УДК 519.2

П.О. Єндовицький

ТОЧНА АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА РОЗМІРУ ГРУПИ В УЗАГАЛЬНЕННІ ПАРАДОКСУ ДНІВ НАРОДЖЕНЬ

Вступ

Як правило, під парадоксом днів народжень розуміється наступна ймовірнісна схема [1, 2]. Нехай є група з n чоловік ($n \le 365$). Будемо вважати, що день народження кожної людини з групи припадає з рівною ймовірністю на один із 365 днів. Нехай ймовірність того, що в групі знайдуться принаймні дві людини, в яких збігаються дні народження, дорівнює $P(n)$. Тоді розмір групи, де з ймовірністю $p = 1$ знайдуться принаймні дві людини з однаковими днями народження, дорівнює 366, а для $p < 1$ розмір групи буде значно меншим, наприклад $P(23) = 0,507...$ Парадокс полягає в уявному протиріччі малого розміру групи при заданому $p \in (0;1)$ з очікуваним розміром.

Оцінки ймовірностей і розміру групи в задачі про дні народження мають важливі застосування при побудові хеш-функцій, у кодуванні, у криптоаналізі та при розв'язанні систем рівнянь над скінченними алгебричними структурами.

Постановка задачі

Метою даної статті є встановлення асимптотичної поведінки розміру групи в поліноміальній схемі розміщення частинок по комірках, тобто при незалежному, але не обов'язково рівноймовірному розміщенні частинок по комірках.

Основні результати

Сформулюємо задачу про розмір групи в парадоксі днів народжень у загальному випадку (у термінах розміщення частинок по комірках). Нехай задано числа $m, n \in N$; тут m – число комірок (в парадоксі $m = 365$); n – число частинок (в парадоксі n – розмір групи). Вважаємо, що кожна частинка розміщується незалежно від інших, а ймовірності потрапляння в комірки дорівнюють $p_1, ..., p_m$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Нехай також $P_m(n)$ – ймовірність, що при розміщенні n частинок по m комірках принаймні дві частинки потраплять в одну комірку. Позначимо $Q_m(n) = Q_m(n, p_1, ..., p_m) = 1 - P_m(n)$ – ймовірність, що всі частинки потраплять у різні комірки. Тоді матимемо

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_m(n) \frac{x^n}{n!} = (1 + p_1 x)...(1 + p_m x) = f(x). \quad (1)$$

Звідси отримаємо

$$Q(n) = f^{(n)}(0) \quad (2)$$

(для спрощення запису іноді будемо писати $Q(n)$ і $P(n)$ замість $Q_m(n)$ і $P_m(n)$). Тоді $P_m(n) \uparrow$ – зростає за n при фіксованому m, $P(0) = P(1) = 0$, $P(m+1) = 1$.

Визначимо тепер за заданим числом $p \in (0;1)$ натуральне число $n = n(m) \in [1; m+1]$, яке залежить від m і p, з такої умови:

$$P(n-1) < p \le P(n), \quad (3)$$

тобто $n(m)$ – це мінімальне число n частинок, таке, що при розміщенні n частинок у m комірках ймовірність потрапляння принаймні двох частинок в одну комірку не менше p. Наприклад, якщо $p = \frac{1}{2}$, $m = 365$, $p_1 = ... = p_{365} = \frac{1}{365}$, то $n(365) = 23$, оскільки $P(22) < \frac{1}{2} < P(23)$.

Розглянемо питання про асимптотичну поведінку $n(m)$. Відомий [3] такий результат про мінімально необхідну кількість частинок (розмір групи) $n(m)$:

$$n(m) = \sqrt{\frac{2am}{T_2(m)}} + o(\sqrt{m}),\ m \to \infty, \quad (4)$$

де $a = -\ln(1-p) > 0$; $T_2(m) = m(p_1^2 + ... + p_m^2)$ за умови $T_2(m) = O(1)$, $m \to \infty$.

Метою даної статті є доведення теореми, яка істотно посилює цей результат.

Теорема 1. Нехай задано деяку неперервну функцію $p(x)$, таку, що $p(x) \in C([0;1])$, $p(x) \ge 0$, $\int_0^1 p(x)dx = 1$, і нехай $\forall m \ge 1$ $p_i = p_i(m) =$

$= \int\limits_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} p(x)dx$, $i = \overline{1,m}$. Позначимо цю групу умов для ймовірностей у поліноміальній схемі (*). Тоді розмір групи $n(m)$ з (3) становитиме

$$n(m) = \sqrt{\frac{2am}{T_2(m)}} + \frac{1}{2} + a\left(\frac{2}{3}\frac{T_3(m)}{T_2(m)^2} - 1\right) + \gamma(m), \quad (5)$$

де $a = -\ln(1-p)$; $T_k(m) = m^{k-1}(p_1^k + ... + p_m^k)$, $k \geq 1$. Послідовність $\{\gamma(m), m \geq 1\}$ при цьому буде обмежена і $\underline{\lim\limits_{m\to\infty}} \gamma(m) = 0$, $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \gamma(m) = 1$.

***Зауваження* 1.** В умовах теореми 1 виконується таке співвідношення:

$$\forall k \geq 1 \quad \lim_{m\to\infty} T_k(m) = M_k = \int_0^1 p(x)^k dx. \quad (6)$$

При цьому замінити в (5) значення $T_2(m)$ на M_2 не можна, оскільки треба враховувати швидкість збіжності $T_2(m)$ до M_2. Якщо додатково припустити, що $p(x) \in C^{(2)}([0;1])$, то можна показати, що

$$\lim_{m\to\infty} m^2(M_2 - T_2(m)) = \frac{1}{12}\int_0^1 p'(x)^2 dx, \quad (7)$$

і тоді з (5) отримаємо теорему 2.

Теорема 2. Нехай у теоремі 1 виконується додаткова умова $p(x) \in C^{(2)}([0;1])$. Тоді маємо

$$n(m) = \sqrt{\frac{2am}{M_2}} + \frac{1}{2} + a\left(\frac{2}{3}\frac{M_3}{M_2^2} - 1\right) + \gamma(m); \quad (8)$$

позначення залишаються такі ж, як і в (5), (6).

***Зауваження* 2.** Умова (*) в теоремі 1 є аналогом класичної умови регулярності [3]:

$$\exists C_1, C_2 > 0 \ \ \forall m \geq 1 : \frac{C_1}{m} \leq \min_{1\leq i\leq m} p_i \leq \max_{1\leq i\leq m} p_i \leq \frac{C_2}{m}. \quad (9)$$

З умови (*) випливає друга нерівність в (9), але перша при цьому може не виконуватися.

Регулярні схеми (9) є "близькими" до рівномірної схеми (коли в (*) $p(x) \equiv 1$), а результати, отримані в рівномірному випадку, можуть бути узагальнені і на регулярний випадок. Наприклад, формула (5) є узагальненням аналогічної формули для рівномірного випадку [4], коли $\forall k \geq 1$, $\forall m \geq 1$ $T_k(m) = M_k = 1$.

***Зауваження* 3.** Оскільки $\forall m \geq 1$ $1 \leq T_2(m) \leq M_2$ (за нерівністю Коші–Буняковського), то за умови (*) з (5) отримаємо, що $n(m) = O(\sqrt{m})$, $m \to \infty$, тобто в даному варіанті регулярної схеми зберігається той самий порядок росту $n(m)$, як і в рівномірному випадку.

Доведення теореми 1. З (1) маємо

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{1 + p_i x} = h(x),$$

тобто

$$f'(x) \equiv f(x)\,h(x),$$

$$f^{(n+1)}(x) = (f(x)\,h(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x)\,h^{(k)}(x).$$

Але

$$h^{(k)}(x) = (-1)^k k!\left(\frac{p_1^{k+1}}{(1+p_1x)^{k+1}} + ... + \frac{p_m^{k+1}}{(1+p_mx)^{k+1}}\right),$$

$$h^{(k)}(0) = (-1)^k k!\,(p_1^{k+1} + ... + p_m^{k+1}).$$

З (2) отримаємо

$$Q(n+1) = f^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^n C_n^k h^{(k)}(0) f^{(n-k)}(0) =$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k!(p_1^{k+1} + ... + p_m^{k+1}) Q(n-k) =$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n)_k}{m^k} Q(n-k) T_{k+1}$$

(для спрощення запису іноді будемо писати T_k замість $T_k(m)$). Таким чином, дістанемо

$$Q(n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n)_k}{m^k} Q(n-k) T_{k+1}(m). \quad (10)$$

Співвідношення (10) допоможе в подальшому визначити асимптотичну поведінку $Q(n)$.

Доведемо таку лему.

Лема 1. Ряд (10) є обгортаючим, тобто

$$\forall t \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{2t+1} (-1)^k \frac{(n)_k}{m^k} Q(n-k) T_{k+1} \leq Q(n+1) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{2t} (-1)^k \frac{(n)_k}{m^k} Q(n-k) T_{k+1}$$

або

$$Q(n+1) = \sum_{k=0}^{t-1} (-1)^k \frac{(n)_k}{m^k} Q(n-k) T_{k+1} +$$

$$+\theta(-1)^t\frac{(n)_t}{m^t}Q(n-t)T_{t+1},\ \theta\in[0;1]. \qquad (11)$$

Доведення. Для доведення (11) достатньо довести формулу

$$\forall t\ge 1\quad Q(n+1)-\sum_{k=0}^{t-1}(-1)^k(n)_kQ(n-k)S_{k+1}=$$

$$=(-1)^t(n)_t\sum_{i_1,\dots,i_{n+1-t}}p_{i_1}\dots p_{i_{n-t}}p_{i_{n+1-t}}^{t+1}; \qquad (11a)$$

тут і далі сумування ведеться по всіх невпорядкованих наборах $(i_1,\dots,i_n)$ з попарно нерівними компонентами. Доведемо рівність (11a) індукцією по t. Для $t=1$ маємо

$$Q(n+1)-Q(n)=\sum_{i_1,\dots,i_{n+1}}p_{i_1}\dots p_{i_{n+1}}-\sum_{i_1,\dots,i_n}p_{i_1}\dots p_{i_n}=$$

$$=\sum_{i_1,\dots,i_n}p_{i_1}\dots p_{i_n}\sum_{i_{n+1}\notin\{i_1,\dots,i_n\}}p_{i_{n+1}}-\sum_{i_1,\dots,i_n}p_{i_1}\dots p_{i_n}=$$

$$=-\sum_{i_1,\dots,i_n}p_{i_1}\dots p_{i_n}\left(1-\sum_{i_{n+1}\notin\{i_1,\dots,i_n\}}p_{i_{n+1}}\right)=$$

$$=-\sum_{i_1,\dots,i_n}p_{i_1}\dots p_{i_n}(p_{i_1}+\dots+p_{i_n})=-\sum_{i_1,\dots,i_n}(p_{i_1}^2\dots p_{i_n}+$$

$$+\dots+p_{i_1}\dots p_{i_n}^2)=-\sum_{i_1,\dots,i_n}p_{i_1}\dots p_{i_n}\left(1-\sum_{i_{n+1}\notin\{i_1,\dots,i_n\}}p_{i_{n+1}}\right)=$$

$$=-\sum_{i_1,\dots,i_n}p_{i_1}\dots p_{i_n}(p_{i_1}+\dots+p_{i_n})=$$

$$=-\sum_{i_1,\dots,i_n}(p_{i_1}^2\dots p_{i_n}+\dots+p_{i_1}\dots p_{i_n}^2)=-n\sum_{i_1,\dots,i_n}p_{i_1}\dots p_{i_{n-1}}p_{i_n}^2.$$

Формула (11a) доведена для $t=1$. Індукційний перехід відбувається аналогічно. Якщо (11a) вірна для $j=t$, то для $j=t+1$ маємо

$$Q(n+1)-\sum_{k=0}^{t}(-1)^k(n)_kQ(n-k)S_{k+1}=$$

$$=Q(n+1)-\sum_{k=0}^{t-1}(-1)^k(n)_kQ(n-k)S_{k+1}-(-1)^t(n)_t\times$$

$$\times Q(n-t)S_{t+1}=(-1)^t(n)_t\sum_{i_1,\dots,i_{n+1-t}}p_{i_1}\dots p_{i_{n-t}}p_{i_{n+1-t}}^{t+1}-$$

$$-(-1)^t(n)_t\sum_{i_1,\dots,i_{n-t}}p_{i_1}\dots p_{i_{n-t}}\sum_{i=1}^{m}p_i^{t+1}=$$

$$=(-1)^{t+1}(n)_t\sum_{i_1,\dots,i_{n-t}}p_{i_1}\dots p_{i_{n-t}}(p_{i_1}^{t+1}+\dots+p_{i_{n-t}}^{t+1})=$$

$$=(-1)^{t+1}(n)_t(n-t)\sum_{i_1,\dots,i_{n-t}}p_{i_1}\dots p_{i_{n-1-t}}p_{i_{n-t}}^{t+2}=$$

$$=(-1)^{t+1}(n)_{t+1}\sum_{i_1,\dots,i_{n-t}}p_{i_1}\dots p_{i_{n-1-t}}p_{i_{n-t}}^{t+2}.$$

Формулу (11a) і лему 1 доведено.

Нам знадобиться також така лема. Позначимо $Q_0(n)=Q\left(n,\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}\right)$ і $n_0(m)$ відповідно ймовірність і розмір групи (див. (1) і (3)) у рівномірному випадку.

Лема 2. Виконується нерівність $Q(n)=Q(n,p_1,\dots,p_m)\le Q\left(n,\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}\right)=\frac{(m)_n}{m^n}$ (тобто ймовірність відсутності комірки, що містить принаймні дві частинки, досягає максимального значення при рівноймовірному виборі комірок).

Доведення. Лему можна довести через пошук умовного екстремуму функції $Q(n,p_1,\dots,p_m)=\sum_{i_1,\dots,i_n}p_{i_1}\dots p_{i_n}$ на множині $D=\{(p_1,\dots,p_n):p_1+\dots+p_n=1\}$.

Тепер з леми 2 та умови (3) випливає, що $n(m)\le n_0(m)$, тобто при заданому m розмір групи буде найбільшим у рівномірному випадку. Але відомо [4], що $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{n_0(m)}{m}=0$. Отже, й

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(m)}{m}=0. \qquad (12)$$

Покажемо, що

$$\lim_{m\to\infty}n(m)=+\infty. \qquad (13)$$

З (11) маємо

$$Q(k+1)=Q(k)-\theta_{k-1}Q(k-1)\frac{k}{m}T_2(m),\ \theta_{k-1}\in(0;1).$$

Звідси при фіксованому k отримаємо, що $Q_m(k+1)=Q_m(k)+o(1),\ m\to\infty$, тобто для фіксованого k маємо

$$Q_m(k)=Q_m(1)+o(1)=1+o(1),\ m\to\infty. \qquad (14)$$

Якщо тепер $\exists\{m_k:k\ge1\},\ M\ge1\ \forall k\ge1:\ n(m_k)<M$, то з умови (3) і співвідношення (14) дістанемо

$$1-p\ge Q_{m_k}(n(m_k))>Q_{m_k}(M)\to1,\ k\to\infty.$$

Отримали протиріччя. Отже, $\lim\limits_{m\to\infty}n(m)=+\infty$.

Співвідношення (12) і (13) дають деяку інформацію про поведінку $n(m), m \to \infty$, яка допоможе одержати співвідношення (5) і (8).

З (11) маємо

$$Q(n+1) = Q(n) - \frac{n}{m}Q(n-1)T_2 +$$

$$+ \theta_{n-2}\frac{n(n-1)}{m^2}Q(n-2)T_3,\ \theta_{n-2} \in (0;1), \qquad (15)$$

$$Q(n) = Q(n-1) - \mu_{n-2}\frac{n-1}{m}Q(n-2)T_2,$$

$$\mu_{n-2} \in (0;1). \qquad (16)$$

Помножимо (16) на $\frac{n}{m}T_2$ і додамо до (15). Отримаємо

$$Q(n+1) = Q(n)\left(1 - \frac{n}{m}T_2\right) +$$

$$+\frac{n(n-1)}{m^2}Q(n-2)(\theta_{n-2}T_3 - \mu_{n-2}T_2^2)$$

або

$$Q(n+1) = Q(n)\left(1 - \frac{n}{m}T_2\right) + \kappa_n C_p\frac{n^2}{m^2},\ |\kappa_n| < 1, \qquad (17)$$

де константа C_p визначається тільки функцією $p(x)$, наприклад $C_p = M_3 + M_2^2$. Звідси

$$\ln Q(n+1) = \ln\left(Q(n)\left(1 - \frac{n}{m}T_2\right) + \kappa_n C_p\frac{n^2}{m^2}\right) =$$

$$= \ln Q(n)\left(1 - \frac{n}{m}T_2\right) + \ln\left(1 + \frac{\kappa_n C_p}{Q(n)\left(1 - \frac{n}{m}T_2\right)}\frac{n^2}{m^2}\right),$$

$$\ln Q(n+1) - \ln Q(n) =$$

$$= \ln\left(1 - \frac{n}{m}T_2\right) + \ln\left(1 + \frac{\kappa_n C_p}{Q(n)\left(1 - \frac{n}{m}T_2\right)}\frac{n^2}{m^2}\right), \qquad (18)$$

$$\ln Q(n+1) = \sum_{k=0}^{n}(\ln Q(k+1) - \ln Q(k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1 - \frac{k}{m}T_2\right) + \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1 + \frac{\kappa_n C_p}{Q(k)\left(1 - \frac{k}{m}T_2\right)}\frac{k^2}{m^2}\right).$$

Але з допомогою (12) і (13) можна показати, що

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1 + \frac{\kappa_n C_p}{Q(k)\left(1 - \frac{k}{m}T_2\right)}\frac{k^2}{m^2}\right) = O\left(\frac{n^3}{m^2}\right) =$$

$$= o\left(\frac{n^2}{m}\right),\ m \to \infty,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1 - \frac{k}{m}T_2\right) = -\frac{n(n+1)}{2m}T_2 + O\left(\frac{n^3}{m^2}\right) =$$

$$= -\frac{n^2}{2m}T_2 + o\left(\frac{n^2}{m}\right),\ m \to \infty.$$

Звідси отримаємо

$$\ln Q(n) = -\frac{n^2}{2m}T_2 + o\left(\frac{n^2}{m}\right),\ m \to \infty. \qquad (19)$$

Оцінимо різницю між $\ln Q(n)$ і $-a$. З (3) і (18) маємо

$$0 \le \ln Q(n) + a \le \ln Q(n) - \ln Q(n+1) =$$

$$= \frac{n}{m}T_2 + O\left(\frac{n^2}{m^2}\right),\ m \to \infty. \qquad (20)$$

Тепер з (19) і (20) отримуємо, що

$$a = \frac{n^2}{2m}T_2 + o\left(\frac{n^2}{m}\right),\ m \to \infty,$$

звідки матимемо

$$n(m) = \sqrt{\frac{2am}{T_2(m)}} + o(\sqrt{m}),\ m \to \infty. \qquad (21)$$

Отже, отримали перший доданок у формулі (5). Для того щоб дістати другий доданок, запишемо аналог рівності (15)

$$Q(n+1) = Q(n) - \frac{n}{m}Q(n-1)T_2 +$$

$$+\frac{n(n-1)}{m^2}Q(n-2)T_3 + \theta_{n-3}\frac{n(n-1)(n-2)}{m^3}\times$$

$$\times Q(n-3)T_4,\ \theta_{n-3} \in (0;1), \qquad (22)$$

і з нього отримаємо аналог рівності (19):

$$\ln Q(n) = -\frac{n^2}{2m}T_2 + \frac{n}{2m}T_2 +$$

$$+\frac{n^3}{3m^2}\left(T_3-\frac{3}{2}T_2^2\right)+O\left(\frac{n^2}{m^2}\right),\ m\to\infty. \qquad (23)$$

Тепер з (23), (21) і (20) отримаємо формулу (5). Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 4.** Формули (5) і (8) дають добре асимптотичне наближення для $n(m)$, оскільки $\overline{\lim}\,\gamma(m)-\underline{\lim}\,\gamma(m)=1$, тобто відрізок

$$\left(\sqrt{\frac{2am}{M_2}}+\frac{1}{2}+a\left(\frac{2}{3}\frac{M_3}{M_2^2}-1\right)+\underline{\lim_{m\to\infty}}\,\gamma(m);\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{2am}{M_2}}+\frac{1}{2}+a\left(\frac{2}{3}\frac{M_3}{M_2^2}-1\right)+\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\gamma(m)\right)$$

містить не більше, ніж одну цілу точку, яку можна розглядати як наближення для $n(m)$.

Приклад. Нехай у теоремі 1 $m=10^6$, $p=1/2$, $p_0(x)\equiv 1$, $p_1(x)=2x$, $x\in[0;1]$. Позначимо розміри групи в обох випадках $n_0(m)$, $n_1(m)$. Тоді з формули (8) матимемо такі асимптотичні наближення:

$$n_0(m)=1178,\ n_1(m)=1020.$$

Відзначимо, що $n_0(m)\ge n_1(m)$, як і має бути (див. міркування після леми 2).

Висновки

Формули (5) і (8) дають вираз для розміру групи в парадоксі днів народжень у випадку нерівноймовірного розподілу частинок по комірках. Наведені формули можна застосувати в статистиці: з їх допомогою можна будувати критичні області в різноманітних задачах [5, 6] (наприклад, для вирішення питання, чи є вибірка рівномірно розподіленою). Також ці результати можна застосувати в криптографії для оцінювання ймовірності колізії хеш-функцій і трудомісткості побудови колізій [7].

П.А. Ендовицкий

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РАЗМЕРА ГРУППЫ В ОБОБЩЕНИИ ПАРАДОКСА ДНЕЙ РОЖДЕНИЙ

Доказана теорема об асимптотическом поведении размера группы в парадоксе дней рождений. В теореме даны асимптотически неулучшаемые оценки для размера группы в случае неравновероятного и независимого размещения частиц по ячейках.

P.O. Yendovitskij

EXACT ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF THE GROUP SIZE IN GENERALIZATION OF BIRTHDAY PARADOX

This paper aims to prove the theorem on asymptotic behavior of a group size in the birthday paradox. In fact, the theorem presents asymptotically imperfect estimates for the group size in case of non-uniform and independent particle's cell occupancy.

1. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576 с.
2. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
3. *Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Случайные размещения. – М.: Наука, 1976. – 224 с.
4. *Ендовицкий П.А.* Уточнение асимптотической аппроксимации размера группы в парадоксе дней рождений // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 3. – С. 185–188.
5. *Иванов В.А., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Дискретные задачи в теории вероятностей // Теория вероятностей. Мат. статистика. Теорет. кибернетика. Т. 22 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). – М., 1984. – С. 3–61.
6. *Good I.* Saddle-point methods for the multinomial distribution // Ann. of math. statistics. – 1957. – **28**, N 4. – P. 861–881.
7. *Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В.* Основы криптографии. – М.: Гелиос АРВ, 2001. – 480 с.

Рекомендована Радою
Фізико-технічного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
31 травня 2010 року