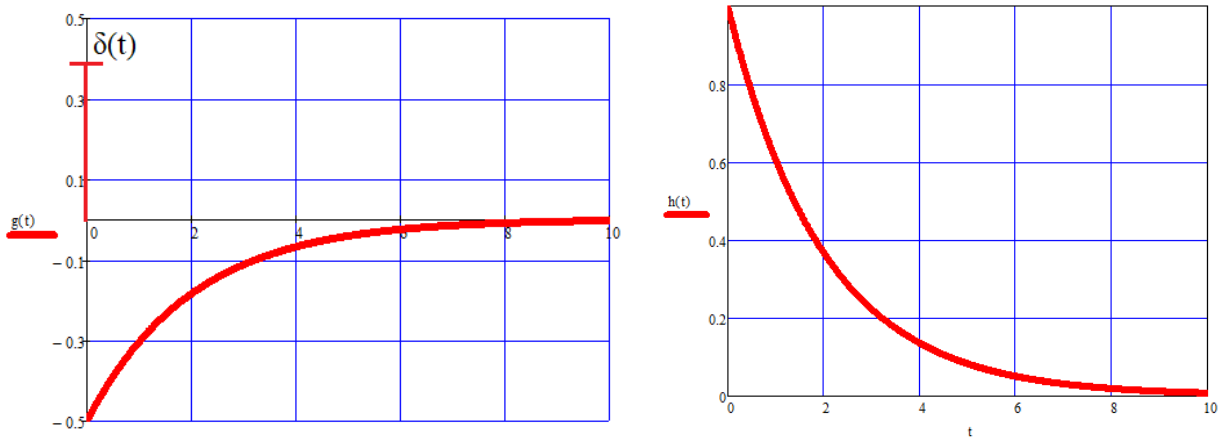


Рисунок 5.51 – Часові характеристики
 $\delta(t)$

Операторний метод

Вхідна напруга у операторній формі

$$u_{\text{ВХ}}(t) = 20e^{-2.5t} \rightarrow U_{\text{ВХ}}(p) = \frac{20}{p + 2.5}.$$

По формулі $\left[\beta e^{-at} \rightarrow \frac{\beta}{p+a} \right]$.

Напруга на виході у операторній області

$$\begin{aligned} U_{\text{ВІХ}}(p) &= U_{\text{ВХ}}(p) \cdot K(p) = \\ &= \frac{20}{p + 2.5} \cdot \frac{p}{0.5 + p} = \frac{20p}{(p + 0.5)(p + 2.5)}. \end{aligned}$$

За теоремою розкладання

$$U_{\text{ВІХ}}(p) = \frac{20p}{(p + 0.5)(p + 2.5)} = \frac{A_1}{p + 0.5} + \frac{A_2}{p + 2.5}.$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках

$$\begin{aligned} A_1 &= \left. \frac{20p}{p + 2.5} \right|_{p=-0.5} = \frac{-10}{2} = -5; \\ A_2 &= \left. \frac{20p}{p + 0.5} \right|_{p=-2.5} = \frac{-50}{-2} = 25. \end{aligned}$$

Отже, одержимо

$$U_{\text{ВІХ}}(p) = \frac{-5}{p + 0.5} + \frac{25}{p + 2.5}.$$

Вихідна напруги у часовій формі (рис. 5.52)

$$u_{\text{ВІХ}}(t) = -5e^{-0.5t} + 25e^{-2.5t} \text{ В.}$$

Часовий метод

Напруга на виході часовим методом через імпульсну характеристику

$$\begin{aligned}
 u_{\text{ВІХ}}(t) &= u_{\text{ВІХ}}(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВІХ}}(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \\
 &= 20e^{-2.5t} - \int_0^t 20e^{-2.5\tau} \cdot 0.5e^{-0.5(t-\tau)} d\tau = 20e^{-2.5t} - 10e^{-0.5t} \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \\
 &= 20e^{-2.5t} + 5e^{-0.5t} \cdot e^{-2t} \Big|_0^t = 20e^{-2.5t} + 5e^{-2.5t} - 5e^{-0.5t} = \\
 &= 25e^{-2.5t} - 5e^{-0.5t} \text{ В.}
 \end{aligned}$$

Напруга на виході часовим методом через перехідну характеристику

$$\begin{aligned}
 u_{\text{ВІХ}}(t) &= \dot{u}_{\text{ВІХ}}(t) * h(t) = u_{\text{ВІХ}}(0) \cdot h(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_{\text{ВІХ}}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \\
 &= 20 \cdot 1e^{-0.5t} + \int_0^t 50e^{-2.5\tau} \cdot e^{-0.5(t-\tau)} d\tau = 20e^{-0.5t} + \\
 &+ 50e^{-0.5t} \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = 20e^{-0.5t} - 25e^{-0.5t} (e^{-2\tau}) \Big|_0^t = \\
 &= -5e^{-0.5t} + 25e^{-2.5t} \text{ В.}
 \end{aligned}$$

Графік зміни вихідної напруги у часі (рис. 5.52).

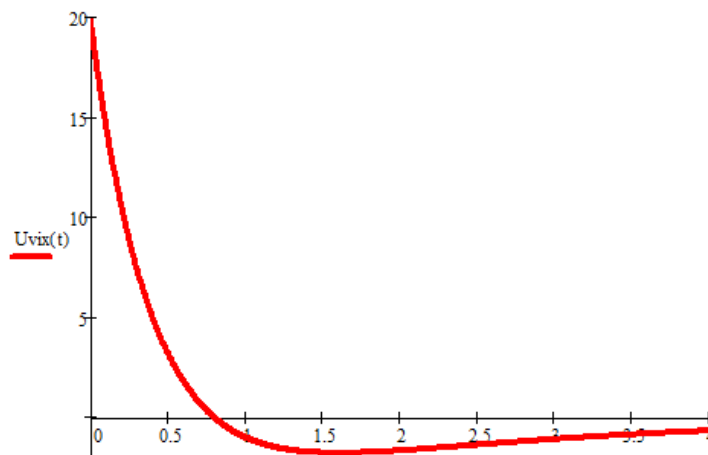


Рисунок 5.52 – Вихідна напруга

Відповідь: $h(t) = 1e^{-0.5t}, g(t) = \delta(t) - 0.5e^{-0.5t},$
 $u_{\text{ВІХ}}(t) = 25e^{-2.5t} - 5e^{-0.5t} \text{ В.}$

5.9. Поняття про класичний метод розрахунку

5.9.1. Вільний та вимушений режим

Розглянемо загальну методику розрахунку перехідного процесу на прикладі включення нерозгалуженого послідовного кола (рис. 5.53 а).

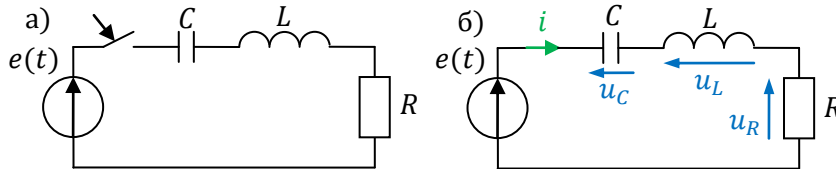


Рисунок 5.53 – Комутація у колі

Другий закон Кірхгофа у колі після комутації (рис. 5.53 б)

$$e(t) = u_R + u_L + u_C.$$

Напруги на опорі та індуктивності

$$u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}, \quad i = C \frac{du_C}{dt};$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}.$$

Підставимо одержані формули у вираз напруги

$$e(t) = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Якщо елементів кола L , R , C не залежать від напруги u_C і струму i , то рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням із розв'язком

$$u_C = u_{C.\text{вим}} + u_{C.\text{вл}}$$

де $u_{C.\text{вим}}$ – власний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння; $u_{C.\text{вл}}$ – загальний розв'язок лінійного однорідного.

Запишемо однорідне рівняння

$$LC \frac{d^2 u_{C.\text{вл}}}{dt^2} + RC \frac{du_{C.\text{вл}}}{dt} + u_{C.\text{вл}} = 0.$$

Зробимо таку заміну

$$\frac{d^2 u_{C.\text{вл}}(t)}{dt^2} \div p^2 u_{C.\text{вл}}(t), \quad \frac{du_{C.\text{вл}}(t)}{dt} \div p u_{C.\text{вл}}(t).$$

Одержимо характеристичне рівняння

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0;$$

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Введемо заміну

$$\frac{R}{L} = 2\alpha; \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

В результаті одержимо

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0.$$

Корені рівняння

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac} = -\alpha \pm \sqrt{(\alpha)^2 - \omega_0^2}.$$

Корені рівняння у загальному випадку можуть бути дійсними, кратними або комплексними.

Для дійсних та комплексних коренів розв'язок має вигляд

$$u_{C.BЛ}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Для стійких кіл перший та другий доданки повинні мати загасаючий характер, а отже, корені характеристичного рівняння повинні бути від'ємними.

В усталеному режимі $u_{C.BЛ} = 0$. Оскільки $u_C = u_{C.BИМ} + u_{C.BЛ}$, то запишемо рівняння у вигляді

$$LC \frac{d^2}{dt^2} (u_{C.BИМ} + u_{C.BЛ}) + RC \frac{d}{dt} (u_{C.BИМ} + u_{C.BЛ}) + (u_{C.BИМ} + u_{C.BЛ}) = e(t).$$

Віднявши від цього рівняння перше рівняння одержимо

$$LC \frac{d^2 u_{C.BИМ}}{dt^2} + RC \frac{du_{C.BИМ}}{dt} + u_{C.BИМ} = e(t).$$

Складова $u_{C.BЛ}$ описує коло у відсутності джерела та називається **вільною складовою**, а $u_{C.BИМ}$ залежить від джерела та називається **вимушеною складовою**.

Розглянемо методику знаходження констант для контуру. Загальний розв'язок має вигляд

$$u_C(t) = u_{C.BИМ} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Продиференціюємо вираз

$$\frac{du_C(t)}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}.$$

Надамо виразу фізичний зміст похідній

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{C}{C} \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt} \cdot \frac{1}{C} = \frac{i_C(t)}{C}.$$

За законами комутації

$$i_L(0) = i_L(0-) = 0, \quad i_L = i_C = i = 0; \\ u_C(0) = u_C(0-) = 0.$$

Вирази у нульовий момент часу

$$\begin{cases} u_C(0) = 0 = E + A_1 + A_2; \\ \frac{i_C(0)}{C} = 0 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \end{cases}$$

У результаті одержимо систему

$$\begin{cases} -E = A_1 + A_2; \\ 0 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \end{cases}$$

Звідси визначимо за методом Крамера

$$A_1 = \frac{-E p_2}{p_2 - p_1}; \quad A_2 = \frac{E p_1}{p_2 - p_1}.$$

5.9.2. Загальна методика розрахунку класичним методом

Порядок розрахунку перехідних процесів викладемо нижче.

1. Одним із відомих методів аналізу лінійних кіл складається рівняння або система рівнянь після комутації для схеми із врахуванням співвідношень

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad u = i \cdot R.$$

Як метод складання рівнянь можуть бути такі методи: рівняння Кірхгофа, метод контурних струмів, метод вузлових напруг, метод еквівалентного генератора.

2. Система рівнянь, що описує коло, зводиться до неоднорідного диференційного рівняння щодо шуканої змінної

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t).$$

У якості шуканих змінних доцільно обирати струм в індуктивності $i_L(t)$ та напругу на ємності $u_C(t)$.

3. Складається характеристичне рівняння та знаходяться його корені.

Для цього неоднорідне диференціальне рівняння перетворюємо в однорідне диференціальне рівняння

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0.$$

Вводимо заміну

$$\frac{dx(t)}{dt} \div p x(t), \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \div p^2 x(t), \dots, \frac{d^n x(t)}{dt^n} \div p^n x(t).$$

складаємо характеристичне рівняння

$$a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

та знаходимо його корені.

4. Записуємо повне розв'язання диференційного рівняння

$$x(t) = x_{ВИМ}(t) + x_{БЛЛ}(t).$$

5. Знаходимо вимушену складову $x_{ВИМ}(t)$ в усталеному режимі в колі після комутації.

6. Вигляд вільної складової для дійсних рівних та нерівних коренів

$$x_{БЛЛ}(t) = \sum_{i=1}^m A_i t^{m-i} e^{p_i t} + \sum_{k=m+1}^n A_k e^{p_k t},$$

де $p_1 = p_2 = \dots = \lambda_m$, $m < n$.

7. На підставі незалежних початкових умов і законів комутації визначаємо константи інтегрування A_k .

$$x(0) = x_{ВИМ}(0) + x_{БЛЛ}(0).$$

Відзначимо, що основна складність класичного методу аналізу перехідних процесів у складних колах полягає у визначенні залежних початкових умов.

Залежно від порядку диференціальних рівнянь розрізняють кола першого, другого та більш високих порядків.

5.10. Перехідні процеси у послідовних RL- та RC-колах

5.10.1. Ввімкнення RL-кола під постійну напругу

У колі (рис. 5.54 а) після комутації (рис. 5.54 б) згідно другого закону Кірхгофа запишемо рівняння

$$E = u_R + u_L.$$

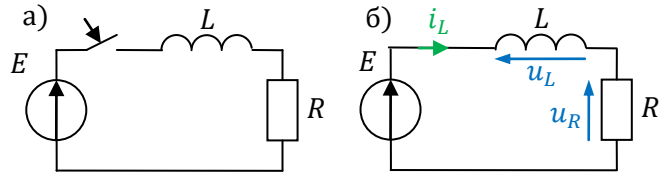


Рисунок 5.54 – Досліджувана схема

Визначимо напругу на елементах кола

$$u_R = Ri_L, \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

Запишемо диференціальне рівняння щодо струму

$$E = Ri_L + L \frac{di_L}{dt}.$$

Корені рівняння $i_L(t) = i_{L.BИM} + i_{L.BИЛ}(t)$,

де $i_{L.BИM}$ і $i_{L.BИЛ}(t)$ – струми вимушеного та вільного режимів відповідно.

Однорідне диференціальне рівняння

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = 0.$$

Введемо заміну

$$\frac{di_L}{dt} \rightarrow pi_L.$$

Отримаємо характеристичне рівняння

$$R + Lp = 0.$$

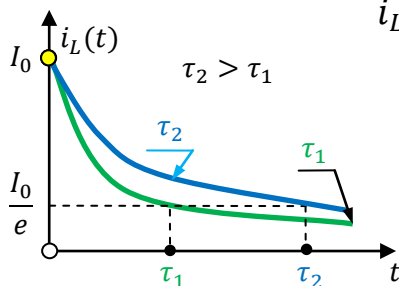
Корінь характеристичного рівняння $p = -R/L$.

Вільна складова струму в індуктивності

$$i_{L.BИЛ}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-tR/L} = Ae^{-t/\tau},$$

де $\tau = L/R$, τ – стала часу послідовного RL-кола.

Стала часу кола показує час, протягом якого вільна складова струму чи напруги за абсолютною величиною, зменшується у e раз у порівнянні зі своїм початковим значенням



$$i_{L.BИЛ}(\tau) = i_{L.BИЛ}(0)e^{-1} = A/e.$$

Практично можна вважати, що вільна складова струму в індуктивності загасне за час $t_{III} = 3\tau$, як було показано вище.

Чим більше τ , тим повільніше загасне перехідний процес (рис. 5.55).

Рисунок 5.55 – Фізичний зміст τ

Покажемо це, виходячи з розмірностей

$$[\tau] = \frac{L}{R} = \frac{[\Gamma_H]}{[O_M]} = \frac{\left[\frac{B \cdot c}{A}\right]}{\left[\frac{B}{A}\right]} = [c].$$

Тоді розв'язок має вигляд

$$i_L(t) = i_{L.BИM} + i_{L.BИЛ}(t) = i_{L.BИM} + Ae^{-t/\tau}.$$

Щоб визначити вимушену складову зобразимо схему після комутації на постійному струмі. Індуктивність L на постійному струмі буде закоротка (рис. 5.56). Тоді вимушений струм в індуктивності визначимо за законом Ома

$$i_{L.BИM} = \frac{E}{R}.$$

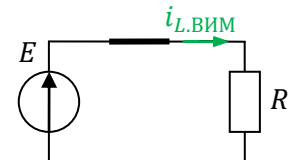


Рисунок 5.56 –
Схема після комутації

Струм в індуктивності

$$i_L(t=0) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{0}{\tau}} = \frac{E}{R} + A.$$

Оскільки до підключення джерела напруги E струму у колі не було, то за першим законом комутації $i_L(0) = i_L(0-) = 0$.

В результаті отримаємо

$$0 = \frac{E}{R} + A.$$

Звідси знаходимо константу $A = -\frac{E}{R}$.

Тоді отримаємо вираз струму

$$i_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Повний струму в індуктивності до та після комутації (рис. 5.57 а)

$$i_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Визначимо напруги на елементах у колі після комутації (рис. 5.54 б)

За законом Ома (рис. 5.57 б)

$$u_R(t) = i_L(t) \cdot R = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

За другим законом Кірхгофа (рис. 5.57 б)

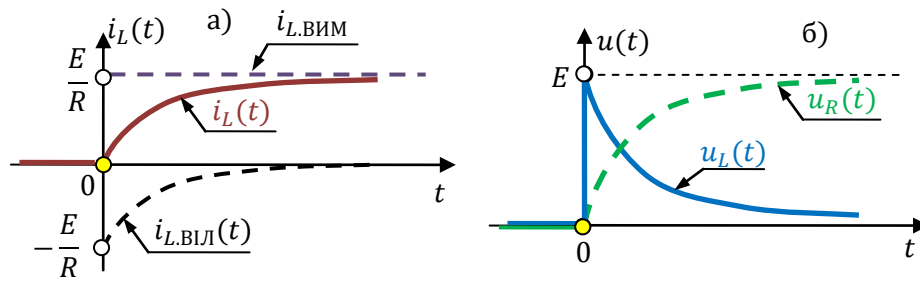
$$u_L(t) = E - u_R(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Такий же самий результат можна одержати із виразу

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Вирази напруг до та після комутації

Напруга на індуктивності	Напруга на опорі
$u_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ Ee^{-\frac{t}{\tau}}, & t \geq 0. \end{cases}$	$u_R(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ E - Ee^{-\frac{t}{\tau}}, & t \geq 0. \end{cases}$

Рисунок 5.57 – Залежність струму $i_L(t)$ та напруг

Графіки (рис. 5.57 а) показують, що струм у колі не встановлюється миттєво, а потрібно якийсь час (час перехідного процесу) до початку встановлення вимушеного режиму. Струм зростає тим повільніше, чим більша стала часу кола τ , тобто чим повільніше загасає вільний струм. Частина енергії, що одержується від джерела, іде на збільшення магнітного поля індуктивності, а частина переходить у тепло в її опорі. Із графіка (рис. 5.57 б) бачимо, що напруга на опорі u_R повторює форму струму.

У момент комутації в індуктивності була запасена енергія магнітного поля

$$W_R = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} I_0^2 R e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = I_0^2 R \left(-\frac{\tau}{2} \right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \\ = I_0^2 R \frac{L}{2R} (1 - 0) = \frac{LI_0^2}{2}.$$

5.10.2. Ввімкнення RC-кола під постійну напругу

У колі (рис. 5.58 а) після комутації (рис. 5.58 б) згідно другого закону Кірхгофа запишемо рівняння

$$E = u_R + u_C.$$

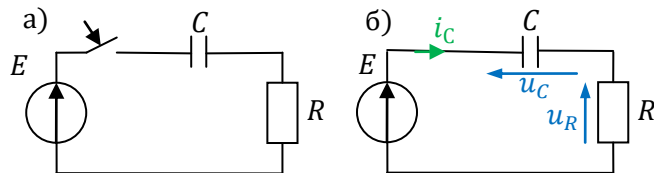


Рисунок 5.58 – Досліджувана схема

Визначимо напругу на опорі

$$u_R = iR = CR \frac{du_C}{dt}, i = i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Підставимо значення у другий закон Кірхгофа

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Розв'язання цього рівняння

$$u_C(t) = u_{C,ВІМ} + u_{C,ВІЛ}(t),$$

де $u_{C,ВІМ}$ і $u_{C,ВІЛ}(t)$ – напруги вимушеного режиму та вільного процесу.

Однорідне диференціальне рівняння

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Введемо заміну

$$\frac{du_C}{dt} \rightarrow pu_C.$$

Одержимо характеристичне рівняння

$$RCp + 1 = 0.$$

Корені цього рівняння

$$p = -\frac{1}{RC}.$$

Вираз вільної складової напруги

$$u_{C.ВІЛ}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-t/RC} = Ae^{-t/\tau},$$

де $\tau = RC$, що називають сталою часу RC-кола.

Визначимо розмірність

$$[\tau] = RC = [\text{Ом}] \cdot [\text{Ф}] = \left[\frac{\text{В}}{\text{А}}\right] \cdot \left[\frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В}}\right] = [\text{с}].$$

Отже, швидкість зарядження ємності визначається сталою часу кола (рис. 5.59). Чим більші значення ємності та активного опору, тим повільніше зростає напруга на ємності і зменшується струм.

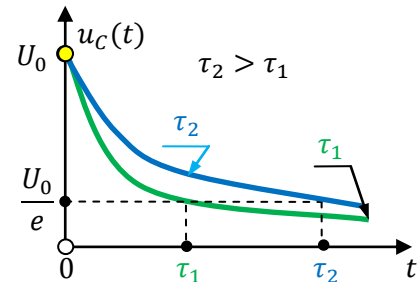


Рисунок 5.59 - Фізичний зміст τ

Нехай ємність до комутації була заряджена, тобто $u_C(0-) = U_0$.

Для визначення вимушеної складової зобразимо схему після комутації на постійному струмі (рис. 5.60).

Вимушена складова напруги на ємності за другим законом Кірхгофа

$$u_{C.ВІМ} = E.$$

Вільна має вигляд $u_{C.ВІЛ}(t) = Ae^{-t/\tau}$.

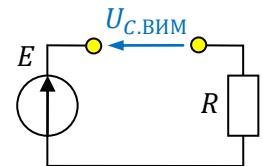


Рисунок 5.60 – Схема

Напруга на ємності

$$u_C(t) = E + Ae^{-t/\tau}.$$

На основі другого закону комутації

$$u_C(0) = u_C(0-) = U_0.$$

Запишемо вираз напруги при $t = 0$:

$$u_C(0) = U_0 = E + A.$$

Із виразу виразимо

$$A = U_0 - E.$$

Отже, одержуємо вираз для напруги на ємності

$$u_C(t) = E + (U_0 - E)e^{-t/\tau}.$$

Напруга на опорі за другим законом Кірхгофа

$$u_R(t) = E - u_C = (E - U_0)e^{-t/\tau}.$$

Струм у колі

$$i_C(t) = \frac{E - U_0}{R} e^{-t/\tau}, \text{ або } i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Вирази напруги та струму в ємності до та після комутації

Напруга на ємності	Струм в ємності
$u_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ E + (U_0 - E)e^{-t/\tau}, & t \geq 0. \end{cases}$	$i_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{E - U_0}{R} e^{-t/\tau}, & t \geq 0. \end{cases}$

Відсутність початкового заряду

Припустимо, що до початку перехідного процесу ємність була розряджена (тобто $u_C(0-) = 0$), тоді напруга на ємності змінюється за законом (рис. 5.61)

$$u_C(t) = E - Ee^{-t/\tau}.$$

Напругу на опорі та струм у колі

$$u_R(t) = Ee^{-t/\tau}, \quad i_C(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau} = I_0e^{-t/\tau}, \quad I_0 = \frac{E}{R}.$$

Вирази напруги та струму в ємності до та після комутації

Напруга на ємності	Струм в ємності
$u_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ E + Ee^{-t/\tau}, & t \geq 0. \end{cases}$	$i_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{E}{R}e^{-t/\tau}, & t \geq 0. \end{cases}$
Напруга на опорі $u_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ Ee^{-t/\tau}, & t \geq 0. \end{cases}$	

Із виразу для струму бачимо, що у момент комутації струм $i_C(0) = E/R$. Це підтверджує факт, що у момент комутації незаряджена ємність є «закорченою» ділянкою кола.

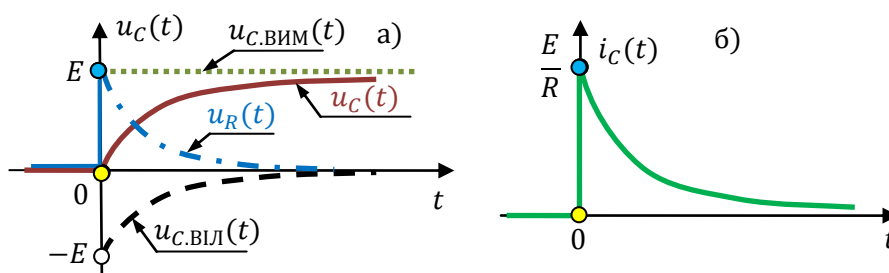


Рисунок 5.61 – Напруга $u_C(t)$ (а) і струму у колі $i(t)$ (б)

Графіки (рис. 5.61) показують, що напруга на ємності та струм у колі не встановлюється миттєво. Напруга зростає, а струм спадає тим повільніше, чим більша стала часу кола τ , тобто чим повільніше згасає вільна напруга $u_{C.ВІЛ}(t)$. Напруга на опорі за формою збігається зі струмом, і тому його графік не будемо будувати.

Присутність початкового заряду

Якщо ємність до моменту комутації була заряджена ($u_C = U_0$), то можливі різноманітні варіанти.

- 1) $U_0 > 0$, $U_0 < E$, то струм та напруга на ємності змінюються як показано на рис 5.62.

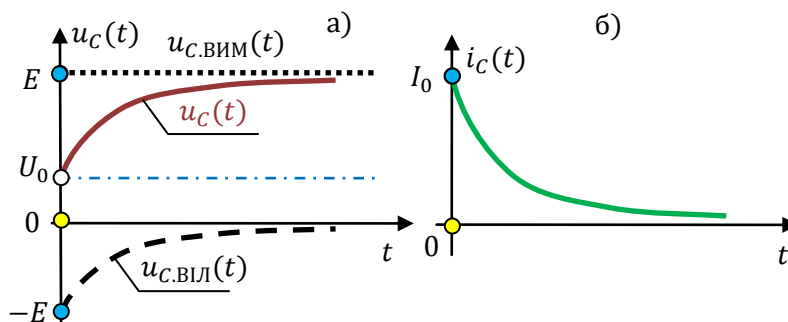


Рисунок 5.62 – Напруга на ємності $u_C(t)$ (а) і струму в ємності $i_C(t)$ (б)

Із графіків (рис. 5.62) бачимо, що ємність від U_0 підзарядиться (збільшується) до E . У початковий момент часу одержимо

$$i(0) = I_0 = \frac{E - U_0}{R}.$$

оскільки у момент комутації заряджена ємність еквівалентна джерелу напруги, що дорівнює U_0 (рис. 5.63).

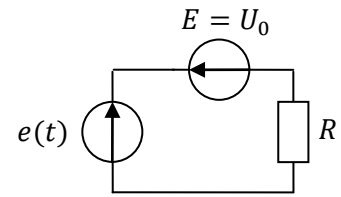


Рисунок 5.63 – Схема

2) $U_0 > 0$, $U_0 > E$, то струм та напруга на ємності змінюється, як показано на рис. 5.64.

У цьому випадку ємність розряджається від U_0 до E , тому струм від'ємний.

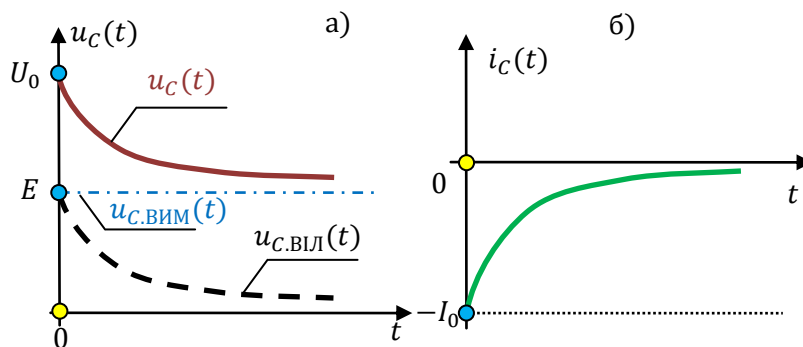


Рисунок 5.64 – Напруга на ємності $u_c(t)$ (а) струму в ємності $i_c(t)$ (б)

3) $U_0 < 0$, то струм та напруга на ємності змінюється, як показано на рис. 5.65.

У цьому випадку ємність перезарядиться від $-U_0$ до E . Значення струму, де джерело $E = U_0$ буде спрямоване вниз.

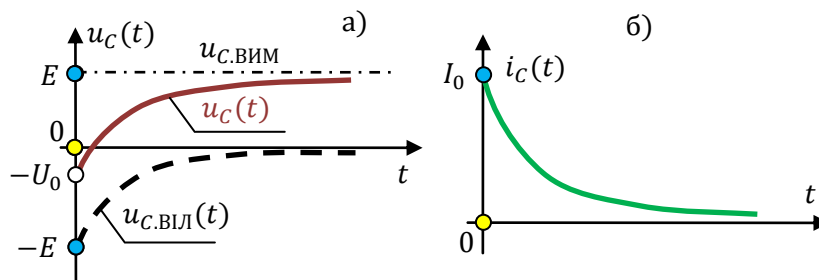


Рисунок 5.65. – Напруга на ємності $u_c(t)$ (а) струму в ємності $i_c(t)$ (б)

Покажемо, що така ж енергія розсіюється на опорі, що і у ємності. Для цього запишемо енергію на опорі R через струм, що у ньому протікає

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} \frac{U_0^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} R dt = \frac{U_0^2}{R^2} \cdot \left(-\frac{\tau}{2} \right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{U_0^2}{R^2} \cdot \frac{RC}{2} (1 - 0) = \frac{CU_0^2}{2}. \end{aligned}$$

5.10.3. Реакція RC-кола на П-подібний імпульс напруги

У колі (рис. 5.66 а) на вході діє П-подібний імпульс напруги (рис. 5.66 б). Визначимо напруги на елементах $u_R(t)$, $u_C(t)$.

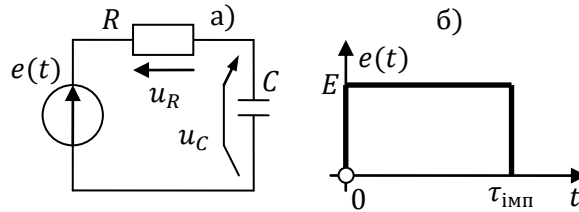


Рисунок 5.66 – Коло та вхідна напруга

Вхідну напругу прямокутної форми представимо у вигляді двох однакових функцій Хевісайда, що зміщені у часі на величину $\tau_{\text{імп}}$ (рис. 5.67). Реакція на суму таких функцій знайдемо за принципом суперпозиції. Вважаємо, що ємність не заряджена до початку перехідного процесу.

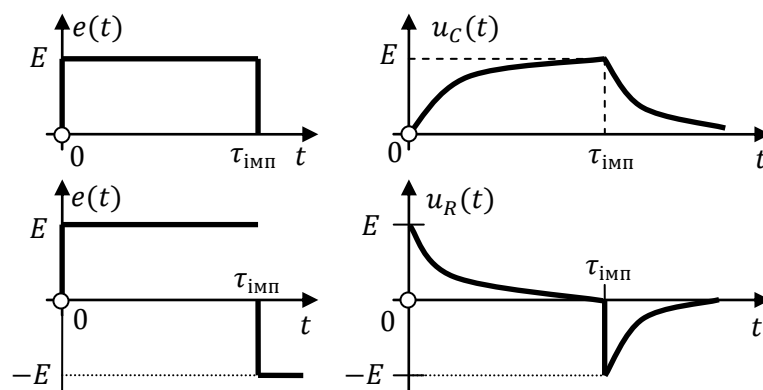


Рисунок 5.67 – Спотворення прямокутних імпульсів

При проходженні через таке коло П-подібного прямокутного імпульсу можливі два види спотворення імпульсу: «затягування фронтів» (рис. 5.67) та «сколювання вершин» (рис. 5.68).

«Затягування фронтів» проявляється сильніше, чим більше стала часу кола τ . Отже, для зменшення затягування фронтів імпульсу необхідно зменшити сталу часу кола τ . На рис. 5.68 $\tau_2 > \tau_1$.

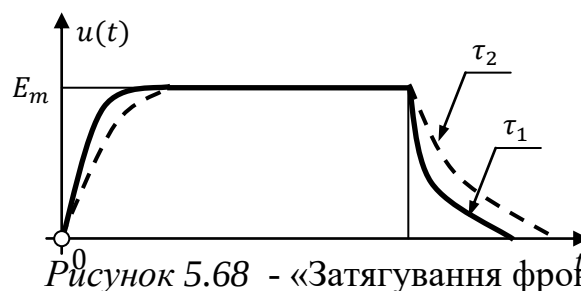


Рисунок 5.68 - «Затягування фронтів»

«Сколювання вершин» проявляється сильніше, чим менше стала часу кола τ . Отже, для зменшення сколювання вершин імпульсу необхідно збільшити сталу часу кола τ . На рис. 5.69 $\tau_1 > \tau_2$.

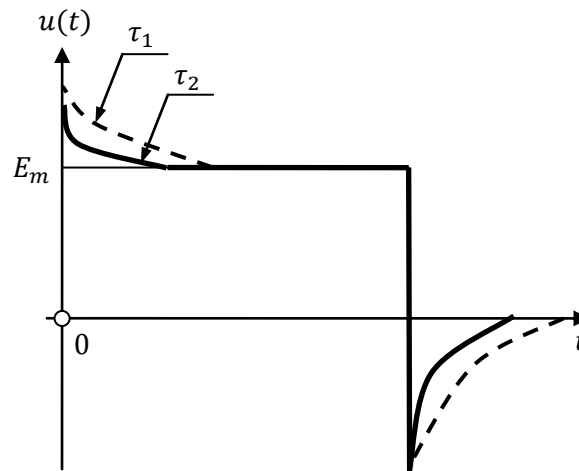


Рисунок 5.69 - Сколювання вершин

5.10.4. Приклади розрахунку класичним методом

Приклад 5.9. У колі (рис. 5.70) до та після комутації визначити напругу, струм на ємності операторним методом. Побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі: напруга – В, опори – кОм, ємності – нФ.

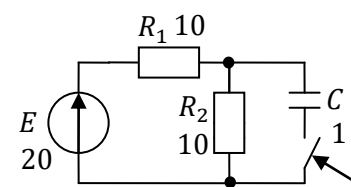


Рисунок 5.70 – Схема

Розв'язання

Перетворимо джерело напруги на джерело струму у операторному колі після комутації (рис. 5.71 а)

$$J(p) = \frac{E(p)}{R_1} = \frac{2}{p}.$$

Еквівалентний опір (рис. 5.71 б)

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ кОм}.$$

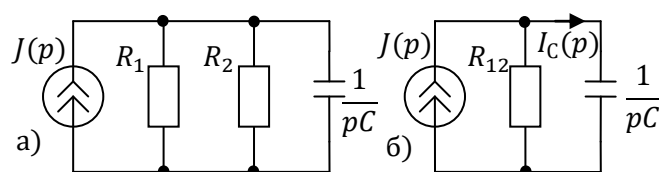


Рисунок 5.71 – Еквівалентні перетворення

За формулою дільника струму

$$I_c(p) = \frac{J(p) \cdot R_{12}}{R_{12} + \frac{1}{pC}} = \frac{2}{p} \cdot \frac{5p}{1 + 5p} = \frac{2}{p + 0.2}.$$

За таблицею Лапласа

$$i_c(t) = 2e^{-0.2t}.$$

Струм до та після комутації (рис. 5.72 а)

$$i_c(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 2e^{-0.2t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ мА}$$

Напруга на ємності (рис. 5.72 б)

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 10 - 10e^{-0.2t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ В.}$$

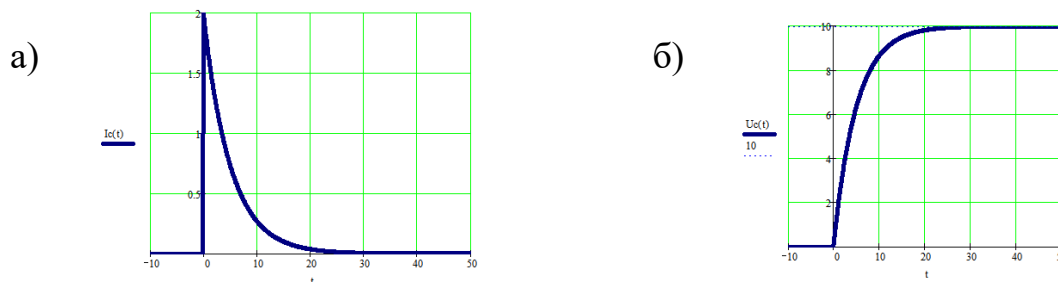


Рисунок 5.72 – Графіки струму та напруги на ємності

Приклад 5.10. У колі (рис. 5.73) до та після комутації визначити напругу, струм на ємності операторним методами. Побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі: напруга – В, опори – кОм, індуктивності – мГн.

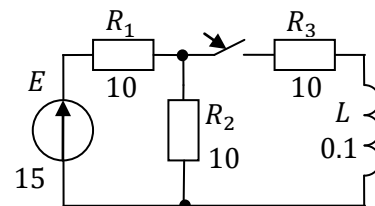


Рисунок 5.73 – Схема

Розв'язання

Перетворимо джерело напруги на джерело струму у операторному колі після комутації (рис. 5.74 а)

$$J(p) = \frac{E(p)}{R_1} = \frac{1.5}{p}.$$

Еквівалентний опір (рис. 5.74 б)

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ кОм.}$$

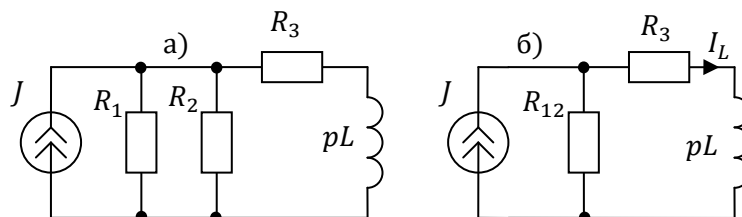


Рисунок 5.74 – Еквівалентні схеми

За формулою дільника струму

$$I_L(p) = \frac{J(p) \cdot R_{12}}{R_{12} + R_3 + pL} = \frac{1.5}{p} \cdot \frac{5}{5 + 10 + 0.1p} = \frac{75}{p(p + 150)}.$$

За теоремою розкладання

$$I_L(p) = \frac{75}{p(p + 150)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 150}.$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках

$$A_1 = \frac{75}{p + 150} \Big|_{p=0} = \frac{75}{150} = 0.5; \quad A_2 = \frac{75}{p} \Big|_{p=-150} = \frac{75}{-150} = -0.5.$$

Отже,

$$I_L(p) = \frac{0.5}{p} - \frac{0.5}{p + 150}.$$

За таблицею Лапласа запишемо оригінал струму

$$i_L(t) = 0.5 - 0.5e^{-150t}.$$

Струм та напруга до та після комутації (рис. 5.75)

$$i_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 0.5 - 0.5e^{-150t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ мА};$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 7.5e^{-150t}, & t \geq 0; \end{cases} \text{ В}.$$

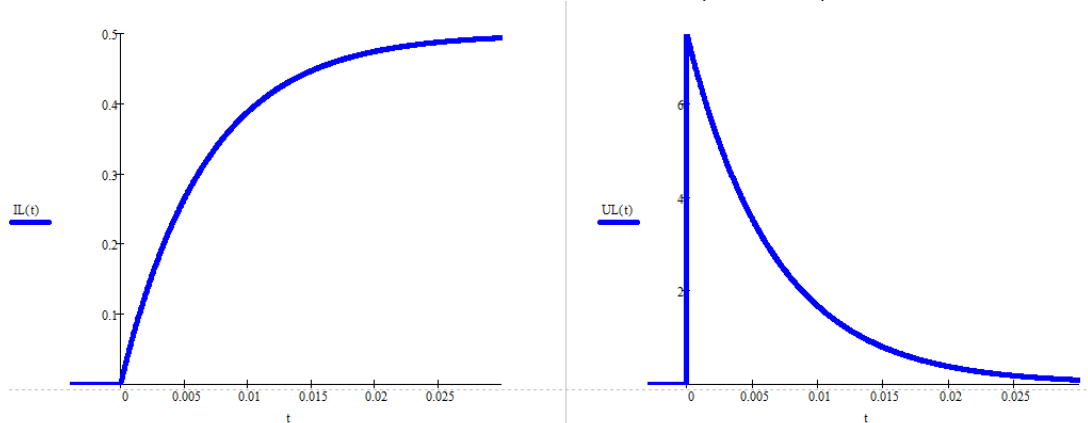


Рисунок 5.75 – Залежність струму та напругу в колі

6. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

6.1. Поняття про кола із розподіленими параметрами

Розрізняють кола із об'ємно розподіленими параметрами та лінійно розподіленими параметрами. У колах із об'ємно розподіленими параметрами всі три лінійні розміри їх елементів зрівняні з довжиною хвилі, а у колах із лінійно розподіленими параметрами тільки один із лінійних розмірів зрівняні із довжиною хвилі, а два інші суттєво менше її.

Прикладом кіл із об'ємно розподіленими параметрами є хвилеводи, резонатори (рис. 6.1) та інші елементи техніки надвисоких частот, а до кіл із лінійно розподіленими параметрами можна віднести двопровідну та коаксіальну, мікросмушкову, компланарну та щілинну лінії.

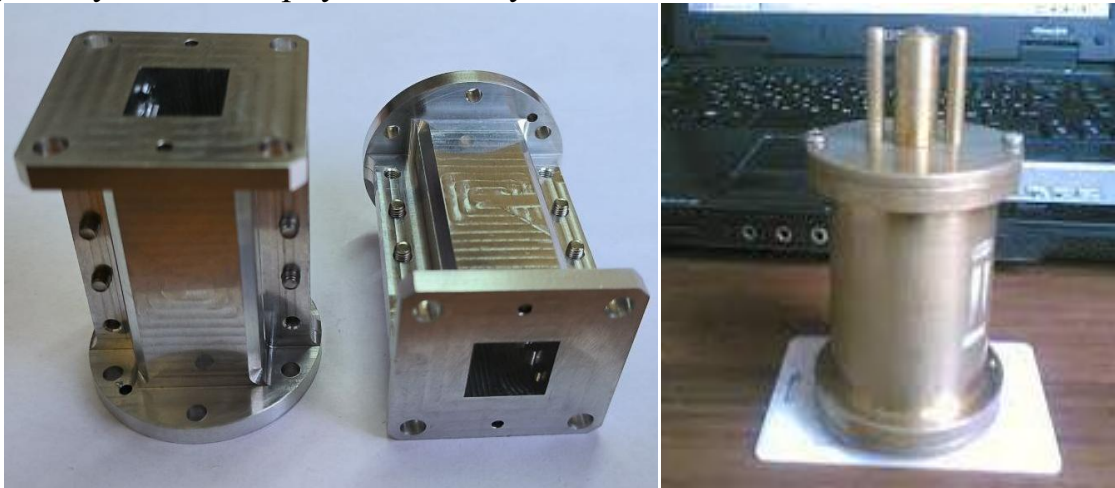


Рисунок 6.1 – Приклади кіл із об'ємно розподіленими параметрами

Такі лінії використовують для передачі енергії. До таких ліній висувають вимоги передачі максимальної потужності від джерела до навантаження, при цьому вхід та вихід лінії повинні бути узгодженими. Крім того, лінія повинна забезпечувати пропускання досить широкого спектру частот для неспотвореної передачі імпульсних сигналів та мати мінімальні розміри.

Кола із розподіленими параметрами на відміну від кіл із зосередженими параметрами, характеризуються хвильовими процесами, при цьому величини, що їх описують у загальному випадку є функціями часу та просторових координат. Одним із прикладів кіл із розподіленими параметрами є довгі лінії.

Довгими лініями називають такі лінії, геометричні розміри яких більше робочої довжини хвилі електромагнітних коливань або співвимірні з нею.

Довжина хвилі визначається

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с є швидкість світла.

У довгих лініях необхідно враховувати електричні процеси за допомогою яких електрична енергія чи сигнали передаються на відстань, оскільки електричні та магнітні поля розподілені вздовж всієї довжини лінії та перетворення електромагнітної енергії у тепло також відбувається по всій довжині лінії.

Із такої точки зору напруги та струми на різних ділянках навіть нерозгалуженого кола відрізняються одне від одного, тобто є функціями двох незалежних змінних часу t та просторової координати x : $u(t, x)$ та $i(t, x)$

Такі кола називаються колами із розподіленими параметрами. Зміст такої назви полягає у тому, що у кіл даного класу кожен нескінченно малий елемент їх довжини характеризується опором, індуктивністю, а між проводами – ємністю та провідністю. Різні види кіл із розподіленими параметрами зображені на рис. 6.2. На рис. 6.2 а зображена двопровідна лінія, на рис. 6.21 б – коаксіальна лінія, на рис. 6.2 в – мікросмужкова лінія.

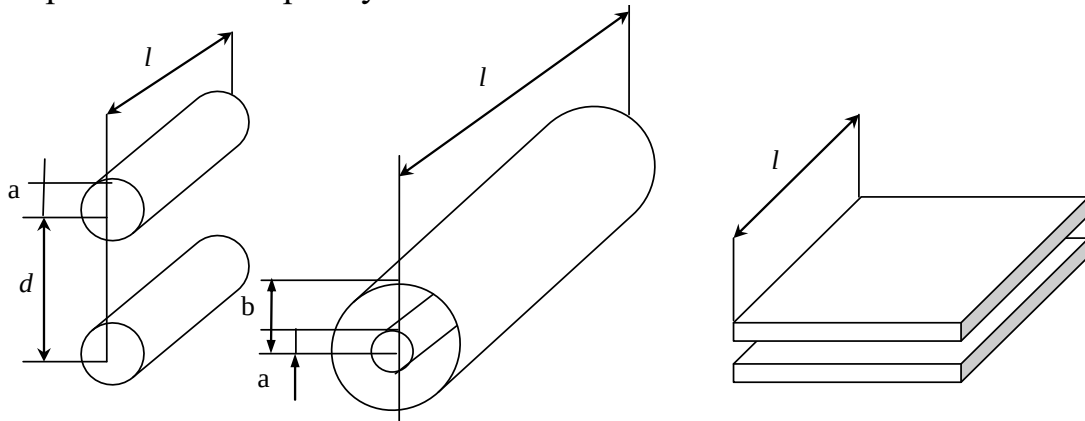


Рисунок 6.2 – Приклади довгих ліній

Для дослідження процесів у колах із розподіленими параметрами (інша назва – довгі лінії) введемо додаткову умову про рівномірність розподілу вздовж лінії її параметрів: індуктивності, опору, ємності та провідності. Таку лінію називають **однорідною**. Лінію з нерівномірним розподілом параметрів часто можна розбити на однорідні ділянки.

Таким чином, такі лінії використовуються для передачі енергії. До них висувають такі основні вимоги:

1. Від джерела у навантаження має передаватися максимальна активна потужність.
2. Лінія має забезпечувати пропускну здатність для широкого спектру частот.
3. Лінія має мати мінімальні розміри.

6.2 Первинні параметри довгої лінії

Первинні параметри довгої лінії (їх ще називають погонними параметрами) будемо розуміти опір R_0 , індуктивність L_0 , провідність G_0 та ємність C_0 ,

Первинні параметри довгої лінії – це параметри, що віднесені до одиниці її довжини лінії.

Погонні параметри довгої лінії:

$$R_0 = \frac{dR}{dx}; \quad G_0 = \frac{dG}{dx}; \quad L_0 = \frac{dL}{dx}; \quad C_0 = \frac{dC}{dx}.$$

Опір R_0 , зумовлений втратами вздовж лінії, провідність G_0 зумовлена провідністю витoku між проводами, ємність C_0 зумовлена ємністю між проводами, індуктивність L_0 зумовлена магнітним потоком, що зчіплюється з контуром струму. Для одержання рівнянь однорідної лінії розіб'ємо її на окремі ділянки нескінченно малої довжини dx зі структурою, що вказана на рис. 6.3.

Погонні параметри L_0 , G_0 та C_0 також є частотно залежними, оскільки від частоти у загальному випадку залежать діелектрична та магнітна проникність середовища. Погонний параметр R_0 , залежить від частоти через поверхневий ефект.

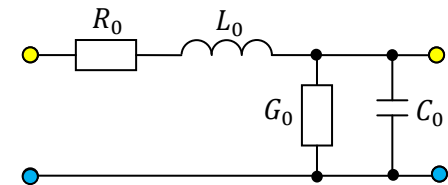


Рисунок 6.3 – Ділянка лінії

Поверхневий ефект полягає в тому, що струм високої частоти на відміну від постійного струму тече переважно по поверхні провідника.

В області радіочастот первинні параметри однорідної двопровідної лінії розраховуються за формулами, що подані нижче.

1. Первинні параметри повітряної лінії (рис. 6.2 а)

$$R_0 \approx \frac{8.33\sqrt{f}}{a} \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}} \right];$$

$$L_0 \approx 0.921 \lg\left(\frac{d}{a}\right) \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right];$$

$$C_0 \approx \frac{12.07}{\lg\left(\frac{d}{a}\right)} \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \right].$$

2. Первинні параметри коаксіальної лінії (рис. 6.2 б)

$$R_0 = 4.16 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{f} \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}} \right];$$

$$L_0 \approx 0.46 \lg\left(\frac{b}{a}\right) \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right];$$

$$C_0 \approx \frac{0.241 \cdot \varepsilon}{\lg\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \right];$$

$$G_0 = \omega C \operatorname{tg}(\delta) \left[\frac{\text{Сім}}{\text{м}} \right];$$

де ε – діелектрична проникність ізоляції, δ – кут діелектричних втрат.

6.3 Телеграфні рівняння лінії

Процес передачі електромагнітної енергії вздовж проводів лінії нагадує хвильові процеси поширення цієї енергії у вільному просторі, але здійснюється вздовж проводів лінії, які для хвиль розглядаються як напрямлені.

Тому перенесення енергії у лініях передачі можна розглядати, як хвильовий процес так і на основі теорії струми та напруги.

Схемна модель відрізка довгої лінії може бути подана з'єднанням кіл із зосередженими компонентами (рис. 6.4 а).

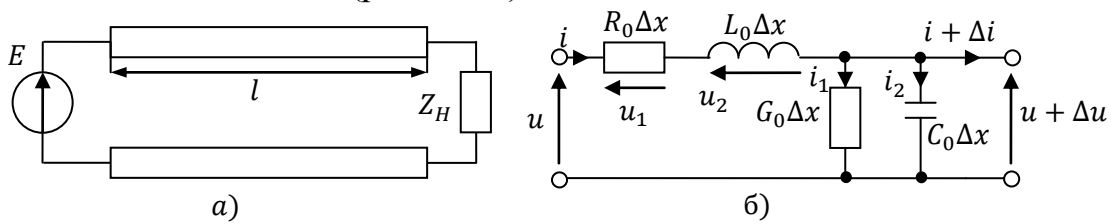


Рисунок 6.4 – Довга лінія (а) та її модель (б)

Довгу лінію можна представити у вигляді багатьох з'єднаних у ланцюг нескінченно малих елементів (рис. 6.4 б).

За другим законом Кірхгофа

$$u = u_1 + u_2 + u + \Delta u = iR_0\Delta x + L_0\Delta x \frac{di}{dt} + u + \Delta u.$$

Спростимо рівняння

$$-\frac{\Delta u}{\Delta x} = iR_0 + L_0 \frac{di}{dt}.$$

За першим законом Кірхгофа

$$i = i_1 + i_2 + i + \Delta i = g_0\Delta x(u + \Delta u) + C_0\Delta x \frac{d}{dt}(u + \Delta u) + i + \Delta i.$$

Знехтуємо величиною другого порядку малості $\Delta u \approx 0$

$$i \approx g_0\Delta x u + C_0\Delta x \frac{d}{dt}u + i + \Delta i.$$

Спростимо рівняння

$$-\frac{\Delta i}{\Delta x} = G_0 u + C_0 \frac{du}{dt}.$$

Спрямуємо величину $\Delta x \rightarrow dx$, у результаті одержимо телеграфні рівняння

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases}$$

Телеграфні рівняння можуть бути однозначно розв'язані при присутності початкових та граничних умов. Початкові умови визначають струми та напруги у початковий момент часу. Граничні умови визначаються зв'язками між напругою і струмом на початку або наприкінці лінії, що залежать від заданого режиму роботи.

6.4. Розв'язання телеграфних рівнянь для гармонічного режиму

6.4.1. Розв'язок телеграфних рівнянь від початку лінії

Нехай у довгій лінії (рис. 6.5) діють гармонічні функції струму та напруги:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u); \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i),$$

що відповідають комплексним амплітудам

$$\dot{U} = U_m e^{j\varphi_u}; \quad \dot{I} = I_m e^{j\varphi_i}.$$

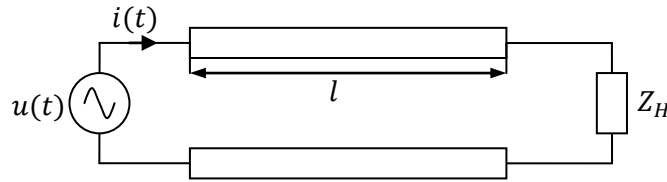


Рисунок 6.5 – Схема довгої лінії

Переходимо до комплексних амплітуд, де $d/dt \rightarrow j\omega$.

Оскільки комплексні величини струму та напруги не залежать від часу і є тільки функціями координати x , тому власні похідні по x замінемо звичайними

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)\dot{I}; \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)\dot{U}. \end{cases}$$

Введемо такі позначення

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0, \quad Y_0 = G_0 + j\omega C_0,$$

де Z_0 та Y_0 - відповідно комплексні опори та провідності на одиницю довжини лінії.

У результаті отримаємо рівняння

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0\dot{I}; \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0\dot{U}. \end{cases}$$

Виразимо із першого рівняння

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}}{dx}.$$

Результат підставимо у друге рівняння

$$\frac{1}{Z_0} \frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = Y_0\dot{U}.$$

Спростимо рівняння

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - Z_0 Y_0 \dot{U} = 0.$$

Для розв'язання рівняння запишемо характеристичне рівняння

$$p^2 - Z_0 Y_0 = 0.$$

Корінь рівняння

$$p_{1,2} = \mp \sqrt{Z_0 Y_0} = \mp \gamma.$$

Розв'язок рівнянь

$$\dot{U} = A_1 e^{p_1 x} + A_2 e^{p_2 x} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}.$$

Вираз струму

$$i = -\frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = -\frac{1}{Z_0} (-\gamma A_1 e^{-\gamma x} + \gamma A_2 e^{\gamma x}) = \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} A_1 e^{-\gamma x} - \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} A_2 e^{\gamma x}.$$

Введемо позначення

$$\sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} = \frac{1}{Z_{XB}}.$$

В результаті запишемо систему

$$\begin{cases} \dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \\ i = \frac{1}{Z_{XB}} A_1 e^{-\gamma x} - \frac{1}{Z_{XB}} A_2 e^{\gamma x}. \end{cases}$$

При $x = 0$, то це буде струм та напруга на початку лінії, тоді запишемо початкові умови $\dot{U}(0) = \dot{U}_1$, $i(0) = i_1$.

Тоді рівняння передачі у нульовий момент

$$\begin{cases} \dot{U}(0) = \dot{U}_1 = A_1 + A_2; \\ i(0) = i_1 = \frac{A_1}{Z_{XB}} + \frac{A_2}{Z_{XB}}. \end{cases}$$

Розв'язання системи рівнянь

$$A_1 = \frac{\dot{U}_1 + i_1 Z_{XB}}{2}; \quad A_2 = \frac{\dot{U}_1 - i_1 Z_{XB}}{2}.$$

У результаті одержимо рівняння передачі від початку лінії

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + i_1 Z_{XB}) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - i_1 Z_{XB}) e^{\gamma x}; \\ i(x) = \frac{1}{2} (i_1 + \frac{\dot{U}_1}{Z_{XB}}) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} (i_1 - \frac{\dot{U}_1}{Z_{XB}}) e^{\gamma x}. \end{cases}$$

Ці рівняння називають рівняннями передачі.

Рівняння передачі – це розв'язок телеграфних рівняння у випадку гармонічної дії.

Отже, знаючі комплексні амплітуди напруг та струмів на вході лінії, а також параметри Z_0 та Y_0 можна знайти комплексні амплітуди струмів та напруг в будь-якій координаті x .

6.4.2. Розв'язок телеграфних рівнянь від кінця лінії

У довгій лінії координати будемо відраховувати від кінця лінії (рис. 6.6).

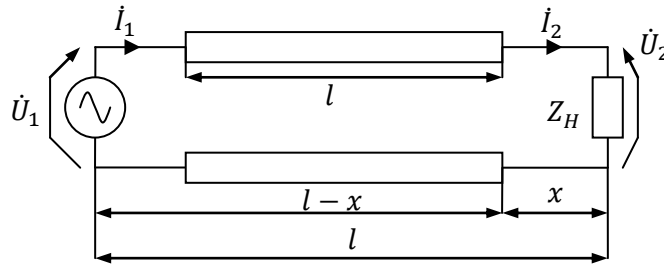


Рисунок 6.6 – Схема довгої лінії

У результаті розв'язання телеграфних рівнянь для гармонічного режиму одержимо диференціальне рівняння другого порядку.

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} - Z_0 Y_0 \dot{U} = 0.$$

Розв'язок рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_1 e^{-\gamma(l-x)} + A_2 e^{\gamma(l-x)} = A_3 e^{\gamma x} + A_4 e^{-\gamma x}. \\ i_1 &= \frac{A_1}{Z_{XB}} e^{-\gamma(l-x)} - \frac{A_2}{Z_{XB}} e^{\gamma(l-x)} = \frac{A_3}{Z_{XB}} e^{\gamma x} - \frac{A_4}{Z_{XB}} e^{-\gamma x}. \end{aligned}$$

Ввели заміну $A_3 = A_1 e^{-\gamma l}$, $A_4 = A_2 e^{\gamma l}$ та запишемо систему

$$\begin{cases} \dot{U} = A_3 e^{\gamma x} + A_4 e^{-\gamma x}; \\ i Z_{XB} = A_3 e^{\gamma x} - A_4 e^{-\gamma x}. \end{cases}$$

Запишемо рівняння передачі при $x = 0$, тоді початкові умови приймуть вигляд $\dot{U}(0) = \dot{U}_2$, $i(0) = i_2$.

У результаті одержимо систему

$$\begin{cases} \dot{U}(0) = \dot{U}_2 = A_3 + A_4; \\ i(0) = i_2 = \frac{A_3}{Z_{XB}} + \frac{A_4}{Z_{XB}}. \end{cases}$$

Розв'язання системи рівнянь

$$A_3 = \frac{\dot{U}_2 + i_2 Z_{XB}}{2}; \quad A_4 = \frac{\dot{U}_2 - i_2 Z_{XB}}{2}.$$

Підставимо у рівняння передачі

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + i_2 Z_{XB})e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - i_2 Z_{XB})e^{-\gamma x}; \\ i(x) = \frac{1}{2}\left(i_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}}\right)e^{\gamma x} + \frac{1}{2}\left(i_2 - \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}}\right)e^{-\gamma x}. \end{cases}$$

Отже, знаючі комплексні амплітуди напруг U_2 та струмів I_2 на виході лінії, а також параметри Z_0 та Y_0 можна знайти комплексні амплітуди струмів та напруг в будь-якій координаті x .

6.4.3. Падаюча та відбита хвилі, довжина хвилі та фазова швидкість

Рівняння передачі у випадку гармонічної дії від початку лінії

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + I_1 Z_{XB})e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - I_1 Z_{XB})e^{\gamma x}; \\ I(x) = \frac{1}{2}\left(I_1 + \frac{\dot{U}_1}{Z_{XB}}\right)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}\left(I_1 - \frac{\dot{U}_1}{Z_{XB}}\right)e^{\gamma x}. \end{cases}$$

Складові у правій частині одержаних рівнянь для струму та напруги у лінії можна трактувати як суму падаючої та відбитої хвиль: перша рухається та загасає у напрямку збільшення координати x , друга – зменшення. Дійсно, у фіксований момент часу кожна зі складових представляє собою загасаючу (внаслідок втрат енергії) гармонічну функцію координати x , а у фіксованій точці – гармонічну функцію часу.

Падаюча та відбита напруги

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{ПАД}} &= |\dot{U}_{\text{ПАД}}|e^{j\theta}e^{-\gamma x} = |\dot{U}_{\text{ПАД}}|e^{j\theta}e^{-\alpha x}e^{-j\beta x} = |\dot{U}_{\text{ПАД}}|e^{-\alpha x}e^{j(\theta-\beta x)}; \\ \dot{U}_{\text{ВІД}} &= |\dot{U}_{\text{ВІД}}|e^{j\theta}e^{\gamma x} = |\dot{U}_{\text{ВІД}}|e^{j\theta}e^{\alpha x}e^{j\beta x} = |\dot{U}_{\text{ВІД}}|e^{\alpha x}e^{j(\theta+\beta x)}. \end{aligned}$$

Гармонічні напруги:

$$\begin{aligned} u_{\text{ПАД}}(t, x) &= \sqrt{2}|\dot{U}_{\text{ПАД}}|e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta - \beta x); \\ u_{\text{ВІД}}(t, x) &= \sqrt{2}|\dot{U}_{\text{ВІД}}|e^{\alpha x} \cos(\omega t + \theta + \beta x). \end{aligned}$$

Отже, напруги та струм вздовж лінії у будь-який момент часу можна трактувати як результат накладання двох хвиль:

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{ПАД}} + \dot{U}_{\text{ВІД}}; \quad I = I_{\text{ПАД}} + I_{\text{ВІД}}.$$

Для прямих та зворотних хвиль напруги та струму виконується закон Ома

$$I_{\text{ПАД}} = \frac{\dot{U}_{\text{ПАД}}}{Z_{XB}}; \quad I_{\text{ВІД}} = \frac{\dot{U}_{\text{ВІД}}}{Z_{XB}}.$$

Для нескінченно довгої лінії у будь-якій її точці, відношення комплексів напруги та струму є постійною величиною, що дорівнює хвильовому опору

$$Z_{XB} = \frac{\dot{U}}{I}.$$

Розподіл напруги падаючої (а) та відбитої (б) напруг зображений на рис. 6.7.

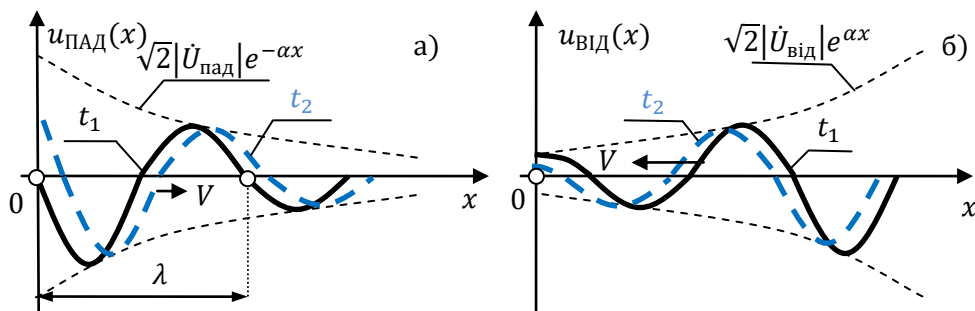


Рисунок 6.7 – Залежність падаючої (а) та відбитої (б) напруги

Хвилю, що рухається від початку лінії у бік збільшення x , називають **прямою**, а хвилю, що рухається від кінця лінії у напрямку зменшення x – **зворотною**.

Відстань між двома точками хвилі, фази яких різняться на 2π , називається **довжиною хвилі**.

Довжина хвилі в лінії λ визначається значенням коефіцієнту фази. Зміна фази падаючої чи відбитої хвилі на ділянці лінії довжиною λ визначається

$$(\omega t + \theta - \beta x) - (\omega t + \theta - \beta(x + \lambda)) = 2\pi.$$

Звідси визначимо коефіцієнт фази

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Із плином часу хвиля пересувається від початку лінії до її кінця. Швидкість пересування падаючої хвилі вздовж лінії називається фазовою швидкістю хвилі. Фазова швидкість визначається як швидкість переміщення точки, фаза коливання в якій залишається постійною.

Фазова швидкість – це швидкість переміщення вздовж лінії незмінного фазового стану, тобто швидкість, з якою необхідно переміщуватись вздовж лінії, щоб спостерігати одну й ту же фазу хвилі.

Для падаючої хвилі умова сталості фази записується у вигляді

$$\omega t + \theta - \beta x = \text{const.}$$

Продиференціюємо цей вираз за часом

$$\frac{d}{dt}(\omega t + \theta - \beta x) = \omega + 0 - \beta \frac{dx}{dt} = 0.$$

де змінна $\frac{dx}{dt}$ є швидкість зміни координати у часі, тобто

$$\frac{dx}{dt} = V_{\Phi}.$$

Таким чином, одержимо

$$\omega - \beta V_{\Phi} = 0.$$

Звідси визначимо значення фазової швидкості

$$V_{\Phi} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Коефіцієнт відбиття у загальному випадку є відношення амплітуди струмів або напруг зворотної та прямої хвиль в будь-якій точці лінії.

Найчастіше коефіцієнт відбиття визначається у точках, де є яка-небудь неоднорідність (кінець або початок лінії).

Оскільки по лінії поширюються струми та напруги, то розрізняють коефіцієнти відбиття за струмом та напругою.

Амплітуди напруг падаючої та відбитої хвиль

$$\dot{U}_{\text{ПАД}} = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}; \dot{U}_{\text{ВІД}} = \dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}.$$

Коефіцієнт відбиття за напругою ($\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_H$)

$$\dot{n}_u = \frac{\dot{U}_{\text{ВІД}}}{\dot{U}_{\text{ПАД}}} = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}}{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}} = \frac{\dot{I}_2 Z_H - \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}}{\dot{I}_2 Z_H + \dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}}} = \frac{Z_H - Z_{\text{ХВ}}}{Z_H + Z_{\text{ХВ}}}.$$

Амплітуди струму падаючої та відбитої хвиль

$$i_{\text{ПАД}} = i_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{XB}}}; \quad i_{\text{ВІД}} = i_2 - \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{XB}}}.$$

Коефіцієнт відбиття за струмом ($\dot{U}_2 = i_2 Z_H$)

$$\dot{n}_i = \frac{i_{\text{ВІД}}}{i_{\text{ПАД}}} = \frac{i_2 - \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{XB}}}}{i_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{XB}}}} = \frac{i_2 - \frac{i_2 Z_H}{Z_{\text{XB}}}}{i_2 + \frac{i_2 Z_H}{Z_{\text{XB}}}} = \frac{Z_{\text{XB}} - Z_H}{Z_{\text{XB}} + Z_H} = -\frac{Z_H - Z_{\text{XB}}}{Z_H + Z_{\text{XB}}} = -\dot{n}_u.$$

Знаючи коефіцієнт відбиття можна будувати графіки розподілу амплітуд напруг та струмів вздовж лінії, тобто розглядається інтерференція падаючої та відбитої хвиль. Оскільки $\dot{n}_i = -\dot{n}_u$, то можна зробити висновок, що у там, де у розподілі є максимум напруги, там буде мінімум струму.

Відсутність зворотної хвилі має ту перевагу, що вся потужність, що переноситься прямою хвилею до кінця лінії, поглинається опором навантаження. При присутності зворотної хвилі частина потужності прямої хвилі повертається у джерело.

Графік розподілу амплітуд напруг поданий на рис. 6.8.

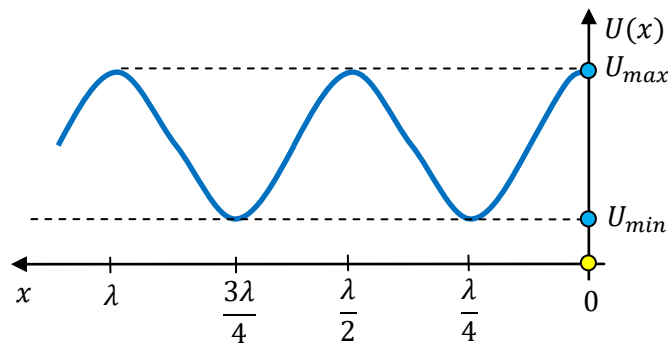


Рисунок 6.8 – Розподіл амплітуд напруг від кінця лінії

Коефіцієнт біжної хвилі

$$\text{КБХ} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{|U_{\text{ПАД}}| - |U_{\text{ВІД}}|}{|U_{\text{ПАД}}| + |U_{\text{ВІД}}|} = \frac{\frac{|U_{\text{ПАД}}| - |U_{\text{ВІД}}|}{|U_{\text{ПАД}}| + |U_{\text{ВІД}}|}}{\frac{|U_{\text{ПАД}}| + |U_{\text{ВІД}}|}{|U_{\text{ПАД}}|}} = \frac{1 - |n|}{1 + |n|}.$$

Коефіцієнт стійної хвилі

$$\text{КСХ} = \frac{1}{\text{КБХ}} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + |n|}{1 - |n|}.$$

Розподіл амплітуд напруг чи струмів будують від кінця лінії (рис. 6.8).

Отже, $\text{КБХ} \leq 1$, а $\text{КСХ} \geq 1$

6.5. Вторинні параметри довгої лінії

Вторинними параметрами лінії є стала поширення та хвильовий опір.

Корені рівняння визначаються виразом

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta,$$

який називають сталою поширення, де α – це коефіцієнт загасання, β – це коефіцієнт фази.

Коефіцієнт загасання α визначає зменшення амплітуди падаючої або відбитої хвилі струму чи напруги при проходженні одиниці довжини.

Зобразимо закон зміни амплітуди (рис. 6.9).

Коефіцієнт загасання

$$\alpha = \ln \left(\frac{u_{\text{ПАД}}(x)}{u_{\text{ПАД}}(x+1)} \right) = \ln \left(\frac{e^{-\alpha x}}{e^{-\alpha(x+1)}} \right) = \ln(e^\alpha) = \alpha.$$

Розмірність α має Неп/м.

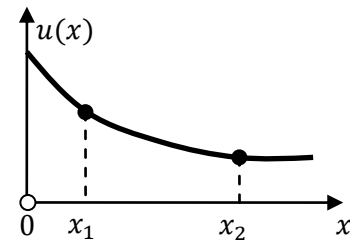


Рисунок 6.9 – Зміна амплітуди

Коефіцієнт фази або хвильове число β показує зміну фази при проходженні одиниці шляху.

Запишемо фази на відстані x_1 та $x_2 = x_1 + 1$

$$\varphi_1 = \omega t + \theta - \beta x_1;$$

$$\varphi_2 = \omega t + \theta - \beta x_2 = \omega t + \theta - \beta(x_1 + 1).$$

Звідси різниця фаз

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \beta \quad \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right].$$

Хвильовий опір довгої лінії – це відношення комплексів напруги та струму у будь-якій її точці

$$Z_{\text{ХВ}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}.$$

Аналітичний вираз

$$Z_{\text{ХВ}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = |Z_{\text{ХВ}}| e^{j\theta(\omega)},$$

Виділимо модуль хвильового опору

$$|Z_{\text{ХВ}}| = \sqrt{\frac{R_0^2 + (\omega L_0)^2}{G_0^2 + (\omega C_0)^2}}.$$

Виділимо аргумент хвильового опору

$$\theta(\omega) = \arg(Z_0) - \arg(Y_0).$$

Зобразимо на рис. 6.10 графіки модуля та аргументу хвильового опору.

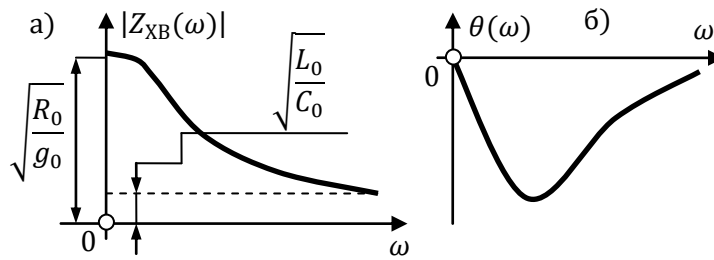


Рисунок 6.10 – Модуль та аргумент хвильового опору

Із рис. 6.10 бачимо, що зі збільшенням частоти хвильовий опір зменшується. Амплітуда хвильового опору збільшується зі збільшення відстані між проводами (за рахунок збільшення L_0) та зменшення діаметра проводу (за рахунок зменшення C_0).

Граничні значення хвильового опору

$$Z_{XB}(\omega = 0) = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}};$$

$$Z_{XB}(\omega = \infty) = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

У кабельних лініях хвильовий опір складає $Z_{XB} = 50 \div 200$ Ом, у повітряних лініях $Z_{XB} = 300 \div 600$ Ом.

Співвідношення для визначення хвильового опору за параметрами лінії (рис. 6.1):

Повітряна лінія	Коаксіальна лінія
$Z_{XB} = 276 \cdot \lg \left(\frac{d}{a} \right)$	$Z_{XB} = \frac{138}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \lg \left(\frac{b}{a} \right)$

Вторинні параметри лінії характеризують її властивість як пристрою для передачі енергії чи інформації.

Визначимо сталу поширення через первинні параметри

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}.$$

Піднесемо до квадрата

$$\alpha^2 + 2j\alpha\beta - \beta^2 = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0).$$

Прирівняємо дійсні та уявні частини

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0; \\ 2j\alpha\beta = j\omega(R_0 C_0 + G_0 L_0). \end{cases}$$

Розглянемо два випадки, які можна використовувати для інженерних співвідношень.

1. Нехай $\omega L_0 \gg R_0$, $\omega C_0 \gg G_0$.

Запишемо ці умови у інший спосіб

$$\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1, \quad \frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1.$$

У результаті запишемо вираз для сталої поширення

$$\gamma = \sqrt{j^2 \omega^2 L_0 C_0 \left(\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1 \right) \left(\frac{G_0}{j\omega C_0} + 1 \right)} = j\omega \sqrt{L_0 C_0} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1 \right) \left(\frac{G_0}{j\omega C_0} + 1 \right)}.$$

Скористаємося відомою математичною формулою

$$\sqrt{X+1} \Big|_{X \ll 1} \approx 1 + \frac{X}{2}.$$

У результаті одержимо

$$\begin{aligned} \gamma &\approx j\omega \sqrt{L_0 C_0} \left(\frac{R_0}{2j\omega L_0} + 1 \right) \left(\frac{G_0}{2j\omega C_0} + 1 \right) \approx \\ &\approx j\omega \sqrt{L_0 C_0} + \frac{1}{2} \left(R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + G_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \right) = j\omega \sqrt{L_0 C_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R_{XB}} + G_0 R_{XB} \right). \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\alpha \cong \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R_{XB}} + G_0 R_{XB} \right) \approx \frac{R_0}{2R_{XB}}; \quad \beta \approx \omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Фазова швидкість

$$V_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

2. Нехай $\omega L_0 \ll R_0$, $\omega C_0 \gg G_0$.

У цьому разі одержимо

$$\gamma \approx \sqrt{R_0 j\omega C_0} = \sqrt{R_0 \omega C_0} e^{j45^\circ} = \sqrt{\frac{R_0 \omega C_0}{2}} + j \sqrt{\frac{R_0 \omega C_0}{2}} = \alpha + j\beta.$$

Тоді фазова швидкість

$$V_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{R_0 C_0}}.$$

Ці співвідношення можуть використовуватися на невеликих частотах.

6.6. Побудова розподілу амплітуд напруги та струму уздовж лінії

Процес знаходження струму та напруги у кожній точці буде зводитися до знаходження суми двох векторів – падаючої та відбитої хвиль. Цей процес зручно зображувати у вигляді розподілу амплітуд струмів або напруг вздовж всієї довжини лінії.

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$\dot{n}_u = \frac{\dot{U}_{\text{ВІД}}}{\dot{U}_{\text{ПАД}}} = |\dot{n}_u| e^{j\varphi_n}$$

Розподіл амплітуд напруги або струму уздовж лінії зручніше будувати від кінця лінії, припустивши, що відомо падаючу хвилю наприкінці лінії

$$\dot{U}_{\text{ПАД}} = U_{\text{ПАД}} e^{j\varphi_{\text{ПАД}}}.$$

Тоді відбиту хвилю зручно знайти через коефіцієнт відбиття

$$\dot{U}_{\text{ВІД}} = \dot{n}_u \dot{U}_{\text{ПАД}} = |\dot{n}_u| U_{\text{ПАД}} e^{j(\varphi_{\text{ПАД}} + \varphi_n)}.$$

Залежно від знака аргументу коефіцієнта відбиття $\varphi_n = \varphi_{\text{ВІД}} - \varphi_{\text{ПАД}}$ (рис. 6.11) вектор відбитої хвилі наприкінці лінії може бути спрямований або убік випередження вектора падаючої хвилі при $\varphi_n > 0$ (рис. 6.12), або убік відставання при $\varphi_n < 0$ (рис. 6.13).

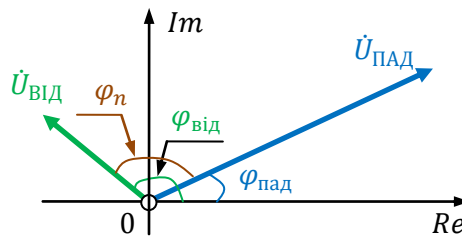


Рисунок 6.11 – Вигляд вектора падаючої та відбитої хвилі

На якійсь відстані від кінця лінії вектори можуть додаватися у фазі або протифазі. Відповідно, у першому випадку у даній точці лінії буде спостерігатися максимум сумарної амплітуди напруги, а в другому – мінімум. Оскільки вектори обертаються у різні боки (наближаючись один до одного або віддаляючись) і один повний оберт (2π) кожного із них відповідає пройдений відстані, рівній довжині хвилі λ , то максимуми (або мінімуми) будуть повторюватися через відстань, що дорівнює половині довжини хвилі $\lambda/2$. Зокрема, якщо $|\dot{n}_u| = 1$ і лінія без втрат, те цей мінімум буде доходити до нуля. А максимум і мінімум будуть чергуватися через $\lambda/4$, що відповідає куту $\pi/2$.

Для випадку $\varphi_n > 0$ першим буде максимум – вектори падаючих і відбитої хвиль рухаються на зустріч один одному і складуться у фазі (рис. 6.12).

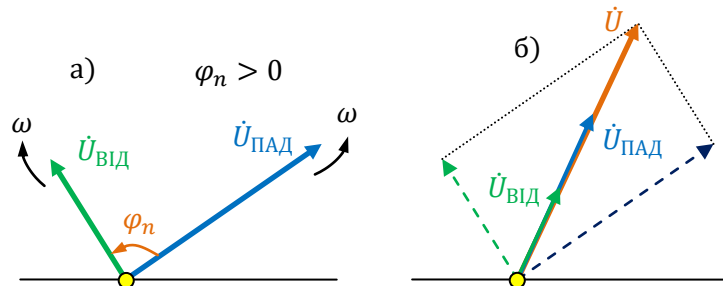


Рисунок 6.12 – Падаюча та відбита напруга

Відстань до нього можна визначити у такий спосіб: два вектори додаються у фазі, пройшовши кутову відстань рівну

$$\frac{\varphi_n}{2} = \beta \cdot x_{\max}.$$

Звідки визначимо відстань до першого максимуму від кінця

$$x_{\max} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\varphi_n}{2} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\varphi_n}{2}.$$

При цьому перший мінімум напруги від кінця

$$x_{\min} = x_{\max} + \frac{\lambda}{4}.$$

Для випадку $\varphi_n < 0$ (рис. 6.13) першим буде мінімум, оскільки вектори розходяться.

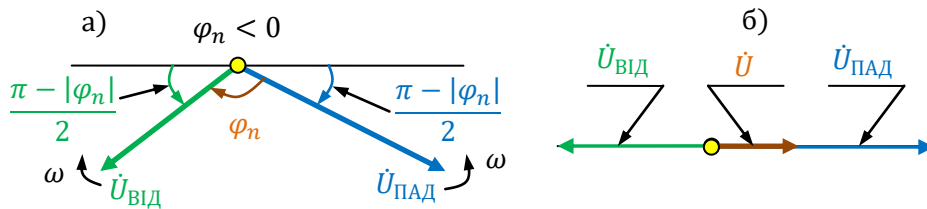


Рисунок 6.13 – Падаюча та відбита напруга

При цьому кожний із них до точки першого мінімуму від кінця лінії пройде кутову відстань, що дорівнює

$$\frac{\pi - |\varphi_n|}{2} = \beta \cdot x_{\min}.$$

Звідси визначимо відстань до першого по порядку мінімуму від кінця лінії

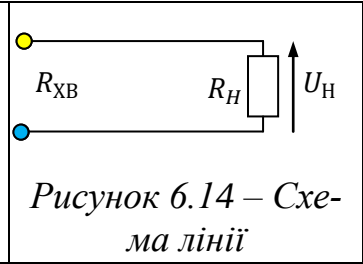
$$x_{\min} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\pi - |\varphi_n|}{2} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\pi - |\varphi_n|}{2}.$$

При цьому відстань до першого по порядку максимуму напруги від кінця

$$x_{\max} = x_{\min} + \lambda/4.$$

Зсув фази між струмом та напругою в будь-якій точці лінії складає $\pi/2$, тому активна потужність в будь-якій точці лінії $P_{\text{акт}} = UI \cos \varphi = 0$.

Задача 6.1. У лінії без втрат (рис. 6.14) визначити: коефіцієнт відбиття за напругою та струмом, КБХ, КСХ. Побудувати розподіл $u(x)$ та $i(x)$ від кінця лінії. Лінія має опори: $R_{XB} = 75 \text{ Ом}$, $R_H = 125 \text{ Ом}$ та працює в усталеному гармонічному режимі. Амплітуда напруги у навантаженні $U_H = 80 \text{ В}$.



Розв'язання

Коефіцієнт відбиття за напругою та за струмом

$$n_u = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{R_H - R_{XB}}{R_H + R_{XB}} = \frac{125 - 75}{125 + 75} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4} = 0.25;$$

$$n_i = -n_u = -0.25.$$

Коефіцієнти біжної та стійної хвилі

$$KBX = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{1 - |n_u|}{1 + |n_u|} = \frac{1 - 0.25}{1 + 0.25} = \frac{0.75}{1.25} = 0.6.$$

$$КСХ = \frac{1}{KBX} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1}{0.6} = 1.667.$$

Оскільки $n_u = 0.25 > 0$, то першим від кінця лінії буде максимум напруги, з якого і почнеться розподіл напруги. Таким чином, $U_{\max} = U_H = 80 \text{ В}$.

Із виразу для КБХ визначимо

$$U_{\min} = KBX \cdot U_{\max} = 0.6 \cdot 80 = 48 \text{ В}.$$

Із закону Ома визначимо амплітуду струму у навантаженні

$$I_H = \frac{U_H}{R_H} = \frac{80}{120} = 0.64 \text{ А}.$$

Оскільки $n_i = -n_u = -0.25 < 0$, то першим від кінця лінії буде мінімум струму, з якого і почнеться розподіл. Отже, $I_{\min} = I_H = 0.64 \text{ А}$.

КБХ для амплітуд струмів

$$KBX = \frac{I_{\min}}{I_{\max}}.$$

Звідси визначимо

$$I_{\max} = \frac{I_{\min}}{KBX} = \frac{0.64}{0.6} = 1.067 \text{ А}.$$

Побудуємо розподіл напруги та струму вздовж лінії (рис. 6.15).

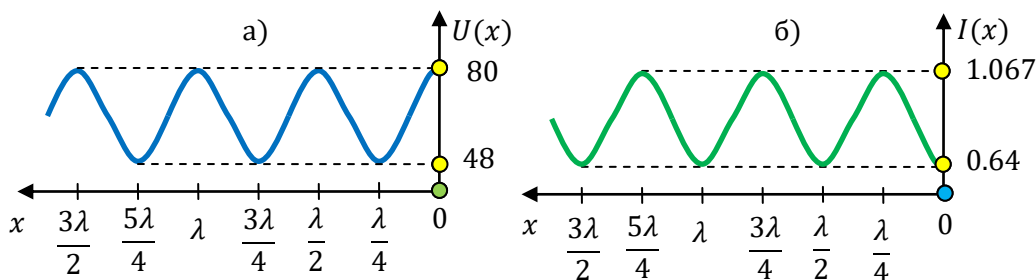


Рисунок 6.15 – Зміна напруги та струму від кінця лінії

Відповідь: $n_u = 0.25$, $n_i = -0.25$, $KBX = 0.6$, $КСХ = 1.667$.

6.7. Рівняння лінії як чотириполюсника

6.7.1. Рівняння лінії у гіперболічних функціях

Розглянемо лінію, навантажену на опір навантаження (рис. 6.16).

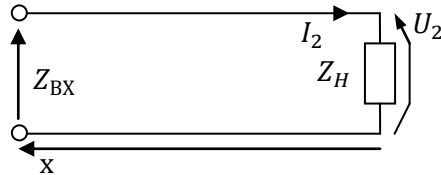


Рисунок 6.16 – Схема довгої лінії

Рівняння передачі, якщо відлік ведеться від кінця лінії

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + I_2 Z_{XB})e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - I_2 Z_{XB})e^{-\gamma x}; \\ I(x) = \frac{1}{2}\left(I_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}}\right)e^{\gamma x} + \frac{1}{2}\left(I_2 - \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}}\right)e^{-\gamma x}. \end{cases}$$

Використаємо гіперболічні функції

$$\operatorname{sh} \gamma x = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}; \quad \operatorname{ch} \gamma x = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}.$$

У результаті одержимо рівняння передачі у гіперболічних функціях

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma x) + I_2 Z_{XB} \operatorname{sh}(\gamma x); \\ I = I_2 \operatorname{ch}(\gamma x) + \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} \operatorname{sh}(\gamma x). \end{cases}$$

Лінійний чотириполюсник (рис. 6.17)

можна описати системою рівнянь із ABCD-параметрів

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A \cdot \dot{U}_2 + B \cdot I_2; \\ I_1 = C \cdot \dot{U}_2 + D \cdot I_2. \end{cases}$$

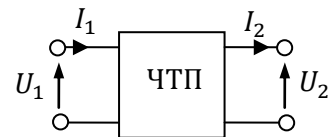


Рисунок 6.17 – Схема лінії як чотириполюсника

Якщо в одержану систему рівнянь підставити конкретне значення $x = l$ та записати систему від кінця лінії, то можна буде у явному вигляді одержати ABCD- параметри відрізка лінії довжиною l , як чотириполюсника

$$\begin{cases} \dot{U}(l) = \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma l) + I_2 Z_{XB} \operatorname{sh}(\gamma l); \\ I(l) = I_1 = I_2 \operatorname{ch}(\gamma l) + \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} \operatorname{sh}(\gamma l). \end{cases}$$

Порівнявши останні дві системи одержимо

$$A = D = \operatorname{ch}(\gamma l), B = Z_{XB} \operatorname{sh}(\gamma l), C = \frac{\operatorname{sh}(\gamma l)}{Z_{XB}}.$$

Отже, система ABCD- параметрів має вигляд

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\gamma l) & Z_{\text{XB}} \text{sh}(\gamma l) \\ \frac{\text{sh}(\gamma l)}{Z_{\text{XB}}} & \text{ch}(\gamma l) \end{bmatrix}.$$

Оскільки $A = D$, то чотириполусник є взаємним. З таких чотириполусників можна змодельовати довгу лінію, пам'ятаючи, що при каскадному з'єднанні А-параметри перемножуються (рис. 6.18). Для лінії були введені вторинні параметри. По аналогії з ними для чотириполусника теж можна ввести поняття коефіцієнта загасання, коефіцієнта фази та хвильовий опір. Ці параметри широко використовуються для розв'язання задач узгодження різних каскадів.

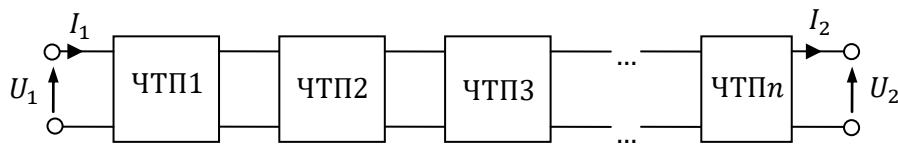


Рисунок 6.18 – Заміна лінії чотириполусниками

Для системи чотириполусників з'єднаних каскадно загальна система параметрів визначається

$$[A] = \prod_{i=1}^n A_i.$$

За умови $\gamma x \ll 1$ матриця передачі відрізка лінії перетвориться у матрицю безпосереднього з'єднання

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{ch}(0^\circ) = 1, \quad \text{sh}(0^\circ) = 0.$$

Отже, критерієм відсутності розподілених ефектів є $\gamma x \ll 1$.

Приклади елементарних взаємних чотириполусників

1. Відрізок регулярної лінії передачі (рис. 6.19)

Матриця параметрів

$$[A] = \begin{bmatrix} \text{ch}(\gamma x) & \text{sh}(\gamma x) \\ \text{sh}(\gamma x) & \text{ch}(\gamma x) \end{bmatrix}$$

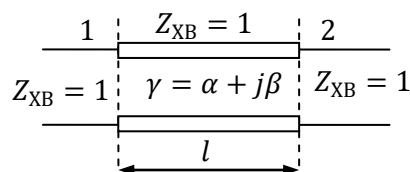


Рисунок 6.19 – Відрізок регулярної лінії

2. Стик двох ліній передачі, що різняться різними хвильовими опорами (рис. 6.20)

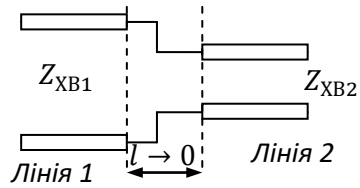


Рисунок 6.20 – Стик ліній

Матриця параметрів

$$[A] = \begin{bmatrix} \sqrt{Z_{XB2}/Z_{XB1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{XB1}/Z_{XB2}} \end{bmatrix},$$

3. Зосереджений опір, що ввімкнений послідовно у розрив між двома однаковими лініями передачі (рис. 6.21).

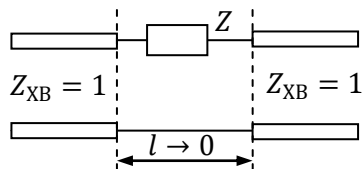


Рисунок 6.21 – Опір в лінії

Матриця параметрів

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

6.7.2. Матриця передачі та розсіювання

Зазвичай в техніці НВЧ використовують хвильові рівняння.

Хвильові рівняння – це рівняння, що пов'язують напруги та струми падаючої та відбитої хвиль на виході та вході чотириполосника із розподіленими параметрами.

Виразимо струми та напруги на початку та наприкінці лінії через напруги та струми падаючої та відбитої хвиль на початку $U_{1П}$, $U_{1В}$ та в кінці лінії $U_{2П}$, $U_{2В}$

$$U_1 = U_{1П} + U_{1В}, \quad U_2 = U_{2П} + U_{2В},$$

$$I_1 = \frac{U_{1П} - U_{1В}}{Z_{ХВ}}, \quad I_2 = \frac{U_{2П} - U_{2В}}{Z_{ХВ}}.$$

Якщо ці вирази підставити в основні рівняння чотириполосника, то отримаємо рівняння в Т-формі та S-формі, що є найпоширенішими

$\begin{cases} U_{1П} = T_{11}U_{2П} + T_{12}U_{2В}, \\ U_{1В} = T_{21}U_{2П} + T_{22}U_{2В}; \end{cases}$	$\begin{cases} U_{1В} = S_{11}U_{1П} + S_{12}U_{2В}, \\ U_{2П} = S_{21}U_{1П} + S_{22}U_{2В}. \end{cases}$

Матрицю в Т-формі називають матрицею передачі, а матрицю в S-формі називають матрицею розсіювання

$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix};$	$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}.$

Наприклад фізичний зміст параметрів матриць

$$T_{11} = \left. \frac{U_{1П}}{U_{2П}} \right|_{U_{2В}=0}, \quad T_{12} = \left. \frac{U_{1П}}{U_{2В}} \right|_{U_{2П}=0}, \quad T_{21} = \left. \frac{U_{1В}}{U_{2П}} \right|_{U_{2В}=0}, \quad T_{22} = \left. \frac{U_{1В}}{U_{2В}} \right|_{U_{2П}=0};$$

$$S_{11} = \left. \frac{U_{1В}}{U_{1П}} \right|_{U_{2В}=0}, \quad S_{12} = \left. \frac{U_{1В}}{U_{2В}} \right|_{U_{1П}=0}, \quad S_{21} = \left. \frac{U_{2П}}{U_{1П}} \right|_{U_{2В}=0}, \quad S_{22} = \left. \frac{U_{2П}}{U_{2В}} \right|_{U_{1П}=0}.$$

Із першого рівняння у Т-формі визначимо

$$U_{2П} = \frac{1}{T_{11}} \cdot U_{1П} - \frac{T_{12}}{T_{11}} \cdot U_{2В}.$$

Підставимо цей вираз у друге рівняння

$$U_{1В} = T_{21}U_{2П} + T_{22}U_{2В} = T_{21} \cdot \left(\frac{1}{T_{11}} \cdot U_{1П} - \frac{T_{12}}{T_{11}} \cdot U_{2В} \right) + T_{22}U_{2В} =$$

$$= \frac{T_{21}}{T_{11}} \cdot U_{1П} + U_{2В} \cdot \left(T_{22} - \frac{T_{21} \cdot T_{12}}{T_{11}} \right).$$

У результаті отримаємо зв'язок між матрицями S-формі та Т-формі

Зв'язок між елементами матриць

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_{11}} \cdot \begin{bmatrix} T_{21} & T_{11} \cdot T_{22} - T_{12} \cdot T_{21} \\ 1 & -T_{12} \end{bmatrix};$$

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{S_{21}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & -(S_{11} \cdot S_{22} - S_{12} \cdot S_{21}) \end{bmatrix}.$$

6.8. Хвильові процеси у лінії

Режим роботи лінії, що навантажена на хвильовий опір, називається **узгодженням**, а сама лінія називається лінією із **узгодженням навантаженням**.

Зазначимо, що даний режим практично важливий для передачі інформації, оскільки характеризується відсутністю відбитих (зворотних) хвиль, що є причиною завад. Тут говорять, що має місце режим біжних хвиль.

Режим біжних хвиль характеризується наявністю лише падаючої (прямої) хвилі, що поширюється від генератору до навантаження.

Відбита хвиля відсутня. Потужність, що переноситься падаючою хвилею, повністю виділяється у навантаженні.

Це можливе, коли лінія навантажена на хвильовий опір.

Режим стійних хвиль встановлюється за умови рівності амплітуд падаючої та відбитої хвилі.

Виконання цієї умови можливе для лінії без втрат. Режим стійних хвиль має місце у лінії, що навантажена на опір, в якому немає втрат енергії падаючої хвилі. При цьому падаюча хвиля повністю перетворюється на відбиту хвилю. Це можливе у випадках:

- 1) лінія навантажена у режимі холостого ходу ($Z_H = \infty$), для якої коефіцієнт відбиття за напругою є

$$\dot{n}_u = \frac{\dot{U}_{\text{ВІД}}}{\dot{U}_{\text{ПАД}}} = \frac{Z_H - Z_{\text{ХВ}}}{Z_H + Z_{\text{ХВ}}} = \frac{\infty - Z_{\text{ХВ}}}{\infty + Z_{\text{ХВ}}} = 1;$$

- 2) лінія навантажена у режимі короткозамкненої лінії ($Z_H = 0$), для якої коефіцієнт відбиття за напругою є

$$\dot{n}_u = \frac{\dot{U}_{\text{ВІД}}}{\dot{U}_{\text{ПАД}}} = \frac{Z_H - Z_{\text{ХВ}}}{Z_H + Z_{\text{ХВ}}} = \frac{0 - Z_{\text{ХВ}}}{0 + Z_{\text{ХВ}}} = -1;$$

- 3) лінія має чисто реактивне навантаження ($Z_H = \pm jX_H$), для якої коефіцієнт відбиття за напругою

$$\begin{aligned} \dot{n}_u = \frac{\dot{U}_{\text{ВІД}}}{\dot{U}_{\text{ПАД}}} &= \frac{Z_H - Z_{\text{ХВ}}}{Z_H + Z_{\text{ХВ}}} = \frac{\pm jX_H - Z_{\text{ХВ}}}{\pm jX_H + Z_{\text{ХВ}}} = \frac{\sqrt{X_H^2 + Z_{\text{ХВ}}^2}}{\sqrt{X_H^2 + Z_{\text{ХВ}}^2}} e^{\pm 2j \arctg(\frac{Z_{\text{ХВ}}}{X_H})} = \\ &= 1 \cdot e^{\pm 2j \arctg(Z_{\text{ХВ}}/X_H)}. \end{aligned}$$

Режим змішаних хвиль утворюється у лінії із втратами або у лінії без втрат у разі її навантаження комплексним опором або активним опором, що не є рівним хвильовому. В цьому випадку відбита хвиля має меншу амплітуду ніж падаюча, бо частина енергії падаючої хвилі поглинається у навантаженні.

6.9. Режим біжних хвиль

6.9.1. Лінія без спотворень та втрат

Для відсутності спотворень, наприклад, у лініях передачі інформації, необхідно, щоб усі гармоніки поширювалися з однаковою швидкістю та однаковим загасанням, оскільки тільки у цьому випадку, додавшись, вони утворюють наприкінці лінії сигнал, подібний до вхідного.

Ідеальною в цьому випадку є так звана **лінія без втрат**.

Лінія без втрат – це лінія, у якої погонний опір R_0 та погонна провідність G_0 дорівнюють нулю.

Дійсно, у цьому випадку маємо

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0}|_{R_0, G_0=0} = \sqrt{j\omega L_0 j\omega C_0} = j\omega \sqrt{L_0 C_0} = j\beta,$$

тобто незалежно від частоти коефіцієнт загасання $\alpha = 0 = \text{const}$ та фазова швидкість

$$V_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{L_0 C_0}} = \text{const}.$$

Однак спотворення можуть бути відсутніми і у лінії з втратами. Умова передачі сигналів без спотворень впливає із загального розгляду виразів для сталої поширення.

Хвильовий опір

$$Z_{\text{ХВ}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0(R_0/L_0 + j\omega)}{C_0(G_0/C_0 + j\omega)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{\frac{R_0/L_0 + j\omega}{G_0/C_0 + j\omega}}.$$

Із аналізу випливає, що хвильовий опір не залежить від частоти за умови

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}.$$

Хвильовий опір із урахуванням цієї умови

$$Z_{\text{ХВ}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Отже, одержали, що хвильовий опір лінії без спотворень є дійсне число, що рівнозначне активному опору, що не залежить від частоти.

Лінія без спотворень – це лінія, параметри якої задовольняють умові

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}.$$

Фазова швидкість такої лінії

$$V_\Phi = \frac{1}{C_0 Z_{\text{ХВ}}} = \frac{1}{C_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Для усунення спотворень, що викликає неузгодженість з опором лінії, а отже і виникнення відбиттів на приймальному кінці опір приймача повинен бути рівний хвильовому опору.

Необхідно зазначити, що у реальних ліній (як повітряних так і кабельних)

$$\frac{R_0}{L_0} \gg \frac{G_0}{C_0}.$$

Ця умова виконується оскільки провідність витоку незначна через ізоляцію, тому її збільшення не доцільне. А зменшення R_0 або C_0 не представляється можливим. Тому для придання реальним лініям властивостей ліній без спотворень штучно збільшують їх індуктивність шляхом вмикання через однакові інтервали спеціальних котушок індуктивності, а у випадку кабельних ліній – також за рахунок обвивання їх жил феромагнітною стрічкою.

6.9.2. Лінія навантажена на хвильовий опір

Режим біжної хвилі або узгоджений режим має місце, коли лінія навантажена на хвильовий опір $Z_H = Z_{XB}$.

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$\dot{n}_u = \frac{\dot{U}_{\text{ВІД}}}{\dot{U}_{\text{ПАД}}} = \frac{Z_H - Z_{XB}}{Z_H + Z_{XB}} = \frac{Z_{XB} - Z_{XB}}{Z_{XB} + Z_{XB}} = 0.$$

Відбитих хвиль струму та напруги немає, в лінії є тільки падаюча хвиля

$$\begin{cases} u(t, x) = u_{\Pi}(t, x) = U_{m1} e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta_u - \beta x); \\ i(t, x) = i_{\Pi}(t, x) = I_{m1} e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta_i - \beta x). \end{cases}$$

Комплексні амплітуди

$$\begin{cases} \dot{U} = U_{m1} e^{-j\theta_u} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}; \\ \dot{I} = I_{m1} e^{-j\theta_i} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}. \end{cases}$$

Розподіл амплітуди падаючої хвилі зображений на рис. 6.22.

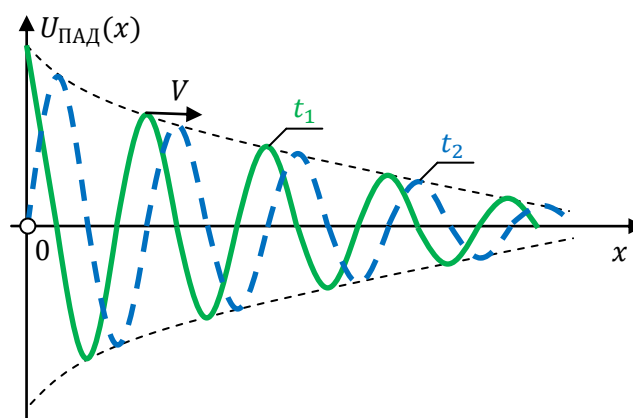


Рисунок 6.22 – Розподіл амплітуди падаючої хвилі

Для узгодженої лінії вхідний опір не залежить від довжини лінії та дорівнює хвильовому

$$Z_{BX} = \frac{\dot{U}_{\Pi}}{\dot{I}_{\Pi}} = \frac{U_{\Pi}}{I_{\Pi}} e^{j(\theta_u - \theta_i)}.$$

В узгодженому режимі немає втрат на відбиту хвилю, тому ККД у цьому режимі більший, ніж у інших. Також у цьому режимі відсутні спотворення сигналу, що передається через лінію за рахунок відбитої хвилі. Амплітуди струмів та напруг рівномірно розподілені вздовж лінії.

Зміна амплітуди та початкової фази напруги вздовж лінії від генератора до навантаження (для струму все аналогічно) зображені на рис. 6.23.

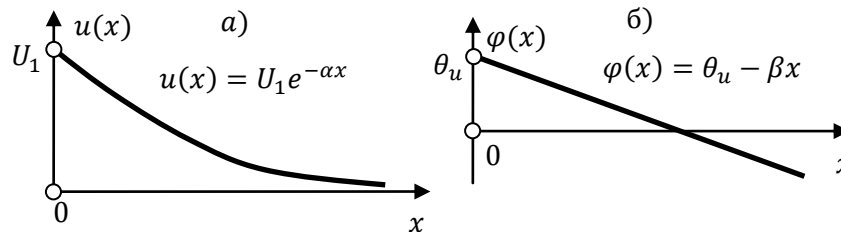


Рисунок 6.23 – Зміна амплітуди (а) та початкової (б) фази

Отже, амплітуда змінюється по експоненті, а фаза змінюється лінійно.

Якщо вважати, що хвильовий опір $Z_{ХВ}$ практично дійсним, і відповідно, початкові фази напруги і струму однакові $\theta_u = \theta_i = \theta$, тоді миттєва потужність $p(t, x) = u(t, x) \cdot i(t, x) = U_{m1} I_{m1} e^{-2\alpha l} \cos^2(\omega t + \theta - \beta x)$.

Таким чином, при будь-яких значеннях t величина миттєвої потужності більше нуля. Це означає, що у лінії з малими втратами потужність всюди передається від генератора у навантаження, що є **режимом біжних хвиль**.

Середні потужності за період p_1, p_2 на вході лінії та у навантаженні

$$p_1 = U_1 I_1 = I_1^2 Z_{ХВ} = \frac{U_1^2}{Z_{ХВ}}; \quad p_2 = U_2 I_2 = I_2^2 Z_{ХВ} = I_1^2 e^{-2\alpha l} Z_{ХВ}.$$

Коефіцієнт корисної дії

$$\text{ККД} = \frac{p_2}{p_1} = e^{-2\alpha l}.$$

Оскільки хвильовий опір дійсний, то замість $Z_{ХВ}$ можна писати $R_{ХВ}$. Покажемо, як змінюється вектор комплексної амплітуди падаючої хвилі вздовж лінії від генератора до навантаження $\dot{U}(x) = U_{1m} e^{-\alpha x} e^{j(\theta_u - \beta x)}$ (рис. 6.24).

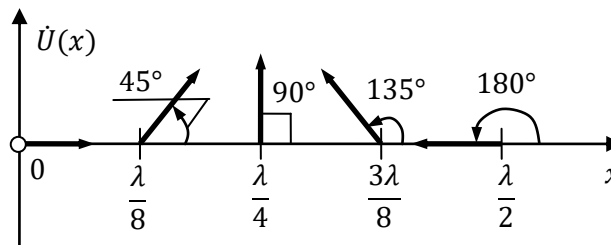


Рисунок 6.24 – Рух вектора

Покажемо, як змінюється вектор комплексної амплітуди падаючої хвилі вздовж лінії від генератора до навантаження $\dot{U}(x) = U_{1m} e^{-\alpha x} e^{j(\theta_u - \beta x)}$ (рис. 6.24). Вважатимемо, що при $x = 0$ початкова фаза напруги дорівнює 0. Через кожні $\lambda/8$ цей вектор буде обертатись у бік збільшення на $\pi/4$.

Здійснимо розрахунки:

$$\begin{aligned} \text{а) } x = \frac{\lambda}{8}, \quad \beta \cdot x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}; \quad \text{б) } x = \frac{\lambda}{4}, \quad \beta \cdot x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}; \\ \text{в) } x = \frac{3\lambda}{8}, \quad \beta \cdot x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda}{8} = \frac{3\pi}{4}; \quad \text{г) } x = \frac{\lambda}{2}, \quad \beta \cdot x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Якщо лінія з втратами, то амплітуда вектора буде зменшуватись (рис. 6.25).

Якщо обертання вектора падаючої хвилі зобразити у полярній системі координат, то отримаємо картинку у вигляді спіралі (рис. 6.25). По цій спіралі буде ковзати кінець вектора, якщо змінюючи координату x . У випадку відсутності втрат, замість спіралі ми отримаємо коло, що буде відповідати запізненню по фазі без зміни амплітуди.

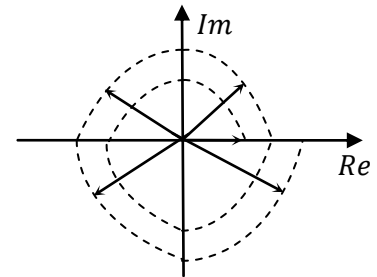


Рисунок 6.25

6.10. Режим стійних хвиль

6.10.1. Режим холостого ходу лінії

У режимі холостого ходу лінія розімкнена у кінці лінії (рис. 6.26), тому струм в кінці лінії відсутній ($I_2 = 0$), опір навантаження $Z_H = \infty$.

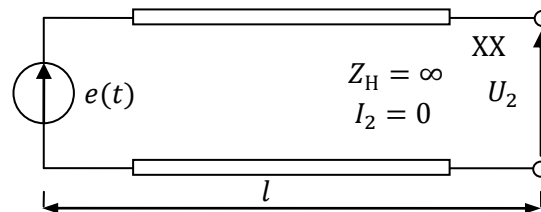


Рисунок 6.26 – Довга лінія у режимі холостого ходу

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$n_u = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{Z_H - Z_{\text{XB}}}{Z_H + Z_{\text{XB}}} = \frac{\infty - Z_{\text{XB}}}{\infty + Z_{\text{XB}}} = 1,$$

Коефіцієнт відбиття за струмом $n_i = -n_u = -1$.

Рівняння передачі у режимі холостого ходу лінії без втрат (рис. 6.26)

$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j \dot{I}_2 Z_{\text{XB}} \sin(\beta x); \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos(\beta x) + j \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{XB}}} \sin(\beta x). \end{cases}$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x); \\ \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{XB}}} \sin(\beta x). \end{cases}$

Вхідний опір такої лінії (рис. 4.20)

$$Z_{\text{ВХ.ХХ}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_2 \cos(\beta x)}{j \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{XB}}} \sin(\beta x)} = -j Z_{\text{XB}} \text{ctg}(\beta x).$$

Оскільки $n_u = 1 > 0$, то першим від кінця лінії буде максимум напруги, з якого і почнеться розподіл, оскільки лінія без втрат. А оскільки $n_i = -1 < 0$, то у розподілі струмів першим від кінця лінії буде мінімум струму.

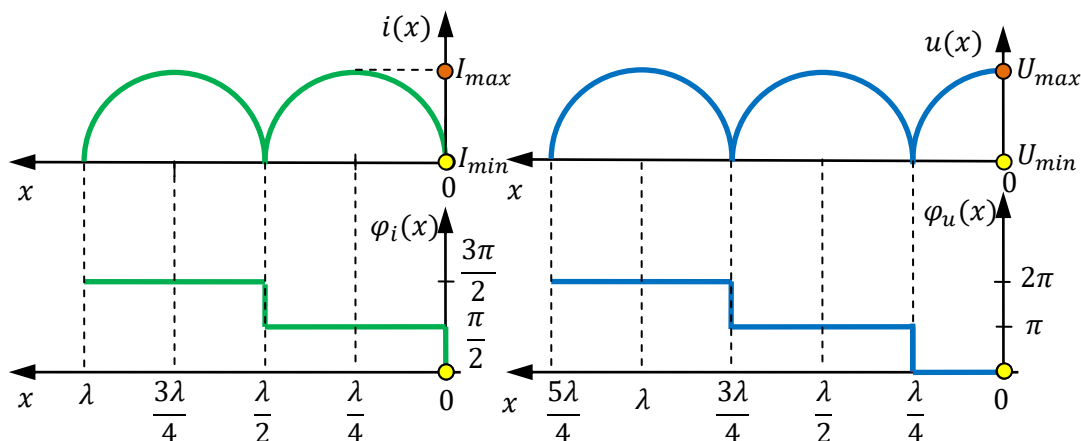


Рисунок 6.27 – Зміна струму та напруги у режимі ХХ

Максимуми на графіку називають **пучностями**, а мінімуми **вузлами**.

На рис. 6.27 зображені модулі амплітуди напруги та струму, де від'ємні значення струму та напругу відобразили відносно осі x у додатну півплощину, при цьому до початкової фази необхідно додати π . При побудові фази напруги було прийнято, що початкова фаза напруги дорівнює нулю.

Дослідження характеру зміни $Z_{BX,XX}(x)$ лінії показує, що при $0 < x < \frac{\lambda}{4}$ вхідний опір $Z_{BX,XX}(x)$ за модулем змінюється у межах $-\infty < Z_{BX,XX}(x) < 0$ та має ємнісний характер, оскільки на цьому відрізку струм за фазою випереджає напругу. А при $\frac{\lambda}{4} < x < \frac{\lambda}{2}$ – у межах $0 < Z_{BX,XX}(x) < \infty$ та має індуктивний характер, оскільки на цьому відрізку напруга за фазою випереджає струм. Таке чергування продовжується і далі через відрізки $\frac{\lambda}{4}$ (рис. 6.28).

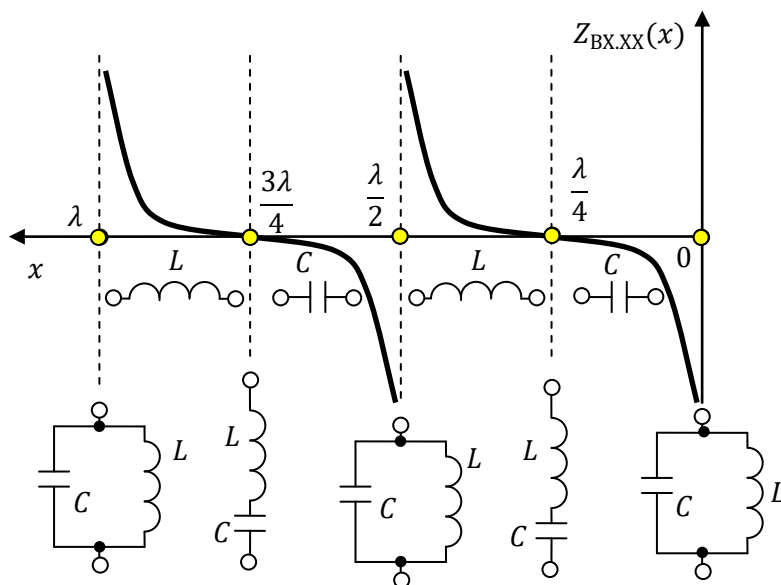


Рисунок 6.28 – Зміна вхідного опору у режимі ХХ

Отже, якщо лінія розімкнена на кінці, то такий відрізок довжиною $l < \frac{\lambda}{4}$ можна замінити ємністю. При $x = \frac{\lambda}{4}, x = \frac{3\lambda}{4}, \dots$ вхідний опір лінії дорівнює нулю, що відповідає резонансу напруг (послідовний контур), а при $x = 0, x = \frac{\lambda}{2}, x = \lambda \dots$ вхідний опір дорівнює нескінченності, що відповідає резонансу струмів (паралельний контур).

У лінії із втратами ($\alpha \neq 0$) амплітуда відбитої хвилі від кінця лінії буде зменшуватись за експоненціальним законом, а падаючої – збільшуватись (рис. 6.29). Різниця векторів падаючої і відбитої хвиль у вузлах не буде дорівнювати нулю. При віддаленні від навантаження довжина вектора $U_{\text{ПАД}}$ збільшується, а $U_{\text{ВІД}}$ – зменшується. Початкова фаза у результуючого вектору $\dot{U} = \dot{U}_{\text{ПАД}} + \dot{U}_{\text{ВІД}}$ та $\dot{I} = \dot{I}_{\text{ПАД}} + \dot{I}_{\text{ВІД}}$ стрибком на π змінюватись не буде, а буде змінюватись плавно. Різниця фаз напруги і струму вздовж лінії буде змінюватись у межах від $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Значить, крім реактивної складової у вхідного опору з'явиться активна складова, обумовлена повздовжніми та поперечними втратами. У цьому випадку математичні викладки необхідно робити з гіперболічними функціями або $e^{\gamma x}$ представити у вигляді

$$e^{\gamma x} = e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x} = e^{\gamma x} (\cos(\beta x) + j \sin(\beta x)).$$

Отже, розподіл амплітуди напруги вздовж лінії приймає вигляд, як вказано на рис. 6.29 а, а струму – рис. 6.29 б.

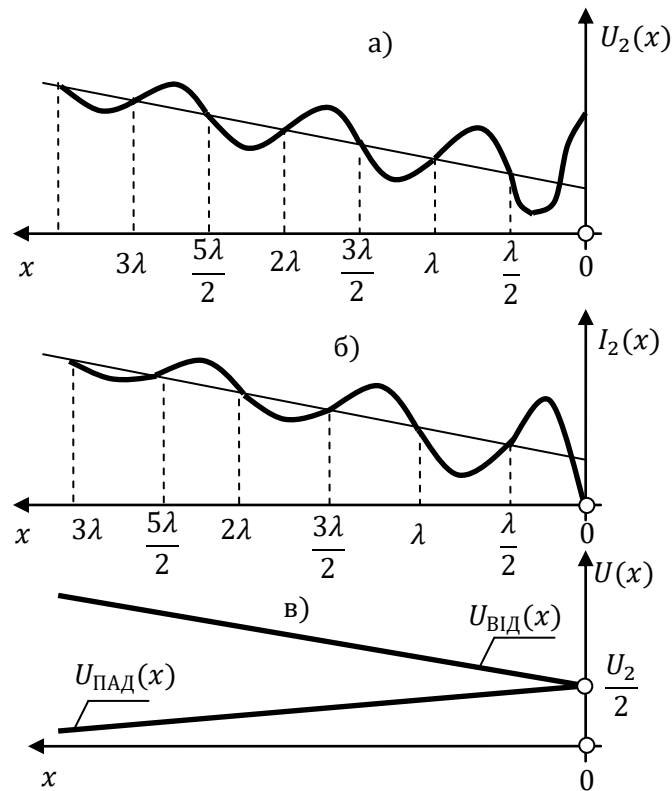


Рисунок 6.29 – Зміна струму та напруги у режимі ХХ лінії із втратами

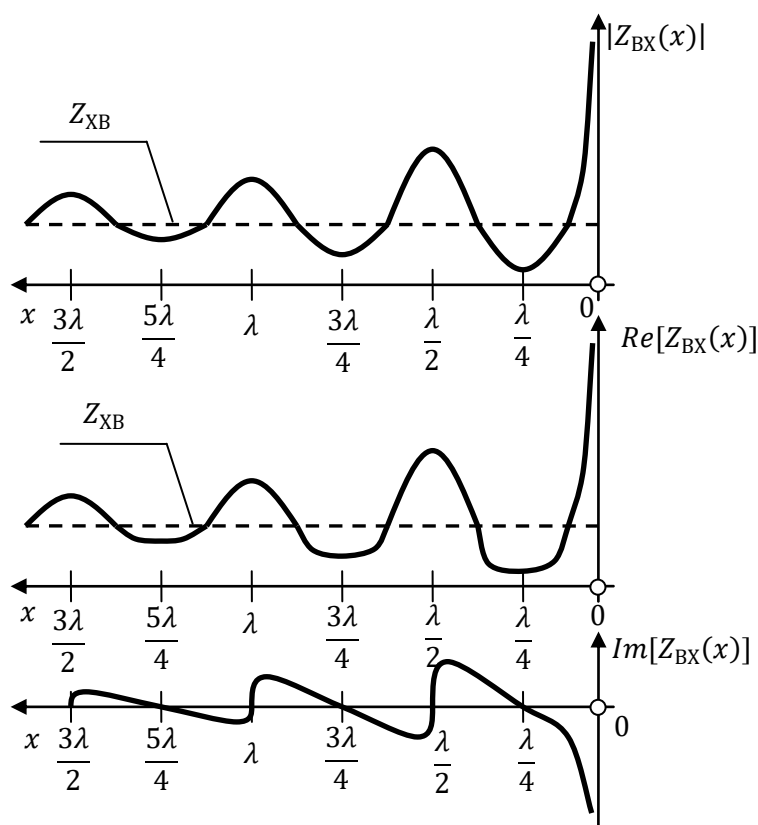


Рисунок 6.30 – Залежність модуля, дійсної та уявної складових вхідного опору

Із графіків (рис. 6.30) поблизу координати $x = \lambda/4$ лінія, як і для випадку відсутності втрат, веде себе аналогічно послідовному контуру із втратами, але вже з втратами, а поблизу $x = \lambda/2$ вона аналогічна паралельному контуру із втратами (також з втратами). Активна складова вхідного опору на деякій відстані від кінця лінії пересікає рівень, який дорівнює хвильовому опору.

Для побудови графіків коефіцієнт загасання лінії було обрано відносно великим, щоб у межах двох-трьох довжин хвиль можна було помітити зміну амплітуд падаючої та відбитої хвиль. У ліній із малими втратами настільки різкої зміни цих амплітуд спостерігатись не буде.

У свою чергу, якщо у лінії є втрати, то на деякій відстані x_1 від кінця лінії амплітуда відбитої хвилі може стати дуже малою порівняно із амплітудою падаючої хвилі, а це призведе до невірної враження, що далі із збільшенням координати x слідує узгоджений режим (рис. 6.31).

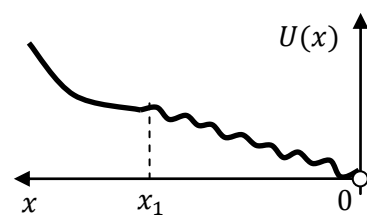


Рисунок 6.31 - Зміна

6.10.2. Режим короткого замикання лінії

У режимі короткого замикання лінія «закорочена» на кінці (рис. 6.32), тому напруга в кінці лінії відсутня ($\dot{U}_2 = 0$), опір навантаження $Z_H = 0$.



Рисунок 6.32 – Довга лінія без втрат у режимі КЗ

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$\dot{n}_u = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{Z_H - Z_{\text{ХВ}}}{Z_H + Z_{\text{ХВ}}} = \frac{0 - Z_{\text{ХВ}}}{0 + Z_{\text{ХВ}}} = -1 = 1e^{j180^\circ},$$

тоді коефіцієнт відбиття за струмом

$$\dot{n}_i = -\dot{n}_u = 1.$$

Рівняння передачі у цьому режимі

$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j\dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}} \sin(\beta x); \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos(\beta x) + j\frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{ХВ}}} \sin(\beta x). \end{cases}$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \dot{U} = j\dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}} \sin(\beta x); \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos(\beta x). \end{cases}$

Вхідний опір такої лінії (рис. 6.27)

$$Z_{\text{ВХ.КЗ}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{j\dot{I}_2 Z_{\text{ХВ}} \sin(\beta x)}{\dot{I}_2 \cos(\beta x)} = jZ_{\text{ХВ}} \operatorname{tg}(\beta x).$$

Для лінії без втрат розподіл діючих значень струмів та напруг у режимі короткого замикання має вигляд зображений на рис. 6.33.

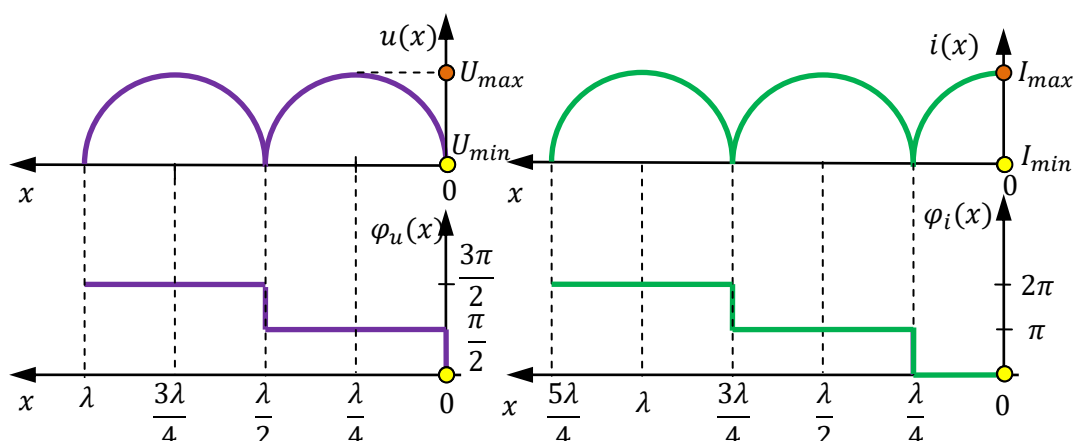


Рисунок 6.33 – Залежність напруги та струму у режимі короткого замикання

Оскільки $n_u = -1 < 0$, то першим від кінця лінії буде мінімум напруги і почнеться розподіл напруги саме із цього мінімуму, оскільки лінія без втрат. А оскільки $n_i = 1 > 0$, то у розподілі струмів першим від кінця лінії буде максимум струму, а оскільки лінія без втрат, то розподіл почнеться із цього максимального значення.

Дослідження характеру зміни $Z_{BK.K3}(x)$ (рис. 6.34) показує, що при $0 < x < \frac{\lambda}{4}$ вхідний опір $Z_{BK.K3}(x)$ за модулем змінюється у межах $0 < Z_{BK.K3}(x) < \infty$ та має індуктивний характер, оскільки на цьому відрізку напруга за фазою випереджає струм. А при $\frac{\lambda}{4} < x < \frac{\lambda}{2}$ - у межах $-\infty < Z_{BK.K3}(x) < 0$ та має ємнісний характер, оскільки на цьому відрізку струм за фазою випереджає напругу. Таке чергування продовжується і далі через відрізки лінії, що дорівнюють $\frac{\lambda}{4}$ (рис. 6.34) Отже, якщо лінія закорочена на кінці, то такий відрізок довжиною $l < \frac{\lambda}{4}$ можна замінити індуктивністю. При $x = \frac{\lambda}{4}, x = \frac{3\lambda}{4}, \dots$ вхідний опір закороченої лінії дорівнює нескінченності, що відповідає резонансу струмів (паралельний контур), а при $x = 0, x = \frac{\lambda}{2}, x = \lambda \dots$ вхідний опір дорівнює нулю, що відповідає резонансу напруги (послідовний контур).

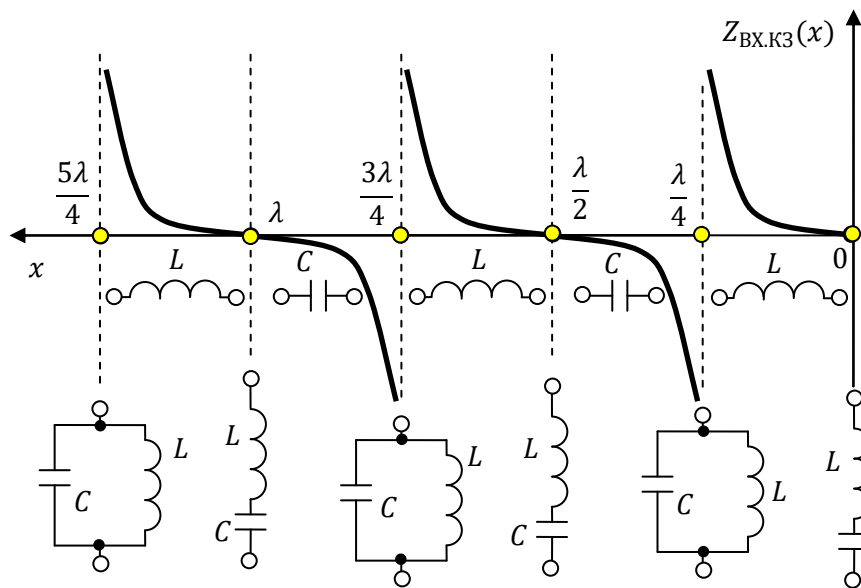


Рисунок 6.34 – Залежність вхідного опору у режимі КЗ

6.10.3. Лінія навантажена на реактивний опір

У цьому випадку у якості навантаження може бути ємність чи індуктивність $Z_H = \pm jX_H$.

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$n_u = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{Z_H - Z_{\text{ХВ}}}{Z_H + Z_{\text{ХВ}}} = \frac{jX_H - R_{\text{ХВ}}}{jX_H + R_{\text{ХВ}}} = \frac{\sqrt{X_H^2 + R_{\text{ХВ}}^2}}{\sqrt{X_H^2 + R_{\text{ХВ}}^2}} e^{-2j \arctg(\frac{R_{\text{ХВ}}}{X_H})} = 1 \cdot e^{-2j \arctg(R_{\text{ХВ}}/X_H)}.$$

Таким чином, у кінці лінії падаюча та відбита хвилі напруги (струму) не будуть у фазі або протифазі, а отже у навантаженні не буде ні максимуму, ні мінімуму напруги (струму). Для індуктивного навантаження першим від кінця лінії буде максимум амплітуди напруги та мінімум амплітуди струму ($0 < \varphi_n < \pi$), а для ємнісного навантаження першим від кінця лінії мінімум амплітуди напруги та максимум амплітуди струму ($-\pi < \varphi_n < 0$).

До таких висновків можна прийти, якщо розглядати режими короткого замикання та холостого ходу.

Таким чином, для індуктивності (рис. 6.35)

$$Z_{\text{ВХ.КЗ}}(x) = Z_L, \\ jR_{\text{ХВ}} \operatorname{tg}(\beta x) = j\omega L$$

Звідси визначимо

$$S = x_{\text{КЗ}} = \frac{1}{\beta} \arctg\left(\frac{\omega L}{R_{\text{ХВ}}}\right).$$

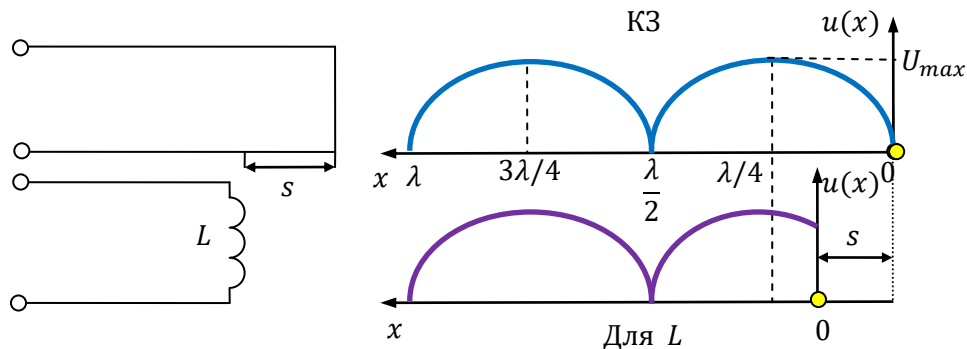


Рисунок 6.35 – Заміна індуктивності КЗ ділянкою

Таким чином, для ємності (рис. 6.36)

$$Z_{\text{ВХ.ХХ}}(x) = Z_C, \\ -j \operatorname{ctg}(\beta x) = \frac{1}{j\omega C}$$

Звідси визначимо

$$S = x_{\text{ХХ}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arccctg}\left(\frac{1}{\omega C \cdot R_{\text{ХВ}}}\right).$$

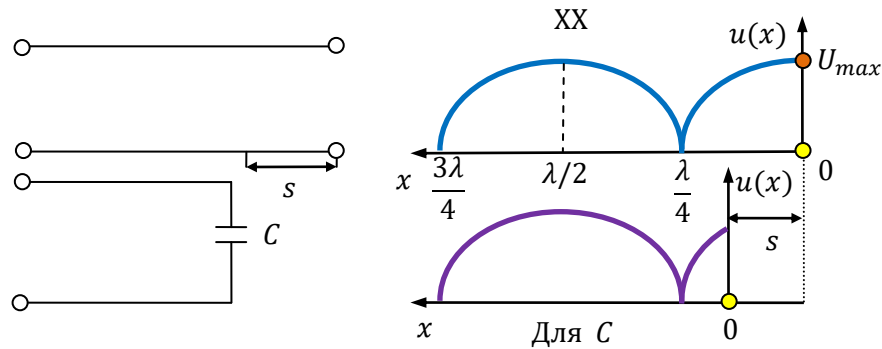


Рисунок 6.36 – Заміна ємності XX ділянкою

Отже, щоб одержати розподіл амплітуд струмів та напруг вздовж лінії, що навантажена на індуктивний або ємнісний опір, необхідно розподіл короткозамкненої лінії або розімкнутої лінії відповідно посунути на величину $x_{КЗ}$ чи $x_{ХХ}$ ліворуч вздовж координати x .

До аналогічних висновків приходять, використовуючи результати, отримані при вивченні режимів холостого ходу та короткого замикання. Дійсно, відрізок лінії довжиною менше, $\lambda/4$ еквівалентний ємності, якщо його розімкнуто, і індуктивності, якщо він замкнений на кінці. Тому реактивне навантаження можна замінити замкнутим або розімкнутим відрізком лінії довжиною $s < \lambda/4$. Отже, відомі розподіли амплітуд напруг і струмів або залежність вхідного опору від координати x перенести початок відліку на величину s (рис. 6.35 та рис. 6.36).

Рівняння передачі для лінії без втрат

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j \dot{I}_2 Z_{XB} \sin(\beta x); \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos(\beta x) + j \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} \sin(\beta x). \end{cases}$$

За законом Ома $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \cdot Z_H$ та $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_H$, $Z_H = jx_H$ перепишемо

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j \frac{\dot{U}_2}{jx_H} Z_{XB} \sin(\beta x); \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos(\beta x) + j \frac{\dot{I}_2}{Z_{XB}} jx_H \sin(\beta x). \end{cases}$$

Після скорочення отримуємо

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 [\cos(\beta x) + \frac{Z_{XB}}{x_H} \sin(\beta x)]; \\ \dot{I} = \dot{I}_2 [\cos(\beta x) - \frac{x_H}{Z_{XB}} \sin(\beta x)]. \end{cases}$$

Більш докладно запишемо напругу

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \sqrt{1 + \left(\frac{Z_{XB}}{x_H}\right)^2} \cos(\beta x + \varphi),$$

де $\varphi = -\arctg(Z_{XB}/x_H)$.

Виходячи з цього співвідношення, відстань до максимуму може бути знайдено з умови, що

$$\cos(\beta x + \varphi) = \pm 1.$$

Розв'язок рівняння

$$\beta x + \varphi = k\pi, \quad k = 0, 1, \dots$$

Звідси визначимо

$$x_{\max} = \frac{k\pi - \varphi}{\beta} = \frac{k\pi\lambda}{2\pi} + \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \arctg\left(\frac{Z_{XB}}{x_H}\right) = \frac{k\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \arctg\left(\frac{Z_{XB}}{x_H}\right).$$

Відстань до першого по порядку максимуму знайдемо, підставивши в цю формулу $k = 0$ (рис. 6.37)

$$l_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \arctg\left(\frac{Z_{XB}}{x_H}\right).$$

Відстань до мінімуму знаходиться з умови, що

$$\beta x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Далі методика розв'язання та ж сама.

Таким чином, відрізок лінії розімкнений на кінці еквівалентний С з довжиною менше ніж $\lambda/4$, а розімкнений індуктивності L з довжиною менше ніж $\lambda/4$.

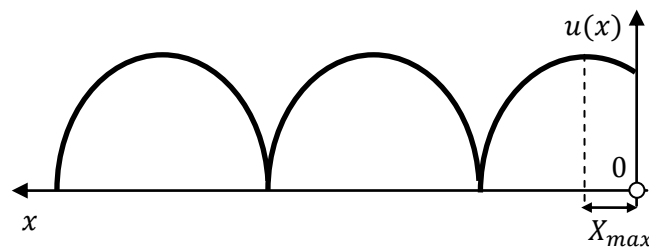


Рисунок 6.37 – Залежність напруги

Щоб накреслити розподіли амплітуд струму або напруги для лінії з реактивним навантаженням, необхідно накреслити відомі розподіли для ХХ або КЗ, а потім відступити від кінця лінії на величину l , де l – це довжина лінії з еквівалентним значенням ємності або індуктивності навантаження.

Нижче наведений приклад розрахунків.

Задача 6.2. У лінії без втрат (рис. 6.38) побудувати розподіл амплітуди напруги від кінця лінії, визначити амплітуду напруги в кінці лінії. Лінія має хвильовий опір $R_{XB} = 120 \text{ Ом}$ та навантажена на ємність $C = 143 \text{ пФ}$. Робоча частота $f = 15 \text{ МГц}$. Амплітуда напруги у пучності 30 В.

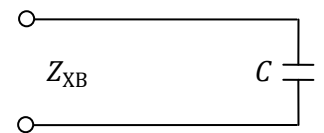


Рисунок 6.38 - Схема лінії із ємністю

Розв'язання

Довжина хвилі $\lambda = C/f = 3 \cdot 10^8 / 15 \cdot 10^6 = 20 \text{ м}$.

Комплексний опір ємності

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{2\pi \cdot f \cdot C} = -\frac{j}{2\pi \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 143 \cdot 10^{-12}} = -74.2j \text{ Ом}.$$

Ємність в кінці лінії можна замінити ділянкою у режимі холостого ходу лінії довжиною $S < \frac{\lambda}{4}$.

Вхідний опір ділянки у режимі холостого ходу $Z_{BX.XX} = -jR_{XB} \cdot \text{ctg}(\beta x)$.

Узгодження цієї ділянки із вхідним опором лінії $Z_{BX.XX} = Z_H = -jX_C$.

Отже, $-jR_{XB} \cdot \text{ctg}(\beta x) = -jX_C$.

Спростимо вираз

$$\text{ctg}(\beta x) = \frac{X_C}{R_{XB}} = \frac{74.2}{120} = 0.618.$$

Звідси визначимо довжину розімкненого відрізка лінії

$$S = x = \frac{1}{\beta} \text{arcctg}(0.618) = \frac{\lambda}{2\pi} \text{arcctg}(0.618) = \frac{20}{360^\circ} \cdot 31.73^\circ = 1.76 \text{ м}.$$

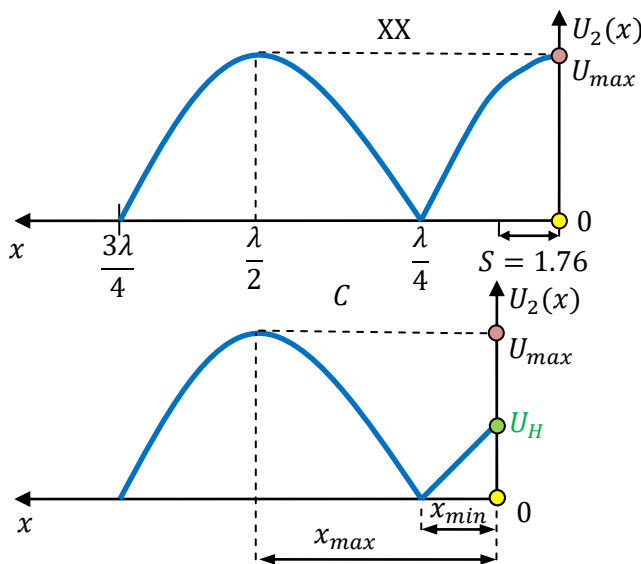


Рисунок 6.39 – Залежність напруги

Зобразимо розподіл амплітуди напруг від кінця лінії для розімкненої ділянки (рис. 6.39). Щоб одержати розподіл амплітуди напруги у випадку ємнісного навантаження, потрібно просто початок координат перемістити ліворуч на величину $S = 1.76 \text{ м}$.

Відстань до першого мінімуму

$$x_{\min} = \frac{\lambda}{4} - S = \frac{20}{4} - 1.76 = 5 - 1.76 = 3.24 \text{ м}.$$

Відстань до першого максимуму

$$x_{\max} = x_{\min} + \frac{\lambda}{4} = 3.24 + \frac{20}{4} = 3.24 + 5 = 8.24 \text{ м}.$$

Напруга в кінці лінії ($U_{\text{пучності}} = U_{\max} = 30 \text{ В}$)

$$U_H = U_{\max} \cos(\beta x_{\min}) = U_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x_{\min}\right) = 30 \cos\left(\frac{2\pi}{20} \cdot 3.24\right) = 15.75 \text{ В}.$$

Відповідь: $U_H = 15.8 \text{ В}$, $x_{\min} = 3.24 \text{ м}$, $x_{\max} = 8.24 \text{ м}$.

6.11. Режим змішаних хвиль

6.11.1. Лінія без втрат навантажена на активний опір

У лінії, що навантажена на активний опір (рис. 6.40) залежно від співвідношення значень опору навантаження та хвильового опору, коефіцієнт відбиття може бути менше, або більше нуля. За абсолютною величиною коефіцієнт відбиття завжди менше одиниці (активний опір поглинає енергію), а це означає, що амплітуда відбитої хвилі менше амплітуди падаючої. Якщо $R_H > Z_{XB}$ ($n_u > 0$), то в кінці лінії амплітуда падаючої та відбитої х, а хвилі додадуться у фазі, а струму – у протифазі. У цьому випадку у кінці лінії максимум амплітуди напруги та мінімум амплітуди струму. Отже, в залежності від співвідношення опору навантаження та хвильового опору у кінці лінії може бути або максимум струму або максимум напруги.

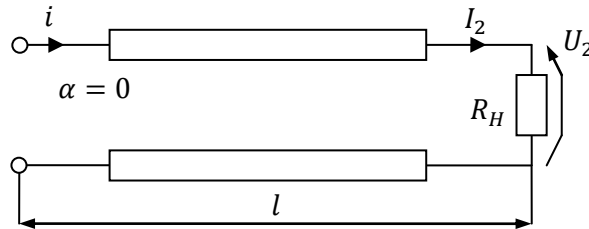


Рисунок 6.40 – Схема лінії

Рівняння передачі для лінії без втрат

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j \dot{I}_2 Z_{XB} \sin(\beta x); \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos(\beta x) + j \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} \sin(\beta x). \end{cases}$$

Введемо заміну

$$\frac{Z_{XB}}{R_H} = m, \quad I_2 = \frac{U_2}{R_H}.$$

Тоді рівняння передачі приймуть вигляд

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j \dot{U}_2 m \sin(\beta x); \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} [m \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)]. \end{cases}$$

Виділимо модуль та аргумент напруги та струму

$$\dot{U} = U_2 \sqrt{\cos^2(\beta x) + m^2 \sin^2(\beta x)} e^{j(\theta + \varphi_U(x))};$$

$$\dot{I} = \frac{U_2}{Z_{XB}} \sqrt{m^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} e^{j(\theta + \varphi_I(x))};$$

$$\varphi_u(x) = \arctg \left[\frac{\dot{U}_2 m \sin(\beta x)}{\dot{U}_2 \cos(\beta x)} \right] = \arctg[m \cdot \operatorname{tg}(\beta x)];$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{1}{m} \cdot \operatorname{tg}(\beta x)\right), & \sin(\beta x) < 0; \\ \arctg\left(\frac{1}{m} \cdot \operatorname{tg}(\beta x)\right) + \pi, & \cos(\beta x) < 0. \end{cases}$$

Струм і напруга у вигляді гармонічних функцій

$$u(t, x) = u(x) \cos(\omega t + \theta + \varphi_u(x));$$

$$i(t, x) = i(x) \cos(\omega t + \theta + \varphi_i(x)).$$

Графіки розподілу амплітуд струмів та напруг для випадків: $R_H > Z_{XB}$, $n_u > 0$ (рис. 6.41 а) та $R_H < Z_{XB}$, $n_u < 0$ (рис. 6.41 б) не будуть опускатися до нуля.

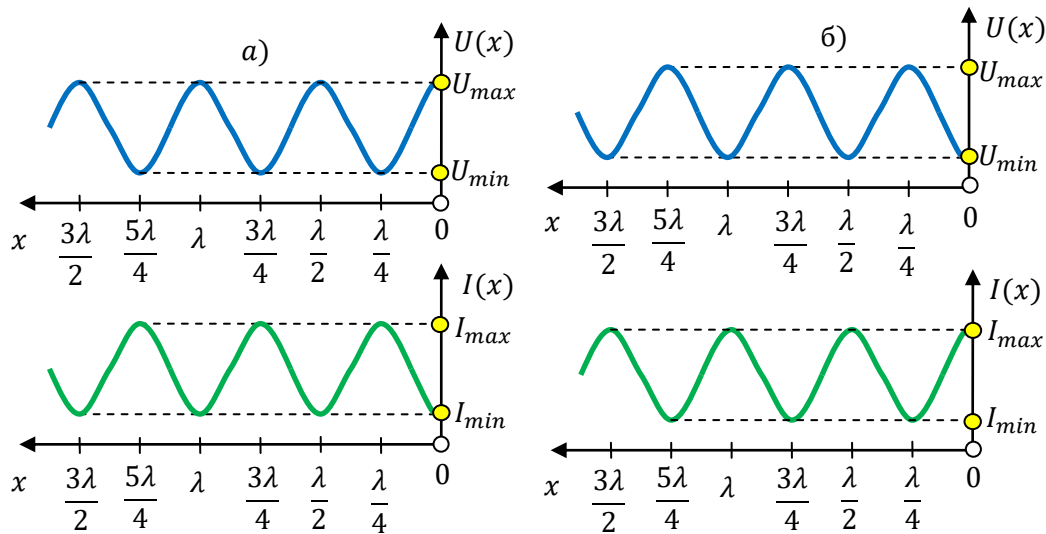


Рисунок 6.41 – Залежності амплітуд напруг та струм в лінії

Одержимо вираз для вхідного опору лінії без втрат із активним навантаженням, виділив його дійсну та уявну частини

$$Z_{BX}(x) = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = \frac{U_2(\cos(\beta x) + jm \sin(\beta x))}{\frac{U_2}{Z_{XB}}(m \cos(\beta x) + j \sin(\beta x))} = Z_{XB} \frac{\cos(\beta x) + jm \sin(\beta x)}{m \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)},$$

$$m = \frac{Z_{XB}}{R_H}.$$

Вирази для дійсної та уявної частини вхідного опору

$$\operatorname{Re}[Z_{BX}(x)] = Z_{XB} \frac{m}{m^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)};$$

$$\operatorname{Im}[Z_{BX}(x)] = Z_{XB} \frac{0.5(m^2 - 1) \sin(2\beta x)}{m^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)}.$$

Побудуємо графіки залежностей вхідного опору (активної, реактивної складових та модуля) відрізка лінії із активним навантаженням від його довжини для випадку $m = 0.5$ на рис. 6.42.

Із графіків видно, що в точці $\lambda/4$ опір лінії аналогічний опору послідовного контуру, а у точці $\lambda/2$ – паралельного.

Необхідно звернути увагу на те, що дійсна частина вхідного опору на деякій відстані x_1 (точка 1) від кінця лінії перетинає рівень хвильового опору, але при цьому є деяка уявна складова. Якщо в цій точці уявну складову компенсувати, то далі почнеться узгоджений режим.

Крім того, іноді є зручнішим оперувати із провідностями, якщо ввести заміну

$$m_1 = \frac{Y_{XB}}{Y_H} = \frac{1}{m}.$$

Вхідна провідність

$$Y_{BX}(x) = \frac{I(x)}{U(x)} = Y_{XB} \frac{\cos(\beta x) + jm_1 \sin(\beta x)}{m_1 \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)},$$

Виділимо дійсну та уявну частини вхідної провідності

$$Re[Y_{BX}(x)] = Y_{XB} \frac{m_1}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)}; \quad Im[Y_{BX}(x)] = Y_{XB} \frac{0.5(m_1^2 - 1) \sin(2\beta x)}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)}.$$

Із виразу $Re[Y_{BX}(x)]$ можна знайти відстань x_1 від кінця лінії, де $Re[Y_{BX}(x)]$ дорівнює хвильовій провідності. Якщо x_1 підставити у вираз $Im[Y_{BX}(x)]$, то визначимо величину реактивної провідності, яку необхідно компенсувати.

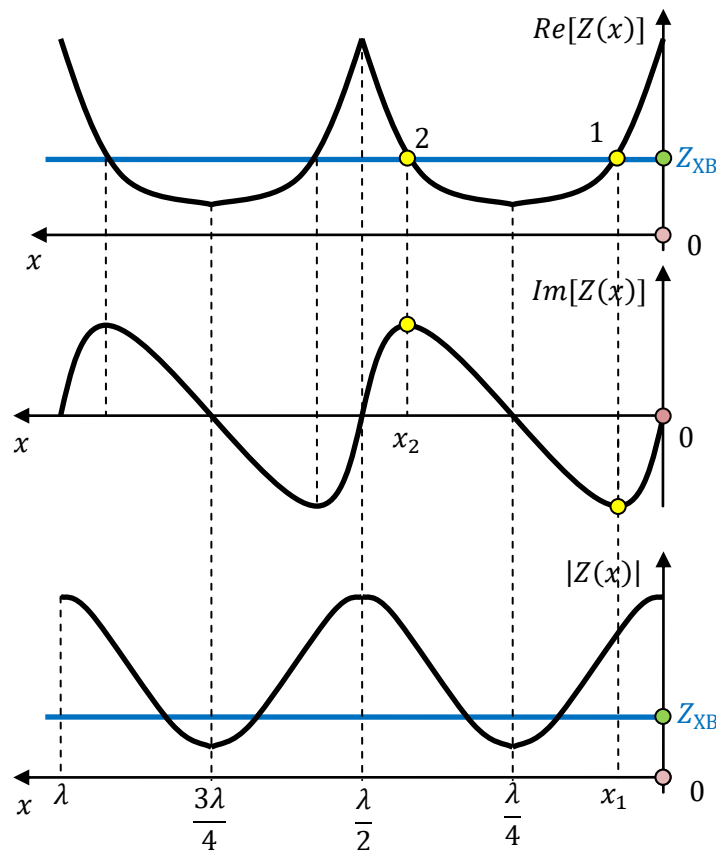
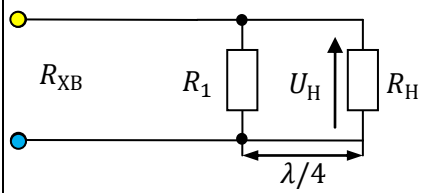


Рисунок 6.42 – Залежності дійсної, уявної складових

Задача 6.3. У лінії без (рис. 6.43) втрат побудувати розподіли $u(x)$ та $i(x)$. На відстані $\lambda/4$ від навантаження підключений опір R_1. Відомо, що $R_{XB} = R_1 = R_H = 20 \text{ Ом}$. Напряга у навантаженні $U_H = 40 \text{ В}$.	
Рисунок 6.43 – Схема лінії	

Розв'язання

Коефіцієнт відбиття за напругою від опору навантаження

$$n_{u1} = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{R_H - R_{XB}}{R_H + R_{XB}} = \frac{20 - 20}{20 + 20} = 0.$$

Вхідний опір чвертьхвильового відрізка

$$R_{BX} = Z_{BX} \left(\frac{\lambda}{4} \right) = \frac{R_{XB}^2}{R_H} = \frac{20^2}{20} = 20 \text{ Ом}.$$

Оскільки опори $R_H = R_{XB}$ то у лінії довжиною $\lambda/4$ узгоджений режим

$$R_{H2} = \frac{R_{BX} \cdot R_1}{R_{BX} + R_1} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10 \text{ Ом}.$$

У результаті отримаємо еквівалентну схему, що подана на рис. 6.44.

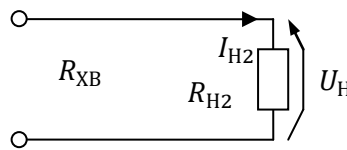


Рисунок 6.44 – Еквівалентна схема лінії

Новий коефіцієнт відбиття за напругою лінії (рис. 6.44)

$$n_{u2} = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{R_{H2} - R_{XB}}{R_{H2} + R_{XB}} = \frac{10 - 20}{10 + 20} = -\frac{10}{30} = -\frac{1}{3}.$$

Коефіцієнт біжної хвилі

$$KBX = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{1 - |n_{u2}|}{1 + |n_{u2}|} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $n_{u2} = -\frac{1}{3} < 0$, то першим від кінця лінії буде $U_H = U_{\min} = 40 \text{ В}$.

Максимальне значення напруги із виразу для KBX

$$U_{\max} = \frac{U_{\min}}{KBX} = \frac{40}{1/2} = 80 \text{ В}.$$

На рис. 6.45 поданий розподіл амплітуди напруги вздовж лінії від кінця лінії.

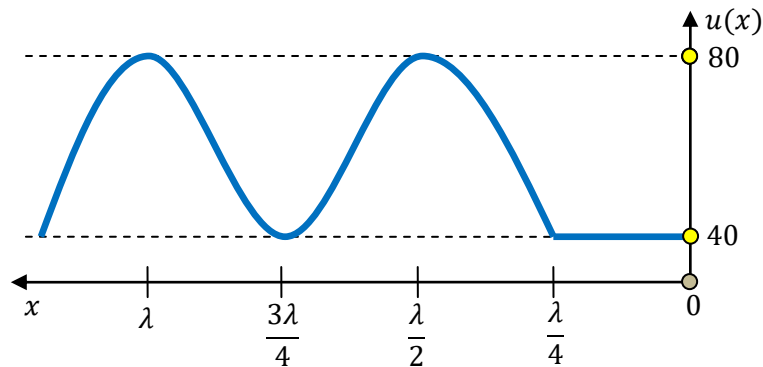


Рисунок 6.45 – Залежність напруги від кінця лінії

Оскільки

$$n_i = -n_u = \frac{1}{3} > 0,$$

то розподіл струму починається з I_{max} .

За законом Ома

$$I_H = \frac{U_2}{R_H} = \frac{40}{20} = 2 \text{ A};$$

$$I_{H2} = \frac{U_2}{R_{H2}} = \frac{40}{10} = 4 \text{ A} = I_{max}.$$

Мінімальне значення струму із виразу КБХ

$$I_{min} = I_{max} \cdot KBX = 4 \cdot 0.5 = 2 \text{ A}.$$

На рис. 6.46 поданий розподіл амплітуди струму вздовж лінії від кінця лінії.

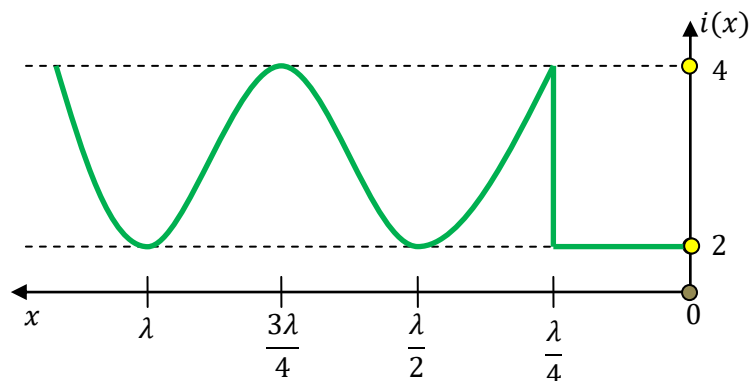


Рисунок 6.46 – Залежність струму від кінця лінії

6.11.2. Лінія без втрат навантажена на комплексний опір

Розглянемо лінію, навантажену на комплексне навантаження

$$Z_H = R_H + jX_H.$$

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$n_u = \frac{Z_H - Z_{XB}}{Z_H + Z_{XB}} = \frac{R_H + jX_H - Z_{XB}}{R_H + jX_H + Z_{XB}} = \frac{R_H - Z_{XB} + jX_H}{R_H + Z_{XB} + jX_H}.$$

Модуль коефіцієнта передачі

$$|n_u| = \sqrt{\frac{(R_H - Z_{XB})^2 + X_H^2}{(R_H + Z_{XB})^2 + X_H^2}}.$$

Коефіцієнт біжної хвилі

$$\text{КБХ} = \frac{1 - |n_u|}{1 + |n_u|} = \frac{\sqrt{(R_H + Z_{XB})^2 + X_H^2} - \sqrt{(R_H - Z_{XB})^2 + X_H^2}}{\sqrt{(R_H + Z_{XB})^2 + X_H^2} + \sqrt{(R_H - Z_{XB})^2 + X_H^2}}.$$

Оскільки

$$\dot{n}_u = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{0.5 \cdot (U_2 - I_2 Z_{XB})}{0.5 \cdot (U_2 + I_2 Z_{XB})}.$$

Звідси маємо $0.5 \cdot (U_2 - I_2 Z_{XB}) = 0.5 \dot{n}_u \cdot (U_2 + I_2 Z_{XB})$.

Підставимо це у рівняння передачі за напругою

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2} (U_2 + I_2 Z_{XB}) e^{j\beta x} + \frac{1}{2} (U_2 - I_2 Z_{XB}) e^{-j\beta x} = \\ &= \frac{1}{2} (U_2 + I_2 Z_{XB}) e^{j\beta x} [1 + \dot{n}_u e^{-2j\beta x}]. \end{aligned}$$

Розглянемо доданок

$$\dot{n}_u e^{-2j\beta x} = |n_u| e^{j\varphi_n} e^{-2j\beta x} = |n_u| e^{j(\varphi_n - 2\beta x)}.$$

Отже, напруга буде максимальна за умови, коли $\cos(\varphi_n - 2\beta x) = 1$, а це можливе за умови

$$\varphi_n - 2\beta x = 2\pi k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Звідси визначимо відстань до першого максимуму

$$x_{\text{max}} = \frac{\varphi_n}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_n.$$

Отже, якщо комплексне навантаження стає активним, то у лінії спостерігається режим змішаних хвиль, тобто є біжна хвиля та стійна хвиля.

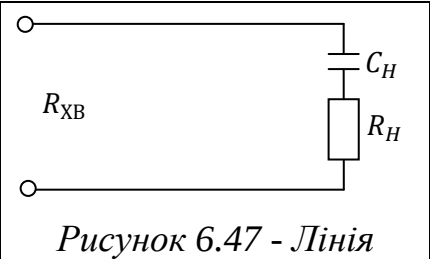
Для лінії без втрат, навантажену на активний опір, запишемо рівняння передачі для напруги

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U_2 \cos(\beta x) + jm U_2 \sin(\beta x) = U_2 \cos(\beta x) + jm U_2 \sin(\beta x) \pm j U_2 \sin(\beta x) = \\ &= [U_2 \cos(\beta x) + j U_2 \sin(\beta x)] + [jm U_2 \sin(\beta x) - j U_2 \sin(\beta x)] = \\ &= U_2 e^{j\beta x} + j U_2 (m - 1) \sin(\beta x). \end{aligned}$$

Перший доданок можна трактувати як біжну хвилю, а другий доданок можна трактувати, як стійну хвилю.

Нижче наведені приклади.

Задача 6.4. Лінія без втрат навантажена на активно-ємнісне навантаження (рис. 6.47). Показати, що при відліку координати «х» від кінця лінії першим по порядку буде мінімум амплітуди напруги незалежно від того, що буде меншим опір навантаження або хвильовий опір.



Розв'язання

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$\dot{n}_u = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{Z_H - R_{XB}}{Z_H + R_{XB}} = \frac{R_H - jX_C - R_{XB}}{R_H - jX_C + R_{XB}} = \frac{(R_H - R_{XB}) - jX_C}{(R_H + R_{XB}) - jX_C} = \frac{|U_{\text{чис}}|}{|Z_{\text{нам}}|} e^{j\varphi_n}.$$

Представимо чисельник та знаменник на комплексній площині як вектори (рис. 6.48).

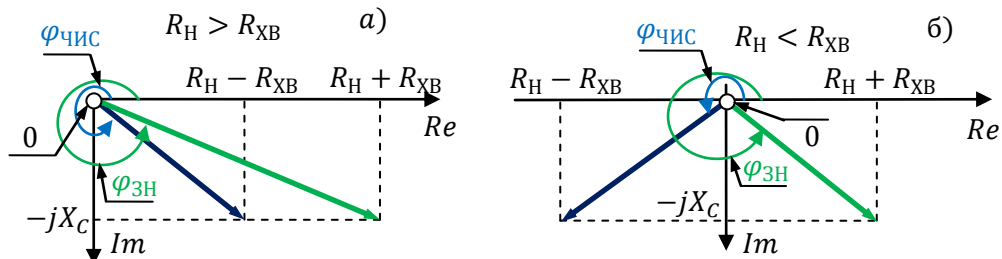
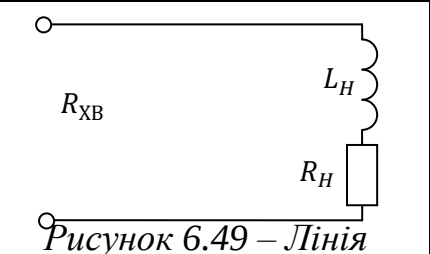


Рисунок 6.48 – Вектори на комплексній площині

Із векторної діаграми видно, що для двох випадків виконується умова $\varphi_n = \varphi_{\text{чис}} - \varphi_{\text{зн}} < 0$, отже першим від кінця лінії буде $U_{\min}$

Відповідь: $\varphi_n < 0$, то першим буде $U_{\min}$.

Задача 6.5. Лінія без втрат навантажена на активно-індуктивне навантаження (рис. 6.49). Показати, що при відліку координати «х» від кінця лінії першим по порядку буде максимум амплітуди напруги незалежно від того, що буде меншим опір навантаження або хвильовий опір.



Розв'язання

Коефіцієнт відбиття за напругою

$$\dot{n}_u = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{Z_H - R_{XB}}{Z_H + R_{XB}} = \frac{R_H + jX_L - R_{XB}}{R_H + jX_L + R_{XB}} = \frac{(R_H - R_{XB}) + jX_L}{(R_H + R_{XB}) + jX_L} = \frac{|U_{\text{чис}}|}{|Z_{\text{нам}}|} e^{j\varphi_n}.$$

Представимо чисельник та знаменник на комплексній площині як вектори (рис. 6.50).

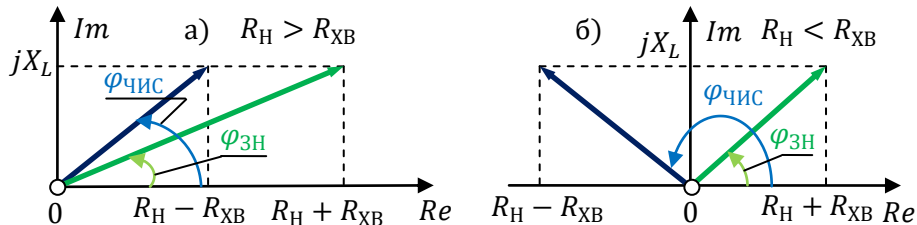


Рисунок 6.50 – Вектори на комплексній площині

Із векторної діаграми видно, що для двох випадків виконується умова $\varphi_n = \varphi_{\text{чис}} - \varphi_{\text{зн}} > 0$, отже першим від кінця лінії буде $U_{\max}$

Відповідь: $\varphi_n > 0$, то першим буде $U_{\max}$.

6.12. Способи узгодження лінії із навантаженням

Для передачі максимальної потужності від генератора у навантаження (рис. 6.51) необхідно, щоб довга лінія була узгоджена, тобто щоб не було відбитої хвилі.

Для *узгодженого режиму* необхідно, щоб опір навантаження дорівнював хвильовому опору $R_H = R_{ХВ}$.

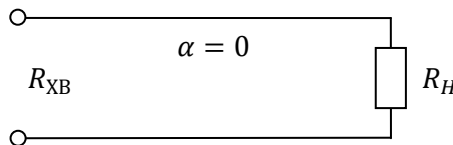


Рисунок 6.51 – Схема лінії без втрат

Якщо лінія не узгоджена, то необхідно штучним шляхом досягти рівностей опора навантаження та хвильового опору лінії.

Способи узгодження

1. За допомогою ідеального трансформатора.
2. За допомогою відрізка довжиною $\lambda/4$.
3. За допомогою короткозамкнених шлейфів.

6.12.1. Ідеальний трансформатор

Вхідний опір ідеального трансформатора

$$Z_{ВХ.ІТ} = \frac{R_H}{n^2}.$$

Для узгодження лінії із навантаженням, якщо опір навантаження є активний $R_H \neq R_{ХВ}$ (рис. 6.52 а), необхідно виконання умови $Z_{ВХ.ІТ} = R_{ХВ}$.

Звідси маємо

$$n = \sqrt{\frac{R_H}{R_{ХВ}}}.$$

У випадку, коли опір навантаження комплексний Z_H (рис. 6.52 б), підбирають таку довжину l , щоб виконувалась умова $Im[Z_{ВХ}(l)] = 0$. А далі все повторюється аналогічно попередньому випадку.

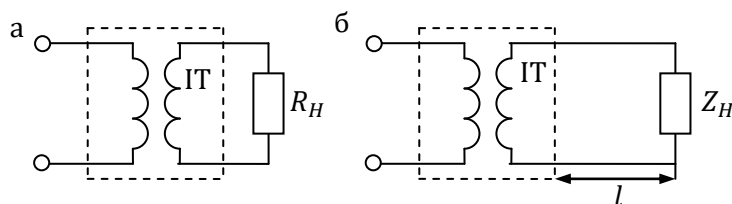


Рисунок 6.52 – Схеми ідеального трансформатора

6.12.2. Чвертьхвильовий трансформатор

Трансформуючі властивості відрізків довгих ліній широко використовуються на практиці для побудови у пристроях узгодження реальних ліній передачі із навантаженням, що називаються трансформуючими лініями.

Вхідний опір лінії без втрат

$$Z_{BX} = Z_{XB} \frac{\cos(\beta x) + jm \sin(\beta x)}{m \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)} \Big|_{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}} = R_{XB} \frac{Z_H \cos(\frac{2\pi l}{\lambda}) + jR_{XB} \sin(\frac{2\pi l}{\lambda})}{R_{XB} \cos(\frac{2\pi l}{\lambda}) + jZ_H \sin(\frac{2\pi l}{\lambda})}.$$

Підставимо у вираз для вхідного опору за умови $l = \lambda/4$

$$\begin{aligned} Z_{BX} &= R_{XB} \frac{Z_H \cos(\frac{2\pi}{4}) + jR_{XB} \sin(\frac{2\pi}{4})}{R_{XB} \cos(\frac{2\pi}{4}) + jZ_H \sin(\frac{2\pi}{4})} = R_{XB} \frac{Z_H \cos(\frac{\pi}{2}) + jR_{XB} \sin(\frac{\pi}{2})}{R_{XB} \cos(\frac{\pi}{2}) + jZ_H \sin(\frac{\pi}{2})} = \\ &= R_{XB} \frac{Z_H \cdot 0 + jR_{XB} \cdot 1}{R_{XB} \cdot 0 + jZ_H \cdot 1} = R_{XB} \frac{jR_{XB}}{jZ_H} = \frac{R_{XB}^2}{Z_H}. \end{aligned}$$

У результаті узгодження у лінії передачі встановлюється режим, близький до режиму біжних хвиль, при цьому практично вся енергія, що передається лінією поглинається у навантаженні, а втрати енергії пов'язані з багаторазовим проходженням відбитих хвиль вздовж лінії значно зменшуються.

Якщо опір навантаження реальної лінії передачі з малими втратами має чисто резистивний характер, то для узгодження лінії з навантаженням можна застосовувати чвертьхвильовий трансформатор (рис. 6.53), що вмикається між лінією та навантаженням.

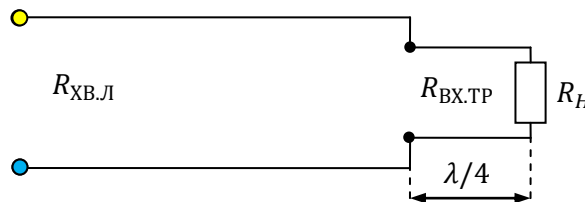


Рисунок 6.53 – Трансформатор опорів

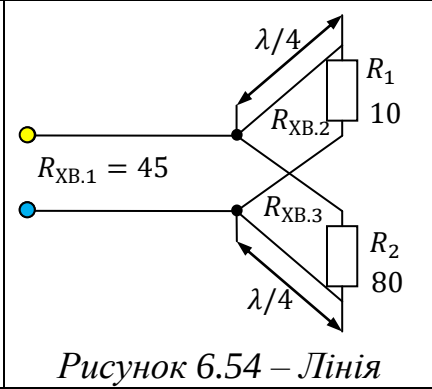
Погонні параметри відрізка лінії, що використовується у якості чвертьхвильового трансформатора, вибирають таким чином, щоб лінія була узгоджена

$$R_{XB.L} = R_{BX.TP}, \quad R_{XB.L} = \frac{R_{XB.TP}^2}{R_H}, \quad R_{XB.TP} = \sqrt{R_{XB.L} \cdot R_H}.$$

Відрізок лінії, що використовується у якості чвертьхвильового трансформатора, при цьому знаходиться у режимі змішаних хвиль, однак внаслідок малої довжини трансформатора втрати енергії у ньому незначні.

Нижче наведений приклад розрахунків.

Приклад 6.6. До лінії без втрат (рис. 6.54) із хвильовим опором $R_{XB.1} = 45 \text{ Ом}$ за допомогою відрізків довжиною $\lambda/4$ підключені два опори R_1 та R_2 . Яким повинний бути хвильовий опір одного із відрізків $R_{XB.3}$, щоб у лінії був режим біжних хвиль? Хвильовий опір другого із відрізків становлять $R_{XB.2} = 30 \text{ Ом}$. Опори на схемі задані в Омах.



Розв'язання

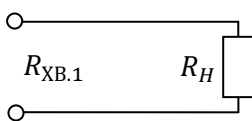
Вхідний опір чвертьхвильового відрізка

$$Z_{BX}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_{XB}^2}{R_H}.$$

Вхідні опори чвертьхвильових відрізків:

$$R_{BX.1} = Z_{BX.1}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_{XB.2}^2}{R_1} = \frac{30^2}{10} = 90 \text{ Ом};$$

$$R_{BX.2} = Z_{BX.2}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_{XB.3}^2}{R_2} = \frac{R_{XB.3}^2}{80}.$$



Еквівалентний опір навантаження (рис. 6.55)

$$R_H = \frac{R_{BX.1} \cdot R_{BX.2}}{R_{BX.1} + R_{BX.2}} = \frac{90 \cdot R_{BX.2}}{90 + R_{BX.2}}.$$

Рисунок 6.55 – Схема

Щоб у лінії був режим біжних хвиль необхідне виконання умови

$$R_{XB.1} = R_H = 45 \text{ Ом}.$$

У результаті одержимо рівняння

$$\frac{90 \cdot R_{BX.2}}{90 + R_{BX.2}} = 45.$$

Спростимо вираз

$$2R_{BX.2} = R_{BX.2} + 90.$$

Звідси визначимо

$$R_{BX.2} = 90 \text{ Ом}.$$

Вхідний опір чверть хвильового відрізка

$$Z_{BX}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = R_{BX.2} = \frac{R_{XB.3}^2}{80} = 90.$$

Звідси визначимо хвильовий опір

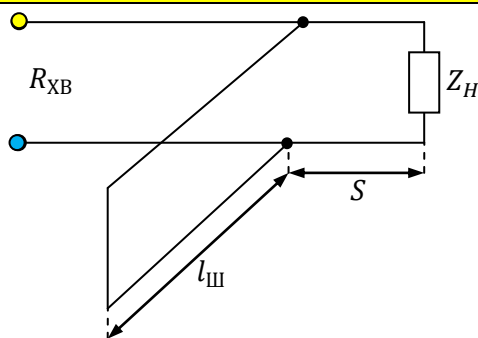
$$R_{XB.3} = \sqrt{90 \cdot 80} = 60\sqrt{2} \text{ Ом}.$$

Відповідь: $R_{XB.3} = 60\sqrt{2} \text{ Ом}.$

6.12.3. Реактивні шлейфи

Якщо опір навантаження лінії має комплексний характер, то узгоджуючий трансформатор підключається не в безпосередній близькості до навантаження, а на деякій відстані S від нього, що вибирається таким чином, що вхідний опір навантаженої ділянки лінії мав чисто резистивний характер. Незручність розглянутого методу узгодження полягає в тому, що необхідно виготовляти спеціальні відрізки лінії, хвильовий опір, і відповідно, погонні параметри якого не повинні відрізнятися від хвильового опору та погонних параметрів узгоджуючої лінії.

Реактивні шлейфи – це пристрої, що вмикаються паралельно до будь-якої ділянки кола для компенсації уявної складової його вхідної провідності.



Цей недолік відсутній у методі погодження за допомогою одного або двох реактивних шлейфів Татарінова. Шлейф Татарінова конструктивно представляє собою відрізок довгої лінії того ж типу, що і узгоджувана лінія (рис. 6.56).

Рисунок 6.56 – Шлейф для узгодження лінії

У першому випадку відстань від місця ввімкнення шлейфу до точки ввімкнення навантаження S (рис. 6.56) вибирають таким чином, щоб виконувалася умова $\operatorname{Re}[Y_{BX}] = Y_{XB} = 1/R_{XB}$.

В цій точці буде реактивна провідність

$$Y = Y_{XB} + jb.$$

А довжину шлейфа $l_{\text{ш}}$ вибрати таким чином, щоб вхідна провідність шлейфу дорівнювала $-jb$. Це дозволяє компенсувати реактивну складову провідностей.

Рівняння передачі для лінії без втрат:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j \dot{U}_2 m \sin(\beta x); \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} [m \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)]. \end{cases}$$

Була введена заміна

$$\frac{Z_{XB}}{R_H} = m, \quad I_2 = \frac{U_2}{R_H}; \quad \frac{R_H}{Z_{XB}} = m_1 = \frac{1}{m}.$$

Вхідна провідність лінії без втрат

$$Y_{BX} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = Y_{XB} \frac{\cos(\beta x) + j m_1 \sin(\beta x)}{m_1 \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)}.$$

Виділимо дійсну та уявну складові вхідної провідності

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{BX}} &= Y_{\text{XB}} \frac{[\cos(\beta x) + jm_1 \sin(\beta x)][m_1^2 \cos(\beta x) - j \sin(\beta x)]}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} = \\
 &= Y_{\text{XB}} \left[\frac{m_1^2 \cos^2(\beta x) + m_1^2 \sin^2(\beta x)}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} + j \frac{m_1^2 \sin(\beta x) \cos(\beta x) - \sin(\beta x) \cdot \cos(\beta x)}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} \right] \\
 &= \\
 &= Y_{\text{XB}} \frac{m_1}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} + j Y_{\text{XB}} \frac{0.5(m_1^2 - 1) \sin(2\beta x)}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)}.
 \end{aligned}$$

Етапи узгодження (рис. 6.45)

1. Місце ввімкнення шлейфу знаходиться із умови

$$Re[Y_{\text{BX}}] = Y_{\text{XB}} \frac{m_1}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} = Y_{\text{XB}}.$$

Звідси визначимо

$$m_1 = m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x) = m_1^2 \cos^2(\beta x) + 1 - \cos^2(\beta x);$$

$$m_1 - 1 = \cos^2(\beta x) \cdot [m_1^2 - 1] = \cos^2(\beta x) \cdot [m_1 - 1] \cdot [m_1 + 1]$$

Спростивши вираз запишемо

$$\cos(\beta x) = \sqrt{\frac{1}{m_1 + 1}} = k.$$

Звідси визначимо

$$S = x = \frac{\arccos(k)}{\beta}.$$

2. Отже, S підставляємо у вираз

$$Y = Im[Y_{\text{BX}}(x = S)] = Y_{\text{XB}} \frac{0.5(m_1^2 - 1) \sin(2\beta x)}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} = jb_{\text{BX}}(S)$$

та знаходимо величину реактивності, яку необхідно компенсувати.

3. Визначення довжини шлейфу

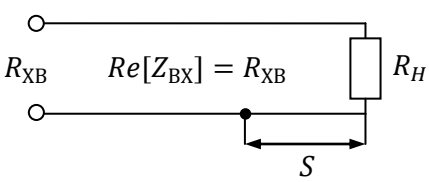
Вхідна провідність короткозамкненої ділянки лінії

$$Y_{\text{BX.КЗ}} = -jY_{\text{XB}} \operatorname{ctg}(\beta l_{\text{Ш}}).$$

Прирівняємо вхідну провідність короткозамкненої ділянки лінії до реактивної провідності із протилежним знаком

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{BX.КЗ}} &= -jb_{\text{BX}}(S); \\
 -jY_{\text{XB}} \operatorname{ctg}(\beta l_{\text{Ш}}) &= -jb_{\text{BX}}(S).
 \end{aligned}$$

Звідси визначаємо довжину шлейфу $l_{\text{Ш}}$.

Приклад 6.7. У лінії без втрат (рис. 6.57) із хвильовим опором $R_{XB} = 55$ Ом визначити опір навантаження R_H, щоб на відстані $S = 0.5$ м виконувалася умова $Re[Z_{BX}] = R_{XB}$. На робочій частоті довжина хвилі становить $\lambda = 5$ м.	 Рисунок 6.57 – Лінія

Розв'язання

Вхідний опір лінії без втрат у гармонічному режимі

$$Z_{BX} = R_{XB} \frac{\cos(\beta x) + jm \sin(\beta x)}{m \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)}, \quad m = \frac{R_{XB}}{R_H}.$$

Таким чином, виділимо дійсну та уявну частини вхідного опору

$$\begin{aligned} Z_{BX} &= R_{XB} \frac{\cos(\beta x) + jm \sin(\beta x)}{m \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)} \cdot \frac{m \cos(\beta x) - j \sin(\beta x)}{m \cos(\beta x) - j \sin(\beta x)} = \\ &= R_{XB} \frac{m}{m^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} + 0.5j R_{XB} \frac{[m^2 - 1] \sin(2\beta x)}{m^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)}. \end{aligned}$$

Прирівняємо активну складову вхідного опору до хвильового

$$R_{XB} \frac{m}{m^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} = R_{XB}.$$

Спростимо вираз

$$m = m^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x) = m^2 \cos^2(\beta x) + 1 - \cos^2(\beta x).$$

Перенесемо одиницю у ліву частину

$$m - 1 = \cos^2(\beta x) \cdot [m^2 - 1] = \cos^2(\beta x) \cdot (m - 1)(m + 1).$$

Спростимо вираз

$$\begin{aligned} \cos^2(\beta x) \cdot (m - 1)(m + 1) - (m - 1) &= 0; \\ (m - 1) \cdot [\cos^2(\beta x) \cdot (m + 1) - 1] &= 0. \end{aligned}$$

У цьому випадку можливі два розв'язки рівняння

$$\begin{aligned} (m - 1) &= 0 \rightarrow m_1 = 1; \\ \cos^2(\beta x) \cdot (m + 1) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Спростимо друге рівняння

$$m \cdot \cos^2(\beta x) = 1 - \cos^2(\beta x) = \sin^2(\beta x).$$

Звідси визначимо

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sin^2(\beta x)}{\cos^2(\beta x)} = \tan^2(\beta x) = \tan^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \tan^2\left(\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{1}{2}\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \\ &= 0.727^2 = 0.529. \end{aligned}$$

Таким чином, отримаємо другий розв'язок $m_2 = 0.529$.

Отже,

$$R_{H1} = \frac{R_{XB}}{m_1} = \frac{55}{1} = 55 \text{ Ом}; \quad R_{H2} = \frac{R_{XB}}{m_2} = \frac{55}{0.529} = 104 \text{ Ом}.$$

Відповідь: $R_{H1} = 55$ Ом, $R_{H2} = 104$ Ом.

6.13. Перехідні процеси у довгих лініях

6.13.1 Загальні положення

Запишемо телеграфні рівняння у часткових похідних

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases}$$

Використаємо перетворення Лапласа за зміною часу t за умови відсутності початкових умов

$$\begin{cases} -\frac{du(p, x)}{dx} = R_0 I(p) + pL_0 I(p), \\ -\frac{di(p, x)}{dx} = G_0 U(p) + pC_0 U(p). \end{cases}$$

У результаті одержали рівняння, що є аналогічними рівнянням з комплексними амплітудами. Можемо на основі раніше зроблених викладок записати розв'язок рівнянь відносно початку та кінця лінії у операторному вигляді

$$\begin{cases} U(p, x) = 0.5[U_1(p) + Z_{\text{ХВ}}I_1(p)]e^{-\gamma x} + 0.5[U_1(p) - I_1(p)Z_{\text{ХВ}}]e^{\gamma x}; \\ I(p, x) = 0.5\left[I_1(p) + \frac{U_1(p)}{Z_{\text{ХВ}}}\right]e^{-\gamma x} + 0.5\left[I_1(p) - \frac{U_1(p)}{Z_{\text{ХВ}}}\right]e^{\gamma x}. \end{cases}$$

В системі

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)};$$

$$Z_{\text{ХВ}} = \sqrt{\frac{R_0 + pL_0}{G_0 + pC_0}}.$$

Надалі буде показано, що перший доданок це операторне зображення падаючої хвилі, а другий – відбитої. Якщо $Z_{\text{Н}} = Z_{\text{ХВ}}$, то відбитої хвилі не буде. Наведені вище рівняння дають лише стратегію. Розглянемо конкретні випадки.

6.13.2 Лінія без втрат узгоджена у всьому діапазоні частот

У цьому випадку $\alpha = 0$, опори $Z_{\text{ХВ}} = Z_{\text{Н}}$, відбита хвиля $U_{\text{ВІД}}(p) = 0$.

Оскільки відбитої хвилі немає, то

$$U_{\text{ВІД}}(p) = U_1(p) - I_1(p)Z_{\text{ХВ}} = 0.$$

Звідси визначимо

$$U_1(p) = I_1(p) \cdot Z_{\text{ХВ}}.$$

Тоді вираз для падаючої хвилі прийме вигляд

$$U(p, x) = U_{\text{П}}(p, x) = 0.5[U_1(p) + I_1(p)Z_{\text{ХВ}}]e^{-\gamma x} = U_1(p) \cdot e^{-\gamma x},$$

де $\gamma = p\sqrt{L_0 C_0}$, $Z_{\text{ХВ}} = \sqrt{L_0 / C_0}$.

Отже, хвильовий опір не залежить від змінної p , а γ залежить прямо пропорційно. В результаті одержимо падаючу хвилю

$$U(p, x) = U_1(p)e^{-\gamma x} = U_1e^{-p\sqrt{L_0C_0}x}.$$

Відомо, що величина є фазову швидкістю

$$\sqrt{L_0C_0} = \frac{1}{V}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}} = V_\Phi.$$

Тоді одержимо такий вираз

$$U(p, x) = U_1(p)e^{-p\frac{x}{V}} = U_1(p)e^{-pt}.$$

За властивістю Лапласа про часовий зсув оригіналу залежно від координати x падаюча хвиля поширюється з різною затримкою по всій лінії (рис. 6.58).

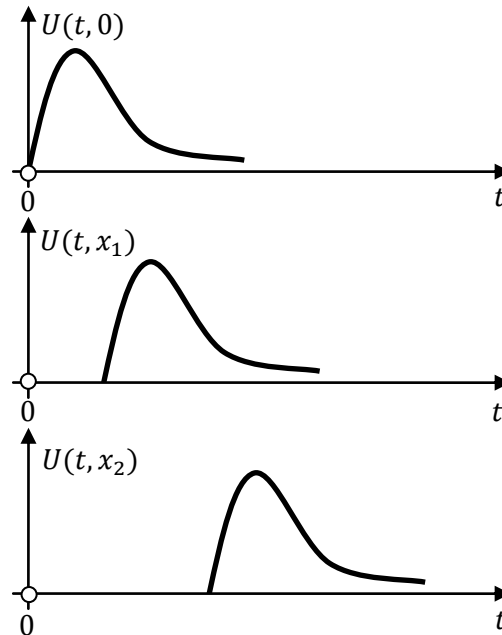


Рисунок 6.58 – Поширення падаючої хвилі вздовж координати x

Отже, процес переміщується вздовж лінії з якоюсь швидкістю (рис. 6.59).

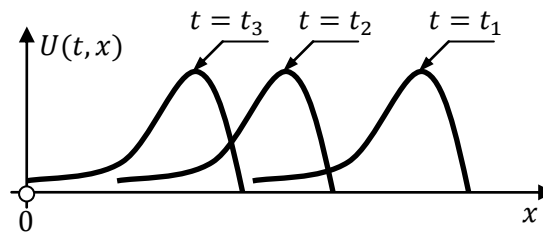


Рисунок 6.59 – Процес переміщення

6.13.3 Лінія із втратами

Для того, щоб у лінії з втратами сигнал передавався без спотворень необхідно, щоб виконувалася умова

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}.$$

Стала поширення та хвильовий опір за зазначеною умовою

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)} = \sqrt{L_0 C_0 \left(\frac{R_0}{L_0} + p\right) \left(\frac{G_0}{C_0} + p\right)} = \\ &= \sqrt{L_0 C_0} \left(\frac{R_0}{L_0} + p\right) = p\sqrt{L_0 C_0} + R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}; \\ Z_{XB} &= \sqrt{\frac{L_0 \left(\frac{R_0}{L_0} + p\right)}{C_0 \left(\frac{G_0}{C_0} + p\right)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \end{aligned}$$

Одержали, що стала поширення γ та хвильовий опір Z_{XB} від змінної p не залежить, отже лінія узгоджена у всьому діапазоні

$$U(p, x) = U_{\Pi}(p, x) = U_1 e^{-\gamma x} = U_1 e^{-R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} x} \cdot e^{-p \sqrt{L_0 C_0} x} = U_1 e^{-\alpha x} \cdot e^{-p \frac{x}{V}}.$$

Отже, перший доданок можна трактувати, як коефіцієнт загасання α , а другий як зсув у часі. Отже, це буде лінії довжиною l (рис. 6.60 а), що еквівалентна чотириполюснику (рис. 6.60 б), що пропускає сигнал без спотворень, але з затримкою.

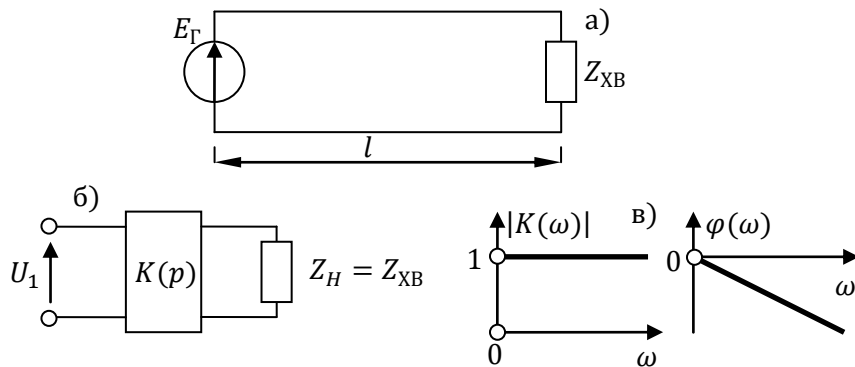


Рисунок 6.60 – Заміна лінії

Коефіцієнт передачі, модуль та аргумент (рис. 6.60 в) такого чотириполюсника

$$K(\omega) = e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\omega \frac{l}{V}}; \quad |K(\omega)| = 1, \alpha = 0; \quad \varphi(\omega) = -\omega \frac{l}{V} = -\omega t_0.$$

6.13.4. Випадок багатократних відбиттів

Якщо опір навантаження не дорівнює хвильовому, то одержимо режим багатократних відбиттів хвиль (рис. 6.61).

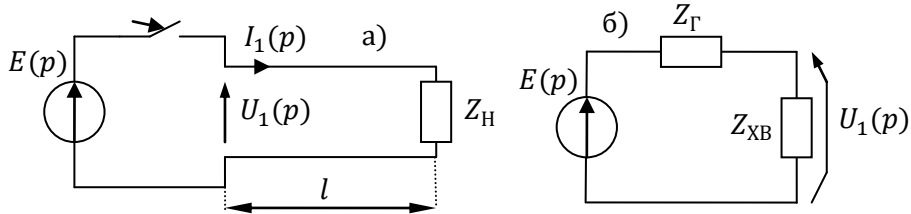


Рисунок 6.61 – Еквівалентні схеми лінії

Знайдемо коефіцієнти відбиття за напругою наприкінці та на початку лінії

$$n_1 = n_{U.Г} = \frac{Z_Г - Z_{ХВ}}{Z_Г + Z_{ХВ}}; \quad n_2 = n_{U.Н} = \frac{Z_Н - Z_{ХВ}}{Z_Н + Z_{ХВ}}.$$

Час пересування хвилі по лінії від генератора до навантаження l/v . Розглянемо розподіл напруги вздовж лінії для різних проміжків часу.

1) $0 \leq t < l/v$

Поки відбитої хвилі немає, отже $Z_{ВХ} = Z_{ХВ}$, оскільки хвильовий опір співвідносно процесу поширення хвилі, тоді коло (рис. 6.61 а) можна представити схемою (рис. 6.61 б) з опором навантаження $Z_Н = Z_{ХВ}$ і у цій схемі за формулою дільника напруги

$$U_1(p) = \frac{E(p)}{Z_Г + Z_{ХВ}} Z_{ХВ}.$$

Напруга у лінії $U(p, x) = U_1(p) e^{-\gamma x} = U_{\text{ПАД}}$.

2) $l/v \leq t < 2l/v$

Одержимо відбиту хвилю, що побіжить на початок лінії

$$U_{\text{ВІД}}|_{x=l} = U_{\text{ПАД}} \cdot n_2|_{x=l} = U_1 e^{-\gamma l} \cdot n_2.$$

Оскільки відбита хвиля переміщується до генератора

$$U_{\text{ВІД1}} = U_1 e^{-\gamma l} \cdot n_2 \cdot e^{-\gamma(l-x)} = U_1 n_2 e^{-\gamma(2l-x)}.$$

Напруга у лінії

$$U(p, x) = U_{\text{ПАД}} + U_{\text{ВІД1}} = U_1 [e^{-\gamma l} + e^{-\gamma(2l-x)} \cdot n_2].$$

3) $2l/v \leq t < 3l/v$

За умови, що $Z_Г \neq Z_{ХВ}$, хвилі відбившись від навантаження прийде до генератора, відбивається від нього і прямує у бік навантаження

$$U(p, x) = U_{\text{ПАД}} + U_{\text{ВІД1}} + U_{\text{ВІД2}}.$$

Одержимо нову відбиту хвилю, що побіжить на кінець лінії

$$U_{\text{ВІД}}|_{x=0} = U_1 e^{-\gamma l} n_1 \cdot e^{-\gamma l} n_2 = U_1 n_2 n_1 \cdot e^{-2\gamma l}.$$

Оскільки відбита хвиля переміщується до навантаження

$$U_{\text{ВІД2}} = U_1 n_2 n_1 e^{-2\gamma l} \cdot e^{-\gamma x} = U_1 n_2 n_1 e^{-\gamma(2l+x)}.$$

Напруга у лінії

$$U(p, x) = U_1 [e^{-\gamma l} + e^{-\gamma(2l-x)} \cdot n_2 + n_2 n_1 e^{-\gamma(2l+x)}].$$

$$4) 3l/v \leq t < 4l/v$$

За умови, що $Z_{\Gamma} \neq Z_{XB}$, хвилі відбившись від навантаження прийде до генератора, відбивається від нього і прямує у бік навантаження

$$U(p, x) = U_{\text{ПАД}} + U_{\text{ВІД1}} + U_{\text{ВІД2}} + U_{\text{ВІД3}}.$$

Одержимо нову відбиту хвилю, що побіжить на початок лінії

$$U_{\text{ВІД}}|_{x=0} = U_1 e^{-2\gamma l} n_1 n_2 \cdot e^{-\gamma l} n_2 = U_1 n_1 n_2^2 \cdot e^{-3\gamma l}.$$

Оскільки відбита хвиля переміщується до генератора

$$U_{\text{ВІД3}} = U_1 n_1 n_2^2 e^{-3\gamma l} \cdot e^{-\gamma(l-x)} = U_1 n_1 n_2^2 e^{-\gamma(4l-x)}.$$

Напруга у лінії

$$U(p, x) = U_1 [e^{-\gamma l} + e^{-\gamma(2l-x)} \cdot n_2 + n_2 n_1 e^{-\gamma(2l+x)} + n_1 n_2^2 e^{-\gamma(4l-x)}].$$

6.13.5. Спосіб знаходження відбитої хвилі через падаючу

Перехідні процеси можуть виникати у довгих лініях. У довгих лініях для обчислення перехідних процесів спочатку обчислюють коефіцієнти відбиття від навантаження та генератора. А далі будують розподіл падаючої напруги або струму та відбитої напруги або струму від довжини лінії. Далі будуть розподіл у часі напруги або струму.

Правило подвоєння напруги:

У випадку падіння хвилі із напругою $u_{\text{ПАД}}$, що переміщується вздовж довгої лінії із хвильовим опором Z_{XB} (рис. 6.62 а), напруга та струм у цій лінії будуть такими ж, як і при підключенні джерела напруги $2U_{\text{ПАД}}$ із внутрішнім опором Z_{XB} (рис. 6.62 б).

Із виразу коефіцієнта відбиття за напругою визначаємо, що

$$U_{\text{ВІД}} = n_U U_{\text{ПАД}}.$$

Операторна напруга вкінці лінії визначається виразом

$$U_2(p) = U_{\text{ПАД}} + U_{\text{ВІД}} = U_{\text{ПАД}} + n U_{\text{ПАД}} = U_{\text{ПАД}} + \frac{Z_H - Z_{XB}}{Z_H + Z_{XB}} U_{\text{ПАД}} = \frac{2U_{\text{ПАД}} Z_H}{Z_H + Z_{XB}}.$$

Отриманий вираз можна подати відповідною схемою (рис. 6.62 б).

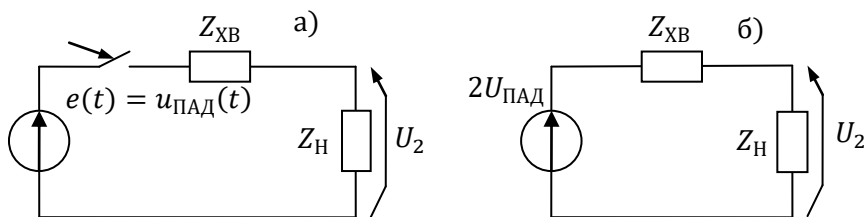


Рисунок 6.62 – Операторні схеми заміщення лінії

У результаті маємо, якщо в кінці лінії відома падаюча хвиля напруги $u_{\text{ПАД}}(t)$, то це дає змогу визначити напругу $u_2(t)$ та обчислити відбиту напругу

$$u_{\text{ВІД}}(t) = u_2(t) - u_{\text{ПАД}}(t).$$

Такий підхід справедливий, якщо в кінці лінії відома падаюча хвиля струму $i_{\text{ПАД}}(t)$, то це дає змогу визначити струм $i_2(t)$ та обчислити відбиту хвилю

$$i_{\text{ВІД}}(t) = i_2(t) - i_{\text{ПАД}}(t).$$

6.14. Включення лінії під постійну напругу

Розглянемо лінію без втрат ($\alpha = 0$) довжиною l , при цьому стала поширення $\gamma = p\sqrt{L_0C_0}$. З урахуванням того, що $v = 1/\sqrt{L_0C_0}$ одержимо $\gamma x = p\sqrt{L_0C_0} \cdot x = p\frac{x}{v}$, де x - координата. Тоді отримане раніше співвідношення для багаторазових відбиттів у операторній області:

$$U(p, x) = \frac{E}{p} [e^{-p\frac{x}{v}} + 1e^{-p\frac{2l-x}{v}} - 1e^{-p\frac{2l+x}{v}} - 1e^{-p\frac{4l-x}{v}} + \dots]$$

Такому операторному виразу відповідає функція часу

$$u(t, x) = E[1\left(t - \frac{x}{v}\right) + 1\left(t - \frac{x - 2l}{v}\right) - 1\left(t - \frac{x + 2l}{v}\right) - 1\left(t + \frac{x - 4l}{v}\right) \dots]$$

Для одержання виразів струму $I(p, x)$, $i(t, x)$ необхідно врахувати, що замість E у двох останніх співвідношеннях необхідно записати E/Z_{XB} і поміняти знаки коефіцієнтів відбиття на протилежні.

6.14.1 Режим холостого ходу

Напруга на вході лінії задається джерелом постійно напруги E (рис. 6.63). Якщо ключ на вході лінії не зображувати, то величину джерела напруги можна помножити на функцію Хевісайда. Тоді оригінал і зображення за Лапласом напруги на вході лінії приймуть вигляд $E(p) = \frac{E}{p}$.

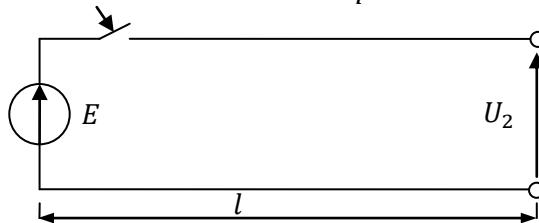


Рисунок 6.63 – Схема лінії у режимі ХХ

Опір джерела напруги дорівнює нулю ($Z_{\Gamma} = 0$), а опір навантаження – нескінченно великий ($Z_H = \infty$). Тому коефіцієнти відбиття за напругою на вході лінії та наприкінці лінії визначаються

$$n_1 = \frac{Z_{\Gamma} - Z_{XB}}{Z_{\Gamma} + Z_{XB}} = \frac{0 - Z_{XB}}{0 + Z_{XB}} = -1;$$

$$n_2 = \frac{Z_H - Z_{XB}}{Z_H + Z_{XB}} = \frac{\infty - Z_{XB}}{\infty + Z_{XB}} = 1.$$

Це означає, що від генератора та навантаження хвилі будуть відбиватися без спотворень, тільки на вході буде відбиття з інверсією (зміна знака).

Розглянемо графічно процеси на різних проміжках часу.

1) $0 \leq t < l/v$

Протягом цього проміжку часу падаюча хвиля $U_{\text{ПАД}}$ із прямокутним фронтом від генератора переміщається без спотворень до навантаження зі швидкістю v (рис. 6.64). Оскільки опір джерела E дорівнює нулю, то всю його напругу прикладено до входу лінії та на вході лінії завжди $u_1(t, 0) = E$. Очевидно, що в кінці лінії ($x = l$) напруги в даному випадку немає.

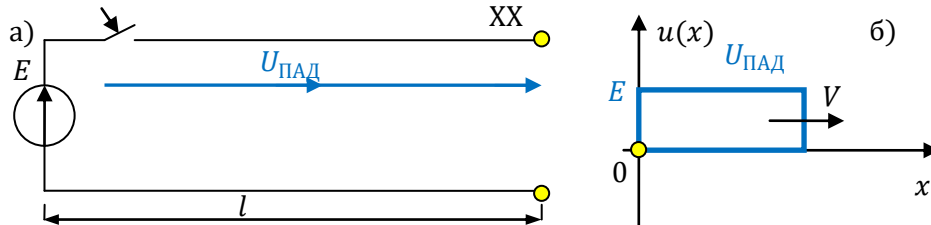


Рисунок 6.64 – Поширення хвилі напруги лінією у режимі ХХ

2) $l/v \leq t < 2l/v$

У момент часу $t = l/v$ падаюча хвиля з рівнем $U_{\text{ПАД}} = E$ досягає кінця лінії, відбивається з тим же рівнем $U_{\text{ВІД1}} = E$ (оскільки $n_2 = 1$), і починає переміщатися до генератора. Таким чином, у лінії існує дві хвилі $U_{\text{ПАД}}$ та $U_{\text{ВІД1}}$, які при додаванні дають (рис. 6.65)

$$u_2(t, x) = U_{\text{ПАД}} + U_{\text{ВІД1}} = E + E = 2E.$$

Напруга наприкінці лінії у момент $t = l/v$ стрибком змінюється від нульового значення до $2E$ та тримається протягом часу $t = 2l/v$ (поки хвиля не добіжить до генератора та не повернеться назад у кінець лінії).

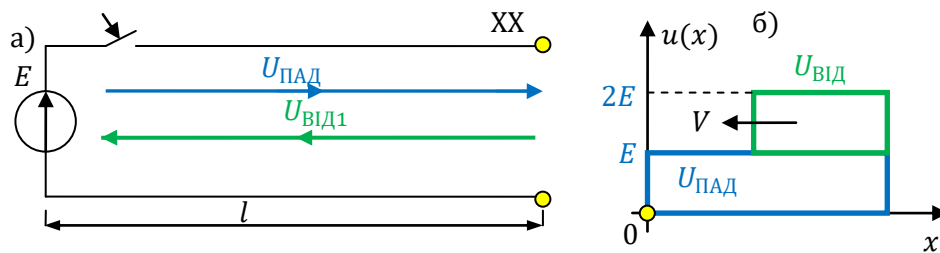


Рисунок 6.65 – Поширення хвилі напруги лінією у режимі ХХ

3) $2l/v \leq t < 3l/v$

Для даного інтервалу часу характерне існування в лінії трьох хвиль: $U_{\text{ПАД}}$, $U_{\text{ВІД1}}$ та $U_{\text{ВІД2}}$. Хвиля $U_{\text{ВІД2}}$ виходить у результаті відбиття $U_{\text{ВІД1}}$ від початку лінії. Причому вона має від'ємний рівень $U_{\text{ВІД2}} = -E$ (оскільки $n_1 = -1$) і переміщається від генератора до навантаження (рис. 6.66). У місцях додавання цих трьох хвиль у лінії встановлюється результуюча напруга, рівна

$$u_2(t, x) = U_{\text{ПАД}} + U_{\text{ВІД1}} + U_{\text{ВІД2}} = E + E - E = E.$$

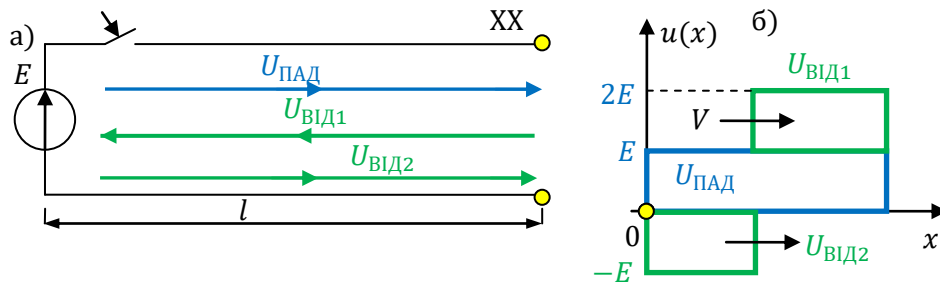


Рисунок 6.66 – Поширення хвилі напруги лінією у режимі XX

4) $3l/v \leq t < 4l/v$

У момент часу $t = 3l/v$ хвиля $U_{ВІД2}$ з від'ємним рівнем E досягає кінця лінії, відбивається з тим же рівнем « $-E$ » (оскільки $n_2 = 1$) і починає переміщатися до генератора (позначаємо її $U_{ВІД3}$). Таким чином, напруга у лінії $u(t, x)$ отримується додаванням чотирьох складових $U_{ПАД}$, $U_{ВІД1}$, $U_{ВІД2}$ та $U_{ВІД3}$, які при додаванні дають $u(t, x) = 0$. (рис. 6.67)

$$u(t, x) = U_{ПАД} + U_{ВІД1} + U_{ВІД2} + U_{ВІД3} = E + E - E - E = 0.$$

Напруга наприкінці лінії в момент $t = 3l/v$ стрибком зміниться від $2E$ до нульового рівня. У момент приходу $U_{ВІД3}$ до генератора у всій лінії (крім її початку) встановиться нульовий рівень напруги. На початку лінії $U_{ВІД3}$ з рівнем « $-E$ » знову відіб'ється з інверсією та процеси у лінії повторяться (оскільки ми знову приходимо до рис. 6.64)

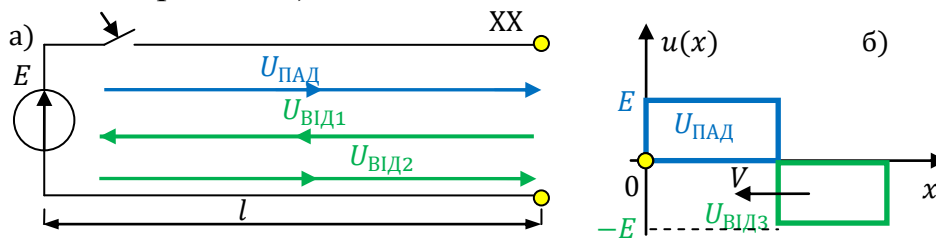


Рисунок 6.67 – Залежності напруг від довжини

Розподіл напруги у часі посередині лінії поданий на рис. 6.68 а розподіл напруги наприкінці лінії на рис. 6.68 б.

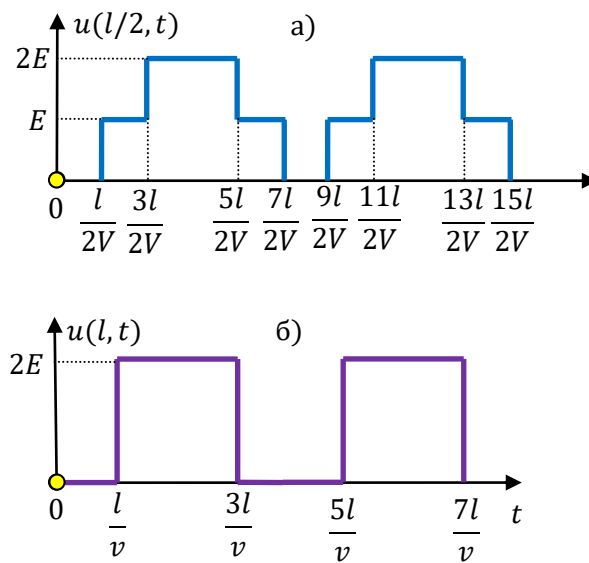


Рисунок 6.68 – Залежності напруг у часі: посередині лінії (а) та наприкінці лінії (б)

6.14.2 Режим короткого замикання

Напруга на вході лінії задається джерелом постійно напруги E (рис. 6.69).



Рисунок 6.69 – Схема лінії у режимі КЗ

Опір джерела напруги дорівнює нулю ($Z_{\Gamma} = 0$), а опір навантаження – нескінченно малий ($Z_{\text{H}} = 0$). Тому коефіцієнти відбиття за напругою на вході лінії та наприкінці лінії визначаються

$$n_1 = n_{U,\Gamma} = \frac{Z_{\Gamma} - Z_{\text{XB}}}{Z_{\Gamma} + Z_{\text{XB}}} = \frac{0 - Z_{\text{XB}}}{0 + Z_{\text{XB}}} = -1;$$

$$n_2 = n_{U,\text{H}} = \frac{Z_{\text{H}} - Z_{\text{XB}}}{Z_{\text{H}} + Z_{\text{XB}}} = \frac{0 - Z_{\text{XB}}}{0 + Z_{\text{XB}}} = -1.$$

Розглянемо проміжки.

1) $0 \leq t < l/v$

Падаюча хвиля $U_{\text{ПАД}}$ із прямокутним фронтом від генератора переміщається без спотворень до навантаження зі швидкістю v (рис. 6.70). Оскільки опір джерела E дорівнює нулю, то всю його напругу прикладено до входу лінії, тобто ця напруга є $u_1(t, 0) = E$. Очевидно, що в кінці лінії ($x = l$) напруги в даному випадку немає.

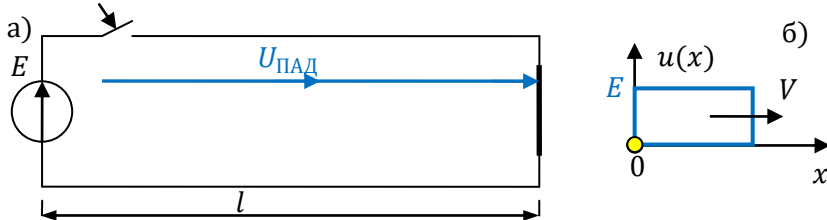


Рисунок 6.70 – Характер проходження хвилі напруги у лінії

2) $l/v \leq t < 2l/v$

У момент часу $t = l/v$ падаюча хвиля з рівнем E досягає кінця лінії, відбивається від навантаження $U_{\text{ВІД1}} = -E$ (оскільки $n_2 = -1$), і починає переміщатися до генератора. Таким чином, у лінії існує дві хвилі $U_{\text{ПАД}}$ та $U_{\text{ВІД1}}$, які в кінці лінії утворюють напругу (рис. 6.71)

$$u_2(t, x) = U_{\text{ПАД}} + U_{\text{ВІД1}} = E - E = 0.$$

Напруга наприкінці лінії у момент $t = l/v$ дорівнює нулю та тримається протягом часу $t = 2l/v$ (поки хвиля не добіжить до генератора та не повернеться назад у кінець лінії).

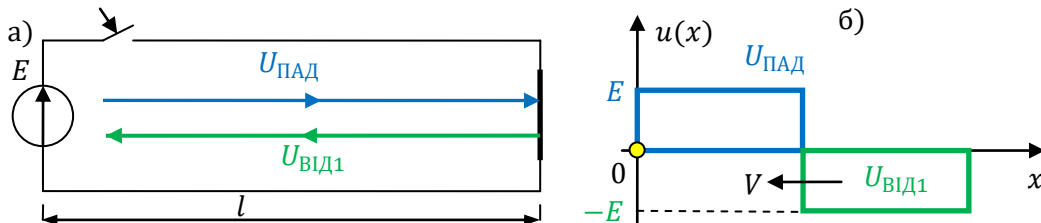


Рисунок 6.71 – Характер проходження хвилі напруги у лінії

3) $2l/v \leq t < 3l/v$

Для даного інтервалу часу характерне існування в лінії трьох хвиль: $U_{\text{ПАД}}$, $U_{\text{ВІД1}}$ та $U_{\text{ВІД2}}$. Хвиля $U_{\text{ВІД2}}$ виходить у результаті відбиття $U_{\text{ВІД1}}$ від початку лінії. Причому вона має рівень $U_{\text{ВІД2}} = E$ (оскільки $n_1 = -1$) і переміщається від генератора до навантаження (рис. 6.72). У місцях додавання цих трьох хвиль у лінії встановлюється результуюча напруга, рівна E (рис. 6.72)

$$u_2(t, x) = U_{\text{ПАД}} + U_{\text{ВІД1}} + U_{\text{ВІД2}} = E - E + E = E.$$

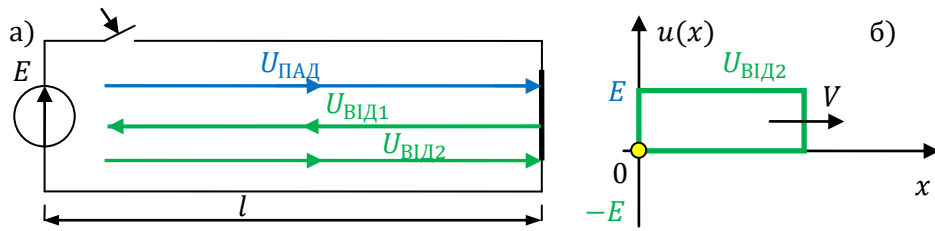


Рисунок 6.72 – Характер проходження хвилі напруги у лінії

Далі процес повторюється аналогічно першому проміжку.

Розподіл напруги у часі посередині лінії поданий на рис. 6.73 а розподіл напруги наприкінці лінії на рис. 6.73 б.

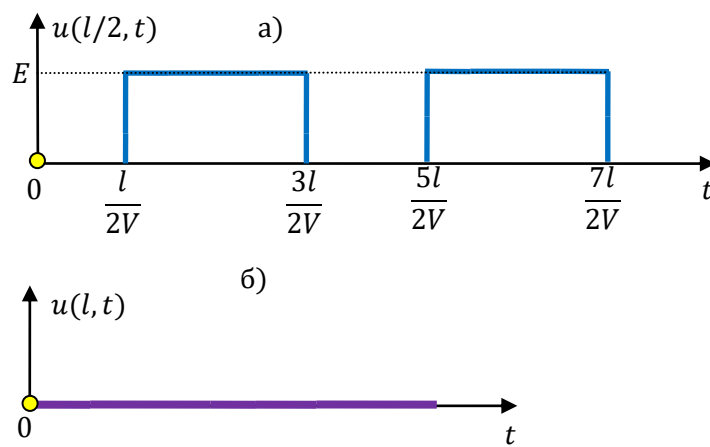


Рисунок 6.73 – Зміна напруг у часі

Розподіл струму посередині та наприкінці лінії поданий на рис. 6.74.

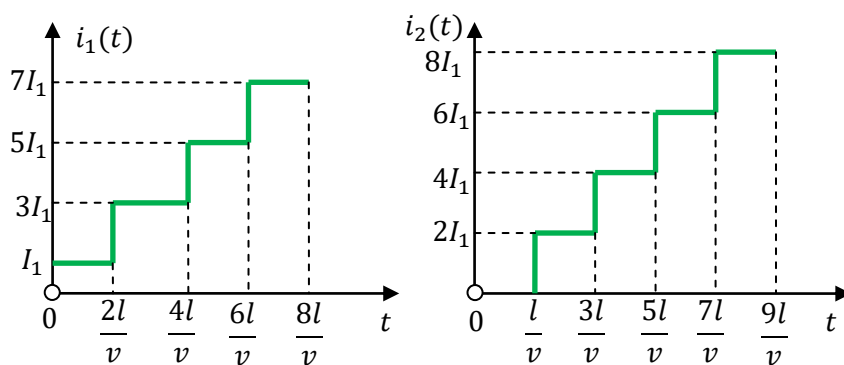


Рисунок 6.74 – Зміна струмів у часі

6.15. Розрахунок перехідних процесів у лінії

Приклад 6.8. У лінії без втрат (рис. 6.70) після комутації знайти та побудувати напругу $u_{\text{ВІД}}(t)$. Вважати, що довжина лінії та швидкість поширення хвилі відомі. На схемі: опір в Ом, ємність в нФ, напруга в В.

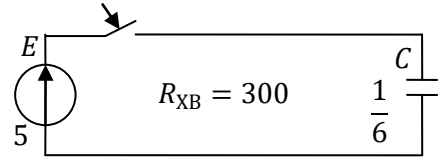


Рисунок 6.70 – Схема довгої лінії

Розв'язання

Хвильовий опір лінії $R_{XB} = 300 \text{ Ом} = 0.3 \text{ кОм}$.

Коефіцієнт відбиття за напругою від навантаження у операторній формі

$$n_u(p) = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{Z_H - R_{XB}}{Z_H + R_{XB}} = \frac{\frac{1}{pC} - R_{XB}}{\frac{1}{pC} + R_{XB}} = \frac{6 - 0.3p}{6 + 0.3p} = \frac{20 - p}{20 + p}.$$

Оскільки падаюча хвиля напруги у часі змінюється $u_{\text{ПАД}}(t) = E$, тоді ця напруга у операторній області запишеться

$$U_{\text{ПАД}}(p) = \frac{E}{p} = \frac{5}{p}.$$

Із виразу коефіцієнту відбиття за напругою визначаємо операторну відбиту напругу

$$U_{\text{ВІД}}(p) = U_{\text{ПАД}}(p) \cdot n_u(p) = \frac{5}{p} \cdot \frac{20 - p}{20 + p}.$$

За теоремою розкладання

$$U_{\text{ВІД}}(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 20}.$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках

$$A_1 = 5 \cdot \left. \frac{20 - p}{20 + p} \right|_{p=0} = 5; \quad A_2 = 5 \cdot \left. \frac{20 - p}{p} \right|_{p=-20} = -10.$$

Отже,

$$U_{\text{ВІД}}(p) = \frac{5}{p} - \frac{10}{p + 20}.$$

Відбита напруга (рис. 6.71)

$$u_{\text{ВІД}}(t) = 5 - 10e^{-20t} \text{ В.}$$

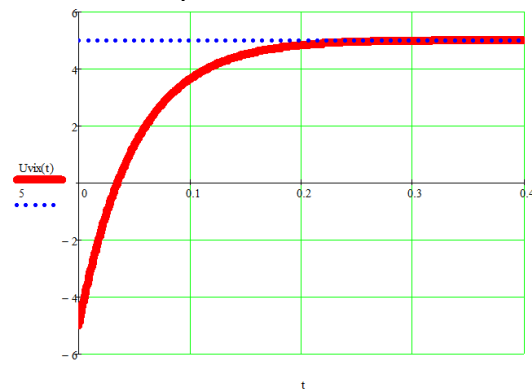


Рисунок 6.71 – Графік зміни відбитої напруги у часі

Відповідь: $u_{\text{ВІД}}(t) = 5 - 10e^{-20t} \text{ В.}$

Приклад 6.9. У лінії без втрат (рис. 6.72) після комутації знайти та побудувати напругу $u_{\text{ВІД}}(t)$. Вважати, що довжина лінії та швидкість поширення хвилі відомі. На схемі: опір в Ом, індуктивність в мГн, ємність в нФ, напруга в В.

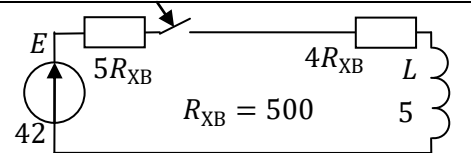


Рисунок 6.72 – Схема довгої лінії

Розв'язання

Поки хвиля не досягла навантаження, вона буде відчувати хвильовий опір, при поширенні. Схема заміщення є на рис. 6.73.

За формулою дільника напруги

$$U_{\text{ПАД}} = E \frac{R_{\text{XB}}}{R_{\text{XB}} + 5R_{\text{XB}}} = \frac{E}{6} = \frac{42}{6} = 7 \text{ В.}$$

Падаюча напруга у операторній області

$$U_{\text{ПАД}}(p) = \frac{7}{p}$$

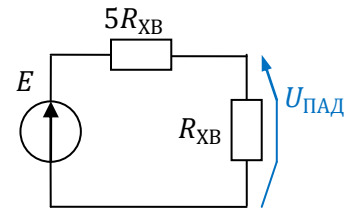


Рисунок 6.73 - Схема

Хвильовий опір лінії $R_{\text{XB}} = 500 \text{ Ом} = 0.5 \text{ кОм}$.

Операторний коефіцієнт відбиття за напругою

$$\begin{aligned} n_u(p) &= \frac{U_{\text{ВІД}}(p)}{U_{\text{ПАД}}(p)} = \frac{Z_H - R_{\text{XB}}}{Z_H + R_{\text{XB}}} = \frac{(pL + 4R_{\text{XB}}) - R_{\text{XB}}}{(pL + 4R_{\text{XB}}) + R_{\text{XB}}} = \frac{pL + 3R_{\text{XB}}}{pL + 5R_{\text{XB}}} = \\ &= \frac{5p + 3 \cdot 0.5}{5p + 5 \cdot 0.5} = \frac{p + 0.3}{p + 0.5}. \end{aligned}$$

Із виразу коефіцієнту відбиття за напругою за теоремою розкладання

$$U_{\text{ВІД}}(p) = U_{\text{ПАД}}(p) \cdot n_u(p) = \frac{7}{p} \cdot \frac{p + 0.3}{p + 0.5}.$$

за теоремою розкладання

$$U_{\text{ВІД}}(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 0.5}.$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках

$$A_1 = \left. \frac{7 \cdot (p + 0.3)}{p + 0.5} \right|_{p=0} = 4.2; \quad A_2 = \left. \frac{7 \cdot (p + 0.3)}{p} \right|_{p=-0.5} = 2.8.$$

Операторна напруга

$$U_{\text{ВІД}}(p) = \frac{4.2}{p} + \frac{2.8}{p + 0.5}.$$

За таблицею перетворення Лапласа (рис. 2.38)

$$u_{\text{ВІД}}(t) = 4.2 + 2.8e^{-0.5t} \text{ В.}$$

Побудуємо графік відбитої напруги у часі (рис. 6.74).

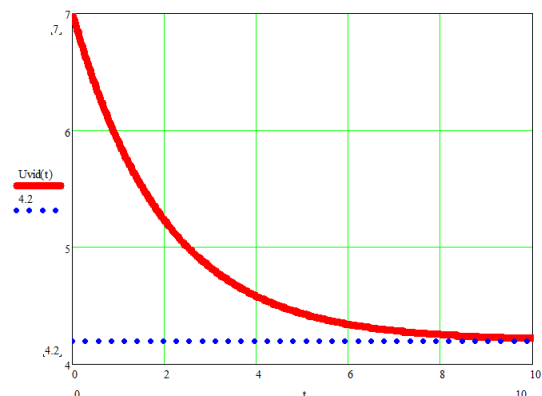


Рисунок 6.74 – Графік зміни відбитої напруги у часі

Відповідь: $u_{\text{ВІД}}(t) = 4.2 + 2.8e^{-0.5t} \text{ В.}$

7. РОЗРАХУНОК ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

Приклад 7.1. У колі (рис. 7.1) визначити струм I_1 , що викликаний усіма джерелами. Струми, що викликані джерелом E_1 дорівнюють $I_{1a} = 1$ мА, $I_{2a} = 0.4$ мА, $I_{3a} = 0.6$ мА. Числові значення елементів кола: опори – кОм, струм – мА, напруга – В.

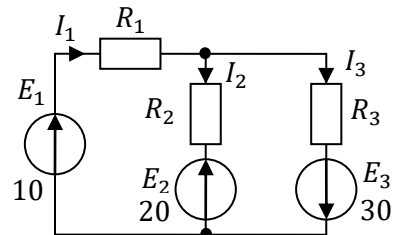
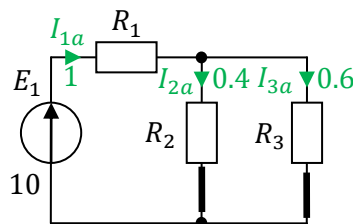


Рисунок 7.1 – Схема

Розв'язання

Коло (рис. 7.1) під дією лише джерела E_1 (рис. 7.2)

Рисунок 7.2 – Схема лише із джерелом E_1

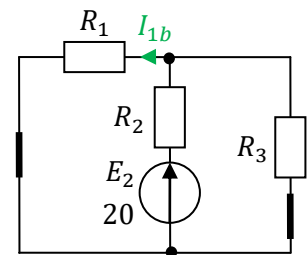
Коло (рис. 7.1) під дією лише джерела E_2 (рис. 7.3).

За принципом взаємності запишемо (рис. 7.3)

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{I_{2a}}{I_{1b}}$$

Звідси визначимо

$$I_{1b} = I_{2a} \cdot \frac{E_2}{E_1} = 0.4 \cdot \frac{20}{10} = 0.8 \text{ мА.}$$

Рисунок 7.3 – Схема лише із джерелом E_2

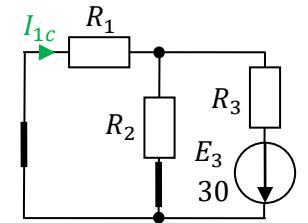
Коло (рис. 7.1) під дією лише джерела E_3 (рис. 7.4).

За принципом взаємності запишемо (рис. 7.4)

$$\frac{E_1}{E_3} = \frac{I_{3a}}{I_{1c}}$$

Звідси визначимо

$$I_{1c} = I_{3a} \cdot \frac{E_3}{E_1} = 0.6 \cdot \frac{30}{10} = 1.8 \text{ мА.}$$

Рисунок 7.4 – Схема лише із джерелом E_3

За принципом суперпозиції для кола (рис. 7.1)

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} + I_{1c} = 1 + 1.8 - 0.8 = 2 \text{ мА.}$$

Відповідь: $I_1 = 2$ мА.

Приклад 7.2. У колі (рис. 7.5) визначити величину джерела напруги E . Джерело струму J працює в режимі споживання енергії і споживана ним потужність дорівнює $P_J = 10$ Вт. Числові значення елементів кола: опори – кОм, струм – мА, напруга – В.

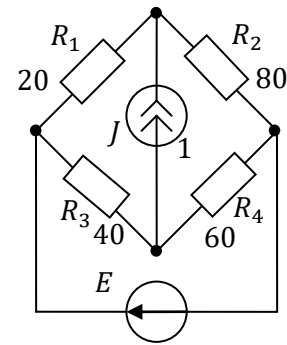


Рисунок 7.5 – Схема

Розв'язання

Оскільки джерело струму є споживачем енергії, то потужність визначається (рис. 7.6 а) $P_J = U_J \cdot J < 0$.

Звідси визначимо

$$U_J = \frac{P_J}{J} = \frac{10}{1} = 10 \text{ В.}$$

Розв'яжемо задачу методом еквівалентного генератора. У колі (рис. 7.6 а) від'єднаємо джерело струму J (рис. 7.6 б).

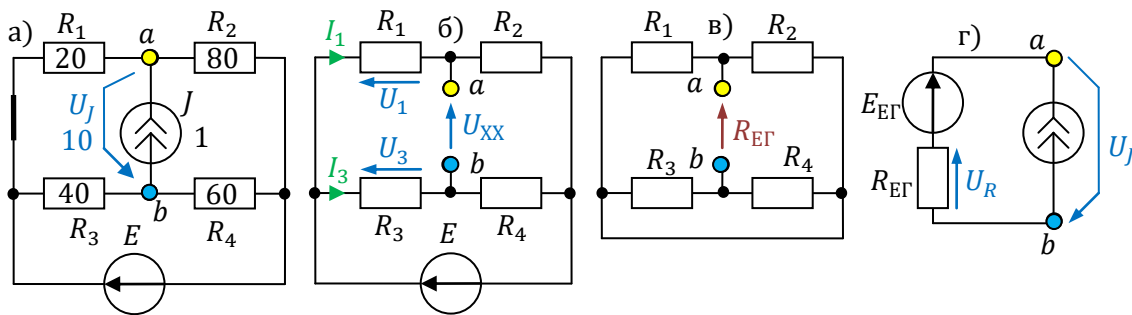


Рисунок 7.6 – Еквівалентні схеми

У колі (рис. 7.6 б) за законом Ома

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{E}{20 + 80} = \frac{E}{100}; \quad I_3 = \frac{E}{R_3 + R_4} = \frac{E}{40 + 60} = \frac{E}{100};$$

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 20 \cdot \frac{E}{100} = 0.2E; \quad U_3 = I_3 \cdot R_3 = 40 \cdot \frac{E}{100} = 0.4E.$$

За другим законом Кірхгофа (рис. 7.6 б)

$$E_{\text{ЕГ}} = U_{\text{XX}} = U_3 - U_1 = 0.4E - 0.2E = 0.2E.$$

У колі (рис. 7.6 б) замінімо джерело E його внутрішнім опором, тобто «закороткою» (рис. 7.6 в) і визначимо опір еквівалентного генератора

$$R_{\text{ЕГ}} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{40 \cdot 60}{100} + \frac{20 \cdot 80}{100} = 24 + 16 = 40 \text{ кОм.}$$

Представимо коло (рис. 7.6 а) відносно джерела J еквівалентним генератором (рис. 7.6 г) і запишемо другий закон Кірхгофа

$$U_J + U_R + E_{\text{ЕГ}} = 10 + 40 + 0.2E = 0.$$

Звідси визначимо

$$E = -50/0.2 = -250 \text{ В.}$$

Відповідь: $E = -250 \text{ В.}$

Приклад 7.3. У колі (рис. 7.7) визначити R , Z_C та Z . Потужності на активних елементах: $P_1 = P_2 = 8$ мВт, напруга $u_1 = 4$ В. Числові значення елементів: $J = 4$ мА, $X_L = 2$ кОм.

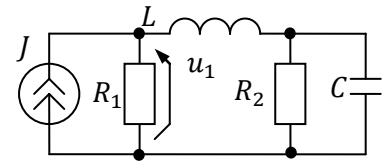


Рисунок 7.7 – Схема

Розв'язання

Потужності активного споживачів

$$P_1 = |I|^2 R_1 = \frac{|U_1|^2}{R_1} = 8.$$

Звідси активний опір

$$R_1 = \frac{|U_1|^2}{P_1} = \frac{4^2}{8} = \frac{16}{8} = 2 \text{ кОм.}$$

За законом Ома струм у першому опорі

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ мА.}$$

За першим законом Кірхгофа

$$I_L = J - I_1 = 4 - 2 = 2 \text{ мА.}$$

За законом Ома $U_L = I_L X_L = 2 \cdot 2 = 4$ В.

Із векторної діаграми напруг (рис. 7.8)

$$U_L = \sqrt{U_L^2 + U_1^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ В.}$$

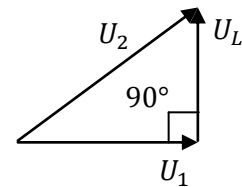


Рисунок 7.8 – Векторна діаграма напруг

Потужності активного споживачів

$$P_2 = |I|^2 R_2 = \frac{|U_2|^2}{R_2} = 8.$$

Звідси активний опір

$$R_2 = \frac{|U_2|^2}{P_2} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{8} = \frac{32}{8} = 4 \text{ кОм.}$$

Для паралельних елементів $U_2 = U_C = 4\sqrt{2}$ В.

Потужність джерела струму

$$P_J = J U_1 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ Вт.}$$

Із закону балансу потужності

$$P_J = P_1 + P_2 = 8 + 8 = 16 \text{ Вт.}$$

Оскільки потужність джерела струму P_J активна, то реактивні потужності ємності та індуктивності повинні компенсуватися. Таким чином, $Q_L = -Q_C$.

Потужність на індуктивності $Q_L = I_L^2 X_L = 2^2 \cdot 2 = 8$ мВар.

Тоді потужність на ємності $Q_C = -Q_L = -8$ мВар.

Потужність на ємності

$$Q_C = \frac{U_C^2}{X_C}, X_C = \frac{U_C^2}{Q_C} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{-8} = \frac{32}{-8} = -4 \text{ кОм.}$$

Відповідь: $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 4$ кОм, $Z_C = -4j$ кОм.

Приклад 7.4. У колі (рис. 7.9) визначити значення ємностей C_1 та C_2 . Значення еквівалентної ємності послідовного з'єднання C_1 та C_2 становить $C_E = 800$ пФ. Напруга контуру на резонансній частоті є $U_K(0) = 2$ В. Числові значення елементів подані на схемі. Опори R_1 та R_4 задані в кОм, опори r_1 та r_2 задані в Ом, індуктивності в мГн, напруга у В.

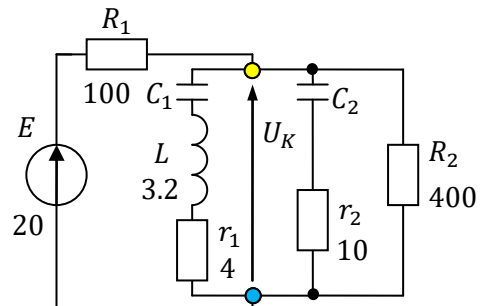


Рисунок 7.9 – Схема

Розв'язання

Отже, $C_E = 800$ пФ = 0.8 нФ

Характеристичний опір контуру

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C_E}} = \sqrt{\frac{3.2}{0.8}} = 2 \text{ кОм.}$$

Внесені опори з боку навантаження та генератора

$$r_{BH1} = \frac{p^2 \cdot \rho^2}{R_1} = \frac{p^2 \cdot 4}{100} = 0.04 \cdot p^2;$$

$$r_{BH2} = \frac{p^2 \cdot \rho^2}{R_2} = \frac{p^2 \cdot 4}{400} = 0.01 \cdot p^2.$$

Активний опір контуру (рис. 7.10, кОм)

$$Z(0) = r_1 + r_2 + r_{BH1} + r_{BH2} = 0.004 + 0.01 + 0.04 \cdot p^2 + 0.01 \cdot p^2 = 0.014 + 0.05 \cdot p^2.$$

Напруга контуру на резонансній частоті

$$U_K(0) = J \cdot p^2 Q \cdot \rho = \frac{J \cdot p^2 \rho^2}{Z(0)} = \frac{0.2 \cdot 2^2 \cdot p^2}{0.014 + 0.05 \cdot p^2} = 2 \text{ В.}$$

Звідси одержуємо рівняння

$$0.4 \cdot p^2 = 0.014 + 0.05 p^2.$$

Звідси визначимо

$$p = \sqrt{\frac{0.014}{0.35}} = 0.2$$

Коефіцієнт включення та еквівалентна ємність

$$p = \frac{X_{C2}}{X_{C1} + X_{C2}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 0.2;$$

$$C_E = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 0.8.$$

Звідси визначимо $C_1 = 1$ нФ, тоді $C_2 = 4$ нФ.

Відповідь: $C_1 = 1$ нФ, $C_2 = 4$ нФ.

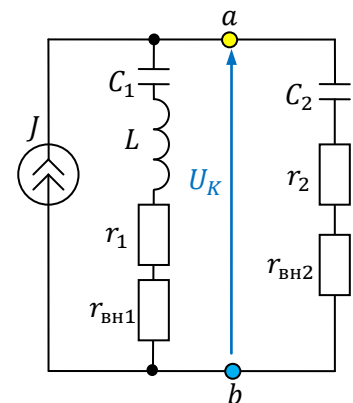


Рисунок 7.10 – Схема

Приклад 7.5. У колі (рис. 7.11) якщо на вихід підключити ідеальне джерело струму, то $R_{\text{ВХ}} = 4$ кОм. Якщо те ж джерело підключити на вхід системи, то її $R_{\text{ВІХ}} = 5$ кОм. Підключивши на вихід системи ідеальне джерело напруги, отримаємо $R_{\text{ВХ}} = 1$ кОм. Яким буде вхідний опір кола $R_{\text{ВХ}}$, якщо на її вихід підключити $R_{\text{Н}} = 5$ кОм.

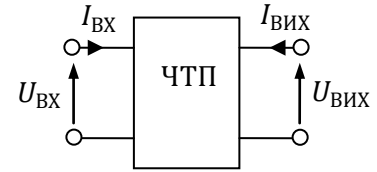


Рисунок 7.11 – Схема

Розв'язання

Якщо на вихід підключити ідеальне джерело струму (рис. 7.12 а), то $R_{\text{ВХ}} = 4$ кОм, то це можна трактувати як параметр Z_{11} , оскільки його внутрішній опір $r_j = \infty$, що співпадає з режимом холостого ходу з боку виходу.

Якщо на вхід підключити ідеальне джерело струму (рис. 7.12 б), то її $R_{\text{ВІХ}} = 5$ кОм, то це можна трактувати як параметр Z_{22} , оскільки внутрішній опір такого джерела $r_j = \infty$, що співпадає з режимом холостого ходу з боку входу.

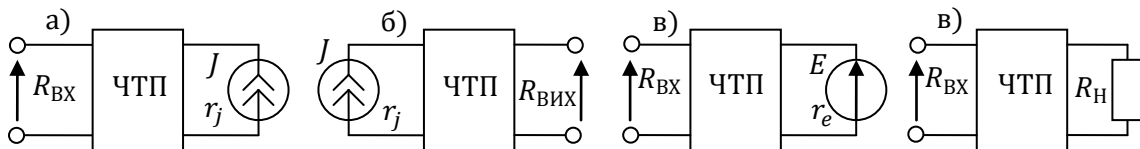


Рисунок 7.12 – Схеми вимірювання чотириполосників

Якщо на вихід системи підключити ідеальне джерело напруги (рис. 7.12 в), отримаємо $R_{\text{ВХ}} = 1$ кОм, це можна трактувати, як режим короткого замикання на виході, оскільки внутрішній опір такого джерела $r_e = 0$. Замінімо такий чотириполосник схемою заміщення Z -параметрів (рис. 7.13 а)

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2. \end{cases}$$

Звідси визначимо вхідний опір за умовою

$$R_{\text{ВХ}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{4 \cdot 5 - Z_{12} \cdot Z_{21}}{5} = \frac{20 - Z_{12} \cdot Z_{21}}{5} = 1$$

Звідси визначимо

$$Z_{12} \cdot Z_{21} = 20 - 5 = 15.$$

Якщо на її вихід підключити $R_{\text{Н}} = 5$ кОм, тоді вхідний опір (рис. 7.13 б)

$$R_{\text{ВХ}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{Z_{11} \cdot (Z_{22} + R_{\text{Н}}) - Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{22} + R_{\text{Н}}} = \frac{4 \cdot (5 + 5) - 15}{5 + 5} = \frac{40 - 15}{10} = 2.5 \text{ кОм.}$$

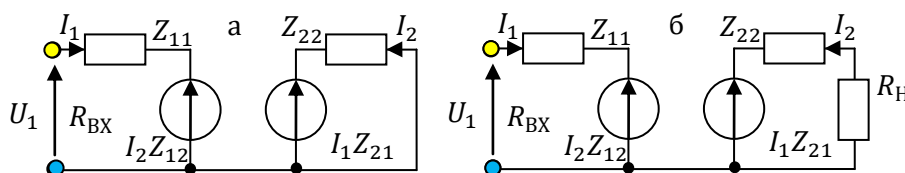


Рисунок 7.13 – Еквівалентні схеми

Відповідь: $R_{\text{ВХ}} = 2.5$ кОм.

Задача 7.6. У колі (рис. 7.14) визначити опір R_Γ . Z -параметри чотириполюсника становлять

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ кОм.}$$

Струми у схемах пов'язані виразом $\dot{I}_{2b} = I_{2a} - 1 \text{ [мА]}$. На схемі: опори в кОм, напруги в В, струми в мА.

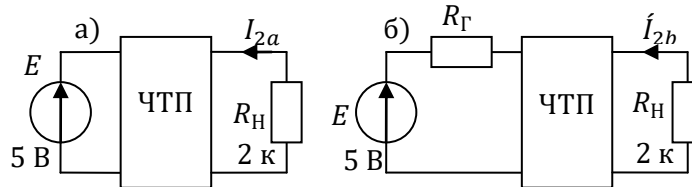


Рисунок 7.14 – Початкові схеми чотириполюсників

Розв'язання

Система рівнянь на основі методу контурних струмів (рис. 7.15)

$$\begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} + R_H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

Підставимо числові значення

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ -2 & 2 + 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

За методом Крамера визначимо струм

$$I_{2a} = I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{10}{4 + 1} = \frac{10}{5} = 2 \text{ мА.}$$

Система рівнянь на основі методу контурних струмів (рис. 7.16)

$$\begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} + R_\Gamma & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} + R_H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

Підставимо числові значення

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + R_\Gamma & 0.5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}.$$

За методом Крамера визначимо струм

$$I_{2b} = I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 + R_\Gamma & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + R_\Gamma & 0.5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{10}{4(1 + R_\Gamma) + 1} = \frac{10}{5 + 4R_\Gamma}.$$

За умовою задачі $I_{2b} = I_{2a} - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ мА}$.

Таким чином, одержимо

$$\frac{10}{5 + 4R_\Gamma} = 1.$$

Спростимо рівняння $5 + 4R_\Gamma = 10$.

Звідси визначимо $R_\Gamma = 5/4 = 1.25 \text{ кОм}$.

Відповідь: $R_\Gamma = 1.25 \text{ кОм}$.

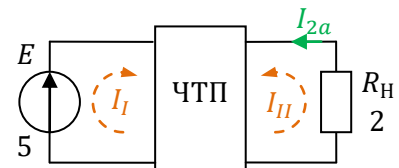


Рисунок 7.15 – Схема із напрямками струмів

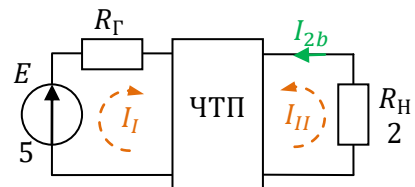


Рисунок 7.16 – Схема із напрямками струмів

Приклад 7.7. У колі (рис. 7.17) визначити скільки енергії отримає джерело напруги E_2 під час перехідного процесу. Ключ перемикається миттєво. Опори в кОм, індуктивності в мГн, напруги в В.

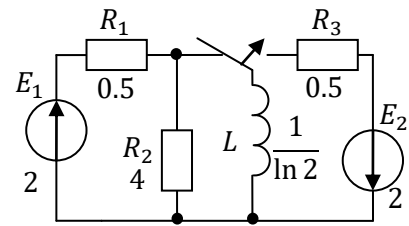


Рисунок 7.17 – Схема

Розв'язання

Схема до комутації на постійному струмі (рис. 7.18 а)

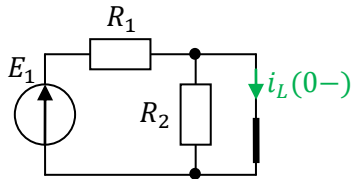


Рисунок 7.18 – Схема до комутації на постійному струмі

Струм в індуктивності до комутації

$$i_L(0-) = \frac{E_1}{R_1} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ мА.}$$

За першим законом комутації

$$i_L(0-) = i_L(0) = 4 \text{ мА.}$$

Зобразимо операторне коло після комутації (рис. 7.19).

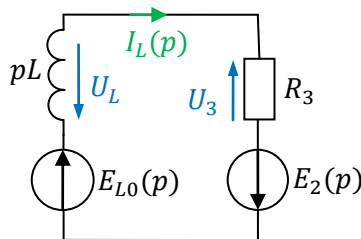


Рисунок 7.19 - Операторна схема заміщення

Визначимо операторні джерела

$$E_{L0}(p) = L \cdot i_L(0) = \frac{-4}{\ln(2)};$$

$$E_2(p) = \frac{2}{p}.$$

За операторним законом Ома

$$I_L(p) = \frac{E_L(p) + E_2(p)}{R_3 + pL} = \frac{\frac{-4}{\ln(2)} + \frac{2}{p}}{0,5 + \frac{p}{\ln(2)}} = \frac{-4 + \frac{2 \ln(2)}{p}}{0,5 \ln(2) + p} = \frac{-4p + 2 \ln(2)}{p[0,5 \ln(2) + p]}$$

За теоремою розкладання

$$I_L(p) = \frac{-4p + 2 \ln(2)}{p(p + 0,5 \ln(2))} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 0,5 \ln(2)}.$$

Коефіцієнти при лишках функції у особливих точках

$$A_1 = \left. \frac{-4p + 2 \ln(2)}{p + 0,5 \ln(2)} \right|_{p=0} = \frac{2}{0,5} = 4;$$

$$A_2 = \left. \frac{-4p + 2 \ln(2)}{p} \right|_{p=-0,5 \ln(2)} = \frac{2 \ln(2) + 2 \ln(2)}{-0,5 \ln(2)} = \frac{4}{-0,5} = -8.$$

Отже, запишемо струм

$$I_L(p) = \frac{4}{p} - \frac{8}{p + 0.5 \ln(2)}.$$

Тоді струм у часовій формі за таблицею Лапласа (рис. 7.20)

$$i_L(t) = 4 - 8e^{-0.5t \ln 2}.$$

Струм в індуктивності до та після комутації (рис. 7.20)

$$i_L(t) = \begin{cases} 4 - 8e^{-0.5t \ln 2}, & t \geq 0 \\ -4, & t < 0 \end{cases}$$

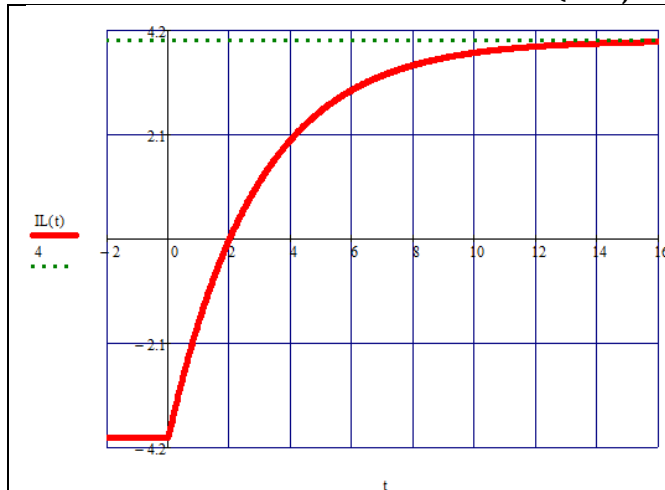


Рисунок 7.20

Оскільки при $P_{E2} > 0$ джерело напруги E_2 віддає енергію у коло, а при $P_{E2} < 0$ джерело напруги E_2 споживає (отримує енергію) із кола. Таким чином, для того щоб джерело споживало енергію із кола необхідно, щоб напрямки струму $i_L(t)$ та напруги через це джерело E_2 були протилежні. Оскільки необхідно розрахувати енергію джерела E_2 під час перехідного процесу, то необхідно розглянути проміжок часу від 0 до точки перетину струму $i_L(t)$ із віссю часу.

Визначимо цю точку перетину

$$4 - 8e^{-0.5t \ln 2} = 0.$$

Розв'яжемо одержали рівняння

$$e^{-0.5t \ln 2} = \frac{4}{8} = 0.5; \rightarrow -0.5 \ln(2) \cdot t = \ln(0.5)$$

Звідси визначимо час

$$t = -2 \frac{\ln(0.5)}{\ln(2)} = 2 \text{ мкс.}$$

Енергія джерела

$$\begin{aligned} W_{E2} &= \int_0^{\infty} P_{E2} dt = \int_0^{\infty} E_2 i_L(t) dt = 2 \int_0^2 (4 - 8e^{-0.5t \ln 2}) dt = \\ &= 2 \cdot \left(4t - \frac{8}{-0.5 \ln(2)} e^{-0.5t \ln 2} \right) \Big|_0^2 = 2 \cdot \left(4t + \frac{16}{\ln(2)} e^{-0.5t \ln 2} \right) \Big|_0^2 = \\ &= 2 \cdot \left(8 + \frac{16}{\ln(2)} e^{-\ln 2} - \frac{16}{\ln(2)} \right) = 2 \cdot \left(8 + \frac{16 \cdot 0.5 - 16}{\ln(2)} \right) = 16 \left(1 - \frac{1}{\ln(2)} \right) = \\ &= 16 \cdot (-0.443) \cong -7 \text{ мДж.} \end{aligned}$$

Відповідь: $W_{E2} = -7 \text{ мДж.}$

Приклад 7.8. У колі (рис. 7.21) операторним методом знайти струми I_1 , I_2 , I_3 в індуктивностях, що установляться після завершення перехідного процесу. Ключ замикається при нульових початкових умовах. Числові значення елементів наведені на схемі: опори в кОм, індуктивності в мГн, напруга в В.

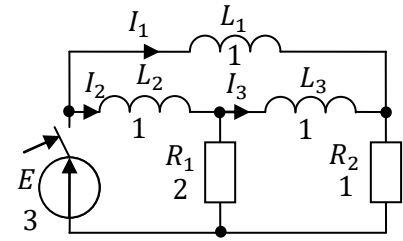


Рисунок 7.21 – Схема

Розв'язання

Перший спосіб

Зобразимо схему після комутації на постійному струмі (рис. 7.22).

За законом Ома

$$I_{R1} = \frac{E}{R_1} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ мА};$$

$$I_{R2} = \frac{E}{R_2} = \frac{3}{1} = 3 \text{ мА}.$$

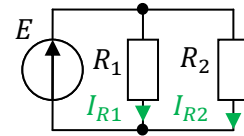


Рисунок 7.22 – Схема

Для операторного кола після комутації (рис. 7.23) складемо матрицю опорів за МКС

$$Z = \begin{bmatrix} pL_1 + pL_2 + pL_3 & -pL_2 & -pL_3 \\ -pL_2 & pL_2 + R_1 & -R_2 \\ -pL_3 & -R_2 & pL_1 + R_1 + R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p & -p & -p \\ -p & p + 2 & -2 \\ -p & -2 & p + 3 \end{bmatrix}.$$

Порахуємо визначник

$$\begin{aligned} \Delta &= 3p \cdot \begin{vmatrix} p+2 & -2 \\ -2 & p+3 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} -p & -2 \\ -p & p+3 \end{vmatrix} - p \begin{vmatrix} -p & p+2 \\ -p & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 3p \cdot [p^2 + 5p + 6 - 4] + p[-p^2 - 3p - 2p] - p[p^2 + 2p + 2p] = \\ &= 3p^3 + 15p^2 + 6p - p^3 - 5p^2 - p^3 - 4p^2 = p^3 + 6p^2 + 6p. \end{aligned}$$

Визначимо алгебраїчні доповнення

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} -p & -p \\ -2 & p+3 \end{vmatrix} = -p^2 - 3p - 2p = -p^2 - 5p.$$

Передавальна провідність

$$Y_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = \frac{(-1)^{2+1}(-p^2 - 5p)}{p^3 + 6p^2 + 6p} = \frac{p^2 + 5p}{p^3 + 6p^2 + 6p} = \frac{p + 5}{p^2 + 6p + 6}.$$

Передавальна провідність при $p \rightarrow 0$

$$Y_{21} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p + 5}{p^2 + 6p + 6} = \frac{5}{6}.$$

Струм в індуктивності

$$I_1 = E \cdot Y_{21} = 3 \cdot \frac{5}{6} = 2.5 \text{ мА}.$$

Інші струми за першим законом Кірхгофа

$$I_3 = I_{R2} - I_1 = 3 - 2.5 = 0.5 \text{ мА};$$

$$I_2 = I_{R1} + I_3 = 1.5 - 0.5 = 2 \text{ мА}.$$

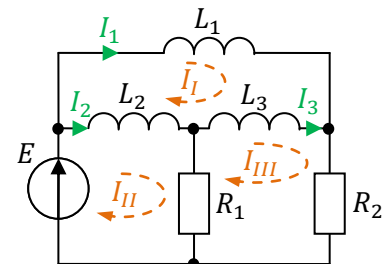


Рисунок 7.23 – Схема

Відповідь: $I_1 = 2 \text{ мА}$, $I_2 = 2.5 \text{ мА}$, $I_3 = 0.5 \text{ мА}$.

Приклад 7.9. У колі (рис. 7.24) комутація відбувається в момент часу $t = 0$. Знайти струм, що протікає у резисторі R_2 при $t \geq 0$.

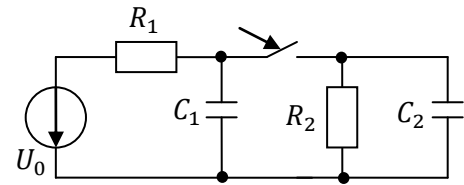


Рисунок 7.24 – Схема

Розв'язання

Перший спосіб

Коло після комутації (рис. 7.25 а) еквівалентними перетвореннями зведемо до одноконтурного (рис. 7.25 в). У колі (рис. 7.25 а) перетворимо джерело напруги у джерело струму (рис. 7.25 б)

$$J = \frac{U_0}{R_1}.$$

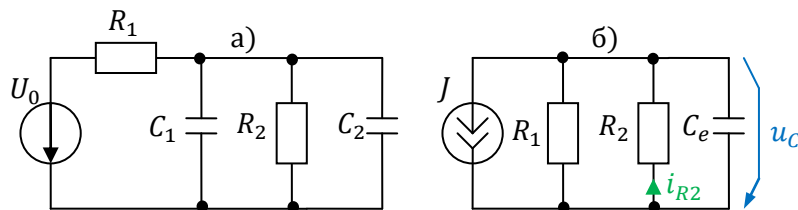


Рисунок 7.25 – Еквівалентні схеми

Еквівалентні параметри

$$C_e = (C_1 + C_2); \quad R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

У колі (рис. 7.25 а) перетворимо джерело струму у джерело напруги (рис. 7.25 б)

$$E_e = R_e \cdot J = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{U_0}{R_1} = \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

У колі (рис. 7.25 б) за другим законом Кірхгофа

$$E_e = u_C + u_{R_e} = C_e R_e \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Розв'язок рівняння

$$u_C(t) = u_{C.\text{вим}} + u_{C.\text{віл}}(t).$$

Вимушена складова

$$u_{C.\text{вим}} = E_e = \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Вільна складова

$$u_{C.\text{віл}}(t) = A e^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$p C_e R_e + 1 = 0$$

Корінь рівняння

$$p = -\frac{1}{C_e \cdot R_e} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot (C_1 + C_2)} = -\frac{1}{\tau_e}.$$

Зобразимо коло (рис. 7.24) до комутації на постійному струмі (рис. 7.26 в)

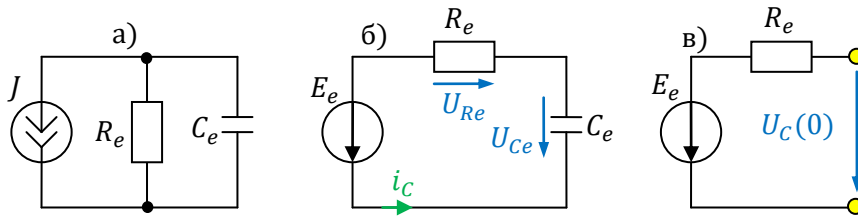


Рисунок 7.26 – Еквівалентні схеми

У колі (рис. 7.26 в)

$$u_C(0-) = U_0.$$

За другим узагальненим законом комутації

$$u_C(0-) \cdot C_1 = u_C(0+)(C_1 + C_2).$$

Звідси визначимо

$$u_C(0+) = \frac{u_C(0-) \cdot C_1}{C_1 + C_2} = \frac{U_0 \cdot C_1}{C_1 + C_2}.$$

Загальний розв'язок

$$u_C(t) = \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + A e^{-t/\tau_e}, \quad t \geq 0.$$

Розв'язок у нульовий момент часу

$$u_C(0) = \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + A.$$

За другим законом комутації

$$u_C(0) = u_C(0+).$$

Звідси стала інтегрування

$$A = u_C(0) - \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_0 \cdot C_1}{C_1 + C_2} - \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = U_0 \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right).$$

Тоді розв'язок

$$u_C(t) = \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + U_0 \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-t/\tau_e}.$$

За законом Ома (рис. 7.24 б)

$$i_2(t) = \frac{u_C(t)}{R_2} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} + \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot \frac{U_0}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_e}}.$$

Відповідь: $i_{R2}(t) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} + \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot \frac{U_0}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_e}}, \quad \tau_e = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot (C_1 + C_2)}.$

8. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

Розділ містить питання для підготовки до іспиту з теорії.

1. Основні поняття теорії кіл.
2. Пасивні та активні елементи електричних кіл.
3. Основні закони електричних кіл.
4. Еквівалентні перетворення пасивних елементів електричних кіл.
5. Еквівалентні перетворення джерел електричних кіл.
6. Метод контурних струмів: алгоритм методу та його доведення, врахування керованих джерел.
7. Метод вузлових напруг: алгоритм методу та його доведення, врахування керованих джерел.
8. Принцип суперпозиції, принцип взаємності та теорема компенсації.
9. Теорема про еквівалентний генератор.
10. Гармонічний струм: основні поняття. Визначити середнє та діюче значення.
11. Метод комплексних амплітуд. Основні дії над комплексними числами. Комплексна функція та дії з нею.
12. Пасивні елементи у колах гармонічного струму.
13. Послідовне та паралельне з'єднання елементів у колах гармонічного струму. Комплексний опір та провідність.
14. Закони Ома та Кірхгофа у комплексній формі.
15. Гармонічна та комплексна форми потужності. Баланс потужностей. Добротність гілки.
16. Передача максимальної потужності у навантаження у колах гармонічного струму.
17. Побудова векторних діаграм.
18. Кола з індуктивно зв'язаними елементами. Особливості їх розрахунку.
19. Трансформатор у колах гармонічного струму: двоконтурна трансформаторна схема та ідеальний трансформатор.
20. Основні параметри послідовного контуру. Векторна діаграма на резонансній частоті.
21. Частотні характеристики послідовного контуру: $Z_{BX}(\omega)$, $I(\omega)$, $U(\omega)$. Види розстройки. Смуга пропускання.
22. Аналіз передавальних характеристик послідовного контуру.
23. Вплив генератора на характеристики контуру та способи його зменшення. Внесений опір.
24. Основні параметри паралельного контуру. Векторна діаграма на резонансній частоті.
25. Частотні характеристики паралельного контуру: канонічної форми $Y_{BX}(\omega)$, $I(\omega)$, $U(\omega)$. Вхідний опір $Z_{BX}(\xi)$, його дійсна та уявна складові. Види паралельних контурів.

26. Частотні характеристики послідовного контуру першого, другого, третього виду. Векторна діаграма.
27. Точне значення резонансної частоти послідовного та паралельного контурів.
28. Поняття про схемні функції та їх види.
29. Визначення схемних функцій за матрицею опорів та провідностей.
30. Побудова частотних характеристик за картою нулів та полюсів.
31. Поняття про чотириполусники та їх класифікація. Режими роботи чотириполусників. Системи параметрів чотириполусників.
32. Зв'язок між параметрами чотириполусника (між Y та Z ; між Y та h).
33. Схеми заміщення параметрів чотириполусників та їх фізичний зміст (Z -параметрів, Y -параметрів, h -параметрів).
34. Схеми з'єднання чотириполусників, визначення їх загальних параметрів.
35. Поняття про комутації та перехідний процес. Закони комутації та їх доведення. Наслідки із законів комутації.
36. Класичний метод розрахунку перехідних процесів: загальна методика, поняття про вільний та вимушений режими.
37. Увімкнення RL - та RC -кола під постійну напругу. Поняття про сталу часу кола.
38. Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі. Операторні схеми заміщення елементів.
39. Знаходження оригіналу: загальна методика та теорема розкладання для простих коренів.
40. Операторний метод: перетворення Лапласа та основні властивості Лапласа.
41. Функції Дірака та Хевісайда та їх властивості. Часові характеристики кола та їх розрахунок. Часовий метод розрахунку перехідних процесів.
42. Кола із розподіленими параметрами та їх класифікація. Телеграфні рівняння та їх виведення.
43. Первинні та вторинні параметри довгої лінії.
44. Розв'язок телеграфних рівнянь від початку лінії. Аналіз рівнянь передачі: падаюча та відбита хвилі. Довжина хвилі та фазова швидкість.
45. Розв'язок телеграфних рівнянь від кінця лінії: аналіз рівнянь передачі від кінця лінії.
46. Побудова амплітуд розподілу напруги та струму вздовж лінії. Визначення відстані до першого по порядку мінімуму та максимуму.
47. Рівняння лінії як чотириполусника.
48. Режим біжних хвиль: лінія без спотворень та втрат та лінія навантажена на хвильовий опір.
49. Режим стійних хвиль лінії без втрат: режим холостого ходу та короткого замикання, лінія навантажена на реактивний опір.
50. Режим змішаних хвиль.
51. Способи узгодження лінії із навантаженням.
52. Перехідні процеси в лініях.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Основи теорії кіл: Підручник для вищих навчальних закладів. Ч.1 / Ю. А. Коваль, Л. В. Гринченко, І.О. Милютченко, О. І. Рибін / за заг. ред. В.М. Шокола, В. І. Правди. – Харків: Компанія СМІТ, 2008 – 432с.
2. Основи теорії кіл: Підручник для вищих навчальних закладів. Ч.2 / Ю. А. Коваль, Л. В. Гринченко, І.О. Милютченко, О. І. Рибін / за заг. ред. В.М. Шокола, В. І. Правди. – Харків: Компанія СМІТ, 2008 – 560с.
3. Рукописні та електронні фрагменти конспекту з «ОТК» М.І. Ястребова.
4. Сташук В.Д. Основи теорії та комп'ютерне моделювання електронних кіл: навчальний посібник [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / В. Д. Сташук, А.В. Булашенко. – Електронні текстові дані (1 файл 6.58 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 400с.
5. Булашенко А.В. Основи теорії кіл. Збірник задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка / А. В. Булашенко. – 2-ге вид., перероб. і допов. – Електронні текстові дані (1 файл 4.9 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 180с.
6. Методичні рекомендації до підготовки к вступним іспитам в магістратуру за спеціальністю «Радіоелектронні пристрої, системи та комплекси» з дисципліни «Основи теорії кіл» для студентів радіотехнічного факультету / Уклад.: М.І. Ястребов, – К.: НТУУ "КПІ", 2015. – 72.
7. Гумен М.Б. Основи теорії електричних кіл. У 3 кн. Кн. 1. Аналіз лінійних електричних кіл. Часова область: Підручник. / М.Б. Гумен, А.М. Гуржій, В.М. Співак; За ред. М.Б. Гумена. – К.: Вища шк., 2003. – 399с.
8. Гумен М.Б. Основи теорії електричних кіл. У 3 кн. Кн. 2. Аналіз лінійних електричних кіл. Частотна область: Підручник. / М.Б. Гумен, А.М. Гуржій, В.М. Співак; За ред. М.Б. Гумена. – К.: Вища шк., 2004. – 358с.
9. Булашенко А.В. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл постійного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка / А. В. Булашенко. – Електронні текстові дані (1 файл 2.589 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 83с.
10. Булашенко А.В. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка / А. В. Булашенко. – Електронні текстові дані (1 файл 2.219 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 75с.
11. Булашенко А.В. Основи теорії кіл. Розрахунок поодиноких контурів. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціаль-

- ності 172 Електронні комунікації та радіотехніка / А. В. Булашенко. – Електронні текстові дані (1 файл 1.51 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 62с.
12. Булашенко А.В. Основи теорії кіл. Розрахунок довгих ліній. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка / А. В. Булашенко. – Електронні текстові дані (1 файл 1.7 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 47с.
13. Булашенко А.В. Основи теорії кіл. Розрахунок схемних функцій, чотиріполюсників та операторний метод у простих колах. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / А. В. Булашенко. – Електронні текстові дані (1 файл 1.72 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 68с.
14. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Основи теорії кіл» на тему «Розрахунок простих кіл операторним методом» для студентів радіотехнічного факультету, спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 39с.
15. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Основи теорії кіл» на тему «Розрахунок простих схемних функцій та чотиріполюсників» для студентів радіотехнічного факультету, спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 31с.
16. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Основи теорії кіл» на тему «Розрахунок довгих ліній» для студентів радіотехнічного факультету, спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 25с.
17. Булашенко А.В. Побудова векторних діаграм за допомогою математичного пакету MathCAD / А.В. Булашенко // Науково-методична конференція викладачів, співробітників і студентів: тези доповідей, 27 квітня 2010 року / Конотопський ін-т СумДУ; Відп. за вип. Н.В. Барбара, О.С. Заїка. – Суми : СумДУ, 2010. – Ч.2. – С. 10-13.
18. Булашенко А.В. Основи теорії кіл. Посібник до виконання розрахункової роботи. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка / А. В. Булашенко. – Електронні текстові дані (1 файл 2.61 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 80с.
19. Основи теорії електронних кіл: Підручник (друге видання: доопрацьоване і доповнене) / Ю.Я. Бобало, Б.А. Мандзій, П.Г. Стахів, Л.Д. Писаренко, Ю.І. Якименко; За ред. проф. Ю.І. Якименка. – Київ: Видавництво Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, 2011. – 332 с.

- 20.Булашенко А.В. Основи теорії кіл. Рекомендації для підготовки до фахового вступного випробування [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка, спеціалізацій «Радіотехнічні інформаційні системи», «Радіозв'язок і оброблення сигналів», «Радіосистемна інженерія», «Інтелектуальні технології мікросистемної радіoeлектронної техніки» / А. В. Булашенко. – Електронні текстові дані (1 файл 1.96 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 100 с.
21. Булашенко А.В. Основи теорії кіл. Рекомендації до виконання домашньої контрольної роботи. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка / А. В. Булашенко. – Електронні текстові дані (1 файл 1.41 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 28с.
22. Булашенко А.В. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / А. В. Булашенко. – Електронні текстові дані (1 файл 1.31 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 48 с.
- 23.Теоретичні основи електротехніки: підручник: у 3 т. / за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойко. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2004. – Т. 1.: Усталений режим лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 272с.
- 24.Булашенко А.В. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у п'яти частинах. Частина 1: Лінійні електричні кола постійного та змінного струму / Укладач А.В. Булашенко – Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 182с.
25. Булашенко А.В. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у 5-ти частинах / Укладач А.В. Булашенко. – Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – Ч.4. – 181с.
- 26.Методичні вказівки до практичних робіт на тему «Розрахунок електричних кіл постійного струму» з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» / укладач А.В. Булашенко. – Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 81с.
- 27.Методичні вказівки для самостійної роботи з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» за темою «Усталені режими у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» для студентів спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики» заочної форми навчання / укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2008.–25с.
28. Булашенко А.В. Інформатика: конспект лекцій у чотирьох частинах. – Частина 4: Обробка інженерної інформації за допомогою математичного пакета MathCAD / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010 – 123 с.
- 29.Методичні вказівки до виконання курсової роботи на тему «Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах із зосередженими

- параметрами» з дисципліни «Теорія електричних і магнітних кіл» / укладач А. В. Булашенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2008. – 74с.
30. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підручник / [Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В. та ін.] за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 530с.
31. Кролевецький О.В. Особливості вимірювання струму витоку / О.В. Кролевецький, І.В. Забегалов, А.В. Булашенко // 22-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті». Конференція «Перспективи розвитку інфокомунікацій та інформаційно-вимірювальних технологій», Т.4 – Харків: ХНУРЕ, 16-18 квітня 2018. – Т.4. – Р. 258 – 259.
32. Радіотехніка: Енциклопедичний навч. довідник: Навч. посібник. / За ред. Ю.Л. Мазора, Є.А. Мачуського, В.І. Правди. К.: Вища шк., 1999. 838с.
33. Збірник задач з електротехніки: збірник задач / В. Ф. Болюх, К. В. Коритченко, В. С. Марков та інш.; за ред. В. Ф. Болюха. – Харків: НТУ «ХПІ», 2021. – 196с.
34. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки.: Навч. посібник для студентів електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів / Воробкевич А.Ю., Маляр В.С., Совин Р.Я., Соколовський М.О., Стахів П.Г., Шегедина О.І. За редакцією Воробкевича А.Ю., Шегедина О.І. – Львів: “Новий Світ-2000”, 2020. – 224с.
35. Збірник задач з електротехніки / За ред. В. Г. Данька: навчальний посібник. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2004. – 119с.
36. Булашенко А. В. Методичні вказівки до самостійного вивчення теми “Частотний метод та метод змінних станів аналізу перехідних процесів у лінійних електричних колах та моделювання перехідних процесів у Electronics Workbench 5.12” з дисципліни “Теорія електричних та магнітних кіл” / А. В. Булашенко. – Суми : СумДУ, 2011. – 137 с.
37. Забегалов І.В. Модуль коливального контуру / І. В. Забегалов, Є. О. Малишок, А. В. Булашенко // Науково-методична конференція викладачів, співробітників і студентів, Конотоп, 28 квітня 2011 р. : тези доповідей: у 2-х ч. / Відп. за вип. В.В. Бібик. – Суми: СумДУ, 2011. – Ч.2. – С. 115-117.
38. Петренко І.А. Основи електротехніки та електроніки: Навч. посібник для дистанційного навчання: у 2 ч. – Ч.1: Основи електротехніки. – К.: Університет «Україна», 2006. – 411с.
39. Електротехніка та електроніка. Теоретичні відомості, розрахунки та дослідження за підтримкою комп’ютерних технологій: Навчальний посібник. А.А. Щерба, В.М. Рябенський, М.Є. Кучеренко, К.К. Побєдаш. В.І. Чибеліс, А.Т. Кінаш, Л.В. Солобуто: За заг. ред. А.А. Щерби та В.М. Рябенського. – К.: «Корнійчук», 2007. – 488 с.
40. Теоретичні основи електротехніки: підручник: у 3 т. / за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойко. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2008. –

- Т. 2. Перехідні процеси у лінійних електричних колах, нелінійні електричні та магнітні кола. – 224с.
- 41.Трембач Р.Б. Теорія електричних та магнітних кіл. [Текст] Навчальний посібник/ Р.Б. Трембач. – Тернопіль: ТНЕУ, 2015 – 263с.
- 42.Теоретичні основи електротехніки – 1. Електричні кола постійного та змінного струму. Чотириполусники. Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» /уклад.: А. А. Щерба, Ю. В. Перетятко. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,16 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 116 с.
- 43.Сташук В.Д. Радіоелектронні кола і пристрої: Навчальний посібник для вищих навчальних закладів. – К.: Університет «Україна», 2007. – 357 с.
- 44.Спеціальні розділи теорії електричних кіл [Електронний ресурс] : конспект лекцій для студентів напряму підготовки 6.050803 «Акустотехніка» / уклад.: М. Ю. Артеменко, К. С. Дрозденко. – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 98 с.
- 45.Теорія електричних кіл. Методи аналізу лінійних електричних кіл постійного струму. Лекції та приклади розв’язування задач [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів спеціальності 171 «Електроніка» / уклад.: М. Ю. Артеменко, Л. М. Батрак, В. В. Рогаль. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,87 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 100 с.
- 46.В.С. Маляр. Теоретичні основи електротехніки: підручник для студентів спеціальностей: 141 "Електроенергетика, електротехніка і електромеханіка" та "Комп'ютерна інженерія". – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2018. – 414 с.
- 47.Теорія електричних кіл. Курс лекцій. Кола постійного струму. Навчальний посібник [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Електронні компоненти та системи», «Електронні прилади та пристрої» спеціальності 171 Електроніка /уклад. Т. А. Хижняк. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,04 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 76 с.
48. Mayergoyz I.D., Lawson W. Basic electrical circuit theory: a one-semester text, Academic Press\$ 1st edition, 2012, 464p.
49. Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku. Fundamentals of electric circuits. — McGraw-Hill Education, New York, Sixth edition, 2017, 990p.
- 50.Floyd, T. L. Principles of Electric Circuits. 7th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002, 992p.

ДОДАТОК А. Формули диференціювання**Корисні формули диференціювання****Правила диференціювання**

Нехай задані диференційовані функції $U = u(x)$, $V = v(x)$

1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа диференційованих функцій дорівнює сумі похідних цих функцій

$$\frac{d}{dx} [U \pm V] = \frac{d}{dx} [U] \pm \frac{d}{dx} [V].$$

2. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першого співмножника на другий та добутку похідної другого співмножника на перший:

$$\frac{d}{dx} [U \cdot V] = \frac{d}{dx} [U] \cdot V + \frac{d}{dx} [V] \cdot U.$$

3. Похідна частки визначається виразом

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{U}{V} \right] = \frac{\frac{d}{dx} [U] \cdot V - \frac{d}{dx} [V] \cdot U}{V^2}.$$

Таблиця похідних деяких функцій

Функція	Похідна функції	Функція	Похідна функції
$\sin x$	$\cos x$	x^c	cx^{c-1}
$\cos x$	$-\sin x$	$ x $	$\text{sign } x$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\text{ctg } x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x^c}$	$-\frac{c}{x^{c+1}}$
e^x	e^x	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$	c^x	$c^x \ln c$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arcctg } x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\text{arcsec } x$	$\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$\text{arccos } x$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$\text{ch } x$	$\text{sh } x$

ДОДАТОК Б. Тригонометричні формули

Корисні тригонометричні формули

1. Формули додавання аргументів:

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y; \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y; \\ \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.\end{aligned}$$

2. Формули пониження степеня:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \\ \sin^3 x &= \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}; \quad \cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}; \\ \sin^4 x &= \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}; \\ \cos^4 x &= \frac{3 + 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}.\end{aligned}$$

3. Формули перетворення добутку функцій:

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}; \\ \sin x \cos y &= \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}; \\ \cos x \cos y &= \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}.\end{aligned}$$

4. Формули перетворення суми функцій:

$$\begin{aligned}\sin x \pm \sin y &= 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}; \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}; \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}; \\ \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}; \quad \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}.\end{aligned}$$

5. Формули подвійного та потрійного кутів:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x; \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x; \\ \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \\ \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \\ \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}; \\ \operatorname{tg} 3x &= \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{ctg} 3x = \frac{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} = \frac{3 \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 x}.\end{aligned}$$

6. Допоміжний аргумент:

$$a \sin x \pm b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(x \pm \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right);$$

$$a \cos x \pm b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(x \mp \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

7. Формули Ейлера:

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}; \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2};$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x; \quad e^{-jx} = \cos x - j \sin x.$$

8. Деякі значення тригонометричних функцій

Кут x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	-
$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	-	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
$5\pi/6$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	-
2π	0	1	0	-

9. Формули зведення

Аргумент β	Тригонометричні функції			
	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{ctg} \beta$
$\alpha + \pi/2$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\alpha + \pi$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\alpha + 3\pi/2$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\alpha + 2\pi$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha + \pi/2$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$-\alpha + \pi$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha + 3\pi/2$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$-\alpha + 2\pi$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

ДОДАТОК В. Таблиця інтегралів

Таблиця інтегралів

Значення функції	Значення первісної	Значення функції	Значення первісної
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
e^x	e^x	$a^x, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right $

Формула інтегрування частинами

$$\int_0^\infty u dv = u \cdot v|_0^\infty - \int_0^\infty v du.$$

ДОДАТОК Г. Схемні функції

Схемні функції

Коефіцієнт передачі за струмом:

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$	$K_i = \frac{I_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Y_H$

Коефіцієнт передачі за напругою

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot Z_H$	$K_u = \frac{U_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$

Передавальна провідність

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Y_{ba} = \frac{I_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}$	$Y_{ba} = \frac{I_{BIX}}{U_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Y_H$

Передавальний опір

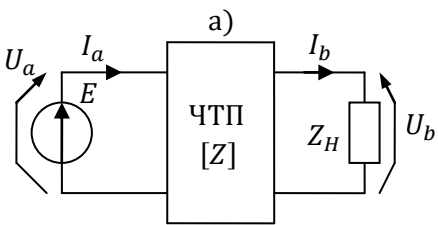
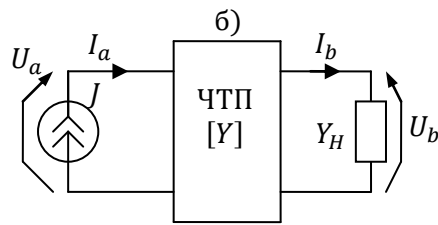
за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Z_{ba} = \frac{U_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \cdot Z_H$	$Z_{ba} = \frac{U_{BIX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}$

Вхідний опір

за матрицею опорів	за матрицею провідностей
$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}$	$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}$

Система Y – параметрів чотирьохполосників

Пояснення щодо індексів

В формулах індекс «а» ідентифікує вхідний контур, а індекс «b» ідентифікує вихідний контур для $[Z]$.	В формулах індекс «а» ідентифікує вхідний вузол, а індекс «b» ідентифікує вихідний вузол для $[Y]$.
	
Риснок Г - Схеми заміщення із Z-матрицями (а) та із Y-матрицями (б)	

ДОДАТОК Д. Системи параметрів прохідних чотириполіусників

У силу лінійності можна написати шість систем рівнянь, що зв'язують між собою струми та напруги на вході та виході чотириполіусника (рис. Д.1).

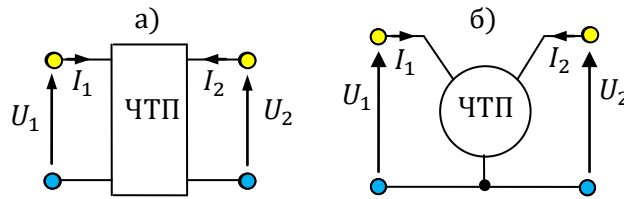


Рисунок Д.1 – Схема прохідного чотириполіусника

Лінійна форма	Матрична форма
Система Z – параметрів чотириполіусників	
$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2; \end{cases}$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$
Система Y – параметрів чотириполіусників	
$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2; \end{cases}$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$
Система h – параметрів чотириполіусника	
$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2, \\ I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2; \end{cases}$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$
Система A – параметрів чотириполіусника	
$\begin{cases} U_1 = A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot I_2, \\ I_1 = A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot I_2; \end{cases}$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$
Коли розглядаються A - параметри, вихідний I_2 струм направляють назовні.	
Система F – параметрів чотириполіусника	
$\begin{cases} I_1 = F_{11} \cdot U_1 + F_{12} \cdot I_2, \\ U_2 = F_{21} \cdot U_1 + F_{22} \cdot I_2; \end{cases}$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$
Система B – параметрів чотириполіусника	
$\begin{cases} U_2 = B_{11} \cdot U_1 + B_{12} \cdot I_1, \\ I_2 = B_{21} \cdot U_1 + B_{22} \cdot I_1; \end{cases}$	$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}.$

Схеми заміщення пасивних чотириполіусників наведені на рис. Д.2 (Т-подібна схема) та рис. Д.3 (П-подібна схема).

Для Т-подібної схеми заміщення (рис. Д.2) складають матрицю опорів

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}.$$

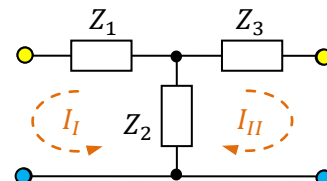


Рисунок Д.2 – Т-подібна схема

Для П-подібної схеми заміщення (рис. Д.3) складають матрицю провідностей

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$$

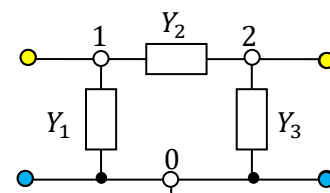


Рисунок Д.3 – П-подібна схема

ДОДАТОК Е. Зв'язок між параметрам чотириполюсника

Зв'язок між параметрами чотириполюсника

Зв'язок між параметрами чотириполюсника

	$[Z]$	$[Y]$	$[H]$
$[Z]$	$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_Y} \begin{vmatrix} Y_{22} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{H_{22}} \begin{vmatrix} \Delta_H & H_{12} \\ -H_{21} & 1 \end{vmatrix}$
$[Y]$	$\frac{1}{\Delta_Z} \begin{vmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{H_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -H_{12} \\ H_{21} & \Delta_H \end{vmatrix}$
$[H]$	$\frac{1}{Z_{22}} \begin{vmatrix} \Delta_Z & -Z_{12} \\ -Z_{21} & 1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{Y_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -Y_{12} \\ -Y_{21} & \Delta_Y \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}$
$[F]$	$\frac{1}{Z_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -Z_{12} \\ Z_{21} & \Delta_Z \end{vmatrix}$	$\frac{1}{Y_{22}} \begin{vmatrix} \Delta_Y & Y_{12} \\ -Y_{21} & 1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_H} \begin{vmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ H_{21} & H_{11} \end{vmatrix}$
$[A]$	$\frac{1}{Z_{21}} \begin{vmatrix} Z_{11} & \Delta_Z \\ 1 & Z_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{Y_{21}} \begin{vmatrix} -Y_{22} & -1 \\ -\Delta_Y & Y_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{H_{21}} \begin{vmatrix} -\Delta_H & H_{11} \\ -H_{22} & 1 \end{vmatrix}$
$[B]$	$\frac{1}{Z_{12}} \begin{vmatrix} Z_{22} & \Delta_Z \\ 1 & Z_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{Y_{12}} \begin{vmatrix} -Y_{11} & -1 \\ -\Delta_Y & -Y_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{H_{21}} \begin{vmatrix} 1 & -H_{11} \\ H_{22} & \Delta_H \end{vmatrix}$

	$[F]$	$[A]$	$[B]$
$[Z]$	$\frac{1}{F_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -F_{12} \\ F_{21} & \Delta_F \end{vmatrix}$	$\frac{1}{A_{21}} \begin{vmatrix} A_{11} & -\Delta_A \\ 1 & -A_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{B_{21}} \begin{vmatrix} B_{22} & 1 \\ \Delta_B & B_{11} \end{vmatrix}$
$[Y]$	$\frac{1}{F_{22}} \begin{vmatrix} \Delta_F & F_{12} \\ -F_{21} & 1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{A_{12}} \begin{vmatrix} A_{22} & \Delta_A \\ -1 & A_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{B_{12}} \begin{vmatrix} B_{11} & -1 \\ -\Delta_B & B_{22} \end{vmatrix}$
$[H]$	$\frac{1}{\Delta_F} \begin{vmatrix} F_{22} & -F_{12} \\ -F_{21} & F_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{A_{11}} \begin{vmatrix} A_{21} & \Delta_A \\ -1 & A_{12} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{B_{11}} \begin{vmatrix} B_{12} & 1 \\ -\Delta_B & B_{21} \end{vmatrix}$
$[F]$	$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{A_{11}} \begin{vmatrix} A_{21} & -\Delta_A \\ 1 & A_{12} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{B_{22}} \begin{vmatrix} B_{21} & -1 \\ \Delta_B & B_{12} \end{vmatrix}$
$[A]$	$\frac{1}{F_{21}} \begin{vmatrix} 1 & F_{22} \\ F_{11} & \Delta_F \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_B} \begin{vmatrix} B_{22} & B_{12} \\ B_{21} & B_{11} \end{vmatrix}$
$[B]$	$\frac{1}{F_{12}} \begin{vmatrix} -\Delta_F & -F_{22} \\ -F_{11} & -1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_A} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}$

ДОДАТОК Є. Таблиця перетворення Лапласа

Таблиця перетворення Лапласа представлена у таблиці Є.1.

Таблиця Є.1 - Зображення та оригінал деяких функцій

Оригінал	Зображення	Оригінал	Зображення
$\alpha \cdot 1(t)$	$\frac{\alpha}{p}$	$e^{\pm \alpha t}(1 - \alpha t)$	$\frac{p}{(p \mp \alpha)^2}$
$\alpha \cdot t$	$\frac{\alpha}{p^2}$	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{\pm \alpha t})$	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$
$\beta e^{\pm \alpha t}$	$\frac{\beta}{p \mp \alpha}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j(\omega_0 t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \sin(\psi) + \omega_0 \cos(\psi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$t \cdot e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\alpha - \beta}$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\cos(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cos(\psi) + \omega_0 \sin(\psi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$ch(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$sh(at)$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p - a)}$	$1 - e^{-t/a}$	$\frac{1}{p(1 + ap)}$
$\frac{1}{a^2}te^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(1 + ap)^2}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$
$(1 + at)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - 1 - at)$	$\frac{1}{(p - a)p^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{at}$	$\frac{1}{(p - a)^3}$	$(t + \frac{1}{2}at^2)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^3}$
$\cos^2(at)$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$	$\sin^2(at)$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
$ch^2(at)$	$\frac{p^2 - 2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$	$sh^2(at)$	$\frac{2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$

ДОДАТОК Ж. Корисні співвідношення для гармонічних кіл

Співвідношення у колах гармонічного струму

Співвідношення між напругою та струмом на пасивних елементах

	Струм	Напруга
Опір	$i_R(t) = g \cdot u_R(t)$	$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$
Індуктивність	$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t) dt$	$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$
Ємність	$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$	$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t) dt$

Співвідношення для реактивних опорів

	Індуктивності	Ємності
Реактивний опір	$X_L = \omega L$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$
Комплексний опір	$Z_L = jX_L$	$Z_C = -jX_C$
Зсув фази між напругою та струмом	$\varphi_u = \varphi_i + 90^\circ$	$\varphi_u = \varphi_i - 90^\circ$

Співвідношення для реактивних провідностей

	Ємності	Індуктивності
Реактивна ємність	$B_C = \omega C$	$B_L = \frac{1}{\omega L}$
Комплексна ємність	$Y_C = jB_C$	$Y_L = -jB_L$
Зсув фази між струмом та напругою	$\varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$	$\varphi_i = \varphi_u - 90^\circ$

Комплексні опори в алгебраїчній та показниковій формах:

Індуктивність	$Z_L = j\omega L = jX_L = X_L e^{j90^\circ};$
Ємність	$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C = X_C e^{-j90^\circ}.$

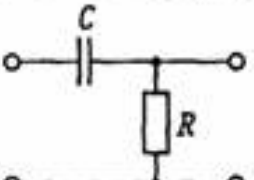
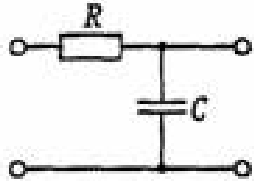
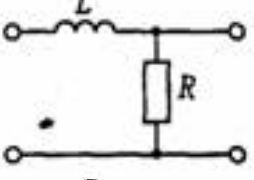
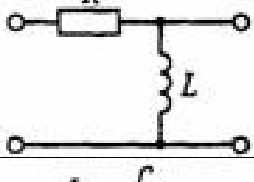
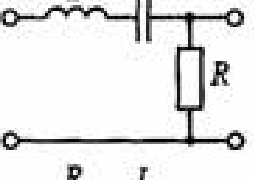
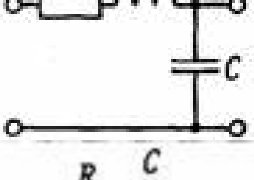
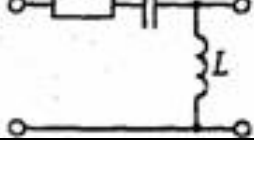
Комплексні індуктивна та ємнісна провідності:

Індуктивність	$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -jB_L = B_L e^{-j90^\circ};$
Ємність	$Y_C = \frac{1}{Z_C} = j\omega C = jB_C = B_C e^{j90^\circ}.$

ДОДАТОК 3. Часові характеристики простих кіл

У таблиці 3.1 прдесталвлені імпульсні та перехідні характеристики простих кіл

Таблиця 3.1. Схеми та їх імпульсні та перехідні характеристики.

Схема	Перехідна характеристика	Імпульсна характеристика
	$g(t) = e^{pt}$	$h(t) = \delta(t) + pe^{pt}$
	$g(t) = 1 - e^{pt}$	$h(t) = -pe^{pt}$
	$g(t) = 1 - e^{pt}$	$h(t) = -pe^{pt}$
	$g(t) = e^{pt}$	$h(t) = \delta(t) + pe^{pt}$
	$-\frac{R}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t})$	$-\frac{R}{L(p_1 - p_2)}(p_2 e^{p_2 t} - p_1 e^{p_1 t})$
	$1 - \frac{1}{p_1 - p_2}(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t})$	$-\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t})$
	$\frac{1}{p_1 - p_2}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$	$\delta(t) - \frac{1}{p_1 - p_2}(p_1^2 e^{p_1 t} - p_2^2 e^{p_2 t})$

ДОДАТОК І. Скрін розрахунку коефіцієнта передачі у MathCAD

Нижче наведені скріни із розрахунком коефіцієнта передачі за напругою у математичному пакеті MathCAD (рис. І.1 та рис. І.2). Нижче наведений скрін із формуванням матриці провідностей схеми та розрахунком визначників у математичному пакеті MathCAD (рис. І.1).

Mathcad - [ПЛЕС_КР_Варіант_13_mod_2]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Мой веб-узел Go

Початкові данні

$$R1 := 3 \quad R2 := 14 \quad R3 := 127 \quad R4 := 13 \quad C1 := 4.8 \quad C2 := 9.2 \quad C3 := 2.67 \quad S := 5.8$$

Розрахунок провідностей

$$g1 := \frac{1}{R1} = 0.333 \quad g2 := \frac{1}{R2} = 0.071 \quad g3 := \frac{1}{R3} = 7.874 \times 10^{-3} \quad g4 := \frac{1}{R4} = 0.077$$

Формування матриці провідностей схеми

$$Y(p) := \begin{bmatrix} g1 + p \cdot C1 & -(g1 + p \cdot C1) & 0 \\ -(g1 + p \cdot C1) & g1 + g2 + g3 + p \cdot C1 + p \cdot C2 & -g3 \\ 0 & -g3 + S & g3 + g4 + p \cdot C3 \end{bmatrix}$$

Числові значення матриці провідностей схеми

$$Y(p) \rightarrow \begin{pmatrix} 4.8 \cdot p + 0.3333333333333331 & -4.8 \cdot p - 0.3333333333333331 & 0 \\ -4.8 \cdot p - 0.3333333333333331 & 14.0 \cdot p + 0.412635920509936231 & -0.007874015748031496 \\ 0 & 5.792125984251968504 & 2.67 \cdot p + 0.084797092671108423 \end{pmatrix}$$

Розрахунок визначників

$$\Delta_{11}(p) := \text{submatrix}(Y(p), 1, 2, 1, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 14.0 \cdot p + 0.412635920509936231 & -0.007874015748031496 \\ 5.792125984251968504 & 2.67 \cdot p + 0.084797092671108423 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta_{11}(p)| \rightarrow 37.38 \cdot p^2 + 2.2888972051570476588 \cdot p + 0.080597617605491620181$$

$$\Delta_{13}(p) := \text{submatrix}(Y(p), 1, 2, 0, 1) \rightarrow \begin{pmatrix} -4.8 \cdot p - 0.3333333333333331 & 14.0 \cdot p + 0.412635920509936231 \\ 0 & 5.792125984251968504 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta_{13}(p)| \rightarrow -27.802204724409448819 \cdot p - 1.9307086614173226995$$

Рисунок І.1 – Скрін із формуванням матриці провідностей та розрахунком визначників у MathCAD

Функція **Submatrix** (A, ir, jr, ic, jc) формує матрицю, яка є блоком матриці A, розташованим в рядках з ir по jr та у стовпчиках з ic по jc (ir<=jr, ic<=jc).

Номер першого рядка (стовпчика) матриці або першої компоненти вектора зберігається в MathCAD в змінний ORIGIN. За замовчуванням в MathCAD координати векторів, стовпці і рядки матриці нумеруються, починаючи з 0. Зазначимо, що оскільки в математичній записи найчастіше використовується нумерація з 1, перед початком роботи з матрицями будемо визначати значення змінної ORIGIN рівним 1, тобто треба записати команду ORIGIN:=1.

Нижче наведений скрін із розрахунком коефіцієнта передачі за напругою у математичному пакеті MathCAD (рис. I.2).

Mathcad - [ПЛЕС_КР_Варіант_13_mod_2]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Мой веб-узел Go

Розрахунок визначників

$$\Delta_{11}(p) := \text{submatrix}(Y(p), 1, 2, 1, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 14.0 \cdot p + 0.412635920509936231 & -0.007874015748031496 \\ 5.792125984251968504 & 2.67 \cdot p + 0.084797092671108423 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta_{11}(p)| \rightarrow 37.38 \cdot p^2 + 2.2888972051570476588 \cdot p + 0.080597617605491620181$$

$$\Delta_{13}(p) := \text{submatrix}(Y(p), 1, 2, 0, 1) \rightarrow \begin{pmatrix} -4.8 \cdot p - 0.33333333333333331 & 14.0 \cdot p + 0.412635920509936231 \\ 0 & 5.792125984251968504 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta_{13}(p)| \rightarrow -27.802204724409448819 \cdot p - 1.9307086614173226995$$

Визначення коефіцієнта передачі за напругою

$$Ku(p) := \frac{|\Delta_{13}(p)|}{|\Delta_{11}(p)|} \rightarrow -\frac{27.802204724409448819 \cdot p + 1.9307086614173226995}{37.38 \cdot p^2 + 2.2888972051570476588 \cdot p + 0.080597617605491620181}$$

Визначення частотної залежності

$$Ku(\omega) := -\frac{27.802204724409448819 \cdot \omega \cdot i + 1.9307086614173226995}{37.38 \cdot (\omega \cdot i)^2 + 2.2888972051570476588 \cdot \omega \cdot i + 0.080597617605491620181}$$

$$Ku(\omega) \rightarrow -\frac{(27.802204724409448819i) \cdot \omega + 1.9307086614173226995}{(2.2888972051570476588i) \cdot \omega + -37.38 \cdot \omega^2 + 0.080597617605491620181}$$

Визначення аргументу

$$\varphi(\omega) := \frac{\arg(Ku(\omega))}{\deg}$$

Визначення в нулі та нескінченності

$$Ku(0) = -23.955$$

Рисунок I.2 – Скрін із розрахунком коефіцієнта передачі за напругою за допомогою програми MathCAD

ДОДАТОК К. Скрін побудови частотних характеристик у MathCAD

Нижче наведений скрін побудови модуля та аргументу коефіцієнту передачі за напругою у математичному пакеті MathCAD (рис. К.1). Для побудови графіків треба скористатися відповідним пунктом меню Графіки або натиснути комбінацію гарячих клавіш Shift+2 (при цьому розкладка клавіатури мусить бути на англійській мові).

Частотна залежність коефіцієнта передачі за напругою

$$Ku(\omega) \rightarrow \frac{(27.802204724409448819i) \cdot \omega + 1.9307086614173226995}{(2.2888972051570476588i) \cdot \omega + -37.38 \cdot \omega^2 + 0.080597617605491620181}$$

Визначення аргументу

$$\varphi(\omega) := \frac{\arg(Ku(\omega))}{\deg}$$

Визначення в нулі та нескінченності

$$Ku(0) = -23.955$$

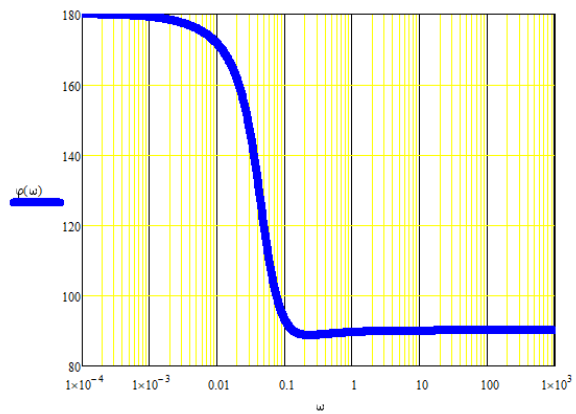
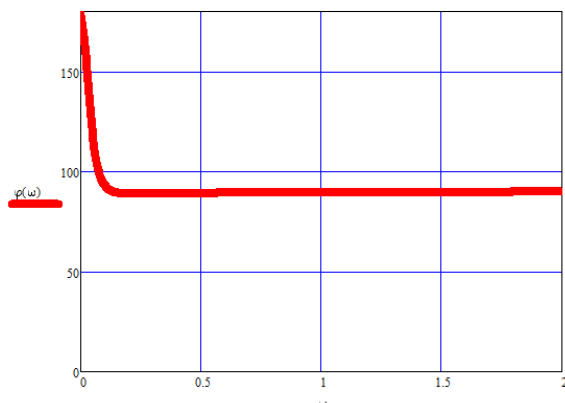
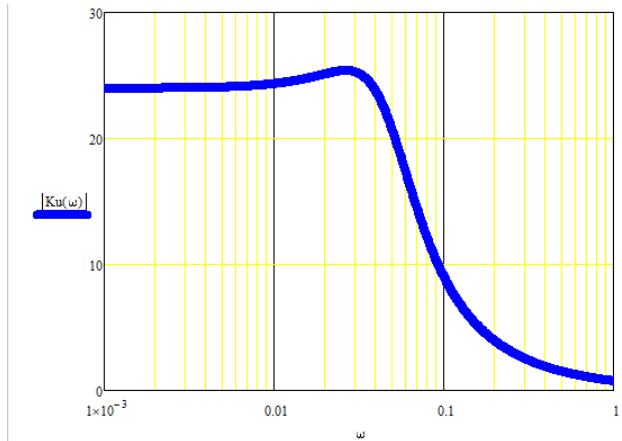
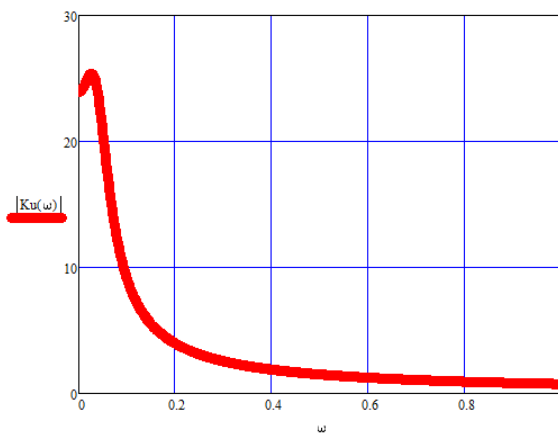


Рисунок К.1 – Скрін ФЧС вихідної напруги у MathCAD

Якщо мишку навести на полотно графіка та клацнути по ньому два рази то з'явиться меню налаштування графіків. На рис. К.2 наведено скрін меню налаштування графіка у логарифмічному масштабі за віссю частот (вісь Y). Перед побудовою слід початкове значення задати відмінне від нуля бо не існує логарифма в нулі.

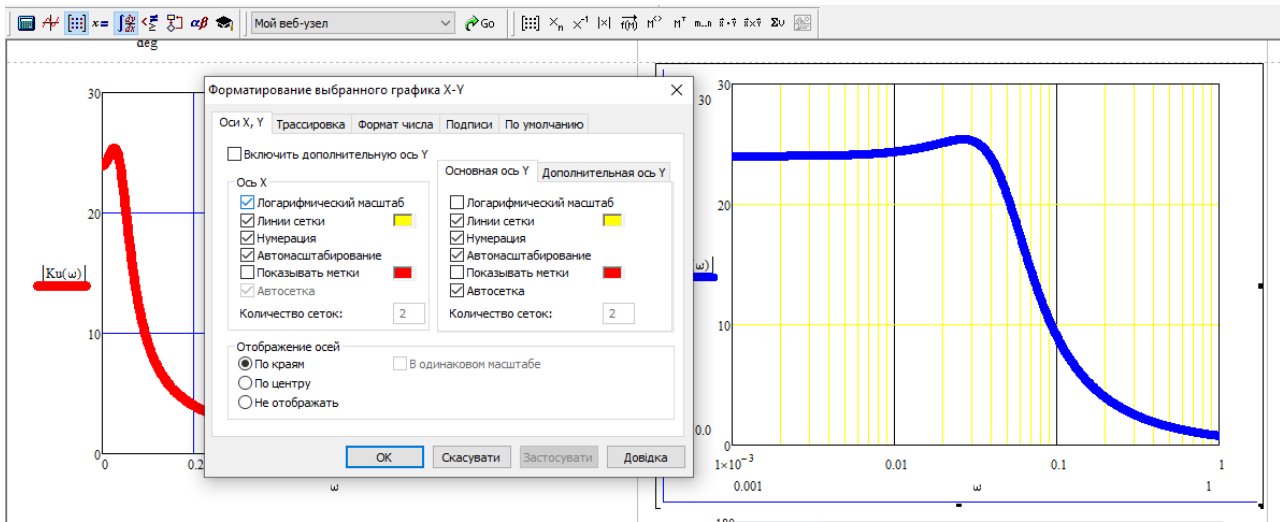


Рисунок К.2 – Скрін налаштування меню графік у логарифмічному масштабі у програмі MathCAD

На рис. К.3 наведено скрін меню налаштування графіка у лінійному масштабі за віссю частот (вісь Y).

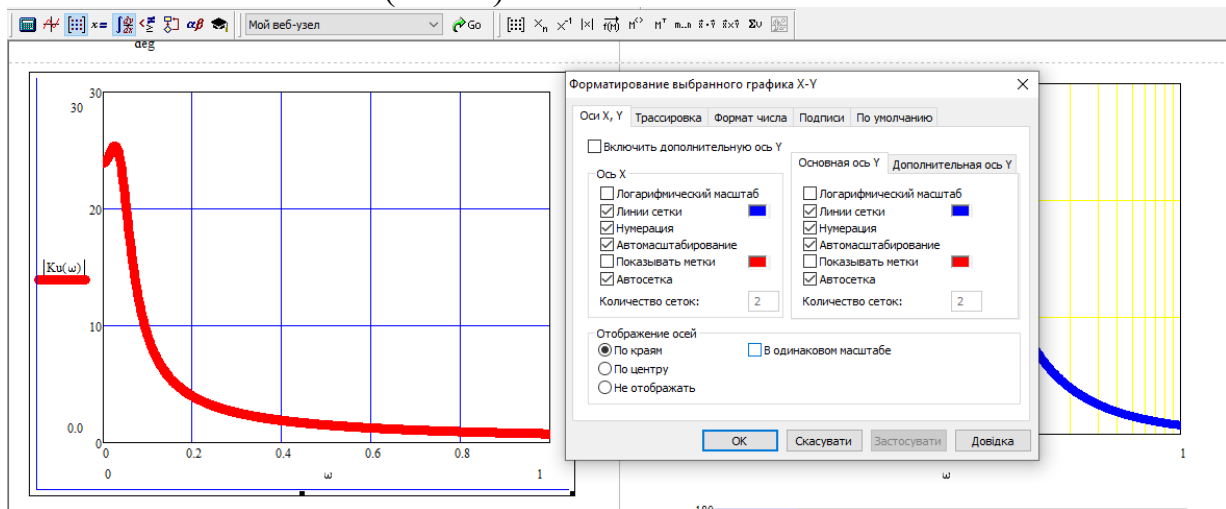


Рисунок К.3 – Скрін налаштування меню графік у лінійному масштабі у програмі MathCAD

На рис. К.4 скрін побудови модуля коефіцієнту передачі за напругою у лінійному (червоний графік) та логарифмічному (синій графік) масштабах за допомогою математичного пакету MathCAD від частоти f . Перед побудовою графіку у логарифмічному масштабі слід початкове значення задати відмінне від нуля бо не існує логарифма в нулі. Перед побудовою слід задати параметр $a=2\pi \cdot 10^{-3}$, щоб значення лінійної частоти f на графіках відображалось у кГц.

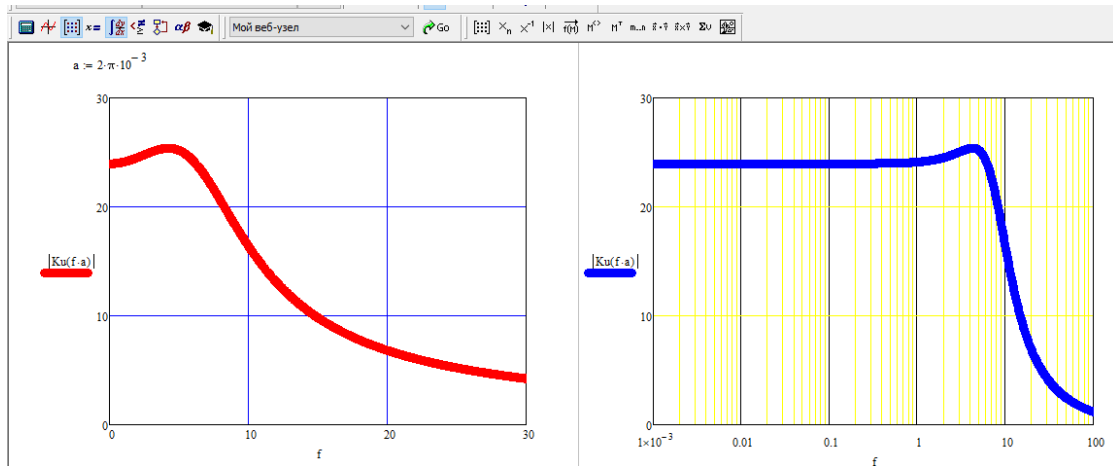


Рисунок К.4 – Скрін побудови графіків модулю у лінійному та логарифмічному масштабах у програмі MathCAD

Слід зазначити, що іноді доводиться обирати масштаб за вісю лінійної частоти f у МГц, тоді параметр треба задати $a=2\pi \cdot 10^{-6}$. Вибір обидниць побудови лінійної частоти f залежить від конкретної схеми та коректного і інформативного відображення графіку для наглядності його подання.

На рис. П.4 скрін побудови аргументу коефіцієнту передачі за напругою у лінійному (червоний графік) та логарифмічному (синій графік) масштабах за допомогою математичного пакету MathCAD від частоти f . Аргумент побудований в градусах. Перед побудовою графіку у логарифмічному масштабі слід початкове значення задати відмінне від нуля бо не існує логарифма в нулі.

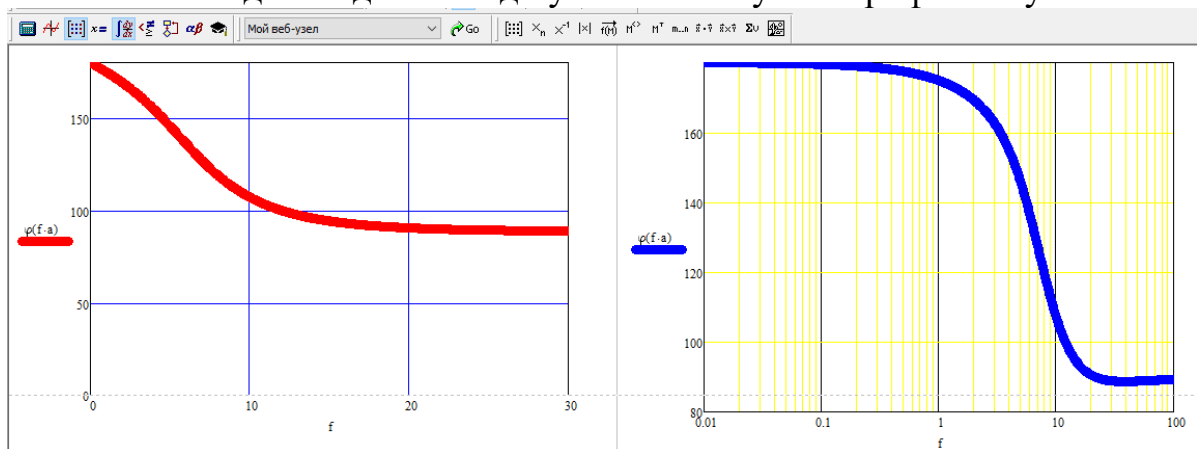


Рисунок К.5 – Скрін побудови графіків модулю у лінійному та логарифмічному масштабах у програмі MathCAD

ДОДАТОК Л. Біографія автора

Булашенко Андрій Васильович народився в 1983 році на Сумщині. У 2000 році закінчив фізико-математичний клас ліцею у місті Шостка Сумської області. У 2006 році закінчив із відзнакою РТФ. В 2007 – 2010 рр. навчався в аспірантурі НТУУ «КПІ». На кафедрі теоретичних основ радіотехніки працює з 2010 р. у якості асистента, старшого викладача.



В 2006 – 2007 рр. працював фахівцем І-ї категорії кафедри системотехніки та інформаційних технологій ШСумДУ, а з 2007 року викладачем кафедри. Викладав дисципліни: «Теорія електричних та магнітних кіл», «Інформатика та комп'ютерна техніка», «Економічна інформатика», «Інформаційні системи на підприємстві», «Вступ до спеціальності».

Під час роботи на радіотехнічному факультеті створив велику кількість навчально-методичної літератури кафедри з дисциплін: «Основи теорії кіл», «Процеси в лінійних електронних схемах». Займається підготовкою студентів до олімпіад з теорії кіл та радіотехніки, де студенти періодично займають призові місця.

Член організаційного комітету по підготовці команди до Всеукраїнської студентської олімпіади з радіотехніки з 2017 року. Щороку студенти займають призові місця на II етапі Всеукраїнської студентських олімпіад із радіотехніки у ВНТУ (м. Вінниця) та ХНУРЕ (м. Харків) у командному та індивідуальному заліку. У 2017-2019 році отримав подяки за підготовку команди радіотехнічного факультету до Всеукраїнської студентської олімпіади з радіотехніки. Член організаційного комітету по Всеукраїнській науково-технічній конференції студентів, аспірантів та викладачів «Радіоелектроніка в ХХІ столітті», що проводиться у травні щороку з 2018 р., місце проведення РТФ, КПІ ім. Ігоря Сікорського.



Булашенко А.В. є автором сертифікованих дистанційних курсів:

Дистанційні курси автора

1. **Основи теорії кіл (прискорена форма).**
Сертифікат: Серія ДК № 0044, Протокол № 6 від 30.03.2023 р.
<https://do.ipr.kpi.ua/course/view.php?id=2484>
2. **Основи теорії кіл. Частина 1.**
Сертифікат: Серія ДК № 0051, Протокол № 6 від 30.03.2023 р.
<https://do.ipr.kpi.ua/course/view.php?id=6181>
3. **Основи теорії кіл-2.**
Сертифікат: Серія ДК № 0025, Протокол № 1 від 19.01.2023 р.
<https://do.ipr.kpi.ua/course/view.php?id=6180>
4. **Процеси в лінійних електронних схемах (для всіх форм)**
Сертифікат: Серія ДК № 0045, Протокол № 6 від 30.03.2023 р.
<https://do.ipr.kpi.ua/course/view.php?id=678>.
5. **Основи теорії кіл (заочна форма).**
Сертифікат: Серія ДК № 0365, Протокол № 6 від 20.06.2024 р.
<https://do.ipr.kpi.ua/course/view.php?id=6668>.
6. **Процеси в лінійних електронних схемах (для всіх форм)**
Сертифікат: Серія ДК № 0364, Протокол № 6 від 20.06.2024 р.
<https://do.ipr.kpi.ua/course/view.php?id=7446>.

Булашенко Андрій Васильович є автором понад 50 публікацій у міжнародних наукових журналах і матеріалах конференцій. Результати досліджень оприлюднено в таких виданнях: *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* (Scopus, Web of Science, Великобританія), *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* (Scopus, Web of Science, Великобританія), *Advanced Electromagnetics* (Scopus, Web of Science, Франція), *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications* (Scopus, Бразилія), *Radioelectronics and Communications Systems* (Scopus, США), *Telecommunications and Radio Engineering* (Scopus, США), *Journal of Nano- and Electronic Physics* (Scopus, Україна), *Visnyk NTUU KPI Serii A – Radiotekhnika Radioaparatabuduvannia* (Web of Science, Україна), *Radio Electronics, Computer Science, Control* (Web of Science, Україна), *Space Science and Technology* (Scopus, Україна).

Наукові статті автора

1. Dubrovka F.F., Bulashenko A.V. Multiple reflection method in problem of constructive synthesis of polarizers and phase shifters based on three non-dissipative inhomogeneities in waveguide // *Radioelectronics and Communications Systems*. – 2023. – Vol. 66, no. 4. – pp. 155–172, doi: 10.3103/S0735272722110036 (Scopus, США).
2. Piltyay S.I., Bulashenko A.V., Savenchuk T.V. Three-stepped septum waveguide polarizer in the operating frequency band 7.7-8.1 GHz // *Journal of Nano- and Electronic Physics*. – 2023. – Vol. 15, № 1. – p. 01004-1–01004-5, doi: [https://doi.org/10.21272/jnep.15\(1\).01004](https://doi.org/10.21272/jnep.15(1).01004) (Scopus, фаховий А, Суми, Україна).
3. Bulashenko A., Piltyay S., Polishchuk A., Bulashenko O., Kushnir H., Zabegalov I. Accuracy and agreement of FDTD, FEM and wave matrix methods for the electromagnetic simulation of waveguide polarizers // *Advanced Electromagnetics*. – 2022. – vol. 11, no. 3. – p. 1–9, August 2022. DOI: 10.7716/aem.v11i3.1694. (Scopus, WoS, Франція).
4. Piltyay S., Bulashenko A., Fesyuk I., Bulashenko O. Compact 2-step septulum polarization converters for radars and satellite systems // *Advanced Electromagnetics*. – 2022. - vol. 11, no. 2. – p. 8–14, doi: 10.7716/aem.v11i2.1789. (Scopus, WoS, Франція).
5. S. Piltyay, A. Bulashenko, Y. Kalinichenko, O. Bulashenko, “Electromagnetic performance of waveguide polarizers with sizes obtained by single-mode technique and by trust region optimization // *Advanced Electromagnetics*. – 2022. – vol. 11, no. 3. – p. 34–41, September 2022. DOI: 10.7716/aem.v11i3.1809. (Scopus, WoS, Франція).
6. Piltyay S., Bulashenko A., Shuliak V. Development and optimization of microwave guide polarizers using equivalent network method // *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. – 2022. – Vol. 36. (Scopus, WoS, Великобританія).
7. Piltyay S., Bulashenko A., Sushko O., Bulashenko O., Demchenko I. Analytical modeling and optimization of new Ku-band tunable square waveguide iris-post polarizer // *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*. – 2021. – Vol. 34, № 5. – p. 1–27. (Scopus, WoS, Великобританія).
8. Piltyay S., Bulashenko A., Fesyuk I., Bulashenko O. Comparative analysis of compact satellite polarizers based on a guide with diaphragms // *Advanced Electromagnetics*. – 2021. – Vol. 10, № 2. – p. 44–55. (Scopus, WoS, Франція).
9. Bulashenko A., Piltyay S., Dikhtyaruk I., Bulashenko O. FDTD and wave matrix simulation of adjustable DBS-band waveguide polarizer // *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. – 2022. – Vol. 36. (Scopus, WoS, Великобританія).

10. Bulashenko A., Piltyay S., Bulashenko O. Mathematical model of a square waveguide polarizer with diaphragms // *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*. – 2021. – Vol. 20, № 4. – p. 883–895. (Scopus, Бразилія).
11. Bulashenko A.V., Piltyay S.I., Demchenko I.V. Wave matrix technique for waveguide iris polarizers simulation. Numerical results // *Journal of Nano- and Electronic Physics*. – 2021. – Vol. 13, № 5. – p. 05023-1–05023-6. (Scopus, фаховий А, Суми, Україна).
12. Piltyay S., Bulashenko A., Shuliak V., Bulashenko O. Electromagnetic simulation of new tunable guide polarizers with diaphragms and pins // *Advanced Electromagnetics*. – 2021. – Vol. 10, № 3. – p. 24–30. (Scopus, WoS, Франція)
13. Bulashenko A.V., Piltyay S.I., Dikhtyaruk I.I., Bulashenko O.V. Technique of mathematical synthesis of waveguide iris polarizers // *Journal of Nano- and Electronic Physics*. – 2021. – Vol. 13, № 5. – p. 05024-1–05024-6. (Scopus, фаховий А, Суми, Україна).
14. Dubrovka F.F., Bulashenko A.V., Kuprii A.M., Piltyay S.I. Analytical and numerical method of constructive synthesis of optimal polarizers based on three irises in square waveguide // *Radioelectronics and Communications Systems*. – 2021. – Vol. 64, № 4. – p. 204–215. (Scopus)
15. Piltyay S., Bulashenko A., Kalinichenko Y. Parametric optimization of waveguide polarizer by equivalent network and FEM models // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 2021. – Vol. 80, № 4. – p. 49–74. (Scopus, CIIA).
16. Piltyay S., Bulashenko A., Kalinichenko Y., Bulashenko O. Mathematical model for the development of tunable polarizers with diaphragms and pins // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 2021. – Vol. 80, № 5. – p. 11–27. (Scopus, CIIA).
17. Piltyay S.I., Bulashenko A.V., Demchenko I.V. Analytical synthesis of waveguide iris polarizers // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 2020. – Vol. 79, № 18. – p. 1579–1597. (Scopus, CIIA).
18. Piltyay S.I., Sushko O.Yu., Bulashenko A.V., Demchenko I.V. Compact Ku-band iris polarizers for satellite telecommunication systems // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 2020. – Vol. 79, № 19. – p. 1673–1690. (Scopus, CIIA).
19. Piltyay S.I., Bulashenko A.V., Demchenko I.V. Waveguide iris polarizers for Ku-band satellite antenna feeds // *Journal of Nano- and Electronic Physics*. – 2020. – Vol. 12, № 5. – p. 05024-1–05024-5. (Scopus, фаховий А, Суми, Україна).
20. Bulashenko A.V., Piltyay S.I., Demchenko I.V. Wave matrix technique for waveguide iris polarizers simulation. Theory // *Journal of Nano- and Electronic Physics*. – 2020. – Vol. 12, № 6. – p. 06026-1–06026-5. (Scopus, фаховий А, Суми, Україна).
21. Piltyay S.I., Bulashenko A.V., Herhil Y.Y. Numerical performance of FEM and FDTD methods for the simulation of waveguide polarizers // *Visnyk NTUU KPI, Seriiia – Radiotekhnika Radioaparotobuduvannia*. – 2021, № 84. – p. 11–21. (WoS фаховий А, Київ, Україна).
22. Bulashenko A.V., Piltyay S.I., Kalinichenko Y.I., Zabegalov I.V. Waveguide polarizer for radar and satellite systems // *Visnyk NTUU KPI Seriiia – Radiotekhnika Radioaparotobuduvannia*. – 2021. – Vol. 86. – p. 5–13. (WoS фаховий А, Київ, Україна).
23. Bulashenko A.V., Piltyay S.I. Equivalent microwave circuit technique for waveguide iris polarizers development // *Visnyk NTUU KPI, Seriiia – Radiotekhnika Radioaparotobuduvannia*. – 2020, № 83. – p. 17–28. (WoS, фаховий А, Київ, Україна).
24. Piltyay S., Bulashenko A., Kushnir H., Bulashenko O. Information resources economy in satellite systems based on new microwave polarizers with tunable posts // *Path of Science*. – 2020. – Vol. 6, № 11. – p. 5001–5010. (міжнародний, Словачія)
25. Bulashenko A.V., Piltyay S.I., Demchenko I.V. Simulation of compact polarizers for satellite telecommunication systems with the account of thickness of irises // *KPI Science News*. – 2021. – Vol. 1. – p. 7–15. (фаховий Б, Київ, Україна).

26. Bulashenko A.V., Piltyay S.I., Kalinichenko Ye.I., Bulashenko O.V. Tunable polarizers for X-band radar and telecommunication systems // KPI Science News. – 2021. – Vol. 2. – p. 7–15. (фаховий Б, Київ, Україна).
27. Булашенко А.В., Пільтій С.І., Кушнір Г.С., Булашенко О.В. Хвилевідний поляризатор із трьома діафрагмами для антен супутникових телевізійних систем // Наукоємні технології. – 2021. – Вип. 49, № 1. – с. 39–48. (фаховий Б, Київ, Україна).
28. Пільтій С.І., Булашенко А.В., Фесюк І.В., Булашенко О.В. Компактний перетворювач поляризації для супутникових антенних систем // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2021. – № 1. – с. 86–98. (фаховий Б, Черкаси, Україна).
29. Забегалов І.В., Шарпан Я.Е., Діхтярук І.І., Пільтій С.І., Булашенко А.В. Хвилевідна система живлення рупорної антени з коловою поляризацією // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2021. – № 1. – с. 99–113. (фаховий Б, Черкаси, Україна).
30. Дубровка Ф.Ф., Булашенко А.В., Куприй А.М., Пільтій С.І. Аналітико-численний метод конструктивного синтезу оптимальних поляризаторів на основі трьох діафрагм в квадратному хвилеводі // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. — 2021. – Вып. 64, № 4. – с. 234–246. (фаховий А, Київ, Україна).
31. Забегалов І.В., Шуляк В.В., Пільтій С.І., Булашенко А.В., Булашенко О.В. Хвилеводно-щілинний фідерний тракт антен з коловою поляризацією // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2021. – № 3. – с. 105–112. (фаховий Б, Вінниця, Україна).
32. Булашенко А.В., Пільтій С.І., Калініченко Є.І., Булашенко О.В. Регульований поляризатор на основі квадратного хвилеводу із діафрагмами та штирями // Технічна інженерія. – 2020. – Вип. 86, № 2. – с. 108–116. (фаховий Б, Житомир, Україна).
33. Булашенко А.В., Пільтій С.І., Кушнір Г.С., Булашенко О.В. Компактний хвилевідний поляризатор із трьома протифазними штирями // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2020. – № 5. – с. 97–104. (фаховий Б, Вінниця, Україна).
34. Пільтій С.І., Булашенко А.В., Калініченко Є.І., Булашенко О.В. Високоєфективний хвилевідний поляризатор для супутникових інформаційних систем // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2020. – № 4. – с. 14–26. (фаховий Б, Черкаси, Україна).
35. Булашенко А.В., Пільтій С.І., Демченко І.В. Оптимізація поляризатора на основі квадратного хвилеводу з діафрагмами // Наукоємні технології. – 2020. – Вип. 47, № 3. – с. 287–297. (фаховий Б, Київ, Україна).
36. Булашенко А.В. Система вивантаження даних за технологією D2D у не ліцензованому діапазоні частот у складі системи зв'язку 5G / А.В. Булашенко // Технічна інженерія. – 2020. – Вип. 86, № 2. – с. 103–107. (фаховий Б, Житомир, Україна).
37. Булашенко А. В. Оцінка зв'язності D2D комунікацій у мережах 5G / А.В. Булашенко // Вісник НТУУ «КПІ». Серія Радіотехніка, Радіоапаратобудування. – 2020 – № 81. – С. 21-29. (WoS, фаховий А, Київ, Україна).
38. Bulashenko A.V. Combined criterion for the choice of routing based on D2D technology / A.V. Bulashenko // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2021. – Vol. 1. – pp. 7–13. (WoS, фаховий А, Запоріжжя, Україна).

Наукові тези конференцій автора

1. S. Piltyay, A. Buashenko, V. Potapenko, A. Shkinder, “Polarization and dispersion properties of electromagnetic waves propagation and their applications in radio engineering, information systems and telecommunications,” *2023 IEEE 6th International Conference on Information and Telecommunication technologies and radio electronics (UkrMiCo 2023)*, Kyiv, Ukraine, 2023, doi: 10.1109/UkrMiCo61577.2023.10380378. (Scopus).

2. S. Piltyay, A. Buashenko, A. Shkinder, V. Potapenko, “Electromagnetic performance and application of microwave ferromagnetic devices,” *2023 IEEE 6th International Conference on Information and Telecommunication technologies and radio electronics (UkrMiCo 2023)*, Kyiv, Ukraine, 2023, pp. 203-208, doi: doi: 10.1109/UkrMiCo61577.2023.10380375. (Scopus).
3. L. Vesperum, A. Buashenko, S. Piltyay, V. Potapenko, H. Matkovska, V. Dmytrenko, “FEM, FDTD and Wave Matrix Methods Application for Modeling of Phase Shifting Devices Based on a Waveguide with Diaphragms,” *2022 IEEE 2nd Ukrainian Microwave Week (UkrMW)*, Kyiv, Ukraine, November 2022. DOI: 10.1109/UkrMW58013.2022.10037150. (Scopus)
4. M. Yajing, S. Piltyay, A. Buashenko, A. Shkinder, A. Saranchuk, Y. Kalinichenko, O. Bulashenko, V. Dmytrenko, T. Shtyk, “Compact septum waveguide polarizer for X-band satellite communication systems,” *2022 IEEE 41st International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*, Kyiv, Ukraine, October 2022. DOI: 10.1109/ELNANO54667.2022.9927085. (Scopus).
5. Y. Haoji, S. Piltyay, A. Buashenko, V. Dmytrenko, O. Bulashenko, T. Shtyk, “Rectangular waveguide filters for C-band satellite antenna systems,” *2022 IEEE 41st International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*, Kyiv, Ukraine, October 2022. DOI: 10.1109/ELNANO54667.2022.9926754. (Scopus).
6. M. Yajing, S. Piltyay, A. Buashenko, A. Saranhuk, V. Dmytrenko et al., “Microwave X-band two-steps septum polarizer for satellite antenna systems,” *IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*, Lviv-Slavske, Ukraine, February 2022, pp. 210–215. DOI: 10.1109/TCSET55632.2022.9767018. (Scopus)
7. K. Benlahdar, S. Piltyay, A. Buasheno, T. Shtyk, et al., “Methods of experimental measurement of scattering and transmission parameters in microwave frequency bands,” *IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*, Lviv-Slavske, Ukraine, February 2022, pp. 228–232. DOI: 10.1109/TCSET55632.2022.9766990. (Scopus)
8. D. Onoguekhian-Habert, S. Pilltyay, A. Buashenko, D. Biletskkyi et al., “High-sensitive phase unbalance analysis in the microwave frequency range using e-plane waveguide T-junction,” *IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*, Lviv-Slavske, Ukraine, February 2022, pp. 271 – 276. DOI: 10.1109/TCSET55632.2022.9767013. (Scopus)
9. I. Mariuts et al., “Features of information and technological security for the defense of modern Ukraine in the 21st century,” *IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*, Lviv-Slavske, Ukraine, February 2022, pp. 281–286. DOI: 10.1109/TCSET55632.2022.9766962. (Scopus)
10. H. Kushnir, A. Bulashenko, S. Piltyay, and O. Bulashenko, “Mutipe refections method for diaphragms poarizers deveopment”, *IEEE 8th International Conference on Problems of Infocommunications, Science and Technoogy (PIC S&T)*, Kharkkiv, Ukraine, Otober 2021. (Scopus)
11. O. Bykovskiy, S. Piltyay, A. Bulashenko, and O. Kornieva, “Microwave square waveguide polarization converter with diagonal corner diaphragms”, *IEEE International Conference on Information and Teecommunication Technologies and Radio Electronic (UrMiCo)*, Odesa, Ukraine, November. (Scopus)
12. Y. Herhil, S. Piltyay, A. Bulashenko, and O. Kornieva, “Electromagnetic waves propagation in ferromagnetic materials and their application for nonreciprocal microwave devies”, *IEEE International Conference on Information and Teecommunication Technologies and Radio Electronic (UrMiCo)*, Odesa, Ukraine, November. (Scopus)
13. A. V. Bulashenko, S. I. Piltyay, and I. V. Demchenko, “Energy efficiency of the D2D direct connection system in 5G networks”, *IEEE International Conference on Problems of Infocommunications. Science and Technology*, Kharkiv, Ukraine, 2020, pp. 537–542. (Scopus)

14. S. I. Piltyay, A. V. Bulashenko, and I. V. Demchenko, "Compact polarizers for satellite information systems", *IEEE International Conference on Problems of Infocommunications. Science and Technology*, Kharkiv, Ukraine, October 2020, pp. 557–562. (Scopus)
15. A. V. Bulashenko, S. I. Piltyay, and I. V. Demchenko, "Analytical technique for iris polarizers development", *IEEE International Conference on Problems of Infocommunications. Science and Technology*, Kharkiv, Ukraine, October 2020, pp. 593–598. (Scopus)
16. S. I. Piltyay, A. V. Bulashenko, and I. V. Demchenko, "Wireless sensor network connectivity in heterogeneous 5G mobile systems", *IEEE International Conference on Problems of Infocommunications. Science and Technology*, Kharkiv, Ukraine, 2020, pp. 625–630. (Scopus)
17. A. Bulashenko, S. Piltyay, A. Polishchuk, O. Bulashenko, "New traffic model of M2M Technology in 5G wireless sensor networks", *IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory*, Kyiv, Ukraine, November 2020, pp. 125–131. (Scopus)
18. A. Bulashenko, S. Piltyay, Ye. Kalinichenko, and O. Bulashenko, "Mathematical modeling of iris-post sections for waveguide filters, phase shifters and polarizers", *IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory*, Kyiv, Ukraine, November 2020, pp. 330–336. (Scopus)
19. S. Piltyay, A. Bulashenko, H. Kushnir, and O. Bulashenko, "New tunable iris-post square waveguide polarizers for satellite information systems", *IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory*, Kyiv, Ukraine, November 2020, pp. 342–348. (Scopus)
20. S. Piltyay, A. Bulashenko, Ye. Herhil, and O. Bulashenko, "FDTD and FEM simulation of microwave waveguide polarizers", *IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory*, Kyiv, Ukraine, November 2020, pp. 357–363. (Scopus)
21. A. Polishchuk, A. Bulashenko, S. Piltyay, O. Bulashenko, I. Zabegalov, "Compact posts-based waveguide polarizer for satellite communications and radar systems", *IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering*, Lviv, Ukraine, August 2021, pp. 78–83. (Scopus)
22. Y. Kalinichenko, A. Bulashenko, S. Piltyay, O. Bulashenko, "Adjustable iris-post waveguide polarizer for Ku-band satellite uplink systems", *IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering*, Lviv, Ukraine, August 2021, pp. 40–45. (Scopus)
23. I. Fesyuk, S. Piltyay, A. Bulashenko, O. Bulashenko, "Waveguide polarizer for radar systems of 2 cm wavelength range", *IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering*, Lviv, Ukraine, August 2021, pp. 15–20. (Scopus)
24. Y. Herhil, S. Piltyay, A. Bulashenko, O. Bulashenko, "Characteristic impedances of rectangular and circular waveguides for fundamental modes", *IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering*, Lviv, Ukraine, August 2021, pp. 46–51. (Scopus)
25. V. Shuliak, S. Piltyay, A. Bulashenko, I. Zabegalov, O. Bulashenko, "Modern microwave polarizers and their electromagnetic characteristics", *IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering*, Lviv, Ukraine, August 2021, pp. 21–26. (Scopus)
26. A. Bulashenko, S. Piltyay, O. Bykovskiy, O. Bulashenko, "Synthesis of waveguide diaphragm polarizers using wave matrix approach", *IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering*, Lviv, Ukraine, August 2021, pp. 111–116. (Scopus)
27. A.V. Bulashenko, S.I. Piltyay, Ye.I. Kalinichenko, "Post-iris waveguide polarizer", *IX International Conference "Radioengineering fields, signals, equipment and systems"*, Kyiv, Ukraine, November 16–22, 2020, pp. 28–31.
28. S.I. Piltyay, A.V. Bulashenko, H.S. Kushnir, "Microwave waveguide polarizer with 3 posts", *IX International Conference "Radioengineering fields, signals, equipment and systems"*, Kyiv, Ukraine, November 16–22, 2020, pp. 35–38.